Eine Abfolge von Blockuniversen?

Harald Rieder

10. März 2022

Inhaltsverzeichnis

Motivation

Das Messproblem der Quantenmechanik entsteht aus der Vorstellung einer stetigen Entwicklung von mathematischen Größen in der als absolut angesehen gemeinsamen Zeit in Verbindung mit der Erfahrung, dass Kenntnis über das durch die mathematischen Größen beschriebene Quantending nur dann erlangt werden kann, wenn sich dabei dessen Zustand unstetig ändert. Dadurch sind zu jedem Zeitpunkt 2 verschiedene sich daran anschließende Arten von Zukünften möglich und niemand kann sagen, wann oder warum die eine oder die andere gewählt wird.

Dieses Paradoxon hat schon die besten Köpfe herausgefordert und der ein oder andere dachte sich, eine Lösung zu haben. Mitunter taucht die Denke auf, dass verschiedene Sichten auf die Quantenmechanik möglich seien, so genannte „Interpretationen der Quantenmechanik“, die am Ende doch nur eine Frage des Geschmacks seien. Wir werden hier diesen Weg nicht gehen. Statt dessen soll das Paradoxon dadurch aufgelöst werden, dass zu jedem Zeitpunkt nur eine Art von Zukunft möglich ist. Anstatt an der Vorstellung eines Zeitparameters, von dem Geschehen stetig abhängt, festzuhalten, werfen wir diese Vorstellung komplett über Bord. Es gibt einige gute Gründe, es auf diese Art zu versuchen:

1. Unterhalb der Planck-Zeit kann es keine stetige Zeitentwicklung mehr geben.

2. Eine Propagation des Geschehens durch lineare Operatoren, wie sie für die sich stetig anschließende Zukunft im Modell geschieht, treibt das Weltgeschehen eben *linear* weiter. Man kann schwerlich glauben, dass dadurch irgend etwas wie Lebendigkeit erfolgreich modelliert werden kann. Aus der klassischen Chaos-Theorie haben wir gelernt, dass nur eine nichtlineare Dynamik zu etwas führt, dass uns an Leben erinnert. Die unstetig sich anschließende Zukunft liefert uns dagegen eine nichtlineare Dynamik.
3. Um Kenntnis über ein Quantending zu erlangen ist ein Verlassen der stetigen Entwicklung notwendig. Die Dekohärenztheorie kann erklären, wie Information aus einem Quantending in seine Umgebung fließt unter der Annahme einer gemeinsamen stetigen Entwicklung. Doch wenn Kenntnis über Quantending und/oder Umgebung erlangt werden soll, ist ein unstetiger Schritt notwendig. Das *problem of outcomes* wird durch die Dekoränztheorie nicht gelöst, und das ist das eigentliche Paradoxon.
4. Eine komplett neue Dynamik könnte erfunden werden. Das erscheint aber schwieriger, als einfach die Hälfte der Dynamik wegzuwerfen.

Die Quantenmechanik liefert uns statistische Größen: Wahrscheinlichkeiten für Ereignisse. Wir haben gelernt, wie man Empfindungen mit den Ereignissen zu verknüpfen hat, die das mathematische Modell hergibt. Dabei hat sich herausgestellt, dass diese Theorie Häufigkeiten und Mittelwerte teilweise erschreckend genau liefern kann. Wenn die Hälfte der Dynamik über Bord geworfen werden soll, dann müssen dennoch die statistischen Aussagen der Theorie im experimentell gesteckten Rahmen erhalten bleiben. Ob dies überhaupt möglich ist, soll hier untersucht werden.

Die unstetige Dynamik hat die Eigenart, dass das Geschehen zum Erliegen kommt, wenn man immer nach derselben Information fragt. In traditioneller technischer Ausdrucksweise führt die Anwendung eines projektiven Messoperators zum „Kollaps“ des Zustandsvektors auf einen Eigenraum des Messoperators. Danach führt die Wiederholung der projektiven Messung zu keinem Verlassen des Eigenraums mehr. Um ein Geschehen allein mit der unstetigen Dynamik am Laufen zu halten benötigen wird deswegen wengistens 2 unverträgliche Messoperatoren.

Während in gewöhnlicher Quantentheorie mit der Beobachtung üblicherweise Schluss ist, denn dann können die subjektiven Empfindungen gegen die Zahlen des mathematischen Modells verglichen werden, fordern wir ständige Beobachtungen, damit ein Geschehen überhaupt stattfinden kann. Da das menschliche Subjekt aber nur mit einer Seite der projektiven Messungen in Verbindung steht, sind ihm die anderen verborgen. Natürlich wäre es ontologisch das Einfachste anzunehmen, dass die anderen Messungen genauso wie die einen stattfinden, dass sie am Ende mit Empfindungen in Zusammenhang stehen, nur eben für andere Subjekte.

Grundlagen

Koordinatentransformationen, Produkträume und Verschränkung

Zu tun:

Indextransformationen, bei denen sich die Zahl der Indexe nicht ändert, entsprechen im Kontinuum Koordinatentransformationen.

Bei Bildung von Produkträumen lassen sich die Indexe der Einzelräume auf einen einzigen Produktraumindex bijektiv abbilden. Wichtig: dies gilt auch für das Kontinuum! Auch dort existieren immer bijektive Abbildungen aufgrund der Gleichmächtigkeit der beteiligten Mengen.

Transformationen, die über Teilräume hinüberreichen, ändern i.A. deren Verschränkung. Solche, die sich nur auf Teilräume beschränken, erhalten die von-Neumann-Entropie.

Orts-, Impuls-, Zeit- und Energieoperatoren

Weil wir ihnen später begegnen werden, rufen wir uns die Matrixelemente spezieller Operatoren und die Komponenten ihrer Eigenvektoren in speziellen Vektorbasen in Erinnerung. Wir unterscheiden nicht zwischen abzählbaren und kontinuierlichen Dirac-Vektoren und verwenden durchgängig die Indexschreibweise, d.h. $f_{x_j} \equiv f(x)$.

Die Matrixelemente des Ortsoperator $\hat{x}$ und die Komponenten seiner Eigenvektoren $\left|\psi_{x_j}\right\rangle$ zu den Eigenwerten x_j sind in der Ortsbasis $\{\left|\psi_{x_j}\right\rangle\}$

$$\left\langle\psi_{x_j}\middle|\hat{x}\,\psi_{x_k}\right\rangle = x_{x_j x_k} = \delta_{x_j x_k}\, x_j \qquad \left\langle\psi_{x_k}\middle|\psi_{x_j}\right\rangle = \psi_{x_j x_k} = \delta_{x_j x_k} \tag{1}$$

und in der (Orts-)Impulsbasis $\{\left|\psi_{p_j}\right\rangle\}$

$$\left\langle\psi_{p_j}\middle|\hat{x}\,\psi_{p_k}\right\rangle = x_{p_j p_k} = \mathrm{i}\hbar\,\delta_{p_j p_k}\frac{\partial}{\partial p_k} \qquad \left\langle\psi_{p_k}\middle|\psi_{x_j}\right\rangle = \psi_{x_j p_k} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{i}{\hbar}x_j p_k} \tag{2}$$

Analog sind die Matrixelemente des Zeitoperators $\hat{t}$ und die Komponenten seiner Eigenvektoren $\left|\psi_{t_j}\right\rangle$ zu den Eigenwerten t_j in der Zeitbasis $\{\left|\psi_{t_j}\right\rangle\}$

$$\left\langle\psi_{t_j}\middle|\hat{t}\,\psi_{t_k}\right\rangle = t_{t_j t_k} = \delta_{t_j t_k}\, t_j \qquad \left\langle\psi_{t_k}\middle|\psi_{t_j}\right\rangle = \psi_{t_j t_k} = \delta_{t_j t_k} \tag{3}$$

und in der (Zeit-)Impuls- oder Energiebasis $\{\left|\psi_{E_j}\right\rangle\}$

$$\left\langle\psi_{E_j}\middle|\hat{t}\,\psi_{E_k}\right\rangle = t_{E_j E_k} = \mathrm{i}\hbar\,\delta_{E_j E_k}\frac{\partial}{\partial E_k} \qquad \left\langle\psi_{E_k}\middle|\psi_{t_j}\right\rangle = \psi_{t_j E_k} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{i}{\hbar}t_j E_k} \tag{4}$$

Die Bornsche Regel

$$p^{(0)\to(1)} = \left|\left\langle\psi^{(1)}\middle|\psi^{(0)}\right\rangle\right|^2 \tag{5}$$

Zu tun: Erläutern wie man sich den Prozess ursprünglich vorgestellt hat und wie man ihn sich mit Dekohärenztheorie vorstellt.

Die Zeit in der Quantenmechanik

$$\hat{O}\left|\psi\right\rangle = 0 \tag{6}$$

$\hat{O}$ soll in einem Produktraum $\mathscr{H} \otimes \mathscr{E}$ wirken. Hat die Gestalt

$$\hat{O} = \hat{H} \otimes \hat{1}^{\mathscr{E}} - \hat{1}^{\mathscr{H}} \otimes \hat{E} \tag{7}$$

Produktansatz für $|\psi\rangle$

$$|\psi\rangle = |\psi\rangle^{\mathscr{H}} \otimes |\psi\rangle^{\mathscr{E}} \tag{8}$$

$$\hat{H}\,|\psi\rangle^{\mathscr{H}} \otimes |\psi\rangle^{\mathscr{E}} \;-\; |\psi\rangle^{\mathscr{H}} \otimes \hat{E}\,|\psi\rangle^{\mathscr{E}} = \;0 \tag{9}$$

Funktioniert für Schrödinger- und Dirac-Gleichung. Bsp. liefern...

Gleichungssystem nur noch gekoppelt über die Eigenwerte E

$$\begin{aligned} \hat{H}\,|\psi\rangle^{\mathscr{H}} &= E\,|\psi\rangle^{\mathscr{H}} \\ \hat{E}\,|\psi\rangle^{\mathscr{E}} &= E\,|\psi\rangle^{\mathscr{E}} \end{aligned} \tag{10}$$

Aufgrund der Linearität sind alle Linearkombinantionen von Produkten zum selben Eigenwert E ebenfalls Lösungen.

$$|\psi\rangle = \sum_j \;\psi_j \left|\psi_{E_j}\right\rangle^{\mathscr{H}} \otimes \;\left|\psi_{E_j}\right\rangle^{\mathscr{E}} \tag{11}$$

Damit Bornsche Regel zwischen solchen Lösungen

$$p^{(0)\to(1)} = \;\sum_{jk} \psi_j^{(1)*} \psi_k^{(1)} \psi_j^{(0)} \psi_k^{(0)*} \tag{12}$$

Damit von der Betrachtung ausgeschlossen alle, die $j \neq k$ Bestandteile haben.

$$|\psi\rangle = \sum_{jk} \;\psi_{jk} \left|\psi_{E_j}\right\rangle^{\mathscr{H}} \otimes \;\left|\psi_{E_k}\right\rangle^{\mathscr{E}} \tag{13}$$

Bornsche Regel allg.

$$p^{(0)\to(1)} = \;\sum_{jklm} \psi_{jk}^{(1)*} \psi_{lm}^{(1)} \psi_{jk}^{(0)} \psi_{lm}^{(0)*} \tag{14}$$

$$p^{(0)\to(1)} = \;\left|\left\langle \psi^{(1)} \middle| \hat{U}(t_1 - t_0)\, \psi^{(0)} \right\rangle\right|^2 \tag{15}$$

In der Energiebasis ist $\hat{U}$ bei einem nicht explizit zeitabhängigen Hamilton-Operator diagonal.

Matrixelemente in der Energiebasis

$$U_{jk} = \delta_{jk} e^{-\mathrm{i}\omega_j (t_1 - t_0)} = \delta_{jk} \left(e^{\mathrm{i}\omega_j t_1}\right)^* e^{\mathrm{i}\omega_j t_0} \tag{16}$$

In Komponenten

$$p^{(0)\to(1)} = \left|\sum_j \left(\psi_j^{(1)\mathscr{H}} e^{\mathrm{i}\omega_j t_1}\right)^* \psi_j^{(0)\mathscr{H}} e^{\mathrm{i}\omega_j t_0}\right|^2 \tag{17}$$

Deswegen wird (19) zu

$$p^{(0)\to(1)} = \left|\left\langle \psi^{(1)\mathscr{H}} \otimes \psi^{(1)\mathscr{E}} \middle| \psi^{(0)\mathscr{H}} \otimes \psi^{(0)\mathscr{E}} \right\rangle\right|^2 \tag{18}$$

mit Komponenten $\psi_j^{(i)\mathscr{E}} = e^{\mathrm{i}\omega_j t_i}$. **Deswegen muss $\psi^{(i)\mathscr{E}}$ als Zeiteigenvektor zum Zeiteigenwert t_i aufgefasst werden.**

Blockuniversen ersetzen absolute Zeit

Sei $|\psi\rangle$ der Zustandsvektor einer Quantenwelt. Dann berechnet sich in der nichtrelativistischen Quantenmechanik die bedingte Wahrscheinlichkeit dafür, die Quantenwelt zur Zeit t_1 im Zustand $|\psi^{(1)}\rangle$ anzutreffen unter der Bedingung, dass sie zur Zeit t_0 im Zustand $|\psi(0)\rangle$ war, zu

$$p^{(0)\to(1)} = \left|\left\langle \psi^{(1)} \middle| \hat{U}(t_1 - t_0)\, \psi^{(0)} \right\rangle\right|^2 \tag{19}$$

Dabei ist $\hat{U}$ der unitäre Zeitentwicklungsoperator, der parametrisch von einem als absolut angesehenen Zeitparameter t abhängt. Wir beschränken uns hier auf nicht explizit zeitabhängige Welten, d.h. $\hat{U}$ kann mit einem hermiteschen Operator $\hat{H}$ in der Form

$$\hat{U}(t_1, t_0) = \exp\left(-\tfrac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H} \cdot (t_1 - t_0)\right) \tag{20}$$

geschrieben werden.

————— diskret

Schrödi + 1 Kollaps

$$p^{(0)\to(1)} = \left|\sum_{x'x} \psi_{x'}^{(1)*}\ U(\Delta t)_{x'x}\ \psi_x^{(0)}\right|^2 \tag{21}$$

Elementares Δt Planck-Zeit $\hat{U} = \hat{u}^{t/t_{Planck}}$

$$p^{(0)\to(1)} = \left|\sum_{x'x} \psi_{x'}^{(1)*}\ u_{x'x}\ \psi_x^{(0)}\right|^2 \tag{22}$$

1 Zwischenbasis, 2 Kollapse

$$|\psi\rangle^{(0)} = \sum_x \psi_x^{(0)} |x\rangle \otimes |t_0\rangle \qquad |\psi\rangle^{(1)} = \sum_x \psi_x^{(1)} |x\rangle \otimes |t_1\rangle \tag{23}$$

Zwischenbasis $\{|z\rangle\}$ $N \cdot M$ Elemente

$$\begin{aligned} |x\rangle \otimes |t\rangle &= \textstyle\sum_z V_{xt\,z}\ |z\rangle \qquad & |z\rangle &= \textstyle\sum_{xt} V^*_{z\,xt}\ |x\rangle \otimes |t\rangle \\ \langle x| \otimes \langle t| &= \textstyle\sum_z V^*_{z\,xt}\ \langle z| \qquad & \langle z| &= \textstyle\sum_{xt} V_{xt\,z}\ \langle x| \otimes \langle t| \end{aligned} \tag{24}$$

$$p^{(0)\to(z)} = \left|\langle z|\,\hat{V}\,(|x\rangle\otimes|t_0\rangle)\right|^2 = \left|\sum_{xt\,x'}\psi_{x'}^{(0)}\,\langle x'|\otimes\langle t|\,V_{xt\,z}\;\;|x\rangle\otimes|t_0\rangle\right|^2 \tag{25}$$

$$p^{(0)\to(z)} = \left|\sum_{x}\psi_x^{(0)}V_{xt_0\,z}\;\right|^2 \tag{26}$$

analog

$$p^{(z)\to(1)} = \left|\sum_{x}\psi_x^{(1)}V_{xt_1\,z}\;\right|^2 \tag{27}$$

Gesamtübergangswahrscheinlichkeit

$$p^{(0)\to(1)} = \sum_z\; p^{(0)\to(z)}\; p^{(z)\to(1)} = \sum_z\left(\left|\sum_x\psi_x^{(1)}V_{xt_1\,z}\;\right|^2\left|\sum_x\psi_x^{(0)}V_{xt_0\,z}\;\right|^2\right) \tag{28}$$

$$p^{(0)\to(1)} = \sum_z\left|\sum_{x'x}\psi_{x'}^{(1)}V_{x't_1\,z}\;V_{xt_0\,z}\;\psi_x^{(0)}\right|^2 \tag{29}$$

Also

$$\boxed{\left|\sum_{x'x}\psi_{x'}^{(1)*}\;u_{x'x}\;\psi_x^{(0)}\right|^2 = \sum_z\left|\sum_{x'x}\psi_{x'}^{(1)}V_{x't_1\,z}\,V_{xt_0\,z}\;\psi_x^{(0)}\right|^2} \tag{30}$$

Ausmultipliziert links

$$\sum_{x'''x''x'x}\psi_{x'''}^{(1)}\psi_{x''}^{(0)*}\psi_{x'}^{(1)*}\psi_x^{(0)}\;u_{x'''x''}^{*}\;u_{x'x} \tag{31}$$

rechts

$$\sum_{z\,x'''x''x'x}\psi_{x'''}^{(1)}\psi_{x''}^{(0)*}\psi_{x'}^{(1)*}\psi_x^{(0)}\,V_{x'''t_1\,z}\,V_{x''t_0\,z}^{*}\,V_{x't_1\,z}^{*}\,V_{xt_0\,z} \tag{32}$$

Muss für alle $|\psi^{(0)}\rangle$ und $|\psi^{(1)}\rangle$ gelten, deshalb

$$\boxed{u_{x'''x''}^{*}\;u_{x'x} = \sum_z V_{x'''t_1\,z}\,V_{x''t_0\,z}^{*}\,V_{x't_1\,z}^{*}\,V_{xt_0\,z}} \tag{33}$$

Unitarität von u und V sind zusätzlich zu fordern!

$$\sum_{x''}u_{x'x''}\,u_{xx''}^{*} = \delta_{x'x} \qquad \sum_z V_{x't'\,z}V_{xt\,z}^{*} = \delta_{x'x}\;\delta_{t't} \qquad \sum_{xt}V_{xt\,z'}V_{xt\,z}^{*} = \delta_{z'z} \tag{34}$$

---

(20) diagnonalisiert durch unitäre Matrix W im x-Unterraum. D.h. auf V wirkt $W\otimes 1$.

$$U_{x'x\,t't} = e^{\mathrm{i}\varphi_\mathrm{x}(\mathrm{t'-t})}\,\delta_{x'x} \tag{35}$$

$$\begin{aligned}
&\boxed{e^{\mathrm{i}(\varphi_\mathrm{x}-\varphi_{\mathrm{x}''})(\mathrm{t'-t})}\,\delta_{x'''x''}\,\delta_{x'x} \;=\; \sum_z V_{x'''t'\,z}\,V_{x''t\,z}^{*}\,V_{x't'\,z}^{*}\,V_{xt\,z}}\\
&\varphi_x\in\mathbb{R}\\
&V_{xt\,z}\in\mathbb{C}\\
&x\in\{1,2,...,N_x\}\\
&t\in\{1,2,...,N_t\}\\
&z\in\{1,2,...,N_x\cdot N_t\}
\end{aligned} \tag{36}$$

Nur noch Unitarität von V ist zusätzlich zu fordern!

$$\sum_z V_{x't'z} V^*_{xt\,z} = \delta_{x'x}\ \delta_{t't} \qquad \sum_{xt} V_{xt\,z'} V^*_{xt\,z} = \delta_{z'z} \tag{37}$$

————— ab hier überarbeiten

Wenn die Quantenzahlen kontinuierlich sind, dann drückt sich (19) in den Komponenten zu einer weiteren Basis f so aus[1]

$$p(x_1,t_1)\Big|_{x_0,t_0} = \Big|\iint \mathrm{d}f\mathrm{d}f'\, x_1^*(f)\, U(t_1-t_0,f,f')\, x_0(f')\Big|^2 \tag{38}$$

Wenn wir von der parametrischen absoluten Zeit wegkommen wollen, dann wünschen wir uns so etwas wie

$$p(x_1,t_1)\Big|_{x_0,t_0} = \Big|\langle x_1,t_1|x_0,t_0\rangle\Big|^2 \tag{39}$$

womit die bedingte Wahrscheinlichkeit gemeint ist, die Quantenwelt in den Zustand $|x_1,t_1\rangle$ zu bringen unter der Vorraussetzung, dass sie im Zustand $|x_0,t_0\rangle$ ist. x und t nummerieren nun gemeinsam die Zustandsvektoren so wie in relativistischen Quantenfeldtheorien. Jeder Zustandsvektor stellt ein bestimmtes Blockuniversum dar.

Jeder unstetige Übergang von einem Zustandsvektor zum nächsten wird in der Physik traditionell als *Messung* bezeichnet.

Die Rolle des Subjekts

Subjektiv erleben wir Ereignisse in der (psychischen) Zeit. $|x,t\rangle$ steht nun aber nicht für ein Ereignis der Erfahrung eines Zustands $|x\rangle$ in der Zeit t, sondern im Allgemeinen für einen x,t-verschränkten Zustand[2]. Da das Subjekt keine Zustände erfährt, die in der Zeit verschränkt sind, muss es an der Messung in einer Weise beteiligt sein, so dass auf entschränkte Produktzustände projiziert wird. Das Subjekt muss also dafür sorgen, dass auf Produktzustände $|x_i\rangle \otimes |t_i\rangle$ projiziert wird, wobei $|t_i\rangle$ eine Zeiteigenfunktion[3] zum Zeiteigenwert t_i ist. Dadurch erfährt das Subjekt die physikalische Zeit t_i zusammen mit dem neuen Weltzustand $|x_i\rangle$. Wiederholt sich dies, dann erfährt das Subjekt eine Folge von Weltzuständen $|x_i\rangle$, die durch die Eigenzeiten t_i nummeriert sind, also bei genügender Feinheit des Prozesses vermeintlich eine quasikontinuierliche Abfolge $|x(t)\rangle$.

Sei $|y_0\rangle$ ein Blockuniversum vor der Messung, oder in Komponenten zur Produktbasis f,t ausgedrückt $y_0(f,t)$. Dann ist die Übergangswahrscheinlichkeit (39) in einen subjektiv erfahrbaren Zustand $|y_1\rangle = |x_1\rangle \otimes |t_1\rangle$

$$p(x_1,t_1)\Big|_{y_0} = \Big|\iint \mathrm{d}f\mathrm{d}t\ x_1^*(f)\delta(t-t_1)\, y_0(f,t)\Big|^2 = \Big|\int \mathrm{d}f\, x_1^*(f)\, y_0(f,t_1)\Big|^2 \tag{40}$$

[1] Es ist $x(f) \equiv \langle f|x\rangle$ und $U(t,f,f') \equiv \langle f|\hat{U}(t)f'\rangle$.

[2] Irgendeine Funktion zweier Veränderlicher $f(x,t) \equiv \langle x,t|f\rangle$ zerfällt im Allgemeinen nicht in ein Produkt $g(x)h(t)$ und ist damit im Allgemeinen x,t-verschränkt.

[3] in Komponenten also eine Delta-Distribution $\delta(t-t_i)$

Vergleichen wir dies nun mit (38), dann lesen wir ab

$$y_0(f, t_1) = \int \mathrm{d}f' \, U(t_1 - t_0, f, f') \, x_0(f') \tag{41}$$