Eine Abfolge von Blockuniversen?

Harald Rieder

1. Mai 2022

Inhaltsverzeichnis

Motivation

Das Messproblem der Quantenmechanik entsteht aus der Vorstellung einer stetigen Entwicklung von mathematischen Größen in der als absolut angesehen gemeinsamen Zeit in Verbindung mit der Erfahrung, dass Kenntnis über das durch die mathematischen Größen beschriebene Quantending nur dann erlangt werden kann, wenn sich dabei dessen Zustand unstetig ändert. Dadurch sind zu jedem Zeitpunkt 2 verschiedene sich daran anschließende Arten von Zukünften möglich und niemand kann sagen, wann oder warum die eine oder die andere gewählt wird.

Dieses Paradoxon hat schon die besten Köpfe herausgefordert und der ein oder andere dachte sich, eine Lösung zu haben. Mitunter taucht die Denke auf, dass verschiedene Sichten auf die Quantenmechanik möglich seien, so genannte „Interpretationen der Quantenmechanik“, die am Ende doch nur eine Frage des Geschmacks seien. Wir werden hier diesen Weg nicht gehen. Statt dessen soll das Paradoxon dadurch aufgelöst werden, dass zu jedem Zeitpunkt nur eine Art von Zukunft möglich ist. Anstatt an der Vorstellung eines Zeitparameters, von dem Geschehen stetig abhängt, festzuhalten, werfen wir diese Vorstellung komplett über Bord. Es gibt einige gute Gründe, es auf diese Art zu versuchen:

1. Unterhalb der Planck-Zeit kann es keine stetige Zeitentwicklung mehr geben.
2. Eine Propagation des Geschehens durch lineare Operatoren, wie sie für die sich stetig anschließende Zukunft im Modell geschieht, treibt das Weltgeschehen eben *linear* weiter. Man kann schwerlich glauben, dass dadurch irgend etwas wie Lebendigkeit erfolgreich modelliert werden kann. Aus der klassischen Chaos-Theorie haben wir gelernt, dass nur eine nichtlineare Dynamik zu etwas führt, dass uns an Leben erinnert. Die unstetig sich anschließende Zukunft liefert uns dagegen eine nichtlineare Dynamik.
3. Um Kenntnis über ein Quantending zu erlangen ist ein Verlassen der stetigen Entwicklung notwendig. Die Dekohärenztheorie kann erklären, wie Information aus einem Quantending in seine Umgebung fließt unter der Annahme einer gemeinsamen stetigen Entwicklung. Doch wenn Kenntnis über Quantending und/oder Umgebung erlangt werden soll, ist ein unstetiger Schritt notwendig. Das *problem of outcomes* wird durch die Dekoränztheorie nicht gelöst, und das ist das eigentliche Paradoxon.
4. Eine komplett neue Dynamik könnte erfunden werden. Das erscheint aber schwieriger, als einfach die Hälfte der Dynamik wegzuwerfen.

Die Quantenmechanik liefert uns statistische Größen: Wahrscheinlichkeiten für Ereignisse. Wir haben gelernt, wie man Empfindungen mit den Ereignissen zu verknüpfen hat, die das mathematische Modell hergibt. Dabei hat sich herausgestellt, dass diese Theorie Häufigkeiten und Mittelwerte teilweise erschreckend genau liefern kann. Wenn die Hälfte der Dynamik über Bord geworfen werden soll, dann müssen dennoch die statistischen Aussagen der Theorie im experimentell gesteckten Rahmen erhalten bleiben. Ob dies überhaupt möglich ist, soll hier untersucht werden.

Die unstetige Dynamik hat die Eigenart, dass das Geschehen zum Erliegen kommt, wenn man immer nach derselben Information fragt. In traditioneller technischer Ausdrucksweise führt die Anwendung eines projektiven Messoperators zum „Kollaps" des Zustandsvektors auf einen Eigenraum des Messoperators. Danach führt die Wiederholung der projektiven Messung zu keinem Verlassen des Eigenraums mehr. Um ein Geschehen allein mit der unstetigen Dynamik am Laufen zu halten benötigen wird deswegen wengistens 2 unverträgliche Messoperatoren.

Während in gewöhnlicher Quantentheorie mit der Beobachtung üblicherweise Schluss ist, denn dann können die subjektiven Empfindungen gegen die Zahlen des mathematischen Modells verglichen werden, fordern wir ständige Beobachtungen, damit ein Geschehen überhaupt stattfinden kann. Da das menschliche Subjekt aber nur mit einer Seite der projektiven Messungen in Verbindung steht, sind ihm die anderen verborgen. Natürlich wäre es ontologisch das Einfachste anzunehmen, dass die anderen Messungen genauso wie die einen stattfinden, dass sie am Ende mit Empfindungen in Zusammenhang stehen, nur eben für andere Subjekte.

Grundlagen

Koordinatentransformationen, Produkträume und Verschränkung

Zu tun:

Indextransformationen, bei denen sich die Zahl der Indexe nicht ändert, entsprechen im Kontinuum Koordinatentransformationen.

Bei Bildung von Produkträumen lassen sich die Indexe der Einzelräume auf einen einzigen Produktraumindex bijektiv abbilden. Wichtig: dies gilt auch für das Kontinuum! Auch dort existieren immer bijektive Abbildungen aufgrund der Gleichmächtigkeit der beteiligten Mengen.

Transformationen, die über Teilräume hinüberreichen, ändern i.A. deren Verschränkung. Solche, die sich nur auf Teilräume beschränken, erhalten die von-Neumann-Entropie.

Orts-, Impuls-, Zeit- und Energieoperatoren

Weil wir ihnen später begegnen werden, rufen wir uns die Matrixelemente spezieller Operatoren und die Komponenten ihrer Eigenvektoren in speziellen Vektorbasen in Erinnerung. Wir unterscheiden nicht zwischen abzählbaren und kontinuierlichen Dirac-Vektoren und verwenden durchgängig die Indexschreibweise, d.h. $f_{x_j} \equiv f(x)$.

Die Matrixelemente des Ortsoperator $\hat{x}$ und die Komponenten seiner Eigenvektoren $|x_j\rangle$ zu den Eigenwerten x_j sind in der Ortsbasis $\{\,|x_j\rangle\,\}$

$$\langle x_j|\,\hat{x}\,x_k\rangle \;=\; x_{x_j x_k} \;=\; \delta_{jk}\,x_j \qquad \langle x_k|x_j\rangle \;=\; \psi_{x_j x_k} \;=\; \delta_{jk} \tag{1}$$

und in der (Orts-)Impulsbasis $\{\,|p_j\rangle\,\}$

$$\langle p_j|\,\hat{x}\,p_k\rangle \;=\; x_{p_j p_k} \;=\; \mathrm{i}\hbar\,\delta_{jk}\,\frac{\partial}{\partial p_k} \qquad \langle p_k|x_j\rangle \;=\; \psi_{x_j p_k} \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{i}{\hbar}x_j p_k} \tag{2}$$

Analog sind die Matrixelemente des Zeitoperators $\hat{t}$ und die Komponenten seiner Eigenvektoren $|t_j\rangle$ zu den Eigenwerten t_j in der Zeitbasis $\{\,|t_j\rangle\,\}$

$$\left\langle t_j\middle|\,\hat{t}\,t_k\right\rangle \;=\; t_{t_j t_k} \;=\; \delta_{jk}\,t_j \qquad \langle t_k|t_j\rangle \;=\; \psi_{t_j t_k} \;=\; \delta_{jk} \tag{3}$$

und in der (Zeit-)Impuls- oder Energiebasis $\{\,|E_j\rangle\,\}$

$$\left\langle E_j\middle|\,\hat{t}\,E_k\right\rangle \;=\; t_{E_j E_k} \;=\; -\mathrm{i}\hbar\,\delta_{jk}\,\frac{\partial}{\partial E_k} \qquad \langle E_k|t_j\rangle \;=\; \psi_{t_j E_k} \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{i}{\hbar}t_j E_k} \tag{4}$$

Die Bornsche Regel

In der ursprünglichen (1926) Formulierung besagte die Bornsche Regel, dass

- bei einer Messung einer Observable einer der Eigenwerte $\{\lambda_j\}$ des zugehörigen Messoperators $\hat{L}$ beobachtet wird.
- die Wahrscheinlichkeit für die Messung des Eigenwerts λ_j sich aus dem Absolutquadrat des Skalarprodukts zwischen Anfangszustand $|\psi^{(0)}\rangle$ und Eigenvektor $|\lambda_j\rangle$ bestimmt.

Nach der Messung liegt der Eigenzustand $|\psi^{(1)}\rangle = |\lambda_j\rangle$ vor und bei wiederholter Messung von $\hat{L}$ ändert sich daran nichts mehr.

Offen bleiben musste zunächst, was genau eigentlich eine Messung ist. Das Messexperiment wurde in der Sprache der klassischen Physik beschrieben. Man hatte ein paar mechanische Größen wie Ort und Impuls, die sich in die Sprache der Quantenmechanik übertragen ließen. Irgendwo musste es einen Übergang zwischen Quantenmechanik und klassischer Physik geben, doch wo und wie war unklar.

An dieser Lage haben sich ein paar Dinge in 100 Jahren geändert:

- In den Gleichunge der Quantentheorien gibt es Größen, die kein klassisches Analogon haben, z.B. den Spin.
- Die meisten Physiker dürften daran glauben, dass die Natur vollständig quantenmechanisch zu beschreiben ist, und dass die klassische Physik irgendwie daraus abzuleiten ist.
- Mit der Dekoährenztheorie ist es mit quantenmechanischen Mitteln gelungen, mehr von dem zu beschreiben, was bei einer Messung geschieht.

Heute müssen wir uns die Messung vorstellen als einen Prozess, der ein zu beobachtendes Quantenteil zunächst quantendynamisch an die Umgebung koppelt. Dabei entsteht bei einer idealen Messung ein Zustand, der einerseits immer noch eine Überlagerung mit den ursprünglichen Amplituden $\psi^{(0)}_{\lambda_j}$ bezogen auf die Messbasis $\{\,|\lambda_j\rangle\,\}$ darstellt, andererseits die Messbasis maximal verschränkt mit einer entsprechenden Umgebungsbasis $\{\,|e_j\rangle\,\}$. Die Verschränkung soll nach der Dekohärenztheorie mittels eines stetigen deterministischen Prozesses $\hat{U}$ erfolgen. Dabei kann $\hat{U}$ zunächst Quantenteil und Umgebung unabhängig entwickeln, aber zu einem späteren Zeitpunkt soll $\hat{U}$ durch den Wechselwirkungsoperator $\hat{H}_{int}$ zwischen Quantenteil und Umgebung dominiert sein.

$$|e_0\rangle \otimes \left|\psi^{(0)}\right\rangle \;=\; |e_0\rangle \otimes \sum_j \psi^{(0)}_{\lambda_j}\,|\lambda_j\rangle \;\xrightarrow{\hat{U}}\; \sum_j \psi^{(0)}_{\lambda_j}\,(\,|e_j\rangle \otimes |\lambda_j\rangle\,) \tag{5}$$

Dadurch ist Information über $|\psi^{(0)}\rangle$ in der Umgebung verfügbar geworden und kann abgefragt werden. Dieser finale Abfrageschritt ist Stand heute nicht verstanden. Es ist aber gewiss, dass der Endzustand von (5) im Allgemeinen nicht bewusst erfahren werden kann, sondern nur Zustände nach bestimmten finalen Schritten, zum Beispiel Projektionen auf die Ortsbasis. Eventuell ist es auch nur der Abfrageschritt selbst, der bewusst erfahren wird. Der Abfrageschritt ist verbunden mit einem Kollaps der Überlagerung in einen der Endzustände mit der Bornschen Wahrscheinlichkeit.

$$\sum_j \psi^{(0)}_{\lambda_j}\,(|e_j\rangle \otimes |\lambda_j\rangle) \xrightarrow{p^{(0)\to(1)} \,=\, \left|\psi^{(0)}_{\lambda_j}\right|^2} |e_j\rangle \otimes |\lambda_j\rangle \;=\; |e_j\rangle \otimes \left|\psi^{(1)}\right\rangle \tag{6}$$

$\left|\psi^{(0)}_{\lambda_j}\right|^2$ ist die Übergangswahrscheinlichkeit

$$p^{(0)\to(1)} = \left|\left\langle\lambda_j\middle|\psi^{(0)}\right\rangle\right|^2 = \left|\left\langle\psi^{(1)}\middle|\psi^{(0)}\right\rangle\right|^2 \tag{7}$$

in der ursprünglichen Formulierung der Bornschen Regel.

Die Zeit in der Quantenmechanik

Zerlegung in H- und E-Raum

Gleichungen der Quantenmechanik sind vom Prinzip her eigentlich einfach. Ein linearer Operator $\hat{O}$ wird angewendet auf einen Zustandsvektor $|\psi\rangle$ und das Ergebnis soll 0 ergeben.

$$\hat{O}\,|\psi\rangle = 0$$

Beim Blick auf Schrödinger-, Dirac- und Klein-Gordon-Gleichungen fällt eine Gemeinsamkeit in's Auge. Der Operator $\hat{O}$ wirkt immer in einem Produktraum $\mathscr{H} \otimes \mathscr{E}$. Er hat die Gestalt

$$\hat{O} = \hat{H} \otimes \hat{1}^{\mathscr{E}} - \hat{1}^{\mathscr{H}} \otimes \hat{E}$$

und ist damit die Summe aus einem Operator $\hat{H}$, der nur im Teilraum $\mathscr{H}$ wirkt und einem Operator $\hat{E}$, der nur im Teilraum $\mathscr{E}$ wirkt. Der Teilraum $\mathscr{E}$ ist der Zeitunterraum und eine wählbare Basis ist die der Zeiteigenvektoren $|t_j\rangle$. Der Teilraum $\mathscr{H}$ enthält alles andere.

Durch die Zerlegung bietet sich ein Produktansatz zur Lösung dieser Gleichungen an. Mit

$$|\psi\rangle = |\psi\rangle^{\mathscr{H}} \otimes |\psi\rangle^{\mathscr{E}}$$

bekommen wir

$$\hat{H}\,|\psi\rangle^{\mathscr{H}} \otimes |\psi\rangle^{\mathscr{E}} \;-\; |\psi\rangle^{\mathscr{H}} \otimes \hat{E}\,|\psi\rangle^{\mathscr{E}} \;=\; 0 \tag{8}$$

und die Gleichung zerfällt in 2 Eigenwertgleichungen für die Operatoren $\hat{H}$ und $\hat{E}$.

$$\begin{aligned} \hat{H}\,|\psi\rangle^{\mathscr{H}} &= E\,|\psi\rangle^{\mathscr{H}} \\ \hat{E}\,|\psi\rangle^{\mathscr{E}} &= E\,|\psi\rangle^{\mathscr{E}} \end{aligned} \tag{9}$$

Dieses Gleichungssystem ist noch gekoppelt über die Eigenwerte E.

Aufgrund der Linearität von $\hat{H}$ und $\hat{E}$ sind alle Linearkombinationen von Produkten zum selben Eigenwert E ebenfalls Lösungen. Die allgemeine Lösung

$$|\psi\rangle \;=\; \sum_j \,\psi_j\, \;|E_j\rangle^{\mathscr{H}} \otimes\; |E_j\rangle^{\mathscr{E}} \tag{10}$$

mit mehr als einem Summand steht für eine Verschränkung der Teilräume $\mathscr{H}$ und $\mathscr{E}$. Die Darstellung (10) von $|\psi\rangle$ ist eine Schmidt-Zerlegung.

Die unverschränkten Lösungen $|E_j\rangle^{\mathscr{H}} \otimes\; |E_j\rangle^{\mathscr{E}}$ werden üblicherweise als *stationäre Zustände* oder *Energieeigenzustände* bezeichnet. Denn der Differentialoperator $\mathrm{i}\hbar\,\frac{\partial}{\partial t}$, der in den Gleichungen auftritt, muss aufgefasst werden als Matrixelemente $E(t - t')$ des kontinuierlichen Energieoperators $\hat{E}$ in der Zeitdarstellung. Nähme man es genauer, müsste man immer noch die Delta-Distribution dazuschreiben:

$$E(t-t') \;=\; \mathrm{i}\hbar\,\delta(t-t')\,\frac{\partial}{\partial t}$$

Der gesamte Produktraum $\mathscr{H} \otimes \mathscr{E}$ kann aus den allgemeinen Produkten der Eigenvektoren von $\hat{H}$ und $\hat{E}$ aufgespannt werden:

$$|\psi\rangle \;=\; \sum_{jk} \,\psi_{jk}\, \;|E_j\rangle^{\mathscr{H}} \otimes\; |E_k\rangle^{\mathscr{E}} \tag{11}$$

Doch alle Zustände, die Terme mit $j \neq k$ haben, sollen „in der Natur nicht vorkommen“. Etwas geringer könnte man auch fordern, dass sie durch die uns zur Verfügung stehenden Messprozesse nicht beobachtbar sind.

Die Bornschen Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen Lösungen sind

$$p^{(0)\to(1)} = \sum_{jk} \psi_j^{(1)*} \psi_k^{(1)} \psi_j^{(0)} \psi_k^{(0)*} \tag{12}$$

Die Bornschen Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen allgemeinen Zuständen, also auch den nicht beobachtbaren, sind

$$p^{(0)\to(1)} = \sum_{jklm} \psi_{jk}^{(1)*} \psi_{lm}^{(1)} \psi_{jk}^{(0)} \psi_{lm}^{(0)*} \tag{13}$$

Zeitentwicklung

Oft wird die Zeitentwicklung durch einen parametrisch von der Zeitdifferenz $t_1 - t_0$ abhängigen Zeitentwicklungsoperator ausgedrückt. Für die Übergangswahrscheinlichkeit von einem Ausgangszustand $|\psi^{(0)}\rangle$ zur Zeit t_0 zu einem Endzustand $|\psi^{(1)}\rangle$ zur Zeit t_1 gilt bei einem nicht explizit zeitabhängigen Operator $\hat{H}$

$$p^{(0)\to(1)} = \left|\left\langle \psi^{(1)} \middle| \hat{U}(t_1 - t_0)\, \psi^{(0)} \right\rangle\right|^2 \tag{14}$$

Dazu muss bemerkt werden:

- Ein zeitabhängiger Hamiltonoperator modelliert üblicherweise einen zeitabhängigen Einfluss der Umgebung. Betrachten wir das All als Quantenwelt, dann gibt es davon keine Umgebung. Dort stünde ein zeitabhängiger Operator $\hat{H}$ für zeitabhängige Naturgesetze. Diese Möglichkeit mag es geben, wir betrachten sie hier aber nicht.
- Was genau sich in (14) zeitlich entwickelt, ist ontologisch nicht klar. So lange die Wahrscheinlichkeit sich dabei nicht ändert, kann die Zeitentwicklung beliebig zwischen Operator und Vektoren hin- und hergeschoben werden, was in den gebräuchlichen „Bildern“, also Schrödinger-, Heisenberg- und Wechselwirkungsbild, ausgenutzt wird.
- $|\psi^{(0)}\rangle$ und $|\psi^{(1)}\rangle$ sind Vektoren aus dem $\mathscr{H}$ Unterraum. Statt abstrakter Vektoren aus dem $\mathscr{E}$ Unterraum treten in der Formel nur Zeiteigenwerte t_0, t_1 als Parameter auf. Auch in der relativistischen Quantenmechanik wird das invariante Skalarprodukt definiert als *drei*dimensionales Integral proportional zu $\int \frac{\mathrm{d}^3\vec{p}}{p_0}\ \psi^*(p)\, \phi(p)$. Diese Integration „auf der Massenschale“ entspricht der Vermeidung der Zustände (11), bei denen $j \neq k$ ist. p_0 gehört zwar zum $\mathscr{E}$ Raum, ist aber in dieser Formel nicht unabhängig sondern eine Funktion von $\vec{p}$ aus dem $\mathscr{H}$ Raum. Diese Ungleichbehandlungen wirken verstörend, wenn man sie mit der zugrunde liegenden symmetrischen Aufgabenstellung (9) vergleicht.
- Es handelt sich bei (14) um die ursprüngliche Formulierung (7) der Bornschen Wahrscheinlichkeit. Der Verschränkungsprozess mit der Umgebung ist nicht ausmodelliert.

In der Energiebasis des $\mathscr{H}$ Raumes ist $\hat{U}$ bei einem nicht explizit zeitabhängigen Hamilton-Operator diagonal. Die Matrixelemente in der Energiebasis sind

$$U_{E_j E_k} = \delta_{E_j E_k} e^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar} E_j (t_1 - t_0)} = \delta_{E_j E_k} (e^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar} E_j t_1})^* e^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar} E_j t_0} \tag{15}$$

In Komponenten stellt sich (14) dann so dar:

$$p^{(0)\to(1)} = \left|\sum_j \big(\psi_{E_j}^{(1)\mathscr{H}} e^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}E_j t_1}\big)^* \psi_{E_j}^{(0)\mathscr{H}} e^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}E_j t_0}\right|^2 \tag{16}$$

In den Exponentialfunktionen erkennen wir die Komponenten von Zeiteigenvektoren in der Energiedarstellung aus (4) wieder. Wir haben es also eigentlich mit Skalarprodukten von Vektoren aus dem $\mathscr{H} \otimes \mathscr{E}$ Raum zu tun

$$\left|\psi^{(0)}\right\rangle = \sum_j \psi_{E_j}^{\mathscr{H}(0)} \left|E_j^{\mathscr{H}}\right\rangle \otimes \psi_{t_0 E_j}^{\mathscr{E}} \left|E_j^{\mathscr{E}}\right\rangle = \sum_j \left\langle E_j \middle| \psi_{E_j}\right\rangle^{\mathscr{H}} \langle E_j | t_0\rangle^{\mathscr{E}} \left|E_j^{\mathscr{H}}\right\rangle \otimes \left|E_j^{\mathscr{E}}\right\rangle$$

$$\left|\psi^{(1)}\right\rangle = \sum_j \psi_{E_j}^{\mathscr{H}(1)} \left|E_j^{\mathscr{H}}\right\rangle \otimes \psi_{t_1 E_j}^{\mathscr{E}} \left|E_j^{\mathscr{E}}\right\rangle = \sum_j \left\langle E_j \middle| \psi_{E_j}\right\rangle^{\mathscr{H}} \langle E_j | t_1\rangle^{\mathscr{E}} \left|E_j^{\mathscr{H}}\right\rangle \otimes \left|E_j^{\mathscr{E}}\right\rangle$$

also mit Vektoren der Form (10).

Folgen von Blockuniversen statt von selbst vergehender physikalischer Zeit

Wir wollen nun die deterministische Zeitentwicklung durch einen stochastischen Prozess ersetzen. Der Ausgangspunkt dazu ist (17). Das heißt: ein Beobachter nimmt einen „Kollaps“ wahr, bei dem ein zwischen $\mathscr{H}$ und $\mathscr{E}$ verschränkter Zustand entschränkt wird. Dieser Prozessschritt soll sein

$$\sum_j a_j \left(|t_j\rangle \otimes |\lambda_j\rangle\right) \xrightarrow{p^{(0)\to(k)} = |a_j|^2} |t_k\rangle \otimes |\lambda_k\rangle = |t_k\rangle \otimes \left|\psi^{(k)}\right\rangle \tag{17}$$

Es wird also beobachtet der Zustand $|\psi^{(k)}\rangle$ zur Zeit t_k. Dadurch ist die Dynamik am Ende angekommen. Jede weitere Beobachtung liefert immer wieder dieselben Eigenwerte und damit auch dieselbe Zeit t_k.

Den kontinuierlich parametrisierten Operator $\hat{U}(t_1 - t_0)$ nähern wir an durch Potenzen $\hat{u}^n$ eines kleinstmöglichen Zeitentwicklungsoperators $\hat{u}$. Dabei stellen wir uns $t_1 - t_0$ vor als Vielfaches einer kleinstmöglichen Zeitdifferenz t_p.

$$t_1 - t_0 = n t_p \qquad \hat{u} = \hat{U}(t_p) \qquad \hat{u}^n = \hat{U}(t_1 - t_0)$$

Der Operator $\hat{U}$ ist dabei der aus (5) und nicht der aus (14). Er ist zuständig für die Gesamtwelt und nicht nur für einen Unterraum.

Damit $|\psi^{(k)}\rangle$ zu t_k passt und damit eine deterministische Zeitentwicklung vortäuschen kann, muss gelten

$$\left|\psi^{(k)}\right\rangle = \hat{u}^n \left|\psi^{(0)}\right\rangle \qquad n = \frac{t_k - t_0}{t_p}$$

Sei $|\psi\rangle$ der Zustandsvektor einer Quantenwelt. Dann berechnet sich in der nichtrelativistischen Quantenmechanik die bedingte Wahrscheinlichkeit dafür, die Quantenwelt zur Zeit t_1 im Zustand $|\psi^{(1)}\rangle$ anzutreffen unter der Bedingung, dass sie zur Zeit t_0 im Zustand $|\psi(0)\rangle$ war, zu

$$p^{(0)\to(1)} = \left|\left\langle \psi^{(1)} \middle| \hat{U}(t_1 - t_0)\, \psi^{(0)}\right\rangle\right|^2 \tag{18}$$

Dabei ist $\hat{U}$ der unitäre Zeitentwicklungsoperator, der parametrisch von einem als absolut angesehenen Zeitparameter t abhängt. Wir beschränken uns hier auf nicht explizit zeitabhängige Welten, d.h. $\hat{U}$ kann mit einem hermiteschen Operator $\hat{H}$ in der Form

$$\hat{U}(t_1, t_0) = \exp\left(-\tfrac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}\cdot(t_1 - t_0)\right) \tag{19}$$

geschrieben werden.

————— diskret

Schrödi + 1 Kollaps

$$p^{(0)\to(1)} = \left|\sum_{x'x} \psi_{x'}^{(1)*}\ U(\Delta t)_{x'x}\ \psi_x^{(0)}\right|^2 \tag{20}$$

Elementares Δt Planck-Zeit $\hat{U} = \hat{u}^{t/t_{Planck}}$

$$p^{(0)\to(1)} = \left|\sum_{x'x} \psi_{x'}^{(1)*}\ u_{x'x}\ \psi_x^{(0)}\right|^2 \tag{21}$$

1 Zwischenbasis, 2 Kollapse

$$|\psi\rangle^{(0)} = \sum_x \psi_x^{(0)}\,|x\rangle \otimes |t_0\rangle \qquad |\psi\rangle^{(1)} = \sum_x \psi_x^{(1)}\,|x\rangle \otimes |t_1\rangle \tag{22}$$

Zwischenbasis $\{|z\rangle\}$ $N \cdot M$ Elemente

$$\begin{array}{ll} |x\rangle \otimes |t\rangle = \sum_z V_{xt\,z}\ |z\rangle & |z\rangle = \sum_{xt} V^*_{z\,xt}\ |x\rangle \otimes |t\rangle \\ \langle x| \otimes \langle t| = \sum_z V^*_{z\,xt}\ \langle z| & \langle z| = \sum_{xt} V_{xt\,z}\ \langle x| \otimes \langle t| \end{array} \tag{23}$$

$$p^{(0)\to(z)} = \left|\langle z|\,\hat{V}\,(|x\rangle \otimes |t_0\rangle)\right|^2 = \left|\sum_{xt\,x'} \psi_{x'}^{(0)}\,\langle x'| \otimes \langle t|\,V_{xt\,z}\ |x\rangle \otimes |t_0\rangle\right|^2 \tag{24}$$

$$p^{(0)\to(z)} = \left|\sum_x \psi_x^{(0)} V_{xt_0\,z}\ \right|^2 \tag{25}$$

analog

$$p^{(z)\to(1)} = \left|\sum_x \psi_x^{(1)} V_{xt_1\,z}\ \right|^2 \tag{26}$$

Gesamtübergangswahrscheinlichkeit

$$p^{(0)\to(1)} = \sum_z\ p^{(0)\to(z)}\ p^{(z)\to(1)} = \sum_z \left(\left|\sum_x \psi_x^{(1)} V_{xt_1\,z}\ \right|^2 \left|\sum_x \psi_x^{(0)} V_{xt_0\,z}\ \right|^2 \right) \tag{27}$$

$$p^{(0)\to(1)} = \sum_z \left|\sum_{x'x} \psi_{x'}^{(1)} V_{x't_1\,z}\ V_{xt_0\,z}\ \psi_x^{(0)}\right|^2 \tag{28}$$

Also

$$\boxed{\left|\sum_{x'x} \psi_{x'}^{(1)*}\ u_{x'x}\ \psi_x^{(0)}\right|^2 = \sum_z \left|\sum_{x'x} \psi_{x'}^{(1)} V_{x't_1\,z}\, V_{xt_0\,z}\ \psi_x^{(0)}\right|^2} \tag{29}$$

Ausmultipliziert links

$$\sum_{x'''x''x'x} \psi_{x'''}^{(1)}\psi_{x''}^{(0)*}\psi_{x'}^{(1)*}\psi_x^{(0)}\ u^*_{x'''x''}\ u_{x'x} \tag{30}$$

rechts

$$\sum_{z\,x'''x''x'x} \psi^{(1)}_{x'''}\psi^{(0)*}_{x''}\,\psi^{(1)*}_{x'}\,\psi^{(0)}_{x}\,V_{x'''t_1\,z}\,V^*_{x''t_0\,z}\,V^*_{x't_1\,z}\,V_{xt_0\,z} \tag{31}$$

Muss für alle $|\psi^{(0)}\rangle$ und $|\psi^{(1)}\rangle$ gelten, deshalb

$$\boxed{u^*_{x'''x''}\;u_{x'x} = \sum_z V_{x'''t_1\,z}\,V^*_{x''t_0\,z}\,V^*_{x't_1\,z}\,V_{xt_0\,z}} \tag{32}$$

Unitarität von u und V sind zusätzlich zu fordern!

$$\sum_{x''} u_{x'x''}\,u^*_{xx''} = \delta_{x'x} \qquad \sum_z V_{x't'\,z}V^*_{xt\,z} = \delta_{x'x}\;\delta_{t't} \qquad \sum_{xt} V_{xt\,z'}V^*_{xt\,z} = \delta_{z'z} \tag{33}$$

---

(19) diagnonalisiert durch unitäre Matrix W im x-Unterraum. D.h. auf V wirkt $W \otimes 1$.

$$U_{x'x\,t't} = e^{\mathrm{i}\varphi_\mathrm{x}(\mathrm{t'-t})}\,\delta_{x'x} \tag{34}$$

$$\boxed{e^{\mathrm{i}(\varphi_\mathrm{x}-\varphi_{\mathrm{x''}})(\mathrm{t'-t})}\,\delta_{x'''x''}\,\delta_{x'x} \;=\; \sum_z V_{x'''t'\,z}\,V^*_{x''t\,z}\,V^*_{x't'\,z}\,V_{xt\,z}}$$

$$\begin{aligned} \varphi_x &\in \mathbb{R} \\ V_{xt\,z} &\in \mathbb{C} \\ x &\in \{1,2,...,N_x\} \\ t &\in \{1,2,...,N_t\} \\ z &\in \{1,2,...,N_x\cdot N_t\} \end{aligned} \tag{35}$$

Nur noch Unitarität von V ist zusätzlich zu fordern!

$$\sum_z V_{x't'\,z}V^*_{xt\,z} = \delta_{x'x}\;\delta_{t't} \qquad \sum_{xt} V_{xt\,z'}V^*_{xt\,z} = \delta_{z'z} \tag{36}$$

——————— ab hier überarbeiten

Wenn die Quantenzahlen kontinuierlich sind, dann drückt sich (14) in den Komponenten zu einer weiteren Basis f so aus[1]

$$p(x_1,t_1)\bigg|_{x_0,t_0} = \left|\iint \mathrm{d}f\mathrm{d}f'\,x_1^*(f)\,U(t_1-t_0,f,f')\,x_0(f')\right|^2 \tag{37}$$

Wenn wir von der parametrischen absoluten Zeit wegkommen wollen, dann wünschen wir uns so etwas wie

$$p(x_1,t_1)\bigg|_{x_0,t_0} = \left|\langle x_1,t_1|x_0,t_0\rangle\right|^2 \tag{38}$$

womit die bedingte Wahrscheinlichkeit gemeint ist, die Quantenwelt in den Zustand $|x_1,t_1\rangle$ zu bringen unter der Vorraussetzung, dass sie im Zustand $|x_0,t_0\rangle$ ist. x und t nummerieren nun gemeinsam die Zustandsvektoren so wie in relativistischen Quantenfeldtheorien. Jeder Zustandsvektor stellt ein bestimmtes Blockuniversum dar.

Jeder unstetige Übergang von einem Zustandsvektor zum nächsten wird in der Physik traditionell als *Messung* bezeichnet.

---

[1] Es ist $x(f) \equiv \langle f|x\rangle$ und $U(t,f,f') \equiv \langle f|\hat{U}(t)f'\rangle$.

Die Rolle des Subjekts

Subjektiv erleben wir Ereignisse in der (psychischen) Zeit. $|x,t\rangle$ steht nun aber nicht für ein Ereignis der Erfahrung eines Zustands $|x\rangle$ in der Zeit t, sondern im Allgemeinen für einen x,t-verschränkten Zustand[2]. Da das Subjekt keine Zustände erfährt, die in der Zeit verschränkt sind, muss es an der Messung in einer Weise beteiligt sein, so dass auf entschränkte Produktzustände projiziert wird. Das Subjekt muss also dafür sorgen, dass auf Produktzustände $|x_i\rangle \otimes |t_i\rangle$ projiziert wird, wobei $|t_i\rangle$ eine Zeiteigenfunktion[3] zum Zeiteigenwert t_i ist. Dadurch erfährt das Subjekt die physikalische Zeit t_i zusammen mit dem neuen Weltzustand $|x_i\rangle$. Wiederholt sich dies, dann erfährt das Subjekt eine Folge von Weltzuständen $|x_i\rangle$, die durch die Eigenzeiten t_i nummeriert sind, also bei genügender Feinheit des Prozesses vermeintlich eine quasikontinuierliche Abfolge $|x(t)\rangle$.

Sei $|y_0\rangle$ ein Blockuniversum vor der Messung, oder in Komponenten zur Produktbasis f,t ausgedrückt $y_0(f,t)$. Dann ist die Übergangswahrscheinlichkeit (38) in einen subjektiv erfahrbaren Zustand $|y_1\rangle = |x_1\rangle \otimes |t_1\rangle$

$$p(x_1,t_1)\Big|_{y_0} = \left|\iint \mathrm{d}f\mathrm{d}t\, x_1^*(f)\delta(t-t_1)\, y_0(f,t)\right|^2 = \left|\int \mathrm{d}f\, x_1^*(f)\, y_0(f,t_1)\right|^2 \tag{39}$$

Vergleichen wir dies nun mit (37), dann lesen wir ab

$$y_0(f,t_1) = \int \mathrm{d}f'\, U(t_1-t_0,f,f')\, x_0(f') \tag{40}$$

[2] Irgendeine Funktion zweier Veränderlicher $f(x,t) \equiv \langle x,t|f\rangle$ zerfällt im Allgemeinen nicht in ein Produkt $g(x)h(t)$ und ist damit im Allgemeinen x,t-verschränkt.

[3] in Komponenten also eine Delta-Distribution $\delta(t-t_i)$