

# Eine Abfolge von Blockuniversen

Harald Rieder

23. Mai 2022

## Inhaltsverzeichnis

<b>Motivation</b>	<b>1</b>
<b>Grundlagen</b>	<b>2</b>
Koordinatentransformationen, Produkträume und Verschränkung . . . . .	2
Orts-, Impuls-, Zeit- und Energieoperatoren . . . . .	3
Die Bornsche Regel . . . . .	3
<b>Die Zeit in der Quantenmechanik</b>	<b>5</b>
Zerlegung in H- und E-Raum . . . . .	5
Zeitentwicklung . . . . .	6
<b>Eine Abfolge von Blockuniversen</b>	<b>7</b>

## Motivation

Das Messproblem der Quantenmechanik entsteht aus der Vorstellung einer stetigen Entwicklung von mathematischen Größen in der als absolut angesehen gemeinsamen Zeit in Verbindung mit der Erfahrung, dass Kenntnis über das durch die mathematischen Größen beschriebene Quantending nur dann erlangt werden kann, wenn sich dabei dessen Zustand unsteig ändert. Dadurch sind zu jedem Zeitpunkt 2 verschiedene sich daran anschließende Arten von Zukünften möglich und niemand kann sagen, wann oder warum die eine oder die andere gewählt wird.

Dieses Paradoxon hat schon die besten Köpfe herausgefordert und der ein oder andere dachte sich, eine Lösung zu haben. Mitunter taucht die Denke auf, dass verschiedene Sichten auf die Quantenmechanik möglich seien, so genannte „Interpretationen der Quantenmechanik“, die am Ende doch nur eine Frage des Geschmacks seien. Wir werden hier diesen Weg nicht gehen. Statt dessen soll das Paradoxon dadurch aufgelöst werden, dass zu jedem Zeitpunkt nur eine Art von Zukunft möglich ist. Anstatt an der Vorstellung eines Zeitparameters, von dem Geschehen stetig abhängt, festzuhalten, werfen wir diese Vorstellung komplett über Bord. Es gibt einige gute Gründe, es auf diese Art zu versuchen:

1. Unterhalb der Planck-Zeit kann es keine stetige Zeitentwicklung mehr geben.

2. Eine Propagation des Geschehens durch lineare Operatoren, wie sie für die sich stetig anschließende Zukunft im Modell geschieht, treibt das Weltgeschehen eben *linear* weiter. Man kann schwerlich glauben, dass dadurch irgend etwas wie Lebendigkeit erfolgreich modelliert werden kann. Aus der klassischen Chaos-Theorie haben wir gelernt, dass nur eine nichtlineare Dynamik zu etwas führt, dass uns an Leben erinnert. Die unstetig sich anschließende Zukunft liefert uns dagegen eine nichtlineare Dynamik.
3. Um Kenntnis über ein Quantending zu erlangen ist ein Verlassen der stetigen Entwicklung notwendig. Die Dekohärenztheorie kann erklären, wie Information aus einem Quantending in seine Umgebung fließt unter der Annahme einer gemeinsamen stetigen Entwicklung. Doch wenn Kenntnis über Quantending und/oder Umgebung erlangt werden soll, ist ein unstetiger Schritt notwendig. Das *problem of outcomes* wird durch die Dekohärenztheorie nicht gelöst, und das ist das eigentliche Paradoxon.
4. Eine komplett neue Dynamik könnte erfunden werden. Das erscheint aber schwieriger, als einfach die Hälfte der Dynamik wegzuerwerfen.

Die Quantenmechanik liefert uns statistische Größen: Wahrscheinlichkeiten für Ereignisse. Wir haben gelernt, wie man Empfindungen mit den Ereignissen zu verknüpfen hat, die das mathematische Modell hergibt. Dabei hat sich herausgestellt, dass diese Theorie Häufigkeiten und Mittelwerte teilweise erschreckend genau liefern kann. Wenn die Hälfte der Dynamik über Bord geworfen werden soll, dann müssen dennoch die statistischen Aussagen der Theorie im experimentell gesteckten Rahmen erhalten bleiben. Ob dies überhaupt möglich ist, soll hier untersucht werden.

Die unstetige Dynamik hat die Eigenart, dass das Geschehen zum Erliegen kommt, wenn man immer nach derselben Information fragt. In traditioneller technischer Ausdrucksweise führt die Anwendung eines projektiven Messoperators zum „Kollaps“ des Zustandsvektors auf einen Eigenraum des Messoperators. Danach führt die Wiederholung der projektiven Messung zu keinem Verlassen des Eigenraums mehr. Um ein Geschehen allein mit der unstetigen Dynamik am Laufen zu halten benötigen wird deswegen wenigstens 2 unverträgliche Messoperatoren.

Während in gewöhnlicher Quantentheorie mit der Beobachtung üblicherweise Schluss ist, denn dann können die subjektiven Empfindungen gegen die Zahlen des mathematischen Modells verglichen werden, fordern wir ständige Beobachtungen, damit ein Geschehen überhaupt stattfinden kann. Da das menschliche Subjekt aber nur mit einer Seite der projektiven Messungen in Verbindung steht, sind ihm die anderen verborgen. Natürlich wäre es ontologisch das Einfachste anzunehmen, dass die anderen Messungen genauso wie die einen stattfinden, dass sie am Ende mit Empfindungen in Zusammenhang stehen, nur eben für andere Subjekte.

## Grundlagen

### Koordinatentransformationen, Produkträume und Verschränkung

Zu tun:

Indextransformationen, bei denen sich die Zahl der Indexe nicht ändert, entsprechen im Kontinuum Koordinatentransformationen.

Bei Bildung von Produkträumen lassen sich die Indexe der Einzelräume auf einen einzigen Produktraumindex bijektiv abbilden. Wichtig: dies gilt auch für das Kontinuum! Auch dort existieren immer bijektive Abbildungen aufgrund der Gleichmächtigkeit der beteiligten Mengen.

Transformationen, die über Teilräume hinüberreichen, ändern i.A. deren Verschränkung. Solche, die sich nur auf Teilräume beschränken, erhalten die von-Neumann-Entropie.

## Orts-, Impuls-, Zeit- und Energieoperatoren

Weil wir ihnen später begegnen werden, rufen wir uns die Matrixelemente spezieller Operatoren und die Komponenten ihrer Eigenvektoren in speziellen Vektorbasen in Erinnerung. Wir unterscheiden nicht zwischen abzählbaren und kontinuierlichen Dirac-Vektoren und verwenden durchgängig die Indexschreibweise, d.h.  $f_{x_j} \equiv f(x)$ .

Die Matrixelemente des Ortsoperator  $\hat{x}$  und die Komponenten seiner Eigenvektoren  $|x_j\rangle$  zu den Eigenwerten  $x_j$  sind in der Ortsbasis  $\{|x_j\rangle\}$

$$\langle x_j | \hat{x} x_k \rangle = x_{x_j x_k} = \delta_{jk} x_j \quad \langle x_k | x_j \rangle = \psi_{x_j x_k} = \delta_{jk} \quad (1)$$

und in der (Orts-)Impulsbasis  $\{|p_j\rangle\}$

$$\langle p_j | \hat{x} p_k \rangle = x_{p_j p_k} = i\hbar \delta_{jk} \frac{\partial}{\partial p_k} \quad \langle p_k | x_j \rangle = \psi_{x_j p_k} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{i}{\hbar} x_j p_k} \quad (2)$$

Analog sind die Matrixelemente des Zeitoperators  $\hat{t}$  und die Komponenten seiner Eigenvektoren  $|t_j\rangle$  zu den Eigenwerten  $t_j$  in der Zeitbasis  $\{|t_j\rangle\}$

$$\langle t_j | \hat{t} t_k \rangle = t_{t_j t_k} = \delta_{jk} t_j \quad \langle t_k | t_j \rangle = \psi_{t_j t_k} = \delta_{jk} \quad (3)$$

und in der (Zeit-)Impuls- oder Energiebasis  $\{|E_j\rangle\}$

$$\langle E_j | \hat{t} E_k \rangle = t_{E_j E_k} = -i\hbar \delta_{jk} \frac{\partial}{\partial E_k} \quad \langle E_k | t_j \rangle = \psi_{t_j E_k} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{i}{\hbar} t_j E_k} \quad (4)$$

## Die Bornsche Regel

In der ursprünglichen (1926) Formulierung besagte die Bornsche Regel, dass

- bei einer Messung einer Observable einer der Eigenwerte  $\{\lambda_j\}$  des zugehörigen Messoperators  $\hat{L}$  beobachtet wird.
- die Wahrscheinlichkeit für die Messung des Eigenwerts  $\lambda_j$  sich aus dem Absolutquadrat des Skalarprodukts zwischen Anfangszustand  $|\psi^{(0)}\rangle$  und Eigenvektor  $|\lambda_j\rangle$  bestimmt.

Nach der Messung liegt der Eigenzustand  $|\psi^{(1)}\rangle = |\lambda_j\rangle$  vor und bei wiederholter Messung von  $\hat{L}$  ändert sich daran nichts mehr.

Offen bleiben musste zunächst, was genau eigentlich eine Messung ist. Das Messexperiment wurde in der Sprache der klassischen Physik beschrieben. Man hatte ein paar mechanische

Größen wie Ort und Impuls, die sich in die Sprache der Quantenmechanik übertragen ließen. Irgendwo musste es einen Übergang zwischen Quantenmechanik und klassischer Physik geben, doch wo und wie war unklar.

An dieser Lage haben sich ein paar Dinge in 100 Jahren geändert:

- In den Gleichungen der Quantentheorien gibt es Größen, die kein klassisches Analogon haben, z.B. den Spin.
- Die meisten Physiker dürften daran glauben, dass die Natur vollständig quantenmechanisch zu beschreiben ist, und dass die klassische Physik irgendwie daraus abzuleiten ist.
- Mit der Dekohärenztheorie ist es mit quantenmechanischen Mitteln gelungen, mehr von dem zu beschreiben, was bei einer Messung geschieht.

Heute müssen wir uns die Messung vorstellen als einen Prozess, der ein zu beobachtendes Quantenteil zunächst quantendynamisch an die Umgebung koppelt. Dabei entsteht bei einer idealen Messung ein Zustand, der einerseits immer noch eine Überlagerung mit den ursprünglichen Amplituden  $\psi_{\lambda_j}^{(0)}$  bezogen auf die Messbasis  $\{|\lambda_j\rangle\}$  darstellt, andererseits die Messbasis maximal verschränkt mit einer entsprechenden Umgebungsbasis  $\{|e_j\rangle\}$ . Die Verschränkung soll nach der Dekohärenztheorie mittels eines in der Zeit stetigen deterministischen Prozesses  $\hat{U}(t - t_0)$  erfolgen. Dabei kann  $\hat{U}$  zunächst Quantenteil und Umgebung unabhängig entwickeln, aber zu einem späteren Zeitpunkt  $t_1$  soll  $\hat{U}$  durch den Wechselwirkungsoperator  $\hat{H}_{int}$  zwischen Quantenteil und Umgebung dominiert sein.

$$|e_0\rangle \otimes |\psi^{(0)}\rangle = |e_0\rangle \otimes \sum_j \psi_{\lambda_j}^{(0)} |\lambda_j\rangle \xrightarrow{\hat{U}(t_1-t_0)} \sum_j \psi_{\lambda_j}^{(0)} (|e_j\rangle \otimes |\lambda_j\rangle) \quad (5)$$

Dadurch ist Information über  $|\psi^{(0)}\rangle$  in der Umgebung verfügbar geworden und kann abgefragt werden. Dieser finale Abfrageschritt ist Stand heute nicht verstanden. Es ist aber gewiss, dass der Endzustand von (5) im Allgemeinen nicht bewusst erfahren werden kann, sondern nur Zustände nach bestimmten finalen Schritten, zum Beispiel Projektionen auf die Ortsbasis. Eventuell ist es auch nur der Abfrageschritt selbst, der bewusst erfahren wird. Der Abfrageschritt ist verbunden mit einem Kollaps der Überlagerung in einen der Endzustände mit der Bornschen Wahrscheinlichkeit.

$$\sum_j \psi_{\lambda_j}^{(0)} (|e_j\rangle \otimes |\lambda_j\rangle) \xrightarrow{p_j^{(0) \rightarrow (1)} = |\psi_{\lambda_j}^{(0)}|^2} |e_j\rangle \otimes |\lambda_j\rangle \quad (6)$$

$|\psi_{\lambda_j}^{(0)}|^2$  ist die Übergangswahrscheinlichkeit

$$p^{(0) \rightarrow (1)} = \left| \langle \lambda_j | \psi^{(0)} \rangle \right|^2 = \left| \langle \psi^{(1)} | \psi^{(0)} \rangle \right|^2 \quad (7)$$

in der ursprünglichen Formulierung der Bornschen Regel.

Ob nun (5) tatsächlich stattfindet ist von einem pragmatischen Standpunkt aus gesehen unerheblich, so lange sich der Dekohärenzprozess der Beobachtbarkeit aufgrund fehlender technologischer Fähigkeiten entzieht. Beobachtete Ereignisse mit ihren zugehörigen Wahrscheinlichkeiten sind am Ende dieselben. Doch seit einigen Jahren sind Dekohärenzprozesse technologisch greifbar geworden, z.B. in einem Experiment von Sonnentag und Hasselbach aus dem Jahr 2006.

Nimmt man an, dass erstens der Beobachter Information nicht direkt aus dem Quantenteil abgreifen kann sondern nur indirekt über dessen Umgebung, und zweitens die Quantentheorie am Ende der gesamten klassischen Physik zugrunde liegen muss, dann drängt sich ein Prozess (5) aus logischen Gründen geradezu auf. Die theoretische Idee reicht in das Jahr 1970 zurück.

## Die Zeit in der Quantenmechanik

### Zerlegung in H- und E-Raum

Gleichungen der Quantenmechanik sind vom Prinzip her eigentlich einfach. Ein linearer Operator  $\hat{O}$  wird angewendet auf einen Zustandsvektor  $|\psi\rangle$  und das Ergebnis soll 0 ergeben.

$$\hat{O}|\psi\rangle = 0$$

Beim Blick auf Schrödinger-, Dirac- und Klein-Gordon-Gleichungen fällt eine Gemeinsamkeit in's Auge. Der Operator  $\hat{O}$  wirkt immer in einem Produktraum  $\mathcal{H} \otimes \mathcal{E}$ . Er hat die Gestalt

$$\hat{O} = \hat{H} \otimes \hat{1}^{\mathcal{E}} - \hat{1}^{\mathcal{H}} \otimes \hat{E}$$

und ist damit die Summe aus einem Operator  $\hat{H}$ , der nur im Teilraum  $\mathcal{H}$  wirkt und einem Operator  $\hat{E}$ , der nur im Teilraum  $\mathcal{E}$  wirkt. Der Teilraum  $\mathcal{E}$  ist der Zeitunterraum und eine wählbare Basis ist die der Zeiteigenvektoren  $|t_j\rangle$ . Der Teilraum  $\mathcal{H}$  enthält alles andere.

Durch die Zerlegung bietet sich ein Produktansatz zur Lösung dieser Gleichungen an. Mit

$$|\psi\rangle = |\psi\rangle^{\mathcal{H}} \otimes |\psi\rangle^{\mathcal{E}}$$

bekommen wir

$$\hat{H}|\psi\rangle^{\mathcal{H}} \otimes |\psi\rangle^{\mathcal{E}} - |\psi\rangle^{\mathcal{H}} \otimes \hat{E}|\psi\rangle^{\mathcal{E}} = 0 \quad (8)$$

und die Gleichung zerfällt in 2 Eigenwertgleichungen für die Operatoren  $\hat{H}$  und  $\hat{E}$ .

$$\begin{aligned} \hat{H}|\psi\rangle^{\mathcal{H}} &= E|\psi\rangle^{\mathcal{H}} \\ \hat{E}|\psi\rangle^{\mathcal{E}} &= E|\psi\rangle^{\mathcal{E}} \end{aligned} \quad (9)$$

Dieses Gleichungssystem ist noch gekoppelt über die Eigenwerte  $E$ .

Aufgrund der Linearität von  $\hat{H}$  und  $\hat{E}$  sind alle Linearkombinationen von Produkten zum selben Eigenwert  $E$  ebenfalls Lösungen. Die allgemeine Lösung

$$|\psi\rangle = \sum_j \psi_j |E_j\rangle^{\mathcal{H}} \otimes |E_j\rangle^{\mathcal{E}} \quad (10)$$

mit mehr als einem Summand steht für eine Verschränkung der Teilräume  $\mathcal{H}$  und  $\mathcal{E}$ . Die Darstellung (10) von  $|\psi\rangle$  ist eine Schmidt-Zerlegung.

Die unverschränkten Lösungen  $|E_j\rangle^{\mathcal{H}} \otimes |E_j\rangle^{\mathcal{E}}$  werden üblicherweise als *stationäre Zustände* oder *Energieeigenzustände* bezeichnet. Denn der Differentialoperator  $i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ , der in den Gleichungen auftritt, muss aufgefasst werden als Matrixelemente  $E(t - t')$  des kontinuierlichen

Energieoperators  $\hat{E}$  in der Zeitdarstellung. Nähme man es genauer, müsste man immer noch die Delta-Distribution dazuschreiben:

$$E(t - t') = i\hbar \delta(t - t') \frac{\partial}{\partial t}$$

Der gesamte Produktraum  $\mathcal{H} \otimes \mathcal{E}$  kann aus den allgemeinen Produkten der Eigenvektoren von  $\hat{H}$  und  $\hat{E}$  aufgespannt werden:

$$|\psi\rangle = \sum_{jk} \psi_{jk} |E_j\rangle^{\mathcal{H}} \otimes |E_k\rangle^{\mathcal{E}} \quad (11)$$

Doch alle Zustände, die Terme mit  $j \neq k$  haben, sollen „in der Natur nicht vorkommen“. Etwas geringer könnte man auch fordern, dass sie durch die uns zur Verfügung stehenden Messprozesse nicht beobachtbar sind.

Die Bornschen Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen Lösungen sind

$$p^{(0) \rightarrow (1)} = \sum_{jk} \psi_j^{(1)*} \psi_k^{(1)} \psi_j^{(0)} \psi_k^{(0)*} \quad (12)$$

Die Bornschen Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen allgemeinen Zuständen, also auch den nicht beobachtbaren, sind

$$p^{(0) \rightarrow (1)} = \sum_{jklm} \psi_{jk}^{(1)*} \psi_{lm}^{(1)} \psi_{jk}^{(0)} \psi_{lm}^{(0)*} \quad (13)$$

## Zeitentwicklung

Oft wird die Zeitentwicklung durch einen parametrisch von der Zeitdifferenz  $t_1 - t_0$  abhängigen Zeitentwicklungsoperator ausgedrückt. Für die Übergangswahrscheinlichkeit von einem Ausgangszustand  $|\psi^{(0)}\rangle$  zur Zeit  $t_0$  zu einem Endzustand  $|\psi^{(1)}\rangle$  zur Zeit  $t_1$  gilt bei einem nicht explizit zeitabhängigen Operator  $\hat{H}$

$$p^{(0) \rightarrow (1)} = \left| \langle \psi^{(1)} | \hat{U}(t_1 - t_0) | \psi^{(0)} \rangle \right|^2 \quad (14)$$

Dazu muss bemerkt werden:

- Ein zeitabhängiger Hamiltonoperator modelliert üblicherweise einen zeitabhängigen Einfluss der Umgebung. Betrachten wir das All als Quantenwelt, dann gibt es davon keine Umgebung. Dort stünde ein zeitabhängiger Operator  $\hat{H}$  für zeitabhängige Naturgesetze. Diese Möglichkeit mag es geben, wir betrachten sie hier aber nicht.
- Was genau sich in (14) zeitlich entwickelt, ist ontologisch nicht klar. So lange die Wahrscheinlichkeit sich dabei nicht ändert, kann die Zeitentwicklung beliebig zwischen Operator und Vektoren hin- und hergeschoben werden, was in den gebräuchlichen „Bildern“, also Schrödinger-, Heisenberg- und Wechselwirkungsbild, ausgenutzt wird.
- $|\psi^{(0)}\rangle$  und  $|\psi^{(1)}\rangle$  sind Vektoren aus dem  $\mathcal{H}$  Unterraum. Statt abstrakter Vektoren aus dem  $\mathcal{E}$  Unterraum treten in der Formel nur Zeiteigenwerte  $t_0, t_1$  als Parameter auf. Auch in der relativistischen Quantenmechanik wird das invariante Skalarprodukt definiert als

dreidimensionales Integral proportional zu  $\int \frac{d^3 \vec{p}}{p_0} \psi^*(p) \phi(p)$ . Diese Integration „auf der Massenschale“ entspricht der Vermeidung der Zustände (11), bei denen  $j \neq k$  ist.  $p_0$  gehört zwar zum  $\mathcal{E}$  Raum, ist aber in dieser Formel nicht unabhängig sondern eine Funktion von  $\vec{p}$  aus dem  $\mathcal{H}$  Raum. Diese Ungleichbehandlungen wirken verstörend, wenn man sie mit der zugrunde liegenden symmetrischen Aufgabenstellung (9) vergleicht.

- Es handelt sich bei (14) um die ursprüngliche Formulierung (7) der Bornschen Wahrscheinlichkeit. Der Verschränkungsprozess mit der Umgebung ist nicht ausmodelliert.

In der Energiebasis des  $\mathcal{H}$  Raumes ist  $\hat{U}$  bei einem nicht explizit zeitabhängigen Hamilton-Operator diagonal. Die Matrixelemente in der Energiebasis sind

$$U_{E_j E_k} = \delta_{E_j E_k} e^{-\frac{i}{\hbar} E_j (t_1 - t_0)} = \delta_{E_j E_k} (e^{\frac{i}{\hbar} E_j t_1})^* e^{\frac{i}{\hbar} E_j t_0} \quad (15)$$

In Komponenten stellt sich (14) dann so dar:

$$p^{(0) \rightarrow (1)} = \left| \sum_j (\psi_{E_j}^{(1)\mathcal{H}} e^{\frac{i}{\hbar} E_j t_1})^* \psi_{E_j}^{(0)\mathcal{H}} e^{\frac{i}{\hbar} E_j t_0} \right|^2 \quad (16)$$

In den Exponentialfunktionen erkennen wir die Komponenten von Zeiteigenvektoren in der Energiedarstellung aus (4) wieder. Wir haben es also eigentlich mit Skalarprodukten von Vektoren aus dem  $\mathcal{H} \otimes \mathcal{E}$  Raum zu tun

$$|\psi^{(0)}\rangle = \sum_j \psi_{E_j}^{\mathcal{H}(0)} |E_j^{\mathcal{H}}\rangle \otimes \psi_{t_0 E_j}^{\mathcal{E}} |E_j^{\mathcal{E}}\rangle = \sum_j \langle E_j | \psi_{E_j} \rangle^{\mathcal{H}} \langle E_j | t_0 \rangle^{\mathcal{E}} |E_j^{\mathcal{H}}\rangle \otimes |E_j^{\mathcal{E}}\rangle$$

$$|\psi^{(1)}\rangle = \sum_j \psi_{E_j}^{\mathcal{H}(1)} |E_j^{\mathcal{H}}\rangle \otimes \psi_{t_1 E_j}^{\mathcal{E}} |E_j^{\mathcal{E}}\rangle = \sum_j \langle E_j | \psi_{E_j} \rangle^{\mathcal{H}} \langle E_j | t_1 \rangle^{\mathcal{E}} |E_j^{\mathcal{H}}\rangle \otimes |E_j^{\mathcal{E}}\rangle$$

also mit Vektoren der Form (10).

## Eine Abfolge von Blockuniversen

Wir wollen nun die deterministische Zeitentwicklung durch einen stochastischen Prozess ersetzen. Der Ausgangspunkt dazu ist (6). Das heißt: ein Beobachter nimmt einen „Kollaps“ wahr, bei dem ein zwischen  $\mathcal{H}$ ,  $\mathcal{E}$  und der Umgebung verschränkter Zustand entschärft wird. Dieser Prozessschritt soll sein

$$\sum_{jk} \psi_{jk} |e_{jk}\rangle \otimes |\lambda_j\rangle \otimes |t_k\rangle \xrightarrow{p_{jk} = |\psi_{jk}|^2} |e_{jk}\rangle \otimes |\lambda_j\rangle \otimes |t_k\rangle$$

Es werden also beobachtet der Zustand  $|\lambda_j\rangle$  und gleichzeitig die Zeit  $|t_k\rangle$ , nicht der Zustand  $|\lambda_j\rangle$  zu einer Zeit  $t$ . Dadurch ist die Dynamik am Ende angekommen. Jede weitere Beobachtung liefert immer wieder dieselben Eigenwerte und damit auch dieselbe Zeit  $t_k$ .

Die Frage stellt sich nun, zu welcher Zeit die Beobachtung der Zeit eigentlich stattfindet. Diese Zeit, in der alles Wahrgenommene beobachtet wird, kann natürlich nicht mehr dieselbe Zeit sein wie die, die sich erst dann preisgibt, wenn sie durch eine bestimmte Entschärkung beobachtet wird. Da wir außer dem Beobachter sonst nichts mehr haben, muss diese außerhalb des physikalischen Modells befindliche Zeit zum Beobachter gehören. Es muss eine psychische Zeit sein.

Für jeden physikalischen Zeitpunkt  $t_k$  müssen die Wahrscheinlichkeiten denen von (6) entsprechen. Die  $|\psi_{jk}|^2$  müssen also proportional sein zu den  $|\psi_{\lambda_j}|^2$ , das heißt wir können setzen

$$\psi_{jk} = \psi_{\lambda_j} \psi_{t_k}$$

Die  $\psi_{t_k}$  sind frei wählbare komplexe Zahlen, es müssen nur die Normierungsbedingungen

$$\sum_j |\psi_{\lambda_j}|^2 = 1 \quad \sum_k |\psi_{t_k}|^2 = 1$$

erfüllt sein. Damit haben wir

$$\sum_{jk} \psi_{\lambda_j} \psi_{t_k} |e_{jk}\rangle \otimes |\lambda_j\rangle \otimes |t_k\rangle \xrightarrow{p_{jk} = |\psi_{\lambda_j}|^2 \cdot |\psi_{t_k}|^2} |e_{jk}\rangle \otimes |\lambda_j\rangle \otimes |t_k\rangle \quad (17)$$

Den kontinuierlich parametrisierten Operator  $\hat{U}(t_1 - t_0)$  nähern wir an durch Potenzen  $\hat{u}^n$  eines kleinstmöglichen Zeitentwicklungsoperators  $\hat{u}$ . Dabei stellen wir uns  $t_1 - t_0$  vor als Vielfaches einer kleinstmöglichen Zeitdifferenz  $t_p$ .

$$t_1 - t_0 = nt_p \quad \hat{u} = \hat{U}(t_p) \quad \hat{u}^n = \hat{U}(t_1 - t_0)$$

Der Operator  $\hat{U}$  ist dabei der aus (5) und nicht der aus (14). Er wirkt im Produktraum des Quantendings und seiner Umgebung, aber nicht im Unterraum  $\mathcal{E}$ , welcher von den Zeiteigenvektoren aufgespannt wird.

Die deterministische Zeitabhängigkeit des Ausgangszustands im konventionellen Schrödingerbild drückt sich aus durch

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t - t_0) |\psi^{(0)}\rangle$$

In unserem neuen Bild transportiert die k-malige Anwendung von  $\hat{u}$  vom Ausgangszustand zu jenem, der mit  $|t_k\rangle$  verschränkt sein soll.

$$|\psi^{(k)}\rangle = \hat{u}^k |\psi^{(0)}\rangle$$

Damit eine deterministische Zeitentwicklung vorgetäuscht werden kann, muss die Überlagerung auf der linken Seite von (17) damit diese Gestalt annehmen

$$\sum_{jk} \psi_{\lambda_j}^{(0)} \psi_{t_k} \hat{u}^k (|e_{jk}\rangle \otimes |\lambda_j\rangle) \otimes |t_k\rangle \quad (18)$$

Diese kollabieren in der Beobachtung zu den Vektoren auf der rechten Seite von (17). Die  $|\psi_{\lambda_j}|^2$  haben wir durch (18) so gewählt, dass sie die konventionelle Quantenmechanik wiedergeben, und die  $\psi_{t_k}$  sind nach wie vor frei. Damit ein Kollaps stattfinden kann bzw. vor der Beobachtung eine Verschränkung vorliegt, müssen wenigstens 2 der  $\psi_{t_k}$  ungleich 0 sein.

Damit sind wir am Ziel angekommen. Allerdings besteht noch die Unschönheit, dass der Prozess nach der ersten Beobachtung zum Erliegen kommt. Wir brauchen einen weiteren Prozessschritt, der wieder eine Überlagerung der Form (18) aufbaut.

Dieser andere Prozessschritt ist für menschliche Beobachter verborgen, da wir postuliert haben, dass der Kollaps der Überlagerung das ist, das erfahren wird.



Dieser andere Prozessschritt darf aus mehreren Unterschritten bestehen und kann aus dem Unterraum der Lösungsvektoren (10) hinausführen. Der Prozess muss nicht markovsch sein und darf ein Gedächtnis haben.

All das können wir nicht wissen, wenn es nicht gelingt, weitere Beobachtungsperspektiven zu erschließen. Das ist der Preis dafür, dass wir nur noch eine Zeitentwicklung haben und damit das Messproblem gelöst ist.

Ein einfaches Beispiel in einem Hilbertraum aus 2 Qutrits und einem einfachen verborgenen Prozessschritt enthält der Artikel Über psychische und physikalische Zeit. Darin findet sich auch die Idee, die  $\psi_{t_k}$  durch den verborgenen Schritt so zu belegen, dass die „Zeit in eine Richtung geht“. Genauer gesagt soll die gerichtete psychische Zeit im Kollaps an immer andere Zeiteigenvektoren gebunden werden, die eben dadurch ihre subjektive zeitliche Ordnung bekommen.

———— diskret

Schrödi + 1 Kollaps

$$p^{(0) \rightarrow (1)} = \left| \sum_{x'x} \psi_{x'}^{(1)*} U(\Delta t)_{x'x} \psi_x^{(0)} \right|^2 \quad (19)$$

Elementares  $\Delta t$  Planck-Zeit  $\hat{U} = \hat{u}^{t/t_{Planck}}$

$$p^{(0) \rightarrow (1)} = \left| \sum_{x'x} \psi_{x'}^{(1)*} u_{x'x} \psi_x^{(0)} \right|^2 \quad (20)$$

1 Zwischenbasis, 2 Kollapse

$$|\psi\rangle^{(0)} = \sum_x \psi_x^{(0)} |x\rangle \otimes |t_0\rangle \quad |\psi\rangle^{(1)} = \sum_x \psi_x^{(1)} |x\rangle \otimes |t_1\rangle \quad (21)$$

Zwischenbasis  $\{|z\rangle\}$   $N \cdot M$  Elemente

$$|x\rangle \otimes |t\rangle = \sum_z V_{xtz} |z\rangle \quad |z\rangle = \sum_{xt} V_{zxt}^* |x\rangle \otimes |t\rangle \quad (22)$$

$$\langle x| \otimes \langle t| = \sum_z V_{zxt}^* \langle z| \quad \langle z| = \sum_{xt} V_{xtz} \langle x| \otimes \langle t|$$

$$p^{(0) \rightarrow (z)} = \left| \langle z| \hat{V} (|x\rangle \otimes |t_0\rangle) \right|^2 = \left| \sum_{xtx'} \psi_{x'}^{(0)} \langle x'| \otimes \langle t| V_{xtz} |x\rangle \otimes |t_0\rangle \right|^2 \quad (23)$$

$$p^{(0) \rightarrow (z)} = \left| \sum_x \psi_x^{(0)} V_{xt_0 z} \right|^2 \quad (24)$$

analog

$$p^{(z) \rightarrow (1)} = \left| \sum_x \psi_x^{(1)} V_{xt_1 z} \right|^2 \quad (25)$$

Gesamtübergangswahrscheinlichkeit

$$p^{(0) \rightarrow (1)} = \sum_z p^{(0) \rightarrow (z)} p^{(z) \rightarrow (1)} = \sum_z \left( \left| \sum_x \psi_x^{(1)} V_{xt_1 z} \right|^2 \left| \sum_x \psi_x^{(0)} V_{xt_0 z} \right|^2 \right) \quad (26)$$

$$p^{(0) \rightarrow (1)} = \sum_z \left| \sum_{x'x} \psi_{x'}^{(1)} V_{x't_1 z} V_{xt_0 z} \psi_x^{(0)} \right|^2 \quad (27)$$

Also

$$\left| \sum_{x'x} \psi_{x'}^{(1)*} u_{x'x} \psi_x^{(0)} \right|^2 = \sum_z \left| \sum_{x'x} \psi_{x'}^{(1)} V_{x't_1 z} V_{xt_0 z} \psi_x^{(0)} \right|^2 \quad (28)$$

Ausmultipliziert links

$$\sum_{x'''x''x'} \psi_{x'''}^{(1)} \psi_{x''}^{(0)*} \psi_{x'}^{(1)*} \psi_x^{(0)} u_{x'''x''}^* u_{x'x} \quad (29)$$

rechts

$$\sum_{z x'''x''x'} \psi_{x'''}^{(1)} \psi_{x''}^{(0)*} \psi_{x'}^{(1)*} \psi_x^{(0)} V_{x'''t_1 z} V_{x''t_0 z}^* V_{x't_1 z}^* V_{xt_0 z} \quad (30)$$

Muss für alle  $|\psi^{(0)}\rangle$  und  $|\psi^{(1)}\rangle$  gelten, deshalb

$$u_{x'''x''}^* u_{x'x} = \sum_z V_{x'''t_1 z} V_{x''t_0 z}^* V_{x't_1 z}^* V_{xt_0 z} \quad (31)$$

Unitarität von  $u$  und  $V$  sind zusätzlich zu fordern!

$$\sum_{x''} u_{x'x''} u_{xx''}^* = \delta_{x'x} \quad \sum_z V_{x't' z} V_{xt z}^* = \delta_{x'x} \delta_{t't} \quad \sum_{xt} V_{xt z'} V_{xt z}^* = \delta_{z'z} \quad (32)$$

(14) diagonalisiert durch unitäre Matrix  $W$  im  $x$ -Unterraum. D.h. auf  $V$  wirkt  $W \otimes 1$ .

$$U_{x'x t't} = e^{i\varphi_x(t'-t)} \delta_{x'x} \quad (33)$$

$$e^{i(\varphi_x - \varphi_{x''})(t'-t)} \delta_{x'''x''} \delta_{x'x} = \sum_z V_{x'''t' z} V_{x''t z}^* V_{x't' z}^* V_{xt z}$$

$$\varphi_x \in \mathbb{R}$$

$$V_{xt z} \in \mathbb{C}$$

$$x \in \{1, 2, \dots, N_x\}$$

$$t \in \{1, 2, \dots, N_t\}$$

$$z \in \{1, 2, \dots, N_x \cdot N_t\}$$

(34)

Nur noch Unitarität von  $V$  ist zusätzlich zu fordern!

$$\sum_z V_{x't' z} V_{xt z}^* = \delta_{x'x} \delta_{t't} \quad \sum_{xt} V_{xt z'} V_{xt z}^* = \delta_{z'z} \quad (35)$$