

# Quanteninformation

---

Harald Rieder, 2017

1	Mathe-Auffrischung .....	3
1.1	Vektoren und Matrizen .....	3
1.1.1	Addition .....	4
1.1.2	Multiplikation .....	4
1.1.3	Weitere Operationen / Besondere Matrizen .....	6
1.1.4	Transformationen.....	8
1.2	Analysis.....	10
1.2.1	Ableitungsregeln.....	10
1.2.2	Skalarprodukt .....	10
1.2.3	Delta-Distribution .....	10
1.2.4	Reihenentwicklungen .....	11
1.2.5	Partielle Ableitungen.....	12
1.2.6	Differentialgleichungen .....	13
1.3	Komplexe Zahlen .....	16
1.3.1	Real- und Imaginärteil .....	16
1.3.2	Addition .....	16
1.3.3	Multiplikation .....	16
1.3.4	Betrag .....	16
1.3.5	Polardarstellung .....	17
1.3.6	Komplexe Konjugation .....	17
1.3.7	Physikalische Bedeutung .....	17
2	Gruppen.....	18
3	Der unitäre Vektorraum .....	19
3.1	Basisvektoren .....	20
3.2	Diracsche Vektoren .....	21
3.3	Zusammenfassende Schreibweise .....	21
3.4	Skalarprodukt in Komponentenform .....	22
3.5	Unitäre Basistransformationen .....	22
3.6	Lineare Operatoren .....	23
3.6.1	Tensorprodukt als linearer Operator .....	24
3.6.2	Matrixelemente eines Operators .....	25

3.6.3	Spezielle Operatoren .....	26
3.6.4	Eigenwerte und Eigenvektoren .....	28
3.6.5	L-Darstellung des unitären Vektorraums .....	29
3.6.6	Produktraum .....	30
4	Information.....	34
4.1	Shannonsche Informationstheorie – Grundlegende Begriffe .....	34
4.1.1	Der Informationsgehalt stochastischer Experimente.....	35
4.2	Information in der Natur? .....	35
5	Philosophischer Ausflug .....	37
5.1	Was gibt es nun wirklich?.....	39
5.2	Warum sehen wir eine andere Welt? .....	40
6	Quantentheorie.....	41
6.1	Experimentelle Befunde .....	42
6.1.1	Fotoelektrischer Effekt .....	42
6.1.2	Schwarzkörperstrahlung.....	42
6.1.3	Doppelspalt.....	42
6.1.4	Stern-Gerlach Experimente .....	43
6.2	Formulierung der Quantentheorie.....	45
6.2.1	Mathematische Formulierung der nicht-relativistischen Quantenmechanik .....	47
6.3	Erste Anwendungen der Quantentheorie .....	50
6.3.1	Wasserstoffproblem .....	53
6.4	Messungen .....	59
6.4.1	Die Kollaps-Interpretation .....	59
6.4.2	Von Neumann-Messprozess.....	60
6.4.3	Schrödingers Gedankenexperiment: die Schrödinger-Katze .....	61
6.4.4	Wigners Gedankenexperiment: „Wigners Freund“ und Heisenbergesche Schnitte....	62
6.4.5	Dekohärenztheorie.....	63
6.5	Verschränkung.....	63
6.5.1	Verschränkte Zustände.....	63
6.5.2	EPR-Gedankenexperiment und –„Paradoxon“.....	64
6.5.3	Offene Quantensysteme und Dichteoperatoren .....	65
7	Quanteninformation .....	66
7.1	No Cloning Theorem.....	66
7.2	Qubits und Quantenregister.....	68
7.3	Quantengatter als unitäre Transformationen.....	69

7.3.1	Pauli-X-Gatter (Nicht-Gatter) .....	70
7.3.2	Hadamard (H) .....	70
7.3.3	Controlled Not (CNOT) .....	70
7.4	Ein einfacher Quantenalgorithmus: Deutsch – Jozsa .....	71
7.4.1	Der Algorithmus von Deutsch .....	71
7.4.2	Der Algorithmus von Deutsch-Josza.....	73
7.5	Quantenteleportation .....	73
7.6	Quantenkryptographie .....	73
8	Schlussbemerkungen.....	74
9	Anhang.....	74
9.1	Der Produktraum zweier Spinoren.....	74
9.2	Der Produktraum zweier „Teilchen“ .....	74
9.3	Relativität der Verschränkung.....	75
9.3.1	Beispiel im Hilbertraum-Formalismus .....	75
9.3.2	Beispiel in Orts-Darstellungen .....	75
9.4	Beispiel Deutsch-Josza mit 2 Eingabebits.....	76

## 1 Mathe-Auffrischung

### 1.1 Vektoren und Matrizen

Spalten- und Zeilenvektoren mit Indexschreibweise

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = (4 \quad 6 \quad 3 \quad 7) \quad a_i \quad b_j \quad (1)$$

Matrizen mit Indexschreibweise

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 9 \\ 4 & 8 & 2 \\ 8 & 3 & 7 \\ 5 & 9 & 1 \end{pmatrix} \quad M_{ij} \quad (2)$$

- Spalten- und Zeilenvektoren sind auch nur Matrizen! Ein Spaltenvektor ist eine einspaltige Matrix und ein Zeilenvektor eine einzeilige Matrix.
- Verallgemeinerung: Tensor n-ter Stufe. Skalare sind Tensoren nullter Stufe, Vektoren Tensoren erster Stufe, Matrizen Tensoren zweiter Stufe, ...
- Quadratische Matrizen: Zeilenzahl = Spaltenzahl
- Physik: nur quadratische Matrizen (und kubische Tensoren 3. Stufe, ...) spielen eine Rolle.

Determinanten von Matrizen

$$\det \mathbf{A} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (3)$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \quad (4)$$

usw.

### 1.1.1 Addition

Matrizen müssen gleiche Anzahl von Spalten und Zeilen haben, damit sie addiert werden können.

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} \quad M_{ij} + N_{ij} \quad (5)$$

- assoziativ:  $(M + N) + O = M + (N + O) = M + N + O$
- kommutativ:  $M + N = N + M$
- neutrales Element ist die Null-Matrix

### 1.1.2 Multiplikation

#### 1.1.2.1 Produkt aus Skalar und Matrix

$$5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -15 & 10 \\ 5 & 10 & 35 \end{pmatrix} \quad aM_{ij} \quad (6)$$

#### 1.1.2.2 Skalarprodukt von Vektoren

Diesmal wird nicht mit einem Skalar multipliziert, sondern das Ergebnis der Multiplikation ist ein Skalar.

Rechts die Schreibweise mit Einsteinscher Summenkonvention: über Indizes, die doppelt vorkommen, wird automatisch summiert.

$$c = \sum_{i=1}^m a_i \cdot b_i \quad c = a_i b_i \quad (7)$$

**WAS IST DAS PRODUKT VON:**

$$(1 \quad -3 \quad 2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \quad (8)$$

zur verschiedenen Schreibweise der beiden Vektoren siehe unten

- Vektoren, deren Skalarprodukt 0 ergibt, heißen orthogonal.
- Ein Satz von Vektoren ist genau dann linear unabhängig, wenn sich keiner von ihnen als Linearkombination aus den anderen darstellen lässt. Orthogonale Vektoren sind linear unabhängig.

#### 1.1.2.3 Betrag

Durch die Multiplikation kann man den Betrag eines Vektors definieren:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} \quad (9)$$

#### 1.1.2.4 Matrizenmultiplikation

Alle Zeilenvektoren der 1. Matrix werden mit allen Spaltenvektoren der 2. Matrix skalarmultipliziert, siehe (7).

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad C_{ij} = \sum_{s=1}^m A_{is} \cdot B_{sj} \quad C_{ij} = A_{is} \cdot B_{sj} \quad (10)$$

Ist A einzeilig und B einspaltig, dann haben sie beide nur den Index s, und (10) wird zu (7).

- assoziativ:  $(M N) O = M (N O) = M N O$
- **nicht-kommutativ:**  $M N$  und  $N M$  sind im Allgemeinen verschieden! Matrizen können dadurch Vorgänge modellieren, die bei der Vertauschung einzelner Schritte nicht zum gleichen Ergebnis führen.
- neutrales Element ist die Einheitsmatrix

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad \delta_{ij} \quad (11)$$

#### 1.1.2.5 Tensorprodukt

Beim Tensorprodukt ergeben 2 Vektoren eine Matrix. Dieser Mechanismus ist bereits in (10) enthalten!

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \cdot (1 \quad -3 \quad 2) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -6 & 4 \\ 7 & -21 & 14 \end{pmatrix} \quad (12)$$

- Nicht alle Matrizen können aus Vektoren auf diese Art produziert werden.
- Alle Matrizen lassen sich als Summe von Tensorprodukten darstellen. Nicht eindeutig!
- Wichtig für die Quantentheorie: Projektionsoperatoren, Dichtematrix, ...

##### A) IST DIESE MATRIX<sup>1</sup> EIN TENSORPRODUKT AUS VEKTOREN?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

##### B) IST DIE EINHEITSMATRIX EIN TENSORPRODUKT?

#### 1.1.2.6 Vektorprodukt

Aus 2 Vektoren entsteht wieder ein Vektor. In der Physik: Drehimpuls, anderes Transformationsverhalten („axialer Vektor“) wie die beiden ursprünglichen Vektoren. Historisch aus der Vorstellung eines dreidimensionalen Raums heraus entstanden.

Kann auch mit dem Levi-Civita-Tensor (total antisymmetrischer Tensor 3. Stufe) ausgedrückt werden:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \sum_{i,j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} a_i b_j \vec{e}_k \quad c_k = \varepsilon_{ijk} a_i b_j \quad (14)$$

[Dadurch abweichendes Transformationsverhalten eher einsichtig. Richtigerweise sollte man zwischen ko- und kontrvarianten Indizes unterscheiden. Dazu weiter unten...]

---

<sup>1</sup> Diese Matrix ist ein sogenannter Projektor.

Kann auf mehr Dimensionen verallgemeinert werden und tritt in der Physik hin und wieder auf. Wir werden ihn in der Quanteninformation eher nicht brauchen.

### 1.1.3 Weitere Operationen / Besondere Matrizen

#### 1.1.3.1 Spur

Die Spur einer quadratischen Matrix ist die Summe ihrer Hauptdiagonalelemente (**blau**).

$$\text{Tr} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -6 & 4 \\ 7 & -21 & 14 \end{pmatrix} = 9 \quad \text{Tr}(M_{ij}) = M_{ii} \quad (15)$$

**ZEIGE MIT DER INDEXSCHREIBWEISE, DASS GILT**

$$\text{Tr}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \text{Tr}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) \quad (16)$$

#### 1.1.3.2 Transposition / Transponierte Matrix

Zeilen und Spalten werden getauscht. Indexschreibweise: Zeilen- und Spaltenindizes werden getauscht.

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad (M^T)_{ij} = M_{ji} \quad (17)$$

Es gilt:

$$(\mathbf{M}^T)^T = \mathbf{M} \quad (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T \quad (18)$$

#### 1.1.3.3 Symmetrische Matrizen / Symmetrierung

Eine symmetrische Matrix ist gleich ihrer Transponierten.

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \quad M_{ij}^T = M_{ji} = M_{ij} \quad \mathbf{M}^T = \mathbf{M} \quad (19)$$

Erzeugung symmetrischer Matrizen aus beliebigen Matrizen:

$$\mathbf{M} + \mathbf{M}^T \quad (20)$$

Eine antisymmetrische Matrix ist gleich dem Negativen ihrer Transponierten.

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}^T = -\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \quad M_{ij}^T = M_{ji} = -M_{ij} \quad \mathbf{M}^T = -\mathbf{M} \quad (21)$$

**WIE KANN AUS EINER BELIEBIGEN MATRIX ANALOG ZUR SYMMETRIERUNG EINE ANTISYMMETRISCHE MATRIX ERZEUGT WERDEN?**

(22)

#### 1.1.3.4 Inverse Matrizen

Definition:

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{M}^{-1} = \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{M} = \mathbf{1} \quad (23)$$

**ZEIGE, DASS BEIDE PRODUKTE DIE EINHEITSMATRIX ERGEBEN!**

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad (24)$$

- Die Inverse der Inversen ist die ursprüngliche Matrix.
- Es gibt Matrizen, die ihre eigenen Inversen sind.

Es gilt:

$$(\mathbf{M}^{-1})^{-1} = \mathbf{M} \quad (c\mathbf{M})^{-1} = c^{-1}\mathbf{M}^{-1} \quad \det(\mathbf{M}^{-1}) = \det(\mathbf{M})^{-1} \quad (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1} \quad (25)$$

### 1.1.3.5 Eigenwerte und Eigenvektoren quadratischer Matrizen

$x$  ist ein Spaltenvektor. Dann ist

$$\mathbf{A} \cdot x = \lambda x \quad (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{1}) \cdot x = 0 \quad (26)$$

ein homogenes lineares Gleichungssystem, lösbar wenn

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{1}) = 0 \quad (27)$$

Charakteristisches Polynom: seine Nullstellen sind die Eigenwerte. Zu jedem Eigenwert gehört ein Eigenvektor. Ist  $A$  eine  $n \times n$  Matrix, dann gibt es höchstens  $n$  Eigenwerte.

Sind Eigenwerte gleich, dann heißen sie (Physik, historisch): entartet. Zu einem  $k$ -fachen Eigenwert gehören  $k$  Eigenvektoren, die einen  $k$ -dimensionalen Unterraum aufspannen ( $k \leq n$ ).

Die Eigenwerte von Matrizen werden uns in der Quantentheorie als mögliche Messwerte wiederbegegnen. Die Eigenwerte einer Qubit-Messung bezeichnet man immer als 0 und 1, egal welche physikalischen Messwerte ihnen entsprechen.

### 1.1.3.6 Orthogonale (Quadratische) Matrizen

Definition

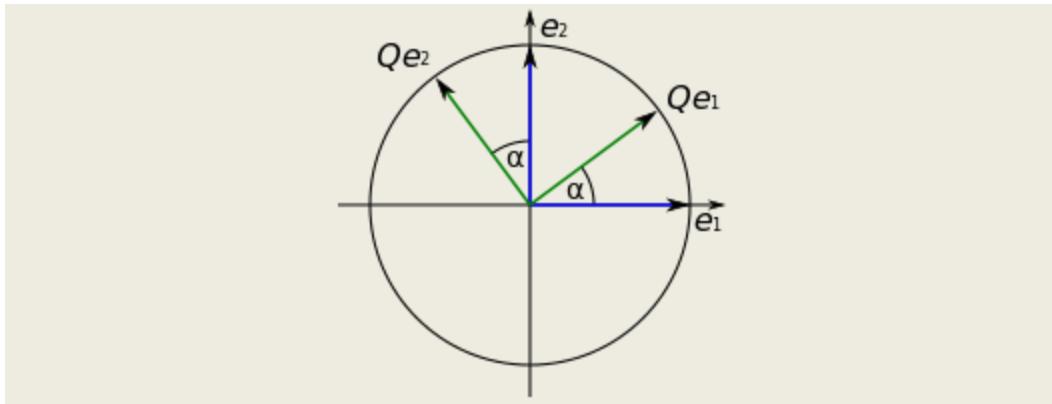
$$\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{1} \quad (28)$$

D.h. automatisch

- Mit  $\mathbf{Q}$  ist auch ihre Transponierte orthogonal.
- Die Zeilenvektoren sind orthogonal.
- Die Spaltenvektoren sind orthogonal.
- Die Zeilen- und Spaltenvektoren sind auf 1 normiert.

**ZEIGE, DASS DIE 2-DIMENSIONALE DREHMATRIX ALL DAS ERFÜLLT!**

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (29)$$



Weiteres:

- $\det Q = 1$
- Skalarprodukt der transformierten Vektoren = Skalarprodukt der untransformierten Vektoren.
- Eigenwerte sind +1 und/oder -1.
- Spiegelungen sind auch orthogonale Matrizen. Physik: Paritätsoperation spiegelt die Ortskoordinaten.
- Orthogonale Gruppe  $O(n)$ , ohne Spiegelungen:  $SO(n)$ . Kommt noch...

#### 1.1.4 Transformationen

Die Objekte der Physik sollen Modelle der Wirklichkeit sein. Soll die Wirklichkeit objektiv sein, so erwarten wir, dass sie nicht davon abhängt, welches Koordinatensystem wir wählen: Meter oder Zoll, Sekunden oder Minuten als Zeiteinheit, usw.

In der klassischen Mechanik glaubt man daran, dass die Gesetze unter diesen Transformationen (10-parametrische Galilei-Gruppe + Spiegelungen + Zeitumkehr) invariant sein müssen<sup>2</sup>:

- Drehungen, s.o.
- Spiegelungen  $x' = -x$  (Quantentheorie  $\rightarrow$  Parität)
- Zeitumkehr  $t' = -t$
- Translationen  $x' = x + b$  ( $\rightarrow$  Ableitungen und Entfernungen, keine absoluten Orte)
- Translationen  $t' = t + a$  ( $\rightarrow$  Ableitungen nach der Zeit, keine absolute Zeit)
- Gleichförmige Bewegungen (Relativitätsprinzip)  $x' = x + v t$

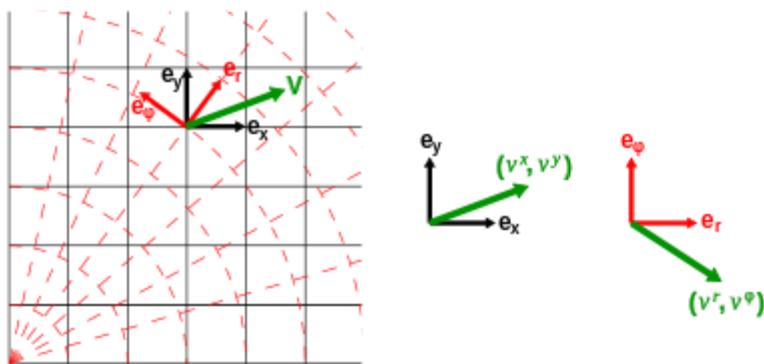
Für skalare Größen gilt: sie ändern sich dann nicht. Die Temperatur (statistische Physik: mittlere kinetische Energie, also klassische Mechanik) an einem Punkt (Objekt der Wirklichkeit) soll den gleichen Wert haben, egal ob wir direkt darauf schauen oder uns drehen und dann (wieder stillstehend) das Thermometer aus dem Augenwinkel heraus betrachten. Sie ändert sich auch nicht, wenn wir am Thermometer mit konstanter Geschwindigkeit vorbeifahren. Bei beschleunigten

---

<sup>2</sup> Dieser Glaube betrifft die fundamentalen Grundgesetze. Es gibt viele Gleichungen der klassischen Physik, die nicht alle dieser Symmetrien erfüllen. Wenn erste Ableitungen der Zeit auftreten, dann verschwindet die Zeitumkehrinvarianz wie z.B. in der Wärmeleitungsgleichung. Die Wärmeleitungsgleichung kann nicht zu einer fundamentalen Beschreibung der Natur gehören. Sie muss mit Hilfe komplizierter mikroskopischer Modelle aus invarianten Gleichungen abgeleitet werden.

Bewegungen können sich die Gesetze jedoch ändern und tun dies auch fast immer, z.B. Corioliskraft, Zentrifugalkraft.

Für vektorielle Größen wie zum Beispiel das elektrische Feld gilt: sie ändern ihren Betrag nicht, der ja eine skalare Größe ist, aber ihre Richtung in Bezug auf das neue Koordinatensystem. Vektoren in der Physik sind nicht irgendwelche Zahlen in Spalten oder Zeilen, sondern Größen, die sich bei Transformationen wie ein Vektor transformieren, d.h. entweder kovariant (gleich) oder kontravariant (gegenläufig) zum **Transformationsverhalten der Vektoren, die das Koordinatensystem aufspannen**: Jeder Basisvektor des neuen Koordinatensystems lässt sich als Linearkombination aus den Basisvektoren des alten Koordinatensystems ausdrücken (danach „entwickeln“). Dieser lineare Zusammenhang zwischen neuen und alten Basisvektoren lässt sich in Matrixform schreiben und definiert die **Transformationsmatrix**.



Es muss zwischen den Objekten, den Tensoren n-ter Stufe, und ihren Zahlenwerten unterschieden werden. Wenn wir etwas rechnen wollen, brauchen wir immer Zahlen, dazu müssen wir eine Basis von Koordinatenvektoren festsetzen. Ein Zahlentupel eines Vektors sind seine Komponenten bezüglich dieser Basis. Sie sind nicht mit dem Vektor selbst zu verwechseln! Der Vektor entsteht erst durch das Produkt aus Komponenten und Basisvektoren:

$$\mathbf{v} = (v_x \quad v_y) \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \end{pmatrix} = (v_r \quad v_\varphi) \begin{pmatrix} \mathbf{e}_r \\ \mathbf{e}_\varphi \end{pmatrix} \quad \mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i = v'^j \mathbf{e}'_j \quad (30)$$

Hat man die Komponenten eines Vektors, so kann eine Drehung oder Spiegelung durch eine Matrix ausgedrückt werden.

Drehmatrix  $\mathbf{Q}(\alpha)$ , im Beispiel sogar an jedem Punkt anders ( $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{Q} = \mathbf{1}$ ):

$$(v_x \quad v_y) \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \end{pmatrix} = (v_r \quad v_\varphi) \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{Q} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_r \\ \mathbf{e}_\varphi \end{pmatrix} \quad (31)$$

Die Basisvektoren transformieren sich kovariant, die Komponenten kontravariant. Wenn wir die krummlinigen Koordinaten als neue, gestrichene Koordinaten auffassen, und die kartesischen als alte, ungestrichene, dann gilt  $\mathbf{v}' = \mathbf{Q} \mathbf{v}$ .<sup>3</sup>

In modernen Formulierungen wird mit n-Formen gearbeitet. Ein Skalar entsteht durch die Anwendung einer 1-Form (auch: „lineares Funktional“) auf einen Vektor. Werden die Vektoren nach

<sup>3</sup> Üblicher scheint diese Wahl von Normaler und Inverser (bzw. Transponierter) doch eigentlich ist es egal, wie herum man es macht. Man muss nur wissen, was gemeint ist. Siehe z.B.

[http://homepages.engineering.auckland.ac.nz/~pkel015/SolidMechanicsBooks/Part\\_III/Chapter\\_1\\_Vectors\\_Tensors/Vectors\\_Tensors\\_13\\_Coordinate\\_Transformation\\_Tensors.pdf](http://homepages.engineering.auckland.ac.nz/~pkel015/SolidMechanicsBooks/Part_III/Chapter_1_Vectors_Tensors/Vectors_Tensors_13_Coordinate_Transformation_Tensors.pdf)

einer Basis entwickelt, dann gibt es dazu eine analoge Entwicklung der 1-Formen nach ihrer Basis. Die 1-Formen leben im sogenannten Dualraum. Transformieren sich die Komponenten der Vektoren kontravariant, dann transformieren sich die Komponenten der 1-Formen im dualen Raum kovariant. Die Unterscheidung in der Indexschreibweise wird durch Hoch- (kontra) und Tiefstellen (ko) erreicht.

Beispiel: Drehimpuls mit kovarianten Komponenten

$$L_k = \varepsilon_{ijk} x^i p^j \quad (32)$$

Ein Tensor 2. Stufe ordnet jedem Vektor  $v$  einen Vektor  $u$  zu. In einem Koordinatensystem soll seine Wirkung so ausgedrückt sein, d.h.  $T$  ist eine Matrix, die Komponenten des Tensors bezüglich einer Basis,  $u$  und  $v$  die Komponenten der Vektoren bezüglich derselben Basis:  $u = T v$

Wie sieht die Sache in einem anderen Koordinatensystem aus?  $u' = Q u$   $v' = Q v$

$$u' = Q u = QT v = QTQ^{-1} Q v = QTQ^{-1} v' \quad (33)$$

also

$$T' = Q T Q^{-1} \quad (34)$$

## 1.2 Analysis

Funktionen sind auch nur unendlich dichte Zahlentupel. Wir werden Funktionen einer reellen Veränderlichen in der Quantentheorie mit Vektorkomponenten über einen Kamm scheren; Funktionen mit 2 reellen Veränderlichen mit Matrizen, d.h. Komponenten von Tensoren 2. Stufe, usw.

### 1.2.1 Ableitungsregeln

[http://www.mathe-online.at/mathint/diff1/i\\_ableitungen.html](http://www.mathe-online.at/mathint/diff1/i_ableitungen.html)

### 1.2.2 Skalarprodukt

Auch aus 2 Funktionen lässt sich ein Skalar gewinnen, d.h. es lässt sich ein Skalarprodukt definieren, z.B.:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) dx \quad (35)$$

Wie das Skalarprodukt der Vektoren ist es in  $f$  und  $g$  linear:

$$\langle f, a \cdot g + b \cdot h \rangle = a\langle f, g \rangle + b\langle f, h \rangle \quad (36)$$

### 1.2.3 Delta-Distribution

Distributionen können als eine Verallgemeinerung des Funktionsbegriffs angesehen werden. Die Delta-Distribution hat an der Stelle 0 den „Wert“ unendlich und sonst überall den Wert 0. Die Delta-Distribution hat speziell die Eigenschaft:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy \delta(x - y) f(y) = f(x) \quad (37)$$

Man kann die Sache so betrachten: Dieser Ausdruck

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy \delta(x - y) \dots \quad (38)$$

ordnet jeder Funktion ein Skalar zu. So ein mathematisches Objekt heißt „Funktional“. Das Funktional mit der Delta-Distribution ordnet jeder Funktion  $f(y)$  ihren Funktionswert an der Stelle  $x$  zu, also  $f(x)$ . Es ist also die Einheitsoperation und  $\delta(x-y)$  entspricht damit der Einheitsmatrix  $\delta_{xy}$ .

#### WAS ERGIBT?

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy \delta(x-y) \quad (39)$$

Fourier-Integral der Delta-Distribution (Vorgriff auf später, schlampig, weil der Grenzübergang fehlt):

$$\delta(x-y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(x-y)} \quad (40)$$

n. Ableitungen der Deltadistribution ziehen sich vor das Integral gemäß:

$$\langle \delta^{(n)}, f \rangle = (-1)^n f^{(n)}(0) \quad (41)$$

## 1.2.4 Reihenentwicklungen

### 1.2.4.1 Taylor-Reihe

„Gutmütige“ Funktionen lassen sich in eine Taylor-Reihe entwickeln. Beispiele:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad (42)$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots \quad (43)$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots \quad (44)$$

Dies lässt sich so betrachten: die Funktionen  $x^n$  sind Basisvektoren und spannen den Raum der „gutmütigen“ Funktionen (= Vektoren) auf.

Über die Reihenentwicklungen lassen sich Funktionen von Matrizen definieren, z.B.:

$$e^{\mathbf{X}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{X}^k}{k!} \quad (45)$$

#### BERECHNE!

$$e^{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}} \quad (46)$$

Analog verhält es sich mit anderen Funktionen einer Diagonalmatrix.

Physik: in der Quanteninformationstheorie wird die von Neumannsche Entropie eine Rolle spielen. Sie wird berechnet als  $-\text{Spur}(X \ln X)$ , also als Spur einer Matrix, die selbst als Funktion einer Matrix entsteht.

### 1.2.4.2 Fourier-Transformation

<p>„Gutmütige“ periodische Funktionen lassen sich als Summe von cos- und sin-Funktionen darstellen.</p> <p>In der Verallgemeinerung lassen sich beliebige „gutmütige“ Funktionen als unendlich dichte Summe, also ...</p>	<p><b>Triangular wave:</b></p> $\frac{8}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \cos((2n+1)x)$  <p><b>Rectangular sawtooth wave:</b></p> $\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \sin nx$  <p><b>Square wave:</b></p> $\frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin((2n+1)x)$  <p><b>Absolute value sine wave:</b></p> $\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} \cos 2nx$  <p><b>Half sine wave:</b></p> $\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin x - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} \cos 2nx$
---	--

... als Integral darstellen:

$$f(t) = \int_0^\infty dv \left( \hat{f}^c(v) \cos(2\pi v t) + \hat{f}^s(v) \sin(2\pi v t) \right) \quad (47)$$

Im Körper der komplexen Zahlen (Vorgriff) lässt sich die Fouriertransformation besonders kompakt schreiben:

$$f(y) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-iy \cdot x} dx \quad (48)$$

Die Normierung ist im unteren Fall so gewählt, dass die Fouriertransformation als unitäre Abbildung aufgefasst werden kann.

Eine Funktion  $f(x)$  kann also in eine Taylorreihe oder ein Fourierintegral transformiert werden. Wir können dies auch so auffassen, dass Taylorreihe und Fourierintegral die Koeffizienten der Funktion bezüglich verschiedener Basen sind: einmal werden Potenzen von  $x$  verwendet, das andere Mal periodische Funktionen von  $x$ .

### 1.2.5 Partielle Ableitungen

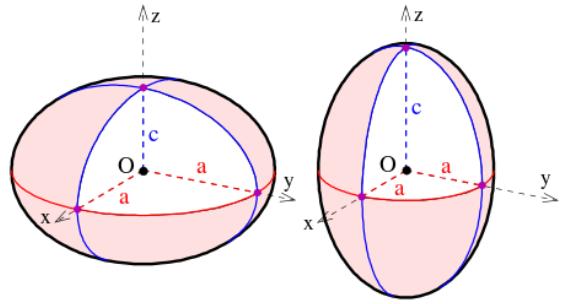
Ableitung einer Funktion mit mehreren Argumenten nach *einem* dieser Argumente. Die Werte der übrigen Argumente werden festgehalten.

Beispiel Volumen Rotationsellipsoid

$$V(a, c) = \frac{4\pi}{3} a^2 c \quad (49)$$

$$\frac{\partial V(a, c)}{\partial a} = \frac{8\pi}{3} ac \quad \frac{\partial^2 V(a, c)}{\partial a^2} = \frac{8\pi}{3} c$$

$$\frac{\partial V(a, c)}{\partial c} = \frac{4\pi}{3} a^2 \quad \frac{\partial^2 V(a, c)}{\partial c^2} = 0$$



Die linken Formeln liefern Änderung von V in Abhängigkeit einer Änderung von a bzw. c.

**BERECHNE DIE PARTIELLEN ABLEITUNGEN DER FUNKTION F NACH X UND Y!**

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{x}}{\sin(xy)} \quad (50)$$

**VERIFIZIERE MIT DER FUNKTION AUS (50) DEN SATZ VON SCHWARZ:**

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad (51)$$

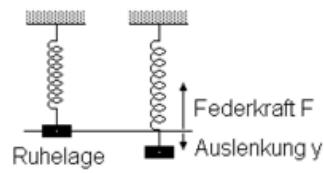
Man kann einen Operator definieren, der einer Funktion eine andere Funktion – nämlich ihre Ableitung – zuordnet. Diesen nennt man **Differentialoperator**. So wie man Funktionen von Matrizen über die Taylorreihen der Funktionen definieren kann, so kann man auch Funktionen von Differentialoperatoren definieren.

$$e^{\frac{\partial}{\partial x}} = 1 + \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + \dots \quad (52)$$

### 1.2.6 Differentialgleichungen

<http://www.mathepedia.de/Differentialgleichungen.aspx>

Beispiel Federpendel: die rücktreibende Kraft F ist proportional zur Auslenkung y. Mit Newtons  $F = m a(t) = m d^2y/dt^2$  kommen wir auf die Differentialgleichung



$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = -Dy(t) \quad (53)$$

D heißt „Federkonstante“.

**ZEIGE, DASS DIESE FUNKTION DIE SCHWINGUNGSGLEICHUNG LÖST!**

$$y(t) = a \sin(\sqrt{\frac{D}{m}}(t - t_0)) \quad (54)$$

**WAS IST VON DEN 2 KONSTANTEN A UND T<sub>0</sub> ZU HALTEN?**

Bei der Schwingungsgleichung handelt es sich um eine lineare Differentialgleichung. Diese haben die Eigenschaft, dass jede Linearkombination von Lösungen auch wieder eine Lösung ist.

Beispiel:

$$y_1(t) = 25 \sin(\sqrt{\frac{D}{m}}t) \quad y_2(t) = 7 \cos(\sqrt{\frac{D}{m}}t) \quad (55)$$

Dann ist auch  $c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$  eine Lösung der linearen DGL.

Für Funktionen mehrerer Veränderlicher erhält man in der Verallgemeinerung partielle Differentialgleichungen. Beispiel Maxwell-Gleichungen:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (56)$$

$E$ ,  $B$ ,  $j$  und  $\rho$  sind Felder, die von 3 Ortskoordinaten  $x, y, z$  und der Zeit  $t$  abhängen, also Funktionen von 4 Veränderlichen.  $E$ ,  $B$  und  $j$  sind Vektoren,  $\rho$  ist eine skalare Funktion. In den Gleichungen finden wir die Komponenten der „physikalischen Objekte“ bez. einer bestimmten Basis.

Partielle lineare Differentialgleichungen lassen sich mit Hilfe von Differentialoperatoren in Matrixform bringen. In unserem Beispiel können wir definieren:<sup>4</sup>

$$\hat{\mathbf{O}} := \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & -\frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & 0 & -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} & 0 & -\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial t} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & -\frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial t} & 0 \\ 0 & -\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial t} \end{pmatrix} \quad (57)$$

$$\psi := \begin{pmatrix} 0 \\ E_x(x, y, z, t) \\ E_y(x, y, z, t) \\ E_z(x, y, z, t) \\ 0 \\ B_x(x, y, z, t) \\ B_y(x, y, z, t) \\ B_z(x, y, z, t) \end{pmatrix} \quad j := \begin{pmatrix} \frac{1}{\epsilon_0} \rho(x, y, z, t) \\ \mu_0 j_x(x, y, z, t) \\ \mu_0 j_y(x, y, z, t) \\ \mu_0 j_z(x, y, z, t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{\mathbf{O}}\psi = j$$

WIE SIEHT DER DIFFERENTIALOPERATOR DER SCHWINGUNGSGLEICHUNG AUS?

SCHREIBE SIE AUCH IN DER FORM  $\hat{\mathbf{O}}\psi = j$ ! WIE GROß IST  $j$ ?

(58)

Zwischen unserer einfachen Schwingungsgleichungen und den Maxwellgleichungen wie oben angegeben besteht ein wesentlicher Unterschied:  $j$

---

<sup>4</sup> In der Relativitätstheorie wird die Galilei-Invarianz abgelöst durch die Poincaré-Invarianz. Es zeigt sich, dass sich das elektromagnetische Feld wie ein Tensor 2. Stufe transformiert. Unsere naiv gewählten Definitionen werden dort also durch andere abgelöst, mit denen sich die Maxwell-Gleichungen aber wieder auf die Form mit einem linearen Differentialoperator bringen lassen, nur dass jetzt der Operator ein Vektor ist und die Felder ein Tensor sind:

$$\hat{\mathbf{O}} := \left( \frac{\partial}{\partial t} \quad -\frac{\partial}{\partial x} \quad -\frac{\partial}{\partial y} \quad -\frac{\partial}{\partial z} \quad \frac{\partial}{\partial t} \quad -\frac{\partial}{\partial x} \quad -\frac{\partial}{\partial y} \quad -\frac{\partial}{\partial z} \right) \quad \psi := \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & F^* \end{pmatrix}$$

F und  $F^*$  findet man in der Literatur als [zueinander duale] „antisymmetrische Feldstärketensoren“.

Dadurch werden die Maxwellgleichungen **inhomogen** und die Möglichkeit der freien Linearkombination von Lösungen geht verloren. Dennoch kann man zu 2 Lösungen sofort wieder weitere Lösungen angeben:

$$\hat{\mathbf{O}}\psi_1 = j \quad \hat{\mathbf{O}}\psi_2 = j \quad \Rightarrow \quad \hat{\mathbf{O}}\psi_3 := \hat{\mathbf{O}}(c\psi_1 + (1 - c)\psi_2) = j \quad \text{mit} \quad 0 \leq c \leq 1 \quad (59)$$

Diese Linearitätseigenschaften sind übrigens ein Modell dafür, dass wir getrennte Dinge sehen können. Die 4 „Materiefelder“  $j$  werden von den Dingen vorgegeben am Rand eines Gebiets, in dem sich elektromagnetische Wellen (Licht) ausbreiten, ohne dass diese Wellen sich bei der gegenseitigen Durchdringung verändern: sie überlagern sich und bewahren ihre einzelne Form und Stärke.

Schließlich erzeugen sie ein Bild in einer Digitalkamera oder auf unserer Netzhaut. Dieses Bild lässt sich zerlegen in Teilbilder, als wäre jedes Teilbild erzeugt von einem einzelnen Ding unabhängig von den Bildern anderer Dinge.

### 1.2.6.1 Eigenfunktionen und Eigenwerte

Analog zu (26) lassen sich für homogene lineare DGL-Systeme Eigenfunktionen (entsprechend Eigenvektoren) und Eigenwerte einführen:

$$\hat{\mathbf{O}} \cdot \psi = \lambda \psi \quad (\hat{\mathbf{O}} - \lambda \mathbf{1}) \cdot \psi = 0 \quad (60)$$

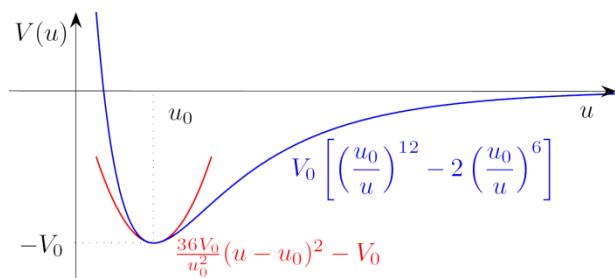
$\mathbf{1}$  ist der Einheitsoperator. Auch diesen Eigenwerten werden wir in der Quantentheorie als mögliche Messwerte wiederbegegnen. Ist z.B.  $\hat{\mathbf{O}} = d/dx$ , dann ist die Funktion  $f(x) = 27e^{4x}$  eine Eigenfunktion und der zugehörige Eigenwert ist 4. Die Funktion  $g(x) = -2e^{4x}$  ist eine Eigenfunktion mit demselben Eigenwert 4. Der Eigenwert 4 ist unendlich-fach entartet.

### 1.2.6.2 Nichtlineare Differentialgleichungen

Die Lösungen nichtlinearer DGL haben im Allgemeinen qualitativ vollkommen andere Eigenschaften als die linearer DGL. Sie lassen sich nicht mehr unabhängig überlagern (linear kombinieren); das Ganze kann qualitativ etwas vollkommen anderes sein als die Teile.

Bereits die Lösungen von Gleichungen mit wenigen Variablen können komplizierteste Lösungsfunktionen hervorbringen. Dagegen erscheinen die Lösungen linearer DGL langweilig und tot.

Auf makroskopischer Ebene sind bei genauerer Betrachtung alle Kraftgesetze nichtlinear. Traditionell rechnen Physiker in linearen Näherungen, um überhaupt etwas rechnen zu können.



Ein lineares Weg-Kraftgesetz ist die Ableitung eines quadratischen Energiepotentials (potentielle Energie, die quadratisch von der Auslenkung abhängt). Systeme im energetischen Minimum befinden sich in einer „glatten Potentialmulde“, die durch eine (ggf. mehrdimensionale) Parabel angenähert werden kann. Dadurch kann das blaue Potential durch das rote angenähert werden, welches uns auf die Schwingungsgleichung führt. Bei starken Auslenkungen versagt die Näherung.



Nichtlineare DGL eignen sich als Modell für Effekte wie den Schmetterlingseffekt oder Tsunamis. Eine interessante Galerie von chaotischen Attraktoren:  
<http://www.chaoscope.org>

In der unteren Schicht der **Quantentheorie** (der „Rechenschicht“) werden uns dagegen **immer lineare DGL** begegnen!

### 1.3 Komplexe Zahlen

Imaginäre Einheit mit der Eigenschaft  $i^2 = -1$ . D.h. Wurzel aus  $-1$  ist  $+i$  oder  $-i$ .

Reelle Zahl:  $a$

Imaginäre Zahl:  $b \cdot i$  ( $b$  ist reell)

Komplexe Zahl  $z$  ist 2-teilig:  $z := a + b \cdot i$

oder in der Darstellung als 2-Tupel  $(a \ b)$

#### 1.3.1 Real- und Imaginärteil

Beide Funktionen liefern reelle Zahlen:

$$\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(a + b \cdot i) = a$$

$$\operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(a + b \cdot i) = b$$

#### 1.3.2 Addition

$$z_1 + z_2 = (a_1 + b_1 \cdot i) + (a_2 + b_2 \cdot i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \cdot i$$

- assoziativ:  $(x + y) + z = x + (y + z) = x + y + z$
- kommutativ:  $y + z = z + y$
- neutrales Element ist  $0 + 0 \cdot i$  oder anders geschrieben  $(0 \ 0)$  oder ganz kurz  $0$

#### 1.3.3 Multiplikation

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 \cdot i) \cdot (a_2 + b_2 \cdot i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 \cdot i + a_2 b_1 \cdot i + b_1 b_2 \cdot i^2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) \cdot i$$

- assoziativ:  $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) = x \cdot y \cdot z$
- kommutativ:  $y \cdot z = z \cdot y$
- neutrales Element ist  $1 + 0 \cdot i$  oder anders geschrieben  $(1 \ 0)$  oder ganz kurz  $1$

Für die Division folgt:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a + b i)(c - d i)}{(c + d i)(c - d i)} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i$$

#### 1.3.4 Betrag

Der Betrag wird definiert wie die Länge eines Vektors  $(a \ b)$ :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

**BERECHNE!**

$$a) (3 + 5i) + (1 - 2i) \quad b) (3 + 5i) \cdot (1 - 2i) \quad c) \operatorname{Re}\left(\frac{1}{3i}\right) \quad d) |1 - 2i| \quad (61)$$

### 1.3.5 Polardarstellung

Über die Taylorentwicklungen der trigonometrischen Funktionen sin und cos

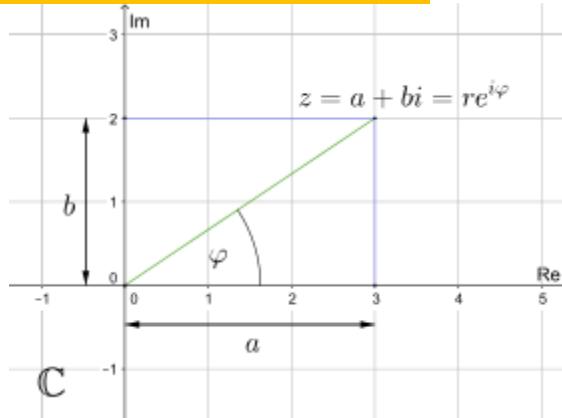
$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \quad \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{x^0}{0!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

sowie die der e-Funktion (42) lässt sich zeigen, dass für komplexe Zahlen gilt:

$$z = r \cdot e^{i\varphi} = r \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi) \quad (62)$$

Dadurch wird eine geometrische Darstellung in der Ebene („komplexe Zahlenebene“) möglich.

$re^{i\varphi}$  ist die reelle Zahl  $r$  gedreht um den Winkel  $\varphi$ .



Anders herum lassen sich sin und cos über e-Funktionen ausdrücken:

$$\sin x = \frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix}) \quad \cos x = \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix}) \quad (63)$$

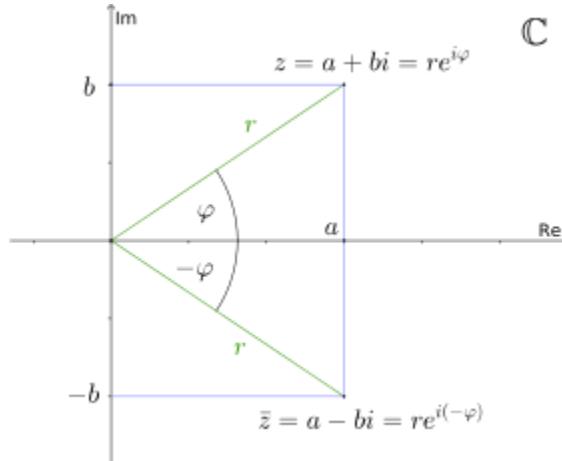
### 1.3.6 Komplexe Konjugation

Diese Operation wird in der Quantentheorie ständig verwendet. Geometrisch entspricht sie einer Spiegelung an der reellen Achse.

Statt dem Strich verwenden die Physiker allerdings den Stern:

$$z = a + b \cdot i$$

$$z^* = (a + b \cdot i)^* = a - b \cdot i$$



Mit der komplexen Konjugation lässt sich der Betrag einer komplexen Zahl auch so darstellen:

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \cdot z^*}. \quad (64)$$

### 1.3.7 Physikalische Bedeutung

Wir sehen in den Erscheinungen vor dem Bewusstsein nichts, was sich in komplexen Zahlenebenen abspielt (vielleicht im LSD-Rausch?). Die Skalen irgendwelcher Messinstrumente liefern bestenfalls

reelle Zahlen, ein Digitalmultimeter vom Elektronikhändler sogar nur rationale Zahlen in Dezimaldarstellung.

In der Elektrotechnik können sich durch Rechnen mit komplexen Zahlen einfachere mathematische Ausdrücke ergeben ([https://de.wikipedia.org/wiki/Komplexe\\_Wechselstromrechnung](https://de.wikipedia.org/wiki/Komplexe_Wechselstromrechnung)). Am Ende muss dort ein Schritt stehen, der wieder reelle Zahlen liefert. Das geschieht durch  $\text{Re}(z)$ , manchmal  $\text{Im}(z)$ . Grob gesagt wird am Ende der Rechnung die Hälfte weggeworfen, da sie nicht reell ist, sondern nur das Ergebnis eines Rechentricks.

Ähnlich ist es in der Quantentheorie: durch die komplexen Zahlen lassen sich die Formeln wesentlich kompakter formulieren. Irgendwo gibt es wieder einen Schritt, der reelle Zahlen liefert, bevor es weiter Richtung bewusst wahrnehmbarer Erscheinungen geht. Dieser Schritt wirft wieder Information aus der Rechenschicht weg. Tatsächlich ließe sich die gesamte Quantentheorie ohne komplexe Zahlen formulieren, aber dafür müssten äquivalente mathematische Objekte an ihre Stelle treten. [https://de.wikipedia.org/wiki/Komplexe\\_Zahl](https://de.wikipedia.org/wiki/Komplexe_Zahl) -> Matrizen zeigt, wie es geht:

$$Z = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = a \cdot E + b \cdot I$$

Wir sehen hier ein Prinzip, dass öfter auftaucht: verschiedene mathematische Modelle sind gleichwertig, darin gibt es aber einen gemeinsamen Kern, den man scheinbar nicht loswerden kann. Dieser Kern ist hier die Algebra, wie sie einerseits durch komplexe Zahlen dargestellt werden kann, andererseits durch 2x2 Matrizen. Andere solche Kerne sind Symmetriegruppen, die in jeder Formulierung zu finden sein sollen. Genauer gesagt sind die Kerne keine konkreten Gruppen (wie z.B. Gruppe der Drehungen in 3 Dimensionen  $\text{SO}(3)$ ), sondern wieder nur die algebraische Strukturen, die von diesen Gruppen dargestellt werden. Diese Erfahrung hat den Glauben an die Realität solcher algebraischer Strukturen in der Natur gefestigt, z.B.: <http://www.lyre.de/Lyre-SSR-2012.pdf>

Die komplexen Zahlen fallen unter das Thema der Clifford-Algebren, zu denen die Quaternionen genauso gehören wie die Dirac-Matrizen. Dirac-Matrizen kommen zur Anwendung in Gleichungen, die zur Beschreibung von Fermionen (Elektronen, Myonen, Neutrinos, ...) dienen. Auch hier dürfte sich die Darstellung relativ leicht wechseln lassen, wobei die Algebra dieselbe bleiben wird.

## 2 Gruppen

Mathematische Gruppen sind in der Physik von überragender Bedeutung. Oben haben wir die Galilei-Gruppe kennengelernt. Im Standardmodell der „Materie“ genügen die Gleichungen bestimmten Symmetrien, die man mit  $\text{U}(1)$ ,  $\text{SU}(2)$ ,  $\text{SU}(3)$  und Poincaré-Gruppe bezeichnet.<sup>5</sup> D.h. dass die mathematischen Objekte in den Gleichungen durch andere Objekte ersetzt werden können, wobei die Gestalt der Gleichung erhalten bleibt. Die Ersetzungsoperationen zusammen genommen bilden mathematische Gruppen.



<sup>5</sup> Auffallend ist die starke Repräsentanz von Drehgruppen:  $\text{U}(1)$ ,  $\text{SU}(2)$ ,  $\text{SU}(3)$  und  $\text{SO}(3)$  in der Poincaré-Gruppe sind Drehgruppen.

Die wichtigsten Gruppen des Standardmodells sind hier beschrieben: [http://www.physik.uni-bielefeld.de/~laine/symmetrien/sym\\_jurke.pdf](http://www.physik.uni-bielefeld.de/~laine/symmetrien/sym_jurke.pdf) Es ist aber noch lange nicht ausgemacht, dass diese fundamentale Gruppen der Natur sind, es könnten genauso gut die Symmetrien eines zusammengesetzten Zustands sein, wobei noch fundamentalere Naturgesetze ganz andere Symmetrien haben könnten. Im Festkörper, so gesehen ein zusammengesetzter Zustand aus elementaren Zuständen des Standardmodells, können sich ganz andere Symmetrien herausbilden: [http://www.thp.uni-koeln.de/Documents/muellerhartmann\\_gruppentheorie.pdf](http://www.thp.uni-koeln.de/Documents/muellerhartmann_gruppentheorie.pdf)

Operationen (Gruppenmitglieder), die mit dem Generator der Zeittranslation kommutieren, führen zu Größen, die **sind**. Der Generator der Zeitverschiebung heißt **Energie**.<sup>6</sup> Auf diese Art bedeutet die T-Symmetrie Energieerhaltung, die Translationssymmetrie Impulserhaltung, die O(3) Symmetrie Drehimpulserhaltung, die U(1) Symmetrie (Drehung in der komplexen Ebene) die Erhaltung elektrischer Ladung, SU(2) Erhaltung der schwachen Ladung, usw.

Ungeachtet der Wichtigkeit für das Verständnis der Natur können wir bei der Quanteninformationsverarbeitung im Großen und Ganzen einen Bogen um die Symmetriegruppen machen.

### 3 Der unitäre Vektorraum<sup>7</sup>

In der Quantentheorie werden physikalische Größen in einem unitären Vektorraum modelliert, d.h. einem Vektorraum, in dem die Skalarprodukte der Vektoren **komplexe** Zahlen ergeben können. Die „abstrakten“ Vektoren, welche die wirklichen Größen darstellen sollen, werden so geschrieben („ket-Notation“):

$$|\varphi\rangle, |\chi\rangle, |\psi\rangle, \dots, |\Phi\rangle, \dots, |u\rangle, |v\rangle, \dots$$

Wie für unsere Zahlentupel-„Vektoren“ soll gelten:

- assoziative Addition:  
 $|\varphi\rangle + |\chi + \psi\rangle = |\varphi + \chi\rangle + |\psi\rangle$
- kommutative Addition:  
 $|\varphi\rangle + |\chi\rangle = |\chi\rangle + |\varphi\rangle$
- Multiplikation mit einem Skalar:  
 $c|\varphi + \chi\rangle = c|\varphi\rangle + c|\chi\rangle$
- Das Skalarprodukt zweier Vektoren ergibt eine **komplexe** Zahl a („bra“-„ket“-Notation):  
 $\langle\varphi|\chi\rangle = a$   
 Es kommt jetzt aber auf die Reihenfolge an, denn es soll gelten:  
 $\langle\chi|\varphi\rangle = \langle\varphi|\chi\rangle^*$
- Distributivität:  
 $\langle\varphi|\chi + \psi\rangle = \langle\varphi|\chi\rangle + \langle\varphi|\psi\rangle$

---

<sup>6</sup> In der speziellen Relativitätstheorie relativieren sich die Bedeutung von Raum- und Zeitkoordinaten. Dies drückt sich in den relativistischen Quantenfeldtheorien aus als Schwierigkeiten bei der Definition des Hamilton-Operators: <http://www.fuw.edu.pl/~derezins/nohamiltonian.pdf> Gewissermaßen relativiert sich dadurch das Sein.

<sup>7</sup> Dieses Kapitel orientiert sich an Eugen Ficks Einführung in die Grundlagen der Quantentheorie.

- Herausziehen einer komplexen Zahl:

$$\langle \varphi | c\chi \rangle = c \langle \varphi | \chi \rangle \text{ aber } \langle c\varphi | \chi \rangle = c^* \langle \varphi | \chi \rangle$$

**ZEIGE, DASS AUS DEN DEFINITIONEN OBEN FOLGT:**

$$\operatorname{Im} \langle \phi | \phi \rangle = 0 \quad (65)$$

Darüber hinaus soll das Produkt eines Vektors mit sich selbst immer positiv sein:

$$\langle \varphi | \varphi \rangle \geq 0$$

was es ermöglicht, die **Norm** („Länge“) eines Vektors als positive reelle Zahl zu definieren:

$$\| \varphi \| = \sqrt{\langle \varphi | \varphi \rangle} \quad (66)$$

Verschwindet das Skalarprodukt, dann nennen wir die Vektoren wieder **orthogonal**:

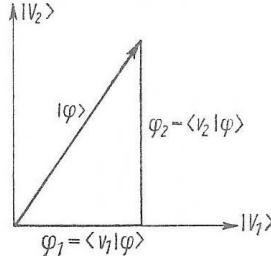
$$\langle \varphi | \chi \rangle = 0$$

### 3.1 Basisvektoren

Wie unsere Zahlentupel-Vektoren und Funktionen wollen wir die Hilbertraumvektoren nach Koordinatenvektoren (oder abstrakter „Basisvektoren“) entwickeln können, wenn wir uns für ein Koordinatensystem (eine „Basis“) entschieden haben.

Zerlegung nach einer Basis  $|v_k\rangle$

$$|\varphi\rangle = \sum_k |v_k\rangle \varphi_k$$



Die Dimension des unitären Raumes kann endlich oder unendlich sein. Die Komponenten  $\varphi_k$  bilden zusammen ein Tupel aus komplexen Zahlen, das nicht mit dem „echten“ Vektor  $|\varphi\rangle$  verwechselt werden darf.

Wenn die Basisvektoren „aufeinander senkrecht stehen“ und die „Länge“ 1 haben, nennt man die Basis **Orthonormalbasis**:

$$\langle v_k | v_{k'} \rangle = \delta_{kk'} \quad (67)$$

Damit lässt sich die Zerlegung nach einer Basis sofort nach den **Vektorkomponenten in der Orthonormalbasis** auflösen (Multiplikation mit  $\langle v_k |$ ):

$$\varphi_k = \langle v_k | \varphi \rangle \quad (68)$$

(68) in die Zerlegung eines Vektors eingesetzt ergibt die Identität:

$$|\varphi\rangle = \sum_k |v_k\rangle \langle v_k | \varphi \rangle \quad (69)$$

$|v_k\rangle \langle v_k|$  ist ein Tensorprodukt aus 2 Basisvektoren. Wir haben so etwas Ähnliches schon in Aufgabe (13) in Form einer Matrix kennengelernt. Die Summe der Tensorprodukte aus den Basisvektoren ist also die Einheitsoperation (oder „Identität“).

Bei einem Qubit beschränkt man sich (per Abmachung oder durch die konkrete technische Realisierung des Quantenrechners) auf einen 2-dimensionalen unitären Raum. Man braucht also 2 Basisvektoren, um jeden Vektor linear kombinieren zu können, der einem Zustand des Qubits entspricht. Diese Basiszustände bezeichnet man dann als  $|0\rangle$  und  $|1\rangle$  in Analogie zu den 2 Zuständen eines klassischen Bits.<sup>8</sup>

### 3.2 Diracsche Vektoren

Unitäre Vektoren sollen sowohl von abzählbaren Indizes als auch von kontinuierlichen Indizes (also Funktionsvariablen) abhängen können. Man braucht in der Quantentheorie beides.<sup>9</sup>

Mathematisch lassen sich Diracsche Vektoren aus einem Grenzübergang heraus definieren, so wie sich das Integral einer Funktion  $\int f(x)dx$  mit dem Grenzübergang  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0}$  aus einer Summe  $\sum_i f(x_i)\Delta x$  heraus definieren lässt. Wer sich für Einzelheiten interessiert: Fick 2.1§3

Die Entwicklung eines solchen Dirac-Vektors stellt sich so dar:

$$|\varphi\rangle = \int_k |v_k^D\rangle \langle v_k^D| \varphi\rangle dk = \int_k |v_k^D\rangle \varphi(k) dk \quad (70)$$

In der Orthonormierungsbedingung für eine Basis tritt nun die Delta-Distribution statt der Einheitsmatrix auf:

$$\langle v_k^D | v_{k'}^D \rangle = \delta(k - k')$$

Durch die Gewinnung der Dirac-Vektoren mittels Grenzübergang ist klar:  $k$  ist immer reell, auch wenn der Funktionswert im Allgemeinen komplex ist. Wir bekommen es nicht mit Funktionen über der komplexen Ebene zu tun.

### 3.3 Zusammenfassende Schreibweise

Zum Beispiel beim Wasserstoffproblem ergeben sich – wie wir noch sehen werden - sowohl kontinuierlich dichte Energieeigenwerte (oberhalb der Ionisierungsgrenze) als auch diskrete, abzählbare Energieeigenwerte (unterhalb, „gebundene Zustände“). Sowohl die Eigenwerte wie deren (Energie-)Eigenvektoren müssen deswegen gemischt nummeriert werden. Man braucht also im Allgemeinen so etwas:

$$|\varphi\rangle = \sum_k |v_k\rangle \varphi_k + \int_k |v_k^D\rangle \varphi(k) dk$$

Dafür soll die zusammenfassende Schreibweise eingeführt werden:

$$|\varphi\rangle = \sum_k |v_k\rangle \varphi(k) dk$$

<sup>8</sup> Vorsicht! Es ist auch hier kein Koordinatensystem („Basis“) vor dem anderen ausgezeichnet, und durch einen Wechsel der Basis bekommt das Qubit andere Komponenten. In welcher Basis man die Basisvektoren mit  $|0\rangle$  und  $|1\rangle$  bezeichnet ist eine willkürliche Festlegung.

<sup>9</sup> Dabei ist das Ende vom Lied noch nicht ausgemacht. Wir werden noch sehen, dass Kontinuum und Information zwei gegensätzliche Konzepte sind. Was wir nicht sehen werden soll der Vollständigkeit halber erwähnt werden: das Kontinuum sorgt in den Quantenfeldtheorien für erhebliche Schwierigkeiten sowohl mathematischer Art als auch von der Interpretation her (überall unendlich viel Energie? → Renormierung, Infrarot- und Ultraviolettdivergenzen, ...). Diese Schwierigkeiten bewogen Bjorken und Drell in ihrem Standard-Lehrbuch zum Hinweis, dass die Möglichkeit einer Körnung der Natur nicht aus den Augen verloren werden sollte.

$\delta(k, k')$  soll sowohl die Einheitsmatrix als auch die Delta-Distribution darstellen, je nach Kontext. Die Orthonormierung der Basisvektoren drückt sich dann so aus:

$$\langle v_k | v_{k'} \rangle = \delta(k, k')$$

Bei den Komponenten eines Vektors soll im Folgenden mit der Funktionsform beides gemeint sein:

$$\varphi(k) = \langle v_k | \varphi \rangle$$

### 3.4 Skalarprodukt in Komponentenform

2 Vektoren entwickelt nach dem gleichen Satz von Basisvektoren  $v_k$ :

$$|\varphi\rangle = \sum_k^{\infty} |v_k\rangle \varphi(k) dk \quad \text{und} \quad |\chi\rangle = \sum_{k'}^{\infty} |v_{k'}\rangle \chi(k') dk'$$

Miteinander multipliziert ergeben sie:

$$\langle \varphi | \chi \rangle = \sum_k^{\infty} \sum_{k'}^{\infty} \langle v_k | v_{k'} \rangle \varphi^*(k) \chi(k') dk dk'$$

Und die Orthonormierung der Basisvektoren haut uns ein Integral/eine Summe weg:

$$\langle \varphi | \chi \rangle = \sum_k^{\infty} \varphi^*(k) \chi(k) dk = \sum_k^{\infty} \langle \varphi | v_k \rangle \langle v_k | \chi \rangle dk$$

Skalarprodukt eines Vektors mit sich selbst:

$$\langle \varphi | \varphi \rangle = \sum_k^{\infty} |\varphi(k)|^2 dk$$

**BERECHNE DAS SKALARPRODUKT DIESER BEIDEN VEKTOREN. V1 UND V2 SOLLEN ORTHONORMIERT SEIN.**

$$|\phi\rangle = \frac{|v_1\rangle + i|v_2\rangle}{\sqrt{2}} \quad |\chi\rangle = \frac{|v_1\rangle - i|v_2\rangle}{\sqrt{2}} \quad (71)$$

### 3.5 Unitäre Basistransformationen

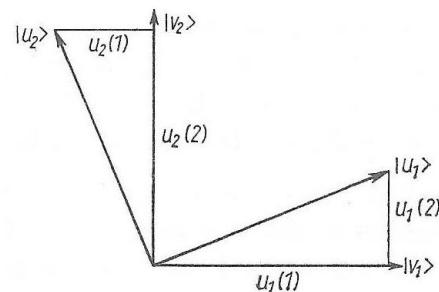
Die Transformation von Vektorkomponenten bei einem Wechsel des Koordinatensystems (der Basis) haben wir für Vektoren mit reellen Komponenten bereits kennengelernt. Ganz analog verhält es sich bei unitären Vektoren (mit komplexen Komponenten). Auch hier soll der „abstrakte“ Vektor  $|\varphi\rangle$  wieder für das mathematische Analogon zur Wirklichkeit stehen, dessen Verhalten unabhängig vom willkürlich gewählten Koordinatensystem sein soll.

Der Wechsel von einer Basis  $v_k$  zur nächsten  $u_x$  geht wieder über eine Transformationsmatrix:

$$|u_x\rangle = \sum_k^{\infty} |v_k\rangle u_x(k) dk$$

$u_x(k) \equiv u(k, x)$  bezeichnet die Transformationsmatrix. Im Fall von kontinuierlichen Indizes ist sie eine komplexwertige Funktion der 2 reellen Veränderlichen  $k$  und  $x$ . Sonst eine quadratische Matrix mit komplexen Komponenten und den Zeilen- und Spaltenindizes  $k$  und  $x$ .

Wieder besteht die Transformationsmatrix aus den Komponenten der neuen Basisvektoren bezüglich der alten Basis. Diese Komponenten sind wieder das Skalarprodukt zwischen neuen und alten



Basisvektoren.

$$u_x(k) = u(k, x) = \langle v_k | u_x \rangle$$

Wenn die neuen Basisvektoren wieder othonormiert sein sollen, bedeutet dies:

$$\langle u_{x'} | u_x \rangle = \sum_k u^*(k, x') u(k, x) dk = \delta(x', x) \quad (72)$$

Auch wenn es auf den ersten Blick nicht so aussieht, so kennen wir diesen Ausdruck schon in ähnlicher Form.  $u(k, x')$  entspricht in Indexform einer Matrix  $u_{kk'}$ . Deren Transponierte ist  $u_{x'k}$ . Die Einheitsmatrix in Indexschreibweise ist  $\delta_{xx'}$ . Der Ausdruck bedeutet also  $u^{*\top} u = \mathbf{1}$ .<sup>10</sup> Bei Transformationsmatrizen mit reellen Komponenten hatten wir dagegen  $\mathbf{Q}^\top \mathbf{Q} = \mathbf{1}$ . Der Unterschied ist also, dass bei Matrizen mit komplexen Komponenten zusätzlich zur Transposition die Komponenten komplex konjugiert werden müssen.

Für die Matrix der Umkehrtransformation gilt entsprechend statt  $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^\top$  jetzt  $u^{-1} = u^{*\top}$ . Statt von orthogonalen Matrizen spricht man jetzt von **unitären** Matrizen bzw. Transformationen.

$$|v_k\rangle = \sum_x |u_x\rangle v_k(x) dx \quad \text{mit} \quad v_k(x) \equiv v(x, k) = \langle u_x | v_k \rangle$$

Ausgedrückt mit dem Skalarprodukt der Basisvektoren:

$$v(x, k) := u^{-1}(x, k) = \langle u_x | v_k \rangle = \langle v_k | u_x \rangle^* = u(k, x)^* = u^{*\top}(x, k)$$

Der „abstrakte“ Vektor  $|\varphi\rangle$  kann also nach verschiedenen Basissystemen entwickelt werden. In der Quantentheorie wird er für den Zustand einer Welt<sup>11</sup> stehen. Seine Komponenten können endliche oder unendlich große Zahlentupel sein oder unendlich groß unendlich dichte Zahlentupel, d.h. Funktionen. Eine Wellenfunktion  $\varphi(x)$  muss also angesehen werden als die Entwicklung eines „abstrakten“ Vektors  $|\varphi\rangle$  nach einer bestimmten Basis. Wenn  $x$  den Ort bedeuten soll, dann ist es die Ortsbasis. Über Koordinatentransformationen kommt man zu anderen Darstellungen von  $|\varphi\rangle$ , z.B. in der Impulsbasis  $\varphi(p)$ . Beim Wasserstoffproblem werden wir sehen, dass es selbst die Mischung aus Funktionen und Zahlentupeln geben kann, und dass bei der Transformation zwischen Orts- und Energiebasis sogar von kontinuierlichen Indizes zu diskreten Indizes gewechselt werden kann („Quantenzahlen“). Nun mag man sich die Frage stellen, warum überhaupt die eine Basis wichtiger als die anderen sein soll, wenn der Vektor  $|\varphi\rangle$  als Vertreter des (Mikro-)Weltzustands ungerührt von unserer Sicht auf ihn sein Wesen weitertreibt. Die Auswahl erfolgt erst durch die Umgebung: die Wahl der bevorzugten Basis kann durch die sogenannte „Dekohärenztheorie“ erklärt werden.<sup>12</sup>

### 3.6 Lineare Operatoren

Die Eigenschaften von quadratischen Matrizen und linearen Differentialoperatoren werden in abstrakter Weise auf den unitären Raum übertragen und dadurch unter einem Dach zusammengefasst. In der abstrakten Sicht ist ein Operator  $L$  eine Maschine, die jedem unitären Vektor  $|\varphi\rangle$  einen anderen Vektor  $|\varphi'\rangle$  (welcher zufällig auch der gleiche sein kann) zuordnet.

<sup>10</sup> Die Operationen Transponieren und Komplex-Konjugieren sind kommutativ, es gilt also auch  $(\mathbf{u}^\top)^* \mathbf{u} = \mathbf{I}$ .

<sup>11</sup> Wir werden noch sehen, dass eine Teilwelt im Allgemeinen nicht durch einen Zustandsvektor beschrieben werden kann, sondern nur durch einen sogenannten Dichteoperator.

<sup>12</sup> Das heißt aber auch: ohne Umgebung gibt es keine bevorzugte Basis. Erst durch eine Trennung in Teilwelten kann sich eine bevorzugte Basis herausbilden, abhängig davon, wie man den Schnitt zieht.

$$|\varphi\rangle \xrightarrow{\mathcal{L}} |\chi\rangle = \mathcal{L} |\varphi\rangle \quad (73)$$

Die Vektoren lassen sich stellvertretend durch ihre Komponenten bezüglich einer Basis  $|v_k\rangle$  ausdrücken, für diese Komponenten muss der Operator L eine entsprechende Wirkung haben:

$$\varphi(k) \xrightarrow{\mathcal{L}} \chi(k) = \mathcal{L} \varphi(k) \quad (74)$$

- Einheitsoperator **1**: ordnet jedem Vektor sich selbst zu
- Nulloperator **0**: ordnet jedem Vektor den Nullvektor zu, der in allen Basen nur aus 0-Komponenten besteht.

Die Operatoren der Quantentheorie sind linear:

$$\mathcal{L} |\varphi_1 + \varphi_2\rangle = \mathcal{L} |\varphi_1\rangle + \mathcal{L} |\varphi_2\rangle$$

$$\mathcal{L} |a\varphi\rangle = a \mathcal{L} |\varphi\rangle$$

Summe von Operatoren:

$$(\mathcal{L} + \mathcal{M}) |\varphi\rangle = \mathcal{L} |\varphi\rangle + \mathcal{M} |\varphi\rangle$$

Produkt von Operatoren (**nicht kommutativ**):

$$\mathcal{L} \mathcal{M} |\varphi\rangle = \mathcal{L} |\mathcal{M} \varphi\rangle = |\mathcal{L} \mathcal{M} \varphi\rangle$$

Als **Kommutator** definiert man:

$$\mathcal{M} \mathcal{L} - \mathcal{L} \mathcal{M} = [\mathcal{M}, \mathcal{L}]_- \text{ oder einfach } [\mathcal{M}, \mathcal{L}] \quad (75)$$

Wie bei den Matrizen und den Differentialoperatoren lassen sich über Taylorreihen wieder Funktionen von linearen Operatoren definieren, die wiederum lineare Operatoren sind.

$$e^{\mathcal{L}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathcal{L}^n$$

Durch die Definition der (partiellen) Ableitung einer Operatorfunktion  $F(L_1, L_2, \dots)$

$$\frac{\partial F}{\partial L_1} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F(L_1 + \varepsilon I, L_2, \dots) - F(L_1, L_2, \dots)}{\varepsilon}$$

lassen sich sogar Differentialgleichungen für Operatoren formulieren.

### 3.6.1 Tensorprodukt als linearer Operator

Analog zum Tensorprodukt, das wir schon kennen, lässt sich auch im unitären Raum aus 2 Vektoren  $|u\rangle$  und  $|v\rangle$  ein Tensorprodukt definieren, das als  $|u\rangle \langle v|$  geschrieben wird. Dieses Konstrukt ist ein linearer Operator mit dieser Eigenschaft:

$$|\varphi\rangle \xrightarrow{|u\rangle \langle v|} |\chi\rangle = |u\rangle \langle v| |\varphi\rangle$$

Wie bei den Matrizen ist nicht jeder lineare Operator ein Tensorprodukt, doch jeder lineare Operator kann als Summe/Integral über Tensorprodukte dargestellt werden. Die Zerlegung ist wieder nicht eindeutig.

Den Einheitsoperator kann man ablesen aus der Entwicklung eines Vektors nach irgendeiner Basis ((69) bzw. (70)):

$$\mathbb{I} = \sum_k |v_k\rangle \langle v_k| dk \quad (76)$$

Die  $|v_k\rangle \langle v_k|$  sind Projektionsoperatoren auf die Basisvektoren. Diese Zerlegung des Einheitsoperators in Projektionsoperatoren gilt für jede Orthonormalbasis:  $|v_k\rangle, |u_x\rangle, \dots$

### 3.6.2 Matrixelemente eines Operators

Ein abstrakter Vektor erhält durch die Wahl einer Basis konkrete Komponenten: ein Zahlentupel oder eine Funktion einer Veränderlichen. Genauso bekommt ein linearer Operator durch die Wahl dieser Basis entsprechende Komponenten: eine Matrix oder<sup>13</sup> eine Funktion zweier Veränderlicher.

Über die Definition des Einheitsoperators lässt sich die Wirkung eines Operators auf die Komponenten eines Vektors (74) so ausdrücken:

$$\mathcal{L}\phi(k') = \mathcal{L} \langle v'_k | \phi \rangle \equiv \langle v'_k | \mathcal{L}\phi \rangle = \int_k \langle v_{k'} | \mathcal{L}v_k \rangle \langle v_k | \phi \rangle \equiv \int_k L(k', k) \phi(k) \quad (77)$$

Die Matrixelemente eines Operators sind also:

$$L(k', k) \equiv \langle v_{k'} | \mathcal{L}v_k \rangle \quad (78)$$

#### 3.6.2.1 Transformation der Matrixelemente

Analog zu (34) transformieren sich die Matrixelemente eines linearen Operators beim Wechsel zu einer anderen Basis (ein Basiswechsel ist eine lineare Transformation):

$$L(x', x) = \sum_{k'} \sum_k v(x', k') L(k', k) v^*(x, k) dk' dk \quad (79)$$

Ein Vergleich mit  $\mathbf{T}' = \mathbf{Q} \mathbf{T} \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q} \mathbf{T} \mathbf{Q}^T$  für Transformationen von Matrizen  $\mathbf{T}$  durch orthogonale Matrizen  $\mathbf{Q}$  liefert uns die Entsprechungen:

- $L(x', x)$  entspricht  $\mathbf{T}'$ , der transformierten Matrix
- $L(k', k)$  entspricht  $\mathbf{T}$ , der ursprünglichen Matrix
- $v(x', k')$  entspricht der Transformationsmatrix  $\mathbf{Q}$
- $v^*(x, k)$  entspricht der inversen Transformationsmatrix  $\mathbf{Q}^{-1}$  (es kommt lediglich die komplexe Konjugation hinzu)

**DIE SPUR EINES OPERATORS – EINE KOMPLEXE ZAHL – IST ALS SUMME ÜBER SEINE DIAGONALELEMENTE DEFINIERT. ZEIGE, DASS DIE SPUR UNABHÄNGIG VON DER WAHL DER BASIS IST (BILDE DIE SPUR VON (79) UND BEACHTE DIE ORTHONORMIERUNG DER BASISVEKTOREN)!** (80)

$$\text{Sp } \mathcal{L} = \int L(k, k) dk$$

Die Basisunabhängigkeit der Spur macht es möglich, sie als Modell für wirkliche Größen zu verwenden. Die Spur kommt zur Anwendung in der von-Neumann-Entropie. Sie wird zur konkreten Berechnung in einer bestimmten Basis gebildet, ihr Wert ist trotzdem darstellungsunabhängig.

---

<sup>13</sup> Kein entweder-oder: es kann auch Mischungen geben.

### 3.6.3 Spezielle Operatoren

#### 3.6.3.1 Inverser Operator

Falls er existiert:

$$\mathcal{L} \mathcal{L}^{-1} = \mathcal{L}^{-1} \mathcal{L} = I$$

Vergleiche (25). Analog gilt im unitären Raum:

$$(\mathcal{L}^{-1})^{-1} = \mathcal{L}, \quad (a \mathcal{L})^{-1} = \frac{1}{a} \mathcal{L}^{-1}$$

$$(\mathcal{L} \mathcal{M})^{-1} = \mathcal{M}^{-1} \mathcal{L}^{-1}$$

Ist der Operator  $F$  eine Funktion  $f$  von anderen Operatoren  $F_1, F_2, \dots$ , dann ist seine Transformierte  $F'$

$$\mathcal{A} F \mathcal{A}^{-1} = f(\mathcal{A} F_1 \mathcal{A}^{-1}, \mathcal{A} F_2 \mathcal{A}^{-1}, \dots)$$

Man kann also einfach seine Argumente durch die transformierten Operatoren austauschen.<sup>14</sup>

#### 3.6.3.2 Adjungierter Operator

Bildet man mit zwei beliebigen Vektoren  $|\varphi\rangle$  und  $|\chi\rangle$  das Skalarprodukt  $\langle \varphi | L \chi \rangle$ , so kann man nach dem Operator  $L^\dagger$  fragen, für den gilt:

$$\langle \chi | \mathcal{L} \varphi \rangle = \langle \mathcal{L}^\dagger \chi | \varphi \rangle \quad (81)$$

Den hierdurch definierten Operator  $L^\dagger$  nennt man den **adjungierten Operator**.

**ZEIGE: AUS (81) FOLGT**

$$\langle \mathcal{L} \chi | \varphi \rangle = \langle \chi | \mathcal{L}^\dagger \varphi \rangle \quad (82)$$

Der adjungierte Operator hat die Matrixelemente

$$L^\dagger(k', k) = L(k, k')^* \quad (83)$$

D.h. man gewinnt sie aus den Matrixelementen des Operators  $L$  durch Transponieren und Komplexkonjugieren. Vgl.  $\mathbf{a}^T (\mathbf{M} \mathbf{b}) = (\mathbf{a}^T \mathbf{M}) \mathbf{b} = (\mathbf{a}^T \mathbf{M})^T \mathbf{b} = (\mathbf{M}^T \mathbf{a})^T \mathbf{b}$  bei Matrizen, wenn  $\mathbf{a}^T$  ein Zeilenvektor ist und  $\mathbf{b}$  ein Spaltenvektor.  $\mathbf{M}^T$  entspricht dem adjungierten Operator, hinzugekommen ist nur die komplexe Konjugation.

Regeln für adjungierte Operatoren (entsprechen denen für transponierte Matrizen):

$$\mathcal{L}^{\dagger\dagger} = \mathcal{L}, \quad (\mathcal{L}^{-1})^\dagger = (\mathcal{L}^\dagger)^{-1}, \quad (a \mathcal{L})^\dagger = a^* \mathcal{L}^\dagger$$

$$(\mathcal{L} + \mathcal{M})^\dagger = \mathcal{L}^\dagger + \mathcal{M}^\dagger, \quad (\mathcal{L} \mathcal{M})^\dagger = \mathcal{M}^\dagger \mathcal{L}^\dagger$$

#### 3.6.3.3 Hermitesche Operatoren

Ist ein Operator mit seinem adjungierten identisch, so heißt er selbstdadjungiert oder **hermitesch**.

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^\dagger \quad (84)$$

Die Entsprechung bei Matrizen wäre also eine symmetrische Matrix. Hinzugekommen ist die komplexe Konjugation.

**ZEIGE MIT HILFE VON (83), DASS FÜR DIE MATRIXELEMENTE EINES HERMITESCHEN**

**OPERATORS GILT:**

$$(85)$$

$$H(k', k) = H(k, k')^*$$

---

<sup>14</sup> Das gilt für Linearkombinationen und Potenzen, damit auch für Funktionen, die sich in Taylorreihen entwickeln lassen.

Die Elemente, die symmetrisch zur Hauptdiagonalen liegen, sind zueinander konjugiert komplex. Die Diagonalelemente sind reell. Für einen Hermiteschen Operator ist das **Skalarprodukt**  $\langle \varphi | H | \varphi \rangle$  **reell**. Es wird in der Quantentheorie verwendet als mathematisches Modell für mögliche „Messwerte“<sup>15</sup>.

Regeln für hermitesche Operatoren:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} + \mathcal{K} &= \text{HERMITESCH} \\ a \mathcal{H} &= \text{HERMITESCH, falls } a \text{ reell} \\ \mathcal{H}^n &= \text{HERMITESCH (n positiv oder negativ ganz)} \\ \mathcal{F}(\mathcal{H}) = \sum_n a_n \mathcal{H}^n &= \text{HERMITESCH, falls } a_n \text{ reell} \\ \mathcal{H} \mathcal{H} + \mathcal{K} \mathcal{H} = [\mathcal{H}, \mathcal{K}] &= \text{HERMITESCH} \\ \mathcal{H} \mathcal{K} &= \text{HERMITESCH, falls } \mathcal{H} \mathcal{K} = \mathcal{K} \mathcal{H} \\ i(\mathcal{H} \mathcal{K} - \mathcal{K} \mathcal{H}) &= i[\mathcal{H}, \mathcal{K}] = \text{HERMITESCH} \\ \mathcal{A} \mathcal{H} \mathcal{A}^{-1} &= \text{HERMITESCH für einen beliebigen Operator } \mathcal{A} \\ \frac{d\mathcal{H}(t)}{dt} &= \text{HERMITESCH.} \end{aligned}$$

### 3.6.3.4 Unitäre Operatoren

Ein Operator heißt **unitär**, wenn sein adjungierter Operator gleich seinem inversen Operator ist:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}^{-1} &= \mathcal{U}^\dagger \\ \mathcal{U} \mathcal{U}^\dagger &= \mathcal{U}^\dagger \mathcal{U} = 1 \end{aligned}$$

Damit sind unitäre Operatoren das Pendant zu den orthogonalen Matrizen.

**ZEIGE, DASS UNITÄRE OPERATOREN DAS SKALARPRODUKT INVARIANT LASSEN!**

$$\langle \mathcal{U}\varphi | \mathcal{U}\chi \rangle = \langle \varphi | \chi \rangle \quad (86)$$

Insbesondere bleiben orthogonale Vektoren bei einer Transformation mit einem unitären Operator orthogonal.

Regeln für unitäre Operatoren:

$$\begin{aligned} a \mathcal{U} &= \text{unitär, falls } aa^* = 1 \\ \mathcal{U}^n &= \text{unitär (n positiv oder negativ ganz)} \\ \mathcal{U} \mathcal{V} &= \text{unitär} \\ i \frac{\mathcal{U} - 1}{\mathcal{U} + 1} &= \text{HERMITESCH,} \end{aligned}$$

und falls  $\mathcal{H}$  HERMITESCH ist,

$$\begin{aligned} \mathcal{U} \mathcal{H} \mathcal{U}^{-1} &= \text{HERMITESCH} \\ e^{i\mathcal{H}} &= \text{unitär} \\ \frac{1 - i\mathcal{H}}{1 + i\mathcal{H}} &= \text{unitär.} \end{aligned}$$

**WIE VIELE UNABHÄNGIGE REELLE PARAMETER BESITZT DIE MATRIX EINES BELIEBIGEN HERMITESCHEN BZW. UNITÄREN OPERATORS IN EINEM N-DIMENSIONALEN UNITÄREN RAUM?**

(87)

<sup>15</sup> Auf das schwierige Problem mit den „Messungen“ werden wir noch kommen.

**ZEIGE, DASS DIESE MATRIX UNITÄR IST!**

$$\frac{1}{\sqrt{|\alpha|^2 + |\beta|^2}} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix} \quad (88)$$

### 3.6.3.5 Projektionsoperatoren

Die mit Einheitsvektoren gebildeten Tensorprodukte  $|u\rangle\langle u|$  nennt man Projektionsoperatoren.

$$\mathcal{P}_{|u\rangle} = |u\rangle\langle u|$$

Wir kennen bereits entsprechende Matrizen, die aus einer einzigen 1 in der Hauptdiagonale bestehen.

Projektionsoperatoren<sup>16</sup> sind linear, hermitesch und haben die Eigenschaft:

$$\mathcal{P}_{|u_i\rangle} \mathcal{P}_{|u_k\rangle} = \delta(i, k) \mathcal{P}_{|u_i\rangle}$$

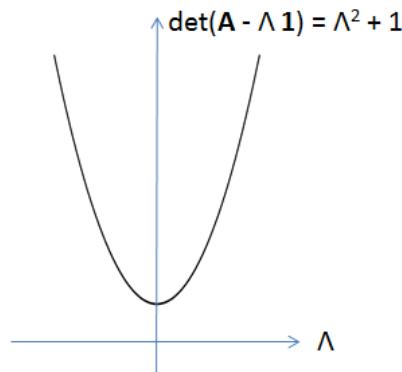
### 3.6.4 Eigenwerte und Eigenvektoren

Wie bei Matrizen und Differentialoperatoren lassen sich auch bei linearen Operatoren auf dem unitären Raum Eigenvektoren und Eigenwerte einführen:

$$|\mathcal{L} u_A\rangle = A |u_A\rangle \quad (89)$$

Nun aber ist der Eigenwert  $\Lambda$  eine komplexe Zahl. Die Gesamtheit aller Eigenwerte eines Operators nennt man **Spektrum**. Es kann diskret oder kontinuierlich sein oder aus diskreten und kontinuierlichen Abschnitten zusammengesetzt sein. Mit (76) ergibt sich für die Matrixelemente

$$\sum_{k'} L(k, k') u_A(k') dk' = A u_A(k) \quad (90)$$



Ist der zugrunde liegende Raum  $n$ -dimensional, dann bekommen wir nach (27) jetzt  $n$  Lösungen, denn anders als im Reellen sind auch die komplexen Wurzeln als Lösungen zugelassen.

Zum Beispiel hat das charakteristische Polynom  $\Lambda^2 + 1 = 0$  (einer  $2 \times 2$  Matrix) die beiden Nullstellen  $+i$  und  $-i$ , während es im Reellen keine Lösung hat (links).

#### 3.6.4.1 Eigenwerte spezieller Operatoren

Für die Eigenwerte von Operatoren gilt  $\langle u_\Lambda | L u_\Lambda \rangle = \Lambda \langle u_\Lambda | u_\Lambda \rangle = \Lambda |u_\Lambda|^2$ ,

für hermitesch darüber hinaus  $\langle u_\Lambda | L^\dagger u_\Lambda \rangle = \langle L^\dagger u_\Lambda | u_\Lambda \rangle = \langle L u_\Lambda | u_\Lambda \rangle = \Lambda^* \langle u_\Lambda | u_\Lambda \rangle = \Lambda^* |u_\Lambda|^2$ .

Wenn  $|u_\Lambda\rangle$  nicht der Nullvektor ist, folgt  $\Lambda = \Lambda^*$ .

**Die Eigenwerte hermitischer Operatoren sind reell.**

<sup>16</sup> kurz: „Projektor“

Sie eignen sich als Modelle reeller physikalischer Größen: Ort, Impuls, Energie, ...

Allgemeiner bekommen wir die Gleichung

$$\begin{aligned}\langle u_{\Lambda'} | \mathcal{L} u_{\Lambda} \rangle &= \Lambda \langle u_{\Lambda'} | u_{\Lambda} \rangle \\ &= \langle \mathcal{L} u_{\Lambda'} | u_{\Lambda} \rangle = \Lambda'^* \langle u_{\Lambda'} | u_{\Lambda} \rangle \\ (\Lambda - \Lambda'^*) \langle u_{\Lambda'} | u_{\Lambda} \rangle &= 0.\end{aligned}$$

Wenn die Eigenwerte  $\Lambda$  und  $\Lambda'$  verschieden sind, dann müssen die Eigenvektoren orthogonal sein.

**Die Eigenvektoren eines hermiteschen Operators sind zueinander orthogonal.**

**ZEIGE, DASS DIE OPERATOREN  $L^{-1}$  UND  $L^{\dagger}$  DIESELBEN EIGENVEKTOREN HABEN WIE  $L$  UND DASS IHRE EIGENWERTE  $\Lambda^{-1}$  BZW.  $\Lambda^*$  SIND.** (91)

**Die Eigenwerte eines unitären Operators sind komplexe Zahlen vom Betrag 1.**

### 3.6.4.2 Gemeinsame Eigenvektoren vertauschbarer Operatoren

Wendet man auf die Eigenwertgleichung (89) einen Operator  $M$  an, der mit  $L$  vertauschbar ist<sup>17</sup>, dann ergibt sich:

$$\mathcal{M} \mathcal{L} |u_{\Lambda}\rangle = \mathcal{L} \mathcal{M} |u_{\Lambda}\rangle = \Lambda \mathcal{M} |u_{\Lambda}\rangle$$

Das rechte Gleichheitszeichen bedeutet, dass auch  $M|u_{\Lambda}\rangle$  ein Eigenvektor von  $L$  zum Eigenvektor  $\Lambda$  ist.

### 3.6.4.3 Invarianz des Eigenwertspektrums bei unitären Transformationen

Ein Eigenvektor  $|u_{\Lambda}\rangle$  von  $L$  soll mit der Transformation  $A$  transformiert werden  $\rightarrow A|u_{\Lambda}\rangle$ . Welches Eigenwertspektrum besitzt der transformierte Operator  $L' = A L A^{-1}$ ? Es ergibt sich:

$$\mathcal{L}' |\mathcal{A} u_{\Lambda}\rangle = \mathcal{A} \mathcal{L} |u_{\Lambda}\rangle = \Lambda |\mathcal{A} u_{\Lambda}\rangle$$

Er besitzt also dasselbe Eigenwertspektrum. Die Invarianz gegenüber Basiswechseln macht es zum Kandidaten zur Modellierung der Wirklichkeit.

Wenn  $A$  insbesondere unitär ist, dann bleiben die Skalarprodukte bei der Transformation erhalten. Hatte  $L$  ein vollständiges Orthonormalsystem von Eigenvektoren (siehe nächster Abschnitt), dann hat dies auch  $L'$ .

### 3.6.5 L-Darstellung des unitären Vektorraums

Wenn ein hermitescher Operator einen vollständigen Satz von Eigenvektoren hat, so dass jeder Vektor des unitären Raumes als Linearkombination dieser Eigenvektoren geschrieben werden kann, dann bilden seine Eigenvektoren ein *vollständiges Orthonormalsystem*.<sup>18</sup>

Orthonormierung und Vollständigkeit:

$$\langle u_{\Lambda} | u_{\Lambda'} \rangle = \delta(\Lambda, \Lambda') \quad \text{und} \quad \sum_{\Lambda} |u_{\Lambda}\rangle \langle u_{\Lambda}| d\Lambda = I$$

<sup>17</sup> Die Multiplikation von unitären Operatoren ist i.a. nicht kommutativ, d.h. analog zur Multiplikation von Matrizen und Differentialoperatoren. Es gibt jedoch vertauschbare Operatoren. Bei den Matrizen vertauschen zum Beispiel  $M$  und ihre Inverse  $M^{-1}$ .

<sup>18</sup> Abgekürzt VONS, manchmal auch VNOS.

Die Entwicklung irgendeines Vektors:

$$|\varphi\rangle = \sum_{\Lambda} |u_{\Lambda}\rangle \varphi(\Lambda) d\Lambda, \quad \varphi(\Lambda) = \langle u_{\Lambda} | \varphi \rangle$$

Die Eigenvektoren von L bilden damit eine Basis des unitären Raumes. Man spricht von der **L-Darstellung**, wenn die Komponenten und Matrixelemente von Vektoren und Operatoren auf diese Basis bezogen gemeint sind. Die Eigenwerte  $\Lambda$  nummerieren dann die Komponenten/Matrixelemente. Sie können wieder diskret, kontinuierlich oder gemischt sein.

In der Quantentheorie werden physikalische Größen wie Ort, Impuls, Energie, ... durch Operatoren dargestellt. Man bekommt dadurch Orts-, Impuls-, Energie-, ... Darstellungen der mathematischen Objekte des unitären Raumes.

Der Operator L lässt sich in seiner eigenen Basis sehr einfach ausdrücken. Jeder Operator lässt sich in jeder Basis als Summe von Tensorprodukten ausdrücken<sup>19</sup>:

$$\mathcal{L} = \sum_k |\mathcal{L} v_k\rangle \langle v_k| dk$$

In der Eigenbasis  $u_{\Lambda}$  also:

$$\mathcal{L} = \sum_{\Lambda} \Lambda |u_{\Lambda}\rangle \langle u_{\Lambda}| d\Lambda = \sum_{\Lambda} \Lambda \mathcal{P}_{|u_{\Lambda}\rangle} d\Lambda$$

Diese Darstellung heißt **Spektraldarstellung** von L. Sie entspricht einer Diagonalmatrix.

In der Spektroskopie von Atomen und Molekülen beobachtet man Energiedifferenzen in Form der Frequenz (oder Wellenlänge) des abgestrahlten oder absorbierten Lichts: das Atom oder Molekül wechselt seinen Energieinhalt, die Differenz wird zu elektromagnetischer Strahlung oder bzw. dieser entnommen. Diese Energiedifferenzen sind in der Quantentheorie Differenzen von Eigenwerten eines hermiteschen Operators (des Hamilton-Operators).

In vollkommener Analogie zu (46), wo wir gesehen haben, dass die Funktion F einer Diagonalmatrix M eine Diagonalmatrix mit den Komponenten  $F(M_{ii})$  ist, überträgt sich in der L-Darstellung die Wirkung einer Operatorfunktion F(L) auf die Eigenwerte:

$$\mathcal{F}(\mathcal{L}) = \sum_{\Lambda} F(\Lambda) \mathcal{P}_{|u_{\Lambda}\rangle} d\Lambda$$

### 3.6.6 Produktraum

In der klassischen Physik werden Dinge durch Differentialgleichungen modelliert. Setzt man 2 Dinge zusammen, dann wirken zwischen ihnen Kräfte. Diese Kräfte nehmen mit der Entfernung ab, so dass es überhaupt erst möglich ist, die Dinge getrennt zu betrachten: indem man sie so weit voneinander entfernt, dass ihre gegenseitige Beeinflussung vernachlässigbar wird. Sind die Dinge zusammengesetzt, dann führen die Kräfte („Wechselwirkungen“) im Modell zu einer Gleichung, in der die ursprünglichen Freiheitsgrade vertreten sind. Wie wir bereits gesehen haben, erhalten die Teile ihren Charakter, wenn die gemeinsame Gleichung linear ist oder „in ihrem linearen Bereich betrieben wird“.

---

<sup>19</sup> Für eine vollständige Basis gilt ja immer  $\sum_k |v_k\rangle \langle v_k| = \mathbf{1}$

Wenn zum Beispiel Erde und Mond in Wechselwirkung treten, dann könnte man sie in erster Näherung als starre ( $r=\text{const.}$ ) Kugeln sehen, von denen jede durch den Ort ihres Mittelpunkts ( $x,y,z$ ) und eine Ausrichtung im Raum ( $\varphi,\theta$ ) beschrieben wird. Im dreidimensionalen Raum hat jede Kugel dann  $3 + 2 = 5$  Freiheitsgrade. Die gemeinsame Gleichung des Erde-Mond-Systems hätte dann  $5 + 5 = 10$  Freiheitsgrade. Die ursprünglichen Variablen der getrennten Gleichungen finden sich unverändert in der Gleichung des zusammengesetzten Systems wieder.



### In der Quantentheorie ist das nicht so!

Der Zustand der Erde würde ursprünglich durch einen einzigen Vektor  $|\text{Erde}\rangle$  in einem 5-fach unendlich-dimensionalen Raum beschrieben, der Zustand des Mondes in einem davon getrennten 5-fach unendlich-dimensionalen Raum als  $|\text{Mond}\rangle$ . Man könnte beide Zustände jeweils nach einer Basis entwickeln, in der die Komponenten des Zustandsvektors den klassischen kontinuierlichen Variablen ( $x,y,z,\varphi,\theta$ ) entsprächen (nur eine von unendlich vielen Möglichkeiten). Würden Erde und Mond quantenmechanisch zu einem System zusammengesetzt, dann müsste man sie in einem  $5 \times 5 = 25$ -fach unendlich-dimensionalen Raum beschreiben!

Der Produktraum von 2 Teilen **1** und **2** wird formal geschrieben als:

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}^1 \times \mathcal{U}^2$$

Die Vektoren sind sogenannte **direkte Produkte**:

$$|\varphi^1\varphi^2\rangle \equiv |\varphi^1\rangle |\varphi^2\rangle = |\varphi^2\rangle |\varphi^1\rangle$$

Der Produktraum besteht aus diesen direkten Produkten **sowie allen Linearkombinationen davon**.

Setzt sich ein Vektor in  $U^1$  so zusammen

$$|\varphi^1\rangle = a |u^1\rangle + b |v^1\rangle$$

dann soll für den Produktvektor gelten:

$$|\varphi^1\varphi^2\rangle = a |u^1\varphi^2\rangle + b |v^1\varphi^2\rangle$$

Das Skalarprodukt zwischen direkten Produkten soll so berechnet werden:

$$\langle \varphi^1\varphi^2 | \chi^1\chi^2 \rangle = \langle \varphi^1 | \chi^1 \rangle \langle \varphi^2 | \chi^2 \rangle$$

D.h. das Ergebnis ist einfach das Produkt der Skalarprodukte aus den Einzerräumen.

#### **3.6.6.1 Basisvektoren im Produktraum**

Sind  $|v_k^1\rangle$  Basisvektoren in  $U^1$  und  $|v^2\rangle$  Basisvektoren in  $U^2$ , so sind  $|v_k^1 v^2\rangle$  Basisvektoren in  $U = U^1 \times U^2$ . Gibt es  $n$  verschiedene Basisvektoren in  $U^1$  und  $m$  verschiedene in  $U^2$ , dann werden dadurch  $n \times m$  Basisvektoren in  $U$  produziert.

Unser erster Zen-Koan: **Die Summe zweier Teile ist ihr Produkt!**

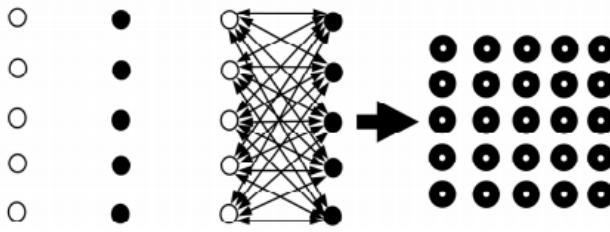


Abbildung 1: klassische (links) und quantentheoretische Zusammensetzung (rechts)<sup>20</sup>

Aus der Orthonormierung der Basisvektoren in den Teilräumen folgt im Produktraum

$$\langle v_k^1 v_l^2 | v_{k'}^1 v_{l'}^2 \rangle = \delta(k, k') \delta(l, l')$$

Ein beliebiger Vektor  $|\varphi\rangle$  aus U (der kein direktes Produkt sein muss!), hat die Zerlegung

$$|\varphi\rangle = \sum_k \sum_l |v_k^1 v_l^2\rangle \varphi(k, l) dk dl$$

Ganz analog, wie wir es beim Tensorprodukt (12)(13) gesehen haben, lässt sich nicht jeder Vektor des Produktraums als Produktvektor schreiben, aber er lässt sich als Linearkombination von Produktvektoren darstellen, so wie sich jede Matrix als Linearkombination von Tensorprodukten darstellen ließ, aber selbst kein Tensorprodukt sein musste.

Die Komponenten sind Funktionen zweier Veränderlicher oder Zahlentupel, die durch 2 Indizes nummeriert werden, also eigentlich **zunächst** Matrizen. Ist  $|\varphi\rangle$  ein direktes Produkt, dann sind seine Komponenten einfach das Produkt aus den einzelnen Komponenten:

$$\varphi(k, l) = \langle v_k^1 | \varphi^1 \rangle \langle v_l^2 | \varphi^2 \rangle = \varphi^1(k) \varphi^2(l)$$

### 3.6.6.2 Eine Warnung

In vielen einführenden Lehrbüchern zur Quantentheorie wird der Produktraum schnell abgehandelt, und die Mathematik dazu erweckt einen geradlinigen Anschein. Doch es steckt mehr dahinter.

Manche Autoren bezeichnen die direkten Produkte des Produktraums als Tensorprodukte<sup>21</sup>, was Verwirrung stiften kann.

Im Kapitel Transformationen haben wir gesehen, dass ein Vektor über sein Transformationsverhalten  $\mathbf{Q}\mathbf{v}$  definiert ist. Ein Tensor  $\mathbf{T}$  erster Stufe transformierte sich hingegen als  $\mathbf{QTQ}^{-1}$  (34).

In Matrixform

$$T'_{il} = Q_{ij} T_{jk} Q_{kl}^{-1}$$

Die Komponenten des direkten Produkts  $|\varphi^1 \varphi^2\rangle$  transformieren sich dagegen wie

$$Q_{ij}^1 \phi_j^1 Q_{lk}^2 \phi_k^2 = Q_{ij}^1 Q_{lk}^2 \phi_j^1 \phi_k^2 \equiv Q_{ij}^1 Q_{lk}^2 T_{jk}$$

Es besteht also durchaus eine enge Verwandtschaft. **Genau genommen** haben wir es in (34) aber mit einem gemischt kontra- und kovarianten Tensor 2. Stufe zu tun. Das direkte Produkt liefert uns dagegen einen 2-fach kontravarianten Tensor, dann wenn die beiden Teilräume gleichartig waren (nur dann sind die Transformationsmatrizen  $Q^1$  und  $Q^2$  gleich).

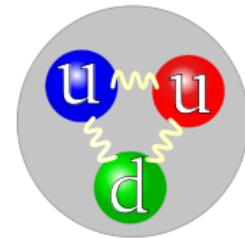
<sup>20</sup> Abbildung aus T. Görnitz „Quantum Theory as Universal Theory of Structures – Essentially from Cosmos to Consciousness“

<sup>21</sup> <http://www.intechopen.com/books/advances-in-quantum-theory/quantum-theory-as-universal-theory-of-structures-essential-from-cosmos-to-consciousness>

Wie wird nun aus dem Tensorgebilde „direktes Produkt“, das einem Operator des unitären Raums entspräche, wieder ein Vektor des unitären Raums? Dies geschieht durch eine Umnummerierung der Komponentenindizes, die bei abzählbaren Matrixelementen möglich ist. 2 Beispiele dazu finden sich im Anhang.

### 3.6.6.3 Abstecher in die Teilchenphysik

Stelle dir vor, du hättest mit deinen Beschleunigern und Detektoren über die Jahre hunderte verschiedener „Elementarteilchen“ nachgewiesen, und plötzlich behauptet ein Theoretiker, viele davon seien in Wirklichkeit zusammengesetzt, also Linearkombinationen von direkten Produktvektoren. Das wäre abenteuerlich! Murray Gell-Mann erhielt dafür 1969 den Nobelpreis für Physik. Die Energieeigenvektoren der Teilräume nennt man heute „Quarks“ [https://de.wikipedia.org/wiki/Quark\\_\(Physik\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Quark_(Physik)).<sup>22</sup>



### 3.6.6.4 Quantenregister

Ein Qubit ist ein Zustand eines 2-dimensionalen unitären Raums. Der 2-dimensionale unitäre Raum ist sozusagen der Speicher für 1 Qubit.

Ein n-Bit Quantenregister ist der Produktraum von n 2-dimensionalen unitären Räumen, also ein  $2^n$ -dimensionaler Produktraum. Der Zustand des Quantenregisters ist im Allgemeinen eine Linearkombination aus Qubit-Produktzuständen.

### 3.6.6.5 Operatoren im Produktraum

Die Matrixelemente eines Operators im Produktraum bekommen nun die Indizes beider Teilräume:

$$L(k, l; k', l') = \langle v_k^1 v_l^2 | \mathcal{L} v_{k'}^1 v_{l'}^2 \rangle$$

Der Operator L wirkt also auf die Komponenten wie

$$\varphi(k, l) \rightarrow \mathcal{L} \varphi(k, l) = \sum_{k'}^{\mathcal{L}} \sum_{l'}^{\mathcal{L}} L(k, l; k', l') \varphi(k', l') dk' dl'$$

Ein Operator  $L^1$ , der nur im Teilraum 1 wirken soll, kann so notiert werden:

$$\mathcal{L}^1 \times I$$

Da solche Teiloperatoren immer nur in ihrem Teilraum wirken, kommt es bei der Schreibung nicht auf die Reihenfolge an:  $L^1 M^2 = M^2 L^1$

Für die Matrixelemente von Operatoren, die direkte Produkte aus Teiloperatoren sind, gilt:

$$\langle v_k^1 v_l^2 | \mathcal{L}^1 \mathcal{M}^2 v_{k'}^1 v_{l'}^2 \rangle \equiv (L^1 \times M^2)(k, l; k', l') = L^1(k, k') M^2(l, l')$$

---

<sup>22</sup> Rechts ein Proton. Am Produktraumzustand „Proton“ sind nach heutigen Modellen aber noch weitere Teile beteiligt: Gluonen, elektrisch schwache Anteile, „virtuelle“ Quarks, ... Verkomplizierend kommt hinzu, dass in den Quantenfeldtheorien allgemeine Zustände aus Basisvektoren aus Räumen verschiedener Dimensionen zusammenkombiniert werden können.

## 4 Information



### Anton Zeilinger:

Ich bin überzeugt, dass Information das fundamentale Konzept unserer Welt ist. Sie bestimmt, was gesagt werden kann, aber auch, was Wirklichkeit sein kann. In der üblichen Auffassung des Physikers und im täglichen Leben existiert die Wirklichkeit da draußen primär; durch diese Wirklichkeit spazieren wir wie über eine Bühne, und die Information, die wir darüber haben, ist ein sekundäres Konzept. In der Quantenphysik – zumindest in bestimmten Situationen – ist nach meiner Überzeugung die Information das Primäre: das, was gesagt werden kann.

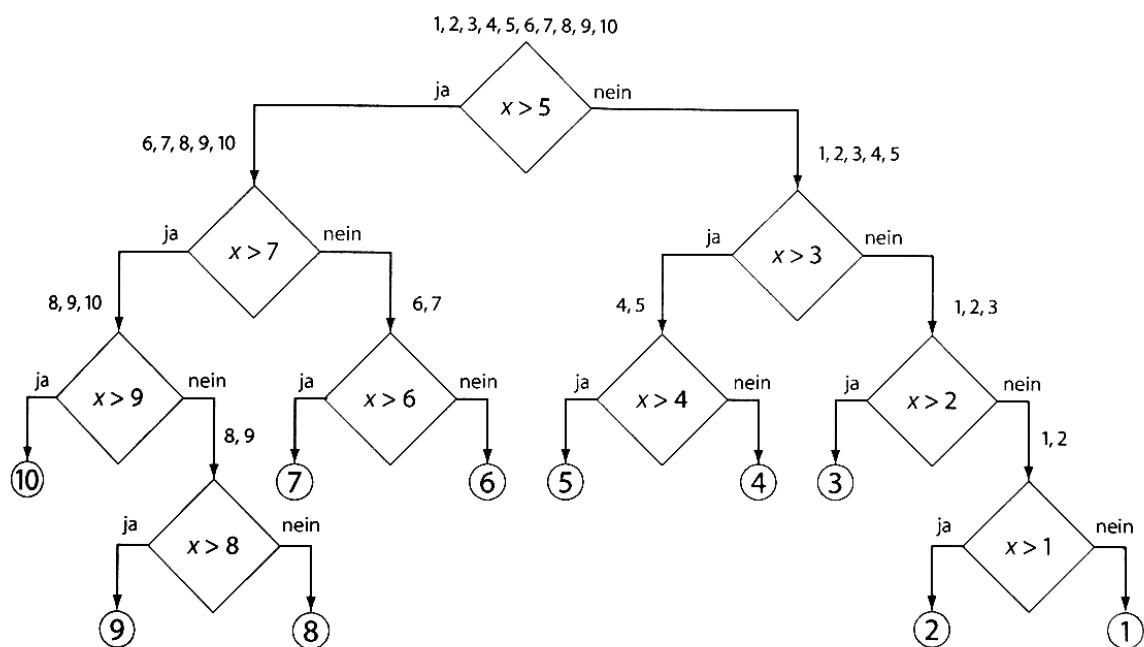
<http://www.spektrum.de/pdf/sdw-08-03-s038-pdf/942648>

### 4.1 Shannonsche Informationstheorie – Grundlegende Begriffe

Dieses Kapitel orientiert sich an Amann & Müller-Herold Offene Quantensysteme Kapitel 1.

Denksportaufgabe: „Wie viele mit ja/nein beantwortbare Fragen muss man mindestens stellen, um eine Zahl zwischen 1 und 10 mit Sicherheit zu bestimmen?“

Antwort:



Mit **4** ja/nein (binären) Fragen kann man  $2^4 = 16$  Möglichkeiten unterscheiden.

Allgemein: mit **n** verschiedenen ja/nein Fragen kann man  $2^n = N$  Unterscheidungen treffen.

Umkehrung: um **N** Unterscheidungen treffen zu können, braucht man  $\log_2 N$  binäre Fragen.

In der Informationstheorie wird der Informationsgehalt einer Nachricht mit der Anzahl **N** der damit verknüpften Binärfragen definiert. Die Einheit der Information heißt **Bit**.

$$I = \log_2 N \quad (92)$$

- Eine Dezimalziffer 0..9 repräsentiert  $\log_2 10 \approx 3,3$  Bit.
- Ein Buchstabe des Alphabets A..Z repräsentiert  $\log_2 26 \approx 4,7$  Bit.

#### 4.1.1 Der Informationsgehalt stochastischer Experimente

Die bisher erwähnten Beispiele bezogen sich rein auf die Codierung von Nachrichten. Die heutige mathematische Informationstheorie ist eine statistische Theorie. Sie bezieht sich auf ein gedachtes Ensemble von unter gleichartigen Bedingungen durchgeföhrten Zufallsexperimenten. In dieser statistischen Informationstheorie ist 1 Bit die Information einer binären Zufallsgröße, deren beide Werte mit derselben Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{2}$  produziert werden.

Aus Sicht der statistischen Informationstheorie ist die Denksportaufgabe nur dann optimal gelöst, wenn bei einer vielfachen Wiederholung des Experiments alle Ereignisse mit gleicher Häufigkeit auftreten, d.h. wenn sie gleich wahrscheinlich sind. Ist  $p_i$  die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses  $\omega_i$  ( $i = 1..N$ ), wobei

$$0 \leq p_i \leq 1 \quad \sum_{i=1}^N p_i = N \quad (93)$$

so heißen die Ereignisse **gleich wahrscheinlich**, wenn  $p_1 = p_2 = \dots = p_N$ . Dann ist  $p_i = 1/N$  für alle Ereignisse. Nach (92) ist damit die Information  $I$ , die uns das Eintreffen eines der gleich wahrscheinlichen Ereignisse  $\omega_i$  liefert

$$I(\omega_i) = \log_2 \frac{1}{p_i} = -\log_2(p_i) \quad (94)$$

Die Verallgemeinerung dieser Beziehung auf nicht gleich wahrscheinliche Ereignisse ist die Definition der Information nach Shannon.

Der mittlere Informationsgewinn (= Erwartungswert) beim Eintreten irgendeines Ereignisses ist die **Shannon-Entropie  $H$**  in Bits:

$$H = - \sum_{i=1}^N p_i \log_2 p_i \quad (95)$$

Diese Entropie ist immer positiv. Sie hat ihr Maximum bei gleich wahrscheinlichen Ereignissen und ist 0, wenn eines der Ereignisse sicher eintrifft und die anderen nie.

$$0 \leq H \leq \log_2 N \quad (96)$$

ZWEI NICHT GEZINKTE SPIELWÜRFEL MIT DEN ZAHLEN 1,2,3,4,5,6 WERDEN GEWORFEN. WIE VIEL INFORMATION ENTHÄLT DIE MITTEILUNG, DASS DIE SUMME DER GEWORFENEN ZAHLEN 7 IST? (97)

#### 4.2 Information in der Natur?

Eine ganz andere Frage ist es, ob dieses Konzept der Information irgendetwas mit der Natur zu tun hat oder ein reines Kunstprodukt von uns Menschen ist.

Die Kodierung der Nachricht „Das Haus ist gelb.“ in einem ISO-8859 Zeichensatz beansprucht, da sie aus 18 Zeichen besteht, 18 Byte = 144 Bit. Für einen Digitalrechner, der diese Nachricht übertragen soll, hat sie einen Informationsgehalt von 144. Wenn du diese Nachricht erhältst, hat sie für dich auch den Informationsgehalt 144? Natürlich nicht! Das sieht man schon daran, dass die Nachricht genauso gut in einem UTF-16 Zeichensatz hätte übertragen werden können, dann hätte sie für den Rechner einen Informationsgehalt von  $18 * 2$  Byte = 288 Bit. Welchen Informationsgehalt hat diese Nachricht für einen Menschen?

## Beispiel

Um die Sache nicht allzu kompliziert zu machen stellen wir uns vor, ein Kleinkind mit asiatischen (gelben) Eltern wäre der Empfänger der Nachricht. Es hat bisher lediglich 4 Substantive gelernt: {Mama, Papa, Auto, Haus}. Daneben kennt es bereits die Farbwörter {rot, gelb, blau}. Aus seinem Dorf, bestehend aus 3 Häusern, ist es noch nie hinausgekommen. Dort gibt es nur 2 Autos. Wenn alle Kombinationen gleich wahrscheinlich sind, wenn also „Das Haus ist gelb.“ genauso wahrscheinlich ist wie „Der Papa ist blau.“, dann gibt es in der kleinkindlichen Sprachwelt  $(1+1+3+2) \cdot 3$  gleich wahrscheinliche Nachrichten und jede Nachricht hat die Information  $I = \log_2 21 \approx 4,4$ . [Wir stellen uns vor, dass das Kind notfalls auf eines der 7 Substantive deutet, aus denen das Dorf in seinem Weltmodell besteht, dass also mit „Das Auto“ ein bestimmtes der beiden ausgewählt wird.]

Die sprachgestützte Vorstellungswelt eines Erwachsenen bietet natürlich viel mehr zur Auswahl als die eines Kleinkindes, und für ihn hat die gleiche Nachricht eine vielfach höhere Information, für ihn besteht das Dorf aus viel mehr Dingen. Der Informationsgewinn kann allerdings von der Tagesform des Erwachsenen abhängen. Die gleiche Nachricht kann in verschiedenen Umgebungen für ihn ganz unterschiedliche Informationsgewinne bedeuten.

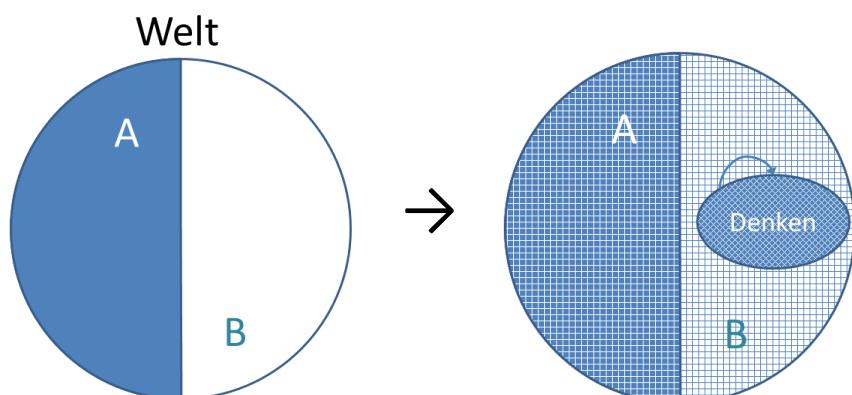
In der klassischen Physik ist Information ein subjektives Konzept. Für den Chemiker besitzt ein Proton die Entropie 0, da er sich nicht für dessen innere Zustände interessiert. Für den Teilchenphysiker ist das Proton eine eigene Welt mit einem sehr hohen Informationsgehalt.

Auf makroskopischer Ebene verhält sich die Welt wie ein Kontinuum: Ort und Zeit, Ausdehnung, Temperatur, Druck, Masse, ... werden als reelle Zahlen modelliert. Jede reelle Zahl fasst unendlich viel Information. Dramatisch gesteigert wird dieser Sachverhalt durch Feldtheorien wie die Elektrodynamik: an jedem Ort des Raums zu jeder Zeit, unendlich dicht gepackt, existiert eine reelle Feldstärke, welche unendlich viel Information fassen kann.

Besonders die klassische Feldtheorie verträgt sich nicht mit der statistischen Physik, die die Entropie ähnlich der Shannon-Entropie als mittlere Information eines Makrozustands (z.B. Temperatur T, Druck p) sieht, bezogen auf die Anzahl verschiedener Kombinationen von Mikrozuständen, aus denen sich der Makrozustand zusammensetzen kann.

Information und Kontinuum sind 2 Konzepte, die sich nicht mögen! Was wir also scheinbar machen, ist **künstlich** Raster über eine kontinuierliche Welt zu legen:

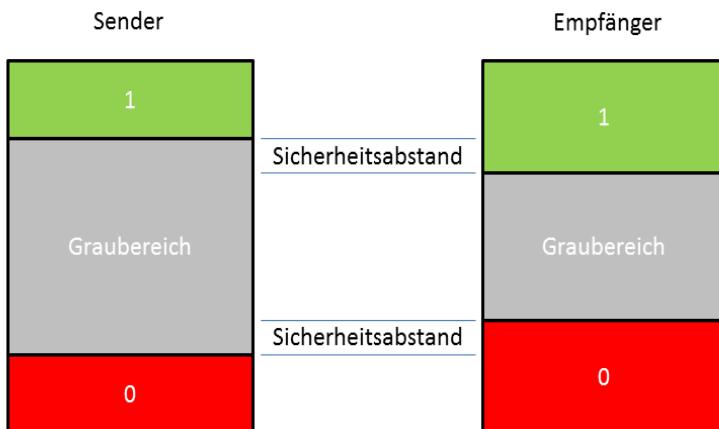
*Wenn wir irgendetwas in der Natur beschreiben wollen, müssen wir die Welt in zwei Teile separieren: in das System, das wir eigentlich beschreiben möchten, und seine Umgebung, d.h. den Rest der Welt. [Amann & Müller-Herold Kapitel 2.1]*



Warum Zeilinger dennoch zu einer anderen Auffassung gekommen ist, werden wir noch sehen...

Mit etwas Abstand betrachtet entstehen Sender, Nachricht und Empfänger durch eine gedachte Teilung der Welt. In der Informationstheorie nach Shannon soll die Nachricht dabei nur abzählbar viele Zustände haben. Bei einer deterministischen Zeitentwicklung sind durch solch eine Nachricht im Empfänger maximal<sup>23</sup>  $I^N$  verschiedene zukünftige Verläufe denkbar. Die Veränderung im Empfänger durch die Nachricht ist die **Bedeutung**. Sie ist nach dieser Definition in jedem Empfänger unterschiedlich.<sup>24</sup> Eine Erweiterung der Informationstheorie auf Kontinua ist denkbar (mir aber nicht bekannt).

Mit diesem Wissen über die klassische Physik ist es nicht verwunderlich, dass die klare Vorstellung des Informatikers von einer Informationseinheit erst einmal auf gar nicht so einfache Weise in die Praxis umgesetzt werden muss. Ein klassisches Bit ist physikalisch prinzipiell so realisiert:



Am Beispiel der sogenannten Transistor-Transistor-Logik mit 5 Volt Betriebsspannung liest sich dies so: „Die Schaltkreise sind so dimensioniert, dass Eingangsspannungen  $U_E < 0,8$  V als Low-Pegel, und  $U_E > 2,0$  V als High-Pegel erkannt werden. Die Ausgangsspannung  $U_A$  beträgt typisch < 0,4 V für den Low-Pegel und > 2,4 V für den High-Pegel bei der zulässigen Last. Der statische Störabstand beträgt somit sowohl für High- als auch für Low-Pegel 0,4 V.“

<https://de.wikipedia.org/wiki/Transistor-Transistor-Logik>

Es ist klar, dass der physikalische Träger eines Bits nicht exakt kopiert werden kann, sondern dass das gedachte Bit den Kopiervorgang nur dadurch hundertprozentig überleben kann, dass eine vergrößerte Sicht auf das physikalische Geschehen definiert wurde. Das *No Cloning Theorem* der Quanteninformatik wird uns die prinzipielle Nichtkopierbarkeit von physikalischen Qubits zeigen.

## 5 Philosophischer Ausflug

LIEß DIR PLATONS HÖHLENGEICHNIS DURCH: 106. A) + B) VON  
<http://gutenberg.spiegel.de/buch/politeia-4885/1>

(98)

LIEß DIE 1. SEITE VOM 1. BUCH VON SCHOPENHAUERS HAUPTWERK „DIE WELT ALS WILLE UND VORSTELLUNG“ DURCH:

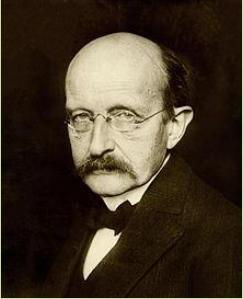
<http://gutenberg.spiegel.de/buch/die-welt-als-wille-und-vorstellung-band-i-7134/3>

(99)

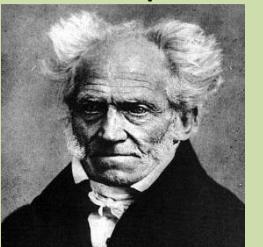
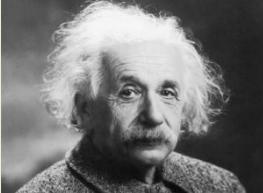
<sup>23</sup> Wenn der Empfänger größer ist als die Nachricht, dann weniger.

<sup>24</sup> Im engeren Sinn ist Bedeutung nur der Teil der Veränderung, der vor das Bewusstsein tritt.

Einige Zitate durchgeknallter Physiker:

<b>Erich Joos</b> <a href="http://decoherence.de">http://decoherence.de</a>	<p>Es gibt keine Teilchen.      Es gibt keine Quantensprünge.      Auf einer fundamentalen Ebene gibt es keine Zeit.</p>
<b>Hans-Peter Dürr</b>  <a href="https://youtu.be/rT6ekqvt42k">https://youtu.be/rT6ekqvt42k</a>	<p>Im Grunde gibt es Materie gar nicht. Jedenfalls nicht im geläufigen Sinne. Es gibt nur ein Beziehungsgefüge, ständiger Wandel, Lebendigkeit. Wir tun uns schwer, uns dies vorzustellen. Primär existiert nur Zusammenhang, das Verbindende ohne materielle Grundlage. Wir könnten es auch Geist nennen. Etwas, was wir nur spontan erleben und nicht greifen können. Materie und Energie treten erst sekundär in Erscheinung – gewissermaßen als geronnener, erstarrter Geist. Nach Albert Einstein ist Materie nur eine verdünnte Form der Energie. Ihr Untergrund jedoch ist nicht eine noch verfeinerte Energie, sondern etwas ganz Andersartiges, eben Lebendigkeit. Wir können sie etwa mit der Software in einem Computer vergleichen.</p> <p>Dass ein Tisch im Grunde auch lebendig ist, bemerken wir nicht, weil wir ihn nur vergröbert betrachten und damit vereinfacht sehen.</p>
<b>Erwin Schrödinger</b>  <a href="http://www.quantum-cognition.de/texts/srod2.html">http://www.quantum-cognition.de/texts/srod2.html</a>	<p>Die Vielheit ist bloßer Schein; in Wahrheit gibt es nur EIN Bewußtsein. Das ist die Lehre der Upanischaden [...] Nichts spiegelt sich! Die Welt ist nur einmal gegeben. Urbild und Spiegelbild sind eins. Die in Raum und Zeit ausgedehnte Welt existiert nur in unsrer Vorstellung.</p>
<b>Max Planck</b> 	<p>Meine Herren, als Physiker, der sein ganzes Leben der nüchternen Wissenschaft, der Erforschung der Materie widmete, bin ich sicher von dem Verdacht frei, für einen Schwarmgeist gehalten zu werden. Und so sage ich nach meinen Erforschungen des Atoms dieses: Es gibt keine Materie an sich. Alle Materie entsteht und besteht nur durch eine Kraft, welche die Atomteilchen in Schwingung bringt und sie zum winzigsten Sonnensystem des Alls zusammenhält. Da es im ganzen Weltall aber weder eine intelligente Kraft noch eine ewige Kraft gibt - es ist der Menschheit nicht gelungen, das heißersehnte Perpetuum mobile zu erfinden - so müssen wir hinter dieser Kraft einen bewußten intelligenten Geist annehmen. Dieser Geist ist der Urgrund aller Materie. Nicht die sichtbare, aber vergängliche Materie ist das Reale, Wahre, Wirkliche - denn die Materie bestünde ohne den Geist überhaupt nicht - , sondern der unsichtbare, unsterbliche Geist ist das Wahre! Da es aber Geist an sich ebenfalls nicht geben kann, sondern jeder Geist einem Wesen zugehört, müssen wir zwingend Geistwesen annehmen. Da aber auch Geistwesen nicht aus sich selber sein können, sondern geschaffen werden müssen, so scheue ich mich nicht, diesen geheimnisvollen Schöpfer ebenso zu benennen, wie ihn alle Kulturvölker der Erde früherer Jahrtausende genannt haben: Gott! Damit kommt der Physiker, der sich mit der Materie zu befassen hat, vom Reiche des Stoffes in das Reich des Geistes. Und damit ist unsere Aufgabe zu Ende, und wir müssen unser Forschen weitergeben in die Hände der Philosophie.</p>

## 5.1 Was gibt es nun wirklich?

<b>René Descartes</b> 	<p>Indem wir so alles nur irgend Zweifelhafte zurückweisen und für falsch gelten lassen, können wir leicht annehmen, dass es keinen Gott, keinen Himmel, keinen Körper gibt; dass wir selbst weder Hände noch Füße, überhaupt keinen Körper haben; aber wir können nicht annehmen, dass wir, die wir solches denken, nichts sind; denn es ist ein Widerspruch, dass das, was denkt, in dem Zeitpunkt, wo es denkt, nicht bestehe. Deshalb ist die Erkenntnis: »Ich denke, also bin ich,« (lat.: ego cogito, ergo sum) von allen die erste und gewisseste, welche bei einem ordnungsmäßigen Philosophieren hervortritt.</p>
<b>Arthur Schopenhauer</b> 	<p>Es wird ihm [dem Menschen] dann deutlich und gewiß, daß er keine Sonne kennt und keine Erde; sondern immer nur ein Auge, das eine Sonne sieht, eine Hand, die eine Erde fühlt;</p>
<b>Albert Einstein</b> 	<p>Auf dem ganzen langen Weg vom Vorgang bis zur Fixierung im Bewusstsein müssen wir wissen, wie die Natur funktioniert, ... wenn wir behaupten wollen, dass wir etwas beobachtet haben.<sup>25</sup></p>

- Bewusstsein = das welches erkennt, dass eine Welt da ist (cogito ergo sum)
- einen Pfeil der Zeit, der dem Bewusstsein erscheint. Evtl. ist dieser Pfeil der Zeit untrennbar mit dem Bewusstsein verbunden, denn es gibt in keiner physikalischen Theorie bisher einen Pfeil der Zeit. Der 2. Hauptsatz der klassischen Thermodynamik  $\Delta S > 0$  ist aus keiner mikroskopischen Theorie ableitbar und muss als phänomenologische Aussage über eine sehr wahrscheinliche Zukunft ausgehend von einer bestimmten Vorbereitung der Gegenwart verstanden werden, nicht aber als streng gültig. Im Gegensatz dazu gibt es physikalische Theorien, denen die Zeit ganz abhandengekommen ist („problem of time“).  
<https://en.wikipedia.org/wiki/Wheeler%20DeWitt%20equation>
- eine Wertung von Empfindungen, die vor dem Bewusstsein erscheinen: Lust und Schmerz, ... Diese ist der Wille oder mit ihm auf's Engste verbunden.
- Alles andere kann angezweifelt werden!

<sup>25</sup> Zitat Einsteins, nach Zeh von Werner Heisenberg überliefert und in *Der Teil und das Ganze* Kap. 2 (S. 92?) zu finden.

## 5.2 Warum sehen wir eine andere Welt?

Ernst Mach



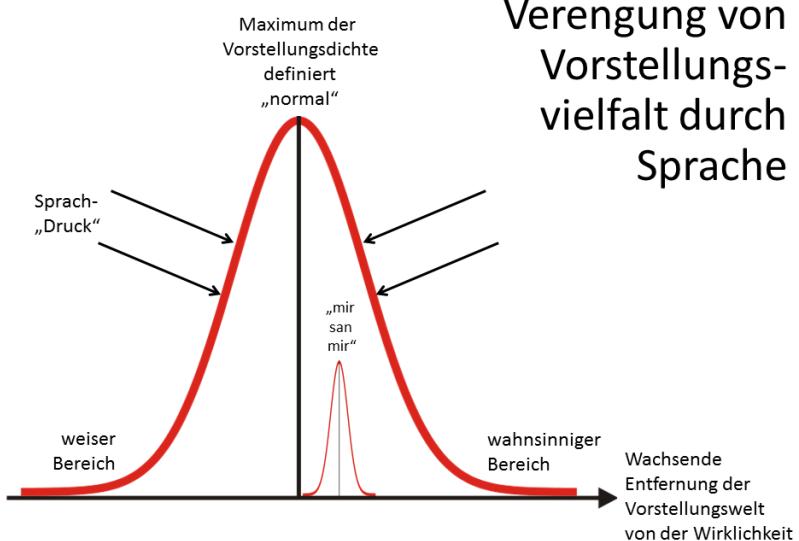
Die Vorstellungen und Begriffe des gemeinen Mannes von der Welt werden nicht durch die volle, reine Erkenntnis als Selbstzweck, sondern durch das Streben nach günstiger Anpassung an die Lebensbedingungen gebildet und beherrscht. Darum sind sie weniger genau, bleiben aber dafür auch vor den Monströsitäten bewahrt, welche bei einseitiger eifriger Verfolgung eines wissenschaftlichen (philosophischen) Gesichtspunktes sich leicht ergeben ... Der philosophische Standpunkt des gemeinen Mannes, wenn man dessen naivem Realismus diesen Namen zuerkennen will, hat Anspruch auf die höchste Wertschätzung. Derselbe hat sich ohne das absichtliche Zutun des Menschen in unmeßbar langer Zeit ergeben; er ist ein Naturprodukt und wird durch die Natur erhalten. Alles, was die Philosophie geleistet hat - die biologische Berechtigung jeder Stufe, ja jeder Verirrung zugestanden - ist dagegen nur ein unbedeutendes ephemeres Kunstprodukt. Und wirklich sehen wir jeden Denker, auch jeden Philosophen, sobald er durch praktische Bedrängnis aus seiner einseitigen intellektuellen Beschäftigung vertrieben wird, sofort den allgemeinen Standpunkt einnehmen.

- Der Mensch hat zwar einen Verstand, aber dieser unterstützt den Leib bei seinem Ziel des Überlebens in einer feindlichen Umgebung. Der Verstand ist nicht dazu da, die Gesamtheit des Daseins als solche zu begreifen. Philosophische Erkenntnis muss in diesem Sinn als Abfallprodukt der Evolution gesehen werden.<sup>26</sup>
- Die wenigsten Menschen stellen das Ziel, dessen Grund sie nicht kennen (Schopenhauer: „Der Wille ist immer grundlos.“), nicht in Frage sondern dienen ihm ihr Leben lang mit ihrem gesamten Verstand, um als naive Realisten zu sterben.
- Metaorganismen bilden sich, stabilisieren sich mit Hilfe übergeordneter Software-Einheiten. Wie der Mensch verfolgen sie das Ziel der Bewahrung ihrer Form und der Fortpflanzung in ähnliche Formen. Diese Metaorganismen heißen: Familie, Stamm, Staat, katholische Kirche, nationalsozialistischer Untergrund, TV Stammheim, usw. Auch sie kennen den Grund ihres Willens nicht. Als erzieherische Umgebung wollen sie das Denken ihrer Bestandteile kontrollieren und stehen philosophischer Erkenntnis in der Regel entgegen.
- Die Synchronisation der Vorstellungen von Menschen, die kooperatives Verhalten und damit Erfolg in der Evolution ermöglicht, geschieht zu einem großen Teil mit Wortsprache. Dieser Wortsprache immanent sind Konzepte wie:
  - Information, d.h. Zerlegung kontinuierlicher Erscheinungen in abzählbar endlich viele Dinge. Dadurch erst entstehen quasi die Dinge als Vorstellungen.
  - Sein: die Verwendung dieses Zeitworts steht für die Vorstellung von beständigen Dingen. Es und drückt den Nichtwandel aus. Wenn davon erzählt wird, dass etwas ist, so erwartet man, dass man es später einmal sehen kann - so lange es eben ist - und zwar immer gleich.

Hans-Peter Dürr drückt das Problem (in Bezug auf das Ziel der Erkenntnis) so aus: „Wir haben hier auch mit einem sprachlichen Problem zu kämpfen. Unsere Sprache ist von ihrem Ursprung her angepasst an unsere Handlungen. Ich nenne daher unsere Umgangssprache gerne die „Apfel-Pflück-Sprache.““

<sup>26</sup> Es gibt auch mystische Erkenntnis, aber ist dazu Verstand notwendig?

## Verengung von Vorstellungsvielfalt durch Sprache



Die Schleier, die vor der Erkenntnis stehen, sind also:

- die unsichere Verbindung des Bewusstseins mit den Ursachen der Erscheinungen im Sinne der Kantischen Philosophie
- das Denken in Wortsprache
- Drittens ist der Mensch im Willen nach Schopenhauer gefangen. Der Verstand dient nicht dem Ziel philosophischer Erkenntnis.
- Viertens baut sich der Mensch in unserer Zeit zunehmend digitale Phantasiewelten zusammen, die einer reduktionistisch vereinfachten Sicht auf die physikalische Welt entstammen. In diesen wirklichkeitsfernen virtuellen Welten verbringt er einen zunehmenden Teil seines bewussten Lebens.

## 6 Quantentheorie

SCHAUE DIR BEI YOUTUBE DIESE 4 VIDEOS AN!

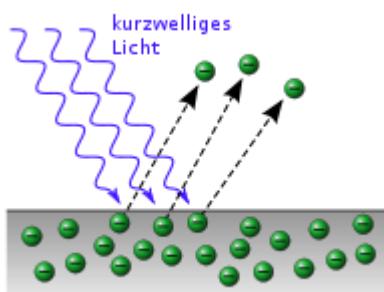
- DOPPELSPALT KLASISCH [https://youtu.be/eyBI\\_L9lgLI](https://youtu.be/eyBI_L9lgLI)
- DOPPELSPALT QUANTENMECHANISCHE <https://youtu.be/3ohjOltaO6Y>
- STERN-GERLACH EXPERIMENT <https://youtu.be/FpfrRu6tis>
- ZEILINGER <https://youtu.be/L-zC2k13nMM>

(100)

WAS HÄLTST DU VON DER AUSSAGE, DASS ETWAS IN DER NATUR ANDERS ABLÄUFT,  
DADURCH DASS DU ES BEOBACHTEST?

## 6.1 Experimentelle Befunde

### 6.1.1 Photoelektrischer Effekt



Durch Licht können Elektronen zum Austreten aus einem Metall gebracht werden. Die kinetische Energie eines einzelnen Elektrons ist nach dem Austritt linear abhängig von der Frequenz des Lichts, aber unabhängig von dessen Intensität.

Deutung: Licht „besteht aus“ Quanten. Jedes Quant „hat“ eine Energie proportional zur Lichtfrequenz.

$$E = h\nu = \hbar\omega$$

[https://de.wikipedia.org/wiki/Photoelektrischer\\_Effekt](https://de.wikipedia.org/wiki/Photoelektrischer_Effekt)

### 6.1.2 Schwarzkörperstrahlung

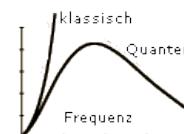


Ein idealer schwarzer Körper emittiert rein thermische Strahlung. Im Experiment wird er durch einen beheizten Hohlraum vertreten. Man beobachtet die Strahlung, die aus einem Loch austritt. Die Vorstellung schwingender elektrischer Dipole (Antennen) in den Wänden, die die thermische Strahlung emittieren, führt mit klassischen Rechnungen zu falschen Ergebnissen.

Strahlungsmoden des Hohlraums ermöglichen eine Überprüfung der Quantentheorie

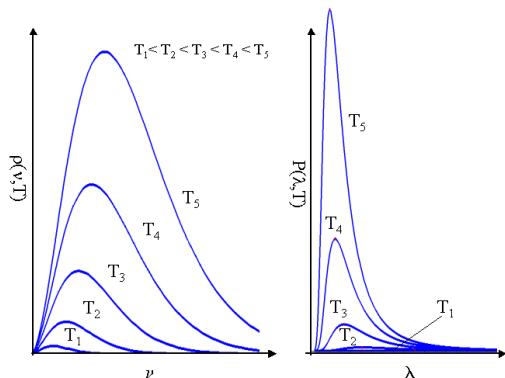


	# der Moden pro Frequenz pro Volumen	Wahrscheinlichkeit für die Besetzung der Moden	mittlere Energie pro Mode
KLASSISCH	$\frac{8\pi\nu^2}{c^3}$	gleich für alle Moden	$kT$
QUANTEN	$\frac{8\pi\nu^2}{c^3}$	quantisierte Moden: Energie $h\nu$ benötigt, um höhere Moden anzuregen, weniger wahrscheinlich	$\frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$



<http://hydrogen.physik.uni-wuppertal.de/hyperphysics/hyperphysics/hbase/mod6.html>

Experiment:

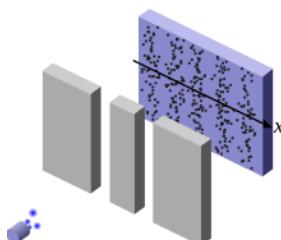


Ausweg: wenn man annimmt, dass die Dipole nicht kontinuierlich in jeder Frequenz sondern nur mit ganz bestimmten Frequenzen schwingen, bekommt man eine mit dem Experiment übereinstimmende Formel für die Strahlungsleistung in Abhängigkeit von Temperatur des schwarzen Körpers und der Frequenz der Strahlung.

$$E = n h \nu = n \hbar \omega \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

[http://www.physik.tu-berlin.de/institute/IFFP/moses/Subsites/themenseiten/blackbody/bb\\_index.html](http://www.physik.tu-berlin.de/institute/IFFP/moses/Subsites/themenseiten/blackbody/bb_index.html)

### 6.1.3 Doppelspalt



Egal ob Licht oder Materie: es entsteht ein Interferenzmuster, wie man es von Wellen her kennt. Bei genügend geringer Intensität zeichnet der Schirm einzelne Ereignisse auf. Viele aufgezeichnete Einzelereignisse zeigen wieder das Interferenzmuster.

→ Es muss sich um Wellen handeln. Doch Wellen wovon?



Interferenzmuster lassen sich in ausgefeilten Experimenten mit immer größeren „Teilchen“ erzeugen. Es ist kein Ende der Quantennatur abzusehen. Kann man irgendwann auch Katzen durch Doppelspalte schießen und damit ihre Wellennatur direkt nachweisen?

<https://arxiv.org/pdf/1703.02129.pdf>

→ Es gibt keinen Grund zur Annahme, dass die Natur ab irgendeiner Größe auf klassisches Verhalten umschaltet, nur um uns den Gefallen zu tun, unsere Denkgewohnheiten nicht ändern zu müssen. Die Erscheinung klassischen Verhaltens muss vielmehr aus dem Quantenverhalten heraus erklärt werden. Diese mathematisch anspruchsvolle Aufgabe kann es notwendig machen, den Beobachter in der quantenphysikalischen Beschreibung zu berücksichtigen.

<https://de.wikipedia.org/wiki/Dekohärenz>

Der Versuch herauszubekommen, welchen Weg „das Teilchen“ nimmt, führt zum Verschwinden des Interferenzmusters. Je exakter der Weg gemessen wird, desto weniger Interferenz. Wird die Information über den Weg aber nicht aus dem Versuchsaufbau herausgezogen, so kann das Interferenzmuster weiterbestehen (Quantenradierer). [https://youtu.be/xENTIY8IG\\_o](https://youtu.be/xENTIY8IG_o)

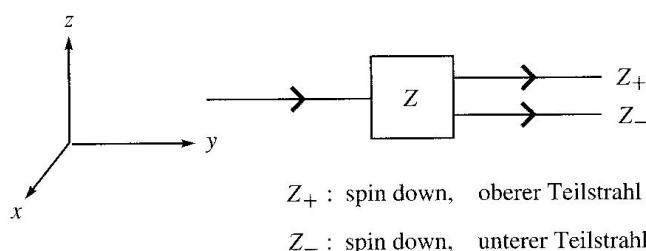
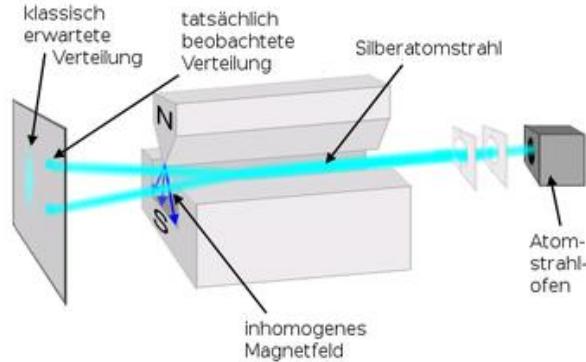
→ Pfad, Ort usw. sind keine Eigenschaften eines Quantenobjekts, sondern entstehen erst in Verbindung mit dem Versuchsaufbau. Die Annahme, der Versuchsaufbau würde der klassischen Physik gehorchen, führt zu logischen Widersprüchen.

#### 6.1.4 Stern-Gerlach Experimente<sup>27</sup>

Geladene „Teilchen“ „besitzen“ ein magnetisches Moment. In dieser Vorstellung sind sie kleine Stabmagnete.

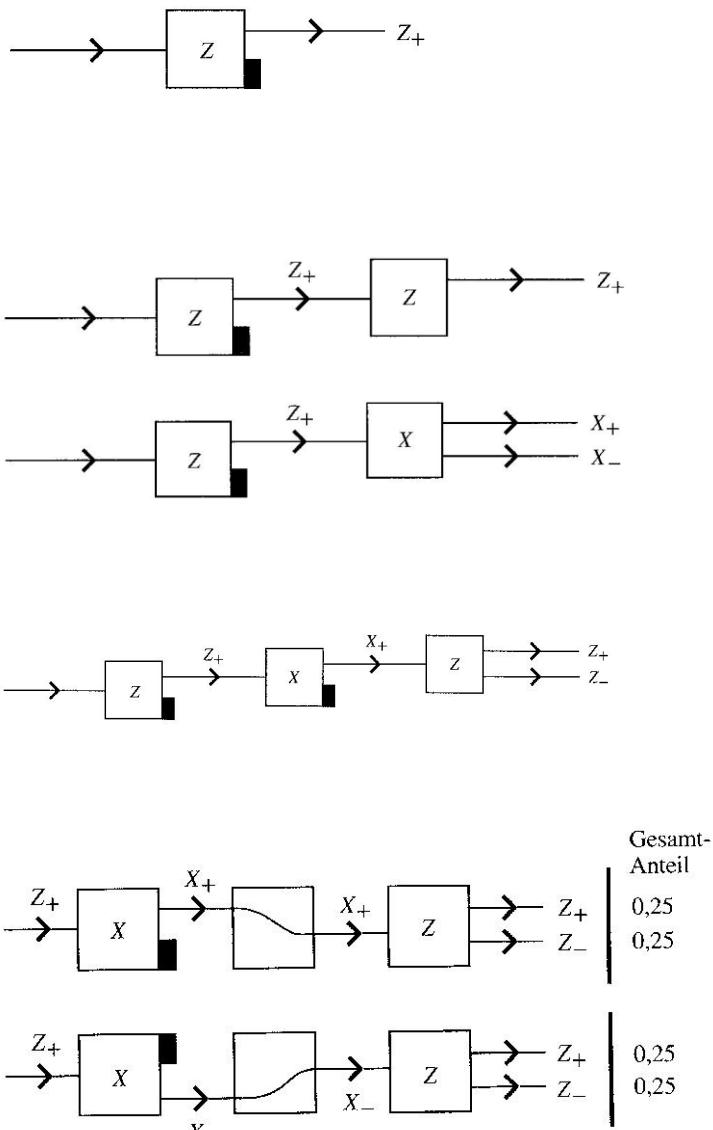
Befindet sich ein Stabmagnet in einem inhomogenen Magnetfeld (also eines, das an verschiedenen Orten verschieden stark ist), dann kann er eine Nettokraft erfahren (lax gesprochen: wenn der Nordpol eine andere Feldstärke wie der Südpol sieht). Ist z die Hauptrichtung des Magnetfelds, dann ist diese Kraft näherungsweise

$$F_z \sim u_z dB_z/dz \quad (F_x \sim 0, F_y \text{ in Flugrichtung} \sim 0)$$



In Stern-Gerlach Experimenten werden „Teilchen“ mit magnetischen Momenten durch inhomogene Magnetfelder geschossen und auf Schirmen aufgefangen. In der originalen Versuchsanordnung (links) zeigt sich eine **Richtungsquantelung** des magnetischen Moments. Doch ist es so, dass da Teilchen fliegen, deren Magnet nur 2 verschiedene Orientierungen hat? Wir wollen mehrere inhomogene Magnetfelder hintereinanderschalten. Es soll Magnetfelder in Hauptrichtung x und z geben, y ist die Flugrichtung.

<sup>27</sup> Bilder aus Wikipedia und Gernot Münster Quantentheorie 2. Auflage



2 Flecken getrennt in z-Richtung, beide mit gleicher Intensität. Wenn die (relative) Strahlintensität nach dem ersten z-Apparat – also die Intensität des von links kommenden  $Z_+$  – 100% ist, dann ist die Intensität nach der Ausblendung 50% für  $X_+$  und 50% für  $X_-$ , auf dem Schirm verteilt auf 2 Flecken mit jeweiliger Intensität 25%.

*Vorstellung: vor dem letzten Z-Apparat werden Teilchen eingespeist, die zur Hälfte die Eigenschaft  $Z_+$  und zur anderen Hälfte die Eigenschaft  $Z_-$  haben. Der z-Apparat sortiert diese beiden Teilchensorten in verschiedene Ausgangsflugrichtungen. Wenn wir die Blende am x-Apparat öffnen, addieren sich die Intensitäten der  $X_+$  und  $X_-$  Teilchen, so dass wir 2 Flecken bekommen mit jeweiliger Intensität  $25\% + 25\% = 50\%$ .*

Doch was geschieht wirklich?

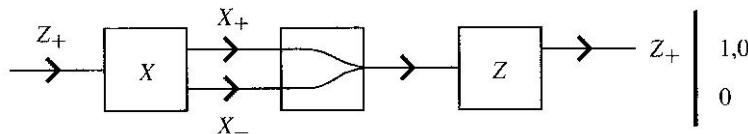
Hinter dem Magneten soll eine Blende sein, d.h. wir lassen z.B. nur den oberen Strahl durch und erwarten, dass in diesem das magnetische Moment aller Teilchen dieselbe Richtung hat, hier  $Z_+$  genannt.

Kontrolle: ein zweiter Magnet in gleicher Orientierung (z) mit Auffangschirm am Ende zeigt einen Fleck oben und keinen unten. Nun soll der zweite Magnet gegenüber dem ersten um 90° verdreht sein und in x-Richtung zeigen. Was geschieht? 2 Flecken, getrennt nun in x-Richtung, beide mit gleicher Intensität.

Nach dem x-Apparat soll nur der  $X_+$  Strahl durchgelassen werden und auf einen weiteren z-Apparat treffen. Was geschieht? 2 Flecken getrennt in z-Richtung, beide mit gleicher Intensität.

Wir schalten nun einen z-Apparat mit Blende (nicht gezeigt), einen x-Apparat und einen z-Apparat hintereinander.<sup>28</sup> Der nicht gezeigte erste z-Apparat sorgt für die Präparation mit  $Z_+$  Zuständen. Einmal wird das hintere, das andere Mal das vordere Loch am x-Apparat abgedeckt. Nach dem letzten z-Apparat ist das Ergebnis beides Mal gleich:

<sup>28</sup> In der Mitte lediglich eine Umlenkeinheit, um hintere und vordere Strahlen auf den Eingang des finalen z-Apparats zu bündeln.



Die ursprüngliche  $Z_+$ -Orientierung wird wieder hergestellt!

→ es fliegen hier keine Teilchen, die magnetische Momente haben. Die gesamte Anordnung verhält sich so, als ob die ursprünglich von links eintreffende Eigenschaft  $Z_+$  bis zum Schirm erhalten bleibt.

Ein solcher Spin-„Elementarmagnet“ mit 2 Orientierungsmöglichkeiten ist ein ideales Beispiel für ein Qubit. In obiger Anordnung entspricht  $Z_+$  einem Qubit, das in der z-Basis die Komponenten  $(1 \ 0)$  hat. In der x-Basis hat dieser Zustand – gleich von Anfang an – die Komponenten  $(1/\sqrt{2} \ 1/\sqrt{2})$ . Der x-Apparat macht nichts weiter, als die Spin-Komponenten unverändert bestehen zu lassen, aber sie in der x-Basis mit verschiedenen Ortsvektoren zu koppeln (im Produktraum aus Orts- und Spinvektoren). Die Zusammenführung der Strahlen verändert wiederum den Spin-Zustand nicht, sondern nur dessen Kopplung an die Ortsvektoren. Mit dieser Vorstellung ist es nicht mehr so verwunderlich, dass der Spinzustand am Ausgang der gleiche ist wie am Eingang.

**LESE DAS NÄCHSTE KAPITEL BIS VOR 6.2.1!**

(101)

## 6.2 Formulierung der Quantentheorie

In der klassischen Physik gibt es Gleichungen, die physikalische Größen wie Kraft, Impuls, Ort usw. enthalten. Im Modell der klassischen Physik lassen sich diese Größen mit geeigneten Messgeräten bestimmen. In einem tieferen Verständnis definieren sich die verschiedenen physikalischen Größen über ihr Verhalten bei Symmetrietransformationen. Die Energie einer Welt ist beispielsweise die Größe, die bei einer Zeittranslation  $t \rightarrow t' = t + \Delta t$  erhalten bleibt<sup>29</sup>. Ihr Impuls ist die Größe, die bei einer Ortstranslation erhalten bleibt  $x \rightarrow x' = x + \Delta x$ . Usw.

In der Quantentheorie wird eine physikalische Größe, deren Wert bestimmt werden kann, **Observable** genannt und durch einen **hermiteschen Operator in einem unitären Raum** vertreten.

Wenn also ein Ort  $x$  bestimmt werden kann, dann gibt es dazu einen hermiteschen Ortsoperator  $x = xt$ . Das Verhalten der Operatoren bei Symmetrietransformationen liefert in Anlehnung an die klassische Physik eine entsprechende Menge von Observablen, die gleich wie in der klassischen Physik benannt werden: Ort  $x$ , Impuls  $p$ , Drehimpuls  $I$ , Energie  $E$ .

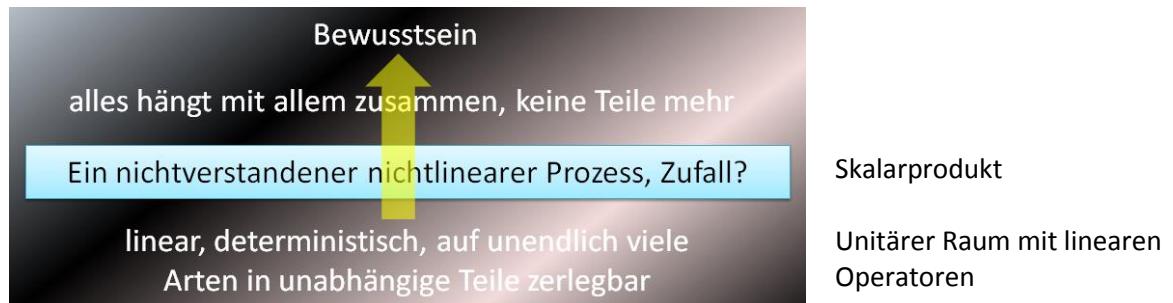
Der gesamte Zustand einer Quantenwelt, genannt **Quantensystem**, wird durch einen Vektor im unitären Raum, den **Zustandsvektor**, erfasst. Wie wir noch sehen werden hat eine Teilwelt, vornehm ausgedrückt ein **offenes Quantensystem**, im Allgemeinen keinen Zustand! Damit etwas durch einen Zustandsvektor beschrieben werden kann, muss es wenigstens vom Rest der Welt abgeteilt werden. Im Experiment geschieht diese Entkopplung oft durch Hochvakuum, Dunkelheit und tiefste Temperaturen. Wer jetzt denkt, mit solch einer experimentellen Isolation ließe sich wenigstens näherungsweise immer so tun, als sei das Quantensystem eine eigene Welt, der kann früher oder später gedanklichen Schiffbruch erleiden: tatsächlich ist das experimentell isolierte Quantensystem auf fundamentale Art mit seiner Umgebung verstrickt, was sich durch **Verschränkungsphänomene** offenbaren kann, aber nicht muss.

<sup>29</sup> So lange sich eine weltweite Zeit definieren lässt. Ob dies bei einer Quantengravitationstheorie so Bestand haben kann, steht zurzeit noch in den Sternen. [https://en.wikipedia.org/wiki/Problem\\_of\\_time](https://en.wikipedia.org/wiki/Problem_of_time)

Wenn die Isolation gar nicht gelingt, dann muss die Gesamtwelt quantenmechanisch beschrieben werden. Dies ist aufgrund der vielen Freiheitsgrade (Variablen) mathematisch ein schier aussichtsloses Unterfangen.<sup>30</sup> Andererseits gibt es für viele Bereiche bereits eine *funktionierende* klassische Physik. Aus der rein quantenmechanischen Beschreibung der Gesamtwelt muss sich also irgendwie ableiten lassen, wie die klassische Beschreibung näherungsweise Gültigkeit haben kann. Tatsächlich ist dieses Verständnis erst in den letzten 40 Jahren deutlich gewachsen, einerseits durch Konzepte wie die Dekohärenztheorie, andererseits durch entsprechende Experimente.

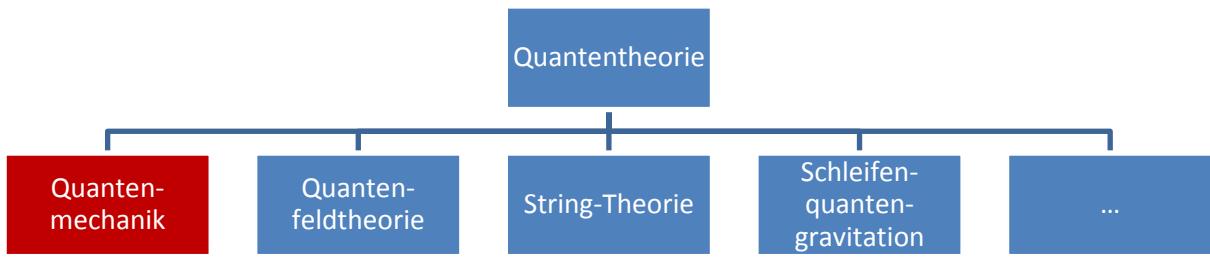
Zustandsvektor und Operator zusammen liefern die möglichen Messwerte der Observablen, für die der Operator steht. Doch was ist überhaupt eine Messung? Eine Messung ist die Aufgabe der Isolation für das Quantensystem. Die Messung schafft eine neue Verbundwelt, in der am Ende Vorstellungen über das Quantensystem vor dem Bewusstsein des Experimentators stehen. Das ursprüngliche Quantensystem hat vollends aufgehört, als solches zu existieren. Mathematisch ausgedrückt befanden sich Quantensystem und Restwelt am Anfang des Experiments in einem Produktzustand. Durch die Messung, eine Wechselwirkung zwischen Quantensystem und Restwelt, sind sie in einen Zustand gelangt, der nicht mehr als Produktvektor eines Vektors aus dem unitären Raum des Quantensystems und eines Vektors aus dem unitären Raum der Restwelt dargestellt werden kann (sondern nur noch als Linearkombination aus solchen Produktvektoren).

Nach der Messung lässt sich die ursprüngliche Isolation wieder herstellen. Dadurch entsteht wieder ein Quantensystem mit gleichartigen Eigenschaften wie das erste. Deswegen von einer durchgängigen oder gar unabhängigen Existenz „des Quantensystems“ über die Dauer des Experiments zu sprechen ist falsch und führt nur zu gedanklichen Knoten.



Das Gesagte gilt für alle derzeit erfolgreichen Quantentheorien. Die Weltzustände sind auf unendlich viele Arten in Vektorbasen entwickelbar und können sich unabhängig voneinander zeitlich entwickeln, so wie sich die Lösungen der Schwingungsgleichung ohne gegenseitige Beeinflussung addieren können. Um in dieser Welt etwas bewusst erfahren zu können, bedarf es eines quadratischen Rechenschritts (Skalarprodukt), der all die unabhängigen Teile miteinander in Verbindung bringt. Ob dies nun ein objektives oder ein subjektives Geschehen darstellt, darüber streiten sich die Gelehrten.

<sup>30</sup> Auch das ist ja ein Grund, warum man sich Quantenrechner wünscht: zur Simulation von anderen Quantensystemen.



In der Folge werden wir uns auf die nichtrelativistische Quantenmechanik beschränken. Dies bringt deutliche Erleichterungen mit sich:

- Es gibt eine universelle Zeit, die wie in der nichtrelativistischen klassischen Physik nur ein Parameter des Geschehens ist, der quasi die Weltzustände nummeriert und ordnet. Das entspricht unserer naiven Alltagsvorstellung.
- Es gibt eine Korrespondenz mancher Operatoren zu Größen der klassischen Punktmechanik.
- Relativistische Quantenfeldtheorie wäre mathematisch deutlich anspruchsvoller, ist mathematisch mindestens als gewagt, vielleicht sogar als verboten zu bezeichnen (Renormierung, Infrarot- und Ultraviolet-Divergenzen, ...), wobei wie in einer Fußnote bereits erwähnt die Vorstellung eines Seins (Hamilton-Operator) deutliche Risse bekommt. All diesen Widerwärtigkeiten zum Trotz ist es die genaueste Theorie, die wir haben! Das Standardmodell inkl. Higgs-Feld gehört hier hinein.
- [Die relativistische] String-Theorie vermeidet zwar einige Singularitäten, die in der Quantenfeldtheorie auftreten, dürfte mathematisch und vorstellungstechnisch noch anspruchsvoller sein und hat derzeit den Nachteil der [experimentellen] Nichtfalsifizierbarkeit – so wie andere Theorien der Quantengravitation.

Nachteile:

- Felder (elektrische, magnetische, Kernkräfte, Higgs) können nicht quantentheoretisch erfasst werden, denn unsere Feldtheorien sind immer schon relativistisch. Diese Größen können nur auf klassischem Weg in die Gleichungen gebracht werden. Wir betreiben also nur halblebig Quantentheorie.
- Die Experimente zeigen, dass die halbklassische Beschreibung irgendwann versagt, und die quantenfeldtheoretische Beschreibung deutlich genauer = wirklichkeitsnäher ist.

### 6.2.1 Mathematische Formulierung der nicht-relativistischen Quantenmechanik

1. Die Modellierung einer Welt erfolgt in einem **Hilbertraum  $\mathbf{H}$** , d.h. einem vollständigen<sup>31</sup> unitären Raum. Jeder Vektor  $|\psi\rangle$  des Hilbertraums ist ein möglicher Zustand der Welt.
2. Die Information, die über diese Quantenwelt in Erfahrung gebracht werden kann, die **Observablen**, wird durch irgendeinen **vollständigen Satz** hermitescher Operatoren modelliert. Die Eigenvektoren eines vollständigen Satzes spannen den gesamten Hilbertraum auf.
3. Die Zeit ist ein globaler Parameter des Geschehens und kein Operator.

<sup>31</sup> Vollständig: jede Cauchy-Folge von Vektoren konvergiert gegen einen Vektor, der auch zum unitären Raum gehört.

4. Eine **Messung** ist die Ankopplung der Umgebung an die Quantenwelt, so dass die Umgebung klassische Information über die Quantenwelt erlangen kann. Gelangt die Umgebung zur Auffassung, dass die Quantenwelt sich im Eigenzustand  $|u_\Lambda\rangle$  des Operators L befindet, dann sagt man, die Größe L habe den Messwert  $\Lambda$ .

*Dies ist bereits ein pragmatischer Kompromiss, denn auch die Umgebung hat Quantennatur! Damit kann nur die Gesamtwelt auf die hier beschriebene Art im Gesamt(Produkt-)raum modelliert werden. Der Hilbertraum der Teilwelt hat aufgehört, ein passender Behälter zur Beschreibung eines abteilbaren Geschehens zu sein.*

*Das Problem der Entstehung von klassischer Information aus einem reinen Quantengeschehen heraus wird also ausgeblendet, weil der Formalismus in der Praxis funktioniert.*

5. Die **Wahrscheinlichkeit**  $w(\Lambda)$ , dass bei der Messung an der Quantenwelt im Zustand  $|\psi\rangle$  der Messwert  $\Lambda$  angetroffen wird, ist

$$w(\Lambda) = |\langle u_\Lambda | \psi \rangle|^2$$

bei einem diskreten Spektrum. Hat L ein kontinuierliches Spektrum dann ist die Wahrscheinlichkeit, einen Messwert im Bereich  $d\Lambda$  um  $\Lambda$  zu finden

$$dw(\Lambda) = |\langle u_\Lambda | \psi \rangle|^2 d\Lambda$$

*Dies nennt man die Wahrscheinlichkeitsinterpretation der Quantentheorie. Es erfolgt eine Ankopplung an unsere klassische Vorstellungswelt über klassische Information und klassische Wahrscheinlichkeiten.*

Die Wahrscheinlichkeit, bei einer Messung der Observablen L irgendeinen Messwert zu messen, soll 1 sein. Daraus folgt bei normierten Eigenvektoren von L, dass jeder Zustandsvektor normiert sein muss:

$$1 = \sum_{\Lambda} |\langle u_\Lambda | \psi \rangle|^2 d\Lambda = \sum_{\Lambda} \langle \psi | u_\Lambda \rangle \langle \psi | u_\Lambda \rangle^* d\Lambda = \sum_{\Lambda} \langle \psi | u_\Lambda \rangle \langle u_\Lambda | \psi \rangle d\Lambda = \langle \psi | \psi \rangle \quad (102)$$

Der **Mittelwert** einer Observablen L wird mit  $\langle L \rangle$  notiert. Genauer: der Mittelwert der Observable L im Zustand  $\psi$  ist  $\langle L \rangle_{\psi}$ . Das Mittel über die Messwerte  $\Lambda$  – der **Erwartungswert** – ist:

$$\begin{aligned} \sum_{\Lambda} w(\Lambda) \Lambda d\Lambda &= \sum_{\Lambda} |\langle u_\Lambda | \psi \rangle|^2 \Lambda d\Lambda = \sum_{\Lambda} \langle \psi | u_\Lambda \rangle \Lambda \langle u_\Lambda | \psi \rangle d\Lambda = \langle \psi | \left( \sum_{\Lambda} \Lambda |u_\Lambda \rangle \langle u_\Lambda| \right) | \psi \rangle d\Lambda = \\ &\langle \psi | \mathcal{L} \psi \rangle \equiv \langle \mathcal{L} \rangle_{\psi} \end{aligned} \quad (103)$$

In Komponenten einer beliebigen Basis  $v_k$  ausgedrückt (zweimal den Einheitsoperator  $\sum |v_k\rangle \langle v_k|$  einschieben):

$$\langle \mathcal{L} \rangle_{\psi} = \sum_k \sum_{k'} L(k, k') \psi^*(k) \psi(k') dk dk' \quad (104)$$

### 6.2.1.1 Streuung und Heisenbergsche Unschärferelation

Als Varianz (oder Streuung) einer Zufallsvariable wird der Erwartungswert der quadratischen Abweichung von ihrem Mittelwert  $\langle L \rangle$  definiert. Nach dem Verschiebungssatz von Steiner gilt:

$$\text{Var } \mathcal{L} = \langle (\mathcal{L} - \langle \mathcal{L} \rangle)^2 \rangle \stackrel{\text{Steiner}}{=} \langle \mathcal{L}^2 \rangle - \langle \mathcal{L} \rangle^2 = \langle \psi | \mathcal{L}^2 \psi \rangle - \langle \psi | \mathcal{L} \psi \rangle^2 \quad (105)$$

Daraus folgt die **Heisenbergsche Unschärferelation**. Für 2 Observable F und G gilt

$$\sqrt{\text{Var } \mathcal{F}} \sqrt{\text{Var } \mathcal{G}} \geq \left\| \frac{i}{2} \langle [\mathcal{F}, \mathcal{G}] \rangle \right\| \quad (106)$$

In der Wahrscheinlichkeitsinterpretation bedeutet diese Formel, dass es unverträgliche Observable gibt – solche deren Operator-Kommutator nicht 0 ist. Eine höhere Genauigkeit bei der Messung der einen Observablen geht nur auf Kosten der Messgenauigkeit der anderen Variablen.

#### SEMINARARBEIT: STELLE DIE HEISENBERGSCHE UNSCHÄRFERELATION VOR!

(107)

### 6.2.1.2 Die zeitliche Entwicklung

Wie die Welt unserer Alltagsvorstellung soll sich auch die Gestalt einer Quantenwelt mit der Zeit von selbst ändern können, ohne dass von außen eingegriffen wird. Die Quantenwelt soll aber stets in ihrem Hilbertraum bleiben. Das heißt mathematisch, dass ihr Zustandsvektor  $|\psi(t_0)\rangle$  zur Zeit  $t_0$  auf einen anderen Zustandsvektor  $|\psi(t_1)\rangle$  zur Zeit  $t_1$  innerhalb von  $H$  abgebildet wird. Wenn der neue Zustand wieder die Wahrscheinlichkeiten von Messwerten definieren soll, so muss auch er den Betrag 1 haben.

Die Abbildung von einem Vektor auf einen anderen Vektor bewerkstelligt ein Operator. Er soll wieder linear sein. Da er den Betrag von Vektoren unverändert lassen soll, muss er unitär sein. Die zeitliche Entwicklung wird also durch einen **unitären Zeitverschiebungsooperator**  $T$  beschrieben:

$$|\psi(t_0)\rangle \xrightarrow{\mathcal{T}(t,t_0)} |\psi(t)\rangle = \mathcal{T}(t,t_0) |\psi(t_0)\rangle \quad (108)$$

Zwei Zeitverschiebungenoperationen  $t_0 \rightarrow t_1$  und  $t_1 \rightarrow t$  hintereinander sind wieder eine Zeitverschiebungsoperation  $t_0 \rightarrow t$ :

$$\mathcal{T}(t,t_1) \mathcal{T}(t_1,t_0) = \mathcal{T}(t,t_0) \quad (109)$$

Verschiebung um keinen Zeitunterschied  $t \rightarrow t$  ist die Einheitsoperation:

$$\mathcal{T}(t,t) = 1 \quad (110)$$

Die zeitliche Entwicklung des Weltzustands wird in der QM also durch die Drehung eines Einheitsvektors in einem viel- bis unendlich-dimensionalen Hilbertraum beschrieben.

Ableitung von (108) nach  $t$  ergibt

$$\frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{T}(t,t_0)}{\partial t} |\psi(t_0)\rangle \quad (111)$$

Als Hamilton-Operator wird definiert:

$$\mathcal{H}(t) \equiv i\hbar \frac{\partial \mathcal{T}(t,t_0)}{\partial t} \Big|_{t=t_0} \quad (112)$$

Mit  $t = t_0$  wird (111) zur **Schrödinger-Gleichung**:

$$i\hbar \frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} = \mathcal{H}(t) |\psi(t)\rangle \quad (113)$$

Ohne  $H$  genau zu kennen, sagt diese Gleichung noch wenig aus. Aber immerhin wissen wir:

- Sie enthält nur eine 1. partielle Ableitung nach der Zeit  $t$ .
- Sie ist komplexwertig.
- $H$  ist hermitesch.

#### ZEIGE, DASS DER HAMILTON-OPERATOR HERMITESCH ( $H=H^\dagger$ ) IST! BENUTZE DAZU DIE

(114)

## UNITARITÄT VON T: $T T^\dagger = 1$

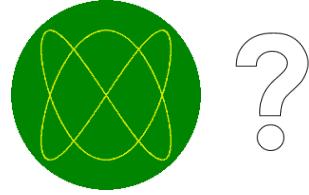
Wenn der Hamilton-Operator nicht von der Zeit abhängt, kann die Schrödinger-Gleichung sofort integriert werden:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\mathcal{H}} |\psi(t_0)\rangle \quad (115)$$

Diese Gleichung beschreibt eine hochlangweilige Welt, in den Worten Heisenbergs: „*Es geschieht nichts.*“ Führt man diese Gleichung in Komponentenform mit der Basis der Eigenvektoren von H über (Energieeigenvektoren mit dem Eigenwertspektrum E), dann gilt für die Amplituden

$$\psi(E, t) = e^{-\frac{i}{\hbar}E(t-t_0)} \psi(E, t_0) \quad (116)$$

Die Bewegung des Zustandsvektors ist eine Überlagerung unabhängiger Drehbewegungen, jeder Vektor jeweils in seiner komplexen Ebene. Soll etwa eine simple wenn auch hoch- bis unendlich-dimensionale Lissajous-Figur die zeitliche Entwicklung unserer Welt beschreiben?



Aus den Definitionen physikalischer Größen über ihr Verhalten bei Symmetrien lassen sich Erkenntnisse über weitere Operatoren gewinnen, ohne dass man sich auf eine bestimmte Basis festlegen muss. Dazu siehe z.B. Rebhan 6.3.4. Wir wollen uns jetzt aber mit der Anwendung der Theorie befassen.

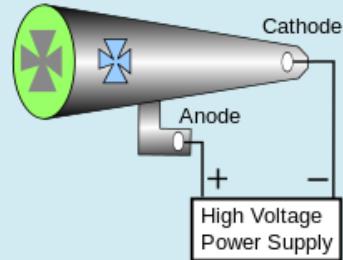
### 6.3 Erste Anwendungen der Quantentheorie

Wie kommt man nun zu einem konkreten Hamilton-Operator und damit zu einer Differentialgleichung, die sich analytisch oder wenigstens numerisch lösen lässt?

Auffrischung: wie man zur Vorstellung kommen kann, dass ein Wasserstoffatom aus einem schwereren positiv geladenen Kern mit einem darum herum befindlichen leichteren, negativ geladenen Elektron bestehen kann.

Kathodenstrahlen: ein Strahl, der negative Ladung trägt. Es können damit Schattenwürfe erzeugt werden wie bei einem Licht- oder Teilchenstrahl.

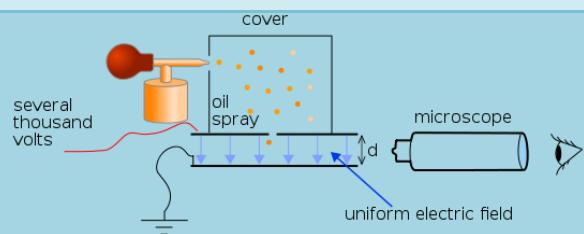
<https://de.wikipedia.org/wiki/Elektronenstrahl>



Milikanversuch: elektrische Ladung ist nur in Ladungsquanten zu bekommen.

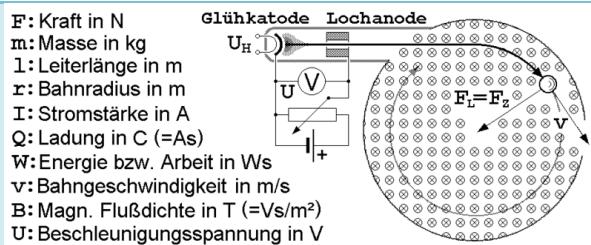
$e = 1,592 \cdot 10^{-19}$  Coulomb

<https://de.wikipedia.org/wiki/Millikan-Versuch>



Fadenstrahlrohr, Blasenkammern:  
 Bestimmung des Verhältnisses  $e/m$  aus  
 Kräftegleichgewicht Lorentzkraft =  
 Zentripetalkraft. Die Ladungsquanten treten  
 immer zusammen mit Massenquanten auf. Aus  
 dem gemeinsamen Erscheinen der im Rahmen  
 der damaligen Messgenauigkeit immer  
 gleichen Werte entwickelt sich die Vorstellung  
 von negativ geladenen Elementarteilchen:  
 „Elektronen“.

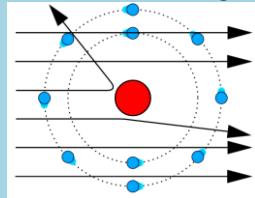
<https://de.wikipedia.org/wiki/Fadenstrahlrohr>  
<https://de.wikipedia.org/wiki/Blasenkammer>



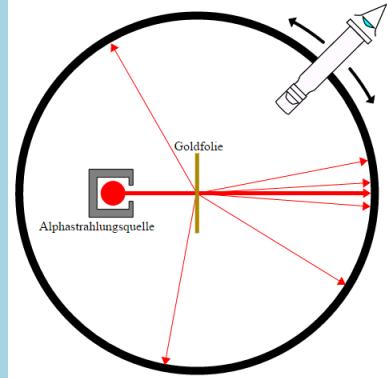
Herleitung der Formel für die spezifische Ladung  $Q/m = f(U, B, r)$

$$\begin{aligned} F_{\text{Lorentz}} &= F_{\text{Zentripetal}} & W_{\text{Beschleunigung}} &= W_{\text{kin}} \\ B \cdot I \cdot l &= \frac{m}{r} \cdot v^2 & \text{Stellung der beteiligten Vektoren} & Q \cdot U = \frac{m}{2} \cdot v^2 \\ B \cdot Q \cdot v &= \dots & \dots = \frac{m}{r} \cdot \frac{Q}{m} \cdot 2U & \frac{Q}{m} \cdot 2U = v^2 \\ \dots &= \frac{m}{r} \cdot \frac{Q}{m} \cdot 2U & v &= \frac{2U}{B \cdot r} \\ v &= \frac{2U}{B \cdot r} & v^2 &= \frac{(2U)^2}{B^2 \cdot r^2} \\ && \frac{Q}{m} &= \frac{v^2}{2U} \\ && \frac{Q}{m} &= \frac{2U}{B^2 \cdot r^2} \end{aligned}$$

Rutherford'scher Streuversuch:  
 Die elektrisch neutralen Atome sind sehr leer.  
 In der Mitte befindet sich die positive  
 elektrische Ladung.



<https://de.wikipedia.org/wiki/Rutherford-Streuung>



Jedoch:

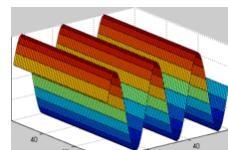
Doppelspaltexperiment mit Elektronen:  
 offensichtlich brauchen wir eine  
 Wellengleichung!  
<https://de.wikipedia.org/wiki/Wellengleichung>  
 Doch wir wollen eine einfache Zeitableitung  
 wegen (113)!

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i^2} \right) = 0 \quad \text{mit der allg. Lösung}$$

$$\psi(t, \vec{x}) = \int d^3 k a(|\vec{k}|) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} ?$$

Wir gehen vor wie in <http://einrichtungen.ph.tum.de/T30e/teaching/ss13/notes/kap2.pdf>.

Wir wollen Elementarlösungen der Form  
 $\psi(t, \vec{r}) \sim e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$



Diese Funktionen beschreiben ebene Wellen<sup>32</sup>, wie sie vor dem Doppelspalt einlaufen. Mittels Linearkombinationen von solchen ebenen Wellen lassen sich Kugelwellen zusammenbasteln, wie sie hinter dem Doppelspalt auslaufen.  
 Dabei verwenden wir die Abkürzungen:

<sup>32</sup> [https://de.wikipedia.org/wiki/Ebene\\_Welle](https://de.wikipedia.org/wiki/Ebene_Welle)

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \vec{p} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} \quad \vec{k} = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix} \quad r = |\vec{r}| \quad p = |\vec{p}| \quad k = |\vec{k}|$$

Bei Photonen (elektromagnetische Wellen) wusste man bereits, dass die Energie proportional zur Frequenz und die Wellenzahl proportional zum Impuls sind.

$$E = h\nu = \hbar\omega \quad p = \frac{E}{c} = \frac{\hbar}{\lambda} = \hbar k \quad \hbar \equiv \frac{\hbar}{2\pi} \quad \lambda \equiv \frac{2\pi}{k}$$

Nach de Broglie<sup>33</sup> sollte man diese Beziehungen für die Elektronenwellengleichung übernehmen. Die Energie eines freien Punktteilchens nach der klassischen Physik ist  $E = T_{\text{kin.}} = \frac{1}{2}mv^2$  und sein Impuls ist  $p = mv$ . Damit ergibt sich:

$$\psi(t, \vec{r}) \sim e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r} - \frac{p^2}{2m}t)} \quad (117)$$

Diese Funktionen sind Lösungen der Differentialgleichung („freie Schrödinger-Gleichung“)

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi(\vec{r}, t) \quad (118)$$

Die Gleichung (118) ist von der Form (113), wenn man sie als Gleichung für die Komponenten  $\psi(x, t)$  des Hilbertraumvektors  $|\psi\rangle$  in der (hier dreidimensionalen) Ortsdarstellung liest.

Für die Matrixelemente des Hamilton-Operators in der Ortsbasis lesen wir ab:

$$H(\vec{r}', \vec{r}) = \langle u_{\vec{r}'} | \mathcal{H} u_{\vec{r}} \rangle = -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \delta(x' - x) \delta(y' - y) \delta(z' - z) \quad (119)$$

Um dies einzusehen, setzen wir (119) in (77) ein und berücksichtigen, dass nach (41) zum Beispiel für das x-Integral gilt:

$$\int dx' \left( \frac{\partial^2}{\partial x'^2} \delta(x - x') \right) \psi(x', y', z', t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(t, x, y, z)$$

Also wird (77) zu:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}\psi(\vec{r}, t) &= \iiint dx' dy' dz' H(\vec{r}, \vec{r}') \psi(\vec{r}', t) = \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \iiint dx dy dz \left( \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \delta(x - x') \delta(y - y') \delta(z - z') \right) \psi(\vec{r}', t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi(\vec{r}, t) \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich folgende Korrespondenz **in der Ortsdarstellung** zur klassischen Massenpunktmechanik:

---

<sup>33</sup> <https://de.wikipedia.org/wiki/Materiewelle>

Größe	Klassische Mechanik	Quantenmechanik
Ort	$x$	Ortsoperator $x$
Impuls	$p_x = mv_x = m \frac{dx}{dt}$	Impulsoperator $p_x = -i\hbar \frac{d}{dx}$
Kinetische Energie	$T = \frac{1}{2} mv_x^2 = p_x^2/(2m)$	Kinetischer Term im Hamilton-Operator $T = p_x^2/(2m) = -\hbar^2/(2m) \frac{d^2}{dx^2}$
Potentielle Energie	$V = V(x)$	Potentialterm im Hamilton-Operator $V(x)$

Die Wirkung von  $x \cdot \partial/\partial x$  auf eine Funktion  $f(x)$  ist  $\rightarrow x \cdot \partial/\partial x f(x) = x \cdot f'(x)$ .

Die Wirkung von  $\partial/\partial x \cdot x$  auf eine Funktion  $f(x)$  ist nach der Produktregel  $\rightarrow \partial/\partial x (x \cdot f(x)) = f(x) + x \cdot f'(x)$

Es ist also  $x \cdot \partial/\partial x (\dots) - \partial/\partial x (x \cdot \dots) = -(\dots)$ , mit der Kommutatorklammer (75) geschrieben:

$$[x, \partial/\partial x] = -1$$

Damit ergibt sich für die Operatoren  $x$  und  $p_x$  der Kommutator (Einheitsoperator rechts weggelassen):

$$[x, p_x] = i\hbar \quad (120)$$

Nach der Heisenbergschen Unschärferelation können also Ort und in Impuls in x-Richtung nicht zusammen beliebig genau bekannt werden. Diese Erkenntnis haben wir in der Ortsdarstellung gewonnen, doch sie ist unabhängig von der Darstellung und wesentlicher Bestandteil des physikalischen Modells im Hilbertraum.

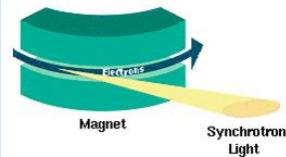
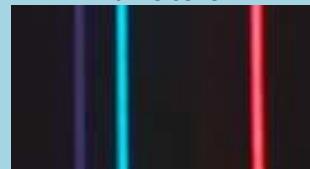
Operatoren in verschiedene Richtungen vertauschen immer, z.B.  $[x, p_y] = 0$ . Zusammenfassend schreibt man:

$$[x_i, p_j] = i\hbar \delta_{ij} \quad [x_i, x_j] = 0 = [p_i, p_j], \quad i, j \in \{x, y, z\} \quad (121)$$

**ZEIGE IN DER ORTS DARSTELLUNG, DASS  $[X, P_Y] = 0$  GILT!** (122)

### 6.3.1 Wasserstoffproblem

Was das mathematische Modell leisten muss, wenn es über die klassische Physik hinausgehen soll:

<p>Wenn das Elektron mit seiner negativen Ladung um den Kern kreist wie ein Planet um seine Sonne, dann verliert das Atom nach der klassischen Elektrodynamik ständig elektromagnetische Energie („Synchrotronstrahlung“). Das Elektron soll aber nicht in den Kern stürzen und das Atom soll stabil sein!</p> <p>Spektrallinien: Wir haben bereits die Vorstellung von Lichtquanten entwickelt mit einer Energie proportional zur Frequenz der Schwingung (Farbe). Wieso finden sich in den Atomspektren nur bestimmte Farben?</p>	 
---	--

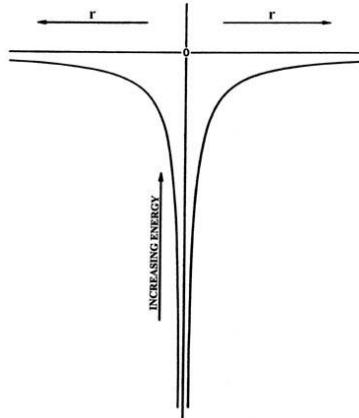
In einem einfachen Planetenmodell haben wir es mit einem Zweikörperproblem<sup>34</sup> zu tun. Bezeichnen wir die Protonenkoordinaten mit  $r_p$  und seine Masse mit  $m_p$ , die entsprechenden Größen des Elektrons mit  $r_e$  und  $m_e$ . Zwischen beiden wirkt eine elektrische Anziehungskraft, die von den Ladungen  $q_p$  und  $q_e$  - die nur dem Vorzeichen nach verschieden sind - und dem Abstand abhängt.

Aus der klassischen Elektrodynamik weiß man, dass diese Kraft zur potentiellen Energie der Form

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_p q_e}{r}, \quad r \equiv \sqrt{|\vec{r}_p - \vec{r}_e|^2}$$

gehört<sup>35</sup>.

Die Gesamtenergie setzt sich aus kinetischer und potentieller Energie zusammen.



Größe	Klassische Mechanik	Quantenmechanik
<b>Gesamtenergie</b>	$E = \frac{1}{2} m_p v_p^2 + \frac{1}{2} m_e v_e^2 + V(r) = p_p^2/(2m_p) + p_e^2/(2m_p) + V(r)$	$H = \hbar^2 \Delta_p/(2m_p) + \hbar^2 \Delta_e/(2m_e) + V(r)$ (zeitunabhängig)

Oben haben wir die gebräuchliche Abkürzung „Laplace-Operator“ verwendet:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

In voller Schönheit ausgeschrieben müssen wir die partielle Differentialgleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x_p, y_p, z_p, x_e, y_e, z_e, t) = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m_p} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_p^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_p^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_p^2} \right) - \frac{\hbar^2}{2m_e} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_e^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_e^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_e^2} \right) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_p q_e}{r} \right] \psi(x_p, y_p, z_p, x_e, y_e, z_e, t)$$

lösen<sup>36</sup>. Dazu gibt es prinzipiell 2 Wege:

1. Wir sehen der Gleichung die Lösungsfunktionen sofort an.
2. Wir müssen versuchen, das Problem in kleinere Häppchen aufzuteilen.

Menschen, die den 1. Weg gehen können, sind in dieser Welt höchst selten anzutreffen, weswegen man in allen Lehrbüchern den 2. Weg findet.

Lineare partielle Differentialgleichungen lassen sich oft mit einem Separationsansatz<sup>37</sup> in kleinere Differentialgleichungen zerlegen. Ob die Separation gelingt, hängt vom gewählten Koordinatensystem ab. Für die vollständige Lösung des Wasserstoff-Problems verwendet man 3 Separationsansätze und 2 Koordinatentransformationen. Der Gang der Handlung ist normalerweise:

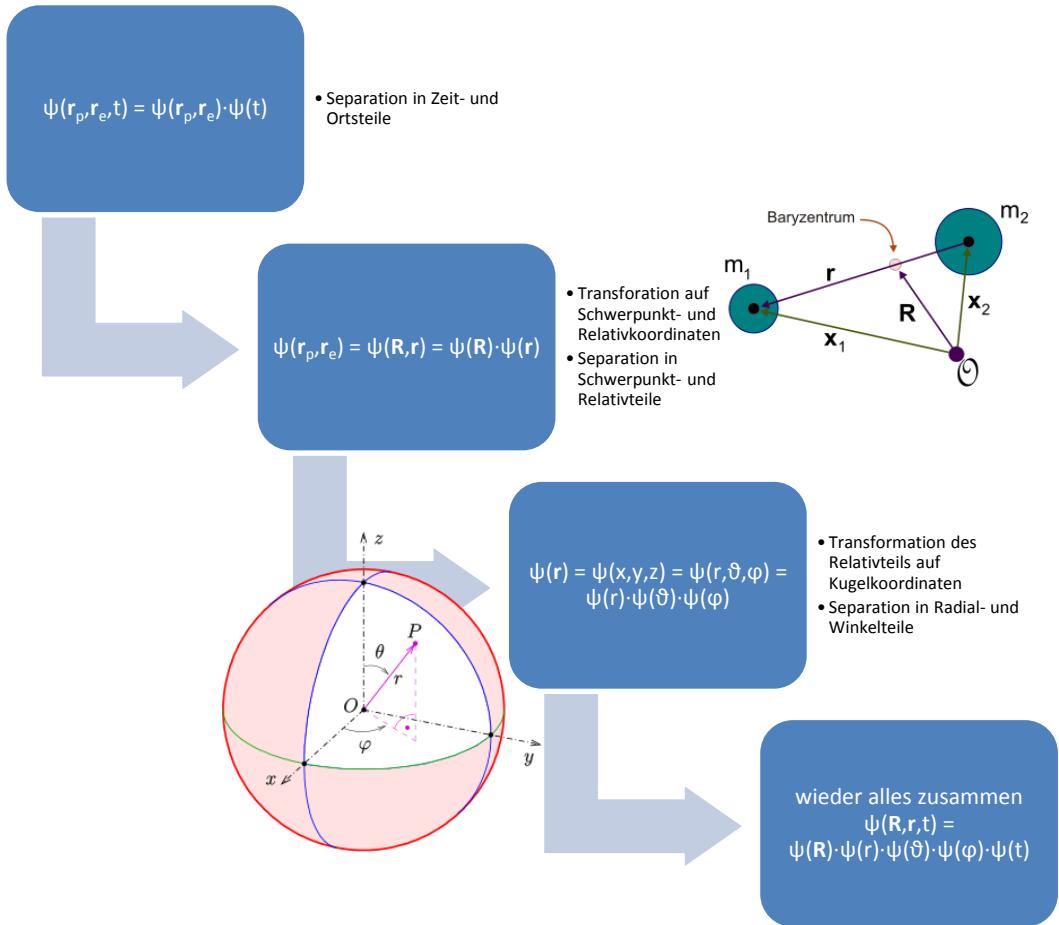
<sup>34</sup> <https://de.wikipedia.org/wiki/Zweikörperproblem>

Alle Mehr-Als-Zweikörperprobleme mit  $1/r$ -Potentialen zeigen chaotisches Verhalten!

<sup>35</sup>  $q_e$  ist negativ, wodurch das Potential anziehend wird!

<sup>36</sup> Dabei sind streng genommen bereits 2 konstante Energieterme unterschlagen worden, die Ruhenergien von Proton und Elektron:  $m_p c^2 + m_e c^2$

<sup>37</sup> <https://de.wikipedia.org/wiki/Separationsansatz>



Um diese längere Handlung abzukürzen, separieren wir alles auf einmal und geben für die einzelnen Gleichungen ohne Beweis die Lösungen an.

Damit die Separation gelingt, ist insgesamt diese Koordinatentransformation notwendig:

$$\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \\ x_e \\ y_e \\ z_e \end{pmatrix} \mapsto \left\{ \begin{array}{l} X(x_p, x_e) = \frac{m_p x_p + m_e x_e}{m_p + m_e} \\ Y(y_p, y_e) = \frac{m_p y_p + m_e y_e}{m_p + m_e} \\ Z(z_p, z_e) = \frac{m_p z_p + m_e z_e}{m_p + m_e} \\ r(x_p, y_p, z_p, x_e, y_e, z_e) = \sqrt{(x_p - x_e)^2 + (y_p - y_e)^2 + (z_p - z_e)^2} \\ \theta(x_p, y_p, z_p, x_e, y_e, z_e) = \arccos \frac{z_p - z_e}{\sqrt{(x_p - x_e)^2 + (y_p - y_e)^2 + (z_p - z_e)^2}} \\ \varphi(x_p, y_p, x_e, y_e) = \text{atan2} \frac{y_p - y_e}{x_p - x_e} \end{array} \right\}$$

Durch diese Koordinatentransformation werden auch deren Differentialoperatoren transformiert<sup>38</sup>.

Es ergibt sich

$$\begin{aligned} & \frac{1}{m_p} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_p^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_p^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_p^2} \right) + \frac{1}{m_e} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_e^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_e^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_e^2} \right) = \frac{1}{m_p + m_e} \left( \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2}{\partial Z^2} \right) + \frac{m_p + m_e}{m_p m_e} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \\ &= \frac{1}{m_p + m_e} \left( \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2}{\partial Z^2} \right) + \frac{m_p + m_e}{m_p m_e} \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) \end{aligned}$$

<sup>38</sup> Zur Transformation des Laplace-Operators z.B.: <https://de.wikipedia.org/wiki/Laplace-Operator>

und damit die Schrödinger-Gleichung in der Form

$$\psi(X)\psi(Y)\psi(Z)\psi(r)\psi(\theta)\psi(\varphi)i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(t) = \\ \left[-\frac{\hbar^2}{2M}\left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2}{\partial Z^2}\right) - \frac{\hbar^2}{2\mu}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_p q_e}{r}\right]\psi(X)\psi(Y)\psi(Z)\psi(r)\psi(\theta)\psi(\varphi)\psi(t)$$

Dabei haben wir wie es üblicherweise gemacht wird für die *Gesamtmasse* die Abkürzung  $M = m_e + m_p$  und für die sogenannte *reduzierte Masse* die Abkürzung  $\mu = m_e m_p / (m_e + m_p)$  eingeführt.

Teilen wir die Gleichung nun durch die  $\psi$ -Funktionen

$$\frac{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(t)}{\psi(t)} = -\frac{\hbar^2}{2M}\frac{\frac{\partial^2\psi(X)}{\partial X^2}}{\psi(X)} - \dots$$

so bilden sich Terme, die jeweils nur von einer Variablen abhängen. Da die Variablen unabhängig voneinander variiert werden können, müssen diese Terme für sich konstant sein.

Eine zusätzliche Komplikation stellen die  $1/r^2$  Terme vor den Winkel-Differentialoperatoren dar. Nach Abspaltung und Lösung der Zeit- und Schwerpunktgleichungen lassen sich die störenden Terme durch die Substitution  $\psi(r) = g(r)/r^2$  zu den Radial-Differentialoperatoren schieben, wodurch die verbliebenen Separationen gelingen.

Es ergeben sich die Lösungen

$$\begin{cases} \psi(t, X) \sim e^{\frac{i}{\hbar}(P_X X - \frac{P_X^2}{2M}t)} \\ \psi(t, Y) \sim e^{\frac{i}{\hbar}(P_Y Y - \frac{P_Y^2}{2M}t)} \\ \psi(t, Z) \sim e^{\frac{i}{\hbar}(P_Z Z - \frac{P_Z^2}{2M}t)} \end{cases} \Leftrightarrow \psi(t, \vec{R}) \sim e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{P} \cdot \vec{R} - \frac{P^2}{2M}t)}$$

Der Schwerpunkt von Elektron und Proton, das „Atom“, hat also die gleiche Dynamik wie ein Elektron oder Proton gemäß der freien Gleichung (118). Die Energien sind 3-fach kontinuierlich  $E_p = P^2/2M$ .

Ferner für den Radialteil der Relativbewegung für kleine Energien

$$\psi_{nl}(r) \sim \sqrt{\frac{(n-l-1)!}{2n(n+l)!}} e^{-\rho/2} \rho^l L_{n-l-1}^{2l+1}(\rho) \quad \text{mit der Abkürzung} \quad \rho \equiv -\frac{1}{n} \frac{2\mu q_p q_e}{4\pi\epsilon_0 \hbar^2} r$$

Dabei ist  $n$  und  $l$  diskrete Indizes ( $n=1,2,3,\dots$  und  $l=0,1,2,\dots$  wobei  $l < n$  gelten muss). Die Funktionen  $L$  sind die Laguerreschen Polynome<sup>39</sup>.

Die Energien dieser gebundenen Zustände sind<sup>40</sup>:

$$E_{nl} = -\frac{q_p^2 q_e^2 \mu}{2(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2} \tag{123}$$

<sup>39</sup> <https://de.wikipedia.org/wiki/Laguerre-Polynome>

<sup>40</sup> Wobei wieder die Ruheenergie

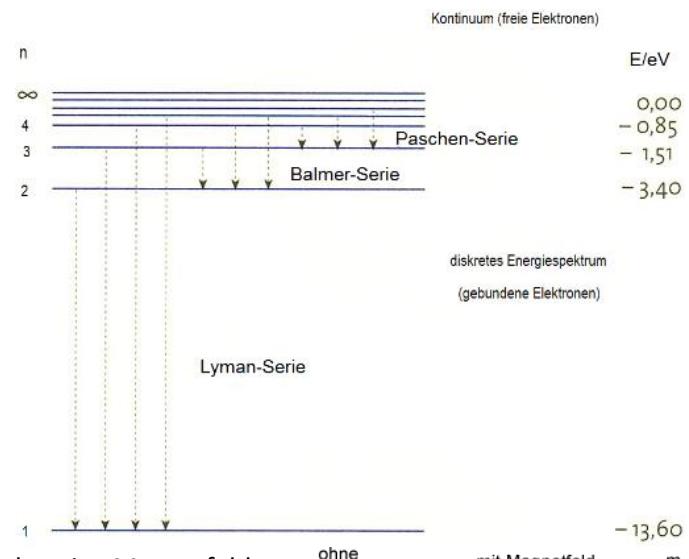
Sie hängen damit gar nicht von  $l$  ab, sind also „ $l$ -entartet“.  $l$  nummeriert die Lösungen der Winkelgleichungen, die sogenannten Kugelflächenfunktionen<sup>41</sup>:

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) \equiv \psi_{lm}(\theta) \psi_m(\varphi) \sim \sqrt{\frac{2l+1}{2} \cdot \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_{lm}(\cos \theta) e^{im\varphi}$$

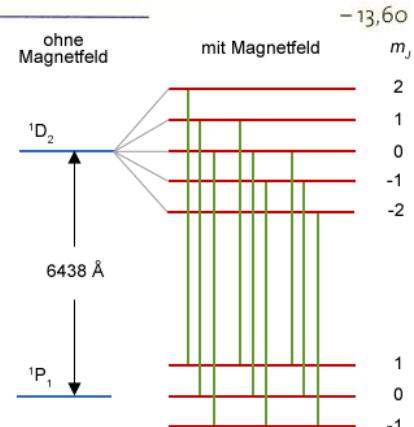
Die  $P_{lm}$  sind diesmal die Legendreschen Polynome. Die Quantenzahl  $m$  läuft von  $-l$  bis  $+l$  und steht für die „Richtungsquantelung“ des Bahndrehimpulses.

Damit hat die Quantenmechanik diverse experimentelle Befunde reproduziert:

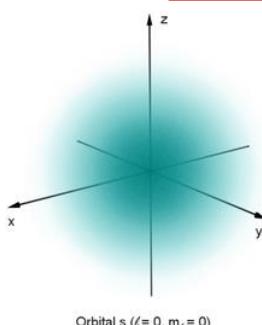
- Die Frequenzen (Farben) der Spektrallinien als Differenzen der Energieniveaus  $E_n$ .
- Die Größe der Ionisierungsenergie  $E_{\text{unendlich}} - E_1 = 13,60 \text{ eV}$
- Über die Zeit stabile Lösungsfunktionen (Elektron fällt nicht in den Kern).



- Richtungsquantelung des Bahndrehimpulses im Magnetfeld (Zeeman-Effekt).



- LadungsdichteVerteilung des Elektrons  $\sim q_e |\langle \psi_{nlm} | \psi_{nlm} \rangle|^2$



Was sonst noch erwähnenswert ist:

- Die Energieniveaus  $E_n$  liegen für  $n \rightarrow \infty$  immer dichter zusammen,  $E_{n+1} - E_n \rightarrow 0$ . Darüber, über der Ionisationsgrenze, liegen sie kontinuierlich dicht. Die abstrakten

<sup>41</sup> <https://de.wikipedia.org/wiki/Kugelfl%C3%A4chenfunktionen>

Hilbertraumvektoren  $|\psi\rangle$  haben nach der Ortsbasis entwickelt immer kontinuierliche Indizes  $\psi(r,R)$ . Nach der Energiebasis entwickelt haben sie unterhalb der Ionsierungsgrenze einen diskreten Hauptindex („Hauptquantenzahl“)  $\psi_n$  und darüber einen kontinuierlichen  $\psi(E)$ .

- Ein erheblicher Teil der Lösungsstruktur hätte im abstrakten Hilbertraum gewonnen werden können, ohne in eine bestimmte Darstellung (hier die Ortsdarstellung) zu gehen. In den Lehrbüchern werden die Drehimpulsquantenzahlen  $l,m$  normalerweise rein algebraisch aus den Kommutatoren der Drehimpulskomponenten gewonnen.
- Eine Quantenwelt wird durch einen **vollständigen Satz** von verträglichen, d.h. miteinander kommutierenden Operatoren beschrieben. Kommutierende Operatoren haben gemeinsame Eigenvektoren. Der Satz ist komplett, wenn alle gemeinsamen Eigenräume dieser Operatoren nur noch eindimensional sind, d.h. wenn ein beliebiger gemeinsamer Eigenvektor durch die Eigenwerte (Quantenzahlen) des Satzes eindeutig bezeichnet werden kann. Beim Wasserstoffproblem ist ein solcher vollständiger Satz für die Relativbewegung z.B.:  $H_{\text{rel}}, L^2 = (r \times p)^2, L_z = xp_y - yp_x$  mit den Quantenzahlen  $n,l,m$  und den Eigenwerten  $E_n, \hbar^2 l(l+1)$  und  $\hbar m$ . Für die Schwerpunktbewegung könnten wir  $P_x, P_y, P_z$  verwenden.
- Ein  $2l+1$  dimensionaler Eigenraum des Drehimpulsoperators  $L^2$  offenbart sich als  $2l+1$  dimensionaler Darstellungsraum der Rotationsgruppe  $SO(3)$ . Die Eigenwerte können nach irreduziblen Darstellungen der Symmetriegruppe klassifiziert werden.

### 6.3.1.1 Stationäre Zustände

Energieeigenvektoren sind deswegen so wichtig, weil in einem Energieeigenzustand  $u_E$  die Erwartungswerte aller nicht explizit zeitabhängigen Operatoren<sup>42</sup>  $L$  konstant sind. Man nennt Energieeigenzustände deswegen **stationär**.

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L} \rangle_{u_E}(t) &= \langle u_E(t) | \mathcal{L} u_E(t) \rangle = \left\langle e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\mathcal{H}} u_E(t_0) \middle| \mathcal{L} e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\mathcal{H}} u_E(t_0) \right\rangle = {}^{43} \\ &\left\langle e^{-\frac{i}{\hbar}E(t-t_0)} u_E(t_0) \middle| \mathcal{L} e^{-\frac{i}{\hbar}E(t-t_0)} u_E(t_0) \right\rangle = \langle u_E(t_0) | \mathcal{L} u_E(t_0) \rangle = \langle \mathcal{L} \rangle_{u_E}(t_0) \end{aligned} \quad (124)$$

Ein allgemeiner Zustand kann nach Energieeigenzuständen entwickelt werden. Die Erwartungswerte enthalten dann oszillierende Interferenzterme  $\exp(-i/\hbar (E_i - E_j)(t-t_0))$  und sind nicht mehr zeitlich konstant.

Ein aktuelles Beispiel dazu sind Neutrino-Oszillationen: die verschiedenen Neutrinozustände  $|v_e\rangle, |v_\mu\rangle, |v_\tau\rangle$  sind keine Gesamtenergieeigenzustände, sondern Eigenzustände nur des Teiloperators, der lediglich die schwache Wechselwirkung beschreibt. Dadurch oszilliert der Erwartungswerte dafür, „ein Neutrino der Sorte x zu finden“.

### 6.3.1.2 Anwendung im Quantenregister

Zum Beispiel Heliumionen  $\text{He}^+$  haben die gleiche Lösungsstruktur wie das Wasserstoffatom. Statt  $q_p$  beträgt die Kernladung  $2q_p$  und die Kernmasse ist größer. Der Rest verhält sich gleich, so lange man die unterschiedlichen Strukturen der Kerne vernachlässigt. Im Gegensatz zu neutralen Atomen lassen sich Ionen leicht durch inhomogene elektrische Felder in Ionenfallen einsperren. Dort haben sie keine Schwerpunktbewegung (relativ zum Labor) und die Vektoren der Relativbewegung sind maßgeblich.

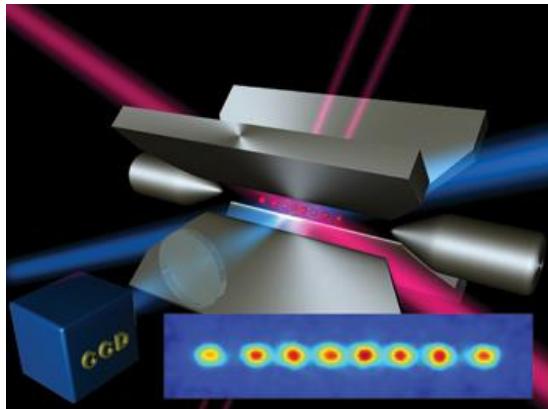
<sup>42</sup> Der vornehme Ausdruck „explizite Zeitabhängigkeit“ steht fast immer dafür, dass man eine Zeitabhängigkeit injiziert, die aus der klassischen Physik stammt, dass man also halblebige Quantentheorie betreibt.

<sup>43</sup> Gleichung (115)

Man könnte zum Beispiel die folgende Festlegung treffen

$$|\psi_{100}\rangle := |0\rangle \quad |\psi_{200}\rangle := |1\rangle$$

und dadurch die beiden untersten Energieeigenzustände  $|\Psi_{nlm}\rangle$  den 2-dimensionalen Qubit-Raum aufspannen lassen<sup>44</sup>. Mehrere Ionen in der Falle, die durch Laser so manipuliert werden, dass sie nur maximal bis  $|\Psi_{200}\rangle$  gelangen können, stellen ein Quantenregister dar.



*Applying voltages to the poles of a linear trap can hold a string of ions (red dots, also shown in inset) in a straight line at the center of the trap for days. Each atom is a qubit. Laser beams can manipulate them, and their values can be read out by a CCD as the presence or absence of fluorescence.*

<http://www.laserfocusworld.com/articles/print/volume-50/issue-03/features/photonic-frontiers-quantum-computing-in-pursuit-of-quantum-computing.html>

Trapped Ions

<https://www.uibk.ac.at/thermophysik/qo/research/trappedions.html.en>

## 6.4 Messungen



SCHAU DIR DIESE VIDEOS AN:

- SCHRÖDINGER-KATZE <https://youtu.be/dZsXu5QdZtc>

(125)

### 6.4.1 Die Kollaps-Interpretation

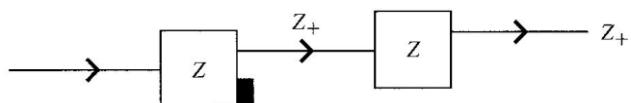
Ist eine Quantenwelt nicht in einem Eigenzustand des Operators L sondern in einer Überlagerung

$$|\psi\rangle = \sum_{\lambda} c_{\lambda} |u_{\lambda}\rangle$$

dann wird bei einer Messung mit der Wahrscheinlichkeit  $|c_{\lambda}|^2$  der Messwert  $\lambda$  gemessen. Wird danach wieder und wieder die Größe L gemessen, dann wird immer wieder **mit Sicherheit** der Messwert  $\lambda$  gemessen. Dieses Verhalten wird von der Kollaps-Interpretation korrekt wiedergegeben. Bei der Messung soll die Zustand  $|\psi\rangle$  plötzlich in den Eigenzustand  $|u_{\lambda}\rangle$  kollabieren.

$$|\psi\rangle \xrightarrow[\text{Messung}]{\text{Kollaps}} |u_{\lambda}\rangle \xrightarrow[\text{Messung}]{\text{Messung}} |u_{\lambda}\rangle \xrightarrow[\text{Messung}]{\text{...}} \dots \quad (126)$$

<sup>44</sup> Wie im klassischen Fall bedarf es einer willkürlichen Übereinkunft, welcher physikalische Zustand als 0 und welcher als 1 zu interpretieren ist und welche Zustände weder 0 noch 1 entsprechen sollen. Es gibt jedoch Ansätze, zuallererst von Weizsäckers Theorie der Ur-Alternativen, Qubits als fundamentale Seinseinheit zu verwenden und daraus alles andere abzuleiten: <https://arxiv.org/abs/1110.0986>



Ein Stern-Gerlach-Apparat (6.1.4) wird mit Zuständen unbekannter Spinausrichtung  $|\Psi\rangle = c_1|Z_+\rangle + c_2|Z_-\rangle$  gefüttert. Nach der 1. Messung werden wiederholte Messungen in z-Richtung das Ergebnis (entweder  $|Z_+\rangle$  oder  $|Z_-\rangle$ ) nicht verändern. Messungen in z-Richtung.

Damit haben wir eine zweite zeitliche Entwicklung zusätzlich zur unitären Zeitentwicklung in unsere Quantenmechanik hineinbekommen! Historisch heißt dieser unstetige Prozess „Prozess 1“, während die stetige unitäre Entwicklung „Prozess 2“ heißt.<sup>45</sup>

**Process 1:** The discontinuous change brought about by the observation of a quantity with eigenstates  $\phi_1, \phi_2, \dots$ , in which the state  $\psi$  will be changed to the state  $\phi_j$  with probability  $|\langle\psi, \phi_j\rangle|^2$ .

**Process 2:** The continuous, deterministic change of state of the (isolated) system with time according to a wave equation  $\frac{\partial\psi}{\partial t} = U\psi$ , where  $U$  is a linear operator.

46

## 6.4.2 Von Neumann-Messprozess

[https://de.wikipedia.org/wiki/Quantenmechanische\\_Messung](https://de.wikipedia.org/wiki/Quantenmechanische_Messung)

Wenn der Messapparat auch der Quantenmechanik gehorchen soll, dann bringt er einen weiteren Zustandsraum ins Geschehen. Die ursprünglich vorhandene Entkopplung<sup>47</sup> des Quantensystems vom Rest der Welt existiert während der Messung nicht und das Geschehen spielt sich in einem Produktraum ab, der aus dem Raum des Quantensystems  $H_S$  und dem des Messapparats  $H_M$  produziert wird.

Der Messapparat soll sich anfangs im Zustand  $|M_0\rangle$  befinden. Insgesamt liegt vor der Messung das direkte Produkt  $|u_\lambda\rangle|M_0\rangle$  im Raum  $H_S \times H_M$  vor. Durch einen unitären Zeitentwicklungsoperator im Produktraum wird der ursprüngliche direkte Produktvektor idealerweise auf einen direkten Produktvektor gedreht, dessen M-Komponente für verschiedene  $\lambda$  verschieden ist.

$$\underbrace{|u_\lambda\rangle|M_0\rangle}_{\text{Anfangszustand}} \xrightarrow{t} \underbrace{|u_\lambda\rangle|M_\lambda\rangle}_{\text{Endzustand}} \quad (127)$$

Wenn danach der Messapparat wieder abgekoppelt wird, kann das Quantensystem weiterhin im ursprünglichen Zustand sein, während der Messapparat einen Zustand angenommen hat, der makroskopisch ist und in einem sehr großen Teilraum  $H_M$  von  $H_S$  liegt, dessen Zustände alle zum Messergebnis  $\lambda$  gehören. Solch eine Messung heißt **ideale Messung**.

<sup>45</sup> <http://gdz.sub.uni-goettingen.de/dms/load/img/?PID=PPN379400774> Johann von Neumann, mathematische Grundlagen der Quantenmechanik

<sup>46</sup> Aus Hugh Everett's Doktorarbeit: The Many-Worlds Interpretation of Quantum Mechanics

<sup>47</sup> Je nach Interpretation: nach der Many-Worlds Interpretation kann das Quantensystem für den Experimentator entkoppelt erscheinen, während es in Wirklichkeit mit dem Rest verschränkt ist.

### Ein einfaches Beispiel aus Hugh Everett's Doktorarbeit (S.56)

Man kann sich zu diesem Beispiel vorstellen, dass die Geschwindigkeit eines Zustands  $|\psi\rangle$  in einer Richtung gemessen werden soll. Die Wechselwirkungsenergie zwischen Messapparat und „Teilchen“ soll so stark sein, dass wenigstens zeitweise andere Teile des Hamilton-Operators vernachlässigt werden können. Die Zeitentwicklung wird während der Messung nur durch den Wechselwirkungsoperator bestimmt.

Wir verwenden für das „Teilchen“ die Geschwindigkeitsdarstellung  $\Psi(v) = \langle v | \psi \rangle$  und für den Messapparat die Ortsdarstellung  $M(x) = \langle x | M \rangle$ . Unter  $x$  könnte man sich z.B. die Zeigerstellung eines analogen Messinstruments vorstellen.

Die [nicht besonders realistische] Wechselwirkungsenergie soll sein

$$H = -i\hbar v \frac{\partial}{\partial x}$$

wodurch die Schrödinger-Gleichung für den allgemeinen Produktvektor  $\Phi(v, x, t)$  diese Gestalt annimmt

$$-i\hbar v \frac{\partial}{\partial x} \Phi(v, x, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Phi(v, x, t)$$

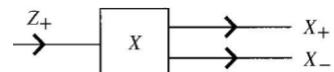
Lösungen dieser Gleichung sind die Funktionen

$$\Phi(v, x, t) = \psi(v) M(x - vt)$$

Die Messung verändert den „Teilchen“-Zustand also nicht, sondern nur den des Messapparats und ist damit ideal.

### 6.4.3 Schrödingers Gedankenexperiment: die Schrödinger-Katze

Wenn zum Beispiel ein  $|Z_+\rangle$  Zustand in einen in  $x$ -Richtung ausgerichteten Stern-Gerlach-Apparat gefüttert wird, dann produziert der Apparat daraus einen in der  $x$ -Basis überlagerten Zustand  $1/\sqrt{2}|X_+\rangle + 1/\sqrt{2}|X_-\rangle$  mit gleichen starken Teilamplituden.<sup>48</sup>



Hinter dem  $X_+$ -Ausgang soll ein Detektor sitzen, der bei Registrierung eines „Teilchens“ eine Katze tötet. Die unitäre Zeitentwicklung im Produktraum aus Teilchen- und Katzen-Hilberträumen produziert damit dieses ideale Messergebnis (Prozess 2)

$$\underbrace{\left( \frac{1}{\sqrt{2}}|X_+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|X_-\rangle \right)}_{\text{Anfangszustand}} \xrightarrow{t} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}|X_+\rangle|Katze\ tot\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|X_-\rangle|Katze\ lebt\rangle}_{\text{Endzustand}}$$

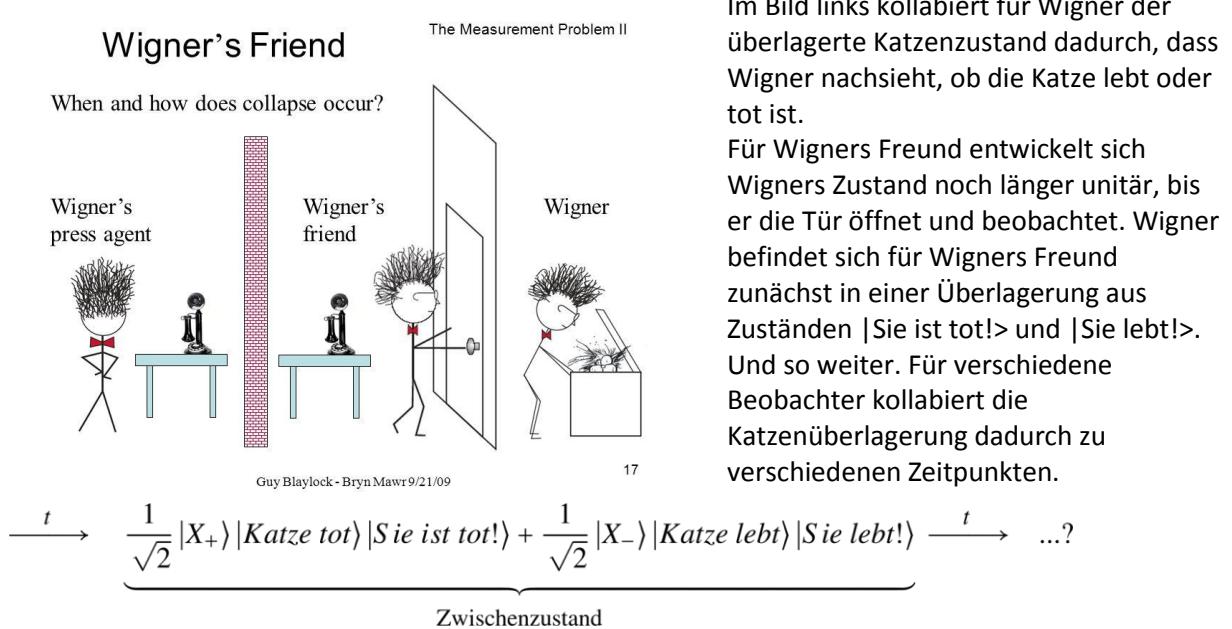
So lange also noch niemand nachgesehen („gemessen“) hat, ob die Katze tot oder lebendig ist, befindet sie sich zusammen mit dem Teilenzustand zusammen in einer Überlagerung. Dies erscheint dem Alltagsverständnis paradox. Die Kollaps-Interpretation kann sich diesmal noch retten, indem sie den Kollaps des überlagerten Produktzustands (Prozess 1) auf die Messung der Katzenlebendigkeit vertagt.

---

<sup>48</sup> Der Einfachheit halber lassen wir komplexe Phasenfaktoren bei dieser Diskussion unter den Tisch fallen.

#### 6.4.4 Wigners Gedankenexperiment: „Wigners Freund“ und Heisenbergesche Schnitte

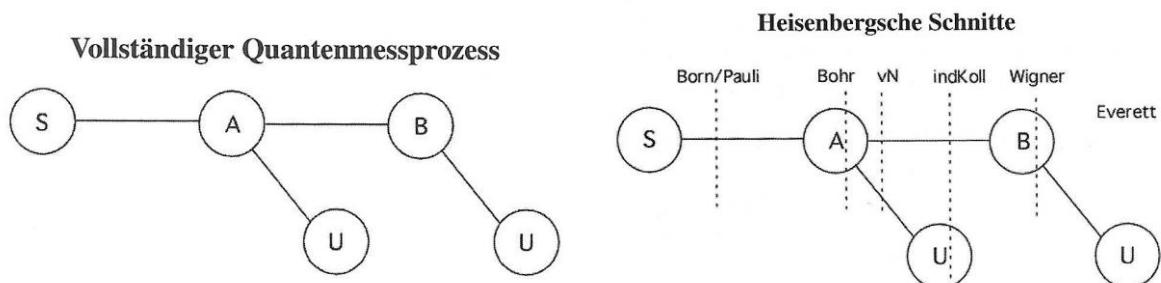
Eugene Paul Wigners Gedankenexperiment erweitert Schrödingers Gedankenexperiment um einen Beobachter, der selbst beobachtet wird.



Im Bild links kollabiert für Wigner der überlagerte Katzenzustand dadurch, dass Wigner nachsieht, ob die Katze lebt oder tot ist.

Für Wigners Freund entwickelt sich Wigners Zustand noch länger unitär, bis er die Tür öffnet und beobachtet. Wigner befindet sich für Wigners Freund zunächst in einer Überlagerung aus Zuständen  $|Sie\ ist\ tot!\rangle$  und  $|Sie\ lebt!\rangle$ . Und so weiter. Für verschiedene Beobachter kollabiert die Katzenüberlagerung dadurch zu verschiedenen Zeitpunkten.

Diese paradoxe zeitliche Entwicklung wird als **Messproblem** bezeichnet. Als **Heisenbergschen Schnitt** bezeichnet man die Übergangsstelle zwischen reinem Wirken von Prozess 2 und dem Hinzukommen von Prozess 1, wenn man so will den Übergang von Quanten- zu klassischem Verhalten. Laut Dieter Zeh gingen die Meinungen darüber in der Vergangenheit auseinander.<sup>49</sup>



S=Quantensystem, A=Messapparat, U=Umgebung, B=Beobachter

In der Viele-Welten-Interpretation (auch „many minds“) findet gar kein Kollaps des Zustands statt - im Diagramm mit „Everett“ bezeichnet. Alle Zustände existieren weiterhin gleichzeitig, das einzelne Bewusstsein im Zustand  $|Sie\ ist\ tot!\rangle$  hat keine Möglichkeit, etwas über die Existenz des ebenfalls existierenden Zustands  $|Sie\ ist\ lebendig!\rangle$  in Erfahrung zu bringen.

De facto existiert neben vielen anderen Interpretationen auch die „shut up and calculate“ Interpretation: halt’s Maul und rechne!

<sup>49</sup> Dieter Zeh: Physik ohne Realität: Tiefsinn oder Wahnsinn?

#### 6.4.5 Dekohärenztheorie

Die Dekohärenztheoretiker (Zeh, Zurek, Joos, Schlosshauer, ...) definieren das Messproblem genauer und teilen es weiter ein:<sup>50</sup>

1. Das Problem der bevorzugten Basis: weshalb beobachten wir Zustände bevorzugt in bestimmten Basen, z.B. in der Ortsbasis, d.h. Dinge an Orten und nicht Dinge an Überlagerungen verschiedener Orte?
2. Warum beobachten wir auf makroskopischer Skala keine Wellennatur, keine Quanteninterferenzeffekte?
3. Das Problem der Ausgänge:
  - a. Warum gibt es überhaupt verschiedene Ausgänge?
  - b. Warum beobachten wir nur einen davon (z.B. „Sie ist lebendig!“)?

In der Dekohärenztheorie wird die Umgebung explizit quantenmechanisch mitmodelliert. Dadurch können die ersten beiden Probleme verstanden und gelöst werden. Die Dekohärenztheorie erklärt aber **nicht** den 3. Teil und damit den eigentlichen Kern des Messproblems, auch wenn an vielen Stellen anderes geschrieben wird (z.B. Wikipedia deutsch + englisch)!

## 6.5 Verschränkung

### 6.5.1 Verschränkte Zustände

Als **verschränkte**<sup>51</sup> Zustände bezeichnet man Hilbertraum-Vektoren eines Produktraums, die kein direktes Produkt sind (siehe 3.6.6). Die 4 maximal verschränkten Zustände eines Produktraums aus 2 zweidimensionalen Hilberträumen, hier A und B genannt, sind die sogenannten **Bell-Zustände**:

$$\begin{aligned} |\Phi^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_A|0\rangle_B + |1\rangle_A|1\rangle_B) \\ |\Phi^-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_A|0\rangle_B - |1\rangle_A|1\rangle_B) \\ |\Psi^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_A|1\rangle_B + |1\rangle_A|0\rangle_B) \\ |\Psi^-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_A|1\rangle_B - |1\rangle_A|0\rangle_B) \end{aligned} \tag{128}$$

Diese Wahl der Zustände ist nicht eindeutig, da auch andere komplexe Phasenfaktoren als  $1/\sqrt{2}$  hätten gewählt werden können. Auch dieser Zustand ist maximal verschränkt:

$$\frac{i}{\sqrt{2}}(|0\rangle_A|0\rangle_B + |1\rangle_A|1\rangle_B)$$

Die Zustände der Teilräume können für alles Mögliche stehen:

- Energie-Eigenzustände eines Atoms (siehe 6.3.1.2)
- Spin-Zustände in Bezug auf eine bestimmte Raumrichtung, z.B. die Spin-Eigenzustände in x-Richtung:  $|\uparrow_x\rangle$  und  $|\downarrow_x\rangle$  (für „Spin in x-Richtung“ und „Spin entgegengesetzt“)

<sup>50</sup> Maximilian Schlosshauer: Decoherence and the Quantum-to-Classical Transition

<sup>51</sup> englisch „entangled“

- Polarisationsrichtung (Schwingungsrichtung) von Photonen:  $|\leftrightarrow\rangle$  und  $|\updownarrow\rangle$  (für waagrecht und senkrecht) <https://de.wikipedia.org/wiki/Polarisation>
- Flussquantenzustände in Supraleitern mit Tunnel-Kontakten, z.B.  $|\text{links herum}\rangle$  und  $|\text{rechts herum}\rangle$  <https://de.wikipedia.org/wiki/SQUID>
- usw.

In der Literatur wird meistens (immer?) so getan, als sei Verschränkung eine absolute Eigenschaft eines Vektors aus einem Produktraum. Im Anhang wird gezeigt, dass es bei Quantensystemen mit tieferer Struktur (Teilräumen) von der Sicht (der Wahl der Basis) abhängt, wie stark die Verschränkung ist.

### 6.5.2 EPR-Gedankenexperiment und -„Paradoxon“

[https://en.wikipedia.org/wiki/EPR\\_paradox](https://en.wikipedia.org/wiki/EPR_paradox)

Das Einstein-Podolsky-Rosen-Gedankenexperiment war von den Autoren ersonnen worden, um die Unvollständigkeit der Quantentheorie aufzuzeigen. Basierend auf der Annahme eines lokalen Realismus führt es auf ein Paradoxon.

2 Photonen sollen sich in einem verschränkten Zustand befinden, z.B. dem Bell-Zustand

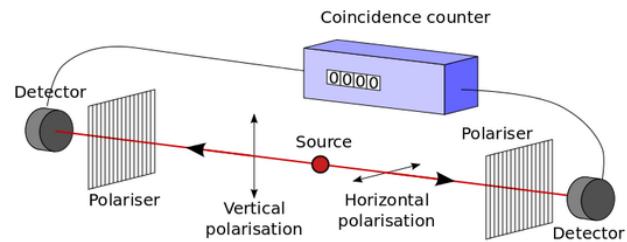
$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\leftrightarrow\rangle_A|\updownarrow\rangle_B + |\updownarrow\rangle_A|\leftrightarrow\rangle_B)$$

Die beiden Teilchen sollen so produziert worden sein, dass sie in entgegengesetzte Richtungen auseinanderfliegen. Sind sie voneinander separiert, dann wird eine Messung in der Basis  $\{|\leftrightarrow\rangle_A, |\updownarrow\rangle_A\}$  am einen Teilchen und in der Basis  $\{|\leftrightarrow\rangle_B, |\updownarrow\rangle_B\}$  am anderen Teilchen durchgeführt.

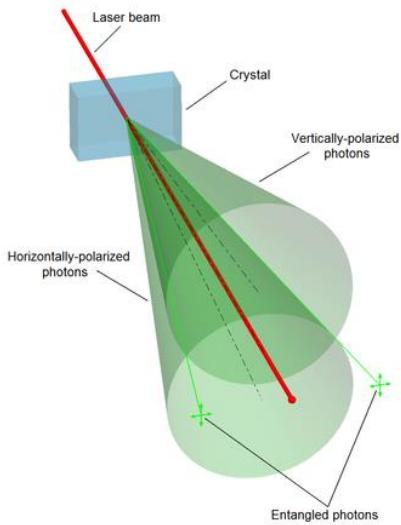
Nach der Kollaps-Interpretation kollabiert der Zustand bei der Messung von A in einen der beiden Zustände [https://en.wikipedia.org/wiki/EPR\\_paradox](https://en.wikipedia.org/wiki/EPR_paradox):

- $|\leftrightarrow\rangle_A|\updownarrow\rangle_B$  wenn für A der Eigenwert zu  $|\leftrightarrow\rangle_A$  gemessen wurde
- $|\updownarrow\rangle_A|\leftrightarrow\rangle_B$  wenn für A der Eigenwert zu  $|\updownarrow\rangle_A$  gemessen wurde

Durch Messung von A wird der Teilzustand von B mit festgelegt! Kann garantiert werden, dass B „ungefähr gleichzeitig“, d.h. maximal um  $\Delta t$  nach A gemessen wird, und sind die Messapparate räumlich  $\Delta x$  voneinander entfernt, dann „beeinflusst“ die Messung von A am Ort  $r_A$  die von B am Ort  $r_B$  mit Überlichtgeschwindigkeit, wenn im Experiment für genügenden Abstand der Messorte  $|r_A - r_B| > c \Delta t$  gesorgt werden kann. Bei der Annahme eines bei  $r_B$  vorhandenen Teilchens B, das wirklich (real) die Eigenschaft  $\leftrightarrow$  oder  $\updownarrow$  besitzt, ist es paradox, dass ein Ereignis an einem Ort  $r_A$ , das nach der Relativitätstheorie kausal getrennt vom Ereignis am Ort  $r_B$  ist<sup>52</sup>, dessen Ausgang vorherbestimmen soll.



<sup>52</sup> Der 4-dimensionale Verbindungsvektor der Ereignisse ist raumartig. Siehe z.B. <https://web.math.princeton.edu/~aretakis/columbiaGR.pdf>



Tatsächlich lassen sich heute solche Experimente durchführen. Am einfachsten lassen sich verschränkte Photonenpolarisationen durch optisch nichtlineare Kristalle erzeugen:  
<https://journals.aps.org/prl/pdf/10.1103/PhysRevLett.75.4337>

Sie bestätigen die Quantentheorie. Die Quantentheorie verletzt die Bellsche Ungleichung, die eine Obergrenze für die Korrelationen von Messereignissen setzt, während eine lokal realistische Theorie (= klassische Physik) der Ungleichung gehorcht.

Die Experimente wurden spätestens im Jahr 2016 so genau, dass 2016 als Todesjahr des lokalen Realismus gelten kann:  
<http://www.spektrum.de/magazin/lokaler-realismus-widerlegt/1392841>

### 6.5.3 Offene Quantensysteme und Dichteoperatoren

Ein „offenes Quantensystem“ ist eine Teilwelt, bei der man die Existenz der Restwelt nicht mehr wegabstrahiert. Der Erwartungswert für einen Operator  $O$  im Weltzustand  $\Xi$  ist

$$\langle \mathcal{O} \rangle_{\Xi} = \langle \Xi | \mathcal{O} | \Xi \rangle \quad (129)$$

Da die Betrachtung der ganzen Welt uns überfordert, interessieren wir uns in der Regel für einen Ausschnitt daraus. Der Ausschnitt definiert sich durch einen kleinen Hilbertraum und der Rest der Welt durch einen großen Hilbertraum. Die Zustandsvektoren der gesamten Welt sind im Allgemeinen Linearkombinationen von Produktvektoren (hier der Einfachheit halber nur mit diskreter Summe)

$$|\Xi\rangle = \sum_{n,m} c_{nm} |\psi_n\rangle |\phi_m\rangle \quad (130)$$

mit den Entwicklungskoeffizienten

$$c_{nm} = \langle \psi_n \phi_m | \Xi \rangle \quad (131)$$

Dabei steht  $\psi_n$  für Zustände des Ausschnitts und  $\phi_m$  für Zustände der Restwelt. Eine Ausschnittobservable wird durch einen Operator modelliert, der nur auf die Teile des Zustands mit den Ausschnittkoordinaten wirkt (siehe 3.6.6.5)

$$\mathcal{O} = \mathcal{L} \otimes 1 \quad (132)$$

Der Erwartungswert der Ausschnittobservablen ist dann

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \langle \Xi | \mathcal{L} \otimes 1 | \Xi \rangle = \sum_{n,m} \sum_{r,s} c_{nm}^* c_{rs} \langle \psi_n | \mathcal{L} | \psi_r \rangle \langle \phi_m | \phi_s \rangle = \sum_{n,m,r} c_{nm}^* c_{rm} \langle \psi_n | \mathcal{L} | \psi_r \rangle \quad (133)$$

Daraus lässt sich die **Dichtematrix** ablesen/definieren

$$\rho_{rn} \equiv \sum_m c_{nm}^* c_{rm} = \sum_m \langle \psi_r \phi_m | \Xi \rangle \langle \Xi | \psi_n \phi_m \rangle = \sum_m \langle \psi_r \phi_m | \mathcal{P}_{\Xi} \phi_m \psi_n \rangle \quad (134)$$

Der Erwartungswert von  $L$  ausgedrückt mit der Dichtematrix ist

$$\langle \mathcal{L} \rangle = \sum_{nr} \rho_{rn} L_{nr} = \text{Sp}_{\psi}(\rho \mathcal{L}) \quad (135)$$

Damit haben wir uns einen Dichteoperator  $\rho$  definiert.

$$\rho \equiv \text{Sp}_{\phi}(\mathcal{P}_{\Xi}) \quad (136)$$

- Offene Quantensysteme werden nicht durch einen Zustandsvektor beschrieben, sondern durch einen Dichteoperator. Der Dichteoperator berücksichtigt die Verschränkung mit der Restwelt.
- Der Dichteoperator entsteht aus dem Projektor P (auf den Gesamtweltzustand  $\Xi$ ) durch „Ausspuren“ der Restwelt-Dimensionen.
- Der Erwartungswert im Teilraum des offenen Quantensystems berechnet sich aus der Spur des Produkts aus Dichteoperator und Teiloperator.

Unser zweiter Zen-Koan: **Eine Teilwelt hat keinen Zustand!**

Der Dichte-Operator kann dazu verwendet werden, ein geeignetes Maß für die Verschränkung von Vektoren zu definieren. Von einem solchen Maß erwartet man<sup>53</sup>:

- Sein Wert ist 0 für einen reinen Produktzustand.
- Sein Wert ist unabhängig von der Wahl der Basis.

Ein solches Maß ist die von-Neumann-Entropie gebildet mit dem Dichteoperator. Dabei spielt es keine Rolle, ob wir zuerst die Restwelt-Dimensionen ausspuren oder die Ausschnittdimensionen.

$$S = -\text{Sp}(\rho \ln \rho) = -\text{Sp}_\psi(\text{Sp}_\phi(\mathcal{P}_\Xi) \ln \text{Sp}_\phi(\mathcal{P}_\Xi)) = -\text{Sp}_\phi(\text{Sp}_\psi(\mathcal{P}_\Xi) \ln \text{Sp}_\psi(\mathcal{P}_\Xi)) \quad (137)$$

Damit haben wir eine Verbindung zwischen Verschränkung und der Shannon-Entropie (95) und klassischen Wahrscheinlichkeiten hergestellt!

## 7 Quanteninformation

Online-Empfehlungen

- <https://quantiki.org/wiki/basic-concepts-quantum-computation>
- <http://www.theory.caltech.edu/people/preskill/ph229/>

### 7.1 No Cloning Theorem<sup>54</sup>

Quantenzustände lassen sich im Allgemeinen nicht exakt kopieren. Angenommen unsere Quantenwelt bestünde aus 2 gleichartigen Hilberträumen  $H = H_A \times H_B$ . Wir wollen einen 1. Zustand  $|\psi\rangle_A$  im Teilraum  $H_A$  kopieren auf den Zustand  $|\psi\rangle_B$  im Teilraum  $H_B$ . Die Quantenwelt in  $H$  kann sich insgesamt zeitlich nur unitär durch den Zeitverschiebungsoperator gemäß (108) entwickeln. Das heißt, der Kopievorgang muss folgendermaßen aussehen:

$$\mathcal{U} |\psi_A 0_B\rangle = |\psi_A \psi_B\rangle \quad (138)$$

$|0\rangle_B$  bezeichnet einen beliebigen Ausgangszustand in  $H_B$ .

Der unitäre „Kopieroperator“  $U$  soll dies für alle Zustände in  $H_A$  bewerkstelligen können, also auch für den 2. Zustand  $|\varphi\rangle_A$ :

---

<sup>53</sup> [https://e3.physik.uni-dortmund.de/~suter/Vorlesung/QIV\\_WS11/Entanglement.pdf](https://e3.physik.uni-dortmund.de/~suter/Vorlesung/QIV_WS11/Entanglement.pdf)

<sup>54</sup> <https://de.wikipedia.org/wiki/No-Cloning-Theorem>

$$\mathcal{U} |\phi_A 0_B\rangle = |\phi_A \phi_B\rangle \quad (139)$$

Wir bilden das Skalarprodukt (138) · (139).

$$\langle \mathcal{U} \psi_A 0_B | \mathcal{U} \phi_A 0_B \rangle = \langle \psi_A \psi_B | \phi_A \phi_B \rangle = \langle \psi_A | \phi_A \rangle \langle \psi_B | \phi_B \rangle = \langle \psi | \phi \rangle^2 \quad (140)$$

Im letzten Schritt haben wir benutzt, dass die komplexe Zahl „Skalarprodukt“ dieselbe ist wenn wir sie in Raum  $H_A$  und Raum  $H_B$  bilden.

Da  $U$  unitär ist, bleiben Skalarprodukte invariant und es gilt andererseits

$$\langle \mathcal{U} \psi_A 0_B | \mathcal{U} \phi_A 0_B \rangle = \langle \psi_A 0_B | \phi_A 0_B \rangle = \langle \psi_A | \phi_A \rangle \langle 0_B | 0_B \rangle = \langle \psi | \phi \rangle \quad (141)$$

Im letzten Schritt haben wir die Normierung  $\langle 0 | 0 \rangle = 1$  benutzt. (140) gleichgesetzt mit (141) liefert

$$\langle \psi | \phi \rangle^2 = \langle \psi | \phi \rangle \quad (142)$$

Diese Gleichung wird nur durch die komplexen Zahlen 0 und 1 erfüllt. Wenn  $\langle \psi | \phi \rangle = 1$ , dann ist  $|\psi\rangle = |\phi\rangle$ . Ansonsten muss  $|\phi\rangle$  ein zu  $|\psi\rangle$  orthogonaler Vektor sein.

**Es lassen sich also maximal die Basisvektoren einer Orthonormalbasis kopieren, von der  $|\psi\rangle$  ein Element ist. Allgemeine Zustände, die Überlagerungen solcher Basiszustände sind, lassen sich nicht kopieren.**

Wenn wir daran glauben, dass die gesamte Wirklichkeit mit der Quantentheorie zu beschreiben ist, dann stellt sich die Frage, wie es sein kann, dass klassische Information kopiert werden kann, wenn Quanteninformation im Allgemeinen nicht kopiert werden kann. Die Antwort ist

1. Klassische Information kann auch nicht exakt kopiert werden. Wie wir in 4.2 gesehen haben, muss für den physikalischen Träger dessen, was wir als Information ansehen wollen, ein Sicherheitsabstand eingeplant werden. Dieser Sicherheitsabstand kann die Wahrscheinlichkeit für einen Kopierfehler verringern, aber nicht zu 0 werden lassen.
2. Die hohe Anzahl der Dimensionen makroskopischer Hilberträume führt zu einem Effekt: 2 beliebig herausgegriffene Vektoren haben mit großer Wahrscheinlichkeit ein Skalarprodukt nahe 0. Da es so viele verschiedene Richtungen gibt, ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie annähernd in dieselbe Richtung zeigen, sehr klein. Damit sind sie quasi orthogonal und lassen sich kopieren.



Wie wir vorstehend gesehen haben, ist die westliche Logik im Wesentlichen auf das Gesetz der Identität begründet. Auf ihr beruhen Einteilung, Definition, Syllogismus (Vernunftschluss) und sogar Umkehrung und Widerspruch. Alle diese Begriffe stehen miteinander in Beziehung und bilden ein System. Die grundlegende Struktur des Chinesischen unterscheidet sich von diesem System. Das chinesische System der Logik, wenn wir es überhaupt ein System nennen wollen, beruht nicht auf dem Gesetz der Identität.  
[http://www.vordenker.de/downloads/chang-tung-sun\\_chinesen-denken-anders.pdf](http://www.vordenker.de/downloads/chang-tung-sun_chinesen-denken-anders.pdf)

## 7.2 Qubits und Quantenregister

Ein [technisches] **Qubit** ist ein zweidimensionaler Hilbertraum, dessen Zustandsvektor aufgrund geeigneter technischer Maßnahmen wie gewünscht manipuliert werden kann. Per Konvention wird daraus eine bestimmte Orthonormalbasis (aus den unendlich vielen) herausgegriffen und die Basisvektoren dieser Basis werden mit  $|0\rangle$  und  $|1\rangle$  bezeichnet. Der allgemeine Zustand eines Qubits ist

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle \quad (143)$$

Da  $a$  und  $b$  komplexe Zahlen sind, andererseits der Vektor auf 1 normiert sein soll, hat ein Qubit-Zustand  $2 \cdot 2 - 1 = 3$  reelle Parameter. Dadurch lässt sich sein Zustand als Punkt im dreidimensionalen Raum veranschaulichen. Vernachlässigt man zusätzlich die Gesamtphase des Zustands  $e^{i\phi}$ , dann bleiben 2 reelle Parameter übrig und der Zustand kann als Punkt auf einer Fläche veranschaulicht werden. Als Fläche wird üblicherweise die Bloch-Kugel verwendet.

<https://de.wikipedia.org/wiki/Qubit>

Die Eigenwerte des Messoperators  $L$  (in der festgelegten Basis) werden per Konvention mit 0 und 1 bezeichnet. Das Auslesen eines Qubit-Zustands liefert also einen klassischen Bitzustand: 0 oder 1. Die Wahrscheinlichkeit, 0 zu messen ist  $|a|^2$ , die Wahrscheinlichkeit 1 zu messen ist  $|b|^2$ . Nach der Messung befindet sich das Qubit im Eigenzustand  $|0\rangle$  oder  $|1\rangle$  des Messoperators.

Der Messvorgang ist der Grund dafür, warum ein Qubit trotz seiner in drei Dimensionen unendlich viel fassenden Informationskapazität die kleinste sinnvolle Einheit der Quanteninformation ist. Die Phase  $e^{i\phi}$  eines Zustands in einem eindimensionalen Hilbertraum ist uns durch Messung nicht zugänglich und es stellt sich die Frage, welche Wirklichkeit sie überhaupt hat.

Ein **Quantenregister** ist ein Produktraum aus Qubits. Ein n-Bit Quantenregister ist der Produktraum aus  $n$  zweidimensionalen Hilberträumen. Der Produktzustandsvektor kann aufgrund geeigneter technischer Maßnahmen wie gewünscht manipuliert werden.

Dyadische Produktzustände werden zur besseren Lesbarkeit in eine Bra- oder eine Ket-Klammer geschrieben:  $|0011101\rangle = |0\rangle|0\rangle|1\rangle|1\rangle|1\rangle|0\rangle|1\rangle$

Die Produktvektoren aus den Qubit-Basisvektoren bilden eine bevorzugte Basis (aus unendlich vielen möglichen Basen) im Quantenregister-Hilbertraum. Die einzelnen Qubit-Stellen des Quantenregisters bekommen eine Wertigkeit zugeordnet wie klassische Bits:  $2^0, 2^1, 2^2, \dots, 2^{n-1}$ . Die Vektoren der bevorzugten Basis bezeichnet man mit der Wertigkeit ihrer Qubit-Bestandteile, nun wieder gerne im Dezimalsystem:  $|29\rangle = |0011101\rangle$

Für die Komponentenschreibweise wird implizit die Qubit-Basis verwendet.

### Beispiel mit 1 Qubit

Hilbertraum-Vektor	Komponenten in der Produktbasis
$ 0\rangle$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
$ 1\rangle$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

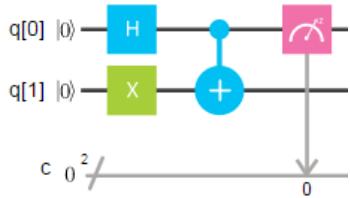
### Beispiel mit 2 Qubits

Hilbertraum-Vektor	Komponenten in der Produktbasis
$ 0_{\text{dez.}}\rangle =  00_{\text{bin.}}\rangle =  0\rangle 0\rangle$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
$ 1_{\text{dez.}}\rangle =  01_{\text{bin.}}\rangle =  0\rangle 1\rangle$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
$ 2_{\text{dez.}}\rangle =  10_{\text{bin.}}\rangle =  1\rangle 0\rangle$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
$ 3_{\text{dez.}}\rangle =  11_{\text{bin.}}\rangle =  1\rangle 1\rangle$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Zusätzlich zum munteren Wechsel zwischen den 3 verschiedenen Schreibweisen von Produktvektoren findet man in der Literatur zuweilen sogar die (falsche) Gleichsetzung von Hilbertraumvektoren mit ihren Komponenten.<sup>55</sup>

falsch	richtig
$ 00\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$ 00\rangle = (1 \ 0 \ 0 \ 0) \cdot \begin{pmatrix}  00\rangle \\  01\rangle \\  10\rangle \\  11\rangle \end{pmatrix}$

### 7.3 Quantengatter als unitäre Transformationen



[https://de.wikipedia.org/wiki/Liste\\_der\\_Quantengatter](https://de.wikipedia.org/wiki/Liste_der_Quantengatter)

Quantengatter werden meist als unitäre Matrizen angegeben, also in der Darstellung der Register-Produktbasis. Dahinter stecken wieder die uns wohlbekannten unitären linearen Operatoren.

Man kann sich ein Quantengatter vorstellen als einen während der Zeit  $\Delta t$  wirkenden Hamilton-Operator  $H_{\text{Gatter}}$ . Vor und nach Anwendung des Gatter-Operators entwickelt sich das Quantensystem ungestört durch die Umgebung.

$$\mathcal{H}_{\text{un gestört}} \mapsto \mathcal{H}_{\text{un gestört}} + \mathcal{H}_{\text{Gatter}} \mapsto \mathcal{H}_{\text{un gestört}}$$

Wenn  $H_{\text{Gatter}}$  mit  $H_{\text{un gestört}}$  vertauscht<sup>56</sup>, dann ist der unitäre Gatter-Operator

$$\mathcal{U}_{\text{Gatter}} = e^{-\frac{i}{\hbar} \Delta t \mathcal{H}_{\text{Gatter}}} \quad (144)$$

<sup>55</sup> z.B. Homeister Beispiel 2.4

<sup>56</sup> Die e-Funktion in (115) mit der Summe der Hamilton-Operatoren im Exponenten zerfällt dann in ein Produkt aus 2 e-Funktionen, wobei ein Faktor das Quantengatter darstellt.

### 7.3.1 Pauli-X-Gatter (Nicht-Gatter)

Bei IBM Q starten alle Qubits immer mit dem Anfangswert  $|0\rangle$ . Schon um daraus einen Anfangswert  $|1\rangle$  zu machen brauchen wird das X-Gatter<sup>57</sup>, das die Komponenten des Qubits vertauschen kann.

Hilbertraum-Operator	Komponenten in der Qubit-Basis	Wirkung
$ 0\rangle\langle 1  +  1\rangle\langle 0 $	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$a 0\rangle + b 1\rangle \mapsto b 0\rangle + a 1\rangle$ $ 0\rangle \mapsto  1\rangle$ $ 1\rangle \mapsto  0\rangle$

### 7.3.2 Hadamard (H)

Um dieses Gatter kommt man selbst bei den einfachsten Algorithmen nicht herum.

Hilbertraum-Operator	Komponenten in der Qubit-Basis	Wirkung
$\frac{1}{\sqrt{2}}( 0\rangle\langle 0  +  0\rangle\langle 1  +  1\rangle\langle 0  -  1\rangle\langle 1 )$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$	$a 0\rangle + b 1\rangle \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}((a+b) 0\rangle + (a-b) 1\rangle)$ $ 0\rangle \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}( 0\rangle +  1\rangle)$ $ 1\rangle \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}( 0\rangle -  1\rangle)$

### 7.3.3 Controlled Not (CNOT)

Das CNOT ist wie das X ein Permutations-Operator, allerdings ist es ein Operator in einem 4-dimensionalen Hilbertraum (2 Qubits).

Hilbertraum-Operator	Komponenten in der Register-Basis	Wirkung
$ 00\rangle\langle 00  +  11\rangle\langle 11  +  10\rangle\langle 11  +  11\rangle\langle 10 $	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	siehe Aufgabe $ 00\rangle \mapsto  00\rangle$ $ 01\rangle \mapsto  01\rangle$ $ 10\rangle \mapsto  11\rangle$ $ 11\rangle \mapsto  10\rangle$

Das CNOT führt eine Negation auf dem niederwertigen Bit durch, wenn das höherwertige gesetzt ist, ansonsten bleiben beide Bits unverändert. Daher kommt der Name *Controlled Not*.

Anders gesehen bleibt das höherwertige Bit immer unverändert, während das niederwertige Bit das Ergebnis einer Exklusiv-Oder-Verknüpfung der beiden Eingabewerte erhält. Man sieht deswegen auch diese Schreibweise

$$\text{CNOT}: |x\ y\rangle \mapsto |x\ x \oplus y\rangle \quad (145)$$

WIE WIRKT DAS CNOT AUF EINEN ALLGEMEINEN EINGABEWERT?

$$|\psi\rangle = a|00\rangle + b|01\rangle + c|10\rangle + d|11\rangle$$

(146)

<sup>57</sup> Das X steht nicht für eXchange, sondern kommt daher, dass es dem Spin-Operator in x-Richtung in der Definition von Wolfgang Pauli entspricht. Es gibt also auch Y- und Z-Gatter.

## 7.4 Ein einfacher Quantenalgorithmus: Deutsch – Jozsa

### 7.4.1 Der Algorithmus von Deutsch

Die Problemstellung und seine Lösung sind im Buch von Matthias Homeister ausführlich beschrieben  
<http://vermaschung.de/images/4/4d/Deutsch.pdf>

Es geht um die 4 klassischen Funktionen  $f_i(x)$ , die die 2 möglichen Werte {0,1} eines klassischen Bits  $x$  auf andere Werte abbilden.

identische Funktion	Inversion	konstant 0	konstant 1
$f_0(0) = 0$	$f_1(0) = 1$	$f_2(0) = 0$	$f_3(0) = 1$
$f_0(1) = 1$	$f_1(1) = 0$	$f_2(1) = 0$	$f_3(1) = 1$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ unitär	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ unitär	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ nicht unitär	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ nicht unitär

Die Quantennatur rechnet mit unitären Transformationen, weswegen diese Funktionen in unitäre Varianten  $U_f$  überführt werden müssen.

$$U_f : |x, y\rangle \mapsto |x, y \oplus f(x)\rangle$$

identische Funktion	Inversion	konstant 0	konstant 1
$ 00\rangle \mapsto  00\rangle$	$ 00\rangle \mapsto  01\rangle$	$ 00\rangle \mapsto  00\rangle$	$ 00\rangle \mapsto  01\rangle$
$ 01\rangle \mapsto  10\rangle$	$ 01\rangle \mapsto  00\rangle$	$ 01\rangle \mapsto  01\rangle$	$ 01\rangle \mapsto  00\rangle$
$ 10\rangle \mapsto  11\rangle$	$ 10\rangle \mapsto  10\rangle$	$ 10\rangle \mapsto  10\rangle$	$ 10\rangle \mapsto  11\rangle$
$ 11\rangle \mapsto  10\rangle$	$ 11\rangle \mapsto  11\rangle$	$ 11\rangle \mapsto  11\rangle$	$ 11\rangle \mapsto  10\rangle$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
CNOT	$X_y \cdot \text{CNOT} = \text{CNOT} \cdot X_y$	Einheitsmatrix	$X_y$

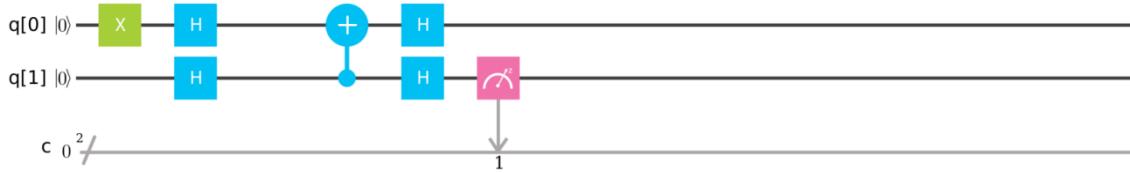
1. WIE SIEHT DIE 4·4-MATRIX  $X_x$ , DIE ALSO DIE AMPLITUDEN DES HÖHERWERTIGEN BITS X TAUSCHT, IM 2-QUBIT-RAUM AUS?
2. ZEIGE, DASS  $X_y \cdot \text{CNOT}$  BZW.  $\text{CNOT} \cdot X_y$  TATSÄCHLICH DIE FÜR DIE UNITÄRE VARIANTE DER INVERSION BENÖTIGTE 4·4 MATRIX ERGEBEN.

(147)

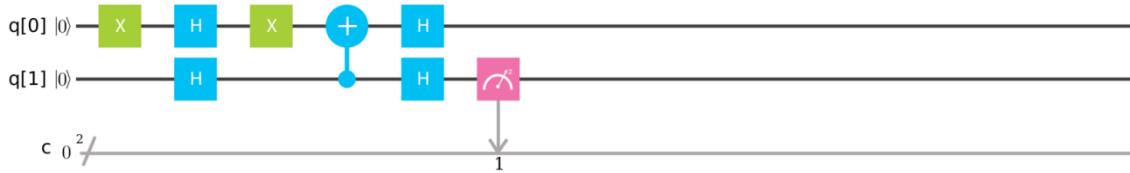
Glücklicherweise finden sich auf IBM Q<sup>58</sup> dazu alle notwendigen Elemente, so dass sich die Schaltkreise aufbauen lassen.

<sup>58</sup> <https://quantumexperience.ng.bluemix.net/qx/editor>

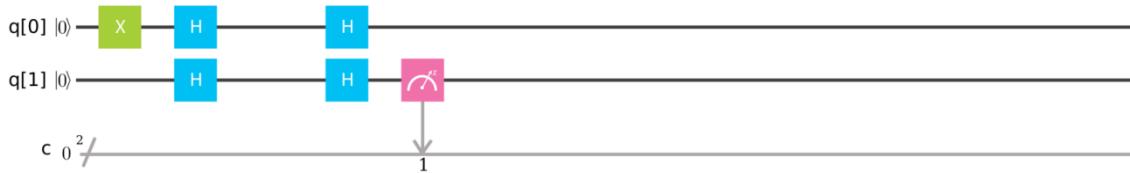
Beispielschaltung für die identische Funktion



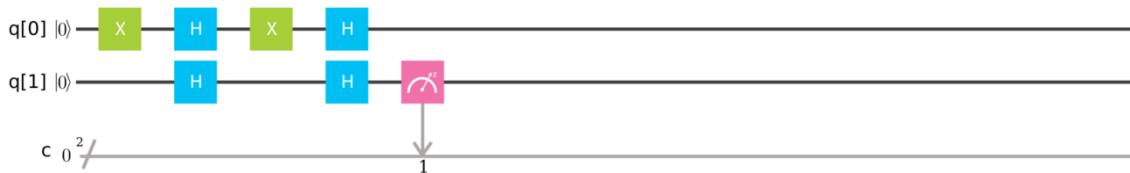
Beispielschaltung für die invertierende Funktion



Beispielschaltung für die Funktion konstant 0



Beispielschaltung für die Funktion konstant 1



IMPLEMENTIERE DEN DEUTSCH-ALGORITHMUS AUF IBM Q MIT ALLEN 4 OBEN ABGEBILDENDEN SCHALTkreisen und führe ihn aus! Sind die Ergebnisse wie erwartet?  
Schau dir den QASM-Code an! Verstehst du ihn?

(148)

## 7.4.2 Der Algorithmus von Deutsch-Josza

<http://vermaschung.de/images/0/00/Deutsch-Josza.pdf>

**DEUTSCH-JOSZA MIT EINER FUNKTION  $F(x_1, x_0)$  AUF 2 KЛАSSISCHEN BITS:**

1. ENTSCHEIDE DICH FÜR EINE DER FUNKTIONEN  $F_i(x_1, x_0)$ !
  2. FINDE ZU DIESER FUNKTION DIE UNITÄRE 8·8-MATRIX  $U_F$ !
  3. VERSUCHE, DIESE MATRIX DURCH DIE IN IBM Q VORHANDENEN GATTER ZU REALISIEREN!
  4. BILDE DEN DEUTSCH-JOSZA SCHALTKREIS UND FÜHRE IHN AUS! ENTSPRICHT DAS ERGEBNIS DER ERWARTUNG?
- (149)

Eine Beispiellösung findet sich im Anhang.

## 7.5 Quantenteleportation

<http://vermaschung.de/images/c/ce/Quantenteleportation.pdf>

## 7.6 Quantenkryptographie

<http://vermaschung.de/images/c/c5/Quantenkryptografie.pdf>

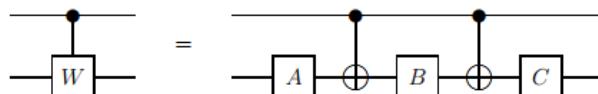
Für das BB84-Protokoll wird ein Gatter benötigt, das auf IBM Q nicht zur Verfügung steht, das Controlled Hadamard. Es ist wie das CNOT ein

Spezialfall des Controlled U, wobei U für irgendeine unitäre 1-Bit-Transformation steht, die in Abhängigkeit vom Wert des anderen Bits angewendet oder nicht angewendet werden soll. Dieses Gatter stellt sich in der Quantenregisterbasis so dar, rechts unten in dem Bereich, in dem das höherwertige Bild 1 ist, sieht man die Hadamard-Matrix:

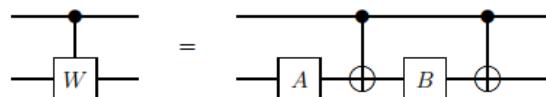
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Die Frage, ob und wie sich diese Matrix mit elementaren Gattern realisieren lässt, ist nicht trivial. Z.B. in <https://arxiv.org/abs/quant-ph/9503016> finden wir diese Hilfen

**Lemma 5.1:** For a unitary  $2 \times 2$  matrix  $W$ , a  $\wedge_1(W)$  gate can be simulated by a network of the form



**Lemma 5.4:** A  $\wedge_1(W)$  gate can be simulated by a network of the form



where  $A$  and  $B \in SU(2)$  if and only if  $W$  is of the form

$$W = R_z(\alpha) \cdot R_y(\theta) \cdot R_z(\alpha) = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} \cos \theta/2 & \sin \theta/2 \\ -\sin \theta/2 & e^{-i\alpha} \cos \theta/2 \end{pmatrix},$$

where  $\alpha$  and  $\theta$  are real-valued.

**Lemma 5.5:** A  $\wedge_1(V)$  gate can be simulated by a construction of the form



where  $A$  and  $B$  are unitary if and only if  $V$  is of the form

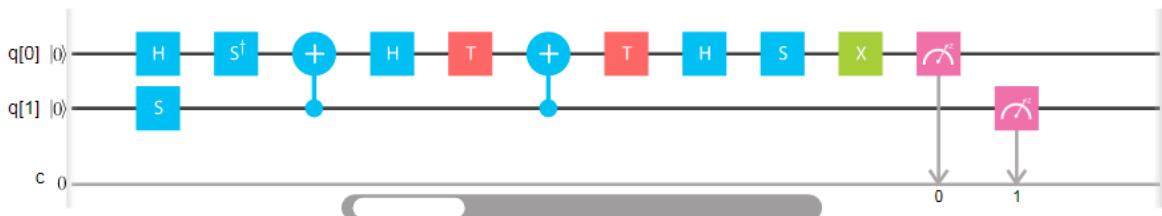
$$V = R_z(\alpha) \cdot R_y(\theta) \cdot R_z(\alpha) \cdot \sigma_x = \begin{pmatrix} \sin \theta/2 & e^{i\alpha} \cos \theta/2 \\ e^{-i\alpha} \cos \theta/2 & -\sin \theta/2 \end{pmatrix},$$

where  $\alpha$  and  $\theta$  are real-valued.

Lemma 5.5 gibt uns die Hoffnung, Controlled Hadamard auf IBM Q realisieren zu können, denn  $H$  ist von der Form  $V$  mit  $\alpha = 0$  und  $\theta = \pi/2$ . Tatsächlich behauptet hier

<https://physics.stackexchange.com/questions/261974/applying-controlled-hadamard-gate> jemand, ein Controlled Hadamard ließe sich durch diese Schaltung realisieren:

Name: 'Controlled Hadamard?'  New  Save  Save as



**STIMMT DIE BEHAUPTUNG? ÜBERPRÜFE SIE ENTWEDER DURCH MULTIPLIZIEREN DER EINZELNEN MATRIZEN ODER DURCH SIMULATION AUF IBM Q!**

(150)

## 8 Schlussbemerkungen

Für die Realisierung eines (vom obigen abweichenden) Controlled Hadamard Gate auf IBM Q ist eine Belohnung von wahlweise einem Crafts Beer oder 3 Tafeln Ritter Sport ausgesetzt.

Und es gibt für jeden Teilnehmer aus der Teilchen-Physik noch unseren dritten Zen-Koan dazu:  
**Jedes Elementarteilchen enthält alle anderen Elementarteilchen.**

## 9 Anhang

### 9.1 Der Produktraum zweier Spinoren

Die Umindizierung, wie der 4-dimensionale Produktraum in einen 3-dimensionalen austauschsymmetrischen und einen 1-dim antisymm. zerfällt.

...

### 9.2 Der Produktraum zweier „Teilchen“

Wie der Produktraum in einen symmetrischen (Schwerpunkt) und einen antisymmetrischen (relativ) zerfällt.

...

### 9.3 Relativität der Verschränkung

#### 9.3.1 Beispiel im Hilbertraum-Formalismus

Sei  $H$  ein 4-dimensionaler Hilbertraum. Eine erste Orthonormalbasis des Hilbertraums soll sein  $\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ .

Durch unitäre Transformationen können wir unendlich viele weitere Basen gewinnen. Zum Beispiel die Basis  $\{|a\rangle, |b\rangle, |c\rangle, |d\rangle\}$  durch die Transformation

$$\begin{pmatrix} |a\rangle \\ |b\rangle \\ |c\rangle \\ |d\rangle \end{pmatrix} := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |0\rangle \\ |1\rangle \\ |2\rangle \\ |3\rangle \end{pmatrix} \quad (151)$$

So lange wir nicht mehr wissen, sind alle auf solche Arten gewonnenen Orthonormalbasen **gleichwertig**.

$H$  soll sich im Nachhinein (durch einen experimentellen Befund) als Produktraum aus zwei 2-dimensionalen Hilberträumen  $H = H_I \times H_{II}$  entpuppen. Es soll sein:

$$\begin{aligned} |0\rangle &= |0\rangle_I |0\rangle_{II} \\ |1\rangle &= |0\rangle_I |1\rangle_{II} \\ |2\rangle &= |1\rangle_I |0\rangle_{II} \\ |3\rangle &= |1\rangle_I |1\rangle_{II} \end{aligned}$$

Die Vektoren der ersten Basis sind dyadische Produkte. Was ist mit den Vektoren unserer zweiten Basis? Aus (151) ergibt sich

$$\begin{aligned} |a\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |3\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_I |0\rangle_{II} + |1\rangle_I |1\rangle_{II}) \\ |b\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |2\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_I |1\rangle_{II} + |1\rangle_I |0\rangle_{II}) \\ |c\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle - |2\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_I |1\rangle_{II} - |1\rangle_I |0\rangle_{II}) \\ |d\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |3\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_I |0\rangle_{II} - |1\rangle_I |1\rangle_{II}) \end{aligned}$$

Alle Vektoren der zweiten Basis sind maximal verschränkt. Dadurch drängt sich der Verdacht auf, dass die Zerlegung von  $H$  in Teilräume genauso wenig eindeutig ist wie die Wahl der Basis in  $H$ . Wenn  $H$  in die Teilräume  $H = H_A \times H_B$  zerlegt werden könnte, so dass gälte

$$\begin{aligned} |a\rangle &= |0\rangle_A |0\rangle_B \\ |b\rangle &= |0\rangle_A |1\rangle_B \\ |c\rangle &= |1\rangle_A |0\rangle_B \\ |d\rangle &= |1\rangle_A |1\rangle_B \end{aligned}$$

dann wäre die Gleichwertigkeit der Basen wiederhergestellt.

#### 9.3.2 Beispiel in Orts-Darstellungen

Bei der Lösung des Wasserstoffproblems lässt sich der Funktionenraum in 2 Räume separieren, wenn man zu Schwerpunkt- und Relativkoordinaten, d.h. zu  $R$  und  $r$  übergeht. Eine Gesamtlösung als Produkt aus einer Impulseigenfunktion für den Schwerpunkt und aus dem Grundzustand der Relativbewegung  $\psi_{100}$  ist

$$\psi(\vec{r}, \vec{R}) = N e^{i \vec{k} \vec{R}} e^{-\frac{|\vec{r}|}{a}} = N e^{i \frac{m_e}{m_e + m_p} \vec{k} \vec{r}_e} e^{i \frac{m_p}{m_e + m_p} \vec{k} \vec{r}_p} e^{-\frac{\sqrt{\vec{r}_e^2 - 2 \vec{r}_e \cdot \vec{r}_p + \vec{r}_p^2}}{a}} = \psi(\vec{r}_e, \vec{r}_p)$$

$N$  ist eine Normierungskonstante,  $a$  der Bohrsche Radius. Auf der rechten Seite der Gleichung stehen die ursprünglichen Koordinaten von Elektron und Proton. Die rechte Seite ist nicht mehr in ein Produkt zerlegbar, sondern über die ganz rechts stehende  $e$ -Funktion verschränkt. Derselbe Vektor erscheint in der einen Zerlegung verschränkt und gleichzeitig in der anderen Basis als Produktvektor. Da kontinuierliche Indizes nur unendlich dicht liegende diskrete Indizes sind, muss dieses Prinzip generell auch für diskrete Indizes gelten.

## 9.4 Beispiel Deutsch-Josza mit 2 Eingabebits

Wir entscheiden uns für diese balancierte klassische Funktion

### klassische Funktion

$$f(0,0) = 0$$

$$f(0,1) = 1$$

$$f(1,0) = 0$$

$$f(1,1) = 1$$

Wir bemerken, dass das Funktionsergebnis gar nicht von  $x_1$  abhängt, es ist  $f(x_1, x_0) = x_0$ .

Die unitäre Matrix dazu ist

$$U_f : |x_1, x_0, y\rangle \mapsto |x_1, x_0, y \oplus f(x_1, x_0)\rangle = |x_1, x_0, y \oplus x_0\rangle$$

### unitäre Matrix

$ 000\rangle \mapsto  000\rangle$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$x_1$ bleibt unverändert. Die Matrix entspricht einem Tensorprodukt der Einheitsmatrix 1 im Raum von $x_1$ mit einem CNOT, bei dem $y$ durch $x_0$ kontrolliert wird.
$ 001\rangle \mapsto  001\rangle$		
$ 010\rangle \mapsto  011\rangle$		
$ 011\rangle \mapsto  010\rangle$		
$ 100\rangle \mapsto  100\rangle$		
$ 101\rangle \mapsto  101\rangle$		
$ 110\rangle \mapsto  111\rangle$		
$ 111\rangle \mapsto  110\rangle$		

Für die Realisierung mit IBM Q genügt in diesem Fall ein einziges Gatter. Die Erwartung für eine balancierte Funktion ist ein Ergebnis ungleich 0 bei der Messung von  $x_1, x_0$ . Das Ergebnis bestätigt die Erwartung zu 100% (Simulator).

Quantum State: Computation Basis



Quantum Circuit

