

§ Konstruktion von Topologien

Eine Topologie ist eine Familie von Teilmengen der Grundmenge X mit gewissen Eigenschaften. Hat man nun irgendeine Familie von Teilmengen von X , so stellt sich die Frage: Gibt es eine Topologie die alle diese Elemente enthält, aber nicht unnötig viele andere?

Topologische Räume kommen automatisch mit stetigen Abbildungen. Hat man eine Menge X und Familien von Abbildungen in topologische Räume, gibt es eine Topologie auf X die alle diese Abbildungen stetig macht, aber nicht unnötig viele andere?

Die Antwort auf beide Fragen ist "ja".

Proposition

Sei X eine Menge.

- (i) Sei $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}X$. Dann existiert eine größte Topologie \mathcal{T} auf X sodass $\mathcal{T} \supseteq \mathcal{S}$
- (ii) Sei I eine Menge, $\langle Y_i, \tau_i \rangle$ topologische Räume, und $f_i: X \rightarrow Y_i$ Abbildungen. Dann existiert eine größte Topologie \mathcal{T} auf X sodass jedes f_i \mathcal{T} - τ_i -stetig ist.

Wir geben zwei Beweise für diese Aussage.

Zuerst ein Existenzbeweis als Korollar der Existenz von Infimum.

Beweis (#1):

▷ von (i) ◁ Die Menge

$$S := \{V \in \mathcal{T}(X) \mid V' \subseteq V\}$$

enthält PX . Sie ist offensichtlich unter Durchschnitten abgeschlossen. Damit hat auf S die gewünschte Eigenschaft.

▷ von (ii) ◁ Die Menge

$$S := \{V \in \mathcal{T}(X) \mid \forall i \in I. f_i \text{ ist } V-V_i\text{-stetig}\}$$

enthält PX und ist unter Durchschnitten abgeschlossen.

Denn ist $0 \in V_i$, dann ist für alle $V \in S$ liegt Urbild $f_i^{-1}(0)$ in V , und damit ist $f_i^{-1}(0) \in \bigcap S$.

Wir sehen wieder, dass auf S die gewünschte Eigenschaft hold.

□

Definitionen

- Sei X eine Menge.
- (i) Ist $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}X$, so heißt die größte Topologie die \mathcal{S} umfasst die **von \mathcal{S} erzeugte Topologie**.
 - (ii) Sind I Menge, $\langle Y_i, \tau_i \rangle$ topologische Räume, und $f_i: X \rightarrow Y_i$ Funktionen, so heißt die größte Topologie die alle f_i stetig macht die **initiale Topologie bzgl. der f_i** .
-

Beweis #1 gibt eine alternative Beschreibung der genannten Objekte von außen. Unser zweiter Beweis gibt eine konkrete Beschreibung von innen.

Beweis (#2):

▷ von (i) ◁ Sehe

$$\mathcal{S} := \{\emptyset, X\} \cup$$

$$\left\{ \bigcup_{i \in I} \bigcap_{j=1}^{n_i} O_{ij} \mid I \text{ Menge, } n_i \in \mathbb{N}, O_{ij} \in \mathcal{S} \right\}.$$

Offensichtlich umfasst jede Topologie die \mathcal{S} umfasst auch \mathcal{S} umfassen.

Wir zeigen, dass \mathcal{I} selbst schon eine Topologie ist. Die Eigenschaften (i) und (ii) aus der Definition einer Topologie sind klar. Wir müssen zeigen, dass \mathcal{I} unter endlichen Durchschnitten abgeschlossen ist. Seien also

$$\bigcup_{i \in I_k} \bigcap_{j=1}^{n_{ik}} O_{ijk} \in \mathcal{I}, \quad k=1, \dots, m.$$

Nun gilt

$$\begin{aligned} & \bigcap_{k=1}^m \bigcup_{i \in I_k} \left[\bigcap_{j=1}^{n_{ik}} O_{ijk} \right] = \\ &= \bigcup_{(i_1, \dots, i_m) \in I_1 \times \dots \times I_m} \left(\left[\bigcap_{j=1}^{n_{i_1 1}} O_{i_1 j 1} \right] \cap \dots \cap \left[\bigcap_{j=1}^{n_{i_m m}} O_{i_m j m} \right] \right) \end{aligned}$$

und diese Menge ist wieder eine Vereinigung von endlichen Durchschnitten von Mengen aus \mathcal{I} , gehört also zu \mathcal{I} .

▷ von (ii) ◁ Setze

$$\mathcal{T} := \{ \emptyset, X \} \cup$$

$$\left\{ \bigcup_{e \in L} \bigcap_{j \in J_e} f_j^{-1}(O_e) \mid \begin{array}{l} L \text{ Menge, } J_e \subseteq I \text{ endlich,} \\ O_e \in \mathcal{V}_j \end{array} \right\}$$

Jede Topologie die alle f_j stetig macht, muss also von der Menge

$$\mathcal{T}' := \{ f_j^{-1}(O_j) \mid j \in I, O_j \in \mathcal{V}_j \}$$

erzeugte Topologie umfassen. Wir zeigen, dass diese von \mathcal{T}' erzeugte Topologie \mathcal{T}' gleich \mathcal{T} ist. Dabei ist $\mathcal{T}' \supseteq \mathcal{T}$ klar.

Für die umgekehrte Inklusion beachte dass Urbilder und Durchschnitte verträglich sind. Das gilt

$$\begin{aligned} \bigcap_{e=1}^n f_{j_e}^{-1}(O_e) &= \bigcap_{j \in \{j_1, \dots, j_n\}} \bigcap_{\substack{e=1, \dots, n \\ j_e = j}} f_j^{-1}(O_e) \\ &= \bigcap_{j \in \{j_1, \dots, j_n\}} f_j^{-1} \left(\underbrace{\bigcap_{\substack{e=1, \dots, n \\ j_e = j}} O_e}_{\in \mathcal{V}_j} \right). \end{aligned}$$

□

Bemerkung

Sei X eine Menge, $\langle Y, \tau \rangle$ ein topologischer Raum, und $f: X \rightarrow Y$ eine Funktion. Dann ist die induzierte Topologie auf X bzgl. der einelementigen Familie $\{f\}$ gegeben als

$$\{\bar{f}(O) \mid O \in \tau\}.$$

Dies folgt, da Urbildfunktionen mit Vereinigungen und Durchschnitten verträglich sind, und daher die angesprochene Menge eine Topologie ist.

Beispiel

Sei $\langle Y, \tau \rangle$ ein topologischer Raum, sei $X \subseteq Y$ und bezeichne

$$\iota: \begin{cases} X \rightarrow Y \\ x \mapsto x \end{cases}$$

die **Inklusionsabbildung**. Die induzierte Topologie auf X bzgl. der einelementigen Familie $\{\iota\}$ heißt die **Spurtopologie** von τ auf X , und wir schreiben $\tau|_X$.
Explizit gilt:

$$\tau|_X = \{O \cap X \mid O \in \tau\}.$$

Beispiel

Sei $\langle X_i, \mathcal{T}_i \rangle, i \in I$, eine Familie topologischer Räume. Betrachte das direkte Produkt $X := \prod_{i \in I} X_i$, mit den kanonischen Projektionen

$$\pi_j: \begin{cases} \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_j \\ (x_i)_{i \in I} \mapsto x_j \end{cases}$$

Die initiale Topologie auf X bzgl. der Familie $\{\pi_j \mid j \in I\}$ heißt die **Produkttopologie** auf X , und wir schreiben $\prod_{i \in I} \mathcal{T}_i$.

Sie ist gegeben als die Menge aller Vereinigungen von Mengen der Gestalt $\prod_{i \in I} O_i$ mit $O_i \in \mathcal{T}_i$ wobei für alle i auf endlich viele $i \in I$ gilt dass $O_i = X_i$ ist.

Es ist eine wesentliche Tatsache, dass sich initiale Topologien durch eine universelle Eigenschaft beschreiben lassen.

Satz

Sei X eine Menge, seien $\langle Y_i, \mathcal{V}_i \rangle, i \in I$, topologische Räume, und seien $f_i: X \rightarrow Y_i$ Abbildungen. Bezeichne \mathcal{T}_{ini} die initiale Topologie auf X bzgl. der f_i , und sei \mathcal{T} eine Topologie auf X .

Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent.

(i) $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{i_i}$

(ii) $\forall \langle Z, \mathcal{W} \rangle$ topologischer Raum, $g: Z \rightarrow X$.

$$\left(g \text{ } \mathcal{W}\text{-}\mathcal{I}\text{-stetig} \Leftrightarrow \forall i \in I. f_i \circ g \text{ } \mathcal{W}\text{-}\mathcal{V}_i\text{-stetig} \right)$$

Beweis:

$\triangleright (i) \Rightarrow (ii) \triangleleft$

$\text{DD "} \Rightarrow \text{"}$:

Die Funktionen f_i sind alle \mathcal{I}_{i_i} - \mathcal{V}_i -stetig. Ist $g: \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{I}_{i_i}$ -stetig, so folgt daraus alle $f_i \circ g$ \mathcal{W} - \mathcal{V}_i -stetig sind.

$\text{DD "} \Leftarrow \text{"}$:

Betrachte eine Menge der Gestalt $f_i^{-1}(O_i)$ mit $O_i \in \mathcal{V}_i$. Es ist

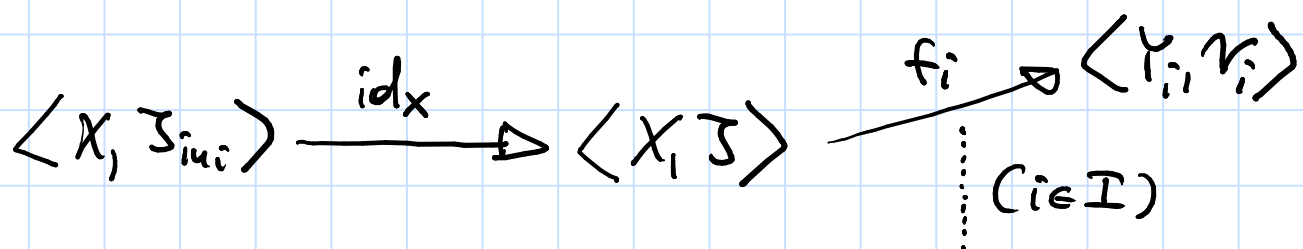
$$g^{-1}(f_i^{-1}(O_i)) = (f_i \circ g)^{-1}(O_i) \in \mathcal{W}.$$

Universion wird mit Mengengenerationen verträglich, also haben wir damit auch

$$\begin{aligned} g^{-1}\left(\bigcup_{\ell \in L} \bigcap_{j=1}^{n_\ell} f_{i_{\ell j}}^{-1}(O_{\ell j})\right) &= \\ &= \bigcup_{\ell \in L} \bigcap_{j=1}^{n_\ell} g^{-1}(f_{i_{\ell j}}^{-1}(O_{\ell j})) \in \mathcal{W}. \end{aligned}$$

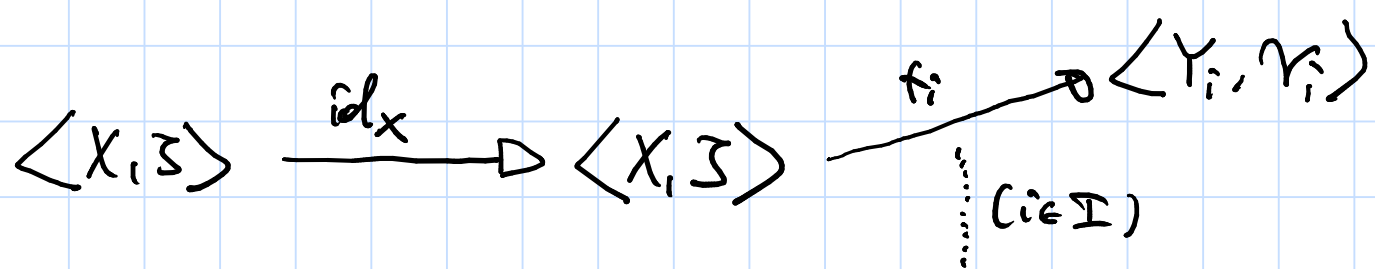
$$D(i) \Rightarrow D(i) \triangleleft$$

$\Rightarrow \mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}_{i_{i_0}}$: Betrachte das Diagramm



Alle $f_i \circ \text{id}_X$ sind $\mathcal{I}_{i_{i_0}} - \mathcal{V}_i$ -stetig, also ist id_X $\mathcal{I}_{i_{i_0}} - \mathcal{I}$ -stetig.

$\Rightarrow \mathcal{I} \supseteq \mathcal{I}_{i_{i_0}}$: Betrachte das Diagramm



Die Einbettung id_X ist $\mathcal{I} - \mathcal{I}$ -stetig, also sind alle $f_i \circ \text{id}_X$ $\mathcal{I} - \mathcal{V}_i$ -stetig.

□

Die nächste Aussage kann man als Assoziativität der Bildung mittlerer Topologien verstehen.

Proposition

Seien X eine Menge, $Y_i, i \in I$, Mengen, und $\langle Z_{ij}, \mathcal{W}_{ij} \rangle, i \in I, j \in J_i$, topologische Räume. Weiter seien $f_i : X \rightarrow Y_i, i \in I$, und $g_{ij} : Y_i \rightarrow Z_{ij}, i \in I, j \in J_i$, Einbettungen.

Beweis

▷ \mathcal{T}_1 die initiale Topologie auf X bzgl. der Funktionen

$$\{f_i \circ g_{ij} \mid i \in I, j \in J_i\}$$

in die topologischen Räume $\langle Z_{ij}, \mathcal{W}_{ij} \rangle$,

▷ \mathcal{V}_i die initiale Topologie auf Y_i bzgl. der Funktionen

$$\{g_{ij} \mid j \in J_i\}$$

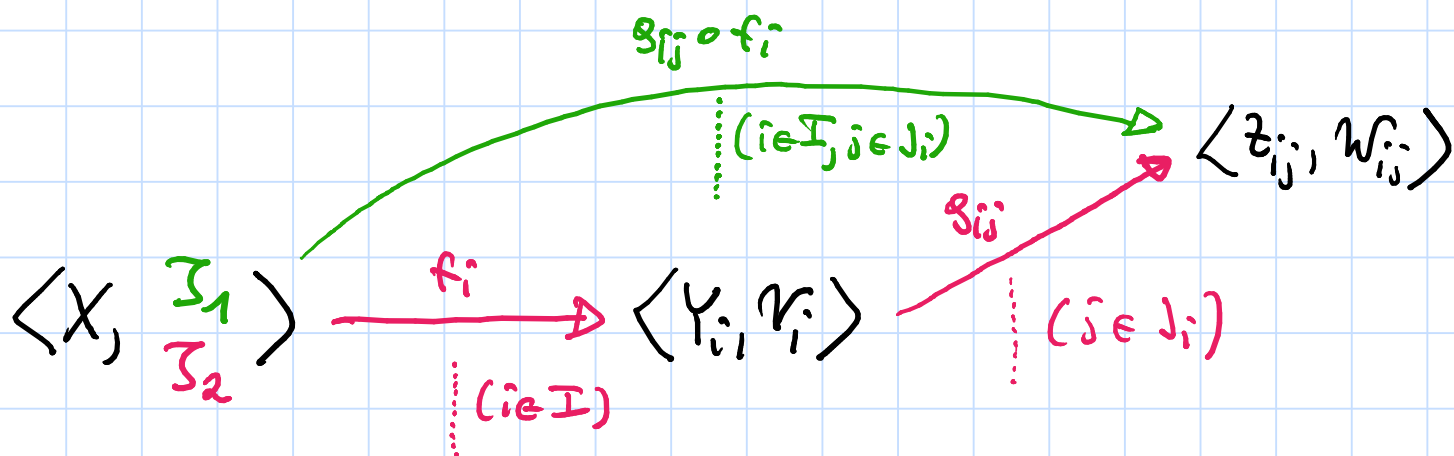
in die topologischen Räume $\langle Z_{ij}, \mathcal{W}_{ij} \rangle$,

▷ \mathcal{T}_2 die initiale Topologie auf X bzgl.

$$\{f_i \mid i \in I\}$$

in die topologischen Räume $\langle Y_i, \mathcal{V}_i \rangle$.

Dann ist $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.



Beweis: Sei $\langle X', \mathcal{T}' \rangle$ ein topologischer Raum,
und $h: X' \rightarrow X$ eine Einbettung. Dann gilt

h ist \mathcal{T}' - \mathcal{T}_1 -stetig

$\Leftrightarrow \forall i \in I, j \in J_i. (g_{ij} \circ f_i) \circ h$ ist \mathcal{T}' - \mathcal{W}_{ij} -stetig

$\Leftrightarrow \forall i \in I. (\forall j \in J_i. g_{ij} \circ (f_i \circ h) \text{ ist } \mathcal{T}'\text{-}\mathcal{W}_{ij}\text{-stetig})$

$\Leftrightarrow \forall i \in I. (f_i \circ h \text{ ist } \mathcal{T}'\text{-}\mathcal{V}_i\text{-stetig})$

$\Leftrightarrow h$ ist \mathcal{T}' - \mathcal{T}_2 -stetig.

Wendet man diese Tatsache an mit $\langle X', \mathcal{T}' \rangle := \langle X, \mathcal{T}_1 \rangle$
und $h := \text{id}_X$, so folgt $\mathcal{T}_1 \supseteq \mathcal{T}_2$. Nimmt man
 $\langle X', \mathcal{T}' \rangle := \langle X, \mathcal{T}_2 \rangle$ und $h := \text{id}_X$, so folgt $\mathcal{T}_2 \supseteq \mathcal{T}_1$.

□

Mittels der Konstruktion der ersten Topologie hat
man erreicht eine gezielte Forderung von Einbettungen mit
domin X stetig zu machen. Es stellt sich die Frage,
ob dies auch für Einbettungen mit codomin X möglich
ist. Die Antwort ist "ja".

Proposition

Sei X eine Menge, $\langle Y_i, \mathcal{V}_i \rangle, i \in I$, topologische Räume, und $f_i: Y_i \rightarrow X$ Einbildungen. Dann existiert eine feinste Topologie \mathcal{I} auf X sodass jeder $f_i: Y_i \rightarrow X$ \mathcal{I} -stetig ist.

Beweis: Eine Topologie \mathcal{W} auf X hat genau dann die Eigenschaft dass alle $f_i: Y_i \rightarrow X$ \mathcal{W} -stetig sind, wenn

$$\mathcal{W} \subseteq \left\{ O \subseteq X \mid \forall i \in I. f_i^{-1}(O) \in \mathcal{V}_i \right\} =: \mathcal{I}$$

Nun bemerke, dass \mathcal{I} eine Topologie ist. Die Mengen \emptyset, X gehören offensichtlich zu \mathcal{I} . Da Urbilder mit Mengengenerationen verträglich sind, folgt dass \mathcal{I} unter Vereinigungen und endlichen Durchschnitten abgeschlossen ist.

□

Definition

Sei X eine Menge, $\langle Y_i, \mathcal{V}_i \rangle, i \in I$, topologische Räume, und $f_i: Y_i \rightarrow X$ Einbildungen. Die feinste Topologie auf X die alle f_i stetig macht heißt die **finale Topologie bzgl. der f_i** .

Analog wie bei initialen Topologien hat man eine Charakterisierung finaler Topologien mit einer universellen Abbildungseigenschaft.

Satz

Sei X eine Menge, $\langle Y_i, \mathcal{V}_i \rangle, i \in I$, topologische Räume, und $f_i: Y_i \rightarrow X$ Funktionen. Bezeichne mit \mathcal{T}_{fin} die finale Topologie auf X bzgl. der f_i , und sei \mathcal{T} eine Topologie auf X .

Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent.

$$(i) \quad \mathcal{T} = \mathcal{T}_{fin}$$

$$(ii) \quad \forall \langle Z, \mathcal{W} \rangle \text{ topologischer Raum, } g: X \rightarrow Z.$$

$$(g \text{ } \mathcal{T}\text{-}\mathcal{W}\text{-stetig} \Leftrightarrow \forall i \in I. g \circ f_i \text{ } \mathcal{V}_i\text{-}\mathcal{W}\text{-stetig})$$

Beweis:

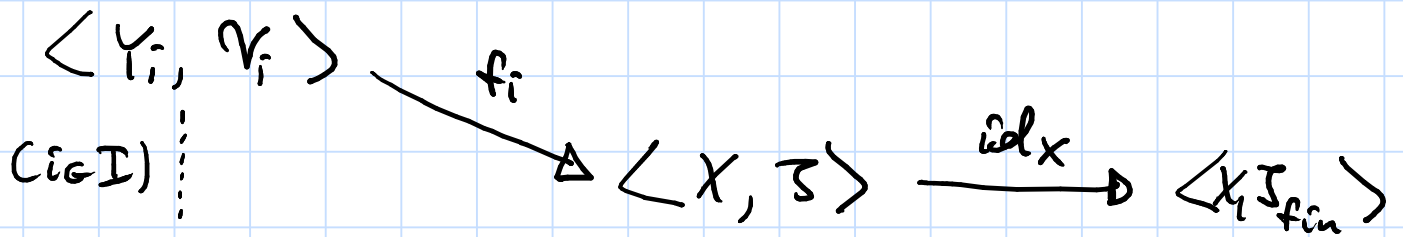
$$\triangleright (i) \Rightarrow (ii) \triangleleft$$

$\triangleright \triangleright$ " \Rightarrow ": f_i ist \mathcal{V}_i - \mathcal{T}_{fin} -stetig, und $g \circ f_i$ daher \mathcal{V}_i - \mathcal{W} -stetig.

$\triangleright \triangleright$ " \Leftarrow ": Sei $O \in \mathcal{W}$, dann gilt für alle $i \in I$ dass $f_i^{-1}(g^{-1}(O)) = (g \circ f_i)^{-1}(O) \in \mathcal{V}_i$. Also ist $g^{-1}(O) \in \mathcal{T}_{fin}$.

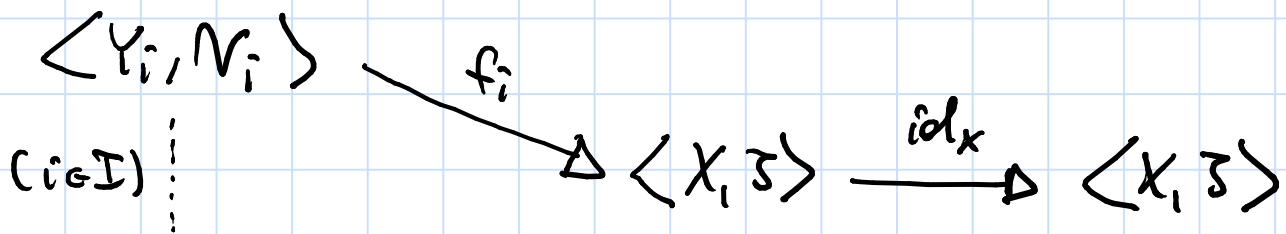
▷ (ii) ⇒ (i) ◁

▷▷ $\mathcal{I} \supseteq \mathcal{I}_{fin}$: Betrachte das Diagramm



Alle $id_X \circ f_i$ sind $\mathcal{V}_i - \mathcal{I}_{fin}$ -stetig, also ist id_X $\mathcal{I} - \mathcal{I}_{fin}$ -stetig.

▷▷ $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}_{fin}$: Betrachte das Diagramm



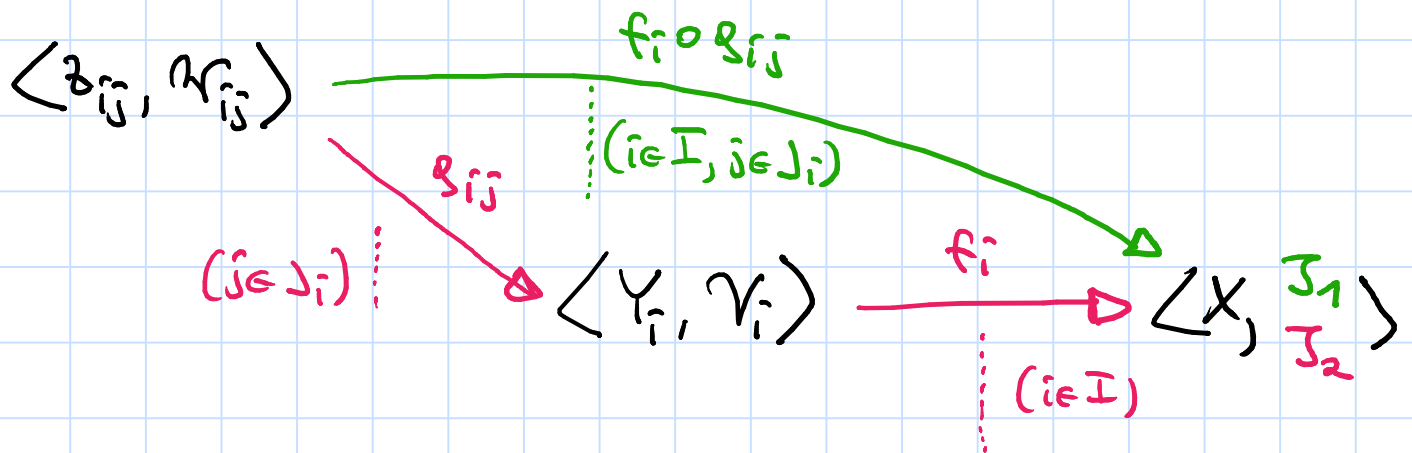
Die Funktion id_X ist $\mathcal{I} - \mathcal{I}$ -stetig, also sind alle $id_X \circ f_i$ $\mathcal{V}_i - \mathcal{I}$ -stetig.

□

Ebenso analog zu metrischen Topologien erhält man die Anzählbarkeitseigenschaft.

Proposition

Beachte eine Situation wie im folgenden Diagramm:



Dabei ist \mathcal{I}_1 die finale lgl. der $f_i \circ g_{ij}$, \mathcal{V}_i die finale lgl. der g_{ij} , und \mathcal{I}_2 die finale lgl. der f_i .
Dann gilt $\mathcal{I}_1 = \mathcal{I}_2$.

Beweis: Sei $\langle X', \mathcal{J}' \rangle$ ein topologischer Raum,
und $h: X \rightarrow X'$ eine Abbildung. Dann gilt:

h ist \mathcal{I}_1 - \mathcal{J}' -stetig

$\Leftrightarrow \forall i \in I, j \in J_i: h \circ (f_i \circ g_{ij})$ ist \mathcal{T}_{ij} - \mathcal{J}' -stetig

$\Leftrightarrow \forall i \in I: \left(\forall j \in J_i: (h \circ f_i) \circ g_{ij} \text{ ist } \mathcal{T}_{ij}\text{-}\mathcal{J}'\text{-stetig} \right)$

$\Leftrightarrow \forall i \in I: h \circ f_i$ ist \mathcal{W}_{ij} - \mathcal{V}_i -stetig

$\Leftrightarrow h$ ist \mathcal{I}_2 - \mathcal{J}' -stetig

□

Beispiel

Sei (X, \mathcal{I}) ein topologischer Raum, sei \sim eine Äquivalenzrelation auf X , und berechne

$$\pi: \begin{cases} X \rightarrow X/\sim \\ x \mapsto [x]_{\sim} \end{cases}$$

die kanonische Projektion. Die finale Topologie auf X bzgl. der elementarigen Familie $\{\pi\}$ heißt die **Faktor topologie** von \mathcal{I} auf X/\sim , und wir schreiben \mathcal{I}/\sim .
