

Komplexe Analysis

SS 2011

HARALD WORACEK

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Komplexe Zahlen und Funktionen	1
1.2	Kurvenintegrale	8
1.3	Topologie der Ebene	10
2	Der Analytizitätsbegriff	17
2.1	Äquivalente Bedingungen für Analytizität	17
2.2	Globale Versionen des Cauchy'schen Integralsatzes	24
2.3	Analytizität vs. Differenzierbarkeit im reellen	30
3	Eigenschaften analytischer Funktionen	33
3.1	Identitätssatz, Logarithmen	33
3.2	Der Satz vom logarithmischen Residuum	37
3.3	Das Maximumprinzip	40
3.4	Isolierte Singularitäten	44
3.5	Die Laurententwicklung	46
4	Lokal gleichmäßige Konvergenz	49
4.1	Der metrische Raum $C(G, X)$	49
4.2	Analytische und meromorphe Funktionen	53
4.3	Kompaktheit	58
4.4	Vorgegebene Nullstellen und Hauptteile	64
4.5	Der Riemannsche Abbildungssatz	71
4.6	Der Fundamental Normality Test	72
5	Riemannsche Flächen	77
5.1	Riemannsche Flächen und analytische Funktionen	77
5.2	Einige Sätze über analytische Funktionen	81
5.3	Die Riemannsche Fläche der Umkehrfunktion	82
6	Analytische Fortsetzung	87
6.1	Analytische Fortsetzung innerhalb von \mathbb{C}	87
6.2	Überlagerungen	89
6.3	Funktionskeime, Fortsetzung längs Wegen	93
6.4	Maximale analytische Fortsetzung	96

7	Werteverteilung und Wachstum	99
7.1	Die Poisson-Jensen Formel	99
7.2	Nevanlinna's 1 st Fundamental Theorem	105
7.3	Wachstum vs. Nullstellenverteilung	109
7.4	Der Produktsatz von Hadamard	112
7.5	Analytische Fouriertransformationen	115
	Literaturverzeichnis	123
	Index	125

Kapitel 1

Einleitung

Dieses Kapitel dient zur Wiederholung einiger Begriffe. Daher werden wir viele Aussagen nicht beweisen oder nur anschaulich motivieren.

1.1 Komplexe Zahlen und Funktionen

1.1.1 Der Körper \mathbb{C}

1.1.1 Definition. Setze $\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und definiere für $(x, y), (u, v) \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}(x, y) + (u, v) &:= (x + u, y + v), \\(x, y) \cdot (u, v) &:= (xu - yv, xv + yu), \\ \overline{(x, y)} &:= (x, -y), \\ d((x, y), (u, v)) &:= \sqrt{(x - u)^2 + (y - v)^2},\end{aligned}$$

Weiters setzen wir $0 := (0, 0)$, $1 := (1, 0)$, $i := (0, 1)$. Die Menge \mathbb{C} heißt der Körper der komplexen Zahlen. //

1.1.2 Satz. Es gilt:

- (i) Das Tupel $\langle \mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ ist ein algebraisch abgeschlossener Körper.
- (ii) Die reellen Zahlen \mathbb{R} sind, vermöge der Einbettung $x \mapsto (x, 0)$, ein Unterkörper von \mathbb{C} . Fasst man \mathbb{C} als \mathbb{R} -Vektorraum auf, so gilt $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$.
- (iii) Das Paar $\langle \mathbb{C}, d \rangle$ ist ein vollständiger metrischer Raum.
- (iv) Die Operationen $+: \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $\cdot: \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$-: \begin{cases} \mathbb{C} \times \mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ (z, w) & \mapsto & z - w \end{cases} \quad \cdot^{-1}: \begin{cases} \mathbb{C} \setminus \{0\} & \rightarrow & \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ z & \mapsto & z^{-1} \end{cases}$$

sind stetig.

- (v) Die komplexe Konjugation $(x, y) \mapsto \overline{(x, y)}$ ist ein stetiger Körperautomorphismus von \mathbb{C} der \mathbb{R} punktweise festläßt.

□

1.1.3 Bemerkung. Offenbar ist $\{1, i\}$ eine Basis von \mathbb{C} als \mathbb{R} -Vektorraum. Es läßt sich also jede komplexe Zahl z in eindeutiger Weise als

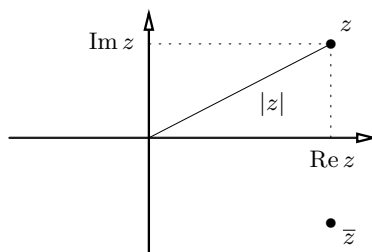
$$z = x \cdot 1 + y \cdot i = x + iy$$

mit gewissen $x, y \in \mathbb{R}$ anschreiben. Man bezeichnet x als den *Realteil* von z , und y als den *Imaginärteil* von z , und schreibt $x = \operatorname{Re} z, y = \operatorname{Im} z$. Weiters spricht man von \bar{z} als der zu z *konjugiert komplexen Zahl*. Schliesslich setzen wir

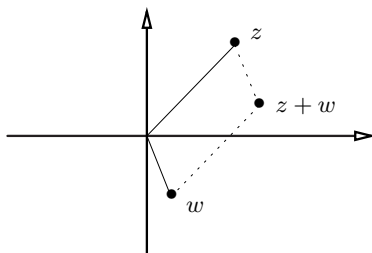
$$|z| := d(z, 0) = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}},$$

und bezeichnen $|z|$ als den *Betrag* der komplexen Zahl z . //

Veranschaulicht man \mathbb{C} als die Ebene $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, so spricht man von der *Gauß'schen Zahlenebene*:



Die algebraische Operation der Addition erhält man in diesem Bild wie folgt:



1.1.2 Differenzierbarkeit

1.1.4 Definition. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$, und $w \in G$. Dann heißt f *differenzierbar an der Stelle w* , wenn der Limes

$$\lim_{z \rightarrow w} \frac{f(z) - f(w)}{z - w}$$

in \mathbb{C} existiert*.

Ist f differenzierbar an der Stelle w , so bezeichnet man den Wert des obigen Limes mit $f'(w)$ und spricht von der *Ableitung* von f an der Stelle w . //

Wie für Funktionen einer reellen Veränderlichen zeigt man dass $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ an einer Stelle w genau dann differenzierbar ist, wenn es eine Zahl $\alpha \in \mathbb{C}$ und eine stetige Funktion $\rho : G \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\rho(w) = 0$ gibt, sodass

$$f(z) = f(w) + \alpha(z - w) + \rho(z)(z - w), \quad z \in G.$$

*Beachte hierbei, dass z innerhalb von G irgendwie gegen w streben darf, und nicht etwa an gewisse Geraden oder Kurven gebunden ist.

In diesem Fall ist $\alpha = f'(w)$. Offenbar ist eine an der Stelle w differenzierbare Funktion auch an der Stelle w stetig.

Es gelten die folgenden Rechenregeln.

1.1.5 Proposition. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f, g : G \rightarrow \mathbb{C}$, und $w \in G$. Weiters sei $\tilde{G} \subseteq \mathbb{C}$ offen mit $f(w) \in \tilde{G}$, und $h : \tilde{G} \rightarrow \mathbb{C}$. Sei vorausgesetzt, dass f und g beide differenzierbar an der Stelle w sind, und dass h differenzierbar an der Stelle $f(w)$ ist. Dann gilt:

(i) Die Funktionen $f + g$ und $f \cdot g$ sind an der Stelle w differenzierbar, und

$$(f + g)'(w) = f'(w) + g'(w), \quad (f \cdot g)'(w) = f'(w)g(w) + f(w)g'(w).$$

(ii) Ist $g(w) \neq 0$, so ist die Funktion $\frac{f}{g}$ auf einer Umgebung von w wohldefiniert, und der Stelle w differenzierbar, und

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(w) = \frac{f'(w)g(w) - f(w)g'(w)}{g(w)^2}.$$

(iii) Die Funktion $h \circ f$ ist an der Stelle w differenzierbar, und

$$(h \circ f)'(w) = h'(f(w)) \cdot f'(w).$$

□

1.1.3 Potenzreihen

Eine Reihe der Gestalt $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ mit $a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}_0$, heißt eine *Potenzreihe* mit *Anschlußstelle* z_0 .

1.1.6 Proposition. Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ eine Potenzreihe.

(i) Es existiert eine eindeutige Zahl $R \in [0, \infty]$, sodass diese Reihe für jedes $z \in U_R(z_0)$ konvergiert[†], und für jedes $z \in \mathbb{C} \setminus U_R(w)$ divergiert. Diese Zahl R heißt der *Konvergenzradius* der Potenzreihe $f(z)$.

(ii) Die Reihe $f(z)$ ist auf jeder kompakten Teilmenge der Kreisscheibe $U_R(z_0)$ absolut und gleichmäßig konvergent, und stellt daher auf $U_R(z_0)$ eine stetige Funktion dar. Man sagt, dass eine Potenzreihe auf ihrem Konvergenzkreis lokal gleichmäßig konvergiert.

(iii) Der Konvergenzradius der Potenzreihe $f(z)$ läßt sich aus den Koeffizienten a_n berechnen durch die Formel

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

□

Es ist eine interessante Beobachtung, dass die von einer Potenzreihe dargestellte Funktion differenzierbar ist.

[†]Wir bezeichnen stets mit $U_r(w)$ die offene Kreisscheibe mit Mittelpunkt w und Radius r , d.h. $U_r(w) := \{z \in \mathbb{C} : |z - w| < r\}$. Formal setzt man noch $U_\infty(w) := \mathbb{C}$.

1.1.7 Proposition. Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Dann ist f an jeder Stelle von $U_R(z_0)$ differenzierbar, und es gilt

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n (z - z_0)^{n-1}.$$

Beweis. Wegen der in Proposition 1.1.6, (iii), angegebenen Formel für den Konvergenzradius einer Potenzreihe, ist der Konvergenzradius der Reihe $g(z) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n n (z - z_0)^{n-1}$ ebenfalls gleich R .

Sei $w \in U_R(z_0)$. Dann gilt, für $z \in U_R(z_0)$, $z \neq w$,

$$\frac{f(z) - f(w)}{z - w} - g(w) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[\frac{(z - z_0)^n - (w - z_0)^n}{z - w} - n(z - w)^{n-1} \right],$$

und

$$\begin{aligned} \frac{(z - z_0)^n - (w - z_0)^n}{z - w} - n(z - w)^{n-1} &= \\ &= \begin{cases} 0 & , \quad n = 1 \\ (z - w) \sum_{k=1}^{n-1} k (w - z_0)^{k-1} (z - z_0)^{n-k-1}, & n \geq 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Sei $r := \max\{|z - z_0|, |w - z_0|\}$, dann gilt

$$\left| \frac{f(z) - f(w)}{z - w} - g(w) \right| \leq |z - w| \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| (n-1)^2 r^{n-2}.$$

Da $r < R$ ist, ist die Reihe auf der rechten Seite konvergent. Es folgt

$$\lim_{z \rightarrow w} \left(\frac{f(z) - f(w)}{z - w} - g(w) \right) = 0.$$

□

1.1.8 Korollar. Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Dann ist f in $U_R(z_0)$ beliebig oft differenzierbar, und es gilt

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n n(n-1) \cdots (n-k+1) (z - z_0)^{n-k}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Insbesondere ist

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (1.1.1)$$

Wir sehen dass die Taylorreihe von f gleich $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ ist, insbesondere wird f durch seine Taylorreihe dargestellt.

Beweis. Die erste Behauptung folgt mittels vollständiger Induktion, die Formel (1.1.1) dann durch einsetzen von $z = z_0$. □

1.1.4 Die Exponentialfunktion

Zitat

This is the most important function in mathematics. It is defined, for every complex z , by the formula

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}. \quad (1.1.2)$$

Um diese Definition zu rechtfertigen beachte man, daß die Reihe (1.1.2) Konvergenzradius ∞ hat. Auf Grund der absoluten Konvergenz ist die folgende Umformung gerechtfertigt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b^m}{m!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} a^k b^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+b)^n}{n!}.$$

Es gilt also das *Additionstheorem*

$$\exp(a) \cdot \exp(b) = \exp(a+b).$$

Wir definieren eine Zahl e durch

$$e := \exp(1).$$

Diese Zahl heißt *Eulersche Zahl*.

1.1.9 *Bemerkung.* Es ist $\exp(0) = 1$. Wegen dem Additionstheorem gilt

$$\exp(x) = e^x, \quad x \in \mathbb{Z}.$$

//

1.1.10 Satz. *Es gilt:*

(i) *Für jedes z gilt $\exp(z) \neq 0$.*

(ii) *Es ist*

$$\exp'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp(z+h) - \exp(z)}{h} = \exp(z).$$

Beachte nochmals, daß in diesem Limes $h \in \mathbb{C}$ (!) gegen Null strebt.

(iii) *Die Funktion $\exp(z)$ eingeschränkt auf die reelle Achse ist eine monotone positive Funktion. Es gilt*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0.$$

(iv) *Es existiert genau eine positive reelle Zahl, wir bezeichnen sie mit π , sodaß*

$$\exp(i\pi) + 1 = 0$$

gilt, und sodaß $\exp(z) = 1$ ist genau dann wenn $z \in 2\pi i \cdot \mathbb{Z}$.

(v) $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist eine periodische Funktion mit Periode $2\pi i$, d.h.

$$\exp(z + 2\pi i) = \exp(z), \quad z \in \mathbb{C}.$$

(vi) Die Abbildung $t \mapsto \exp(it)$ bildet die reelle Achse surjektiv auf die Einheitskreislinie ab.

(vii) Ist $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, so existiert $z \in \mathbb{C}$ mit $w = \exp(z)$.

□

Wir werden im folgenden anstelle von $\exp(z)$ auch oft die abkürzende Schreibweise (!) $\exp(z) =: e^z$ verwenden.

Aus der Exponentialfunktion erhält man auch die *Cosinus-* bzw. *Sinusfunktion*. Diese sind, in gewissen Sinne, „Real-“ und „Imaginärteil“ von $\exp(iz)$. Definiere

$$\begin{aligned} \cos z &:= \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \\ \sin z &:= \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

Beachte, dass gilt

$$\cos z + i \sin z = \exp(iz).$$

1.1.5 Polarkoordinaten

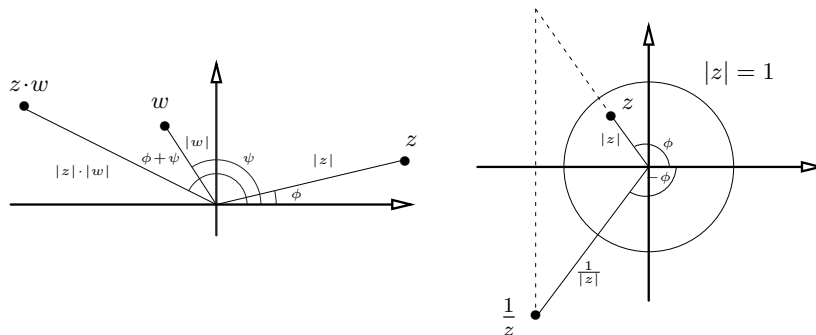
Betrachte die Abbildung

$$\Phi : \begin{cases} [0, \infty) \times \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{C} \\ (r, \varphi) & \mapsto r \cos \varphi + ir \sin \varphi = re^{i\varphi} \end{cases}$$

Diese ist surjektiv. Ist I irgendein halboffenes Intervall der Länge 2π , so ist $\Phi|_{(0, \infty) \times I}$ eine Bijektion von $(0, \infty) \times I$ auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Man spricht von der Darstellung der komplexen Zahlenebene durch *Polarkoordinaten* mit einem Argument in I .

Ist $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $(r, \varphi) \in \Phi^{-1}(\{z\})$, so gilt $r = |z|$. Man bezeichnet φ als *Argument* der komplexen Zahl z und schreibt $\varphi = \arg z$. Diese Schreibweise ist eigentlich irreführend, denn der Wert von φ ist durch z nur bis auf ganzzahlige Vielfache von 2π bestimmt, „arg“ ist also keine (!) Funktion.

Die algebraische Operation der Multiplikation läßt sich in Polarkoordinaten wie folgt interpretieren.

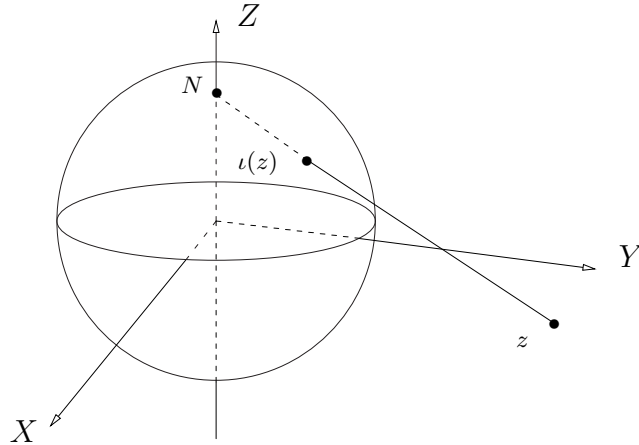


1.1.6 Die Riemannsche Zahlenkugel

Betrachte die Einheitssphäre im \mathbb{R}^3 :

$$\mathbb{S}^2 := \{(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3 : X^2 + Y^2 + Z^2 = 1\},$$

und definiere eine Abbildung $\iota : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{S}^2$ wie folgt:



D.h. man betrachte die komplexe Zahl z als Punkt in der (X, Y) -Ebene, und schneide die Gerade durch die Punkte $N = (0, 0, 1)$ und z mit $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$. Dann erhält man genau einen Punkt und dieser sei $\iota(z)$. In Formeln schreibt sich ι als ($x := \operatorname{Re} z$, $y := \operatorname{Im} z$)

$$X = \frac{2x}{1 + x^2 + y^2}, \quad Y = \frac{2y}{1 + x^2 + y^2}, \quad Z = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1}.$$

Die Abbildung ι ist eine Bijektion von \mathbb{C} auf $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$. Ihre Inverse $\sigma = \iota^{-1} : \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *stereographische Projektion*.

Sei $d_{\mathbb{R}^3} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow [0, \infty)$ die euklidische Metrik am \mathbb{R}^3 , d.h.

$$d_{\mathbb{R}^3}((X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2)) := \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2}$$

Dann ist $\langle \mathbb{S}^2, d_{\mathbb{R}^3} \rangle$ ein kompakter metrischer Raum.

Die Abbildung ι ist ein Homöomorphismus von $\langle \mathbb{C}, d \rangle$ auf $\langle \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}, d_{\mathbb{R}^3} \rangle$. Achtung: ι ist sogar gleichmäßig stetig, nicht (!) jedoch σ . Definiert man

$$\chi(z, w) := d_{\mathbb{R}^3}(\iota(z), \iota(w)), \quad z, w \in \mathbb{C},$$

so erhält man also eine Metrik auf \mathbb{C} die die gleiche Topologie erzeugt wie d , aber nicht zu d äquivalent ist. Man bezeichnet χ als *chordale Metrik* auf \mathbb{C} . Explizit ist χ gegeben als

$$\chi(z, w) = \frac{2|z - w|}{\sqrt{1 + |z|^2} \sqrt{1 + |w|^2}}.$$

Wir werden oft \mathbb{C} vermöge ι als Teilmenge von \mathbb{S}^2 betrachten. Um bequemlichkeitshalber die Einbettung ι notationell zu unterdrücken, definieren wir

$$\mathbb{C}_\infty := \mathbb{C} \cup \{\infty\},$$

wobei „ ∞ “ ein formales Element ist, das nicht zu \mathbb{C} gehört. Setzt man nun χ fort auf \mathbb{C}_∞ durch

$$\chi(z, \infty) := d_{\mathbb{R}^3}(\iota(z), N), \quad \chi(\infty, \infty) := 0,$$

so ist die Abbildung $\lambda : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{S}^2$

$$\lambda(z) := \begin{cases} \iota(z), & z \in \mathbb{C} \\ N, & z = \infty \end{cases}$$

eine Isometrie von $\langle \mathbb{C}_\infty, \chi \rangle$ auf $\langle \mathbb{S}^2, d_{\mathbb{R}^3} \rangle$.

1.2 Kurvenintegrale

Sei $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$. Eine *Partition* des Intervalls $[a, b]$ ist eine endliche Menge $\{t_0, \dots, t_n\} \subseteq [a, b]$ mit $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$. Die Menge aller Partitionen von $[a, b]$ bezeichnen wir mit \mathcal{P} .

1.2.1 Definition. Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Dann heißt

$$V(\gamma) := \sup_{\{t_0, \dots, t_n\} \in \mathcal{P}} \sum_{i=1}^n |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| \in [0, \infty]$$

die *Totalvariation* von γ . Ist $V(\gamma) < \infty$, so heißt γ von *beschränkter Variation*. //

Man bezeichnet oft auch $V(\gamma)$ als „Länge von γ “ und nennt γ *rektifizierbar* wenn $V(\gamma) < \infty$. Dies motiviert sich daraus, dass $V(\gamma)$ offenbar das Supremum aller der Kurve γ eingeschriebenen Polygonzüge ist.

Ist $P = \{t_0, \dots, t_n\}$ eine Partition von $[a, b]$, so bezeichne $\nu(P)$ die Zahl

$$\nu(P) := \max |t_i - t_{i-1}|.$$

Man nennt $\nu(P)$ auch die *Feinheit der Partition*.

Seien nun $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ und $P = \{t_0, \dots, t_n\} \in \mathcal{P}$ gegeben. Weiters sei $Z = \{u_1, \dots, u_n\} \subseteq [a, b]$ mit $u_i \in [t_{i-1}, t_i]$, man spricht auch von einer Menge von Zwischenstellen. Die *Riemannsche Zwischensumme* ist

$$S(f, g, P, Z) := \sum_{i=1}^n f(u_i)(g(t_i) - g(t_{i-1})).$$

1.2.2 Satz. Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, f stetig, g von beschränkter Variation. Dann existiert der Limes

$$\lim_{\substack{P \in \mathcal{P} \\ \nu(P) \rightarrow 0}} S(f, g, P, Z) =: \int_a^b f dg$$

gleichmäßig bezüglich der Zwischenstellen Z . Explizit heißt das

$$\begin{aligned} \exists A \in \mathbb{C} \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall P \in \mathcal{P} \quad \forall Z \text{ Zwischenstellen für } P : \\ \nu(P) < \delta \implies |S(f, g, P, Z) - A| < \epsilon. \end{aligned}$$

Man bezeichnet $\int_a^b f dg$ als das Riemann-Stieltjes Integral von f nach g . □

1.2.3 Bemerkung. Die Menge \mathcal{P} ist eine gerichtete Menge mit der mengentheoretischen Inklusion. Es existiert der Limes $\lim_{\nu(P) \rightarrow 0} S(f, g, P, Z)$ genau dann wenn der Limes $\lim_{P \in (\mathcal{P}, \subseteq)} S(f, g, P, Z)$ existiert und in diesem Fall sind die beiden gleich. //

Wir stellen einige Eigenschaften von Integralen zusammen. Dabei setzen wir voraus, dass alle auftretenden Ausdrücke existieren:

$$(i) \int_a^b f dg = \int_a^c f dg + \int_c^b f dg$$

$$(ii) \int_a^b (f+h) dg = \int_a^b f dg + \int_a^b h dg, \quad \int_a^b (\lambda f) dg = \lambda \int_a^b f dg.$$

$$(iii) \left| \int_a^b f dg \right| \leq \|f\|_{\infty} V(g), \text{ wobei } \|f\|_{\infty} := \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|.$$

$$(iv) \text{ Ist } f_n \rightarrow f \text{ gleichmäßig auf } [a, b], \text{ so folgt } \int_a^b f_n dg \rightarrow \int_a^b f dg.$$

$$(v) \text{ Ist } g \text{ stückweise stetig differenzierbar, so ist } g \text{ von beschränkter Variation und es gilt } \int_a^b f dg = \int_a^b f(t) g'(t) dt.$$

1.2.4 Definition. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen. Eine stetige Abbildung $\gamma : [0, 1] \rightarrow G$ heißt ein *Weg in G* . Er heißt *rektifizierbar*, wenn $V(\gamma) < \infty$ ist. Weiters heißt der Weg γ *geschlossen*, wenn $\gamma(0) = \gamma(1)$ ist.

Ist γ ein rektifizierbarer Weg in G und ist $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ stetig, so heißt

$$\int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta := \int_0^1 (f \circ \gamma) d\gamma$$

das *Kurvenintegral* von f längs γ . //

1.2.5 Beispiel. Sei $\gamma(t) := e^{2\pi i t}$, $t \in [0, 1]$, also $\gamma([0, 1])$ die Einheitskreislinie, die von $\gamma(t)$ einmal in positiver Richtung durchlaufen wird. Sei $f(z) := z^n$ mit $n \in \mathbb{Z}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} z^n dz &= \int_0^1 e^{2\pi i n t} 2\pi i e^{2\pi i t} dt = 2\pi i \int_0^1 e^{2\pi i(n+1)t} dt = \\ &= \begin{cases} 2\pi i \frac{e^{2\pi i(n+1)t}}{2\pi i(n+1)} \Big|_0^1, & n \neq -1 \\ 2\pi i, & n = -1 \end{cases} = \begin{cases} 0, & n \neq -1 \\ 2\pi i, & n = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

//

1.2.6 Bemerkung. Wir treffen zwei notationelle Vereinbarungen.

- (i) Ist γ ein geschlossener rektifizierbarer Weg der ein gewisses Gebiet D berandet, so verwendet man auch das Symbol $\oint_{\partial D}$ anstelle von \int_{γ} . Wir gehen nicht näher auf die (äußerst komplexe) Frage ein was es eigentlich

bedeutet dass γ das Gebiet D berandet, bzw. dass D innerhalb von γ liegt. Wir verwenden das Symbol $\oint_{\partial D}$ nur für Kreisscheiben oder Dreiecke, wo es in offensichtlicher Weise zu interpretieren ist.

Zum Beispiel wäre für $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, also $\oint_{\partial D} f(\zeta) d\zeta = \int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta$ mit dem Weg $\gamma(t) := e^{2\pi i t}$, $t \in [0, 1]$.

- (ii) Sind $a, b \in \mathbb{C}$, so schreiben wir $\int_{[a,b]} f(\zeta) d\zeta$ für das Integral von f längs der Strecke von a nach b , also für $\int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta$ mit dem Weg $\gamma(t) := (1-t)a + tb$, $t \in [0, 1]$.

//

1.2.7 Bemerkung. Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ stetig, $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ von beschränkter Variation und $\epsilon > 0$ gegeben. Dann existiert eine Funktion $\hat{g} : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ mit den folgenden Eigenschaften:

(i) \hat{g} ist stetig differenzierbar;

(ii) $\|g - \hat{g}\|_{\infty} < \epsilon$;

(iii)

$$\left| \int_a^b f dg - \int_a^b f d\hat{g} \right| < \epsilon.$$

Tatsächlich wähle man eine hinreichend feine Partition $\{t_0, \dots, t_n\}$ und wähle für \hat{g} den entsprechenden Polygonzug durch die Punkte $g(t_i)$, $i = 0, \dots, n$, mit „geglätteten Ecken“.

Wir begnügen uns mit dieser Anschauung; explizite Formeln kann man zum Beispiel genauso finden wie man C^∞ -Zerlegungen der Eins konstruiert. //

Wir erinnern noch an den Begriff der Stammfunktion, und seine Bedeutung zur Berechnung von Kurvenintegralen.

1.2.8 Definition. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen, und $f, F : G \rightarrow \mathbb{C}$. Ist F an jeder Stelle differenzierbar und gilt $F'(z) = f(z)$, $z \in G$, so heißt F eine *Stammfunktion* von f auf G . //

1.2.9 Satz. Sei $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und $\gamma : [0, 1] \rightarrow G$ ein rektifizierbarer Weg in G . Ist $F : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine Stammfunktion von f , so gilt

$$\int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)).$$

□

1.3 Topologie der Ebene

1.3.1 Zusammenhang

1.3.1 Definition. Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum, und sei $G \subseteq X$.

- (i) G heißt *zusammenhängend* wenn gilt: Sind $A, B \subseteq G$ bezüglich der Spurtopologie offen, und ist $A \cap B = \emptyset$ und $A \cup B = G$, so folgt dass entweder $A = G$ oder $B = G$ ist.

- (ii) Wieder nennen wir eine stetige Abbildung $\gamma : [0, 1] \rightarrow G$ einen *Weg in G* . Ebenso nennen wir wieder den Weg γ *geschlossen*, wenn $\gamma(0) = \gamma(1)$ ist.
- (iii) G heißt *bogenweise zusammenhängend*, wenn es für je zwei Punkte $z, w \in G$ einen Weg γ in G gibt, mit $z = \gamma(0)$ und $w = \gamma(1)$.
- (iv) (X, \mathcal{T}) heißt *lokal bogenweise zusammenhängend*, wenn die Topologie \mathcal{T} eine Basis aus bogenweise zusammenhängenden Mengen besitzt.

//

Es ist natürlich völlig irrelevant, dass wir als Definitionsbereich eines Weges das Intervall $[0, 1]$ verwenden. Man kann genauso irgendwelche Intervalle $[\alpha, \beta]$ mit $\alpha < \beta$ zulassen. Triviales Beispiel für einen Weg wäre ein konstanter Weg der in einem Punkt x_0 von G sitzenbleibt, d.h. die stetige Funktion $\gamma(t) := x_0$, $t \in [0, 1]$.

1.3.2 Lemma. *Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum, und $G \subseteq X$. Ist G bogenweise zusammenhängend, so ist G auch zusammenhängend. Ist X lokal bogenweise zusammenhängend und G offen, so gilt auch die Umkehrung.*

Beweis. Für die erste Behauptung sei indirekt angenommen dass $G = A \cup B$ mit $A, B \subseteq G$ offen, disjunkt und nichtleer. Wähle $x \in A, y \in B$, und einen Weg γ in G mit $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$. Dann sind $\gamma^{-1}(A), \gamma^{-1}(B) \subseteq [0, 1]$ offen, disjunkt, nichtleer, und überdecken $[0, 1]$. Ein Widerspruch, da das Intervall $[0, 1]$ zusammenhängend ist.

Für die Umkehrung sei eine zusammenhängende Teilmenge G gegeben. Ist $G = \emptyset$, so ist G trivialerweise bogenweise zusammenhängend. Sei also $G \neq \emptyset$. Wähle $z_0 \in G$, und betrachte die Menge

$$M := \{z \in G : \exists \text{ Weg } \gamma \text{ in } G \text{ mit } \gamma(0) = z_0, \gamma(1) = z\}.$$

Wir zeigen zunächst die folgende Aussage: Jede offene und bogenweise zusammenhängende Menge die mit M nichtleeren Schnitt hat und die in G liegt, ist bereits ganz in M enthalten. Dazu sei $U \subseteq G$ offen und bogenweise zusammenhängend und $z \in M \cap U$ gegeben. Wähle einen Weg γ in G der z_0 mit z verbindet. Für $w \in U$ wähle einen Weg $\hat{\gamma}$ in U der z mit w verbindet. Der Weg den man erhält, wenn man zuerst γ und danach $\hat{\gamma}$ entlangläuft, verläuft dann ganz in G und verbindet z_0 mit w . Also haben wir $w \in M$.

Sei nun $z \in M$. Da G offen und X lokal bogenweise zusammenhängend ist, existiert eine offene und bogenweise zusammenhängende Menge U mit $z \in U \subseteq G$. Nach dem eben gezeigten, folgt $U \subseteq M$. Wir schliessen, dass M offen ist. Sei $z \in G \setminus M$, und wähle wieder U offen und bogenweise zusammenhängend mit $z \in U \subseteq G$. Nach dem oben gezeigten, folgt $U \cap M = \emptyset$, also $U \subseteq G \setminus M$. Wir schliessen, dass auch $G \setminus M$ offen ist. Da G zusammenhängend ist, und $M \neq \emptyset$, folgt dass $G \setminus M = \emptyset$. \square

1.3.3 Definition. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$.

- (i) G heißt ein *Gebiet*, wenn G offen und zusammenhängend ist.
- (ii) G heißt *sternförmig*, wenn es einen Punkt $z_0 \in G$ gibt sodass für jedes $z \in G$ die gesamte Verbindungsstrecke $[z, z_0] = \{(1-t)z + tz_0 : t \in [0, 1]\}$ liegt. Einen Punkt mit dieser Eigenschaft nennt man auch *Sternmittelpunkt* von G .

- (iii) G heißt *konvex* wenn mit je zwei Punkte z, w aus G auch die gesamte Verbindungsstrecke $[z, w]$ in G liegt.

//

1.3.4 Bemerkung.

- (i) Eine sternförmige Teilmenge G von \mathbb{C} ist bogenweise zusammenhängend. Denn sei z_0 ein Sternmittelpunkt von G . Dann ist für jedes $z \in G$ die Strecke $\gamma(t) := (1-t)z + tz_0$, $t \in [0, 1]$, ein Weg in G der z mit dem Sternmittelpunkt z_0 verbindet. Sind nun $z, w \in G$, so erhält man einen Weg in G der z mit w verbindet indem man zuerst die Strecke von $[z, z_0]$ und dann die Strecke $[z_0, w]$ durchläuft.
- (ii) Jede nichtleere konvexe Teilmenge von \mathbb{C} ist sternförmig. Denn man kann jeden beliebigen Punkt aus G als Sternmittelpunkt verwenden.
- (iii) Der Raum \mathbb{C} , und damit jede offene Teilmenge von \mathbb{C} mit der Spurtopologie, ist lokal bogenweise zusammenhängend. Denn Kreisscheiben bilden eine Umgebungsbasis und sind konvex.
- (iv) Jedes Gebiet ist bogenweise zusammenhängend.

//

1.3.5 Lemma. Sei G ein Gebiet, und seien $z_0, z_1 \in G$. Dann existiert ein rektifizierbarer Weg $\gamma : [0, 1] \rightarrow G$ mit $\gamma(0) = z_0, \gamma(1) = z_1$.

Beweis. Da G bogenweise zusammenhängend ist, existiert ein Weg $\hat{\gamma} : [0, 1] \rightarrow G$ mit $\hat{\gamma}(0) = z_0$ und $\hat{\gamma}(1) = z_1$. Setze $r := d(\hat{\gamma}([0, 1]), \mathbb{C} \setminus G)$. Da $\hat{\gamma}([0, 1])$ kompakt ist, ist $r > 0$. Weiters existieren, wieder da $\hat{\gamma}([0, 1])$ kompakt ist, $t_1, \dots, t_n \in [0, 1]$ sodass

$$\begin{aligned} z_0 &= \hat{\gamma}(0) \in U_r(\hat{\gamma}(t_1)), \\ U_r(\hat{\gamma}(t_k)) \cap U_r(\hat{\gamma}(t_{k+1})) &\neq \emptyset, \quad k = 1, \dots, n-1, \\ z_1 &= \hat{\gamma}(1) \in U_r(\hat{\gamma}(t_n)). \end{aligned}$$

Wähle $w_k \in U_r(\hat{\gamma}(t_k)) \cap U_r(\hat{\gamma}(t_{k+1}))$, dann liegt der Polygonzug

$$\gamma := \overline{z_0 w_1 \hat{\gamma}(t_2) w_2 \hat{\gamma}(t_3) w_3 \cdots \hat{\gamma}(t_{n-1}) w_{n-1} z_1}$$

ganz in G . □

1.3.2 Homotopie

1.3.6 Definition. Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum, und sei $G \subseteq X$.

- (i) Seien γ_0, γ_1 Wege in G . Dann heißen γ_0 und γ_1 *homotop in G* , wenn es eine stetige Abbildung $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow G$ gibt mit

$$H(t, 0) = \gamma_0(t), \quad t \in [0, 1] \quad \text{und} \quad H(t, 1) = \gamma_1(t), \quad t \in [0, 1].$$

Man bezeichnet in diesem Fall eine Abbildung H mit den geforderten Eigenschaften als eine *Homotopie in G* zwischen γ_0 und γ_1 in G . Manchmal spricht man von den Wegen $\gamma_s(t) := H(t, s)$, $s \in (0, 1)$, als *Zwischenwege*.

- (ii) Seien γ_0, γ_1 Wege in G die den gleichen Anfangspunkt sowie den gleichen Endpunkt haben, d.h. mit

$$\gamma_0(0) = \gamma_1(0) \quad \text{und} \quad \gamma_0(1) = \gamma_1(1).$$

Dann heißen γ_0 und γ_1 *FEP-homotop in G* (Fixed-EndPoint-homotopic), wenn es eine Homotopie H in G zwischen γ_0 und γ_1 in G gibt sodass auch alle Zwischenwege den entsprechenden Anfangs- bzw. Endpunkt haben, d.h. sodass

$$H(0, s) = \gamma_0(0), \quad H(1, s) = \gamma_0(1), \quad s \in [0, 1].$$

Man spricht von einer solchen Homotopie H dann als *FEP-Homotopie*.

- (iii) Zwei geschlossene Wege γ_0, γ_1 in G heißen *loop-homotop in G* , wenn es eine Homotopie H in G zwischen γ_0 und γ_1 in G gibt sodass auch alle Zwischenwege geschlossen sind, d.h. sodass

$$H(0, s) = H(1, s), \quad s \in [0, 1].$$

Man spricht von einer solchen Homotopie H dann als *loop-Homotopie*.

- (iv) Ein geschlossener Weg heißt *nullhomotop in G* , wenn er loop-homotop in G zu einem konstanten Weg ist.
- (v) Eine Teilmenge $G \subseteq X$ heißt *einfach zusammenhängend*, wenn G zusammenhängend ist, und jeder geschlossene Weg in G nullhomotop in G ist.

//

Man kann leicht zeigen, dass ein geschlossener Weg genau dann nullhomotop ist, wenn er sogar FEP-homotop zu einem konstanten Weg ist.

1.3.7 Beispiel. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ sternförmig. Dann ist G einfach zusammenhängend. Denn zunächst ist G , wie in Bemerkung 1.3.4 gesagt, zusammenhängend. Sei nun γ ein geschlossener Weg in G . Wähle einen Sternmittelpunkt z_0 von G , dann ist die Abbildung

$$H : \begin{cases} [0, 1] \times [0, 1] & \rightarrow G \\ (t, s) & \mapsto (1-s)\gamma(t) + sz_0 \end{cases}$$

eine loop-Homotopie in G von γ zu dem konstanten Weg mit Bildpunkt z_0 . //

1.3.3 Umlaufzahl und Homologie

1.3.8 Definition. Sei γ ein rektifizierbarer geschlossener Weg in \mathbb{C} . Weiters sei $w \in \mathbb{C} \setminus \gamma([0, 1])$. Dann heißt

$$n(\gamma, w) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - w}$$

die *Umlaufzahl von γ um w* . //

1.3.9 Satz. Sei γ ein rektifizierbarer geschlossener Weg in \mathbb{C} . Dann gilt:

(i) Für jedes $w \in \mathbb{C} \setminus \gamma([0, 1])$, ist $n(\gamma, w)$ eine ganze Zahl.

(ii) Die Funktion

$$n(\gamma, \cdot) : \begin{cases} \mathbb{C} \setminus \gamma([0, 1]) & \rightarrow \mathbb{Z} \\ w & \mapsto n(\gamma, w) \end{cases}$$

ist stetig.

(iii) Die Funktion $n(\gamma, \cdot)$ ist auf jeder Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus \gamma([0, 1])$ konstant.

(iv) Auf der unbeschränkten Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus \gamma([0, 1])$ hat $n(\gamma, \cdot)$ den Wert 0.

Beweis. Sei $w \in \mathbb{C} \setminus \gamma([0, 1])$ gegeben.

Wir betrachten zuerst den Fall, dass γ stetig differenzierbar ist. Sei $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ die Funktion

$$g(t) := \int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - w} ds.$$

Dann ist g stetig differenzierbar und es gilt $g(0) = 0$, $g(1) = \int_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - w}$, $g'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - w}$. Es folgt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(e^{-g(t)} (\gamma(t) - w) \right) &= -g'(t) e^{-g(t)} (\gamma(t) - w) + e^{-g(t)} \gamma'(t) = \\ &= e^{-g(t)} \left[-\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - w} (\gamma(t) - w) + \gamma'(t) \right] = 0, \end{aligned}$$

und daher dass $e^{-g(t)} (\gamma(t) - w)$ konstant für $t \in [0, 1]$ ist. Wegen $\gamma(0) = \gamma(1)$ folgt

$$1 = e^{-g(0)} = e^{-g(1)} = \exp \left(- \int_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - w} \right).$$

Also ist $\int_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - w} \in 2\pi i \cdot \mathbb{Z}$.

Sei nun γ irgendein rektifizierbarer geschlossener Weg. Nach Bemerkung 1.2.7 existiert eine Folge γ_n von geschlossenen stetig differenzierbaren Wegen mit $w \notin \gamma_n$, $n \in \mathbb{N}$, und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma_n} \frac{d\zeta}{\zeta - w} = \int_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - w}.$$

Es folgt dass $\int_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - w} \in 2\pi i \cdot \mathbb{Z}$.

Wir zeigen dass $n(\gamma, \cdot) : \mathbb{C} \setminus \gamma([0, 1]) \rightarrow \mathbb{Z}$ stetig ist. Sei $w_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma([0, 1])$, und setze $r := d(\gamma([0, 1]), w_0)$. Sei $0 < \delta < \frac{r}{2}$, dann gilt für $|w - w_0| < \delta$

$$2\pi |n(\gamma, w) - n(\gamma, w_0)| = \left| \int_{\gamma} \left(\frac{1}{\zeta - w} - \frac{1}{\zeta - w_0} \right) d\zeta \right| =$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \int_{\gamma} \frac{w - w_0}{(\zeta - w)(\zeta - w_0)} d\zeta \right| \leq \sup_{t \in [0,1]} \left| \frac{w - w_0}{(\gamma(t) - w)(\gamma(t) - w_0)} \right| \cdot V(\gamma) \leq \\
&\leq \delta \frac{2}{r^2} V(\gamma).
\end{aligned}$$

Ist nun G eine Komponente von $\mathbb{C} \setminus \gamma([0, 1])$, so ist $\{n(\gamma, w) : w \in G\}$ eine zusammenhängende Teilmenge von $2\pi i \cdot \mathbb{Z}$ und besteht daher aus nur einem Punkt, d.h. $n(\gamma, \cdot)$ ist konstant auf G .

Ist G die unbeschränkte Komponente von $\mathbb{C} \setminus \gamma([0, 1])$, so existiert $R > 0$ sodaß $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\} \subseteq G$. Sei $|w| > R$, dann ist $d(\gamma([0, 1]), w) > |w| - R$, und wir erhalten

$$\begin{aligned}
2\pi |n(\gamma, w)| &= \left| \int_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - w} \right| \leq \sup_{t \in [0,1]} \left| \frac{1}{\gamma(t) - w} \right| \cdot V(\gamma) \leq \\
&\leq \frac{1}{|w| - R} V(\gamma).
\end{aligned}$$

Für $|w| \rightarrow \infty$ folgt $n(\gamma, w) \rightarrow 0$ und, da $n(\gamma, w)$ konstant auf G ist, $n(\gamma, w) = 0$ für alle $w \in G$. \square

1.3.10 Definition. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen.

- (i) Seien $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ geschlossene rektifizierbare Wege in G . Dann sagen wir $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ sind (gemeinsam) *nullhomolog in G* , wenn

$$\sum_{j=1}^n n(\gamma_j, w) = 0, \quad w \in \mathbb{C} \setminus G.$$

- (ii) G heißt *homolog einfach zusammenhängend*, wenn G zusammenhängend ist und jeder geschlossene rektifizierbare Weg in G nullhomolog in G ist.

//

Kapitel 2

Der Analytizitätsbegriff

2.1 Äquivalente Bedingungen für Analytizität

Nun kommen wir zur dem für diese Vorlesung zentralen Begriff der Analytizität.

2.1.1 Definition. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$. Ist f an jeder Stelle von G differenzierbar, so heißt f *analytisch in G* . Wir bezeichnen die Menge aller in G analytischen Funktion als $H(G)$. //

An Stelle der Bezeichnung „analytisch“ wird in der Literatur oft auch *holomorph* oder *regulär* verwendet.

2.1.2 Bemerkung. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen.

- (i) Die Menge $H(G)$ ist, mit den punktweise erklärten algebraischen Operationen, eine kommutative \mathbb{C} -Algebra. Sie besitzt ein Einselement, nämlich die konstante Funktion 1. Die Einheitengruppe $H(G)^* := \{f \in H(G) : \exists g \in H(G) : fg = 1\}$ ist gegeben als

$$H(G)^* = \{f \in H(G) : f(w) \text{ nullstellenfrei}\}.$$

- (ii) Analytizität ist (naturgemäß) eine lokale Eigenschaft, d.h.: Eine Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ ist genau dann in G analytisch, wenn jeder Punkt $w \in G$ eine offene Umgebung U_w besitzt, sodass $f|_{U_w}$ in U_w analytisch ist.
- (iii) Eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius ist in ihrem Konvergenzkreis analytisch. Insbesondere ist jede Polynomfunktion in ganz \mathbb{C} analytisch.

//

Es ist eine –um nicht zu sagen die (!)– Grundlage der Funktionentheorie, dass sich Analytizität durch Bedingungen von verschiedenstem Typ charakterisieren lässt.

2.1.3 Satz. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen, und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$. Dann sind äquivalent:

- (CIF1) Für jeden Punkt $w \in G$ gibt es einen Radius $r > 0$, sodass die abgeschlossene Kreisscheibe $\overline{U_r(w)}$ ganz in G liegt und f sich in

dem Inneren dieser Kreisscheibe darstellen lässt als

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial U_r(w)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in U_r(w). \quad (2.1.1)$$

- (PR1) Für jeden Punkt $w \in G$ gibt es eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-w)^n$ mit Konvergenzradius $R > 0$, und einen Radius $r \in (0, R]$, sodass die Kreisscheibe $U_r(w)$ ganz in G liegt und f sich auf dieser Kreisscheibe darstellen lässt als

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-w)^n, \quad z \in U_r(w).$$

- (DIFF1) Die Funktion f ist analytisch in G .

- (CIS1) Die Funktion f ist stetig in G . Für jede offene und konvexe Teilmenge \tilde{G} von G , und jeden geschlossenen rektifizierbaren Weg γ in \tilde{G} gilt

$$\int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta = 0.$$

- (SF1) Für jede offene und konvexe Teilmenge \tilde{G} von G besitzt die Funktion $f|_{\tilde{G}}$ eine Stammfunktion.

Die Bedingung (CIF1) heißt die *lokale Cauchy'sche Integralformel*, die Bedingung (CIS1) der *lokale Cauchy'sche Integralsatz*.

Zu den Bedingungen der in Satz 2.1.3 angegebenen Äquivalenzliste kann man noch einige Verschärfungen bzw. Abschwächungen hinzufügen, welche sich im Laufe des Beweises automatisch ergeben:

- (CIF2) Für jeden Punkt $w \in G$ und jeden Radius $r > 0$, sodass die abgeschlossene Kreisscheibe $\bar{U}_r(w)$ ganz in G liegt, gilt die Darstellung (2.1.1).

- (PR2) Die Funktion f ist in G beliebig oft differenzierbar. Für jeden Punkt $w \in G$ konvergiert die Taylorreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(w)}{n!} (z-w)^n$$

von f mindestens in der größten Kreisscheibe die ganz in G liegt, und stellt dort die Funktion f dar.

- (DIFF2) Die Funktion f ist in G beliebig oft differenzierbar.

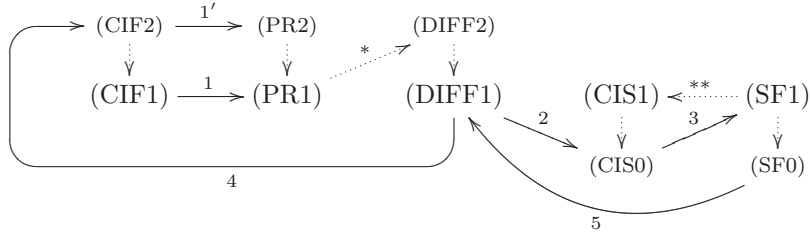
- (CIS0) Die Funktion f ist stetig in G . Für jedes abgeschlossene Dreieck Δ mit $\Delta \subseteq G$ ist

$$\oint_{\partial \Delta} f(\zeta) d\zeta = 0.$$

- (SF0) Für jeden Punkt $w \in G$ gibt es eine offene Umgebung $U \subseteq G$ von w , sodass $f|_U$ eine Stammfunktion hat.

Mit essentiellen Verschärfungen der lokalen Cauchy'schen Integralformel bzw. des lokalen Cauchy'schen Integralsatzes werden wir uns im nächsten Abschnitt befassen. Die Implikation „(CIS0) \Rightarrow (DIFF1)“ heißt auch der *Satz von Morera*.

Der Rest dieses Abschnittes ist dem Beweis von Satz 2.1.3 gewidmet. Wir führen ihn in mehreren Schritten. Dabei zeigen wir die folgenden Implikationen (die punktiert gezeichneten sind trivial bzw. bereits bekannt):



\vdots alle nach unten gehenden punktierten Implikationen sind trivial.

* Korollar 1.1.8.

** Satz 1.2.9.

1,1' Lemma 2.1.4, bzw. Lemma 2.1.4 gemeinsam mit (1.1.1).

2 Lemma 2.1.5.

3 Lemma 2.1.6.

4 Lemma 2.1.8.

5 Korollar 2.1.9.

2.1.4 Lemma. Sei $w \in G$ und $r > 0$ derart dass $\overline{U_r(w)} \subseteq G$ und sodass die Formel (2.1.1) gilt. Dann gilt

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-w)^n, \quad z \in U_r(w),$$

mit

$$a_n := \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial U_r(w)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-w)^{n+1}} d\zeta. \quad (2.1.2)$$

Insbesondere ist der Konvergenzradius dieser Potenzreihe größer oder gleich r .

Beweis. Sei $z \in U_r(w)$ festgehalten, dann gilt

$$\frac{1}{\zeta-z} = \frac{1}{(\zeta-w) + (w-z)} = \frac{1}{\zeta-w} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-w}{\zeta-w}}.$$

Es ist $|\frac{z-w}{\zeta-w}| = \frac{|z-w|}{r}$, $\zeta \in \partial U_r(w)$, also ist die geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-w}{\zeta-w} \right)^n = \frac{1}{1 - \frac{z-w}{\zeta-w}}$$

konvergent, und zwar gleichmäßig für $\zeta \in \partial U_r(w)$. Es folgt

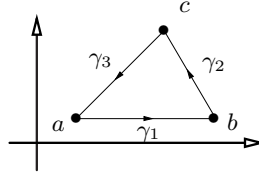
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial U_r(w)} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial U_r(w)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-w)^{n+1}} d\zeta \cdot (z-w)^n.$$

□

2.1.5 Lemma (von Goursat). *Sei f analytisch in G . Dann gilt (CIS0).*

Beweis. Die Stetigkeit von f folgt trivialerweise da f sogar differenzierbar ist. Seien $T = (a, b, c)$ drei verschiedene komplexe Zahlen. Setze für $t \in [0, 1]$

$$\gamma_1(t) := (1-t)a + tb, \quad \gamma_2(t) := (1-t)b + tc, \quad \gamma_3(t) := (1-t)c + ta.$$



und sei $l(T) := |b-a| + |c-b| + |a-c|$, $\Delta(T) := \text{co}\{a, b, c\}$, $d(T) := \max\{|b-a|, |c-b|, |a-c|\}$. Dann gilt

$$l(T) = \sum_{i=1}^3 V(\gamma_i), \quad d(T) = \sup\{|w-z| : w, z \in \Delta(T)\}.$$

Die erste Beziehung ist klar. Um die zweite einzusehen, sei $z = \lambda a + \mu b + \nu c$, wobei $\lambda, \mu, \nu \in [0, 1]$, $\lambda + \mu + \nu = 1$, und sei $w \in \Delta(T)$. Dann gilt

$$w - z = \lambda(w - a) + \mu(w - b) + \nu(w - c),$$

also $|w - z| \leq \max\{|w-a|, |w-b|, |w-c|\}$. Wendet man diese Ungleichung an mit w anstelle von z und a (oder b, c) anstelle von w , so folgt

$$|a - w| \leq \max\{0, |a-b|, |a-c|\},$$

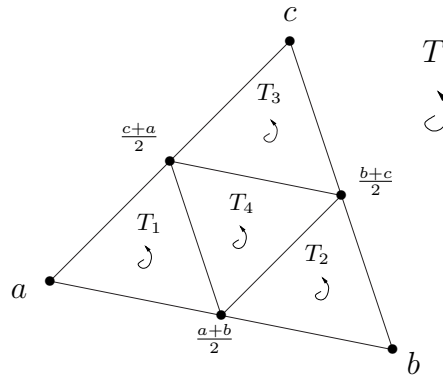
$$|b - w| \leq \max\{|b-a|, 0, |b-c|\},$$

$$|c - w| \leq \max\{|c-a|, |c-b|, 0\}.$$

Insgesamt also $|w - z| \leq d(T)$. Die umgekehrte Ungleichung ist klar.

Ist $T = (a, b, c)$ gegeben, so definieren wir die Viertelungen von T als

$$\begin{aligned} T_1 &:= (a, \frac{a+b}{2}, \frac{c+a}{2}), & T_2 &:= (\frac{a+b}{2}, b, \frac{b+c}{2}) \\ T_3 &:= (\frac{b+c}{2}, c, \frac{c+a}{2}), & T_4 &:= (\frac{c+a}{2}, \frac{a+b}{2}, \frac{b+c}{2}) \end{aligned}$$



Offenbar gilt $l(T_j) = \frac{1}{2}l(T)$ und $d(T_j) = \frac{1}{2}d(T)$.

Sind a, b, c so daß $\Delta(T) \subseteq G$, so gilt auch $\Delta(T_j) \subseteq G, j = 1, \dots, 4$. Setze

$$I(T, f) := \sum_{i=1}^3 \int_{\gamma_i} f(\zeta) d\zeta,$$

dann gilt offenbar $I(T, f) = \sum_{k=1}^4 I(T_k, f)$. Ist $k_0 \in \{1, \dots, 4\}$ eine Zahl mit $|I(T_{k_0}, f)| = \max\{|I(T_k, f)| : k = 1, \dots, 4\}$, so folgt also

$$|I(T, f)| \leq 4|I(T_{k_0}, f)|.$$

Wir definieren nun induktiv eine Folge $(T^{(n)})_{n \in \mathbb{N}_0}$ sodass $T^{(0)} = T$ und $T^{(n+1)} = [T^{(n)}]_{k_n}$ wobei $k_n \in \{1, \dots, 4\}$ so ist dass $|I([T^{(n)}]_{k_n}, f)| = \max\{|I([T^{(n)}]_k, f)| : k = 1, \dots, 4\}$. Dann gilt

$$l(T^{(n)}) = \frac{1}{2^n} l(T), \quad d(T^{(n)}) = \frac{1}{2^n} d(T), \quad |I(T, f)| \leq 4^n |I(T^{(n)}, f)|.$$

Die Mengen $\Delta(T^{(n)})$ sind eine absteigende Folge nichtleerer kompakter Mengen, also existiert $w \in \bigcap_{n \geq 0} \Delta(T^{(n)})$.

Wir verwenden nun dass f an der Stelle w differenzierbar ist: Sei $\rho : G \rightarrow \mathbb{C}$ stetig, $\rho(w) = 0$, sodass $f(z) = f(w) + f'(w)(z - w) + \rho(z)(z - w)$. Da das Polynom $f(w) + f'(w)(z - w)$ auf G eine Stammfunktion hat, gilt

$$\begin{aligned} I(T^{(n)}, f) &= \underbrace{I(T^{(n)}, f(w) + f'(w)(z - w))}_{=0} + I(T^{(n)}, \rho(z)(z - w)) = \\ &= I(T^{(n)}, \rho(z)(z - w)). \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} |I(T, f)| &\leq 4^n |I(T^{(n)}, f)| \leq 4^n l(T^{(n)}) \max_{z \in \Delta(T^{(n)})} |\rho(z)| \cdot d(T^{(n)}) = \\ &= l(T) d(T) \max_{z \in \Delta(T^{(n)})} |\rho(z)|. \end{aligned}$$

Wegen $d(T^{(n)}) \rightarrow 0$ und der Stetigkeit von ρ , sowie $\rho(w) = 0$, folgt dass $\max_{z \in \Delta(T^{(n)})} |\rho(z)| \rightarrow 0$. Also erhalten wir $I(T, f) = 0$. \square

2.1.6 Lemma. *Es gilt „(CIS0) \Rightarrow (SF1)“.*

Beweis. Sei eine offene und konvexe Teilmenge \tilde{G} von G gegeben. Wähle $z_0 \in \tilde{G}$, und setze

$$F_{z_0}(z) := \int_{[z_0, z]} f(\zeta) d\zeta, \quad z \in \tilde{G},$$

Dabei verstehen unter $[z_0, z]$ den Weg $\gamma(t) := tz + (1 - t)z_0, t \in [0, 1]$, also die Verbindungsstrecke von z_0 zu z . Aufgrund der Konvexität von \tilde{G} ist F_{z_0} wohldefiniert.

Wegen (CIS0) gilt

$$F_{z_0}(z) - F_{z_0}(w) = \int_{[z_0, z]} f(\zeta) d\zeta - \int_{[z_0, w]} f(\zeta) d\zeta = \int_{[w, z]} f(\zeta) d\zeta,$$

und wir erhalten

$$F_{z_0}(z) = F_{z_0}(w) + f(w)(z - w) + \rho(z)(z - w),$$

mit

$$\rho(z) := \begin{cases} \frac{1}{z-w} \int_{[w,z]} (f(\zeta) - f(w)) d\zeta, & z \neq w \\ 0, & z = w \end{cases}$$

Wegen $V([w, z]) = |z - w|$, gilt

$$|\rho(z)| \leq \max_{\zeta \in [w, z]} |f(\zeta) - f(w)|.$$

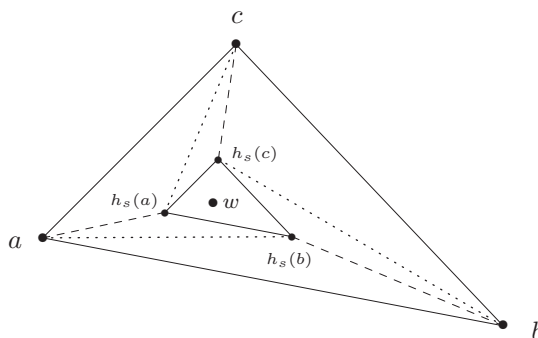
Da f bei w stetig ist, folgt $\lim_{z \rightarrow w} |\rho(z)| = 0$. Also ist F_{z_0} bei w differenzierbar und $F'_{z_0}(w) = f(w)$. \square

2.1.7 Lemma. Sei $w \in G$, und $g : G \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Erfüllt g in $G \setminus \{w\}$ die Bedingung (CIS0), dann erfüllt g sogar in ganz G die Bedingung (CIS0).

Beweis. Sei $T = (a, b, c)$ mit $\Delta(T) \subseteq G$ gegeben. Wir unterscheiden drei Fälle.

Fall 1; $w \notin \Delta(T)$: Dann ist $\Delta(T) \subseteq G \setminus \{w\}$, und daher gilt nach Voraussetzung $\oint_{\partial\Delta(T)} f(\zeta) d\zeta = 0$.

Fall 2; $w \in \Delta(T) \setminus \partial\Delta(T)$: Für $s \in (0, 1]$ setze $h_s(\zeta) := s(\zeta - w) + w$, und betrachte die Dreiecke $\Delta(T_s)$ mit $T_s := (h_s(a), h_s(b), h_s(c))$. Dann gilt stets $\Delta(T_s) \subseteq \Delta(T)$ und $w \in \Delta(T_s) \setminus \partial\Delta(T_s)$.



Da g in $G \setminus \{w\}$ der Bedingung (CIS0) genügt, gilt

$$\begin{aligned} \int_{[a,b]} g(\zeta) d\zeta + \int_{[b,h_s(b)]} g(\zeta) d\zeta + \int_{[h_s(b),a]} g(\zeta) d\zeta &= 0 & \int_{[a,h_s(b)]} g(\zeta) d\zeta + \int_{[h_s(b),h_s(a)]} g(\zeta) d\zeta + \int_{[h_s(a),a]} g(\zeta) d\zeta &= 0 \\ \int_{[b,c]} g(\zeta) d\zeta + \int_{[c,h_s(c)]} g(\zeta) d\zeta + \int_{[h_s(c),b]} g(\zeta) d\zeta &= 0 & \int_{[b,h_s(c)]} g(\zeta) d\zeta + \int_{[h_s(c),h_s(b)]} g(\zeta) d\zeta + \int_{[h_s(b),b]} g(\zeta) d\zeta &= 0 \\ \int_{[c,a]} g(\zeta) d\zeta + \int_{[a,h_s(a)]} g(\zeta) d\zeta + \int_{[h_s(a),c]} g(\zeta) d\zeta &= 0 & \int_{[c,h_s(a)]} g(\zeta) d\zeta + \int_{[h_s(a),h_s(c)]} g(\zeta) d\zeta + \int_{[h_s(c),c]} g(\zeta) d\zeta &= 0 \end{aligned}$$

Summiert man diese Gleichungen auf, folgt

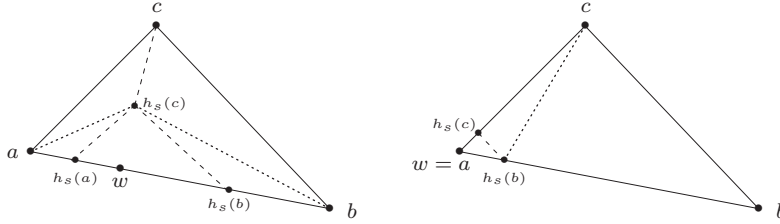
$$\oint_{\partial\Delta(T)} g(\zeta) d\zeta = \oint_{\partial\Delta(T_s)} g(\zeta) d\zeta.$$

Offenbar ist $l(T_s) = s \cdot l(T)$ und $d(T_t) = s \cdot d(T)$. Es folgt

$$\left| \oint_{\partial\Delta(T_s)} g(\zeta) d\zeta \right| \leq l(T_s) \max_{\zeta \in \partial\Delta(T_s)} |g(\zeta)| \leq s \cdot l(T) \max_{\zeta \in \partial\Delta(T)} |g(\zeta)|.$$

Lässt man nun s gegen 0 streben, so folgt $\oint_{\partial\Delta(T)} g(\zeta) d\zeta = 0$.

Fall 3; $w \in \partial\Delta$: Wir verwenden die gleiche Argumentation mit geeigneten Dreieckswegen. In den folgenden beiden Skizzen zeigen wir den Fall „ $w \in (a, b)$ “ bzw. „ $w = a$ “, die anderen Fälle sind symmetrisch.



Wieder zeigt das gleiche Argument, dass $\oint_{\partial\Delta(T)} g(\zeta) d\zeta = 0$. \square

2.1.8 Lemma. Sei f analytisch in G . Ist $w \in G$ und $r > 0$ sodass $\overline{U_r(w)} \subseteq G$, so gilt (2.1.1).

Beweis. Wähle $r' > r$ sodass $U_{r'}(w) \subseteq G$ und betrachte, für festes $z \in U_r(w)$, die Funktion

$$g(\zeta) := \begin{cases} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}, & \zeta \in U_{r'}(w) \setminus \{z\} \\ f'(z), & \zeta = z \end{cases}$$

Dann ist g an jeder Stelle $\zeta \in U_{r'}(w) \setminus \{z\}$ differenzierbar und an der Stelle z stetig. Wegen der bereits bewiesenen Implikation „(DIFF1) \Rightarrow (CIS0)“ können wir Lemma 2.1.7 anwenden. Es folgt, dass g auf ganz $U_{r'}(w)$ der Bedingung (CIS0) genügt.

Nach der bereits bewiesenen Implikation „(CIS0) \Rightarrow (CIS1)“ gilt

$$\oint_{\partial U_r(w)} g(\zeta) d\zeta = 0.$$

Also ist

$$\begin{aligned} 0 &= \oint_{\partial U_r(w)} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta = \oint_{\partial U_r(w)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z) \oint_{\partial U_r(w)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \\ &= \oint_{\partial U_r(w)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z) \underbrace{2\pi i \cdot n(\partial U_r(w), z)}_{=1}. \end{aligned}$$

\square

2.1.9 Korollar. Die Funktion f erfülle (SF0). Dann ist sie analytisch in G .

Beweis. Sei $w \in G$, und wähle eine offene Umgebung $U \subseteq G$ von w , sodass $f|_U$ eine Stammfunktion F hat. Nun gilt auf U , nach Definition, $F' = f$. Also ist F analytisch in U und damit nach der bereits bewiesenen Implikation „(DIFF1) \Rightarrow (DIFF2)“ sogar beliebig oft differenzierbar. Wir erhalten, dass $f|_U$ ebenfalls differenzierbar ist. \square

2.2 Globale Versionen des Cauchy'schen Integralsatzes

Die Formel des folgenden Satzes für „ $l = 0$ “ nennt man manchmal auch die *globale Cauchy'sche Integralformel*.

2.2.1 Satz (*Cauchy'sche Integralformel, Homologieversion*). Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen und f analytisch in G . Dann gilt:

(CIF3) Seien $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ geschlossene rektifizierbare Wege in G , $\gamma_k : [\alpha_k, \beta_k] \rightarrow G$, die gemeinsam nullhomolog in G sind. Dann ist für jedes $z \in G \setminus \bigcup_{k=1}^n \gamma_k([\alpha_k, \beta_k])$ und $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$f^{(l)}(z) \sum_{k=1}^n n(\gamma_k, z) = \frac{l!}{2\pi i} \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{l+1}} d\zeta.$$

Zum Beweis benützen wir das folgende Lemma.

2.2.2 Lemma. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen, $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow G$ ein rektifizierbarer Weg in \mathbb{C} , und $\phi : G \times \gamma([\alpha, \beta]) \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Weiters sei für jedes feste $\zeta \in \gamma([\alpha, \beta])$ die Funktion $z \mapsto \phi(z, \zeta)$ analytisch in G . Dann ist die Funktion

$$f(z) := \int_{\gamma} \phi(z, \zeta) d\zeta, \quad z \in G,$$

analytisch in G und es gilt

$$f'(z) = \int_{\gamma} \frac{\partial}{\partial z} \phi(z, \zeta) d\zeta.$$

Beweis. Sei $z_0 \in G$ und wähle $r > 0$ sodass $\overline{U_r(z_0)} \subseteq G$. Dann ist $\phi|_{\overline{U_r(z_0)} \times \gamma([\alpha, \beta])}$ gleichmäßig stetig und daher gilt für jede Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $z_n \rightarrow z_0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\zeta \in \gamma([0, 1])} |\phi(z_n, \zeta) - \phi(z_0, \zeta)| = 0.$$

Es folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = f(z_0)$, d.h. f ist stetig.

Sei $T = (a, b, c)$ sodass $\Delta(T) \subseteq G$. Wegen der Stetigkeit des Integranden darf man die Integrationsreihenfolge vertauschen, und erhält

$$\oint_{\partial \Delta(T)} f(z) dz = \oint_{\partial \Delta(T)} \left(\int_{\gamma} \phi(z, \zeta) d\zeta \right) dz = \int_{\gamma} \underbrace{\left(\oint_{\partial \Delta(T)} \phi(z, \zeta) dz \right)}_{=0} d\zeta = 0.$$

Wegen „(CIS0) \Rightarrow (DIFF1)“ ist f analytisch in G . Weiters ist, für $r > 0$ hinreichend klein, wegen (1.1.1) und (2.1.2)

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial U_r(z)} \frac{f(\alpha)}{(\alpha - z)^2} d\alpha = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial U_r(z)} \left(\int_{\gamma} \frac{\phi(\alpha, \zeta)}{(\alpha - z)^2} d\zeta \right) d\alpha =$$

$$= \int_{\gamma} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial U_r(z)} \frac{\phi(\alpha, \zeta)}{(\alpha - z)^2} d\alpha \right) d\zeta = \int_{\gamma} \frac{\partial}{\partial z} \phi(z, \zeta) d\zeta.$$

□

Beweis (von Satz 2.2.1). Der wesentliche Teil ist die behauptete Formel für $l = 0$ zu zeigen. Der Fall $l \geq 1$ folgt dann sofort mittels Induktion unter Zuhilfenahme von Lemma 2.2.2 und der Tatsache dass $n(\gamma_k, z)$ lokal konstant ist.

Schritt 1; Der Differenzenquotient ϕ : Betrachte die Funktion $\phi : G \times G \rightarrow \mathbb{C}$

$$\phi(z, w) := \begin{cases} \frac{f(z) - f(w)}{z - w}, & z \neq w \\ f'(z), & z = w \end{cases}$$

Wir zeigen, dass ϕ stetig ist.

In einem Punkt (z_0, w_0) mit $z_0 \neq w_0$ ist das klar. Sei $z_0 \in G$, und wähle $r > 0$ sodass $U_r(z_0) \subseteq G$ und sodass

$$|f'(z) - f'(z_0)| < \epsilon, \quad z \in U_r(z_0).$$

Dann ist für $z \in U_r(z_0)$ also $|\phi(z, z) - \phi(z_0, z_0)| < \epsilon$. Für $z, w \in U_r(z_0)$, $z \neq w$, setze $\gamma(t) := (1 - t)w + tz$, $t \in [0, 1]$, dann gilt

$$\begin{aligned} f(z) - f(w) &= f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = \int_{\gamma} f'(\zeta) d\zeta = \\ &= \int_0^1 f'(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = (z - w) \int_0^1 f'(\gamma(t)) dt. \end{aligned}$$

Also folgt

$$\phi(z, w) - \phi(z_0, z_0) = \int_0^1 (f'(\gamma(t)) - f'(z_0)) dt,$$

und daher $|\phi(z, w) - \phi(z_0, z_0)| < \epsilon$.

Schritt 2; Konstruktion einer in ganz \mathbb{C} analytischen Funktion: Ist $w \in G$ festgehalten, so ist nach Lemma 2.1.7 die Funktion $z \mapsto \phi(z, w)$ analytisch in G . Nach Lemma 2.2.2 ist die Funktion

$$g_1(z) := \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} \phi(z, \zeta) d\zeta, \quad z \in G,$$

analytisch in G .

Betrachte die Funktion

$$g_2(z) := \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \bigcup_{k=1}^n \gamma_k([\alpha_k, \beta_k]).$$

Da $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ offenbar für $(z, \zeta) \in (\mathbb{C} \setminus \bigcup_{k=1}^n \gamma_k([\alpha_k, \beta_k])) \times \bigcup_{k=1}^n \gamma_k([\alpha_k, \beta_k])$ stetig ist und ebenso für jedes feste ζ analytisch in z , ist g_2 nach Lemma 2.2.2 analytisch in $\mathbb{C} \setminus \bigcup_{k=1}^n \gamma_k([\alpha_k, \beta_k])$.

Sei $H := \{z \in \mathbb{C} \setminus \bigcup_{k=1}^n \gamma_k([\alpha_k, \beta_k]) : \sum_{k=1}^n n(\gamma_k, z) = 0\}$. Nach Satz 1.3.9 ist H offen und enthält das Äußere der Kreisscheibe $U_R(0)$, $R := \max\{|\gamma_k(t)| : t \in [\alpha_k, \beta_k], k = 1, \dots, n\}$. Da die Wege $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ gemeinsam nullhomolog in G sind, ist weiters $G \cup H = \mathbb{C}$.

Ist $z \in G \cap H$, so gilt

$$\begin{aligned} g_1(z) &= \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} d\zeta = \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} \frac{1}{z - \zeta} d\zeta - \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} \frac{f(\zeta)}{z - \zeta} d\zeta = \\ &= -f(z) \cdot \underbrace{2\pi i \sum_{k=1}^n n(\gamma_k, z)}_{=0} - \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} \frac{f(\zeta)}{z - \zeta} d\zeta = g_2(z). \end{aligned}$$

Also ist durch

$$g(z) := \begin{cases} g_1(z), & z \in G \\ g_2(z), & z \in H \end{cases}$$

eine Funktion auf $G \cup H = \mathbb{C}$ wohldefiniert. Da G und H offen sind und g_1 und g_2 beide analytisch, ist g in \mathbb{C} analytisch.

Schritt 3; Abschätzung von g : Da $\lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{1}{|\zeta - z|} = 0$ gleichmäßig für $\zeta \in \bigcup_{k=1}^n \gamma_k([0, 1])$ gilt, folgt

$$\lim_{z \rightarrow \infty} g_2(z) = 0.$$

Nun enthält H das gesamte Äußere einer Kreisscheibe, und wir schliessen dass

$$\lim_{z \rightarrow \infty} g(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} g_2(z) = 0.$$

Sei $w \in \mathbb{C}$ festgehalten, dann ist nach (CIF2) für jedes $R > |w|$

$$|g(w)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial U_R(0)} \frac{g(\zeta)}{\zeta - w} d\zeta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{R}{R - |w|} \max_{|\zeta|=R} |g(\zeta)|.$$

Lässt man in dieser Beziehung R gegen ∞ streben, so folgt $g(w) = 0$. Da w beliebig war, ist also die Funktion g identisch gleich Null.

Für $z \in G \setminus \bigcup_{k=1}^n \gamma_k([\alpha_k, \beta_k])$ gilt damit

$$0 = \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} d\zeta = -f(z) 2\pi i \sum_{k=1}^n n(\gamma_k, z) - \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} \frac{f(\zeta)}{z - \zeta} d\zeta,$$

d.h.

$$f(z) \sum_{k=1}^n n(\gamma_k, z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

□

2.2.3 Korollar (*Cauchy'scher Integralsatz, Homologieversion*). Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen und f analytisch in G . Dann gilt:

(CIS2) Seien $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ geschlossene rektifizierbare Wege in G , $\gamma_k : [\alpha_k, \beta_k] \rightarrow G$, die gemeinsam nullhomolog in G sind. Dann ist

$$\sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} f(\zeta) d\zeta = 0.$$

Beweis. Wähle $z_0 \in G \setminus \bigcup_{k=1}^n \gamma_k([\alpha_k, \beta_k])$, und wende die Cauchy'sche Integralformel an auf die Funktion $g(z) := (z - z_0)f(z)$. Es folgt

$$0 = g(z_0) \sum_{k=1}^n n(\gamma_k, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} f(\zeta) d\zeta.$$

□

2.2.4 Korollar. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen und f analytisch in G . Dann gilt:

(SF2) Für jede offene und homolog einfach zusammenhängende Teilmenge \tilde{G} von G besitzt die Funktion $f|_{\tilde{G}}$ eine Stammfunktion.

Beweis. Wähle $z_0 \in \tilde{G}$, sowie zu jedem Punkt $z \in \tilde{G}$ einen rektifizierbaren Weg γ_z der z_0 mit z verbindet. Setze

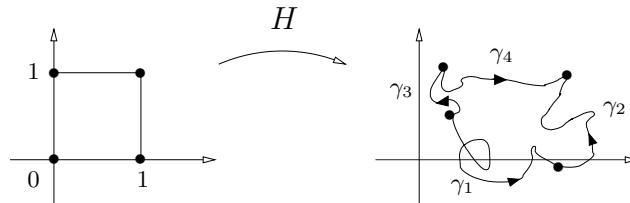
$$F_{z_0}(z) := \int_{\gamma_z} f(\zeta) d\zeta, \quad z \in \tilde{G}.$$

Genauso wie in Lemma 2.1.6 zeigt man, dass F_{z_0} eine Stammfunktion von $f|_{\tilde{G}}$ ist. □

2.2.5 Satz (Cauchy'scher Integralsatz, Homotopieversionen). Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen und f analytisch in G . Dann gelten:

(CIS3) Sei $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow G$ eine Homotopie, und setze für $t \in [0, 1]$

$$\gamma_1(t) := H(t, 0), \quad \gamma_2(t) := H(1, t), \quad \gamma_3(t) := H(0, t), \quad \gamma_4(t) := H(t, 1).$$



Dann gilt

$$\int_{\gamma_1} f(\zeta) d\zeta + \int_{\gamma_2} f(\zeta) d\zeta = \int_{\gamma_3} f(\zeta) d\zeta + \int_{\gamma_4} f(\zeta) d\zeta.$$

(CIS3') Seien γ und $\tilde{\gamma}$ rektifizierbare geschlossene Wege in G die loop-homotop in G sind. Dann gilt

$$\int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta = \int_{\tilde{\gamma}} f(\zeta) d\zeta.$$

(CIS3'') Seien γ und $\tilde{\gamma}$ rektifizierbare Wege in G , die den gleichen Anfangspunkt haben und auch den gleichen Endpunkt. Sind γ und $\tilde{\gamma}$ FEP-homotop in G , so gilt

$$\int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta = \int_{\tilde{\gamma}} f(\zeta) d\zeta.$$

Beweis. Ist $G = \mathbb{C}$, so erfüllt f nach (CIS1) die gewünschten Bedingungen. Sei also $G \neq \mathbb{C}$ und setze $m := d(\mathbb{C} \setminus G, H([0, 1] \times [0, 1]))$. Da $H([0, 1] \times [0, 1]) \subseteq G$ und kompakt ist, ist $m > 0$. Wähle $n \in \mathbb{N}$ so groß, dass

$$|H(s, t) - H(u, v)| < m, \quad |s - u|^2 + |t - v|^2 \leq \frac{2}{n^2}.$$

Setze

$$z_{jk} := H\left(\frac{j}{n}, \frac{k}{n}\right), \quad j, k = 0, \dots, n.$$

Es gilt stets

$$H\left(\left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right] \times \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]\right) \subseteq U_m(z_{jk}) \subseteq G.$$

Nach Lemma 2.1.6 ist die Funktion

$$g_{jk}(z) := \int_{[z_{jk}, z]} f(\zeta) d\zeta, \quad z \in U_m(z_{jk})$$

eine Stammfunktion von $f|_{U_m(z_{jk})}$. Setze

$$\begin{aligned} A_{jk} := & \left(g_{jk}(z_{j+1,k}) - g_{jk}(z_{jk})\right) + \left(g_{jk}(z_{j+1,k+1}) - g_{jk}(z_{j+1,k})\right) + \\ & + \left(g_{jk}(z_{j,k+1}) - g_{jk}(z_{j+1,k+1})\right) + \left(g_{jk}(z_{jk}) - g_{jk}(z_{j,k+1})\right), \end{aligned}$$

dann ist $A_{jk} = 0$ für alle j, k , also auch $\sum_{j,k=0}^{n-1} A_{jk} = 0$.

Sei $z_0 \in U_m(z_{jk}) \cap U_m(z_{j+1,k})$, dann gilt für $z \in U_m(z_{jk}) \cap U_m(z_{j+1,k})$ dass

$$g_{jk}(z) - \int_{[z_0, z]} f(\zeta) d\zeta = \text{const}, \quad g_{j+1,k}(z) - \int_{[z_0, z]} f(\zeta) d\zeta = \text{const}.$$

Also ist auch $g_{jk}(z) - g_{j+1,k}(z)$ konstant auf $U_m(z_{jk}) \cap U_m(z_{j+1,k})$. Genauso folgt dass $g_{jk}(z) - g_{j,k+1}(z)$ konstant auf $U_m(z_{jk}) \cap U_m(z_{j,k+1})$ ist. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} & \left(g_{jk}(z_{j+1,k+1}) - g_{jk}(z_{j+1,k})\right) + \left(g_{j+1,k}(z_{j+1,k}) - g_{j+1,k}(z_{j+1,k+1})\right) = 0, \\ & \left(g_{jk}(z_{j,k+1}) - g_{jk}(z_{j+1,k+1})\right) + \left(g_{j,k+1}(z_{j+1,k+1}) - g_{j,k+1}(z_{j,k+1})\right) = 0. \end{aligned}$$

Wir erhalten

$$0 = \sum_{j,k=0}^{n-1} A_{jk} = \sum_{j=0}^{n-1} \left(g_{j0}(z_{j+1,0}) - g_{j0}(z_{j0})\right) + \sum_{k=0}^{n-1} \left(g_{n-1,k}(z_{n,k+1}) - g_{n-1,k}(z_{nk})\right) +$$

2.2. GLOBALE VERSIONEN DES CAUCHY'SCHEN INTEGRALSATZES 29

$$+ \sum_{j=0}^{n-1} \left(g_{j,n-1}(z_{jn}) - g_{j,n-1}(z_{j+1,n}) \right) + \sum_{k=0}^{n-1} \left(g_{0k}(z_{0k}) - g_{0k}(z_{0,k+1}) \right)$$

Unter der Voraussetzung von (CIS3), dass $\gamma_1, \dots, \gamma_4$ rektifizierbar sind, ist die rechte Seite gleich

$$\int_{\gamma_1} f(\zeta) d\zeta + \int_{\gamma_2} f(\zeta) d\zeta - \int_{\gamma_4} f(\zeta) d\zeta - \int_{\gamma_3} f(\zeta) d\zeta,$$

und wir sehen, dass die in (CIS3) verlangte Gleichheit gilt.

Unter der Voraussetzung von (CIS3'), dass γ_1, γ_4 rektifizierbar sind und $H(0, t) = H(1, t)$, $t \in [0, 1]$, folgt dass $z_{0k} = z_{nk}$, $k = 0, \dots, n$, und wegen

$$g_{n-1,k}(z) - g_{0k}(z) = \text{const}, \quad z \in U_m(z_{0k}) \cap U_m(z_{n-1,k}),$$

dass

$$\left(g_{n-1,k}(z_{n,k+1}) - g_{n-1,k}(z_{nk}) \right) + \left(g_{0k}(z_{0k}) - g_{0k}(z_{0,k+1}) \right) = 0.$$

Also schreibt sich die rechte Seite weiter als

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^n \left(g_{j0}(z_{j+1,0}) - g_{j0}(z_{j0}) \right) + \sum_{j=0}^n \left(g_{j,n-1}(z_{jn}) - g_{j,n-1}(z_{j+1,n}) \right) = \\ = \int_{\gamma_1} f(\zeta) d\zeta - \int_{\gamma_4} f(\zeta) d\zeta, \end{aligned}$$

und wir sehen, dass die in (CIS3') verlangte Gleichheit gilt.

Die Gültigkeit von (CIS3'') folgt schließlich sofort aus (CIS3) mit $\gamma = \gamma_1$, $\tilde{\gamma} = \gamma_4$, und γ_2, γ_3 konstante Wege (Anfangspunkt bzw. Endpunkt). \square

2.2.6 Korollar. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen.

- (i) Jeder rektifizierbare geschlossene Weg in G der in G nullhomotop ist, ist auch nullhomolog.
- (ii) Ist G einfach zusammenhängend, so ist G auch homolog einfach zusammenhängend.

Beweis. Ist $w \in \mathbb{C} \setminus G$, so ist die Funktion $f(z) := \frac{1}{z-w}$ analytisch in G . Nach der Homotopieversion des Cauchy'schen Integralsatzes, ist daher für jeden geschlossenen rektifizierbaren Weg γ in G sicher $n(\gamma, w) = 0$. Das zeigt (i). Die Behauptung (ii) folgt sofort aus (i). \square

2.2.7 Bemerkung. Da konvexe Mengen, insbesondere Kreisscheiben und Dreiecke, einfach zusammenhängend sind, impliziert jede der in diesem Abschnitt genannten Eigenschaften Analytizität:

$$\begin{aligned} (\text{CIF3}) &\implies (\text{CIF2}) \\ (\text{SF2}) &\implies (\text{SF1}) \\ (\text{CIS2}) \vee (\text{CIS3}) \vee (\text{CIS3}') \vee (\text{CIS3}'') &\implies (\text{CIS0}) \end{aligned}$$

//

2.3 Analytizität vs. Differenzierbarkeit im reellen

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$. Dann kann man natürlich f auch auffassen als Funktion zweier reeller Variablen mit Werten in \mathbb{R}^2 : Schreibe dazu

$$x := \operatorname{Re} z, \quad y := \operatorname{Im} z, \quad u(x, y) := \operatorname{Re} f(x + iy), \quad v(x, y) := \operatorname{Im} f(x + iy),$$

dann ist also $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.

Die Tatsache, dass die Funktion f an einer Stelle $w \in G$ (komplex) differenzierbar ist, läßt sich nun mittels des Begriffs des totalen Differentials aus der reellen Analysis beschreiben.

2.3.1 Proposition. *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen, $w = a + ib \in G$, und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$. Dann sind äquivalent:*

(i) *f ist an der Stelle w (komplex) differenzierbar.*

(ii) *Die Abbildung*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \operatorname{Re} f(x + iy) \\ \operatorname{Im} f(x + iy) \end{pmatrix} \quad (2.3.1)$$

ist an der Stelle (a, b) im Sinne der reellen Analysis differenzierbar und das Differential $df(a, b)$ ist ein skalares Vielfaches einer Rotation, d.h. die Matrixdarstellung von $df(a, b)$ bezüglich der kanonischen Basis ist von der Gestalt

$$df(a, b) = \lambda \begin{pmatrix} \cos \mu & -\sin \mu \\ \sin \mu & \cos \mu \end{pmatrix}$$

mit gewissen $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda \geq 0$.

In diesem Fall ist $\lambda^2 = \det df(a, b) = |f'(w)|^2$ und $\mu = \arg f'(w)$, d.h. $df(a, b)$ entspricht der linearen Abbildung „Multiplizieren mit $f'(w)$ “

$$df(a, b) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} [f'(w)(\alpha + i\beta)] \\ \operatorname{Im} [f'(w)(\alpha + i\beta)] \end{pmatrix}.$$

Beweis. Sei zuerst vorausgesetzt, dass (ii) gilt. Dann haben wir

$$\begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(a, b) \\ v(a, b) \end{pmatrix} + df(a, b) \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix} + \rho(x, y), \quad (2.3.2)$$

wobei $(d(\cdot, \cdot))$ bezeichnet die euklidische Metrik am \mathbb{R}^2

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} \frac{\rho(x, y)}{d((x, y), (a, b))} = 0.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} df(a, b) \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix} &= \lambda \begin{pmatrix} \cos \mu & -\sin \mu \\ \sin \mu & \cos \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \operatorname{Re} [(\lambda \cos \mu + i \lambda \sin \mu) \cdot ((x - a) + i(y - b))] \\ \operatorname{Im} [(\lambda \cos \mu + i \lambda \sin \mu) \cdot ((x - a) + i(y - b))] \end{pmatrix} \end{aligned}$$

also erhalten wir aus (2.3.2)

$$f(z) = f(w) + (\lambda \cos \mu + i\lambda \sin \mu) \cdot (z - w) + \rho(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z). \quad (2.3.3)$$

Es folgt, dass f an der Stelle w differenzierbar ist, und dass $f'(w) = \lambda e^{i\mu}$.

Ist umgekehrt f differenzierbar, und schreibt man $f'(w) = \lambda e^{i\mu}$, so erhält man die Beziehung (2.3.3) mit einem geeigneten Restterm ρ . Teilt man diese in Real- und Imaginärteil auf, so folgt dass (2.3.1) differenzierbar ist und dass das Differential die gewünschte Gestalt hat. \square

2.3.2 Korollar. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$. Setze $u(x, y) := \operatorname{Re} f(x + iy)$ und $v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy)$. Dann ist f genau dann analytisch in G , wenn u und v im Sinne der reellen Analysis stetig differenzierbar sind, und

$$u_x(x, y) = v_y(x, y), \quad u_y(x, y) = -v_x(x, y), \quad (x, y) \text{ mit } x + iy \in G, \quad (2.3.4)$$

erfüllen.

Beweis. Sei vorausgesetzt, dass f analytisch ist. Da die Funktion f dann lokal um jeden Punkt in eine Potenzreihe entwickelbar ist, sind u und v sicher beliebig oft differenzierbar. Nach Punkt (ii) der obigen Proposition ist

$$u_x(x, y) = |f'(x + iy)|^2 \cos \arg f'(x + iy) = v_y(x, y),$$

$$u_y(x, y) = -|f'(x + iy)|^2 \sin \arg f'(x + iy) = -v_x(x, y).$$

Sind umgekehrt u und v stetig differenzierbar und gelten die Differentialgleichungen (2.3.4), so ist die Abbildung (2.3.1) sicher differenzierbar und ihr Differential hat die gewünschte Form

$$df(x, y) = \begin{pmatrix} u_x(x, y) & u_y(x, y) \\ v_x(x, y) & v_y(x, y) \end{pmatrix}$$

\square

Die Beziehungen (2.3.4) nennt man auch die *Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen*.

2.3.3 Bemerkung.

- (i) Fasst man eine analytische Funktion als Abbildung der Ebene in sich auf, so ist sie winkeltreu.
- (ii) Den obigen Zusammenhang zwischen Analytizität und reeller Differenzierbarkeit könnte man auch verwenden um gewisse Sätze der komplexen Analysis herzuleiten. Zum Beispiel erhält man aus den Green'schen Formeln Varianten des Cauchy'schen Integralsatzes.

Nachteil dieser Methode ist, dass man den riesigen Apparat der mehrdimensionalen reellen Analysis benutzen müsste, wogegen die Sätze der komplexen Analysis sich ja eigentlich höchst elegant und unmittelbar beweisen lassen. Vorteil hingegen wäre, dass sich manche Resultate auf Funktionen im \mathbb{R}^n oder \mathbb{C}^n verallgemeinern lassen.

- (iii) Wie wir im Beweis von Korollar 2.3.2 bemerkt haben, sind die Funktionen u und v beliebig oft differenzierbar. Also erhält man aus den Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen und dem Satz von Schwarz über die gemischten partiellen Ableitungen

$$u_{xx} = (u_x)_x = (v_y)_x = v_{yx} = v_{xy} = (v_x)_y = (-u_y)_y = -u_{yy} ,$$

und genauso $v_{xx} = -v_{yy}$. Wir sehen, dass u und v harmonisch sind.

Viele Sätze der komplexen Analysis gehören eigentlich in den Kontext der harmonischen Funktionen. Zum Beispiel das Maximumprinzip Satz 3.3.1, (i), oder die Poisson'sche Integraldarstellung Proposition 7.1.4. Wir gehen darauf aber nicht näher ein.

//

Kapitel 3

Eigenschaften analytischer Funktionen

3.1 Identitätssatz, Logarithmen

Wir beginnen mit einer ersten Folgerung aus der allgemeinen Cauchy'schen Integralformel, den sogenannten *Cauchy'schen Abschätzungen* für die Ableitungen einer analytischen Funktion.

3.1.1 Korollar. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f \in H(G)$ und sei $\overline{U_r(w)} \subseteq G$. Dann gilt

$$|f^{(k)}(w)| \leq \frac{k!}{r^k} \max_{\zeta \in \partial U_r(w)} |f(\zeta)|, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Beweis. Nach der Cauchy'schen Integralformel gilt

$$\begin{aligned} |f^{(k)}(w)| &= \left| \frac{k!}{2\pi i} \oint_{\partial U_r(w)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - w)^{k+1}} d\zeta \right| \leq \frac{k!}{2\pi} \cdot 2\pi r \cdot \frac{\max_{\zeta \in \partial U_r(w)} |f(\zeta)|}{r^{k+1}} = \\ &= \frac{k!}{r^k} \max_{\zeta \in \partial U_r(w)} |f(\zeta)|. \end{aligned}$$

□

3.1.2 Korollar. Sei $f \in H(\mathbb{C})$ und sei $\rho \geq 0$. Gibt es eine Konstante $C > 0$, und eine Folge $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $R_n > 0$, von Radien mit $R_n \rightarrow \infty$, sodass

$$|f(z)| \leq C|z|^\rho, \quad |z| = R_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

so ist f ein Polynom vom Grad höchstens $[\rho]$.

Beweis. Die Taylorreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k$ konvergiert in ganz \mathbb{C} und stellt die Funktion f dar. Nun gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$|f^{(k)}(0)| \leq \frac{k!}{R_n^k} \cdot C R_n^\rho = C k! R_n^{\rho-k}.$$

Also folgt, mit $n \rightarrow \infty$, dass für $k > \rho$ stets $f^{(k)}(0) = 0$.

□

Der folgende Spezialfall von Korollar 3.1.2 ist sehr oft gut einsetzbar:

3.1.3 Korollar (*Satz von Liouville*). Sei $f \in H(\mathbb{C})$ und sei $\sup_{z \in \mathbb{C}} |f(z)| < \infty$. Dann ist f konstant.

Beweis. Wende Korollar 3.1.2 an mit $\rho = 0$ und einer beliebigen Folge von Radien. \square

Wir kommen zu einem Resultat, welches besonders deutlich aufzeigt, wie stark die Eigenschaft analytisch zu sein ist.

3.1.4 Satz (*Identitätssatz*). Sei G ein Gebiet, und seien $f, g \in H(G)$. Dann sind äquivalent:

$$(i) \quad f = g.$$

$$(ii) \quad \text{Es existiert ein Punkt } w \in G \text{ mit } f^{(k)}(w) = g^{(k)}(w), \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

$$(iii) \quad \text{Die Menge } \{z \in G : f(z) = g(z)\} \text{ hat einen Häufungspunkt in } G.$$

Beweis. Es genügt den Spezialfall $g = 0$ zu betrachten, denn die allgemeine Aussage folgt aus diesem durch Betrachtung von $f - g$. Sei also im folgenden stets $g = 0$ vorausgesetzt. Wir zeigen $(i) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (i)$.

Die Implikation $(i) \Rightarrow (iii)$ ist trivial. Es gelte (iii) . Sei $w \in G$ ein Häufungspunkt von $\{z \in G : f(z) = 0\}$. Angenommen es existiert eine Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ mit $f(w) = \dots = f^{(n-1)}(w) = 0$, $f^{(n)}(w) \neq 0$. Dann gilt also

$$f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{f^{(k)}(w)}{k!} (z-w)^k = (z-w)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k+n)}(w)}{(k+n)!} (z-w)^k$$

für alle z in einer Umgebung U von w . Die Funktion

$$g(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k+n)}(w)}{(k+n)!} (z-w)^k$$

ist stetig in U , denn die Konvergenzradien der Potenzreihen für f und g sind gleich. Es gilt $g(w) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(w) \neq 0$, also existiert eine Umgebung V von w sodass $g(z) \neq 0$, $z \in V$. Also hat f in V höchstens eine Nullstelle, nämlich w . Ein Widerspruch, da w Häufungspunkt von der Menge der Nullstellen von f ist. Es folgt $f^{(k)}(w) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

Sei nun (ii) vorausgesetzt. Betrachte die Menge

$$M := \{w \in G : f^{(k)}(w) = 0, k \in \mathbb{N}_0\}.$$

Da jede der Funktionen $f^{(k)}$, $k \in \mathbb{N}_0$, stetig ist, ist M in G abgeschlossen. Sei $w \in M$, dann gilt auf einer gewissen Umgebung U von w

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(w)}{k!} (z-w)^k = 0, \quad z \in U.$$

Also ist $U \subseteq M$.

Da $M \neq \emptyset$ ist und G zusammenhängt folgt $M = G$. \square

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f \in H(G)$. Weiters sei $w \in \mathbb{C}$. Ein Punkt $z \in G$ heißt eine w -Stelle von f , wenn $f(z) = w$ gilt.

3.1.5 Korollar. Sei G ein Gebiet, $f \in H(G)$ nicht konstant, und $w \in \mathbb{C}$. Dann hat die Menge der w -Stellen von f keinen Häufungspunkt in G . Ist a eine w -Stelle, so existiert $l \in \mathbb{N}$ mit

$$f(a) = w, f'(a) = \dots = f^{(l-1)}(a) = 0, f^{(l)}(a) \neq 0.$$

Die Funktion

$$h(z) := \begin{cases} \frac{f(z)-w}{(z-a)^l}, & z \in G \setminus \{a\} \\ \frac{f^{(l)}(a)}{l!}, & z = a \end{cases}$$

ist analytisch in G . Die Zahl l heißt die Vielfachheit der w -Stelle a .

Beweis. Die Tatsache dass $f^{-1}(\{w\})$ keinen Häufungspunkt in G hat, sowie dass es für jede w -Stelle eine Zahl l mit der behaupteten Eigenschaft gibt, folgt wenn man den Identitätssatz mit der konstanten Funktion $g(z) = w$ anwendet. Betrachte nun die Funktion h . Diese ist stetig in G und, wegen der Quotientenregel, analytisch in $G \setminus \{a\}$. Nach Lemma 2.1.7, ist h daher in ganz G analytisch. \square

Der Identitätssatz ist oft praktisch, denn er erlaubt es aus dem reellen bekannten Funktionalgleichungen zwischen analytischen Funktionen ins komplexe zu übertragen. Betrachte zum Beispiel die Funktionen $\sin z, \cos z \in H(\mathbb{C})$. Wir wissen, dass für festes $w \in \mathbb{R}$ und reelle Werte von z die Funktionalgleichung

$$\sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$$

gilt. Da die linke und die rechte Seite analytisch sind folgt dass diese Beziehung für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt. Betrachtet man nun die beiden Seiten der Gleichung für festes z als Funktionen von w , so folgt genauso, dass die Gleichung für alle $z, w \in \mathbb{C}$ richtig ist.

Eine weitere Tatsache, die man natürlich auch viel elementarer zeigen kann, die nun aber ganz ohne weiteren Aufwand folgt, ist die Eindeutigkeit von Stammfunktionen.

3.1.6 Korollar. Sei G ein Gebiet, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$, und seien F_1, F_2 Stammfunktionen von f . Dann ist $F_1 - F_2$ konstant.

Beweis. Um dies zu sehen, sei $w \in G$ gewählt, und $c := F_1(w) - F_2(w)$. Da F_1, F_2 differenzierbar und daher analytisch sind, ist die Taylorreihe von $F_1 - F_2$ um w in einer ganzen Kreisscheibe um w konvergent. Nun gilt $(F_1 - F_2)^{(k)} = 0$, $k \geq 1$, also ist $F_1(z) - F_2(z) = c$ für alle z in dieser Kreisscheibe. \square

Eine wichtige Konsequenz der Existenz von Stammfunktionen analytischer Funktionen ist die Existenz von Logarithmen und allgemeinen Potenzen.

3.1.7 Korollar. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen und homolog einfach zusammenhängend, und sei $f \in H(G)^*$. Dann existiert eine Funktion $g \in H(G)$ mit $f = \exp(g)$. Die Menge aller Funktionen $h \in H(G)$ mit $f = \exp(h)$ ist gegeben als $\{g + 2\pi i k : k \in \mathbb{Z}\}$.

Beweis. Wegen $f \in H(G)^*$ ist $\frac{f'}{f} \in H(G)$. Da G homolog einfach zusammenhängend ist, existiert $g \in H(G)$ mit $g' = \frac{f'}{f}$. Betrachte die Funktion $\hat{f} := \exp(g)$, dann ist $\hat{f} \in H(G)^*$. Es gilt

$$\hat{f}'(z) = \exp(g(z)) \cdot g'(z) = \hat{f}(z) \frac{f'(z)}{f(z)},$$

also ist

$$\left(\frac{f}{\hat{f}}\right)'(z) \frac{f'(z)\hat{f}(z) - f(z)\hat{f}'(z)}{\hat{f}(z)^2} = 0.$$

Es folgt $f(z) = c\hat{f}(z)$ für eine gewisse Konstante $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Die Funktion g ist nur bis auf eine additive Konstante durch $g' = \frac{f'}{\hat{f}}$ festgelegt, also können wir g so wählen, daß $f(z) = \hat{f}(z)$.

Die letzte Behauptung folgt da $\exp(w) = 1$ genau dann, wenn $w = 2\pi ik$ mit $k \in \mathbb{Z}$. \square

Man nennt eine Funktion h mit $\exp(h) = f$ auch einen *Logarithmus von f* . Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen, homolog einfach zusammenhängend, und sei $0 \notin G$. Dann ist $\text{id}_G \in H(G)^*$. Eine Funktion $g \in H(G)$ mit $z = \exp(g(z))$, $z \in G$, nennt man einen *Zweig des Logarithmus* auf G , und schreibt auch $g(z) =: \log z$. Man beachte, dass diese Schreibweise eigentlich irreführend ist, denn g ist ja nicht eindeutig festgelegt. Erst wenn man sich an einer Stelle $z_0 \in G$ auf einen Wert $g(z_0) = w_0$ mit $\exp(w_0) = z_0$ festlegt, ist g eindeutig auf ganz G bestimmt.

Sei nun g ein Zweig des Logarithmus auf G , und schreibe $z \in G$ als $z = re^{i\vartheta}$ mit $r > 0$, $\vartheta \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$re^{i\vartheta} = \exp(\text{Re } g(z) + i \text{Im } g(z)) = \exp(\text{Re } g(z)) \cdot \exp(i \text{Im } g(z)),$$

und daher $\text{Re } g(z) = \ln r$ und $\text{Im } g(z) = \vartheta + 2\pi k$ mit einem $k \in \mathbb{Z}$.

3.1.8 Bemerkung. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen, homolog einfach zusammenhängend, und sei $0 \notin G$. Weiters sei $c \in \mathbb{C}$, und $\log z$ ein Zweig des Logarithmus auf G . Dann bezeichnet man

$$z^c := \exp(c \log z), \quad z \in G,$$

und spricht von einem *Zweig der Potenz z^c* . Auch diese Bezeichnung ist irreführend, da z^c erst dann eindeutig festgelegt ist wenn man einen gewissen Zweig des Logarithmus ausgewählt hat.

Schreibe wieder $z = re^{i\vartheta}$, dann ist, für ein gewisses $k \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} z^c &= \exp(c(\ln r + i\vartheta + 2\pi ik)) = \\ &= \exp(\text{Re } c \cdot \ln r - \text{Im } c \cdot (\vartheta + 2\pi k)) \cdot \exp(i(\text{Re } c \cdot (\vartheta + 2\pi k) + \text{Im } c \cdot \ln r)). \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

Zum Beispiel könnte das Symbol 1^i also die Werte $\exp(-2\pi k)$ für irgendein $k \in \mathbb{Z}$ bedeuten. Auch die, durch die Schreibweise z^c suggerierten Rechenregeln wie zum Beispiel $z^c \cdot w^c = (z \cdot w)^c$ sind im allgemeinen falsch.

Interessant sind jedoch die folgende Feststellungen, die man unmittelbar aus der Formel (3.1.1) erhält:

(i) Ist $c \in \mathbb{Z}$, so ist der Wert von z^c eindeutig bestimmt, und zwar gilt

$$z^c = \begin{cases} \underbrace{z \cdot \dots \cdot z}_{c\text{-mal}}, & c \in \mathbb{N} \\ 1, & c = 0 \\ [\underbrace{z \cdot \dots \cdot z}_{-c\text{-mal}}]^{-1}, & c \in -\mathbb{N} \end{cases}$$

- (ii) Ist $n \in \mathbb{N}$ und $c := \frac{1}{n}$, so besitzt z^c genau n mögliche Werte. Ist w_0 einer von diesen, so erhält man alle möglichen Werte als

$$w_k = w_0 e^{i \frac{2\pi k}{n}}, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Diese Werte sind genau jene komplexen Zahlen w mit $w^n = z$. Dies zeigt, dass die hier definierte „Funktion“ $z^{\frac{1}{n}}$ doch irgendwas mit der „ n -ten Wurzel“ zu tun hat.

//

Wir wollen noch explizit festhalten:

3.1.9 Bemerkung. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen und homolog einfach zusammenhängend, sei $f \in H(G)^*$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann existiert $g \in H(G)$ mit $g^n = f$.

//

3.2 Der Satz vom logarithmischen Residuum

3.2.1 Satz (vom logarithmischen Residuum). Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen und $g \in H(G)^*$. Weiters seien $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m$ paarweise verschiedene Punkte in G , $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_m \in \mathbb{N}$, und γ ein geschlossener rektifizierbarer Weg in G der in G nullhomolog ist und so dass keiner der Punkte a_i, b_j in $\gamma([0, 1])$ liegt. Betrachte die Funktion

$$f(z) := \prod_{i=1}^n (z - a_i)^{\alpha_i} \prod_{j=1}^m (z - b_j)^{-\beta_j} g(z).$$

Dann ist $f \in H(G \setminus \{a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m\})^*$ und es gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta = \sum_{i=1}^n \alpha_i n(\gamma, a_i) - \sum_{j=1}^m \beta_j n(\gamma, b_j).$$

Beweis. Wir differenzieren f nach der Produktregel:

$$\begin{aligned} f'(z) &= \sum_{k=1}^n \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n (z - a_i)^{\alpha_i} \cdot \alpha_k (z - a_k)^{\alpha_k - 1} \right) \prod_{j=1}^m (z - b_j)^{-\beta_j} g(z) + \\ &+ \prod_{i=1}^n (z - a_i)^{\alpha_i} \sum_{l=1}^m \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^m (z - b_j)^{-\beta_j} (-\beta_l) (z - b_l)^{-\beta_l - 1} \right) g(z) + \\ &+ \prod_{i=1}^n (z - a_i)^{\alpha_i} \prod_{j=1}^m (z - b_j)^{-\beta_j} g'(z) \end{aligned}$$

Es folgt

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{z - a_k} - \sum_{l=1}^m \frac{\beta_l}{z - b_l} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Da $\frac{g'}{g} \in H(G)$ ist und γ in G nullhomolog, folgt wegen dem Cauchy'schen Integralsatz das $\int_{\gamma} \frac{g'(\zeta)}{g(\zeta)} d\zeta = 0$. Die behauptete Formel folgt nun aus der Definition der Umlaufzahl. \square

Dieser Satz hat einige wichtige Konsequenzen.

3.2.2 Korollar. Sei G ein Gebiet, $f \in H(G)$, und $w \in \mathbb{C}$. Weiters sei γ ein geschlossener rektifizierbarer Weg in G der nullhomolog in G ist, und sodass keine w -Stelle von f auf γ liegt. Seien a_1, a_2, \dots die (endlich oder abzählbar vielen) w -Stellen von f in G mit entsprechenden Vielfachheiten $\alpha_k \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta) - w} d\zeta = \sum_k \alpha_k n(\gamma, a_k)$$

Beweis. Sei zunächst angenommen, dass f nun endlich viele w -Stellen in G hat, und seien diese a_1, \dots, a_n mit Vielfachheiten $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Dann ist

$$f(z) - w = \prod_{i=1}^n (z - a_i)^{\alpha_i} g(z)$$

mit $g(z) \in H(G)^*$. Die behauptete Formel folgt nun unmittelbar aus Satz 3.2.1.

Um den allgemeinen Fall zu behandeln konstruieren wir eine kleinere Menge $\hat{G} \subseteq G$ auf welches wir den eben gezeigten Spezialfall anwenden können. Dazu sei $R := \max_{t \in [0,1]} |\gamma(t)|$ und $\delta := d(\partial G, \gamma([0,1]))$. Betrachte die Menge

$$\hat{G} := \left\{ z \in G : d(z, \partial G) > \frac{\delta}{2} \right\} \cap U_{2R}(0).$$

Dann ist $\hat{G} \subseteq G$ offen, $\overline{\hat{G}} \subseteq G$ kompakt, und $\gamma([0,1]) \subseteq \hat{G}$. Da f nicht konstant ist, kann \hat{G} nach dem Identitätssatz nur endlich viele w -Stellen von f enthalten. Sei nun $z \notin \hat{G}$ gegeben. Ist $|z| \geq 2R$, so liegt z in der unbeschränkten Komponente von $\mathbb{C} \setminus \gamma([0,1])$ und daher ist $n(z, \gamma) = 0$. Ist $|z| < 2R$, so muss $d(\partial G, z) \leq \frac{\delta}{2}$ gelten. Wähle $w \in \partial G$ mit $|z - w| = d(\partial G, z)$, und sei W die Komponente von $\mathbb{C} \setminus \gamma([0,1])$ welche w enthält. Wegen $\overline{U_{\frac{\delta}{2}}(w)} \cap \hat{G} = \emptyset$, ist $\overline{U_{\frac{\delta}{2}}(w)} \subseteq W$. Daher ist $n(z, \gamma) = n(w, \gamma)$. Da γ in G nullhomolog ist, ist $n(w, \gamma) = 0$. Wir sehen dass γ auch in \hat{G} nullhomolog ist. \square

Ist γ zum Beispiel ein Kreis, $\gamma(t) := z_0 + re^{2\pi it}$, so gilt $n(\gamma, z) = 0$ oder $= 1$ je nachdem ob z ausserhalb oder innerhalb von γ liegt. Dann zählt das Integral in Korollar 3.2.2 also gerade die Anzahl der w -Stellen von f innerhalb von γ (inklusive Vielfachheiten).

3.2.3 Satz. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f \in H(G)$, $a \in G$, $w_0 := f(a)$. Sei f nicht konstant in einer Umgebung von a und bezeichne $\alpha \in \mathbb{N}$ die Vielfachheit von a als w_0 -Stelle von f . Dann existieren Umgebungen U von w_0 und V von a , sodass für jedes $w \in U$ die Funktion f genau α einfache w -Stellen in V hat.

Beweis. Sei γ ein geschlossener rektifizierbarer Weg in G . Betrachte die Funktion

$$N(w) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta) - w} d\zeta, \quad w \in \mathbb{C} \setminus f(\gamma([0,1])).$$

Diese ist wohldefiniert, da, wegen $w \notin f(\gamma([0,1]))$, der Integrand eine stetige Funktion von $\zeta \in \gamma([0,1])$ ist.

Wir zeigen dass $N(w)$ stetig ist: Sei w festgehalten und setze $r := d(w, f(\gamma([0,1])))$, dann ist $r > 0$. Für $|z - w| < \frac{r}{2}$ gilt $|f(\zeta) - z| > \frac{r}{2}$, $\zeta \in \gamma([0,1])$, und wir erhalten

$$|N(z) - N(w)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\gamma} f'(\zeta) \left(\frac{1}{f(\zeta) - z} - \frac{1}{f(\zeta) - w} \right) d\zeta \right| =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\gamma} \frac{f'(\zeta)(z-w)}{(f(\zeta)-z)(f(\zeta)-w)} d\zeta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{\max_{\zeta \in \gamma([0,1])} |f'(\zeta)|}{\frac{r}{2} \cdot r} |z-w| \cdot V(\gamma).$$

Seien nun f, a, w_0, α wie im Satz angegeben. Da die w_0 -Stellen von f wie auch die Nullstellen von f' isoliert in G liegen, existiert $r > 0$ sodass $U_r(a) \subseteq G$, $f(z) \neq w_0$ und $f'(z) \neq 0$ für $z \in U_r(a) \setminus \{a\}$. Betrachte den Weg

$$\gamma(t) := a + \frac{r}{2} e^{2\pi i t}, \quad t \in [0, 1].$$

Dann ist γ ein geschlossener rektifizierbarer nullhomotoper Weg in G und es gilt

$$n(\gamma, z) = \begin{cases} 1, & |z-a| < \frac{r}{2} \\ 0, & |z-a| > \frac{r}{2} \end{cases}$$

Sei $\epsilon := \frac{1}{2}d(w_0, f(\gamma([0,1])))$, wegen unserer Wahl von r ist $\epsilon > 0$. Weiters ist $U_\epsilon(w_0) \cap f(\gamma([0,1])) = \emptyset$, also ist die Funktion $N(w)$ auf $U_\epsilon(w_0)$ definiert und stetig. Sie hat wegen Korollar 3.2.2 Werte in \mathbb{Z} und muß daher auf der zusammenhängenden Menge $U_\epsilon(w_0)$ konstant sein. Nun gilt $N(w_0) = \alpha$, also folgt das f für jedes $w \in U_\epsilon(w_0)$ genau α viele w -Stellen in $U_{\frac{r}{2}}(a)$ besitzt wobei diese entsprechend ihrer Vielfachheit oft gezählt werden. Wegen unserer Wahl von r hat f in $U_{\frac{r}{2}}(a) \setminus \{a\}$ nur einfache w -Stellen. Die Behauptung des Satzes folgt mit den Umgebungen $U := U_\epsilon(w_0)$ und $V := U_{\frac{r}{2}}(a)$. \square

3.2.4 Korollar. Es gilt

- (i) Satz von der Gebietstreue: Sei G ein Gebiet und $f \in H(G)$ nicht konstant. Dann ist $f(G)$ ebenfalls ein Gebiet.
- (ii) Satz von der inversen Funktion: Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f \in H(G)$, und sei f injektiv. Dann ist $f^{-1} : f(G) \rightarrow G$ analytisch. Es gilt stets $(f^{-1})'(f(z)) = \frac{1}{f'(z)}$, $z \in G$.

Beweis. Um (i) zu sehen, sei $w_0 \in f(G)$. Wähle $a \in G$ mit $f(a) = w_0$ und sei U die Umgebung aus Satz 3.2.3. Dann gilt $U \subseteq f(G)$. Wir zeigen (ii): Zunächst ist stets $f'(z) \neq 0$, denn wäre $f'(a) = 0$, so existieren nach Satz 3.2.3 für alle w aus einer gewissen Umgebung von $w_0 := f(a)$ mindestens zwei einfache w -Stellen. Ein Widerspruch, denn f ist injektiv. Weiters ist $f(G)$ offen und f^{-1} stetig, da, nach (i) angewandt auf f eingeschränkt auf beliebige offene Teilmengen von G , f offene Mengen auf offene Mengen abbildet.

Ist $w, \hat{w} \in f(G)$, $w = f(z)$, $\hat{w} = f(\hat{z})$, so gilt

$$\frac{(f^{-1})(w) - (f^{-1})(\hat{w})}{w - \hat{w}} = \frac{z - \hat{z}}{f(z) - f(\hat{z})} = \left[\frac{f(z) - f(\hat{z})}{z - \hat{z}} \right]^{-1}.$$

Lässt man hier $\hat{w} \rightarrow w$ streben, so folgt wegen der Stetigkeit von f^{-1} dass $\hat{z} \rightarrow z$, und daher $(f^{-1})'(w) = [f'(z)]^{-1}$. \square

Der Satz von der Gebietstreue wird oft auch als *Satz von der offenen Abbildung* bezeichnet.

3.2.5 Bemerkung. Sei $f \in H(G)$. Wie wir gesehen haben impliziert die Eigenschaft „ f injektiv“, dass $f'(z) \neq 0$, $z \in G$. Im Gegensatz zur Situation bei reellwertigen Funktionen einer reellen Veränderlichen gilt hier die Umkehrung

nicht. Eine lokale Version ist jedoch richtig: Sei $z_0 \in G$ und sei $f'(z_0) \neq 0$, dann existiert eine offene Umgebung $W \subseteq G$ von z_0 sodass $f|_W$ injektiv ist. Um dies zu sehen wähle U, V wie im Satz 3.2.3 mit $w_0 := f(z_0)$ und setze $W := V \cap f^{-1}(U)$. //

3.2.6 Satz (von Rouché). Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen, und seien $f, g \in H(G)$. Sei weiters γ ein geschlossener rektifizierbarer Weg in G , der in G nullhomolog ist. Bezeichne mit a_1, a_2, \dots bzw. b_1, b_2, \dots die (endlichen oder unendlichen) Folgen der Nullstellen von f bzw. g in G , mit entsprechenden Vielfachheiten α_k bzw. β_k . Gilt

$$|f(z) + g(z)| < |f(z)| + |g(z)|, \quad z \in \gamma([0, 1]),$$

so folgt

$$\sum_k \alpha_k n(\gamma, a_k) = \sum_k \beta_k n(\gamma, b_k).$$

Beweis. Sei

$$\tilde{G} := \{z \in G : |f(z) + g(z)| < |f(z)| + |g(z)|, f(z) \neq 0, g(z) \neq 0\},$$

dann ist \tilde{G} offen und γ ein geschlossener rektifizierbarer Weg in \tilde{G} . Die Funktion $h(z) := \frac{f(z)}{g(z)}$ ist analytisch in \tilde{G} , und es gilt

$$|h(z) + 1| < |h(z)| + 1, \quad z \in \tilde{G}.$$

Daher kann $h(z)$ für $z \in \tilde{G}$ keine nichtnegative reelle Zahl sein, d.h. $h(\tilde{G}) \subseteq \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$.

Sei nun $\log z$ ein Zweig des Logarithmus der in $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ analytisch ist. Dann ist $H(z) := \log(h(z)) \in H(\tilde{G})$, und es gilt

$$H'(z) = \frac{h'(z)}{h(z)} = \left(\frac{f(z)}{g(z)} \right)' \frac{g(z)}{f(z)} = \frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Die Funktion $\frac{f'}{f} - \frac{g'}{g} \in H(\tilde{G})$ hat also eine Stammfunktion, z.B. nämlich H . Es folgt dass

$$\sum_k \alpha_k n(\gamma, a_k) - \sum_k \beta_k n(\gamma, b_k) = \int_{\gamma} \left(\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} - \frac{g'(\zeta)}{g(\zeta)} \right) d\zeta = 0.$$

□

3.3 Das Maximumprinzip

3.3.1 Satz (Maximumprinzip). Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f \in H(G)$. Es gilt:

- (i) Sei zusätzlich G zusammenhängend. Existiert ein Punkt $a \in G$ mit $|f(a)| \geq |f(z)|$, $z \in G$, so ist f konstant. Die gleiche Schlußfolgerung gilt wenn man anstelle von $|f(a)| \geq |f(z)|$, $z \in G$, entweder $\operatorname{Re} f(a) \geq \operatorname{Re} f(z)$, $z \in G$, oder $\operatorname{Im} f(a) \geq \operatorname{Im} f(z)$, $z \in G$, voraussetzt.
- (ii) Sei G beschränkt und habe f eine stetige Fortsetzung \hat{f} auf \overline{G} . Dann gilt

$$\sup_{z \in G} |f(z)| = \max_{\zeta \in \partial G} |\hat{f}(\zeta)|.$$

(iii) Sei G zusammenhängend, und bezeichne mit $\partial_\infty G$ den Rand von G in \mathbb{C}_∞ , d.h.

$$\partial_\infty G := \begin{cases} \partial G & , \quad G \text{ beschränkt} \\ \partial G \cup \{\infty\} & , \quad G \text{ unbeschränkt} \end{cases}$$

Ist

$$M := \sup_{a \in \partial_\infty G} \limsup_{\substack{z \rightarrow a, \\ z \in G}} |f(z)| < \infty,$$

so folgt $|f(z)| \leq M$, $z \in G$.

Beweis. Um (i) zu zeigen sei angenommen f ist nicht konstant und sei $a \in G$. Wegen dem Satz von der offenen Abbildung enthält $f(G)$ eine ganze Umgebung von $f(a)$, also sicher auch Punkte mit größerem Betrag (bzw. größerem Real- oder Imaginärteil).

Wir kommen zu (ii). Da \hat{f} stetig ist und \overline{G} kompakt gibt es eine Stelle $a \in \overline{G}$ mit $|f(a)| = \max_{z \in \overline{G}} |f(z)|$. Angenommen $a \in G$, dann ist wegen (i) die Funktion f auf der Zusammenhangskomponente \hat{G} von G welche a enthält konstant. Nun ist $\partial \hat{G} \subseteq \partial G$ da \mathbb{C} lokal zusammenhängend ist, und wir schließen dass es einen Punkt \hat{a} in ∂G gibt mit $|f(\hat{a})| = |f(a)|$. Es folgt dass $|f|$ sein Maximum sicher auch am Rand annimmt, also

$$\sup_{z \in G} |f(z)| \leq \max_{\zeta \in \partial G} |\hat{f}(\zeta)|.$$

Die umgekehrte Ungleichung gilt wegen der Stetigkeit von \hat{f} .

Schließlich kommen wir zum Beweis von (iii). Sei $\delta > 0$ festgehalten und betrachte die Menge

$$H := \{z \in G : |f(z)| > M + \delta\},$$

und sei angenommen das $H \neq \emptyset$.

Da $|f|$ stetig ist, ist H offen. Ist $\infty \notin \partial_\infty G$, so ist G und damit auch H beschränkt. Ist $\infty \in \partial_\infty G$, so existiert $R > 0$ mit $|f(z)| < M + \delta$, $z \in G \setminus U_R(0)$, also ist auch in diesem Fall H beschränkt. Die Menge \overline{H} ist daher kompakt, und klarerweise gilt $\overline{H} \subseteq \overline{G} = G \cup \partial G$. Sei $a \in \partial G$, dann existiert $\epsilon > 0$ mit $|f(z)| < M + \delta$, $z \in G \cap U_\epsilon(a)$, also ist $a \notin \overline{H}$. Wir schließen dass $\overline{H} \subseteq G$. Die Funktion $f|_H$ ist analytisch und hat $f|_{\overline{H}}$ als stetige Fortsetzung, also folgt nach (ii) das

$$\sup_{z \in H} |f(z)| = \max_{\zeta \in \partial H} |\hat{f}(\zeta)|.$$

Ist $\zeta \in \partial H$, so folgt $\zeta \notin H$ da H offen ist, und daher $|f(\zeta)| \leq M + \delta$. Ein Widerspruch, denn wegen der Definition von H und der Annahme $H \neq \emptyset$ ist $\sup_{z \in H} |f(z)| > M + \delta$. \square

Das Maximumprinzip ist ein Satz der eigentlich in den Kontext der harmonischen bzw. subharmonischen Funktionen gehört. Darauf werden wir aber nicht eingehen.

Die folgende Verallgemeinerung des Maximumprinzips spielt oft eine wichtige Rolle. Dabei wird die Voraussetzung an die Beschränktheit am Rand abgeschwächt.

3.3.2 Satz (Prinzip von Phragmen-Lindelöf). Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen und homolog einfach zusammenhängend, sei $f \in H(G)$, und $M \geq 0$. Es existiere $\varphi \in H(G)^*$ mit $\sup_{z \in G} |\varphi(z)| < \infty$, und Mengen A, B mit $\partial_\infty G = A \cup B$, sodass

$$(i) \limsup_{\substack{z \rightarrow a \\ z \in G}} |f(z)| \leq M, \quad a \in A;$$

$$(ii) \limsup_{\substack{z \rightarrow b \\ z \in G}} |f(z)| \cdot |\varphi(z)|^\eta \leq M, \quad b \in B, \quad \eta > 0.$$

Dann folgt $|f(z)| \leq M, \quad z \in G$.

Beweis. Setze $K := \sup_{z \in G} |\varphi(z)|$. Da G homolog einfach zusammenhängend ist existiert $\psi \in H(G)$ mit $\varphi = \exp(\psi)$. Setze $g(z) := \exp(\eta\psi(z))$, $z \in G$, dann ist $g \in H(G)$ und es gilt $|g(z)| = \exp(\eta \operatorname{Re} \psi(z)) = [\exp(\operatorname{Re} \psi(z))]^\eta = |\varphi(z)|^\eta$.

Betrachte die Funktion $F(z) := f(z)g(z)K^{-\eta} \in H(G)$. Es gilt $|F(z)| = |f(z)| \cdot |\varphi(z)|^\eta K^{-\eta} \leq |f(z)|$, also folgt wegen (i)

$$\limsup_{\substack{z \rightarrow a, \\ z \in G}} |F(z)| \leq M, \quad a \in A,$$

und wegen (ii)

$$\limsup_{\substack{z \rightarrow b, \\ z \in G}} |F(z)| \leq M \cdot K^{-\eta}, \quad b \in B.$$

Aus Satz 3.3.1, (iii), erhalten wir $|F(z)| \leq \max\{M, MK^{-\eta}\}$, $z \in G$, und daher

$$|f(z)| \leq |\varphi(z)|^{-\eta} \max\{MK^\eta, M\}, \quad z \in G.$$

Für $\eta \rightarrow 0$ erhält man die gewünschte Aussage. □

3.3.3 Korollar. Sei $a \geq \frac{1}{2}$ und f analytisch in dem Winkelraum

$$G := \left\{ z \in \mathbb{C} : |\arg z| < \frac{\pi}{2a} \right\},$$

und sei $M \geq 0$. Existieren Konstanten $C > 0$ und $b \in (0, a)$, sodass

$$(i) \limsup_{\substack{z \rightarrow a \\ z \in G}} |f(z)| \leq M, \quad a \in \partial G;$$

$$(ii) |f(z)| \leq C \exp(|z|^b), \quad z \in G, \quad |z| \text{ hinreichend groß};$$

so folgt $|f(z)| \leq M, \quad z \in G$.

Beweis. Sei $c \in (b, a)$ festgehalten. Weiters sei $\log z \in H(G)$ jener Zweig des Logarithmus der Funktion $z \in H(G)^*$ mit $\log 1 = 0$. Setze

$$\varphi(z) := \exp(-\exp(c \log z)) = \exp(-z^c), \quad z \in G.$$

Schreibt man $z \in G$ als $z = re^{i\vartheta}$ mit $r > 0, |\vartheta| < \frac{\pi}{2a}$, so hat man $\log z = \ln r + i\vartheta$ und daher

$$|\varphi(z)| = \exp(-\operatorname{Re} \exp(c \ln r + ic\vartheta)) = \exp(-r^c \cos c\vartheta).$$

Wegen $0 < c < a$ ist $\inf_{|\vartheta| < \frac{\pi}{2a}} \cos c\vartheta =: \rho > 0$. Insbesondere ist stets $\cos c\vartheta \geq 0$ und daher $|\varphi(z)| \leq 1$. Klarerweise ist $\varphi \in H(G)^*$.

Sei nun $\eta > 0$ gegeben, dann gilt für $|z|$ hinreichend groß

$$|f(z)| \cdot |\varphi(z)|^\eta \leq C \exp(r^b) \cdot \exp(-r^c \cos c\vartheta)^\eta =$$

$$= C \exp(r^c(r^{b-c} - \eta \cos c\vartheta)) \leq C \exp(r^c(r^{b-c} - \eta\rho)), \quad z = re^{i\vartheta} \in G.$$

Wegen $b < c$ gilt $r^{b-c} \rightarrow 0$ für $r \rightarrow \infty$, und daher

$$\limsup_{\substack{z \rightarrow \infty \\ z \in G}} |f(z)| \cdot |\varphi(z)|^\eta = 0.$$

Mit der Zerlegung $\partial_\infty G = A \cup B$, $A := \partial G$, $B := \{\infty\}$, sind also die Voraussetzungen von Satz 3.3.2 erfüllt, und wir schließen daß $|f(z)| \leq M$, $z \in G$. \square

Als eine Anwendung des Maximumprinzips bestimmen wir die Automorphismengruppe des Einheitskreises. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen. Eine in G analytische Funktion f heißt ein *Automorphismus* von G , wenn f die Menge G bijektiv auf sich selbst abbildet. Die Menge aller Automorphismen von G bezeichnet man als $\text{Aut}(G)$. Offenbar bildet sie mit der Operation der Hintereinanderausführung eine Halbgruppe. Wegen dem Satz von der inversen Funktion ist $\langle \text{Aut}(G), \circ \rangle$ tatsächlich eine Gruppe.

Eine Charakterisierung von $\text{Aut}(\mathbb{D})$, wobei \mathbb{D} die offene Einheitskreisscheibe bezeichnet, erhält man aus der folgenden, auch anderwertig sehr nützlichen, Aussage.

3.3.4 Korollar (*Lemma von Schwarz*). Sei $f \in H(\mathbb{D})$, und gelte $|f(z)| \leq 1$, $z \in \mathbb{D}$, und $f(0) = 0$. Dann folgt $|f(z)| \leq |z|$, $z \in \mathbb{D}$, und $|f'(0)| \leq 1$. Gilt für ein $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ das $|f(z)| = |z|$, oder gilt $|f'(0)| = 1$, so existiert $c \in \mathbb{C}$, $|c| = 1$, sodass $f(z) = cz$, $z \in \mathbb{D}$.

Beweis. Wegen $f(0) = 0$ ist die Funktion

$$g(z) := \begin{cases} \frac{f(z)}{z}, & z \neq 0 \\ f'(0), & z = 0 \end{cases}$$

analytisch in \mathbb{D} , vgl. Korollar 3.1.5. Nach dem Maximumprinzip gilt für jedes $r \in (0, 1)$

$$|g(z)| \leq \max_{|\zeta|=r} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta|} \leq \frac{1}{r}, \quad |z| \leq r.$$

Lässt man $r \nearrow 1$ streben, so folgt $|g(z)| \leq 1$, $z \in \mathbb{D}$. Also folgt $|f(z)| \leq |z|$, $z \in \mathbb{D}$, und $|f'(0)| \leq 1$. Gilt für ein $z \in \mathbb{D}$ das $|f(z)| = |z|$ oder gilt $|f'(0)| = 1$, so nimmt $|g(z)|$ sein Maximum in einem inneren Punkt von \mathbb{D} an, und daher ist g konstant. \square

3.3.5 Korollar. Für $a \in \mathbb{D}$ bezeichne

$$b_a(z) := \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Dann gilt

$$\text{Aut}(\mathbb{D}) = \{cb_a : a \in \mathbb{D}, |c| = 1\}.$$

Beweis. Wir zeigen, dass für jedes $a \in \mathbb{D}$ und $z \in \mathbb{D}$ gilt $|b_a(z)| < 1$: Es ist

$$|b_a(z)|^2 = \frac{|z - a|^2}{|1 - \bar{a}z|^2} = \frac{(z - a)(\bar{z} - \bar{a})}{(1 - \bar{a}z)(1 - a\bar{z})} = \frac{|z|^2 + |a|^2 - a\bar{z} - \bar{a}z}{1 + |a|^2|z|^2 - a\bar{z} - \bar{a}z},$$

also ist $|b_a(z)| < 1$ genau dann, wenn

$$|z|^2 + |a|^2 - a\bar{z} - \bar{a}z < 1 + |a|^2|z|^2 - a\bar{z} - \bar{a}z.$$

oder wenn $0 < 1 + |a|^2|z|^2 - |a|^2 - |z|^2 = (1 - |a|^2)(1 - |z|^2)$. Diese Ungleichung ist richtig für $a, z \in \mathbb{D}$.

Wir berechnen für $a, z \in \mathbb{D}$

$$(b_a \circ b_{-a})(z) = \frac{\frac{z+a}{1+\bar{a}z} - a}{1 - \bar{a}\frac{z+a}{1+\bar{a}z}} = \frac{z + a - a - a\bar{a}z}{1 + \bar{a}z - \bar{a}z - a\bar{a}} = z,$$

also ist $b_a \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ und $(b_a)^{-1} = b_{-a}$. Wir sehen, dass in der behaupteten Gleichheit die Inklusion „ \supseteq “ gilt.

Sei $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ gegeben. Dann existiert $a \in \mathbb{D}$ mit $f(a) = 0$. Betrachte die Funktion $g := f \circ b_{-a}$, dann ist $g \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ und es gilt $g(0) = 0$. Sei $h \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ das Inverse von g , sodass also $g(h(z)) = z$, $z \in \mathbb{D}$. Es ist $h(0) = 0$, und

$$1 = g'(h(z))h'(z), \quad z \in \mathbb{D}.$$

Speziell für $z = 0$ haben wir $1 = g'(0)h'(0)$. Nach dem Lemma von Schwarz gilt $|g'(0)|, |h'(0)| \leq 1$. Wegen $1 = |g'(0)| \cdot |h'(0)|$ muß in beiden Ungleichungen die Gleichheit gelten. Nach dem Lemma von Schwarz existiert $c \in \mathbb{C}$, $|c| = 1$, mit $g(z) = cz$, $z \in \mathbb{D}$. Es folgt $f(z) = cb_a(z)$, $z \in \mathbb{D}$. \square

Die Funktionen b_a heißen auch *Blaschke-Faktoren für den Einheitskreis*.

3.4 Isolierte Singularitäten

3.4.1 Definition. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen und $w \in G$. Ist $f \in H(G \setminus \{w\})$, so sagen wir f hat eine *isolierte Singularität an der Stelle w* . //

Die Funktion f habe an der Stelle w eine isolierte Singularität. Dann definieren wir eine Zahl $N \in \mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}$ als

$$N := \inf \left\{ n \in \mathbb{N}_0 : \lim_{z \rightarrow w} (z - w)^{n+1} f(z) = 0 \right\}. \quad (3.4.1)$$

3.4.2 Definition. Die isolierte Singularität w heißt

- (i) *hebbar*, wenn $N = 0$.
- (ii) *Polstelle der Vielfachheit N* , wenn $0 < N < +\infty$.
- (iii) *wesentliche Singularität*, wenn $N = +\infty$.

//

Die folgende Aussage zeigt, dass tatsächlich je größer N ist die Singularität umso gewichtiger ist.

3.4.3 Satz. Die Funktion f habe an der Stelle w eine isolierte Singularität. Dann ist w

- (i) *hebbar genau dann, wenn es eine Funktion $g \in H(G)$ gibt mit $g|_{G \setminus \{w\}} = f$.*
- (ii) *eine Polstelle der Vielfachheit N genau dann, wenn es $g \in H(G)$ gibt mit $g(w) \neq 0$ und*

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - w)^N}, \quad z \in G \setminus \{w\}.$$

(iii) eine wesentliche Singularität genau dann, wenn für jede Umgebung U von w in G das Bild $f(U)$ dicht in \mathbb{C} ist.

Beweis. Sei N definiert wie in (3.4.1), und sei vorausgesetzt dass $N < +\infty$. Betrachte die Funktion

$$h(z) := \begin{cases} (z-w)^{N+1}f(z), & z \in G \setminus \{w\} \\ 0, & z = w \end{cases}$$

Dann ist h stetig auf G und analytisch in $G \setminus \{w\}$. Nach Lemma 2.1.7 folgt dass $h \in H(G)$. Weiters ist $h(w) = 0$, also ist

$$g(z) := \frac{h(z)}{z-w} \in H(G),$$

und offenbar gilt $f(z) = \frac{g(z)}{(z-w)^N}$, $z \in G \setminus \{w\}$.

Ist $N = 0$, so ist g eine analytische Fortsetzung von f auf G , d.h. es gilt „(i), \Rightarrow “. Um „(ii), \Rightarrow “ zu zeigen, sei angenommen dass $N \geq 1$. Wäre $g(w) = 0$, so wäre $\lim_{z \rightarrow w} (z-w)^N f(z) = \lim_{z \rightarrow w} g(z) = 0$, ein Widerspruch zur Definition von N . Die Implikationen „(i), \Leftarrow “, sowie „(ii), \Leftarrow “, sind klar.

Es gilt, im Falle $N = 0$, dass

$$\exists \lim_{z \rightarrow w} f(z) \in \mathbb{C},$$

und im Falle $N \geq 1$, dass

$$\lim_{z \rightarrow w} |f(z)| = \infty.$$

Es gibt also eine Umgebung U von w , sodass

$$|f(z)| \begin{cases} \leq |\lim_{z \rightarrow w} f(z)| + 1, & N = 0 \\ \geq 1, & N \geq 1 \end{cases}$$

Insbesondere ist $f(U)$ nicht dicht in \mathbb{C} , und wir haben „(iii), \Leftarrow “ gezeigt.

Sei nun angenommen, dass für eine gewisse Kugel $U_r(w)$ das Bild $f(U_r(w))$ nicht dicht in \mathbb{C} ist. Wähle eine Kugel $U_{r_0}(w_0) \subseteq \mathbb{C} \setminus f(U_r(w))$, und betrachte die Funktion

$$h(z) := \frac{1}{f(z) - w_0}, \quad z \in U_r(w) \setminus \{w\}$$

Dann ist $h \in H(U_r(w) \setminus \{w\})^*$, und es gilt $|h(z)| \leq \frac{1}{r_0}$, $z \in U_r(w) \setminus \{w\}$. Nach der bereits bewiesenen Aussage (i), existiert $\hat{h} \in H(U_r(w))$ mit $\hat{h}|_{U_r(w) \setminus \{w\}} = h$. Es folgt

$$f(z) = w_0 + \frac{1}{h(z)} = \frac{w_0 \hat{h}(z) + 1}{\hat{h}(z)}, \quad z \in U_r(w) \setminus \{w\}.$$

Da \hat{h} nicht identisch Null ist, existiert $n \in \mathbb{N}_0$ mit $\hat{h}(z) = (z-w)^n \tilde{h}(z)$, $\tilde{h} \in H(U_r(w))$, $\tilde{h}(w) \neq 0$. Wir erhalten

$$\lim_{z \rightarrow w} (z-w)^{n+1} f(z) = \lim_{z \rightarrow w} \left[(z-w) \frac{w_0 \hat{h}(z) + 1}{\tilde{h}(z)} \right] = 0,$$

also ist $N < \infty$. □

Die Implikation „(i), \Rightarrow “ heißt auch der *Riemann'sche Hebbarkeitssatz*, die Implikation „(iii), \Rightarrow “ der *Satz von Casorati-Weierstraß*.

3.4.4 Bemerkung. Ist $G \subseteq \mathbb{C}$ offen und enthält G das Komplement eines gewissen Kreises $\overline{U_R(0)}$, d.h. ist $G \cup \{\infty\} \subseteq \mathbb{C}_\infty$ eine offene Umgebung von ∞ , und ist $f \in H(G)$, so sagt man f hat eine *isolierte Singularität bei ∞* . Diese heißt hebbar, Pol der Ordnung N , bzw. wesentlich, je nachdem ob die Zahl

$$N := \inf \left\{ n \in \mathbb{N} : \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{f(z)}{z^{n+1}} = 0 \right\}$$

gleich 0, endlich und positiv, oder gleich ∞ ist. Betrachtet man die Funktion $g(z) := f(\frac{1}{z})$, so ist $g \in H(U_{\frac{1}{R}}(0)) \setminus \{0\}$. Weiters gilt

$$\lim_{z \rightarrow 0} z^{n+1} g(z) = \lim_{w \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{w}\right)^{n+1} g\left(\frac{1}{w}\right) = \lim_{w \rightarrow \infty} \frac{f(w)}{w^{n+1}},$$

also stimmt die gerade für f definierte Zahl N mit der für g definierten Zahl N aus (3.4.1) überein.

Insbesondere überträgt sich der Satz von Casorati-Weierstraß: Sei f analytisch außerhalb eines gewissen Kreises $\overline{U_R(0)}$ und habe f bei ∞ eine wesentliche Singularität, dann ist $f(\mathbb{C} \setminus \overline{U_R(0)})$ dicht in \mathbb{C} . //

Wir wollen anmerken, dass wir nur deswegen den Begriff der isolierten Singularität bei ∞ gesondert definieren müssen, weil wir noch nicht erklärt haben was eine analytische Abbildung von $G \subseteq \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ ist.

3.4.5 Korollar. *Es gilt*

$$\{az + b : a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{C}\} = \text{Aut } \mathbb{C} = \{f \in H(\mathbb{C}) : f \text{ injektiv}\}.$$

Beweis. Die Inklusionen „ \subseteq “ sind trivial. Sei $f \in H(\mathbb{C})$ injektiv. Die Menge $f(\mathbb{D})$ ist offen und es gilt $f(\mathbb{D}) \cap f(\overline{\mathbb{D}}^c) = \emptyset$. Nach dem Satz von Casorati-Weierstraß ist ∞ keine wesentliche Singularität von f . Also gibt es ein $n \in \mathbb{N}_0$ mit $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z^n} f(z) = 0$. Wegen Korollar 3.1.2 ist f ein Polynom. Da f injektiv ist, kann f nur Grad 1 haben. \square

3.5 Die Laurententwicklung

Hat die Funktion f an der Stelle w eine isolierte Singularität, so gestattet sie lokal um w eine Entwicklung in eine Reihe, ähnlich wie eine bei w analytische Funktion eine Entwicklung in eine Potenzreihe gestattet.

3.5.1 Satz. *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen, $w \in G$, und sei $f \in H(G \setminus \{w\})$. Dann existiert eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, sodass die Reihe*

$$\text{LR}(f, z) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - w)^n$$

auf der größten punktierten Kreisscheibe $U_R(w) \setminus \{w\}$ die ganz in G liegt lokal gleichmäßig konvergiert und sodass $f(z) = \text{LR}(f, z)$, $z \in U_R(w) \setminus \{w\}$. Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ ist durch f eindeutig bestimmt, und es gilt

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial U_r(w)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - w)^{n+1}} d\zeta, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad 0 < r < R.$$

Die Reihe $\text{LR}(f, z)$ heißt die Laurent-Reihe von f um die Stelle w .

Beweis. Sei $0 < r' < r < R$. Wir betrachten die Funktion

$$F_{r',r}(z) := \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial U_r(w)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial U_{r'}(w)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Nach der Homologieversion der Cauchy'schen Integralformel gilt

$$F_{r',r}(z) = \begin{cases} 0 & , \quad |z - w| < r' \text{ oder } |z - w| > r \\ f(z), & r' < |z - w| < r \end{cases} \quad (3.5.1)$$

Setze

$$f_{1,r}(z) := \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial U_r(w)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in U_r(w),$$

$$f_{2,r}(z) := \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial U_r(w)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \overline{U_r(w)}.$$

Wegen Lemma 2.2.2 ist $f_{1,r} \in H(U_r(w))$ und $f_{2,r} \in H(\mathbb{C} \setminus \overline{U_r(w)})$.

Sei $z \in \mathbb{C}$, dann gilt wegen der ersten Zeile in (3.5.1),

$$f_{1,r}(z) = f_{1,r'}(z), \quad |z - w| < r' < r < R,$$

$$f_{2,r}(z) = f_{2,r'}(z), \quad 0 < r' < r < |z - w|.$$

Also sind durch

$$f_1(z) := \lim_{r \nearrow R} f_{1,r}(z), \quad z \in U_R(w) \quad f_2(z) := \lim_{r \searrow 0} f_{2,r}(z), \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{w\},$$

Funktionen $f_1 \in H(U_R(w))$ und $f_2 \in H(\mathbb{C} \setminus \{w\})$ wohldefiniert. Wegen der zweiten Zeile in (3.5.1) gilt

$$f(z) = f_1(z) - f_2(z), \quad z \in U_R(w) \setminus \{w\}.$$

Sei $f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - w)^n$ die Taylorreihe von f_1 um w . Diese konvergiert zumindest in $U_R(w)$.

Die Funktion f_2 erfüllt offenbar $\lim_{z \rightarrow \infty} f_2(z) = 0$, also hat die Funktion $f_2(w + \frac{1}{z}) \in H(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ an der Stelle 0 eine hebbare Singularität und daher existiert $g \in H(\mathbb{C})$ mit $g(z) = f_2(w + \frac{1}{z})$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Weiters ist $g(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} f_2(w + \frac{1}{z}) = 0$. Sei $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$ die Taylorreihe von g um 0. Diese konvergiert auf ganz \mathbb{C} .

Setze nun

$$a_n := \begin{cases} c_n & , \quad n \in \mathbb{N}_0 \\ -b_{-n} & , \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

dann gilt, wenn man die Reihen für f_1 und f_2 addiert,

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - w)^n, \quad z \in U_R(w) \setminus \{w\},$$

und diese Reihe konvergiert lokal gleichmäßig in $U_R(w) \setminus \{w\}$.

Sei nun $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n (z-w)^n$ irgendeine Reihe die auf einer Kreislinie $|z-w| = r$ gleichmäßig konvergiert und sei $h(z)$ die dort dargestellte Funktion. Dann gilt wegen Beispiel 1.2.5

$$\begin{aligned} \oint_{|\zeta-w|=r} \frac{h(\zeta)}{(\zeta-w)^{n+1}} d\zeta &= \oint_{|\zeta-w|=r} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k (\zeta-w)^{k-n-1} d\zeta = \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k \oint_{|\zeta-w|=r} (\zeta-w)^{k-n-1} d\zeta = 2\pi i \alpha_n. \end{aligned}$$

□

3.5.2 Definition. Die Funktion f habe an der Stelle w eine isolierte Singularität. Sei $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z-w)^n$ die Laurent-Reihe von f um w . Dann heißt der Koeffizient a_{-1} das *Residuum von f an der Stelle w* , und wir schreiben

$$a_{-1} =: \text{Res}(f, w).$$

//

3.5.3 Satz (Residuensatz). Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen, seien $w_1, \dots, w_n \in G$, $f : G \setminus \{w_1, \dots, w_n\} \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch, und γ ein geschlossener rektifizierbarer Weg in $G \setminus \{w_1, \dots, w_n\}$ der in G nullhomolog ist. Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta = \sum_{k=1}^n n(\gamma, w_k) \text{Res}(f, w_k).$$

Beweis. Setze $m_k := n(\gamma, w_k)$, wähle $r_k > 0$ sodass die Kreisscheiben $\overline{U_{r_k}(w_k)}$ paarweise disjunkt sind und ganz in G liegen, und setze

$$\gamma_k(t) := w_k + r_k e^{-2\pi i m_k t}, \quad t \in [0, 1].$$

Dann ist

$$n(\gamma_k, w_j) = \begin{cases} 0 & , \quad k \neq j \\ -m_k & , \quad k = j \end{cases},$$

und daher

$$n(\gamma, w_j) + \sum_{k=1}^n n(\gamma_k, w_j) = 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Ist $w \notin G$ so gilt $n(\gamma, w) = n(\gamma_1, w) = \dots = n(\gamma_n, w) = 0$. Es folgt, da f analytisch in $G \setminus \{w_1, \dots, w_n\}$ ist, dass

$$\int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta + \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} f(\zeta) d\zeta = 0.$$

Nun gilt

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_k} f(\zeta) d\zeta &= \int_{\gamma_k} \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (\zeta - w_k)^n d\zeta = \sum_{n < -1} a_n \int_{\gamma_k} (\zeta - w_k)^n d\zeta + \\ &+ \text{Res}(f, w_k) \int_{\gamma_k} \frac{d\zeta}{\zeta - w_k} + \sum_{n \geq 0} a_n \int_{\gamma_k} (\zeta - w_k)^n d\zeta = -2\pi i m_k \text{Res}(f, w_k). \end{aligned}$$

□

Kapitel 4

Lokal gleichmäßige Konvergenz

4.1 Der metrische Raum $C(G, X)$

Wir kennen aus der Analysis zwei Konvergenzbegriffe für Folgen von Funktionen, die punktweise- bzw. die gleichmäßige Konvergenz. Im Kontext analytischer Funktionen ist ersterer zu schwach und zweiterer zu stark. Man kann eine Folge $f_n \in H(\mathbb{C})$ konstruieren, die auf \mathbb{C} punktweise gegen die, nicht einmal stetige, Funktion

$$f(z) := \begin{cases} 1, & z = 0 \\ 0, & z \neq 0 \end{cases}$$

konvergiert. Andererseits wird man von einem dem Kontext analytischer Funktionen angepaßten Konvergenzbegriff zumindest erwarten, dass die Partialsummen einer Potenzreihe, dem Prototyp analytischer Funktionen, gegen die Funktion konvergieren. Nun konvergiert aber zum Beispiel $f_n = \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!}$ auf jeder kompakten Menge gleichmäßig, aber nicht gleichmäßig auf ganz \mathbb{C} , gegen $\exp(z)$.

Wir studieren zunächst lokal gleichmäßige Konvergenz auf dem Raum aller stetigen Funktionen.

4.1.1 Definition. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen, und sei $\langle X, d \rangle$ ein vollständiger metrischer Raum.

- (i) Wir bezeichnen mit $C(G, X)$ die Menge aller stetigen Funktionen von G nach X .
- (ii) Eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Funktionen aus $C(G, X)$, heißt *lokal gleichmäßig konvergent* gegen $f \in C(G, X)$, wenn gilt: Für jeden Punkt $w \in G$ existiert eine Umgebung $U_w \subseteq G$ von w , sodass $(f_n|_{U_w})_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $f|_{U_w}$ konvergiert.

//

Man spricht manchmal auch von *kompakter Konvergenz* oder *normaler Konvergenz*. Die Bezeichnung „kompakte Konvergenz“ ist aus der folgenden Aussage motiviert.

4.1.2 Lemma. Seien $f_n, f \in C(G, X)$, $n \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ genau dann lokal gleichmäßig gegen f , wenn gilt: Für jede kompakte Menge $K \subseteq G$ konvergiert $(f_n|_K)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $f|_K$.

Beweis. Jeder Punkt von G besitzt eine kompakte Umgebung U die ganz in G liegt. Also folgt aus der Bedingung des Lemmas, dass $f_n \rightarrow f$ lokal gleichmäßig.

Sei umgekehrt vorausgesetzt, dass $f_n \rightarrow f$ lokal gleichmäßig, und sei eine kompakte Teilmenge K von G gegeben. Zu jedem Punkt $w \in K$ wähle eine Umgebung U_w sodass $f_n|_{U_w} \rightarrow f|_{U_w}$ gleichmäßig. Sei V_w offen, $w \in V_w \subseteq U_w$, dann gilt $\bigcup_{w \in K} V_w \supseteq K$. Also existieren endlich viele Punkte $w_1, \dots, w_n \in K$ mit $V_{w_1} \cup \dots \cup V_{w_n} \supseteq K$. Es folgt dass $f_n|_K \rightarrow f|_K$ gleichmäßig. \square

Im Sinne einer „guten“ Konvergenztheorie ist es interessant festzustellen, dass lokal gleichmäßige Konvergenz von einer Metrik induziert wird. Um dies zu sehen benützen wir die folgende Aussage.

4.1.3 Lemma. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen. Dann existiert eine Folge $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von kompakten Teilmengen von G mit

- (i) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n = G$.
- (ii) $K_n \subseteq \text{Int } K_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, wobei $\text{Int } K_{n+1}$ die Menge aller inneren Punkte von K_{n+1} bezeichnet.

Beweis. Setze

$$K_n := \left\{ z \in G : d(z, \mathbb{C} \setminus G) \geq \frac{1}{n} \right\} \cap \overline{U_n(0)}.$$

Dann ist K_n beschränkt und, als Durchschnitt abgeschlossener Mengen, auch abgeschlossen, und damit kompakt. Ist $w \in G$ gegeben, so ist $d(w, \mathbb{C} \setminus G) > 0$, also existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $w \in K_n$. Schließlich ist

$$K_n \subseteq \left\{ z \in G : d(z, \mathbb{C} \setminus G) > \frac{1}{n+1} \right\} \cap U_{n+1}(0) \subseteq K_{n+1},$$

und die Menge in der Mitte dieser Ungleichungskette ist offen. Also folgt $K_n \subseteq \text{Int } K_{n+1}$. \square

Sei eine Folge $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit den beiden Eigenschaften aus Lemma 4.1.3 festgehalten. Dann ist durch

$$\rho(f, g) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_{\infty}(f|_{K_n}, g|_{K_n})}{1 + d_{\infty}(f|_{K_n}, g|_{K_n})}, \quad f, g \in C(G, X),$$

wobei $d_{\infty}(f|_K, g|_K) := \sup_{z \in K} d(f(z), g(z))$, eine Metrik auf $C(G, X)$ definiert*.

Um den metrischen Raum $\langle C(G, X), \rho \rangle$ näher zu untersuchen benützen wir das folgenden Lemma.

4.1.4 Lemma. Es gilt

- (i) $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0, K \subseteq G \text{ kompakt } \forall f, g \in C(G, X) :$
 $d_{\infty}(f|_K, g|_K) < \delta \implies \rho(f, g) < \epsilon.$

*Die Metrik ρ hängt natürlich von der Wahl der Folge $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ab.

- (ii) $\forall \delta > 0, K \subseteq G$ kompakt $\exists \epsilon > 0 \forall f, g \in C(G, X) :$

$$\rho(f, g) < \epsilon \implies d_\infty(f|_K, g|_K) < \delta.$$

Beweis. Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\epsilon}{2}$, und wähle $\delta > 0$ sodass $\frac{x}{1+x} < \frac{\epsilon}{2}$ wenn $x \in [0, \delta)$. Setze $K := K_N$. Seien f, g sodass $d_\infty(f|_K, g|_K) < \delta$, dann ist $d_\infty(f|_{K_n}, g|_{K_n}) < \delta$, $n = 1, \dots, N$, und daher

$$\rho(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_\infty(f|_{K_n}, g|_{K_n})}{1 + d_\infty(f|_{K_n}, g|_{K_n})} < \sum_{n=1}^N \frac{1}{2^n} \frac{\epsilon}{2} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \epsilon.$$

Seien umgekehrt δ und K gegeben. Wegen $K \subseteq G = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{Int } K_n$ existiert $N \in \mathbb{N}$ sodass $K \subseteq K_N$. Wähle $\epsilon > 0$ sodass $0 < \frac{s}{1-s} < \delta$ wenn $s \in [0, 2^N \epsilon)$. Dann folgt $t < \delta$ wenn $\frac{t}{1+t} < 2^N \epsilon$. Seien f, g mit $\rho(f, g) < \epsilon$, dann ist

$$\frac{d_\infty(f|_{K_N}, g|_{K_N})}{1 + d_\infty(f|_{K_N}, g|_{K_N})} < 2^N \epsilon,$$

und wir erhalten

$$d_\infty(f|_K, g|_K) \leq d_\infty(f|_{K_N}, g|_{K_N}) < \delta.$$

□

4.1.5 Satz. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen, und $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von kompakten Teilmengen von G mit den Eigenschaften aus Lemma 4.1.3. Dann gilt:

- (i) Eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $f_n \in C(G, X)$, konvergiert bzgl. ρ gegen eine Funktion $f \in C(G, X)$ genau dann, wenn sie lokal gleichmäßig gegen f konvergiert.
- (ii) Eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $f_n \in C(G, X)$, ist Cauchy-Folge bzgl. ρ genau dann, wenn für jede kompakte Teilmenge K von G die Folge $(f_n|_K)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge bzgl. d_∞ ist.
- (iii) Für jede kompakte Menge $K \subseteq G$ ist die Einschränkungabbildung

$$\iota_K : \begin{cases} \langle C(G, X), \rho \rangle & \rightarrow \langle C(K, X), d_\infty \rangle \\ f & \mapsto f|_K \end{cases}$$

stetig.

- (iv) Eine Menge $W \subseteq C(G, X)$ ist offen in $\langle C(G, X), \rho \rangle$ genau dann, wenn es für jedes $f \in W$ ein $\delta > 0$ und $K \subseteq G$ kompakt gibt sodass

$$\{g \in C(G, X) : d_\infty(f|_K, g|_K) < \delta\} \subseteq W.$$

- (v) Der metrische Raum $\langle C(G, X), \rho \rangle$ ist vollständig.

Beweis. Für den Beweis von (i) und (ii), sei eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Funktionen aus $C(G, X)$ und $f \in C(G, X)$ gegeben.

Ist eine kompakte Teilmenge K von G , und $\delta > 0$ gegeben, wähle $\epsilon > 0$ wie in Lemma 4.1.4, (ii). Ist $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent bzgl. ρ gegen die Funktion f , so existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $\rho(f_n, f) < \epsilon$, $n \geq N$. Daraus folgt

$$d_\infty(f_n|_K, f|_K) < \delta, \quad n \geq N,$$

und wir sehen dass $f_n|_K$ gleichmäßig gegen $f|_K$ konvergiert. Ist $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge bzgl. ρ , so existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $\rho(f_n, f_m) < \epsilon$, $n, m \geq N$. Daraus folgt

$$d_\infty(f_n|_K, f_m|_K) < \delta, \quad n, m \geq N,$$

und wir sehen dass $(f_n|_K)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge bzgl. d_∞ ist.

Umgekehrt, sei $\epsilon > 0$ gegeben, und wähle $\delta > 0$ und $K \subseteq G$ kompakt wie in Lemma 4.1.4, (i). Ist $(f_n|_K)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent bzgl. d_∞ gegen $f|_K$, so existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $d_\infty(f_n, f) < \delta$, $n \geq N$. Daraus folgt

$$\rho(f_n, f) < \epsilon, \quad n \geq N,$$

und wir sehen dass f_n bzgl. ρ gegen f konvergiert. Ist $(f_n|_K)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge bzgl. d_∞ , so existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $d_\infty(f_n|_K, f_m|_K) < \delta$, $n, m \geq N$. Daraus folgt

$$\rho(f_n, f_m) < \epsilon, \quad n, m \geq N,$$

und wir sehen dass $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge bzgl. ρ ist.

Die Eigenschaft (iii) folgt nun unmittelbar: Sei $K \subseteq G$ kompakt. Ist $f_n \rightarrow f$ bzgl. ρ , so folgt $f_n|_K \rightarrow f|_K$ bzgl. d_∞ . Das bedeutet gerade, dass die Einschränkungabbildung stetig ist.

Für den Beweis von (iv) sei $W \subseteq C(G, X)$ und $f \in W$ gegeben. Ist W offen bzgl. ρ , so existiert $\epsilon > 0$ mit $\{g \in C(G, X) : \rho(f, g) < \epsilon\} \subseteq W$. Wegen Lemma 4.1.4, (i), folgt die Existenz von δ und K mit $\{g \in C(G, X) : d_\infty(f|_K, g|_K) < \delta\} \subseteq W$. Umgekehrt, seien δ und K gegeben mit $\{g \in C(G, X) : d_\infty(f|_K, g|_K) < \delta\} \subseteq W$. Wählt man ϵ wie in Lemma 4.1.4, (ii), so folgt $\{g \in C(G, X) : \rho(f, g) < \epsilon\} \subseteq W$.

Wir kommen zum Beweis der Vollständigkeit von $\langle C(G, X), \rho \rangle$. Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge bzgl. ρ . Dann ist für jede kompakte Teilmenge K von G , die Folge $(f_n|_K)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge bzgl. d_∞ . Daher existiert $f^K \in C(K, X)$ mit

$$f_n|_K \longrightarrow f^K \text{ bzgl. } d_\infty.$$

Insbesondere sehen wir, dass für jedes $x \in K$ die Folge $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ in X konvergiert. Da jeder Punkt $x \in G$ in irgendeiner kompakten Teilmenge liegt, konvergiert also $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ punktweise. Setze

$$f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x), \quad x \in G.$$

Da gleichmäßige Konvergenz sicher punktweise Konvergenz impliziert, schliessen wir, dass für jede kompakte Teilmenge $K \subseteq G$ gilt $f|_K = f^K$. Sei $w \in G$ gegeben, und wähle eine kompakte Umgebung U_w von w die ganz in G liegt. Dann gilt $f_n|_{U_w} \rightarrow f|_{U_w}$ gleichmäßig, und wir schliessen dass f stetig ist und f_n lokal gleichmäßig gegen f konvergiert. \square

4.1.6 Bemerkung. Der obige Satz zeigt insbesondere dass die Eigenschaften „ $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist konvergent gegen f “, „ $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge“, „ W ist offen“, „ W ist abgeschlossen“, „ W ist kompakt“, nicht von der Wahl der Folge $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in der Konstruktion von ρ abhängen. //

4.2 Analytische und meromorphe Funktionen

4.2.1 Der Raum $H(G)$

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen. Dann ist $H(G) \subseteq C(G, \mathbb{C})$. Wenn wir von Konvergenz in $H(G)$, offenen Mengen in $H(G)$, etc. sprechen, so meinen wir, wenn nichts anderes explizit gesagt wird, immer bzgl. einer von $C(G, \mathbb{C})$ induzierten Metrik ρ .

4.2.1 Satz. *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen.*

(i) *$H(G)$ ist ein abgeschlossener Teilraum von $C(G, \mathbb{C})$. Insbesondere ist $H(G)$ vollständig.*

(ii) *Ist $f_n \rightarrow f$ in $H(G)$, so folgt $f_n^{(k)} \rightarrow f^{(k)}$ in $H(G)$ für jedes $k \in \mathbb{N}$.*

Beweis. Sei $f_n \in C(G, \mathbb{C})$ und $f_n \rightarrow f \in C(G, \mathbb{C})$. Dann gilt für jeden rektifizierbaren Weg γ in G dass $f_n|_\gamma \rightarrow f|_\gamma$ gleichmäßig. Daher folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f_n(\zeta) d\zeta = \int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta.$$

Für den Beweis von (i) seien nun $f_n \in H(G)$, $n \in \mathbb{N}$, gegeben. Ist $\Delta := \Delta(a, b, c)$ ein Dreieck welches ganz in G liegt so folgt also

$$\oint_{\partial\Delta} f(\zeta) d\zeta = \lim_{n \rightarrow \infty} \oint_{\partial\Delta} f_n(\zeta) d\zeta = 0,$$

und wir schliessen dass $f \in H(G)$.

Sei $w_0 \in G$ und wähle $r > 0$ sodass $\overline{U_r(w_0)} \subseteq G$. Ist $f_n \rightarrow f$ in $C(G, \mathbb{C})$, so folgt das $f_n|_{\partial U_r(w_0)} \rightarrow f|_{\partial U_r(w_0)}$ gleichmäßig, und daher auch dass für jedes feste $w \in U_r(w_0)$

$$\frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - w)^{k+1}} \Big|_{\partial U_r(w_0)} \longrightarrow \frac{f(\zeta)}{(\zeta - w)^{k+1}} \Big|_{\partial U_r(w_0)}$$

gleichmäßig. Diese (gleichmäßige) Konvergenz ist sogar gleichmäßig für $w \in U_{\frac{r}{2}}(w_0)$. Also ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \oint_{\partial U_r(w_0)} \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - w)^{k+1}} d\zeta = \oint_{\partial U_r(w_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - w)^{k+1}} d\zeta,$$

gleichmäßig für $w \in U_{\frac{r}{2}}(w_0)$.

Für den Beweis von (i) seien nun $f_n \in H(G)$, $n \in \mathbb{N}$, mit $f_n \rightarrow f$ in $H(G)$ gegeben. Dann hat man wegen der allgemeinen Cauchy'schen Integralformel also $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n^{(k)}(w) = f^{(k)}(w)$ gleichmäßig in $U_{\frac{r}{2}}(w_0)$. \square

Oft ist es praktisch zu verwenden, dass sich aufgrund der Cauchy'schen Integralformel die Konvergenz analytischer Funktionen nach innen fortsetzen lässt.

4.2.2 Lemma. *Sei $f_n \in H(G)$, $n \in \mathbb{N}$, gegeben. Weiters sei $w \in G$ und $r > 0$, sodass $\overline{U_r(w)} \subseteq G$. Ist die Folge $(f_n|_{\partial U_r(w)})_{n \in \mathbb{N}}$ auf $\partial U_r(w)$ gleichmäßig konvergent, so ist $(f_n|_{U_r(w)})_{n \in \mathbb{N}}$ in $H(U_r(w))$ konvergent.*

Beweis. Wegen dem Maximumprinzip gilt

$$\sup_{z \in U_r(w)} |f_n(z) - f_m(z)| = \max_{\zeta \in \partial U_r(w)} |f_n(\zeta) - f_m(\zeta)|.$$

Also ist $(f_n|_{U_r(w)})_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $H(U_r(w))$. \square

4.2.3 Korollar. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen, und sei M eine abgeschlossene Teilmenge von G die keinen Häufungspunkt in G hat. Ist $f_n \in H(G)$ und gilt $f_n|_{G \setminus M} \rightarrow f|_{G \setminus M}$ in $H(G \setminus M)$, so hat f eine Fortsetzung $\hat{f} \in H(G)$ und es gilt $f_n \rightarrow \hat{f}$.

Beweis. Zu jedem Punkt $w \in M$ existiert $r > 0$ sodass $\overline{U_r(w)} \setminus \{w\} \subseteq G \setminus M$. \square

Sei G ein Gebiet und sei $g : G \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch und nicht konstant. Für $w \in \mathbb{C}$ und $D \subseteq G$ kompakt, bezeichnen wir mit $N(w, g, D) \in \mathbb{N}_0$ die Anzahl der w -Stellen von g in D gezählt gemäß ihrer Vielfachheit.

4.2.4 Satz (von Hurwitz). Sei G ein Gebiet, seien $f_n, f \in H(G)$ mit $f_n \rightarrow f$, und sei vorausgesetzt dass f nicht konstant ist. Weiters sei $w \in \mathbb{C}$. Ist $r > 0$ und $z_0 \in G$ sodass $D := \overline{U_r(z_0)} \subseteq G$ und sodass auf $\partial U_r(z_0)$ keine w -Stelle von f liegt, so existiert $N \in \mathbb{N}$ mit

$$N(w, f_n, D) = N(w, f, D), \quad n \geq N.$$

Beweis. Sei $\gamma(t) := z_0 + re^{2\pi it}$, $t \in [0, 1]$. Dann gilt nach Korollar 3.2.2

$$N(w, f, D) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta) - w} d\zeta.$$

Da $f_n \rightarrow f$ gleichmäßig auf $\partial U_r(z_0)$, hat, für hinreichend große Indizes n auch die Funktion f_n keine w -Stellen auf $\partial U_r(z_0)$, und daher gilt genauso

$$N(w, f_n, D) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'_n(\zeta)}{f_n(\zeta) - w} d\zeta.$$

Wegen $f_n \rightarrow f$ folgt auch $f'_n \rightarrow f'$ also $N(w, f_n, D) \rightarrow N(w, f, D)$. Da $N(w, f_n, D)$ nur ganzzahlige Werte annehmen kann, folgt die Behauptung. \square

4.2.5 Korollar. Sei G ein Gebiet, seien $f_n, f \in H(G)$ mit $f_n \rightarrow f$, und sei vorausgesetzt dass f nicht konstant ist. Dann gilt:

(i) Ist $A \subseteq \mathbb{C}$ festgehalten und gilt $f_n(G) \subseteq A$, $n \in \mathbb{N}$, so folgt dass auch $f(G) \subseteq A$.

(ii) Ist jede Funktion f_n , $n \in \mathbb{N}$, injektiv, so ist auch f injektiv.

Beweis. Um (i) zu sehen, sei $w \notin A$ gegeben. Nach dem Satz von Hurwitz gilt für jede ganz in G liegende Kreisscheibe D dass, für hinreichend große Indizes n ,

$$N(w, f, D) = N(w, f_n, D) = 0.$$

Für (ii) sei angenommen dass f ist nicht injektiv ist. Dann gibt es $z_1, z_2 \in G$, $z_1 \neq z_2$, mit $f(z_1) = f(z_2) =: w$. Wähle disjunkte abgeschlossene Kreisscheiben D_1, D_2 um z_1 bzw. z_2 . Dann gilt, für hinreichend große Indizes n ,

$$N(w, f_n, D_1) = N(w, f, D_1) > 0, \quad N(w, f_n, D_2) = N(w, f, D_2) > 0.$$

Also ist f_n , für große Werte von n , nicht injektiv, ein Widerspruch. \square

4.2.2 Der Raum $M(G)$

4.2.6 Definition. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen. Eine Funktion f heißt *meromorph in G* , wenn sie in G mit Ausnahme isolierter Singularitäten, die alle Pole sind, analytisch ist. Die Menge aller in G meromorphen Funktionen bezeichnen wir mit $M(G)$. //

4.2.7 Definition. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen. Wir bezeichnen mit \mathcal{D}_G die Menge aller Abbildungen $\vartheta : G \rightarrow \mathbb{Z}$ mit der Eigenschaft dass

$$\text{supp } \vartheta := \{z \in G : \vartheta(z) \neq 0\}$$

keinen Häufungspunkt in G hat. Man spricht von einer Abbildung $\vartheta \in \mathcal{D}_G$ auch als einem *Divisor in G* .

Für $\vartheta_1, \vartheta_2 \in \mathcal{D}_G$ sind Summe und Produkt punktweise definiert[†], d.h.

$$(\vartheta_1 + \vartheta_2)(z) := \vartheta_1(z) + \vartheta_2(z), \quad (\vartheta_1 \cdot \vartheta_2)(z) := \vartheta_1(z) \cdot \vartheta_2(z).$$

Weiters schreiben wir $\vartheta_1 \leq \vartheta_2$, wenn $\vartheta_1(z) \leq \vartheta_2(z)$, $z \in G$. //

Mit einer meromorphen Funktion ist wie folgt ein Divisor assoziiert, ihr *Nullstellendivisor*: Sei $f \in M(G) \setminus \{0\}$. Für $w \in G$ sei $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-w)^n$ die Laurent-Entwicklung von f mit Anschlußstelle w . Setze

$$\vartheta_f(w) := \min\{n \in \mathbb{Z} : a_n \neq 0\}.$$

4.2.8 Bemerkung. Sei $f \in M(G)$. Nach dem Riemann'schen Hebbarkeitssatz ist f genau dann analytisch an einer Stelle w , wenn $\vartheta_f(w) \geq 0$. Wir sehen, dass

$$H(G) = \{f \in M(G) : \vartheta_f \geq 0\}.$$

//

Man kann eine Funktion $f \in M(G)$ zu einer Funktion $\hat{f} : G \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ fortsetzen, nämlich durch

$$\hat{f}(z) := \begin{cases} f(z), & \vartheta_f(z) \geq 0 \\ \infty, & \vartheta_f(z) < 0 \end{cases} \quad (4.2.1)$$

Wenn nichts anderes explizit gesagt wird, sei \mathbb{C}_∞ im folgenden immer mit der chordalen Metrik χ versehen.

4.2.9 Lemma. Identifiziert man $M(G)$ wie oben mit einer Menge von Funktionen von G nach \mathbb{C}_∞ , so gilt $M(G) \subseteq C(G, \mathbb{C}_\infty)$.

Beweis. Sei $f \in M(G)$ und $w \in G$. Ist f an der Stelle w analytisch, so folgt $\lim_{z \rightarrow w} f(z) = f(w)$ bezüglich der euklidischen Metrik von \mathbb{C} . Daher gilt auch $\lim_{z \rightarrow w} f(z) = f(w)$ bezüglich der chordalen Metrik, d.h. $\lim_{z \rightarrow w} \hat{f}(z) = \hat{f}(w)$ in $(\mathbb{C}_\infty, \chi)$. Sei nun w ein Pol von f und schreibe

$$f(z) = (z - w)^{\vartheta_f(w)} f_1(z),$$

sodass f_1 analytisch und $f_1(w) \neq 0$ ist. Dann gilt also

$$\lim_{z \rightarrow w} |f(z)| = \infty,$$

[†]Beachte hier, dass die Vereinigung zweier diskreter Mengen wieder diskret ist.

d.h. $\lim_{z \rightarrow w} \hat{f}(z) = \infty$ in \mathbb{C}_∞ . \square

Wenn wir von Konvergenz in $M(G)$, offenen Mengen in $M(G)$, etc. sprechen, so meinen wir, wenn nichts anderes explizit gesagt wird, immer bzgl. einer von $C(G, \mathbb{C}_\infty)$ induzierten Metrik.

4.2.10 Bemerkung. Sei $f \in H(G \setminus \{w\})$, und habe f an der Stelle w eine wesentliche Singularität. Dann ist $f \in C(G \setminus \{w\}, \mathbb{C}_\infty)$, besitzt aber keine Fortsetzung $g \in C(G, \mathbb{C}_\infty)$. Dies folgt, da nach dem Satz von Casorati-Weierstraß der Grenzwert $\lim_{z \rightarrow w} f(z)$ nicht existieren kann. //

4.2.11 Lemma. Die Menge $M(G)$ ist, mit den punktweise erklärten algebraischen Operationen, eine \mathbb{C} -Algebra. Sie umfasst die Algebra $H(G)$. Es gilt

$$\vartheta_{f+g}(w) \geq \min\{\vartheta_f(w), \vartheta_g(w)\}, \quad \vartheta_{fg}(w) = \vartheta_f(w) + \vartheta_g(w).$$

Ist G ein Gebiet, so ist $M(G)$ sogar ein Körper, und es gilt

$$\vartheta_{\frac{1}{f}}(w) = -\vartheta_f(w), \quad f \in M(G) \setminus \{0\}.$$

Beweis. Seien $f, g \in M(G)$. Dann ist die Menge der gemeinsamen Analytizitätspunkte von f und g , als Vereinigung zweier diskreter Mengen, ebenfalls diskret.

Die Funktionen $f + g$ und $f \cdot g$ sind sicher analytisch an jeder Stelle wo beide, f und g , analytisch sind. Sie sind also analytisch in G mit (möglicher) Ausnahme isolierter Singularitäten. Sei nun $w \in G$, und seien

$$f(z) = \sum_{n=\vartheta_f(w)}^{\infty} a_n(z-w)^n, \quad g(z) = \sum_{n=\vartheta_g(w)}^{\infty} b_n(z-w)^n,$$

die entsprechenden Laurent- (bzw. Potenzreihen-) entwicklungen. Setze $a_n := 0$, $n < \vartheta_f(w)$ und $b_n := 0$, $n < \vartheta_g(w)$. Dann gilt

$$f(z) + g(z) = \sum_{n=\min\{\vartheta_f(w), \vartheta_g(w)\}}^{\infty} (a_n + b_n)(z-w)^n.$$

Also hat $f + g$ keine wesentliche Singularität an der Stelle w , und es gilt $\vartheta_{f+g}(w) \geq \min\{\vartheta_f(w), \vartheta_g(w)\}$. Weiters haben wir

$$(fg)(z) = (z-w)^{\vartheta_f(w)+\vartheta_g(w)} \cdot \sum_{n=\vartheta_f(w)}^{\infty} a_n(z-w)^{n-\vartheta_f(w)} \cdot \sum_{n=\vartheta_g(w)}^{\infty} b_n(z-w)^{n-\vartheta_g(w)}.$$

Daher hat fg keine wesentliche Singularität an der Stelle w , und es gilt $\vartheta_{fg}(w) = \vartheta_f(w) + \vartheta_g(w)$.

Sei nun zusätzlich vorausgesetzt dass G ein Gebiet ist, und sei $f \in M(G) \setminus \{0\}$. Dann hat die Menge der Nullstellen von f keinen Häufungspunkt in G . Ist $w \in G$ weder Null- noch Polstelle von f , so ist $\frac{1}{f}$ analytisch an der Stelle w . Wir sehen bereits, dass f in G nur isolierte Singularitäten hat. Sei $w \in G$, und sei

$$f(z) = \sum_{n=\vartheta_f(w)}^{\infty} a_n(z-w)^n,$$

die entsprechende Laurent- (bzw. Potenzreihen-) entwicklung. Dann gilt

$$\left(\frac{1}{f}\right)(z) = (z - w)^{-\vartheta_f(w)} \left[\sum_{n=\vartheta_f(w)}^{\infty} a_n (z - w)^{n-\vartheta_f(w)} \right]^{-1},$$

und daher hat $\frac{1}{f}$ an der Stelle w keine wesentliche Singularität. Wir sehen weiters, dass $\vartheta_{\frac{1}{f}}(w) = -\vartheta_f(w)$. \square

Ist G kein Gebiet, so besitzt $H(G)$ nichttriviale Nullteiler: Sei $G = G_1 \cup G_2$ mit G_1, G_2 offen, disjunkt und nichtleer. Dann gilt für die entsprechenden Indikatorfunktionen $\chi_{G_1} \cdot \chi_{G_2} = 0$.

4.2.12 Korollar. Sei G ein Gebiet und $f, g \in M(G)$. Dann ist $\frac{f}{g} \in H(G)$ genau dann, wenn $\vartheta_f \geq \vartheta_g$.

Beweis. Da $M(G)$ ein Körper ist, ist $\frac{f}{g} \in M(G)$. Weiters haben wir

$$\vartheta_{\frac{f}{g}} = \vartheta_f - \vartheta_g,$$

also $\vartheta_{\frac{f}{g}} \geq 0$ genau dann, wenn $\vartheta_f \geq \vartheta_g$. \square

4.2.13 Bemerkung. Der Satz von Hurwitz impliziert sofort die folgende Aussage: Seien $f_n \in H(G)$, $n \in \mathbb{N}$, $f \in H(G)$ nicht konstant, und sei $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ in $H(G)$. Dann existiert für jedes $w \in G$ ein Index N_w sodass $\vartheta_{f_n}(w) = \vartheta_f(w)$, $n \geq N_w$.

Mit der gleichen Beweisidee (Satz vom Logarithmischen Residuum) kann man auch Polstellen zählen, und erhält die folgende Aussage: Seien $f_n \in M(G)$, $n \in \mathbb{N}$, $f \in M(G)$ nicht konstant, und sei $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ in $M(G)$. Dann existiert für jedes $w \in G$ ein Index N_w sodass $\vartheta_{f_n}(w) = \vartheta_f(w)$, $n \geq N_w$. //

4.2.14 Satz. Sei G ein Gebiet. Dann gilt

$$\overline{M(G)} = M(G) \cup \{\infty\}, \quad \overline{H(G)} = H(G) \cup \{\infty\}.$$

wobei die Abschlüsse in $C(G, \mathbb{C}_\infty)$ zu verstehen sind und „ ∞ “ die konstante Funktion mit dem Wert ∞ bezeichnet.

Beweis. Sei $f_n \in M(G)$, $n \in \mathbb{N}$, und sei $f_n \rightarrow f$ in $C(G, \mathbb{C}_\infty)$. Sei $w \in G$ mit $f(w) \neq \infty$. Dann existiert $r > 0$ sodass $\overline{U_r(w)} \subseteq G$ und $\chi(f(z), f(w)) \leq \frac{1}{3}\chi(\infty, f(w))$, $z \in \overline{U_r(w)}$. Weiters existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $\chi(f_n(z), f(z)) \leq \frac{1}{3}\chi(\infty, f(w))$, $n \geq N$, $z \in \overline{U_r(w)}$. Insgesamt erhält man $\chi(f_n(z), f(w)) \leq \frac{2}{3}\chi(\infty, f(w))$, $n \geq N$, $z \in \overline{U_r(w)}$, und daher $\chi(f_n(z), \infty) \geq \frac{1}{3}\chi(\infty, f(w)) > 0$. Innerhalb jedes festen Kreises sind die Metriken χ und d äquivalent, also folgt dass $f_n|_{\overline{U_r(w)}} \rightarrow f|_{\overline{U_r(w)}}$ gleichmäßig bezüglich d . Also ist f analytisch in $U_r(w)$.

Sei nun $w \in G$ sodass $f(w) = \infty$. Da stets gilt $\chi(\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}) = \chi(z_1, z_2)$ wobei $\frac{1}{\infty} := 0$, $\frac{1}{0} := \infty$, ist die Funktion $\frac{1}{f} \in C(G, \mathbb{C}_\infty)$ und es gilt $\frac{1}{f_n} \rightarrow \frac{1}{f}$ in $C(G, \mathbb{C}_\infty)$. Nach dem vorigen Beweisschritt ist $\frac{1}{f}$ auf einer gewissen Umgebung $U_r(w)$ analytisch. Daher ist entweder $f \in M(U_r(w))$ oder $f(z) = \infty$, $z \in U_r(w)$.

Betrachte die Menge $A := \{w \in G : f(w) = \infty\}$. Hat sie keinen Häufungspunkt in G , so folgt mit Bemerkung 4.2.10 dass $f \in M(G)$. Ist $w \in G$ ein Häufungspunkt von A , dann ist, da f stetig ist, $f(w) = \infty$. Da es eine Folge

$w_n \rightarrow w$, $w_n \neq w$, gibt mit $f(w_n) = \infty$, kann nicht $f \in M(U_r(w))$ sein. Also folgt nach dem letzten Absatz $f(z) = \infty$, $z \in U_r(w)$.

Sei nun angenommen dass tatsächlich A einen Häufungspunkt $w_0 \in G$ hat. Ist $z \in G$, so wähle einen Weg $\gamma : [0, 1] \rightarrow G$ mit $\gamma(0) = w_0$, $\gamma(1) = z$. Sei $t_0 := \max\{t \in [0, 1] : f(\gamma(u)) = \infty, 0 \leq u \leq t\}$. Ist $\gamma(t_0) = w_0$, so ist $\gamma(t_0)$ ein Häufungspunkt von A . Ist $\gamma(t_0) \neq w_0$, so ist ebenfalls $\gamma(t_0)$ ein Häufungspunkt von A , denn $\gamma([0, t_0]) \subseteq A$ und ist zusammenhängend. Wäre $t_0 < 1$, so könnten wir nach dem vorigen Absatz ein $\epsilon > 0$ finden, sodass $f(\gamma(t_0 + s)) = \infty$, $0 < s < \epsilon$, ein Widerspruch. Also ist $t_0 = 1$, d.h. $f(z) = \infty$. Wir sehen das $f = \infty$.

Wir haben gezeigt dass $\overline{M(G)} \subseteq M(G) \cup \{\infty\}$. Sei $f_n \in H(G)$, $f_n \rightarrow f$, mit $f \neq \infty$. Dann ist $f \in M(G)$. Sei $w \in G$ und wähle $r > 0$ sodass f auf $U_r(w) \setminus \{w\}$ analytisch ist. Sei $0 < r' < r$, dann ist $f_n \rightarrow f$ gleichmäßig auf $\partial U_{r'}(w)$ und daher ist $\sup_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ z \in \partial U_{r'}(w)}} |f_n(z)| =: M < \infty$. Nach dem Maximumprinzip ist auch $\sup_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ z \in U_{r'}(w)}} |f_n(z)| = M$ und daher auch $\sup_{z \in U_{r'}(w)} |f(z)| \leq M$. Also ist f auf $U_{r'}(w)$ analytisch. Es folgt $f \in H(G)$. D.h. wir haben $\overline{H(G)} \subseteq H(G) \cup \{\infty\}$.

Das die konstante Funktion ∞ tatsächlich zu $\overline{H(G)}$ gehört sieht man, da zum Beispiel $\lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$ in $C(G, \mathbb{C}_\infty)$. \square

4.3 Kompaktheit

4.3.1 Der Satz von Arzela-Ascoli

Im Kontext der Funktionentheorie hat es sich eingebürgert das folgende Synonym für relativ kompakte Funktionenfamilien zu verwenden.

4.3.1 Definition. Sei $\mathcal{F} \subseteq C(G, X)$. Dann heißt \mathcal{F} eine *normale Familie*, wenn $\overline{\mathcal{F}}$ in $C(G, X)$ kompakt ist. //

Da $C(G, X)$ ein vollständiger metrischer Raum ist, sind für eine Familie $\mathcal{F} \subseteq C(G, X)$ äquivalent:

- (i) \mathcal{F} ist normal.
- (ii) \mathcal{F} ist total beschränkt, d.h. zu jedem $\epsilon > 0$ existieren endlich viele Kugeln mit Radius ϵ die \mathcal{F} überdecken.
- (iii) Jede Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus Funktionen $f_n \in \mathcal{F}$ hat eine konvergente Teilfolge.

4.3.2 Bemerkung. Eine Familie $\mathcal{F} \subseteq C(G, X)$ ist normal genau dann, wenn es für jedes $\delta > 0$ und $K \subseteq G$ kompakt, endlich viele Elemente $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{F}$ gibt sodass

$$\mathcal{F} \subseteq \bigcup_{k=1}^n \{f \in C(G, X) : d_\infty(f|_K, f_k|_K) < \delta\}.$$

Denn: totale Beschränktheit in der Metrik ρ von $C(G, X)$ bedeutet, dass es zu jedem $\epsilon > 0$ endlich viele $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{F}$ gibt mit

$$\mathcal{F} \subseteq \bigcup_{k=1}^n \{f \in C(G, X) : \rho(f, f_k) < \epsilon\}.$$

Wegen Lemma 4.1.4 ist das gleichbedeutend mit der genannten Bedingung. //

Eine Familie \mathcal{F} heißt *gleichgradig stetig an der Stelle w* , wenn gilt (d bezeichnet die Metrik von X)

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall f \in \mathcal{F}, z \in G : |z - w| < \delta \Rightarrow d(f(z), f(w)) < \epsilon.$$

Sei $E \subseteq G$, dann heißt \mathcal{F} *gleichgradig stetig auf E* , wenn gilt

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall f \in \mathcal{F}, z, w \in E : |z - w| < \delta \Rightarrow d(f(z), f(w)) < \epsilon.$$

Genauso wie man zeigt, dass eine stetige Funktion auf jeder kompakten Teilmenge ihres Definitionsbereiches gleichmäßig stetig ist, sieht man dass eine Familie $\mathcal{F} \subseteq C(G, X)$ die in jedem Punkt von G gleichgradig stetig ist auch auf jeder kompakten Teilmenge von G gleichgradig stetig ist.

Wir zeigen nun eine an unsere Situation angepasste Version des Satzes von Arzela-Ascoli.

4.3.3 Satz (von Arzela-Ascoli). *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen, $\langle X, d \rangle$ ein vollständiger metrischer Raum, und sei $\mathcal{F} \subseteq C(G, X)$. Dann ist \mathcal{F} normal genau dann, wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:*

- (i) *Für jedes $z \in G$ ist $\{f(z) : f \in \mathcal{F}\}$ in X relativ kompakt.*
- (ii) *\mathcal{F} ist an jeder Stelle $z \in G$ gleichgradig stetig.*

Beweis. Wir setzen voraus, dass (i) und (ii) gilt. Sei $\{x_1, x_2, \dots\}$ eine abzählbare dichte Teilmenge von G , zum Beispiel alle Punkte aus G mit rationalen Real- und Imaginärteil. Für $z \in G$ setze $X(z) := \overline{\{f(z) : f \in \mathcal{F}\}}$, dann ist $X(z)$ ein kompakter metrischer Raum. Daher ist auch

$$Y := \prod_{l=1}^{\infty} X(x_l)$$

ein kompakter metrischer Raum, denn zum Beispiel induziert ja $d_Y((a_l)_{l \in \mathbb{N}}, (b_l)_{l \in \mathbb{N}}) := \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2^l} \frac{d(a_l, b_l)}{1 + d(a_l, b_l)}$ die Produkttopologie und diese ist nach dem Satz von Tychonoff kompakt.

Sei nun $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in \mathcal{F} . Dann ist $((f_n(x_l))_{l \in \mathbb{N}})_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in Y und hat daher eine konvergente Teilfolge $((f_{n_k}(x_l))_{l \in \mathbb{N}})_{k \in \mathbb{N}}$. Die Teilfolge $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ von $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ hat also die Eigenschaft an jeder Stelle x_l zu konvergieren.

Sei nun $K \subseteq G$ kompakt und $\epsilon > 0$ gegeben. Wähle eine Menge K_N aus der Definition von ρ mit $K \subseteq \text{Int } K_N$. Da K_N kompakt ist, ist die Folge $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ auf K_N und damit auch auf $\text{Int } K_N$ gleichgradig stetig. Wähle $\delta > 0$ sodass

$$\forall z, w \in \text{Int } K_N, k \in \mathbb{N}, |z - w| < \delta : d(f_{n_k}(z), f_{n_k}(w)) < \epsilon.$$

Da $\text{Int } K_N$ offen ist und $\{x_l : l \in \mathbb{N}\}$ dicht in G , existiert zu jedem $y \in K$ eine Kugel $U_\delta(x_{l(y)})$ mit $x_{l(y)} \in \text{Int } K_N$, $y \in U_\delta(x_{l(y)})$. Also können wir endlich viele Kugeln $U_\delta(x_{l_j})$, $j = 1, \dots, n$, wählen mit $x_{l_j} \in \text{Int } K_N$ die K überdecken. Wähle $M \in \mathbb{N}$ so dass

$$\forall k, i \geq M, j = 1, \dots, n : d(f_{n_k}(x_{l_j}), f_{n_i}(x_{l_j})) < \epsilon.$$

Sei nun $x \in K$. Wähle j sodass $x \in U_\delta(x_{l_j})$, dann gilt für $k, i \geq M$

$$d(f_{n_k}(x), f_{n_i}(x)) \leq d(f_{n_k}(x), f_{n_k}(x_{l_j})) + d(f_{n_k}(x_{l_j}), f_{n_i}(x_{l_j})) +$$

$$+d(f_{n_i}(x_{l_j}), f_{n_i}(x)) < 3\epsilon.$$

Also ist die Folge $(f_{n_k}|_K)_{k \in \mathbb{N}}$ gleichmäßige Cauchy-Folge. Nach Satz 4.1.5 ist $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ in $C(G, X)$ konvergent. Wir haben gezeigt, dass \mathcal{F} normal ist.

Sei nun umgekehrt \mathcal{F} normal. Da für jedes feste $w \in G$ die Abbildung $f \mapsto f(w)$ auf $C(G, X)$ stetig ist, ist $\{f(w) : f \in \mathcal{F}\}$ kompakt. Damit folgt (i). Sei $w \in G$ und $\epsilon > 0$ gegeben. Wähle eine kompakte Umgebung K von w und, entsprechend Bemerkung 4.3.2 endlich viele Funktionen f_1, \dots, f_n mit $\mathcal{F} \subseteq \bigcup_{k=1}^n \{f \in C(G, X) : d_\infty(f|_K, f_k|_K) < \epsilon\}$. Wähle $\delta > 0$ sodass $U_\delta(w) \subseteq K$, und

$$\forall z \in U_\delta(w), k = 1 \dots, n : d(f_k(z), f_k(w)) < \epsilon.$$

Ist $f \in \mathcal{F}$ so wähle k mit $d_\infty(f|_K, f_k|_K) < \epsilon$. Für $z \in U_\delta(w)$ gilt dann

$$\begin{aligned} d(f(z), f(w)) &\leq d(f(z), f_k(z)) + d(f_k(z), f_k(w)) + \\ &\quad + d(f_k(w), f(w)) < 3\epsilon. \end{aligned}$$

Also gilt (ii). □

4.3.4 Korollar. *Normalität ist eine lokale Eigenschaft, d.h.: Eine Familie $\mathcal{F} \subseteq C(G, X)$ ist genau dann normal, wenn jeder Punkt $w \in G$ eine offene Umgebung U_w besitzt, sodass*

$$\mathcal{F}|_{U_w} := \{f|_{U_w} : f \in \mathcal{F}\}$$

in $C(U_w, X)$ normal ist.

Beweis. Die beiden Bedingungen (i) und (ii) im Satz von Arzela-Ascoli sind lokale Bedingungen. □

4.3.2 Normalität in $H(G)$

4.3.5 Definition. Eine Familie $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{C}^G$ heißt *lokal beschränkt*, wenn es zu jedem Punkt $w \in G$ eine offene Umgebung U_w von w in G gibt, sodass

$$\sup \{|f(z)| : f \in \mathcal{F}, z \in U_w\} < \infty.$$

//

Das übliche Kompaktheitsargument zeigt, dass eine Familie genau dann lokal beschränkt ist, wenn für jede kompakte Menge $K \subseteq G$ gilt $\sup\{|f(z)| : f \in \mathcal{F}, z \in K\} < \infty$.

4.3.6 Satz (von Montel). *Sei $\mathcal{F} \subseteq H(G)$. Dann ist \mathcal{F} genau dann normal (bezüglich der Topologie von $C(G, \mathbb{C})$), wenn \mathcal{F} lokal beschränkt ist.*

Beweis. Sei \mathcal{F} normal, und sei $K \subseteq G$ kompakt. Da die Einschränkungsbildung stetig ist, ist $\{f|_K : f \in \mathcal{F}\}$ kompakt, und daher auch beschränkt, in $\langle C(K, \mathbb{C}), d_\infty \rangle$.

Sei umgekehrt \mathcal{F} lokal beschränkt. Dann ist \mathcal{F} auch punktweise beschränkt, d.h. die Voraussetzung (i) im Satz von Arzela-Ascoli ist erfüllt. Sei $w \in G$ und wähle $r > 0$ sodass $\bar{U}_r(w) \subseteq G$. Für $z, z' \in U_{\frac{r}{2}}(w)$ gilt dann wegen

$$\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - z'} = \frac{z - z'}{(\zeta - z)(\zeta - z')}$$

dass

$$\begin{aligned}
 |f(z) - f(z')| &= \frac{1}{2\pi} \left| \oint_{\partial U_r(w)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \oint_{\partial U_r(w)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z'} d\zeta \right| = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left| \oint_{\partial U_r(w)} \frac{f(\zeta)(z - z')}{(\zeta - z)(\zeta - z')} d\zeta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi r \cdot \max_{\zeta \in \partial U_r(w)} |f(\zeta)| \cdot |z - z'| \cdot \frac{1}{\left(\frac{r}{2}\right)^2} = \\
 &= \frac{4}{r} \max_{\zeta \in \partial U_r(w)} |f(\zeta)| \cdot |z - z'|.
 \end{aligned}$$

Ist $M := \sup\{|f(\zeta)| : \zeta \in \partial U_r(w), f \in \mathcal{F}\}$, so folgt also $|f(z) - f(z')| \leq \frac{4M}{r}|z - z'|$, $f \in \mathcal{F}$, $z, z' \in U_{\frac{r}{2}}(w)$. Wir sehen, dass auch die Voraussetzung (ii) erfüllt ist. Also ist \mathcal{F} normal. \square

4.3.7 Korollar. Sei $\mathcal{F} \subseteq H(G)$ normal. Dann ist auch die Familie

$$\mathcal{F}' := \{f' : f \in \mathcal{F}\}$$

normal.

Beweis. Sei $w \in G$ gegeben. Wähle $r > 0$ sodass $\overline{U_r(w)} \subseteq G$. Dann ist

$$\{f|_{\partial U_r(w)} : f \in \mathcal{F}\}$$

gleichmäßig beschränkt. Nach der allgemeinen Cauchy'schen Integralformel, ist damit

$$\{f'(z) : f \in \mathcal{F}\}$$

auf der Menge $U_{\frac{r}{2}}(w)$ gleichmäßig beschränkt. \square

4.3.8 Korollar (Satz von Vitali). Sei G ein Gebiet, und sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $H(G)$ sodass $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ lokal beschränkt ist. Dann sind äquivalent:

- (i) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist konvergent.
- (ii) Es existiert ein Punkt $c \in G$ sodass für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Folge $(f_n^{(k)}(c))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert.
- (iii) Die Menge $A := \{w \in G : \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(w)\}$ hat einen Häufungspunkt in G .

Beweis. Klarerweise impliziert (i) sowohl (ii) als auch (iii). Sei nun (ii) oder (iii) vorausgesetzt. Sei $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Dann existiert nach dem Satz von Montel eine gegen eine Funktion $f \in H(G)$ konvergente Teilfolge $(f_{n_{k_j}})_{j \in \mathbb{N}}$ von $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$. Nun gilt, im Falle von (ii),

$$f^{(l)}(c) = \lim_{j \rightarrow \infty} f_{n_{k_j}}^{(l)}(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n^{(l)}(c),$$

bzw., im Falle von (iii),

$$f(w) = \lim_{j \rightarrow \infty} f_{n_{k_j}}(w) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(w), \quad w \in A.$$

Nach dem Identitätssatz ist also f für jede Teilfolge $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ die gleiche Funktion. Also gilt $f_n \rightarrow f$. \square

4.3.9 Korollar (Satz von Osgood). Sei $f_n \in H(G)$ und sei $f_n \rightarrow f$ punktweise in G . Dann existiert $\hat{G} \subseteq G$ offen und dicht sodass $f_n|_{\hat{G}} \rightarrow f|_{\hat{G}}$ lokal gleichmäßig. Insbesondere ist f auf \hat{G} analytisch.

Beweis. Betrachte die Mengen

$$T_N := \{z \in G : \sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n(z)| \leq N\}, \quad N \in \mathbb{N},$$

und setze

$$\hat{G} := \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \text{Int}_G T_N.$$

Klarerweise ist \hat{G} eine offene Teilmenge von G . Jeder Punkt von \hat{G} hat eine Umgebung die ganz in einem T_N liegt, also ist $\{f_n|_{\hat{G}} : n \in \mathbb{N}\}$ auf \hat{G} lokal beschränkt. Nach dem Satz von Vitali ist $(f_n|_{\hat{G}})_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent in $H(\hat{G})$.

Wir müssen zeigen, dass \hat{G} dicht in G ist. Dazu sei eine offene und nichtleere Teilmenge U von G gegeben. Da jede Funktion f_n stetig ist, ist jede Menge T_N abgeschlossen in der Spurtopologie von G . Da $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ punktweise konvergiert, insbesondere also punktweise beschränkt ist, gilt

$$\bigcup_{N \in \mathbb{N}} T_N = G.$$

Daraus erhalten wir, dass die Mengen $T_N \cap U$, $N \in \mathbb{N}$, alle bzgl. der Spurtopologie von U abgeschlossen sind, und dass $\bigcup_{N \in \mathbb{N}} (T_N \cap U) = U$ gilt.

Nach dem Satz von Baire[‡] existiert $N_0 \in \mathbb{N}$, sodass das Innere (bzgl. der Spurtopologie von U) von $T_{N_0} \cap U$ nichtleer ist. Da U eine offene Teilmenge von G ist, ist jede bzgl. der Spurtopologie von U offene Teilmenge von U auch bzgl. der Topologie von G offen. Insbesondere ist $(\text{Int}_G T_{N_0}) \cap U \neq \emptyset$. Wir schliessen, dass \hat{G} dicht in G ist. \square

4.3.3 Normalität in $M(G)$

Wir wollen nun normale Familien in $M(G)$ studieren. Dazu benötigt man den Begriff der *sphärischen Ableitung*: Ist $f \in M(G)$, so definieren wir $f^\# : G \rightarrow [0, \infty)$ als

$$f^\#(z) := \begin{cases} \frac{2|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}, & \vartheta_f(z) \geq 0 \\ \frac{2}{|\text{Res}(f, z)|}, & \vartheta_f(z) = -1 \\ 0, & \vartheta_f(z) < -1 \end{cases}$$

4.3.10 Lemma. Sei $f \in M(G)$. Dann ist $f^\# \in C(G, \mathbb{R})$, und es gilt $(\frac{1}{f})^\# = f^\#$. Ist $f_n \rightarrow f$ in $M(G)$, so folgt das auch $f_n^\# \rightarrow f^\#$ lokal gleichmäßig.

Beweis. Die Tatsache dass $f^\#$ stetig ist, erhält man aus der folgenden Rechnung: Schreibe

$$f(\zeta) = \frac{a_m}{(\zeta - z)^m} + \dots + \frac{a_1}{\zeta - z} + f_1(\zeta)$$

mit $m \in \mathbb{N}$, $a_m \neq 0$, f_1 analytisch bei z . Man berechnet

$$\frac{2|f'(\zeta)|}{1+|f(\zeta)|^2} = \frac{2\left|\frac{ma_m}{(\zeta-z)^{m+1}} + \dots + \frac{a_1}{(\zeta-z)^2} - f_1'(\zeta)\right|}{1 + \left|\frac{a_m}{(\zeta-z)^m} + \dots + \frac{a_1}{\zeta-z} + f_1(\zeta)\right|^2} =$$

[‡]Wir verwenden hier die Variante für lokalkompakte Räume!

$$= \frac{2|\zeta - z|^{m-1} |ma_m + \dots + a_1(\zeta - z)^{m-1} - f'_1(\zeta)(\zeta - z)^{m+1}|}{|\zeta - z|^{2m} + |a_m + \dots + a_1(\zeta - z)^{m-1} + f_1(\zeta)(\zeta - z)^m|^2},$$

also ist

$$\lim_{\zeta \rightarrow z} \frac{2|f'(\zeta)|}{1 + |f(\zeta)|^2} = \begin{cases} 0 & , \quad m \geq 2 \\ \frac{2}{|a_m|} & , \quad m = 1 \end{cases}$$

Wir zeigen $f^\sharp(z) = (\frac{1}{f})^\sharp(z)$: Im Fall $f(z) \neq 0, \infty$ berechnet man

$$\left(\frac{1}{f}\right)^\sharp = \frac{2\left|\frac{f'(z)}{f(z)^2}\right|}{1 + \left|\frac{1}{f(z)}\right|^2} = \frac{2|f'(z)|}{|f(z)|^2 + 1} = f^\sharp(z).$$

Ist $\vartheta_f(z) \geq 2$, so ist $\vartheta_{\frac{1}{f}}(z) \leq -2$ und daher $f^\sharp(z) = 0 = (\frac{1}{f})^\sharp(z)$. Ist $\vartheta_f(z) = 1$, $f(\zeta) = a_1(\zeta - z) + a_2(\zeta - z)^2 + \dots$, dann ist

$$\frac{1}{f(\zeta)} = \frac{1}{a_1(\zeta - z)} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n(\zeta - z)^n,$$

also gilt $f^\sharp(z) = 2|a_1| = (\frac{1}{f})^\sharp(z)$.

Sei schließlich $f_n \rightarrow f$ in $M(G)$. Ist $f(w) \neq \infty$, so sind auf einer gewissen Umgebung und für hinreichend großes n alle f_n analytisch und konvergieren gleichmäßig gegen f . Dann folgt dass auch $f'_n \rightarrow f'$ gleichmäßig, und daher $f_n^\sharp \rightarrow f^\sharp$ gleichmäßig. Ist $f(w) = \infty$, so wenden wir dieses Argument mit $\frac{1}{f_n} \rightarrow \frac{1}{f}$ an. \square

Die sphärische Ableitung sollte man eigentlich in einem mehr geometrischen Kontext betrachten, wir gehen darauf aber nicht ein.

4.3.11 Lemma. Sei $f \in M(G)$, $\overline{U_r(w)} \subseteq G$ und $z_1, z_2 \in \overline{U_r(w)}$. Dann gilt

$$\chi(f(z_1), f(z_2)) \leq 2 \max_{z \in \overline{U_r(w)}} f^\sharp(z) \cdot |z_1 - z_2|$$

Beweis. Sei zunächst angenommen dass $f(z_1), f(z_2) \neq \infty$. Die Verbindungsstrecke $[z_1, z_2]$ liegt ganz in $\overline{U_r(w)}$. Da es in $\overline{U_r(w)}$ nur endlich viele Polstellen von f gibt, können wir einen Polygonzug γ wählen, der ganz in $\overline{U_r(w)}$ verläuft, der z_1 und z_2 verbindet, auf dem keine Polstellen liegen und dessen Länge $\leq 2|z_1 - z_2|$ ist.

Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Da f und f' auf γ gleichmäßig stetig sind, können wir γ so in Strecken $[w_0, w_1], \dots, [w_{n-1}, w_n]$ zerlegen, dass für alle $k = 1, \dots, n$ gilt

$$\left| \frac{1 + |f(w_k)|^2}{\sqrt{1 + |f(w_k)|^2} \sqrt{1 + |f(w_{k-1})|^2}} - 1 \right| < \epsilon,$$

$$\left| \frac{f(w_k) - f(w_{k-1})}{w_k - w_{k-1}} - f'(w_{k-1}) \right| = \left| \frac{1}{w_k - w_{k-1}} \int_{[w_{k-1}, w_k]} (f'(\zeta) - f'(w_{k-1})) d\zeta \right| < \epsilon.$$

Setze $\beta_k := \sqrt{1 + |f(w_k)|^2} \sqrt{1 + |f(w_{k-1})|^2}$. Es gilt

$$\chi(f(z_1), f(z_2)) \leq \sum_{k=1}^n \chi(f(w_k), f(w_{k-1})) = \sum_{k=1}^n \frac{2}{\beta_k} |f(w_k) - f(w_{k-1})| \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{k=1}^n \frac{2}{\beta_k} \left| \frac{f(w_k) - f(w_{k-1})}{w_k - w_{k-1}} - f'(w_{k-1}) \right| \cdot |w_k - w_{k-1}| + \sum_{k=1}^n \frac{2}{\beta_k} |f'(w_{k-1})| \cdot |w_k - w_{k-1}| \\
&\leq 2\epsilon \sum_{k=1}^n \frac{|w_k - w_{k-1}|}{\beta_k} + \max_{z \in U_r(w)} f^\#(z) \sum_{k=1}^n \left(\frac{1 + |f(w_{k-1})|^2}{\beta_k} \right) |w_k - w_{k-1}| \leq \\
&\leq 4\epsilon |z_1 - z_2| + \max_{z \in U_r(w)} f^\#(z) \cdot (\epsilon + 1) 2 |z_1 - z_2|.
\end{aligned}$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung.

Da beide Seiten der Ungleichung stetig von z_1 und z_2 abhängen, gilt sie auch falls einer (oder beide) der Punkte z_1, z_2 Polstellen von f sind. \square

4.3.12 Satz (von Marty). *Sei $\mathcal{F} \subseteq M(G)$. Dann ist \mathcal{F} genau dann normal (bezüglich der Topologie von $C(G, \mathbb{C}_\infty)$), wenn die Familie $\{f^\# : f \in \mathcal{F}\}$ lokal beschränkt ist.*

Beweis. Sei angenommen das $\{f^\# : f \in \mathcal{F}\}$ lokal beschränkt ist. Wegen Lemma 4.3.11 ist \mathcal{F} an jeder Stelle von $w \in G$ gleichgradig stetig. Da \mathbb{C}_∞ kompakt ist, ist für jedes $w \in G$ die Menge $\{f(w) : f \in \mathcal{F}\}$ relativ kompakt. Nach dem Satz von Arzela-Ascoli ist \mathcal{F} normal in $C(G, \mathbb{C}_\infty)$.

Ist umgekehrt die Menge $\{f^\# : f \in \mathcal{F}\}$ nicht lokal beschränkt, so existiert eine kompakte Menge $K \subseteq G$ und eine Folge $f_n \in \mathcal{F}$ mit $\max_{z \in K} f_n^\#(z) \rightarrow \infty$. Daher kann $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ keine konvergente Teilfolge haben. \square

4.3.13 Korollar. *Sei $\mathcal{F} \subseteq H(G)$. Dann ist \mathcal{F} genau dann normal in $C(G, \mathbb{C})$, wenn \mathcal{F} normal in $C(G, \mathbb{C}_\infty)$ ist und es einen Punkt $z_0 \in G$ gibt sodass $\{f(z_0) : f \in \mathcal{F}\}$ beschränkt ist.*

Beweis. Sei zuerst angenommen, dass \mathcal{F} in $C(G, \mathbb{C})$ normal ist. Nach dem Satz von Montel ist dann \mathcal{F} lokal gleichmäßig beschränkt. Insbesondere ist \mathcal{F} an einer (sogar an jeder) Stelle z_0 von G beschränkt. Da $\mathcal{F} \subseteq H(G)$, ist

$$f^\#(z) = \frac{2|f'(z)|}{1 + |f(z)|^2}, \quad f \in \mathcal{F}.$$

Wegen Korollar 4.3.7 und dem Satz von Marty ist daher \mathcal{F} auch normal in $C(G, \mathbb{C}_\infty)$.

Umgekehrt sei \mathcal{F} normal in $C(G, \mathbb{C}_\infty)$. Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in \mathcal{F} , dann existiert eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ welche in $C(G, \mathbb{C}_\infty)$ gegen eine Funktion f konvergiert. Nach Satz 4.2.14 ist $f \in H(G) \cup \{\infty\}$. Da die Familie \mathcal{F} an einer Stelle beschränkt ist, kann die Grenzfunktion aber nicht identisch gleich ∞ sein. Also ist $f \in H(G)$. \square

4.4 Vorgegebene Nullstellen und Hauptteile

4.4.1 Der Satz von Weierstraß

Das Ziel in diesem Abschnitt ist es den folgenden Satz zu beweisen.

4.4.1 Satz (Produktsatz von Weierstraß). *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen und $\vartheta \in \mathcal{D}_G, \vartheta \geq 0$. Dann existiert $f \in H(G)$ mit $\vartheta = \vartheta_f$.*

Da $\text{supp } \vartheta$ keinen Häufungspunkt in G hat, kann diese Menge nur aus höchstens abzählbar vielen Elementen bestehen, vgl. Lemma 4.1.3. Wir können also eine (endliche oder unendliche) Folge a_1, a_2, a_3, \dots bilden sodass $\text{supp } \vartheta = \{a_n\}$ und sodass jeder Punkt $z \in \text{supp } \vartheta$ in der Folge der a_n genau $\vartheta(z)$ -mal vorkommt.

Ist die Folge der a_n endlich, a_1, \dots, a_N , d.h. suchen wir eine Funktion $f \in H(G)$ die nur endlich viele Nullstellen hat, so ist das Problem trivial. Denn dann können wir für f das Polynom

$$f(z) := \prod_{k=1}^n (z - a_k)$$

wählen. Wir wollen also im folgenden stets annehmen dass die Folge der a_n unendlich ist. Weiters können wir stets voraussetzen dass $\vartheta(0) = 0$ ist, denn haben wir f mit $\vartheta_f(z) = \vartheta(z)$, $z \neq 0$, und $\vartheta_f(0) = 0$ gefunden, so leistet $z^{\vartheta(0)} f(z)$ das Gewünschte.

Man könnte versuchen das Produkt $\prod_{k=1}^{\infty} (z - a_k)$ zu betrachten. Dieses wird jedoch im allgemeinen nicht konvergent sein. Die Idee ist es nun die Konvergenz zu erzwingen, indem man konvergenzerzeugende Faktoren dazugibt. Setze $E_0(z) := (1 - z)$ und

$$E_p(z) := (1 - z) \exp\left(z + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^p}{p}\right), \quad p \in \mathbb{N}.$$

Die Funktionen E_p heißen auch *Weierstraßsche Elementarfaktoren*.

4.4.2 Lemma. Sei $|z| \leq 1$ und $p \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt

$$|1 - E_p(z)| \leq |z|^{p+1}.$$

Beweis. Für $p = 0$ ist nichts zu zeigen, sei also $p \geq 1$. Es gilt $E_p(0) = 1$ und man berechnet

$$\begin{aligned} E'_p(z) &= (-1) \exp\left(z + \dots + \frac{z^p}{p}\right) + (1 - z) \exp\left(z + \dots + \frac{z^p}{p}\right) (1 + z + \dots + z^{p-1}) = \\ &= \exp\left(z + \dots + \frac{z^p}{p}\right) \left[-1 + 1 - z^p\right] = -z^p \exp\left(z + \dots + \frac{z^p}{p}\right). \end{aligned}$$

Also hat $E'_p(z)$ eine Nullstelle der Ordnung p bei $z = 0$, und daher $1 - E_p(z)$ eine Nullstelle der Ordnung $p + 1$. Wie man, durch einsetzen in die Exponentialreihe, sieht ist in der Potenzreihenentwicklung von $\exp(z + \dots + \frac{z^p}{p})$ um 0 jeder Koeffizient nichtnegativ. Also ist auch in

$$\varphi(z) := \frac{1 - E_p(z)}{z^{p+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

stets $a_n \geq 0$. Es folgt, dass für $|z| \leq 1$ gilt

$$|\varphi(z)| \leq \varphi(|z|) \leq \varphi(1) = 1.$$

□

Wir wollen an die folgende elementare Aussage über Konvergenz von Produkten erinnern: Seien f_n stetige komplexwertige Funktionen, und sei die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ absolut und gleichmäßig konvergent. Dann ist für hinreichend großes N auch die Reihe $\sum_{n=N}^{\infty} \log(1+f_n)$ absolut und gleichmäßig konvergent. Weiters ist das Produkt $\prod_{n=1}^{\infty} (1+f_n)$ gleichmäßig konvergent.

Beweis (von Satz 4.4.1, $G = \mathbb{C}$). Da die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ keinen Häufungspunkt in $G = \mathbb{C}$ hat, gilt $|a_n| \rightarrow \infty$. Wähle nun eine Folge $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sodass für jedes $r > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{|a_n|} \right)^{p_n+1} < \infty.$$

Eine solche Folge existiert, zum Beispiel kann man $p_n = n$ wählen: Denn wegen $|a_n| \rightarrow \infty$ gilt ab einem gewissen Index N sicher $\frac{r}{|a_n|} \leq \frac{1}{2}$ und damit

$$\sum_{n=N}^{\infty} \left(\frac{r}{|a_n|} \right)^{n+1} \leq \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} < \infty.$$

Wegen Lemma 4.4.2 ist für jedes z mit $|z| \leq r$, und n so groß daß $|a_n| \geq r$,

$$\left| 1 - E_{p_n} \left(\frac{z}{a_n} \right) \right| \leq \left| \frac{z}{a_n} \right|^{p_n+1} \leq \left(\frac{r}{|a_n|} \right)^{p_n+1},$$

und wir sehen, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| 1 - E_{p_n} \left(\frac{z}{a_n} \right) \right|$$

auf der Scheibe $\overline{U_r(0)}$ gleichmäßig konvergiert. Damit folgt, dass auch das Produkt

$$f(z) := \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n} \left(\frac{z}{a_n} \right) \quad (4.4.1)$$

für $|z| \leq r$ gleichmäßig konvergiert. Da $r > 0$ beliebig war, ist $f \in H(\mathbb{C})$. Weiters ist $f(z) = 0$ genau dann wenn für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt das $E_{p_n}(\frac{z}{a_n}) = 0$ ist, d.h. wenn $z \in \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Da jede Zahl $w \in \text{supp } \vartheta$ genau $\vartheta(w)$ -mal in der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vorkommt und $E_{p_n}(\frac{z}{a_n})$ bei a_n eine einfache Nullstelle hat, hat f an der Stelle w tatsächlich eine Nullstelle der Ordnung $\vartheta(w)$, vgl. Bemerkung 4.2.13. \square

Ein Produkt der Gestalt (4.4.1) heißt auch ein *kanonisches Produkt* zu ϑ .

Beweis (von Satz 4.4.1, $G \neq \mathbb{C}$). Wir unterteilen $\text{supp } \vartheta$ in zwei Klassen. Nämlich jene Punkte die sich gegen den endlichen Rand von G häufen, und jene die dies nicht tun und daher gegen ∞ streben müssen. Dazu setze

$$K_N := \left\{ z \in G : d(z, \mathbb{C} \setminus G) \geq \frac{1}{N}, N \leq |z| \leq N+1 \right\}.$$

dann ist jedes K_N , und damit auch jede endliche Vereinigung $\bigcup_{N=1}^h K_N$ eine kompakte Teilmenge von G . Setze

$$A := \text{supp } \vartheta \cap \bigcup_{N=1}^{\infty} K_N, \quad B := (\text{supp } \vartheta) \setminus A.$$

Wir zeigen, dass A keinen endlichen Häufungspunkt hat: Angenommen $w \in \mathbb{C}$ ist Häufungspunkt von A , dann existieren unendlich viele Punkte in $A \cap U_1(w)$. Sei $h \in \mathbb{N}$, $h \geq |w| + 1$. Die Menge $\bigcup_{N=1}^h K_N$ kann nur endlich viele Punkte aus A enthalten, also existiert $z \in A \cap U_1(w)$ mit $z \in \bigcup_{N=h+2}^{\infty} K_N$. Ein Widerspruch, denn einerseits ist $|z| < |w| + 1$, andererseits $|z| \geq |w| + 2$.

Schreibe B wieder als Folge b_1, b_2, \dots an wobei jedes $w \in B$ genau $\vartheta(w)$ -mal vorkommt. Wir zeigen, dass falls diese Folge überhaupt unendlich ist, $\lim_{n \rightarrow \infty} d(b_n, \mathbb{C} \setminus G) = 0$. Angenommen es existierte eine Teilfolge b_{n_k} mit $d(b_{n_k}, \mathbb{C} \setminus G) \geq \epsilon > 0$. Sei $N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{N} < \epsilon$. Die Menge

$$M := \{z \in G : d(z, \mathbb{C} \setminus G) \geq \epsilon, |z| \leq N\}$$

ist eine kompakte Teilmenge von G , kann also nur endlich viele Punkte der Menge $\{b_{n_k} : k \in \mathbb{N}\}$ enthalten. Da jeder feste Punkt in der Folge (b_n) nur endlich oft vorkommt, kann M auch nur endlich viele der Folgenglieder b_{n_k} enthalten. Nun gilt

$$G \setminus M \subseteq \{z \in G : d(z, \mathbb{C} \setminus G) < \epsilon\} \cup \bigcup_{n=N}^{\infty} K_n.$$

Da die erste Menge auf der rechten Seite keine Punkte b_{n_k} enthält, müssen alle b_{n_k} in $\bigcup_{n=N}^{\infty} K_n$, und damit in A liegen, ein Widerspruch.

Betrachte die Divisoren ϑ_A und ϑ_B die definiert sind als

$$\vartheta_A(z) := \begin{cases} \vartheta(z), & z \in A \\ 0 & , \quad z \in \mathbb{C} \setminus A \end{cases}$$

$$\vartheta_B(z) := \begin{cases} \vartheta(z), & z \in B \\ 0 & , \quad z \in G \setminus B \end{cases}$$

Dann ist $\vartheta_A \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}$, $\vartheta_B \in \mathcal{D}_G$ und ϑ_B hat die Eigenschaft dass $\lim_{n \rightarrow \infty} d(b_n, \mathbb{C} \setminus G) = 0$, wenn es überhaupt unendlich viele Punkte in $\text{supp } \vartheta_B$ gibt. Wähle, nach dem bereits bewiesenen Teil „ $G = \mathbb{C}$ “ des Satzes eine Funktion $f_A \in H(\mathbb{C}) \subseteq H(G)$ mit $\vartheta_{f_A} = \vartheta_A$. Ist $\text{supp } \vartheta_B$ endlich, so wähle ein Polynom $f_B \in H(\mathbb{C}) \subseteq H(G)$ mit $\vartheta_{f_B} = \vartheta_B$. Ist $\text{supp } \vartheta_B$ unendlich, wähle $c_n \in \mathbb{C} \setminus G$ mit $|b_n - c_n| \leq 2d(b_n, \mathbb{C} \setminus G)$, und setze

$$f_B(z) := \prod_{n=1}^{\infty} E_n\left(\frac{b_n - c_n}{z - c_n}\right).$$

Wir zeigen, dass $f_B \in H(G)$. Sei $K \subseteq G$ kompakt, dann gilt

$$\left| \frac{b_n - c_n}{z - c_n} \right| \leq |b_n - c_n| \frac{1}{d(K, \mathbb{C} \setminus G)} \leq \frac{2}{d(K, \mathbb{C} \setminus G)} d(b_n, \mathbb{C} \setminus G) \rightarrow 0.$$

Also gilt, für hinreichend große Indizes n , dass $\left| \frac{b_n - c_n}{z - c_n} \right| \leq \frac{1}{2}$, $z \in K$. Wegen

$$\left| 1 - E_n\left(\frac{b_n - c_n}{z - c_n}\right) \right| \leq \left| \frac{b_n - c_n}{z - c_n} \right|^{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}, z \in K,$$

ist das obige Produkt auf K gleichmäßig konvergent. Offenbar gilt $\vartheta_{f_B} = \vartheta_B$.

Setzt man $f := f_A \cdot f_B$, so folgt $\vartheta_f = \vartheta_A + \vartheta_B = \vartheta$. \square

Wir wollen noch eine gebräuchliche Variante des Produktsatzes von Weierstraß für $G = \mathbb{C}$ formulieren.

4.4.3 Korollar. Sei $f \in H(\mathbb{C})$ und sei (a_n) die (endliche oder unendliche) Folge der Nullstellen von f , wobei jede Nullstelle gemäß ihrer Vielfachheit oft vorkommt. Sei $p_n \in \mathbb{N}_0$ eine Folge sodass für jedes $r > 0$

$$\sum_n \left(\frac{r}{|a_n|} \right)^{p_n+1} < \infty.$$

Dann existiert $g \in H(\mathbb{C})$ sodaß

$$f(z) = z^{\vartheta_f(0)} \exp(g(z)) \cdot \prod_n \left(1 - \frac{z}{a_n} \right) \exp \left(\frac{z}{a_n} + \dots + \frac{1}{p_n} \left(\frac{z}{a_n} \right)^{p_n} \right),$$

wobei das Produkt (falls es überhaupt ein unendliches Produkt ist) lokal gleichmäßig in \mathbb{C} konvergiert.

Beweis. Sei $f_1 := \prod_n \left(1 - \frac{z}{a_n} \right) \exp \left(\frac{z}{a_n} + \dots + \frac{1}{p_n} \left(\frac{z}{a_n} \right)^{p_n} \right)$. Nach dem Beweis von Satz 4.4.1 ist dieses Produkt lokal gleichmäßig konvergent auf \mathbb{C} , d.h. $f_1 \in H(\mathbb{C})$, und es gilt $\vartheta_{f_1}|_{\mathbb{C} \setminus \{0\}} = \vartheta_f|_{\mathbb{C} \setminus \{0\}}$. Also ist $\frac{f(z)}{z^{\vartheta_f(0)} f_1(z)} \in H(\mathbb{C})^*$ und läßt sich daher in der Form $\exp(g)$ schreiben. \square

Weiters erhalten wir eine Aussage über die Struktur von $M(G)$.

4.4.4 Korollar. Sei G eine Gebiet. Dann ist $M(G)$ ist der Quotientenkörper von $H(G)$.

Beweis. Nach Lemma 4.2.11 ist $M(G)$ ein Körper der $H(G)$ umfasst. Sei $f \in M(G) \setminus \{0\}$, und setze $\vartheta(z) := -\min\{\vartheta_f(z), 0\}$. Dann existiert nach dem Produktsatz von Weierstraß eine Funktion $g \in H(G)$ mit $\vartheta_g = \vartheta$. Betrachte nun $h := fg$. Dann ist $h \in M(G)$, und es gilt

$$\vartheta_h = \vartheta_f + \vartheta = \max\{\vartheta_f, 0\} \geq 0.$$

Also ist $h \in H(G)$. \square

4.4.2 Der Satz von Mittag-Leffler

Betrachte eine analytische Funktion f auf $G \setminus \{w\}$, und sei die Laurent-Entwicklung von f um w

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - w)^n.$$

Wie wir in Satz 3.5.1 gesehen haben konvergiert die Reihe $\sum_{n < 0} a_n (z - w)^n$ lokal gleichmäßig auf $\mathbb{C} \setminus \{w\}$. Man nennt diese Reihe den *Hauptteil von f an der Stelle w* .

4.4.5 Definition. Sei $w \in \mathbb{C}$. Eine Reihe der Gestalt $\sum_{n < 0} a_n (z - w)^n$, welche in $\mathbb{C} \setminus \{w\}$ lokal gleichmäßig konvergiert, heißt ein *Hauptteil in w* . Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen und $(a_1, g_1), (a_2, g_2), \dots$ eine (endliche oder unendliche) Folge von Paaren wobei a_1, a_2, \dots paarweise verschiedene Punkte von G sind die in G keinen Häufungspunkt haben und wobei g_n ein Hauptteil in a_n ist. Dann heißt $(a_1, g_1), (a_2, g_2), \dots$ eine *Hauptteilverteilung in G* . //

Ist f eine Funktion die auf der offenen Menge G mit Ausnahme von isolierten Singularitäten analytisch ist, so bestimmt sie nach dem oben Gesagten eine Hauptteilverteilung.

4.4.6 Satz (von Mittag-Leffler). *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen und sei $(a_1, g_1), (a_2, g_2), \dots$ eine Hauptteilverteilung in G . Dann existiert eine Funktion $f \in H(G \setminus \{a_1, a_2, \dots\})$ die für jedes n an der Stelle a_n den Hauptteil g_n hat.*

Besteht die gegebene Hauptteilverteilung aus nur endlich vielen Paaren $(a_1, g_1), \dots, (a_N, g_N)$, so ist die Aussage klar, denn dann leistet die Funktion

$$f(z) := \sum_{n=1}^N g_n(z)$$

das Gewünschte. Hat man unendlich viele Paare (a_n, g_n) , so muß die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(z)$ nicht konvergieren. Man erzwingt ihre Konvergenz indem man geeignete analytische konvergenzerzeugende Summanden dazugibt. Natürlich muss man sich überzeugen, dass immer noch die gewünschte Hauptteile herauskommen.

4.4.7 Lemma. *Sei $(a_1, g_1), (a_2, g_2), \dots$ eine Hauptteilverteilung in G , seien $h_n \in H(G)$, und sei die Reihe*

$$f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} (g_n(z) - h_n(z))$$

auf $G \setminus \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ lokal gleichmäßig konvergent. Dann ist $f \in H(G \setminus \{a_n : n \in \mathbb{N}\})$ und der Hauptteil von f an der Stelle a_n ist gleich g_n .

Beweis. Da alle Summanden in $G \setminus \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ analytisch sind und die Reihe lokal gleichmäßig konvergiert, ist $f \in H(G \setminus \{a_n : n \in \mathbb{N}\})$. Sei $n_0 \in \mathbb{N}$, dann ist die Reihe $\sum_{\substack{n=1, \\ n \neq n_0}}^{\infty} (g_n(z) - h_n(z))$ eine Folge von Funktionen analytisch auf $G \setminus \{a_n : n \in \mathbb{N}, n \neq n_0\}$ die in $G \setminus \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ lokal gleichmäßig konvergiert. Daher konvergiert sie sogar auf $G \setminus \{a_n : n \in \mathbb{N}, n \neq n_0\}$ lokal gleichmäßig und stellt daher eine dort analytische Funktion dar, vgl. Korollar 4.2.3. Also ist

$$f(z) = g_{n_0}(z) + \left(-h_{n_0}(z) + \sum_{\substack{n=1, \\ n \neq n_0}}^{\infty} (g_n(z) - h_n(z)) \right),$$

und daher ist der Hauptteil von f in a_{n_0} gleich g_{n_0} . \square

Beweis (von Satz 4.4.6, $G = \mathbb{C}$). Sollte $0 \in \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ sein, so sei oBdA $a_1 = 0$. Dann ist also für $n \geq 2$ stets $0 \in \mathbb{C} \setminus \{a_n\}$ und wegen $g_n \in H(\mathbb{C} \setminus \{a_n\})$ konvergiert die Taylorreihe von g_n mit Anschlussstelle 0 im Kreis $U_{|a_n|}(0)$ lokal gleichmäßig gegen g_n . Es gibt also ein Polynom h_n , zum Beispiel ein Taylorpolynom hinreichend großen Grades, sodass

$$|g_n(z) - h_n(z)| \leq \frac{1}{2^n}, \quad z \in U_{\frac{|a_n|}{2}}(0).$$

Sei $K \subseteq \mathbb{C}$ kompakt. Wegen $a_n \rightarrow \infty$ existiert $N \in \mathbb{N}$ sodass $K \subseteq U_{\frac{|a_n|}{2}}, n \geq N$. Dann ist die Reihe $\sum_{n \geq N} (g_n - h_n)$ auf K gleichmäßig konvergent. Wir können also Lemma 4.4.7 mit den Polynomen $h_n, n \geq 1$, und $h_0 := 0$ anwenden. \square

Beweis (von Satz 4.4.6, $G \neq \mathbb{C}$). Wir zerlegen die Menge $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ wie im Beweis des Produktsatzes von Weierstraß in eine Teilfolge $(a_{n'_k})$ die keinen endlichen Häufungspunkt hat und eine Teilfolge $(a_{n''_j})$ die, falls sie unendlich ist, $\lim_{n \rightarrow \infty} d(a_{n''_j}, \mathbb{C} \setminus G) = 0$ erfüllt. Nach dem ersten Beweisteil gibt es eine auf $\mathbb{C} \setminus \{a_{n'_1}, a_{n'_2}, \dots\}$ analytische Funktion $f_1(z)$ die an den Stellen $a_{n'_k}$ die Hauptteile $g_{n'_k}$ hat. Wir müssen also noch eine Funktion $f_2 \in H(G \setminus \{a_{n''_1}, a_{n''_2}, \dots\})$ konstruieren die an den Stellen $a_{n''_k}$ die Hauptteile $g_{n''_k}$ hat. Ist $a_{n''_1}, a_{n''_2}, \dots$ endlich so ist $f_2(z) = \sum g_{n''_k}(z)$ eine solche.

Sei uns also eine Hauptteilverteilung (a_n, g_n) , $n \in \mathbb{N}$, gegeben mit $\lim_{n \rightarrow \infty} d(a_n, \mathbb{C} \setminus G) = 0$. Wähle $c_n \in \partial G$ mit $d(a_n, \mathbb{C} \setminus G) = |a_n - c_n|$. Die Funktion g_n ist analytisch in $\mathbb{C} \setminus \overline{U_{|a_n - c_n|}(c_n)}$ und erfüllt $\lim_{z \rightarrow \infty} g_n(z) = 0$. Sie läßt sich darstellen als $\sum_{k \geq 0} b_k(z - c_n)^{-k}$, denn $G_n(z) := g_n(c_n + \frac{1}{z})$ ist analytisch in $U_{\frac{1}{|a_n - c_n|}}(0)$, $G_n(0) = 0$, und läßt sich daher als Potenzreihe $\sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k$ darstellen. Diese Reihe ist auf $U_{\frac{1}{|a_n - c_n|}}(0)$ lokal gleichmäßig konvergent, daher konvergiert $\sum_{k \geq 0} b_k(z - c_n)^{-k}$ gleichmäßig auf $\mathbb{C} \setminus \overline{U_{2|a_n - c_n|}(c_n)}$.

Sei h_n eine Partialsumme dieser Reihe mit

$$|g_n(z) - h_n(z)| \leq \frac{1}{2^n}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \overline{U_{2|a_n - c_n|}(c_n)}.$$

Dann ist $h_n \in H(G)$. Sei $K \subseteq G$ kompakt, dann existiert $N \in \mathbb{N}$ sodass $K \subseteq \mathbb{C} \setminus \overline{U_{2|a_n - c_n|}(c_n)}$, $n \geq N$. Also konvergiert

$$\sum_{n \geq N} (g_n(z) - h_n(z))$$

gleichmäßig auf K . Wir können nun wieder Lemma 4.4.7 anwenden. \square

4.4.8 Korollar. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen, und sei $(a_1, \hat{g}_1), (a_2, \hat{g}_2), \dots$ eine (endliche oder unendliche) Folge von Paaren sodass a_1, a_2, \dots paarweise verschieden sind und keinen Häufungspunkt in G haben, und sodaß

$$\hat{g}_n(z) = \sum_{k=-\infty}^{m_n} b_k(z - a_n)^k$$

wobei $m_n \in \mathbb{Z}$ und die Reihe auf $\mathbb{C} \setminus \{a_n\}$ lokal gleichmäßig konvergiert. Dann existiert eine Funktion $f \in H(G \setminus \{a_1, a_2, \dots\})$ deren Laurent-Entwicklung an der Stelle a_n die Gestalt

$$f(z) = \hat{g}_n(z) + \sum_{k > m_n} \beta_k(z - a_n)^k$$

hat.

Beweis. Sei $F(z) \in H(G)$ sodass

$$\vartheta_F(z) = \begin{cases} m_n + 1, & z = a_n, m_n \geq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Sei g_n der Hauptteil der Laurentreihe von $\frac{\hat{g}_n}{F}$ an der Stelle a_n . Sei weiters $f_1 \in H(G \setminus \{a_1, a_2, \dots\})$ sodass der Hauptteil von f an a_n gleich g_n ist. Dann hat die Funktion $f(z) := f_1(z) \cdot F(z)$ die gewünschte Eigenschaft. \square

4.5 Der Riemannsche Abbildungssatz

4.5.1 Satz (Riemann'scher Abbildungssatz). Sei G ein Gebiet, $G \neq \emptyset, \mathbb{C}$. Weiters habe G die Eigenschaft, dass jede Funktion $f \in H(G)^*$ eine Quadratwurzel besitzt, d.h. dass eine Funktion $g \in H(G)$ existiert mit $g^2 = f$. Dann existiert eine analytische Funktion die G bijektiv auf den Einheitskreis \mathbb{D} abbildet.

Beweis. Sei $a \in G$ fest gewählt. Wir betrachten die Familie \mathcal{F} aller Funktionen $f \in H(G)$ die G injektiv in den Einheitskreis abbilden und $f(a) = 0$ erfüllen.

Schritt 1, $\mathcal{F} \neq \emptyset$: Wähle $b \in \mathbb{C} \setminus G$, dann ist $z - b \in H(G)^*$. Also existiert $h \in H(G)$ mit $h(z)^2 = z - b$. Dann ist h injektiv, liegt in $H(G)^*$, und hat die Eigenschaft dass $h(G) \cap (-h(G)) = \emptyset$. Denn ist $\zeta = h(z) = -h(w)$, so folgt $z = \zeta^2 + b = w$, also $h(z) = 0$ und damit $z = b$, ein Widerspruch. Wähle $w \in -h(G)$, dann existiert $r > 0$ sodass $U_r(w) \subseteq -h(G)$ und daher $U_r(w) \cap h(G) = \emptyset$. Die Funktion $\alpha(z) := \frac{1}{z-w}$ ist also in $H(h(G))$, ist injektiv, und $|\alpha(z)| \leq \frac{1}{r}$, $z \in h(G)$. Also bildet die Funktion $r\alpha \circ h$ das Gebiet G injektiv nach \mathbb{D} ab. Sei für $d \in \mathbb{D}$

$$g_d(z) := \frac{d - z}{1 - \overline{d}z} \in \text{Aut}(\mathbb{D}),$$

vgl. Korollar 3.3.5. Dann ist

$$g_{\frac{r}{h(a)-w}} \circ r\alpha \circ h \in \mathcal{F}.$$

Schritt 2, $\exists g \in \mathcal{F} : |g'(a)| = \max_{f \in \mathcal{F}} |f'(a)|$: Da $|f(z)| < 1$ für alle $f \in \mathcal{F}$, $z \in \mathbb{D}$, ist \mathcal{F} eine normale Familie und, nach den Cauchyschen Abschätzungen ist $\sup_{f \in \mathcal{F}} |f'(a)| < \infty$. Da $\mathcal{F} \neq \emptyset$ und aus injektiven Funktionen besteht ist auch $\sup_{f \in \mathcal{F}} |f'(a)| > 0$. Sei $g_n \in \mathcal{F}$ eine Folge mit $g'_n(a) \rightarrow \sup_{f \in \mathcal{F}} |f'(a)|$, und wähle eine konvergente Teilfolge, $g_n \rightarrow g$. Dann ist $g \in H(G)$, $g(G) \subseteq \overline{\mathbb{D}}$, $g(a) = 0$ und $g'(a) = \sup_{f \in \mathcal{F}} |f'(a)|$. Also ist g nicht konstant, nach dem Maximumprinzip haben wir $g(G) \subseteq \mathbb{D}$, und nach Korollar 4.2.5 ist g injektiv. Wir sehen daß $g \in \mathcal{F}$.

Schritt 3, $g(G) = \mathbb{D}$: Dazu sei zunächst $b \in \mathbb{D}$, $b \neq 0$, beliebig. Wähle $c \in \mathbb{D}$ mit $c^2 = b$, und betrachte

$$L := g_b \circ (g_c^2) = g_b \circ Q \circ g_c.$$

wobei $Q(z) := z^2$. Dann ist $L \in H(\mathbb{D})$ und es gilt $L(0) = g_b(c^2) = 0$. Weiters ist $L(c) = g_b(0) = b \neq 0$, also ist L nicht konstant. Wegen $L(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$ folgt nach dem Lemma von Schwarz dass $|L'(0)| < 1$.

Sei nun angenommen $b \in \mathbb{D} \setminus g(G)$. Dann ist $b \neq 0$, und $g_b \circ g \in H(G)^*$. Sei $h \in H(G)$ mit $h^2 = g_b \circ g$ und $h(a) = c$, und setze $\varphi := g_c \circ h$. Dann gilt $\varphi \in \mathcal{F}$: Da g und g_b injektiv sind, ist auch h injektiv. Es gilt $|h(z)|^2 = |g_b \circ g(z)| < 1$, $z \in G$, und daher auch $h(G) \subseteq \mathbb{D}$. Schließlich ist $h(a) = c$. Nun ist, wie eine Rechnung zeigt, stets $g_d \circ g_d = \text{id}$, und wir erhalten

$$L \circ \varphi = g_b \circ Q \circ g_c \circ g_c \circ h = g_b \circ Q \circ h = g_b \circ g_b \circ g = g.$$

Es folgt

$$g'(a) = L'(\varphi(a)) \cdot \varphi'(a) = L'(0) \cdot \varphi'(a),$$

und daher $|g'(a)| < |\varphi'(a)|$. Ein Widerspruch zur Maximalitätseigenschaft von g . \square

Wir erhalten als erstes Korollar eine Aussage die topologische und analytische Eigenschaften von Gebieten in \mathbb{C} sowie algebraischen Eigenschaften von $H(G)$ verbindet.

4.5.2 Korollar. *Sei G ein Gebiet, $G \neq \emptyset$. Dann sind äquivalent:*

- (i) $G = \mathbb{C}$ oder G ist analytisch und bijektiv auf \mathbb{D} abbildbar.
- (ii) G ist einfach zusammenhängend.
- (iii) G ist homolog einfach zusammenhängend.
- (iv) Jede Funktion $f \in H(G)^*$ besitzt einen Logarithmus.
- (v) Jede Funktion $f \in H(G)^*$ besitzt eine Quadratwurzel.

Beweis. Die Implikation (i) \Rightarrow (ii) gilt, da eine analytische und injektive Abbildung nach dem Satz über die Inverse Funktion ein Homöomorphismus ist. (ii) \Rightarrow (iii) ist Korollar 2.2.6, (ii), (iii) \Rightarrow (iv) ist Korollar 3.1.7, (iv) \Rightarrow (v) ist Bemerkung 3.1.9. Schließlich ist (v) \Rightarrow (i) der Riemannsche Abbildungssatz. \square

Wir wollen anmerken, dass die beiden Möglichkeiten in (i) einander ausschließen. Denn ist $f \in H(\mathbb{C})$ und $f(\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{D}$, so ist nach dem Satz von Liouville f konstant.

Als zweites Korollar erhalten wir die Struktur von $\text{Aut } G$ für einfach zusammenhängende Gebiete.

4.5.3 Korollar. *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ einfach zusammenhängend. Dann gilt*

$$\text{Aut } G \cong \text{Aut } \mathbb{D}.$$

Beweis. Sei $f : G \rightarrow \mathbb{D}$ analytisch und bijektiv. Dann ist die Abbildung $h \mapsto f^{-1} \circ h \circ f$ ein Isomorphismus von $\text{Aut } \mathbb{D}$ auf $\text{Aut } G$. \square

4.6 Der Fundamental Normality Test

4.6.1 Satz (Fundamental Normality Test). *Sei G ein Gebiet, $a, b, c \in \mathbb{C}_\infty$ drei verschiedene Werte. Die Familie \mathcal{F} aller Funktionen $f \in M(G)$ die die Werte a, b, c nicht annehmen ist normal.*

Bevor wir diesen Satz beweisen, wollen wir uns überlegen, dass er tatsächlich wesentlich stärker ist als der Satz von Montel.

4.6.2 Korollar. *Sei G ein Gebiet, $z_0 \in G$, $C > 0$, und $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq b$. Dann ist die Familie*

$$\mathcal{F} := \{f \in H(G) : f \text{ nimmt die Werte } a, b \text{ nicht an, } |f(z_0)| \leq C\}$$

normal in $C(G, \mathbb{C})$.

Beweis. Es ist $\mathcal{F} \subseteq M(G)$, und die Funktionen aus \mathcal{F} nehmen die Werte a, b und ∞ nicht an. Daher ist \mathcal{F} normal in $C(G, \mathbb{C}_\infty)$. Nachdem \mathcal{F} an der Stelle z_0 beschränkt ist, folgt daraus Normalität in $C(G, \mathbb{C})$. \square

Sei nun $\mathcal{F} \subseteq H(G)$ lokal gleichmäßig beschränkt. Zu $w \in G$ wähle eine Kreisscheibe $U_r(w)$ mit $\overline{U_r(w)} \subseteq G$. Dann ist die Familie $\mathcal{F}_w := \{f|_{U_r(w)} : f \in \mathcal{F}\}$ beschränkt. Die Funktionen dieser Familie nehmen daher keinen Wert ausserhalb einer gewissen Kreisscheibe an (insbesondere lassen sie drei verschiedene Werte aus). Nach dem Fundamental Normality Test ist also \mathcal{F}_w normal. Wir sollten explizit bemerken, dass das eben durchgeführte Argument kein neuer Beweis des Satzes von Montel ist, da wir im nun folgenden Beweis des Fundamental Normality Tests diesen verwenden. Es zeigt aber deutlich auf um wieviel stärker der FNT im Vergleich zu Montel ist.

Zum Beweis des FNT verwenden wir das folgende Lemma.

4.6.3 Lemma (*Lemma von Zalcman*). *Sei $\mathcal{F} \subseteq M(G)$ nicht normal. Dann existiert eine Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $z_n \in G$, mit $z_n \rightarrow z \in G$, eine Folge $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $r_n > 0$ mit $r_n \rightarrow 0$, sowie eine Folge $f_n \in \mathcal{F}$, sodass die Funktionen*

$$g_n(\zeta) := f_n(z_n + r_n \zeta)$$

gegen eine nichtkonstante Funktion $g \in M(\mathbb{C})$ konvergieren für die

$$g^\sharp(0) = 1, \quad g^\sharp(z) \leq 1, \quad z \in \mathbb{C},$$

gilt.

Ist dabei $\mathcal{F} \subseteq H(G)$, so ist $g \in H(\mathbb{C})$.

Beweis. Da \mathcal{F} nicht normal ist, gibt es nach dem Satz von Marty $K \subseteq G$ kompakt, $w_n \in K$ und $f_n \in \mathcal{F}$ mit $f_n^\sharp(w_n) \rightarrow \infty$.

Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass $w_n \rightarrow 0 \in G$ und $\overline{U_1(0)} \subseteq G$. Das kann immer durch eine Translation bzw. Streckung erreicht werden. Setze

$$R_n := \max_{|z| \leq 1} f_n^\sharp(z)(1 - |z|).$$

Wegen $w_n \rightarrow 0$ und $f_n^\sharp(w_n) \rightarrow \infty$ gilt auch $R_n \rightarrow \infty$. Sei $z_n, |z_n| \leq 1$, so dass $R_n = f_n^\sharp(z_n)(1 - |z_n|)$. Da $f_n^\sharp(z_n) \geq R_n$ folgt das auch $f_n^\sharp(z_n) \rightarrow \infty$. Setze

$$r_n := \frac{1}{f_n^\sharp(z_n)}.$$

Da $r_n R_n = 1 - |z_n|$, ist $U_{r_n R_n}(z_n) \subseteq U_1(0) \subseteq G$.

Betrachte die Funktionen

$$g_n(\zeta) := f_n(z_n + r_n \zeta), \quad |\zeta| < R_n.$$

Es gilt $g_n^\sharp(\zeta) = r_n f_n^\sharp(z_n + r_n \zeta)$.

Sei nun $R > 0$ festgehalten. Wähle $N_R \in \mathbb{N}$ so daß $R_n > R + 1$, $n \geq N_R$, dann ist g_n für $n \geq N_R$ stets auf $U_R(0)$ definiert und meromorph. Nach der Definition von R_n gilt $f_n^\sharp(z_n + r_n \zeta)(1 - |z_n + r_n \zeta|) \leq R_n$, und wir erhalten

$$\begin{aligned} g_n^\sharp(\zeta) &\leq r_n \frac{R_n}{1 - |z_n + r_n \zeta|} \leq \frac{r_n R_n}{1 - |z_n| - r_n R} = \frac{r_n R_n}{r_n R_n - r_n R} = \\ &= \frac{1}{1 - \frac{R}{R_n}} \leq \frac{1}{1 - \frac{R}{R+1}}, \quad |\zeta| < R, n \geq N_R. \end{aligned} \tag{4.6.1}$$

Nach dem Satz von Marty ist $\{g_n : n \geq N_R\}$ eine normale Familie in $C(U_R(0), \mathbb{C}_\infty)$.

Wir konstruieren induktiv Folgen $(n(l, k))_{k \in \mathbb{N}}$, $l \in \mathbb{N}$. Sei $n(1, k)$ derart dass $N_1 \leq n(1, 1)$, $n(1, k) < n(1, k+1)$, und sodass die Folge $(g_{n(1, k)})_{k \in \mathbb{N}}$ auf $U_1(0)$ konvergiert. Sei nun für ein $l \geq 1$ die Folge $(n(l, k))_{k \in \mathbb{N}}$ schon konstruiert. Dann wähle eine Teilfolge $(n(l+1, k))_{k \in \mathbb{N}}$ von $(n(l, k))_{k \in \mathbb{N}}$ sodass $N_{l+1} \leq n(l+1, 1)$, $n(l+1, k) < n(l+1, k+1)$, und sodass $(g_{n(l+1, k)})_{k \in \mathbb{N}}$ auf $U_{l+1}(0)$ konvergiert.

Betrachte nun die Diagonalfolge $(g_{n(k, k)})_{k \in \mathbb{N}}$. Da $(n(k, k))_{k \geq l}$ eine Teilfolge von $(n(l, k))_{k \in \mathbb{N}}$ ist, ist sie auf jedem Kreis $U_l(0)$ ab dem Index l definiert und konvergent. Also ist eine Funktion $g \in M(\mathbb{C}) \cup \{\infty\}$ durch

$$g(\zeta) := \lim_{l \rightarrow \infty} g_{n(l, l)}(\zeta)$$

wohldefiniert, und es gilt $g(\zeta) = \lim_{k \rightarrow \infty} g_{n(l, k)}(\zeta)$, $|\zeta| < l$.

Ist $\zeta \in \mathbb{C}$ fest, so gilt, wegen (4.6.1) mit $R = l$, für alle $l > |\zeta|$, $k \in \mathbb{N}$,

$$(g_{n(l, k)})^\#(\zeta) \leq \left(1 - \frac{l}{R_{n(l, k)}}\right)^{-1},$$

und wir erhalten $g^\#(\zeta) \leq 1$. Da $g_n^\#(0) = r_n f_n^\#(z_n) = 1$, $n \in \mathbb{N}$, folgt das $g^\#(0) = 1$. Insbesondere ist g nicht konstant. Damit haben wir auch $g \neq \infty$.

Ist $\mathcal{F} \subseteq H(G)$, so sind alle Funktionen g_n sogar analytisch. Da $H(G)$ in $M(G)$ abgeschlossen ist, ist auch die Grenzfunktion analytisch. \square

Beweis (von Satz 4.6.1). Da wegen des Satzes von Marty, eine Familie normal ist genau dann wenn jeder Punkt eine Umgebung U besitzt sodass die Familie $\{f|_U : f \in \mathcal{F}\}$ normal ist, bzw. genau dann wenn die Familie $\{f(\alpha z + \beta) : f \in \mathcal{F}\}$ wobei $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$, normal ist, können wir voraussetzen dass $G = U_1(0) = \mathbb{D}$. Da jede Möbiustransformation $\lambda(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ ein Homöomorphismus von \mathbb{C}_∞ auf sich ist, ist \mathcal{F} genau dann normal wenn $\{\lambda \circ f : f \in \mathcal{F}\}$ normal ist. Daher können wir voraussetzen dass $a = 0$, $b = 1$, $c = \infty$. Wir betrachten also die Familie \mathcal{F} aller auf \mathbb{D} analytischen und nullstellenfreien Funktionen die den Wert 1 nicht annehmen.

Sei $k \in \mathbb{N}$ und \mathcal{F}_k die Familie aller 2^k -ten Wurzeln von Funktionen aus \mathcal{F} . Keine Funktion aus \mathcal{F}_k kann eine 2^k -te Einheitswurzel als Wert annehmen, da ja keine Funktion aus \mathcal{F} den Wert 1 annimmt. Wir zeigen, dass Normalität von \mathcal{F}_k Normalität von \mathcal{F} impliziert. Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in \mathcal{F} , und wähle 2^k -te Wurzeln F_n von f_n . Dann ist $F_n \in \mathcal{F}_k$, und daher existiert eine in $M(\mathbb{D})$ konvergente Teilfolge, sagen wir $F_{n_l} \rightarrow F$. Da alle F_{n_l} analytisch sind, ist entweder F analytisch oder $F = \infty$. Im ersten Fall folgt, da multiplizieren in $H(\mathbb{D})$ stetig ist, dass auch $f_{n_l} \rightarrow F^{2^k}$. Im zweiten Fall folgt wegen $|f_{n_l}(z)| = |F_{n_l}|^{2^k}$, dass auch $f_{n_l} \rightarrow \infty$.

Sei nun indirekt angenommen \mathcal{F} ist nicht normal. Dann ist für jedes $k \in \mathbb{N}$ auch \mathcal{F}_k nicht normal. Sei g_k die Grenzfunktion aus dem Lemma von Zalcman angewendet mit der Familie \mathcal{F}_k . Dann ist $g_k \in H(\mathbb{C})$, nicht konstant, und es gilt $g_k^\#(\zeta) \leq 1$, $g_k^\#(0) = 1$. Da g_k Grenzwert von Einschränkungen von Funktionen aus \mathcal{F}_k ist, kann nach dem Satz von Hurwitz g_k keine 2^k -te Einheitswurzel als Wert annehmen.

Nach dem Satz von Marty ist die Familie $\{g_k : k \in \mathbb{N}\}$ normal in $C(\mathbb{C}, \mathbb{C}_\infty)$. Sei g ein Grenzwert von einer Teilfolge von $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Dann ist $g \in H(\mathbb{C}) \cup \{\infty\}$, und $g^\#(0) = 1$. Insbesondere ist also g nicht konstant, und daher $g \in H(\mathbb{C})$.

Sei $k_0 \in \mathbb{N}$, dann nimmt g_k für $k \geq k_0$ keine 2^{k_0} -te Einheitswurzel als Wert an. Nach dem Satz von Hurwitz hat auch g diese Eigenschaft. Da k_0 beliebig war nimmt g keine 2^j -te Einheitswurzel, $j \in \mathbb{N}$, als Wert an. Nach dem Satz von der offenen Abbildung nimmt g daher keinen Wert w mit $|w| = 1$ an. Da $g(\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{C}_\infty$ zusammenhängend ist, folgt dass entweder $g(\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{D}$ oder $g(\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{C}_\infty \setminus \mathbb{D}$. Nach dem Satz von Liouville angewendet auf g bzw. $\frac{1}{g}$ ist g konstant. Ein Widerspruch. \square

Wir erhalten eine Verschärfung des Satzes von Vitali.

4.6.4 Korollar (*Satz von Caratheodory-Landau*). Sei G ein Gebiet, $a, b \in \mathbb{C}$ mit $a \neq b$, und sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $H(G)$ sodass $a, b \notin f_n(G)$, $n \in \mathbb{N}$. Dann sind äquivalent:

- (i) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist konvergent.
- (ii) Es existiert ein Punkt $c \in G$ sodass für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Folge $(f_n^{(k)}(c))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert.
- (iii) Die Menge $A := \{w \in G : \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(w)\}$ hat einen Häufungspunkt in G .

Beweis. Verwende im Beweis des Satzes von Vitali anstelle von Montel den FNT in der Form von Korollar 4.6.2. \square

4.6.5 Satz (*von Picard*). Sei f meromorph auf einer punktierten Scheibe $W := U_\delta(z_0) \setminus \{z_0\}$. Wenn f drei verschiedene Werte $a, b, c \in \mathbb{C}_\infty$ nicht annimmt, dann besitzt f eine Fortsetzung zu einer meromorphen Funktion auf $U_\delta(z_0)$.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $z_0 = 0$ und $a = 0$, $b = 1$, $c = \infty$. Sei $0 < r_n < 1$, $r_n > r_{n+1}$, $r_n \rightarrow 0$, und setze $g_n(z) := f(r_n z)$, $z \in W$. Dann ist g_n analytisch und nimmt die Werte $0, 1$ nicht an. Nach dem Fundamental Normality Test existiert eine Teilfolge g_{n_k} die lokal gleichmäßig in $C(W, \mathbb{C}_\infty)$ gegen eine Funktion $g \in H(W) \cup \{\infty\}$ konvergiert.

Sei zunächst angenommen dass $g \in H(W)$. Wähle $\rho \in (0, \delta)$ fest und setze $M := \max_{|z|=\rho} |g(z)| + 1$. Dann gibt es $N \in \mathbb{N}$ sodass $|g_{n_k}(z)| \leq M$, $k \geq N$, $|z| = \rho$. Also ist

$$|f(z)| \leq M, \quad |z| = r_{n_k} \rho, \quad k \geq N.$$

Nach dem Maximumprinzip folgt dass

$$|f(z)| \leq M, \quad r_{n_k+1} \rho \leq |z| \leq r_{n_k} \rho, \quad k \geq N.$$

Da $r_{n_k} \rightarrow 0$ folgt $|f(z)| \leq M$, $0 < |z| \leq r_{n_k} \rho$. Nach dem Riemann'schen Hebbarkeitssatz besitzt f eine analytische Fortsetzung auf $U_\delta(0)$.

Sei $g = \infty$. Dann ist für n hinreichend groß $|g_{n_k}(z)| \geq 1$, $|z| = \rho$, und daher $|\frac{1}{f(z)}| \leq 1$, $|z| = r_{n_k} \rho$. Da f nullstellenfrei ist, ist $\frac{1}{f}$ analytisch in W und wir folgern genauso wie oben dass $\frac{1}{f}$ eine analytische Fortsetzung auf $U_\delta(0)$ hat. \square

4.6.6 Korollar (*Kleiner Satz von Picard*). Eine nichtkonstante Funktion die in ganz \mathbb{C} analytisch ist nimmt jeden Wert mit höchstens einer Ausnahme an.

Beweis. Da $f \in H(\mathbb{C})$ ist, nimmt f aufgefasst als Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ den Wert ∞ sowieso nicht an. Würde es zusätzlich zwei Werte $a, b \in \mathbb{C}$ geben

die nicht angenommen werden, so würde die Funktion $f(\frac{1}{z}) \in H(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ eine meromorphe Fortsetzung nach 0 haben. Sei $f(\frac{1}{z}) = \sum_{k \geq m} a_k z^k$ die Laurent-Entwicklung von $f(\frac{1}{z})$ um 0, dann gilt also

$$f(z) = \sum_{k \geq m} a_k z^{-k}, \quad |z| > 0.$$

Da f analytisch bei 0 ist folgt $a_k = 0$, $k \geq 1$, und damit ist f ein Polynom. Ein Polynom nimmt aber jeden Wert an. \square

4.6.7 Korollar (Satz von Schottky). Für $r, R > 0$ bezeichne

$$S(r, R) := \{f \in H(U_R(0)) : 0, 1 \notin f(U_R(0)), |f(0)| \leq r\}.$$

Dann gibt es jedem $r > 0$ und $\rho \in (0, 1)$ eine Konstante $L(r, \rho) > 0$ sodass

$$|f(z)| \leq L(r, \rho), \quad |z| \leq \rho R, \quad f \in S(r, R).$$

Beweis. Nach Korollar 4.6.2 ist $S(r, 1)$ normal in $C(\mathbb{D}, \mathbb{C})$, und nach Montel daher lokal beschränkt. Also ist für jedes $r > 0$ und $\rho \in (0, 1)$

$$L(r, \rho) := \sup \{|f(z)| : f \in S(r, 1), |z| \leq \rho\} < \infty.$$

Sei nun $f \in S(r, R)$, dann ist $g(z) := f(Rz) \in S(r, 1)$. Daher gilt

$$|f(z)| = |g(\frac{z}{R})| \leq L(r, \rho), \quad |z| \leq \rho R.$$

\square

4.6.8 Korollar (Satz von Landau). Seien $a_0 \in \mathbb{C}$ und $a_1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dann existiert eine Konstante $M(a_0, a_1) > 0$, sodass jede Funktion f die auf einer Kreisscheibe $U_R(0)$ mit $R > M(a_0, a_1)$ analytisch ist und $f(0) = a_0$, $f'(0) = a_1$, erfüllt, die Werte 0 und 1 annehmen muss.

Beweis. Sei $f \in H(U_R(0))$ mit $f'(0) \neq 0$ und $0, 1 \notin f(U_R(0))$. Dann gilt

$$|f'(0)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial U_{\frac{R}{2}}(0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta^2} d\zeta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi \frac{R}{2} \cdot \frac{L(|f(0)|, \frac{1}{2})}{(\frac{R}{2})^2} = \frac{2L(|f(0)|, \frac{1}{2})}{R}$$

und daher

$$R \leq \frac{2L(|f(0)|, \frac{1}{2})}{|f'(0)|}.$$

Die Behauptung folgt nun mit $M(a_0, a_1) := \frac{2L(|a_0|, \frac{1}{2})}{|a_1|}$. \square

Kapitel 5

Riemannsche Flächen

5.1 Riemannsche Flächen und analytische Funktionen

Wir werden auf 2-dimensionalen topologischen Mannigfaltigkeiten eine analytische Struktur definieren.

5.1.1 Definition.

- (i) Sei X ein Hausdorffscher topologischer Raum. Ein Paar (U, ϕ) heißt eine *Karte*, wenn $U \subseteq X$ offen, $\phi(U) \subseteq \mathbb{C}$ offen, und $\phi : U \rightarrow \phi(U)$ ein Homöomorphismus ist.
- (ii) Zwei Karten (U_1, ϕ_1) und (U_2, ϕ_2) eines Hausdorff-Raumes X heißen *analytisch verträglich*, wenn $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ oder die Abbildung

$$\phi_2 \circ \phi_1^{-1}|_{\phi_1(U_1 \cap U_2)} : \phi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \phi_2(U_1 \cap U_2)$$

analytisch ist. Da $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}$ bijektiv ist, ist in diesem Fall auch die Inverse $\phi_1 \circ \phi_2^{-1}$ analytisch.

- (iii) Eine Familie $\mathfrak{A} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha) : \alpha \in A\}$ von Karten heißt ein *Atlas* auf X , wenn $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = X$ ist und je zwei Karten aus \mathfrak{A} analytisch verträglich sind.

//

5.1.2 Definition. Eine *Riemannsche Fläche* ist ein Paar (X, \mathfrak{A}) wobei X ein Hausdorffscher topologischer Raum ist und \mathfrak{A} ein Atlas auf X .

//

5.1.3 Beispiel. Sei X eine offene Teilmenge von \mathbb{C} versehen mit der Spurtopologie. Dann ist $\mathfrak{A} := \{(X, \text{id})\}$, wobei id als Abbildung von X nach \mathbb{C} betrachtet wird, ein Atlas auf X .

//

5.1.4 Beispiel. Sei $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, vermöge der stereographischen Projektion also die Riemannsche Zahlenkugel. Wir definieren ($\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$)

$$U_1 := \mathbb{C}, \phi_1 := \text{id}$$

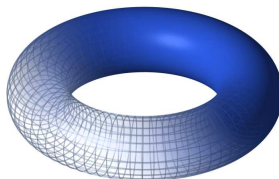
$$U_2 := \mathbb{C}^* \cup \{\infty\}, \quad \phi_2(z) := \begin{cases} \frac{1}{z}, & z \in \mathbb{C}^* \\ 0, & z = \infty \end{cases} \quad (5.1.1)$$

Dann ist $\phi_1(U_1 \cap U_2) = \phi_2(U_1 \cap U_2) = \mathbb{C}^*$ und

$$(\phi_2 \circ \phi_1^{-1})(z) = \frac{1}{z}, \quad z \in \mathbb{C}^*.$$

Wir sehen, dass $\mathfrak{A} := \{(U_1, \phi_1), (U_2, \phi_2)\}$ ein Atlas auf \mathbb{C}_∞ ist. //

5.1.5 Beispiel. Seien $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ linear unabhängig über \mathbb{R} , und bezeichne $L := \mathbb{Z}w_1 + \mathbb{Z}w_2$. Die Faktormenge \mathbb{C}/L heißt der *komplexe Torus*.



Bezeichne mit $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/L$ die kanonische Projektion. Wir versehen \mathbb{C}/L mit der finalen Topologie bezüglich π , d.h. eine Menge $W \subseteq \mathbb{C}/L$ ist offen genau dann, wenn $\pi^{-1}(W) \subseteq \mathbb{C}$ offen ist.

Ist $V \subseteq \mathbb{C}$, so ist $\pi^{-1}(\pi(V)) = \bigcup_{w \in L} (w + V)$. Wir sehen, dass offene Teilmengen von \mathbb{C} unter π auf offene Teilmengen von \mathbb{C}/L abgebildet werden. Die Projektion π ist also nicht nur stetig, sondern auch offen.

Bezeichne mit \mathcal{A} die Menge aller offenen Teilmengen von \mathbb{C} die mit jeder Äquivalenzklasse modulo L höchstens einen Punkt gemeinsam haben. Es gibt viele Mengen mit dieser Eigenschaft, zum Beispiel jede Kugel mit hinreichend kleinem Radius. Für jedes $V \in \mathcal{A}$ ist $\pi(V)$ offen und $\pi|_V$ eine bijektive stetige und offene Abbildung von V auf $\pi(V)$, also ein Homöomorphismus.

Wir definieren nun

$$\mathfrak{A} := \{(\pi(V), (\pi|_V)^{-1}) : V \in \mathcal{A}\}.$$

Offenbar ist $\bigcup_{V \in \mathcal{A}} \pi(V) = \mathbb{C}/L$. Seien $V_1, V_2 \in \mathcal{A}$, und betrachte die Abbildung

$$\psi := (\pi|_{V_2})^{-1} \circ (\pi|_{V_1}) : V_1 \cap ((\pi|_{V_1})^{-1} \pi(V_2)) \rightarrow ((\pi|_{V_2})^{-1} \pi(V_1)) \cap V_2.$$

Dann gilt stets $\psi(z) \equiv z \pmod{L}$. Da L diskret ist und ψ stetig, folgt dass ψ auf jeder Komponente konstant ist, und daher analytisch. Also ist \mathfrak{A} ein Atlas. //

Riemannsche Flächen haben eine wichtige Zusammenhangseigenschaft.

5.1.6 Lemma. *Sei (X, \mathfrak{A}) eine Riemannsche Fläche. Dann ist X lokal bogenweise zusammenhängend. Jede Zusammenhangskomponente von X ist offen und bogenweise zusammenhängend.*

Beweis. Da jeder Punkt eine Umgebung besitzt die homöomorph zu einer offenen Teilmenge von \mathbb{C} ist, ist X lokal bogenweise zusammenhängend. Die zweite Behauptung folgt mit Lemma 1.3.2. \square

Mit Riemannschen Flächen können diverse Konstruktionen ausgeführt werden. Wir erwähnen an dieser Stelle nur die beiden folgenden.

5.1.7 Lemma. Sei (X, \mathfrak{A}) eine Riemannsche Fläche, und sei $Y \subseteq X$ offen. Versieht man Y mit der Spurtopologie von X und definiert man

$$\mathfrak{B} := \{(U \cap Y, \phi|_{U \cap Y}) : (U, \phi) \text{ Karte von } X\}$$

so ist (Y, \mathfrak{B}) eine Riemannsche Fläche.

Beweis. Klar. □

Sind X, Y topologische Räume und $p : Y \rightarrow X$. Dann heißt p ein *lokaler Homöomorphismus*, wenn jeder Punkt $y \in Y$ eine offene Umgebung V besitzt, sodass $p(V) \subseteq X$ offen ist, und $p|_V : V \rightarrow p(V)$ ein Homöomorphismus ist.

5.1.8 Lemma. Sei X eine Riemannsche Fläche, Y ein Hausdorff-Raum, und $p : Y \rightarrow X$ ein lokaler Homöomorphismus. Dann kann Y zu einer Riemannschen Fläche gemacht werden, und zwar derart dass p analytisch ist.

Beweis. Sei (U, ϕ) eine Karte von X und $x \in U$. Wähle $V \subseteq Y$ offen, mit $x \in p(V) \subseteq U$, sodass $p|_V$ ein Homöomorphismus von V auf $p(V)$ ist. Dann ist $(V, \phi \circ p|_V)$ eine Karte auf Y . Hat man zwei in dieser Weise erhaltene Karten $(V_1, \phi_1 \circ p|_{V_1}), (V_2, \phi_2 \circ p|_{V_2})$, mit $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$, so gilt

$$(\phi_2 \circ p|_{V_2}) \circ (\phi_1 \circ p|_{V_1})^{-1} = \phi_2 \circ \phi_1^{-1},$$

und diese Abbildung ist analytisch.

Es ist für jede Karte (U, ϕ) von X die Abbildung $\phi \circ p$ eine Karte von Y , und daher ist $p \in \text{Hol}(Y, X)$. □

5.1.9 Definition. Seien $(X_1, \mathfrak{A}_1), (X_2, \mathfrak{A}_2)$ Riemannsche Flächen und $f : X_1 \rightarrow X_2$. Dann heißt f *analytisch*, wenn f stetig ist und für je zwei Karten $(U_1, \phi_1) \in \mathfrak{A}_1, (U_2, \phi_2) \in \mathfrak{A}_2$ mit $U_1 \cap f^{-1}(U_2) \neq \emptyset$ die Abbildung

$$\phi_2 \circ f \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(U_1 \cap f^{-1}(U_2)) \rightarrow \mathbb{C}$$

analytisch ist. Die Menge aller analytischen Abbildungen von (X_1, \mathfrak{A}_1) nach (X_2, \mathfrak{A}_2) bezeichnen wir mit $\text{Hol}((X_1, \mathfrak{A}_1), (X_2, \mathfrak{A}_2))$. //

Wir werden im folgenden oft von einer Riemannschen Fläche X sprechen und dabei den Atlas von X nicht explizit anführen. Man beachte, dass dies nur dazu dient die Notation abzukürzen, tatsächlich hängen alle eingeführten Begriffe von dem gegebenen Atlas ab.

5.1.10 Lemma. Seien X_1, X_2 Riemannsche Flächen und $f : X_1 \rightarrow X_2$. Dann ist $f \in \text{Hol}(X_1, X_2)$ genau dann, wenn gilt: Für jeden Punkt $x \in X_1$ existieren Karten $(U_1, \phi_1), (U_2, \phi_2)$ von X_1 bzw. X_2 und eine offenen Umgebung $U \subseteq X_1$ von x , sodass $U \subseteq U_1, f(U) \subseteq U_2$, und $\phi_2 \circ f \circ \phi_1^{-1}|_{\phi_1(U)}$ analytisch ist.

Beweis. Sei vorausgesetzt, dass f der Bedingung des Lemmas genügt. Sei $x \in X_1$ und wähle $(U_1, \phi_1), (U_2, \phi_2), U$ wie angegeben. Dann ist $\phi_2 \circ f \circ \phi_1^{-1}|_{\phi_1(U)}$ analytisch und daher stetig. Da ϕ_2 und ϕ_1^{-1} Homöomorphismen sind und $\phi_1(U)$ offen, folgt dass f an der Stelle x stetig ist.

Seien nun $(V_1, \psi_1), (V_2, \psi_2)$ Karten von X_1 bzw. X_2 mit $V_1 \cap f^{-1}(V_2) \neq \emptyset$. Wegen der Stetigkeit von f folgt dass $V_1 \cap f^{-1}(V_2)$ offen ist. Sei $z \in \psi_1(V_1 \cap f^{-1}(V_2))$.

$f^{-1}(V_2)$), und wähle $(U_1, \phi_1), (U_2, \phi_2), U$ wie angegeben für den Punkt $x := \psi_1^{-1}(z)$. Dann ist

$$\psi_2 \circ f \circ \psi_1^{-1} = (\psi_2 \circ \phi_2^{-1}) \circ (\phi_2 \circ f \circ \phi_1^{-1}) \circ (\phi_1 \circ \psi_1^{-1})$$

wobei auf einen geeigneten Definitionsbereich eingeschränkt wird: Setze $D := \psi_1(U \cap V_1 \cap f^{-1}(V_2))$, dann ist D offen, nichtleer, und alle Zusammensetzungen sind wohldefiniert

$$D \xrightarrow{\phi_1 \circ \psi_1^{-1}} \psi_1(U \cap V_1 \cap f^{-1}(V_2)) \xrightarrow{\phi_2 \circ f \circ \phi_1^{-1}} \phi_2(U_2 \cap V_2) \xrightarrow{\psi_2 \circ \phi_2^{-1}} \mathbb{C}$$

Als Zusammensetzung analytischer Funktionen ist also $\psi_2 \circ f \circ \psi_1^{-1}|_D$ analytisch.

Ist umgekehrt $f \in \text{Hol}(X_1, X_2)$, und $x \in X_1$ gegeben, so wähle Karten $(U_1, \phi_1), (U_2, \phi_2)$ von X_1 bzw. X_2 mit $x \in U_1$ und $f(x) \in U_2$, und setze $U := U_1 \cap f^{-1}(U_2)$. Da f stetig ist, ist U eine offene Umgebung von x , und da f analytisch ist, ist die Funktion $\phi_2 \circ f \circ \phi_1^{-1}|_{\phi_1(U)}$ analytisch. \square

5.1.11 Beispiel. Sei $X \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : X \rightarrow \mathbb{C}$. Dann ist $f \in H(X)$, genau dann wenn $f \in \text{Hol}(X, \mathbb{C})$. Das ist trivial, denn die einzigen Karten von X bzw. \mathbb{C} sind $\text{id} : X \rightarrow \mathbb{C}$ bzw. $\text{id} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. //

5.1.12 Beispiel. Sei $X \subseteq \mathbb{C}$ offen. Die Menge aller komplexwertigen Funktionen f die auf einer Teilmenge $\text{dom } f$ von X definiert sind steht in bijektiver Beziehung zur Menge aller Funktionen $\tilde{f} : X \rightarrow \mathbb{C}_\infty$, und zwar vermöge der Identifikation $f \rightarrow \tilde{f}$ mit

$$\tilde{f} : z \mapsto \begin{cases} f(z), & z \in \text{dom } f \\ \infty, & z \notin \text{dom } f \end{cases}$$

Dann ist $f \in M(X)$, genau dann wenn $\tilde{f} \in \text{Hol}(X, \mathbb{C}_\infty)$. //

Beweis. Sei zuerst $f \in M(X)$, und bezeichne mit D die Menge der Singularitäten von f . Für $z \in X \setminus D$ wähle

$$(U_1, \phi_1) := (X, \text{id}), (U_2, \phi_2) := (\mathbb{C}, \text{id}), U := U_r(z),$$

wobei $r > 0$ so klein ist, dass $U_r(z) \subseteq X \setminus D$. Es ist $U_r(z) = \text{id}^{-1}(U_r(z))$ offen in der Riemannschen Fläche X . Weiters ist $U \subseteq U_1$, $\tilde{f}(U) \subseteq U_2$, und $\phi_2 \circ \tilde{f} \circ \phi_1^{-1} = f$ analytisch. Sei nun $z \in D$. Wähle $(U_1, \phi_1) := (X, \text{id}), (U_2, \phi_2)$ die Karte (5.1.1), und $U := U_r(z)$ wobei $r > 0$ so klein ist, dass $U \setminus \{z\} \subseteq X \setminus D$ und $f(x) \neq 0$, $x \in U_r(z)$. Eine solche Wahl von r ist möglich da $\lim_{x \rightarrow z} |f(x)| = \infty$. Dann ist

$$(\phi_2 \circ \tilde{f} \circ \phi_1^{-1})(x) = \begin{cases} \frac{1}{f(x)}, & x \in U \setminus \{z\} \\ 0, & x = z \end{cases}$$

und diese Funktion ist nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz analytisch. Wir sehen, dass $\tilde{f} \in \text{Hol}(X, \mathbb{C}_\infty)$.

Umgekehrt sei f so, dass $\tilde{f} \in \text{Hol}(X, \mathbb{C}_\infty)$. Sei $z \in X$ gegeben. Ist $\tilde{f}(z) \neq \infty$, so wähle eine offene Umgebung U von z mit $\tilde{f}(x) \neq \infty$, $x \in U$. Dann gilt für die Karten $(U_1, \phi_1) := (X, \text{id}), (U_2, \phi_2) := (\mathbb{C}, \text{id})$ dass $U \subseteq U_1 \cap f^{-1}(U_2)$ und $f = \phi_2 \circ \tilde{f} \circ \phi_1^{-1}$ analytisch. Ist $\tilde{f}(z) = \infty$, so wähle eine offene Umgebung U

von z mit $\tilde{f}(x) \neq 0$, $x \in U$. Dann gilt für die Karten $(U_1, \phi_1) := (X, \text{id})$ und (U_2, ϕ_2) aus (5.1.1), dass $U \subseteq U_1 \cap f^{-1}(U_2)$. Weiters ist für $x \in U$

$$(\phi_2 \circ \tilde{f} \circ \phi_1^{-1})(x) = \begin{cases} \frac{1}{\tilde{f}(x)}, & \tilde{f}(x) \neq \infty \\ 0, & \tilde{f}(x) = \infty \end{cases}.$$

Diese Funktion ist, wieder nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz, analytisch. Also ist $f : X \setminus \tilde{f}^{-1}(\infty) \rightarrow \mathbb{C}$ meromorph. \square

5.1.13 Beispiel. Seien $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ über \mathbb{R} linear unabhängig und $L := \mathbb{Z}w_1 + \mathbb{Z}w_2$. Dann steht die Menge aller Funktionen $f : \mathbb{C}/L \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ in bijektiver Beziehung mit der Menge aller L -periodischen Funktionen

$$K(L) := \{F \in M(\mathbb{C}) : F(z+w) = F(z), z \in \mathbb{C}, w \in L\},$$

nämlich vermöge der Beziehung $f \mapsto f \circ \pi$: Es ist $f \circ \pi \in K(L)$, genau dann wenn $f \in \text{Hol}(\mathbb{C}/L, \mathbb{C}_\infty)$.

Um dies einzusehen genügt es zu bemerken, dass nach Beispiel 5.1.12 für eine Karte (U, ϕ) von \mathbb{C}/L die Funktion $\tilde{f} \circ \phi^{-1}$ zu $\text{Hol}(U, \mathbb{C}_\infty)$ gehört, genau dann wenn $\tilde{f}|_{\phi^{-1}(U)}$ meromorph ist. //

5.2 Einige Sätze über analytische Funktionen

Viele Aussage über analytische Funktionen lassen sich unmittelbar auf analytische Funktionen zwischen Riemannschen Flächen übertragen. Denn im lokalen ist eine Abbildung in $\text{Hol}(X, Y)$ ja gerade eine analytische Funktion zwischen gewissen Teilmengen von \mathbb{C} .

5.2.1 Proposition. Seien X, Y, Z Riemannsche Flächen. Dann gilt:

- (i) $\text{Hol}(X, \mathbb{C})$ ist eine \mathbb{C} -Algebra.
- (ii) Sind $f \in \text{Hol}(X, Y)$, $g \in \text{Hol}(Y, Z)$, so ist $g \circ f \in \text{Hol}(X, Z)$.
- (iii) Der Identitätssatz: Sei X zusammenhängend. Sind $f, g \in \text{Hol}(X, Y)$ und hat die Menge $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ eine Häufungspunkt, so folgt $f = g$.
- (iv) Der Satz von der offenen Abbildung: Sei $f \in \text{Hol}(X, Y)$ nicht konstant. Dann ist f offen.
- (v) Das Maximumprinzip: Ist $f \in \text{Hol}(X, \mathbb{C})$ nicht konstant, so besitzt $|f| : X \rightarrow [0, \infty)$ kein Maximum.
- (vi) Ist $f \in \text{Hol}(X, Y)$ injektiv, so ist $f^{-1} \in \text{Hol}(f(X), X)$.

Beweis. Die Aussagen (i) und (ii) sind klar.

Wir kommen zum Beweis des Identitätssatzes. Betrachte die Menge $M := \{x \in X : f(x) = g(x)\}$. Dann ist klarerweise M abgeschlossen. Sei x_0 ein Häufungspunkt von M . Zu $x_1 \in X$ existiert nach Lemma 5.1.6 eine stetige Kurve $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ mit $\gamma(0) = x_0$ und $\gamma(1) = x_1$.

Ist $x \in X$, so existierten Karten (\hat{U}_x, ϕ_1) und (V_x, ψ_x) von X bzw. Y mit $x \in \hat{U}_x$ und $f(x) \in V_x$. Bezeichne die Zusammenhangskomponente von $\hat{U}_x \cap f^{-1}(V_x)$

welchen den Punkt x enthält mit U_x . Es gilt $\gamma([0, 1]) \subseteq \bigcup_{t \in [0, 1]} U_{\gamma(t)}$. Da $\gamma([0, 1])$ kompakt ist, können wir endlich viele Werte t_1, \dots, t_n finden, sodaß

$$\gamma([0, 1]) \subseteq U_1 \cup \dots \cup U_n,$$

wobei $U_j := U_{\gamma(t_j)}$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir dabei annehmen, dass $t_1 = 0$ ist. Bezeichne entsprechend $V_j := V_{\gamma(t_j)}$, $\phi_j := \phi_{\gamma(t_j)}$ und $\psi_j := \psi_{\gamma(t_j)}$.

Die Menge $\{z \in \phi_1(U_1) : \psi_1 \circ f \circ \phi_1^{-1} = \psi_1 \circ g \circ \phi_1^{-1}\}$ hat in $\phi_1(U_1)$ einen Häufungspunkt, nämlich $\phi_1(x_0)$. Nach dem Identitätssatz der Funktionentheorie folgt dass $f|_{U_1} = g|_{U_1}$. Ist $\gamma([0, 1]) \subseteq U_1$, so folgt insbesondere dass $f(x_1) = g(x_1)$ und wir sind fertig. Ist $\gamma([0, 1]) \not\subseteq U_1$, so existiert ein Index $k \in \{2, \dots, n\}$ mit $U_k \cap U_1 \neq \emptyset$, denn andernfalls hätten wir die zusammenhängende Menge $\gamma([0, 1])$ in die zwei nichtleeren offenen Mengen $\gamma([0, 1]) \cap U_1$ und $\gamma([0, 1]) \cap (U_2 \cup \dots \cup U_n)$ zerlegt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $k = 2$. Die Menge $\{z \in \phi_2(U_2) : \psi_2 \circ f \circ \phi_2^{-1} = \psi_2 \circ g \circ \phi_2^{-1}\}$ enthält eine nichtleere offene Menge, nämlich $\phi_2(U_1 \cap U_2)$. Es folgt dass $f|_{U_2} = g|_{U_2}$, insgesamt also $f|_{U_1 \cup U_2} = g|_{U_1 \cup U_2}$. Verfährt man nach dem selben Schema weiter, so erhält man in höchstens n Schritten dass $f(x_1) = g(x_1)$.

Um (iv) einzusehen, genügt es zu bemerken, dass für je zwei Karten das Bild der analytischen Funktion $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ offen ist, und das ψ ein Homöomorphismus ist.

Das Maximumprinzip ist nun klar. Um (vi) zu sehen, bemerke man dass $f(X)$ offen ist, daher eine Riemannsche Fläche, und dass für je zwei Karten die Funktion $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ analytisch und injektiv ist. Damit ist auch $\phi \circ f^{-1} \circ \psi^{-1}$ analytisch. \square

Ein Phänomen das in der klassischen Funktionentheorie nicht auftritt, ist die Möglichkeit, dass der Definitionsbereich einer analytischen Funktion kompakt ist. Im Rahmen der Riemannschen Flächen ist dies jedoch sehr wohl möglich, wie wir an den Beispielen von \mathbb{C}_∞ bzw. \mathbb{C}/L sehen, und ist tatsächlich ein sehr interessanter Fall. Die folgende Aussage ist einfach, wir wollen sie trotzdem explizit herausstellen, da sie sich mit diesem Fall beschäftigt.

5.2.2 Proposition. *Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche. Dann gilt:*

(i) *Sei Y eine zusammenhängende Riemannsche Fläche. Ist $f \in \text{Hol}(X, Y)$ nicht konstant, so ist f surjektiv und Y kompakt.*

(ii) *Es ist $\text{Hol}(X, \mathbb{C}) = \mathbb{C}$.*

Beweis. Zu (i): die Menge $f(X)$ ist offen und kompakt, daher gleich Y . Zu (ii): \mathbb{C} ist nicht kompakt. \square

5.3 Die Riemannsche Fläche der Umkehrfunktion

Sei $X \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f \in H(X)$. Setze $Y := f(X)$,

$$\Gamma(f) := \text{graph } f = \{(x, f(x)) : x \in X\},$$

und bezeichne mit $\pi_1 : \Gamma(f) \rightarrow X$ bzw. $\pi_2 : \Gamma(f) \rightarrow Y$ die Projektionen auf die jeweiligen Komponenten

$$\begin{array}{ccc} & \Gamma(f) & \\ \pi_1 \swarrow & & \searrow \pi_2 \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Da f eine Funktion ist, ist π_1 bijektiv. Wir können also auf $\Gamma(f)$ eine Topologie definieren durch die Vorgabe dass π_1 ein Homöomorphismus wird.

Für $z \in X$ und $r > 0$ derart dass $f|_{U_r(z)}$ injektiv ist, definieren wir

$$U_{z,r} := \pi_1^{-1}(U_r(z)), \quad \phi_{z,r} := \pi_2|_{U_{z,r}}.$$

Weiters sei

$$\mathfrak{A}(f) := \{(U_{z,r}, \phi_{z,r}) : f|_{U_r(z)} \text{ injektiv}\}.$$

5.3.1 Proposition. *Sei $X \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f \in H(X)$, und sei vorausgesetzt dass $f'(z) \neq 0$, $z \in X$. Dann ist $(\Gamma(f), \mathfrak{A}(f))$ eine Riemannsche Fläche. Es gilt $\pi_1 \in \text{Hol}(\Gamma(f), X)$, $\pi_1^{-1} \in \text{Hol}(X, \Gamma(f))$, und $\pi_2 \in \text{Hol}(\Gamma(f), Y)$.*

Beweis. Zunächst ist π_1 nach Definition ein Homöomorphismus von $\Gamma(f)$ und X , und daher ist $\Gamma(f)$ Hausdorff und $U_{z,r}$ offen. Es gilt $\phi_{z,r} = (f|_{U_r(z)}) \circ \pi_1|_{U_{z,r}}$ und $\phi_{z,r}(U_{z,r}) = f(U_r(z))$. Nun ist $f|_{U_r(z)}$ analytisch und injektiv, also ist auch $(f|_{U_r(z)})^{-1} : f(U_r(z)) \rightarrow U_r(z)$ analytisch. Es folgt dass $\phi_{z,r}(U_{z,r})$ offen ist und $\phi_{z,r}$ ein Homöomorphismus. Es ist also jedes Paar $(U_{z,r}, \phi_{z,r})$ eine Karte.

Sei $z \in X$ gegeben. Da $f'(z) \neq 0$ ist, gilt für jedes hinreichend kleine $r > 0$ dass $f|_{U_r(z)}$ injektiv ist. Es gibt also Karten die den Punkt z enthalten.

Seien $(U_{z,r}, \phi_{z,r})$ und $(U_{w,s}, \phi_{w,s})$ gegeben, und sei angenommen, dass $U_{z,r} \cap U_{w,s} \neq \emptyset$. Nun ist

$$(\phi_{z,r} \circ \phi_{w,s}^{-1})|_{\phi_{w,s}(U_{z,r} \cap U_{w,s})} = \pi_2 \circ (\pi_2|_{\phi_{w,s}(U_{z,r} \cap U_{w,s})})^{-1} = \text{id}_{\pi_2(U_{z,r} \cap U_{w,s})}.$$

Insbesondere ist $(\phi_{z,r} \circ \phi_{w,s}^{-1})|_{\phi_{w,s}(U_{z,r} \cap U_{w,s})}$ analytisch.

Die Abbildung $\pi_2 : \Gamma(f) \rightarrow Y$ ist trivialerweise analytisch, denn sie ist ja lokal genau eine Karte. Die Abbildung $\pi_1 : \Gamma(f) \rightarrow X$ ist analytisch, da $\pi_1|_{U_{z,r}} \circ \phi_{z,r}^{-1} = (f|_{U_r(z)})^{-1}$. Nach Proposition 5.2.1, (vi), ist auch π_1^{-1} analytisch. \square

5.3.2 Bemerkung. Man bezeichnet $(\Gamma(f), \mathfrak{A}(f))$ auch als die *Riemannsche Fläche der Umkehrfunktion von f* .

Um diese Namensgebung zu motivieren, betrachte eine (nichtkonstante) analytische Funktion $f : X \rightarrow f(X)$, $X, f(X) \subseteq \mathbb{C}$. Ist f injektiv, so wissen wir dass die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(X) \rightarrow X$ ebenfalls analytisch ist. Ist f nicht injektiv, d.h. gibt es Punkte $w \in f(X)$ mit mehreren Urbildern z_i , $i \in I$, so bläht man den Bildbereich künstlich auf, d.h. macht man aus dem einen Punkt w viele Punkte (z_i, w) , $i \in I$. Damit erzwingt man, dass f bijektiv wird. Natürlich ist der Bildbereich nunmehr ein anderer.

Mathematischer formuliert, wir haben eine Riemannsche Fläche (nämlich $\Gamma(f)$), eine analytische Abbildung $\pi_2 : \Gamma(f) \rightarrow f(X)$, und eine bijektive und analytische Abbildung $F : X \rightarrow \Gamma(f)$ (nämlich $F := \pi_1^{-1}$), die genau wie f

agiert in dem Sinne dass

$$\begin{array}{ccc} & & \Gamma(f) \\ & \nearrow F & \downarrow \pi_2 \\ X & \xrightarrow{f} & f(X) \end{array}$$

//

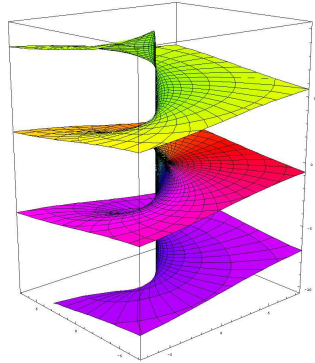
Wir wollen diese Konstruktion für den Fall von $f(z) = e^z$ bzw. $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N}$, auch noch anders interpretieren. Beschäftigen wir uns zunächst mit $f(z) = e^z$: Betrachte $Y := \mathbb{Z} \times \mathbb{C}^*$. Wir versehen jetzt Y aber nicht mit der Produkttopologie, sondern mit einer anderen Topologie. Für $(k, z) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{C}^*$ und $0 < r < |z|$ definiere

$$U_r(k, z) := \begin{cases} \{k\} \times U_r(z) & , \quad z \notin (-\infty, 0) \\ (\{k\} \times (U_r(z) \cap \overline{\mathbb{C}^+})) \cup (\{k+1\} \times (U_r(z) \cap \mathbb{C}^-)) & , \quad z \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

Dann bilden die $\mathfrak{U}(k, z) := \{U_r(k, z) : 0 < r < |z|\}$ Umgebungsbasen einer Topologie auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{C}^*$. Bezeichnet π^2 die Projektion $\pi^2 : \mathbb{Z} \times \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$, so ist π^2 ein lokaler Homöomorphismus. Tatsächlich bildet π^2 die Umgebung $U_r(k, z)$ bijektiv und bistetig auf $U_r(z)$ ab. Weiters können wir einen Atlas definieren als

$$\mathfrak{A} := \{(U_r(k, z), \pi^2|_{U_r(k, z)}) : (k, z) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{C}^*, 0 < r < |z|\}.$$

Beachte hier, dass die Kartenwechsel immer die Identität sind, also sicher analytisch. Wir haben somit Y zu einer Riemannschen Fläche gemacht.



Sei nun $\Phi : \Gamma(e^z) \rightarrow Y$ die Abbildung

$$\Phi((z, e^z)) := \left(\left[\frac{\operatorname{Im} z}{2\pi} \right], e^z \right).$$

Dann ist Φ bijektiv, und wir haben das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(e^z) & \xrightarrow{\Phi} & \mathbb{Z} \times \mathbb{C}^* \\ \pi^2 \downarrow & & \downarrow \pi^2 \\ \mathbb{C}^* & \xrightarrow{\operatorname{id}} & \mathbb{C}^* \end{array}$$

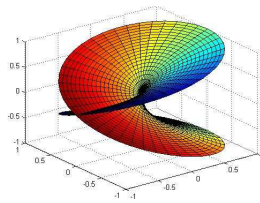
Es folgt, dass Φ eine bianalytische Abbildung von $\Gamma(e^z)$ auf Y ist.

Im Fall $f(z) = z^n$ geht man ganz genauso vor, nur dass man anstelle von $\mathbb{Z} \times \mathbb{C}^*$ die Menge $Z := \mathbb{Z}_n \times \mathbb{C}^*$ verwendet. Die Definitionen von Topologie und Atlas sind dann die gleichen. Der Isomorphismus zwischen $\Gamma(z^n)$ und Z ist gegeben durch

$$\Psi((z, z^n)) := \left(\left[n \frac{\arg z}{2\pi} \right], z^n \right),$$

wobei wir hier $\arg z \in [0, 2\pi)$ wählen.

Im Fall „ $n = 2$ “ kann man sich die Riemannsche Fläche der Umkehrfunktion von z^n im \mathbb{R}^3 nur als Fläche mit einer scheinbaren Selbstüberschneidung veranschaulichen.



5.3.3 Bemerkung. Man kann zeigen dass, zumindestens lokal um jeden Punkt, die Riemannsche Fläche der Umkehrfunktion einer beliebigen analytischen Funktion stets die in den obigen Beispielen beschriebene Gestalt hat. //

Kapitel 6

Analytische Fortsetzung

6.1 Analytische Fortsetzung innerhalb von \mathbb{C}

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen, und $f \in H(G)$. In diesem Kapitel wollen wir die Frage untersuchen, ob man f zu einer analytischen Funktion auf einem größeren Bereich fortsetzen kann.

Zunächst betrachten wir Fortsetzung auf Bereiche $\tilde{G} \subseteq \mathbb{C}$ mit $\tilde{G} \supsetneq G$. Für eine Funktion f kann Fortsetzung möglich sein.

6.1.1 Beispiel. Betrachte die Funktion f die durch die Potenzreihe

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad (6.1.1)$$

definiert ist. Der Konvergenzradius dieser Reihe ist gleich 1, also ist f auf dem offenen Einheitskreis \mathbb{D} definiert.

Die Summe der Reihe (6.1.1) kann man explizit ausrechnen (geometrische Reihe), nämlich gilt

$$f(z) = \frac{1}{1-z}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Definiert man eine Funktion F auf dem Gebiet $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ als $F(z) := \frac{1}{1-z}$, so ist F analytisch und es gilt $F|_{\mathbb{D}} = f$. Wir haben also eine Fortsetzung von f auf den größeren Bereich $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ gefunden. //

Es kann aber auch passieren, dass sich eine Funktion nicht weiter fortsetzen lässt.

6.1.2 Beispiel. Betrachte die Funktion f die durch die Potenzreihe

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$$

definiert ist. Der Konvergenzradius dieser Reihe ist gleich 1, also ist f wieder auf \mathbb{D} definiert.

Angenommen es existiert ein Gebiet $\tilde{G} \subseteq \mathbb{C}$, $\mathbb{D} \subsetneq \tilde{G}$, und $F \in H(\tilde{G})$ mit $F|_{\mathbb{D}} = f$. Da \tilde{G} zusammenhängend ist und \mathbb{D} echt umfasst, ist $\partial\mathbb{D} \cap \tilde{G}$ nichtleer.

Da \tilde{G} offen ist, und die Menge aller Einheitswurzeln dicht in $\partial\mathbb{D}$ ist, existiert eine Einheitswurzel $\zeta \in \tilde{G} \cap \partial\mathbb{D}$. Es gilt

$$\lim_{r \nearrow 1} f(r\zeta) = \lim_{r \nearrow 1} F(r\zeta) = F(\zeta).$$

Wähle $m \in \mathbb{N}$ mit $\zeta^m = 1$, dann ist

$$(r\zeta)^{n!} = r^{n!}, \quad n \geq m,$$

und damit

$$f(r\zeta) = \sum_{n=0}^{m-1} (r\zeta)^n + \sum_{n=m}^{\infty} r^{n!}.$$

Geht man zum Limes $r \nearrow 1$ über, so folgt mit dem Satz von der monotonen Konvergenz dass

$$\lim_{r \nearrow 1} |f(r\zeta)| = \infty,$$

ein Widerspruch.

In diesem Beispiel ist der Einheitskreis also in gewissem Sinne eine natürliche Grenze der Funktion f . //

Manchmal stößt man jedoch auf Grenzen, die eigentlich nicht das natürliche Ende des Definitionsbereiches der Funktion markieren.

6.1.3 Beispiel. Betrachte $G := \mathbb{C} \setminus (-\infty, 1]$, dann ist G einfach zusammenhängend. Die Funktion $1 - z$ ist in G analytisch und nullstellenfrei, also hat sie einen Logarithmus in G : Wähle eine Funktion $f \in H(G)$ mit $1 - z = \exp(f(z))$, $z \in G$.

Angenommen es existiert ein Gebiet $\tilde{G} \subseteq \mathbb{C}$, $G \subsetneq \tilde{G}$, und $F \in H(\tilde{G})$ mit $F|_G = f$. Dann ist $\tilde{G} \cap (-\infty, 1] \neq \emptyset$. Der Punkt 1 kann nicht zu \tilde{G} gehören, denn

$$\lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ z \in \tilde{G}}} |f'(z)| = \lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ z \in \tilde{G}}} \left| \frac{1}{1-z} \right| = \infty.$$

Also ist $\tilde{G} \cap (-\infty, 1] \neq \emptyset$, und wir können eine Kreislinie $\partial U_r(1)$ mit $r > 0$, finden, die ganz in \tilde{G} verläuft.

Nun gilt $F'(z) = f'(z) = \frac{1}{1-z}$ für alle $z \in G$, und nach dem Identitätssatz (beachte dass \tilde{G} sicher zusammenhängend ist) gilt daher $F'(z) = \frac{1}{1-z}$ sogar für alle $z \in \tilde{G}$. Daher F ist eine Stammfunktion der Funktion $\frac{1}{1-z}$ auf \tilde{G} . Insbesondere folgt

$$\oint_{\partial U_r(1)} \frac{1}{1-\zeta} d\zeta = 0.$$

Ein Widerspruch, denn wir wissen dass diese Integral den Wert $-2\pi i$ hat.

Betrachte nun die Funktion $g(z) := -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$. Der Konvergenzradius dieser Potenzreihe ist gleich 1, also ist $g \in H(\mathbb{D})$. Es gilt

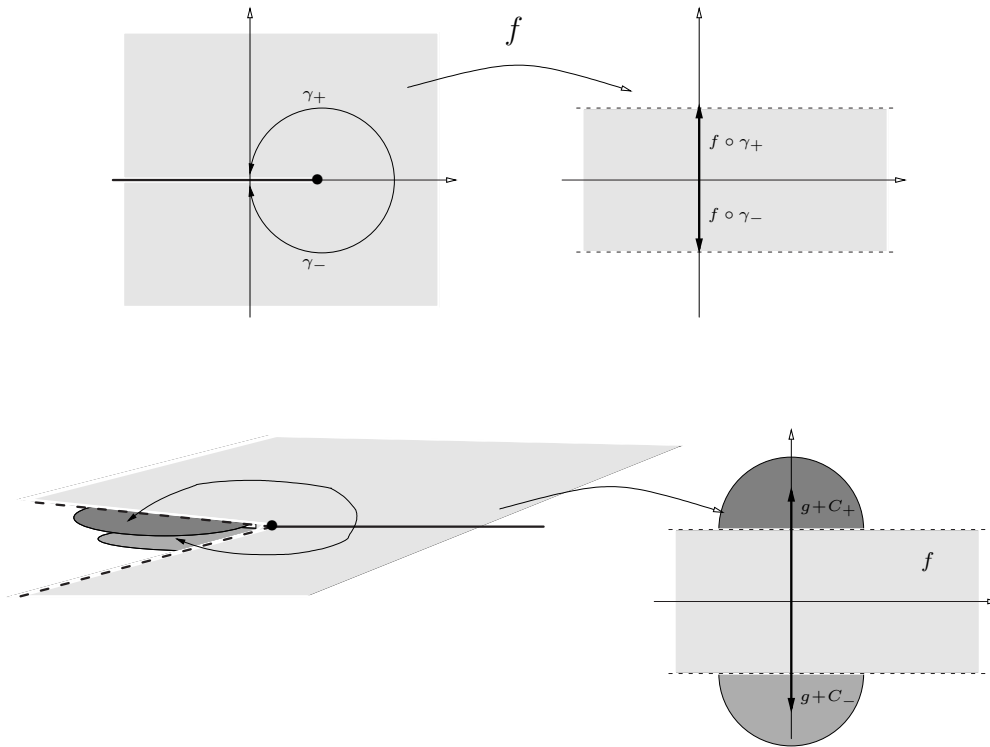
$$f'(z) = -\sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1} = -\frac{1}{1-z} = g'(z), \quad z \in G \cap \mathbb{D}.$$

Da $\mathbb{D} \cap \mathbb{C}^+$ bzw. $\mathbb{D} \cap \mathbb{C}^-$ zusammenhängende Teilmengen von $G \cap \mathbb{D}$ sind, folgt

$$f(z) = g(z) + C_+, \quad z \in \mathbb{D} \cap \mathbb{C}^+, \quad f(z) = g(z) + C_-, \quad z \in \mathbb{D} \cap \mathbb{C}^-,$$

mit gewissen Konstanten $C_+, C_- \in \mathbb{C}$. Beachte dass, wegen dem oben gezeigten, sicher $C_+ \neq C_-$ ist.

Wir könnten also, wenn wir die Werte von f in der unteren Halbebene einfach einmal ignorieren, sehr wohl von der oberen Halbebene kommend die Funktion f auf $\mathbb{D} \cap \mathbb{C}^-$ analytisch fortsetzen, nämlich durch die Definition $F(z) := g(z) + C_+$. Das gleiche gilt natürlich auch für die untere Halbebene. Das Intervall $(-\infty, 1)$ ist also in gewissem Sinne keine natürliche Grenze für die Funktion f .



//

Dieses Beispiel legt es nahe dass der natürliche Definitionsbereich der betrachteten Funktion f nicht eine Teilmenge von \mathbb{C} ist, sondern eine gewissen Riemannsche Fläche. Und dies ist tatsächlich so, denn f ist ein Zweig der Umkehrfunktion von $h(z) := 1 - \exp z$.

6.2 Überlagerungen

6.2.1 Definition. Seien X, Y, Z topologische Räume, und seien $\pi : Y \rightarrow X$ und $f : Z \rightarrow X$ stetig. Eine stetige Abbildung $F : Z \rightarrow Y$ heißt ein *lifting* von f , wenn $\pi \circ F = f$, d.h. also

$$\begin{array}{ccc} & & Y \\ & \nearrow F & \downarrow \pi \\ Z & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

//

Hat man X, Y, Z und f gegeben, so muß es nicht notwendig ein lifting geben. Existiert ein lifting, so muß dieses nicht eindeutig sein. Eine Eindeutigkeitsaussage kann man unter relativ allgemeinen Voraussetzungen erhalten. Die Frage nach der Existenz ist unangenehmer.

6.2.2 Proposition. *Seien X, Y Hausdorff, $\pi : Y \rightarrow X$ ein lokaler Homöomorphismus, Z zusammenhängend und $f : Z \rightarrow X$ stetig. Sei $z_0 \in Z$ und seien F_1, F_2 liftings von f mit $F_1(z_0) = F_2(z_0)$. Dann ist $F_1 = F_2$.*

Beweis. Sei $A := \{z \in Z : F_1(z) = F_2(z)\}$. Diese Menge ist abgeschlossen und nichtleer. Sei $z \in A$ und setze $y := F_1(z) = F_2(z)$. Wähle eine offene Umgebung V von y sodass $\pi|_V$ ein Homöomorphismus von V auf die offene Menge $U := \pi(V)$ ist. Da F_1, F_2 stetig sind, gibt es eine offene Umgebung W von z mit $F_1(W), F_2(W) \subseteq U$. Nun ist $\pi \circ F_j = f$, also $F_j|_W = (\pi|_V)^{-1} \circ f|_W$, $j = 1, 2$. Wir sehen dass $W \subseteq A$. Also ist A auch offen, und da Z zusammenhängt, folgt $A = Z$. \square

Es ist eine wichtige Tatsache, dass das lifting einer Homotopie in X , falls es existiert, eine Homotopie in Y ist.

6.2.3 Satz (Monodromiesatz). *Seien X und Y Hausdorff-Räume und $\pi : Y \rightarrow X$ ein lokaler Homöomorphismus. Seien γ_0, γ_1 Wege in X mit gleichem Anfangs- und Endpunkt a bzw. b die FEP-homotop in X sind, und sei $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ eine FEP-Homotopie zwischen γ_0 und γ_1 . Sei $c \in Y$ mit $\pi(c) = a$, und sei angenommen, dass jeder Weg $\gamma_s(\cdot) := H(\cdot, s)$, $s \in [0, 1]$, ein lifting $\Gamma_s : [0, 1] \rightarrow Y$ mit $\Gamma_s(0) = c$ besitzt. Dann haben Γ_0 und Γ_1 den gleichen Endpunkt und sind FEP-homotop.*

Beweis. Sei $K : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow Y$ definiert als $K(t, s) := \Gamma_s(t)$. Wegen der Eindeutigkeit des liftings Γ_s ist K wohldefiniert.

Im ersten Schritt zeigen wir, dass, für ein gewisses $\epsilon > 0$, die Abbildung K stetig auf $[0, \epsilon] \times [0, 1]$ ist. Dazu wähle offene Umgebungen U von a und V von c , sodass $\pi|_V$ ein Homöomorphismus von V auf U ist. Es gilt $H(\{0\} \times [0, 1]) = \{c\} \subseteq U$. Da H stetig ist und $[0, 1]$ kompakt, existiert $\epsilon > 0$ sodass $H([0, \epsilon] \times [0, 1]) \subseteq U$. Betrachte die Abbildung $\tilde{K} := (\pi|_V)^{-1} \circ H|_{[0, \epsilon] \times [0, 1]}$. Diese ist stetig. Nun ist für jedes $s \in [0, 1]$ die Abbildung $t \mapsto \tilde{K}(t, s)$ ein lifting von $\gamma_s|_{[0, \epsilon]}$ mit Anfangspunkt c . Wegen der Eindeutigkeit des liftings folgt $\tilde{K}(t, s) = \Gamma_s(t)$, $t \in [0, \epsilon]$, $s \in [0, 1]$. Also ist K stetig auf $[0, \epsilon] \times [0, 1]$.

Im zweiten Schritt zeigen wir, dass K überall stetig ist. Angenommen es existiert ein Punkt (t, σ) wo K nicht stetig ist. Sei

$$\tau := \inf \{t \in [0, 1] : K \text{ nicht stetig an } (t, \sigma)\}.$$

Nach dem ersten Schritt gilt $\tau \geq \epsilon > 0$. Sei V eine offene Umgebung von $K(\tau, \sigma)$ und U eine offene Umgebung von $\pi(K(\tau, \sigma)) = \gamma_\sigma(\tau)$, sodass $\pi|_V$ ein Homöomorphismus von V auf U ist. Wähle $\delta > 0$, sodass $H(I_\delta(\tau) \times I_\delta(\sigma)) \subseteq U$, wobei $I_\beta(u) := [0, 1] \cap (u - \beta, u + \beta)$. Die Kurve $\Gamma := (\pi|_V)^{-1} \circ \gamma_\sigma|_{I_\delta(\tau)}$ ist ein lifting von γ_σ mit $\Gamma(\tau) = K(\tau, \sigma) = \Gamma_\sigma(\tau)$. Also ist $\Gamma(t) = \Gamma_\sigma(t)$ für alle $t \in I_\delta(\tau)$. Insbesondere ist $K(t, \sigma) \in V$, $t \in I_\delta(\tau)$.

Wähle $t_1 \in I_\delta(\tau)$, $t_1 < \tau$, dann ist K an der Stelle (t_1, σ) stetig, und daher gibt es $\alpha > 0$ sodass $K(t_1, I_\alpha(\sigma)) \subseteq V$. Da $\pi(K(t, s)) = H(t, s)$ und da $\pi|_V$ bijektiv ist, folgt dass

$$\Gamma_s(t_1) = K(t_1, s) = (\pi|_V)^{-1}(H(t_1, s)), \quad s \in I_\alpha(\sigma).$$

Also ist, wegen der Eindeutigkeit des liftings, $\Gamma_s(t) = (\pi|_V)^{-1}(H(t_1, s))$, $t \in I_\delta(\sigma)$. Wir sehen, dass $K(t, s) = (\pi|_V)^{-1}(H(t, s))$, $t \in I_\delta(\tau)$, $s \in I_\alpha(\sigma)$. Insbesondere ist K stetig an jeder Stelle (t, σ) , $t \in I_\delta(\tau)$, ein Widerspruch.

Wir haben jetzt gezeigt, dass Γ_0 und Γ_1 homotop sind. Da π ein lokaler Homöomorphismus ist, ist die Menge $\pi^{-1}(\{b\})$ diskret. Nun ist $K(\{1\} \times [0, 1])$ eine zusammenhängende Teilmenge von $\pi^{-1}(\{b\})$, und daher einpunktig. D.h. alle Wege Γ_s haben den selben Endpunkt. \square

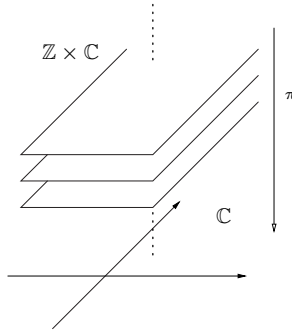
Wir kommen zur Frage nach der Existenz von liftings. Im allgemeinen ist die Situation dabei überhaupt nicht klar. Aber man kann doch eine Klasse von „guten“ Abbildungen π angeben, für die oft liftings existieren.

6.2.4 Definition. Sei X ein topologischer Raum. Ist Y ein weiterer topologischer Raum und $\pi : Y \rightarrow X$, dann heißt π eine *Überlagerungsabbildung*, wenn π surjektiv ist und gilt: Jeder Punkt $x \in X$ hat eine offene Umgebung U , sodass sich $\pi^{-1}(U)$ als disjunkte Vereinigung $\pi^{-1}(U) = \bigcup_{k \in I} V_k$ mit offenen Mengen V_k schreiben läßt und zwar derart dass $\pi|_{V_k} : V_k \rightarrow U$ für jedes $k \in I$ ein Homöomorphismus ist.

In diesem Fall heißt das Paar (Y, π) eine *Überlagerung von X* . Eine offene Umgebung U mit der genannten Eigenschaft heißt *trivialisierend*. //

6.2.5 Beispiel.

- (i) Sei $X := \mathbb{C}$. Betrachte $Y := \mathbb{Z} \times \mathbb{C}$ versehen mit der Produkttopologie und sei π die Projektion auf die zweite Komponente, $\pi(n, z) := z$. Dann ist (Y, π) eine Überlagerung von X , denn zu gegebenem Punkt z wähle $U = \mathbb{C}$ und $V_k := \{k\} \times \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}$.

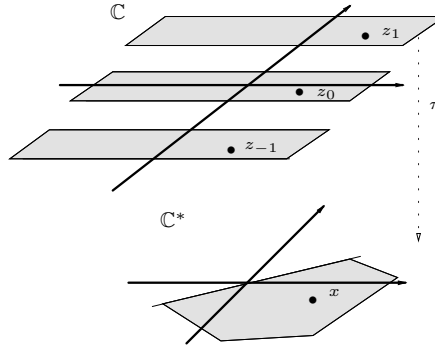


- (ii) Sei $X := \mathbb{C}^*$, $Y := \mathbb{C}$, $\pi(z) := e^z$. Für $x \in X$, sei

$$U := \left\{ w \in \mathbb{C}^* : \arg w \in \left(\arg x - \frac{\pi}{2}, \arg x + \frac{\pi}{2} \right) \right\}$$

$$V_k := \left\{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \in \left(\arg x - \frac{\pi}{2}, \arg x + \frac{\pi}{2} \right) + 2k\pi i \right\}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

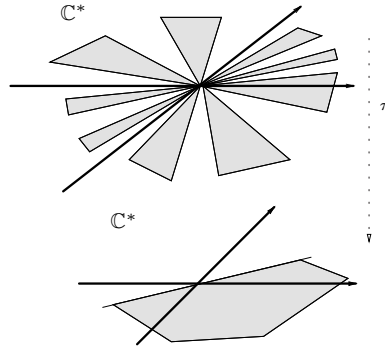
wobei wir $\arg x$ in $(-\pi, \pi]$ wählen.



(iii) Sei $X := \mathbb{C}^*$, $Y := \mathbb{C}^*$, und $\pi(z) := z^n$ wobei $n \in \mathbb{N}$. Für $x \in X$, sei

$$U := \left\{ w \in \mathbb{C}^* : \arg w \in \left(\arg x - \frac{\pi}{2}, \arg x + \frac{\pi}{2} \right) \right\},$$

$$V_k := \left\{ z \in \mathbb{C} : \arg z \in \left(\frac{\arg x - \frac{\pi}{2}}{n}, \frac{\arg x + \frac{\pi}{2}}{n} \right) + \frac{2k\pi i}{n} \right\}, \quad k = 0, \dots, n-1.$$



//

In einem ersten Schritt zeigen wir, dass für Überlagerungsabbildungen Wege stets ein lifting besitzen.

6.2.6 Lemma. *Sei $\pi : Y \rightarrow X$ eine Überlagerungsabbildung. Ist γ ein Weg in X und $y_0 \in \pi^{-1}(\gamma(0))$, so existiert ein lifting Γ von γ mit $\Gamma(0) = y_0$.*

Beweis. Sei $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ ein Weg, $\gamma(0) =: x_0$. Da $[0, 1]$ kompakt ist, existieren t_0, \dots, t_n mit $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ und trivialisierende Mengen U_1, \dots, U_n mit $\gamma([t_{k-1}, t_k]) \subseteq U_k$, $k = 1, \dots, n$.

Wir zeigen induktiv dass $\gamma|_{[0, t_k]}$ ein lifting mit Anfangspunkt y_0 besitzt. Für $k = 0$ ist das trivial. Sei angenommen Γ_{k-1} ist ein lifting von $\gamma|_{[0, t_{k-1}]}$ mit Anfangspunkt y_0 . Schreibe $\pi^{-1}(U_k) = \dot{\bigcup}_{i \in I_k} V_{k,i}$, dann gilt $\Gamma_{k-1}(t_{k-1}) \in V_{k,i_0}$ für ein gewisses $i_0 \in I_k$. Definiere Γ_k als

$$\Gamma_k(t) := \begin{cases} \Gamma_{k-1}(t) & , \quad t \in [0, t_{k-1}] \\ (\pi|_{V_{k,i_0}})^{-1} \circ \gamma(t) & , \quad t \in [t_{k-1}, t_k] \end{cases}$$

Dann ist Γ_k ein lifting von $\gamma|_{[0, t_k]}$ mit Anfangspunkt y_0 . □

Diese Aussage kann nun auf eine größere Klasse von stetigen Abbildungen als Wege ausgedehnt werden.

6.2.7 Proposition. *Sei $\pi : Y \rightarrow X$ eine Überlagerungsabbildung. Sei weiters Z einfach zusammenhängend und lokal bogenweise zusammenhängend. Ist $f : Z \rightarrow X$ stetig, und $z_0 \in Z$, $y_0 \in Y$, sodass $f(z_0) = \pi(y_0)$, dann existiert ein lifting $F : Z \rightarrow Y$ von f mit $F(z_0) = y_0$.*

Beweis. Sei $z \in Z$, wähle einen Weg γ mit Anfangspunkt z_0 und Endpunkt z , und setze $\alpha := f \circ \gamma$. Dann ist α ein Weg in X mit Anfangspunkt $f(z_0)$. Sei $\Gamma : [0, 1] \rightarrow Y$ das lifting von α mit $\Gamma(0) = y_0$, und definiere $F(z) := \Gamma(1)$.

Als erstes müssen wir zeigen, dass F wohldefiniert ist. Sei dazu γ' ein anderer Weg der z_0 mit z verbindet, und sei α' und Γ' wie oben konstruiert. Da Z einfach zusammenhängend ist, sind γ und γ' FEP(!)-homotop. Ist H eine FEP-Homotopie zwischen γ und γ' , so ist $f \circ H$ eine FEP-Homotopie zwischen α und α' . Nach dem Monodromiesatz gilt $\Gamma'(1) = \Gamma(1)$.

Die Tatsache dass $\pi \circ F = f$ ist klar aus der Definition. Wir müssen noch zeigen, dass F stetig ist. Sei dazu $z \in Z$ gegeben. Seien U und V offene Umgebungen von $\pi(F(z)) = f(z)$ bzw. $F(z)$, sodass $\pi|_V$ ein Homöomorphismus von V auf U ist. Da Z lokal bogenweise zusammenhängend ist, existiert eine bogenweise zusammenhängende Umgebung W von z mit $f(W) \subseteq U$. Seien γ, α, Γ wie in der Definition von $F(z)$, $z' \in W$, und sei γ' ein Weg in W der z mit z' verbindet, $\alpha' := f \circ \gamma'$. Dann gilt stets $\alpha'([0, 1]) \in U$, also ist $\Gamma' := (\pi|_V)^{-1} \circ \alpha'$ ein lifting von α' mit $\Gamma'(0) = F(z) = \Gamma(1)$. In der Definition von $F(z')$ verwenden wir nun den Weg $\gamma' \cdot \gamma$ der entsteht wenn man zuerst γ durchläuft und danach noch γ' . Dieser verbindet z_0 mit z' , und sein lifting ist $\Gamma' \cdot \Gamma$. Es folgt $F(z') = \Gamma'(1) \in V$. Also haben wir $F(W) \subseteq V$. \square

6.2.8 Bemerkung. Eine Anwendung dieses Satzes liefert die Existenz von Logarithmen stetiger Funktionen: Sei $X \subseteq \mathbb{C}$ einfach zusammenhängend, und sei $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und nullstellenfrei. Dann existiert eine Funktion $F : X \rightarrow \mathbb{C}$ sodass $f(z) = e^{F(z)}$, $z \in X$. Um dies zu sehen, betrachte die Überlagerungsabbildung $\pi(y) := e^y$, und wähle für F ein lifting von f . //

6.3 Funktionskeime, Fortsetzung längs Wegen

Sei X eine Riemannsche Fläche, und sei $x \in X$. Auf der Menge aller Paare (U, f) wo U eine offene Umgebung von x ist und $f \in \text{Hol}(U, \mathbb{C})$, definieren wir eine Relation \sim_x wie folgt:

$$(U_1, f_1) \sim_x (U_2, f_2) \quad :\Longleftrightarrow \quad \exists V \text{ offen, } x \in V \subseteq U_1 \cap U_2 : f_1|_V = f_2|_V$$

Diese Relation ist klarerweise eine Äquivalenzrelation. Eine Äquivalenzklasse $[(U, f)]_{\sim_x}$ heißt ein *Funktionskeim an der Stelle x* . Die Menge aller Funktionskeime an der Stelle x bezeichnen wir mit \mathcal{O}_x , weiters sei

$$\mathcal{O}(X) := \bigcup_{x \in X} \mathcal{O}_x.$$

\mathcal{O} heißt das *Bündel der Funktionskeime auf X* . Wir können in natürlicher Weise eine Abbildung $\pi_X : \mathcal{O}(X) \rightarrow X$ definieren, und zwar wie folgt: Sei $y \in \mathcal{O}(X)$, dann existiert genau ein $x \in X$ mit $y \in \mathcal{O}_x$. Setze $\pi_X(y) := x$. Diese Abbildung heißt auch die *Bündelprojektion von $\mathcal{O}(X)$* .

Wir wollen nun auf $\mathcal{O}(X)$ die Struktur einer Riemannschen Fläche definieren. Für $U \subseteq X$ offen und $f \in \text{Hol}(U, \mathbb{C})$ setze

$$N(U, f) := \{[(U, f)]_{\sim_b} : b \in U\}.$$

Die Menge aller solcher Mengen $N(U, f)$ bildet die Basis einer Topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{O}(X)}$. Um dies zu sehen seien $N(U_1, f_1)$ und $N(U_2, f_2)$ gegeben mit $N(U_1, f_1) \cap N(U_2, f_2) \neq \emptyset$. Wähle $y \in N(U_1, f_1) \cap N(U_2, f_2)$, $y = [(V, g)]_{\sim_x}$. Dann gilt $x \in U_1 \cap U_2$ und $(U_1, f_1) \sim_x (V, g)$, $(U_2, f_2) \sim_x (V, g)$. Es existiert also eine offene Umgebung V_0 von x mit $V_0 \subseteq V \cap U_1 \cap U_2$ und $g|_{V_0} = f_1|_{V_0} = f_2|_{V_0}$. Daher ist

$$N(V_0, g|_{V_0}) \subseteq N(U_1, f_1) \cap N(U_2, f_2).$$

6.3.1 Lemma. *Die oben auf $\mathcal{O}(X)$ definierte Topologie ist Hausdorff. Die Bündelprojektion $\pi_X : \mathcal{O}(X) \rightarrow X$ ist ein lokaler Homöomorphismus.*

Beweis. Seien $y_1 \in \mathcal{O}_{x_1} \subseteq \mathcal{O}(X)$, $y_2 \in \mathcal{O}_{x_2} \subseteq \mathcal{O}(X)$, zwei verschiedene Funktionskeime. Ist $x_1 \neq x_2$, so können wir, da X Hausdorff ist, Repräsentanten $y_1 = [(U_1, f_1)]_{\sim_{x_1}}$ und $y_2 = [(U_2, f_2)]_{\sim_{x_2}}$ wählen mit $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Dann gilt offenbar $N(U_1, f_1) \cap N(U_2, f_2) = \emptyset$. Betrachte nun den Fall, dass $x_1 = x_2 =: x$. Sei U eine offene und zusammenhängende Umgebung von x . Angenommen es ist $N(U, f_1|_U) \cap N(U, f_2|_U) \neq \emptyset$, dann wähle $z \in N(U, f_1|_U) \cap N(U, f_2|_U)$, $z = [(V, h)]_{\sim_a}$. Dann ist $(U, f_1|_U) \sim_a (V, h)$ und $(U, f_2|_U) \sim_a (V, h)$, also auch $(U, f_1|_U) \sim_a (U, f_2|_U)$, d.h. f_1 und f_2 stimmen auf einer gewissen offenen Umgebung von a überein. Nach dem Identitätssatz gilt daher $f_1|_U = f_2|_U$. Es folgt dass auch $(U, f_1|_U) \sim_x (U, f_2|_U)$ und damit $(U_1, f_1) \sim_x (U_2, f_2)$, ein Widerspruch.

Für jede Menge $N(U, f)$ ist $\pi_X|_{N(U, f)}$ eine Bijektion von $N(U, f)$ auf die in X offene Menge U . Die Spurtopologie auf $N(U, f)$ ist gegeben durch die Umgebungen $N(V, f)$ mit $V \subseteq U$ offen. Daher ist $\pi_X|_{N(U, f)}$ ein lokaler Homöomorphismus. \square

Vermöge Lemma 5.1.8 wird nun $\mathcal{O}(X)$ zu einer Riemannschen Fläche. Ein Atlas von $\mathcal{O}(X)$ ist gegeben durch $\{\pi_X|_{N(U, f)}\}$. Wir erhalten insbesondere aus Lemma 5.1.8:

6.3.2 Korollar. *Es ist $\pi_X \in \text{Hol}(\mathcal{O}(X), X)$. Ist $U \subseteq X$ offen, und $f \in \text{Hol}(U, \mathbb{C})$, so ist $\pi_X|_{N(U, f)} : N(U, f) \rightarrow U$ analytisch und bijektiv. Weiters ist $(\pi_X|_{N(U, f)})^{-1} \in \text{Hol}(U, N(U, f))$.* \square

Wir können auch in natürlicher Weise eine Abbildung $\alpha_X : \mathcal{O}(X) \rightarrow \mathbb{C}$ definieren: Ist $y \in \mathcal{O}(X)$, so wähle einen Repräsentanten (U, f) , d.h. $y = [(U, f)]_{\sim_{\pi_X(y)}}$, und setze $\alpha_X(y) := f(\pi_X(y))$. Beachte hier, dass der Wert $f(\pi_X(y))$ nicht von der Wahl des Repräsentanten abhängt.

6.3.3 Lemma. *Sei $U \subseteq X$ offen, $f \in \text{Hol}(U, \mathbb{C})$. Dann gilt $\alpha_X|_{N(U, f)} = f \circ \pi_X|_{N(U, f)}$. Es ist $\alpha_X \in \text{Hol}(\mathcal{O}(X), \mathbb{C})$.*

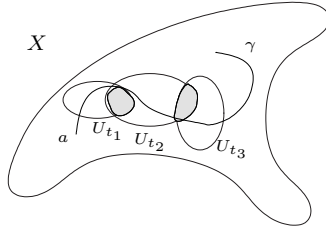
Beweis. Sei $y \in N(U, f)$, dann ist $y = [(U, f)]_{\sim_{\pi_X(y)}}$. Nach der Definition von α_X haben wir $\alpha_X(y) = f(\pi_X(y))$.

Es folgt das $\alpha_X \circ (\pi_X|_{N(U, f)})^{-1} = f$ ist, und damit analytisch. Da der Atlas von $\mathcal{O}(X)$ gerade durch die $\pi_X|_{N(U, f)}$ gegeben ist, folgt dass α_X analytisch ist. \square

6.3.4 Definition. Sei $y \in \mathcal{O}(X)$, $a := \pi_X(y)$, und sei $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ ein Weg in X mit $\gamma(0) = a$. Weiters sei Γ ein lifting von γ mit $\Gamma(0) = y$. Dann heißt $\Gamma(1)$ die *analytische Fortsetzung von y längs γ* . //

Die Bündelprojektion π_X ist keine Überlagerungsabbildung. Eine analytische Fortsetzung längs eines Weges muss nicht existieren. Wenn sie existiert ist sie, da $\mathcal{O}(X)$ und X Hausdorff sind, jedoch eindeutig.

6.3.5 Bemerkung. Wir wollen uns überlegen, warum wir in dieser Definition von „analytischer Fortsetzung längs γ “ sprechen. Sei also $y \in \mathcal{O}_a$, γ ein Weg mit Anfangspunkt a , und Γ ein lifting von γ mit $\Gamma(0) = y$. Schreibe $\Gamma(t) = [(U_t, f_t)]_{\sim_{\gamma(t)}}$. Ist $t \in [0, 1]$, so existiert $\epsilon > 0$ sodass $\Gamma(s) \in N(U_t, f_t)$, $s \in I_\epsilon(t)$. Also ist $[(U_s, f_s)]_{\sim_{\gamma(s)}} = [(U_t, f_t)]_{\sim_{\gamma(s)}}$, d.h. es existiert eine Umgebung V von $\gamma(s)$ mit $f_s|_V = f_t|_V$.



//

Wegen seiner traditionellen Bedeutung wollen wir den Monodromiesatz für den Fall „ $\mathcal{O}(X)$ “ explizit formulieren.

6.3.6 Korollar (Monodromiesatz für analytische Funktionen). Sei X eine Riemannsche Fläche, γ_0, γ_1 FEP-homotope Wege, und sei $y \in \mathcal{O}_{\gamma(0)}$ ein Funktionskeim. Sei H eine FEP-Homotopie zwischen γ_0 und γ_1 , und sei vorausgesetzt, dass y für jedes $s \in [0, 1]$ eine analytische Fortsetzung Γ_s längs jedes Weges $\gamma_s(\cdot) := H(\cdot, s)$. Dann stimmen die analytischen Fortsetzungen von y längs γ_0 und längs γ_1 überein. \square

Man erhält nun, dass, unter bestimmten Voraussetzungen, Funktionskeime zu global definierten analytischen Funktionen fortsetzen werden können.

6.3.7 Korollar. Sei X eine einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche, $a \in X$, und $y \in \mathcal{O}_a$. Sei vorausgesetzt, dass y eine analytische Fortsetzung längs jedes Weges mit Anfangspunkt a besitzt. Dann existiert $F \in \text{Hol}(X, \mathbb{C})$, sodass $(X, F) \sim_a y$.

Beweis. Sei $x \in X$ gegeben. Für einen Weg γ_x der a mit x verbindet, existiert ein lifting Γ_x mit $\Gamma_x(0) = y$. Definiere nun $F(x) := \alpha_X(\Gamma_x(1))$. Nach dem Monodromiesatz ist der Wert $\alpha_X(\Gamma_x(1))$ nicht von der Wahl von γ_x abhängig, es ist also eine Funktion $F : X \rightarrow \mathbb{C}$ wohldefiniert.

Sei (U, f) ein Representant von $\Gamma_x(1)$ mit U bogenweise zusammenhängend. Für $y \in U$ wähle einen Weg $\gamma_{x,y}$ der ganz in U verläuft und der x mit y verbindet. Das lifting $\Gamma_{x,y}$ von $\gamma_{x,y}$ mit $\Gamma_{x,y}(0) = \Gamma_x(1)$ ist gegeben als $\Gamma_{x,y}(t) := [(U, f)]_{\sim_{\gamma_{x,y}(t)}}$. Verwendet man den Weg $\gamma_{x,y} \cdot \gamma_x$ um $F(y)$ zu berechnen, so sieht man dass $F(y) = f(y)$. Wir haben also $F|_U = f|_U$ und es folgt $F \in \text{Hol}(X, \mathbb{C})$. \square

6.4 Maximale analytische Fortsetzung

6.4.1 Definition. Seien X und Y Riemannsche Flächen. Eine Abbildung $p : Y \rightarrow X$ heißt *lokal bianalytisch*, wenn jeder Punkt $y \in Y$ eine offene Umgebung V besitzt, sodass $p(V) \subseteq X$ offen ist, $p|_V$ bijektiv, und $p|_V \in \text{Hol}(V, p(V))$. Dann ist auch $(p|_V)^{-1} \in \text{Hol}(p(V), V)$. //

Wir bemerken, dass eine lokal bianalytische Abbildung insbesondere analytisch ist. Weiters induziert eine lokal bianalytische Abbildung für jedes $y \in Y$ eine Abbildung zwischen $\mathcal{O}_{p(y)}$ und \mathcal{O}_y , nämlich

$$p^* : \begin{cases} \mathcal{O}_{p(y)} & \rightarrow & \mathcal{O}_y \\ [(U, f)]_{\sim_{p(y)}} & \mapsto & [((p|_V)^{-1}(U \cap p(V)), f \circ p)]_{\sim_y} \end{cases}$$

wobei V eine offene Umgebung von y ist sodass $p(V)$ offen und $p|_V$ bianalytisch ist. Man sieht leicht ein, dass p^* bijektiv ist, die Abbildung

$$p_* : \begin{cases} \mathcal{O}_y & \rightarrow & \mathcal{O}_{p(y)} \\ (\hat{V}, f) & \mapsto & (p(V), f \circ (p|_V)^{-1}) \end{cases}$$

wo $\hat{V} \subseteq V$ und V wie oben sind, ist nämlich eine Inverse.

Da das Bündel $\mathcal{O}(Y)$ die disjunkte Vereinigung der \mathcal{O}_y ist, können die Abbildungen $p_* : \mathcal{O}_y \rightarrow \mathcal{O}_{p(y)}$ der einzelnen Fasern zu einer Abbildung $\mathcal{O}(Y) \rightarrow \mathcal{O}(X)$ zusammengefasst werden*. Wir bezeichnen diese wieder mit p_* . Man hat dann die Diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}(Y) & \xrightarrow{p_*} & \mathcal{O}(X) \\ \pi_Y \downarrow & & \downarrow \pi_X \\ Y & \xrightarrow{p} & X \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{O}(Y) & \xrightarrow{p_*} & \mathcal{O}(X) \\ \alpha_Y \searrow & & \swarrow \alpha_X \\ & \mathbb{C} & \end{array}$$

6.4.2 Lemma. Seien X, Y Riemannsche Flächen und $p : Y \rightarrow X$ lokal bianalytisch. Dann ist $p_* \in \text{Hol}(\mathcal{O}(Y), \mathcal{O}(X))$.

Beweis. Auf den Mengen $N(U, f)$ sind Karten durch die jeweilige Bündelprojektion gegeben. Das linke der beiden obigen Diagramme, und die Tatsache dass p analytisch ist, zeigt die Behauptung. \square

Wir wollen nun untersuchen wie weit sich ein gegebener Funktionskeim fortsetzen läßt.

6.4.3 Definition. Sei X eine Riemannsche Fläche, $a \in X$, und $f_a \in \mathcal{O}_a$.

- (i) Eine *analytische Fortsetzung* von f_a ist ein Tupel (Y, p, F, b) bestehend aus einer zusammenhängenden Riemannschen Fläche Y , einer lokal bianalytischen Abbildung $p : Y \rightarrow X$, einer Funktion $F \in \text{Hol}(Y, \mathbb{C})$, und einem Punkt $b \in Y$, sodass

$$p(b) = a \quad \text{und} \quad p_*([(Y, F)]_{\sim_b}) = f_a.$$

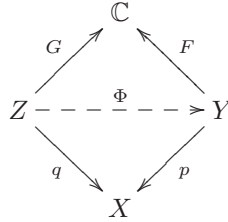
- (ii) Eine analytische Fortsetzung (Y, p, F, b) von f_a heißt *maximal*, wenn sie die folgende universelle Eigenschaft hat: Für jede analytische Fortsetzung (Z, q, G, c) von f_a existiert $\Phi \in \text{Hol}(Z, Y)$ sodass $\Phi(c) = b$ und $F \circ \Phi = G$.

Für p^ ist dieses im allgemeinen nicht möglich, da p nicht injektiv zu sein braucht.

- (iii) Zwei analytische Fortsetzungen (Y, p, F, b) und (Z, q, G, c) heißen *biana-*
lytisch äquivalent, wenn es eine analytische und bijektive Abbildung
 $\Phi : Z \rightarrow Y$ gibt mit $\Phi(c) = b$ und $F \circ \Phi = G$.

//

Die universelle Eigenschaft einer maximalen analytischen Fortsetzung lässt sich auch durch das folgende Diagramm ausdrücken:



Die untere Hälfte dieses Diagramms ist stärker als die in der Definition geforderte Eigenschaft $\Phi(c) = b$, folgt aber wegen der Eindeutigkeit des liftings denn X, Y sind Hausdorff, Z ist zusammenhängend, und p ein lokaler Homöomorphismus.

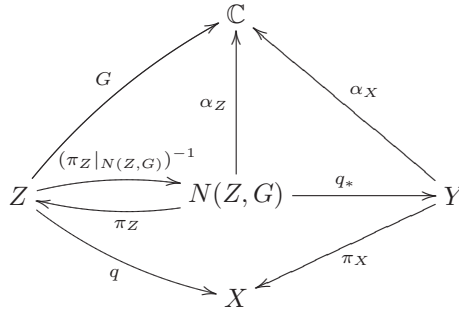
6.4.4 Satz. Sei X eine Riemannsche Fläche, $a \in X$, und $f_a \in \mathcal{O}_a$. Dann existiert eine maximale analytische Fortsetzung von f_a . Diese ist, bis auf biana-

lytische Äquivalenz, eindeutig. Man spricht auch von der Riemannschen Fläche des Funktionskeims f_a .

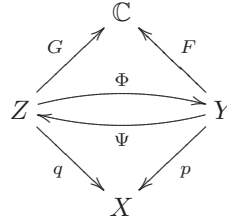
Beweis. Wir zeigen als erstes die Existenz einer maximalen analytischen Fortsetzung. Dazu bezeichne Y die Zusammenhangskomponente von $\mathcal{O}(X)$ welche den Punkt f_a enthält. Dann ist Y , als offene Teilmenge der Riemannschen Fläche $\mathcal{O}(X)$, selbst auch eine Riemannsche Fläche. Klarerweise ist Y zusammenhängend. Wir betrachten das Tupel $(Y, \pi_X|_Y, \alpha_X|_Y, f_a)$. Nach Korollar 6.3.2 ist $\pi_X|_Y$ lokal biana-

lytisch, und nach Lemma 6.3.3 ist $\alpha_X|_Y \in \text{Hol}(Y, \mathbb{C})$. Offenbar ist $f_a \in Y$ und $\pi_X(f_a) = a$. Um $\pi_X^*(f_a)$ zu berechnen, schreibe $f_a = [(U, f)]_{\sim_a}$ mit U zusammenhängend. Dann ist $N(U, f) \subseteq Y$, und nach Lemma 6.3.3 gilt $f \circ \pi_X|_{N(U, f)} = \alpha_X|_{N(U, f)}$. Also ist $\pi_X^*([(U, f)]_{\sim_a}) = [(N(U, f), \alpha_X)]_{\sim_{f_a}}$. Wir sehen, dass $(Y, \pi_X|_Y, \alpha_X|_Y, f_a)$ eine analytische Fortsetzung von f_a ist.

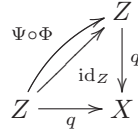
Sei (Z, q, G, c) eine andere analytische Fortsetzung von f_a . Definiere $\Phi := q_* \circ (\pi_Z|_{N(Z, G)})^{-1}$, dann ist $\Phi \in \text{Hol}(Z, \mathcal{O}(X))$. Es gilt $f_a = q_*([(Z, G)]_{\sim_c}) = \Phi(c)$, also ist $f_a \in \Phi(Z)$. Da Φ stetig ist, ist $\Phi(Z)$ zusammenhängend. Es folgt dass $\Phi(Z) \subseteq Y$. Wir haben nun das folgende Diagramm:



Wir kommen zum Beweis der Eindeutigkeitsaussage. Seien dazu (Y, p, F, b) und (Z, q, G, c) zwei maximale analytische Fortsetzungen. Dann haben wir also $\Phi \in \text{Hol}(Z, Y)$ und $\Psi \in \text{Hol}(Y, Z)$ mit



Es sind $\Psi \circ \Phi$ und id_Z liftings der Abbildung $q : Z \rightarrow X$



und es gilt $\Psi \circ \Phi(c) = c$. Da X und Z Hausdorff sind und Z zusammenhängend, folgt dass $\Psi \circ \Phi = \text{id}_Z$. Genauso erhält man $\Phi \circ \Psi = \text{id}_Y$, also ist Φ bijektiv. Klarerweise ist $\Phi(c) = b$ und $F \circ \Phi = G$. \square

6.4.5 Bemerkung. Auf einer Riemannschen Fläche sind die Zusammenhangskomponenten bogenweise zusammenhängend. Die maximale analytische Fortsetzung eines Funktionskeimes f_a , ist also gleich der Menge aller Funktionskeime die man von f_a mittels analytischer Fortsetzung längs Wegen erhalten kann.

//

Kapitel 7

Werte Verteilung und Wachstum

7.1 Die Poisson-Jensen Formel

Es besteht ein Zusammenhang zwischen der Größe des Betrages einer Funktion, und der Anzahl ihrer Nullstellen bzw. Polstellen. Grob gesprochen gilt, zum Beispiel für eine Funktion $f \in H(\mathbb{C})$: Schnelles Wachstum von $\max_{|z|=r} |f(z)|$, $r \rightarrow \infty$, bedeutet das f auch viele Nullstellen hat.

Das Instrument, um diesen Zusammenhang quantitativ zu fassen, ist die *Poisson-Jensen Formel*.

7.1.1 Satz (Poisson-Jensen Formel). *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f \in M(G)$, und $R > 0$ sodass $\overline{U_R(0)} \subseteq G$. Weiters bezeichne a_μ , $\mu = 1, \dots, m$, und b_ν , $\nu = 1, \dots, n$, die Null- bzw. Polstellen von f in $U_R(0)$, jeweils aufgezählt gemäß ihrer Vielfachheit.*

Dann gilt, für jeden Punkt $z = re^{i\theta} \in U_R(0)$ mit $f(z) \neq 0, \infty$,

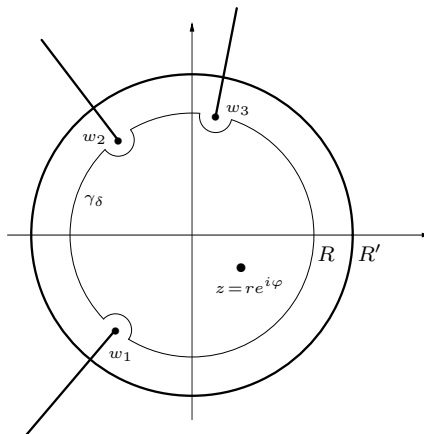
$$\begin{aligned} \log |f(z)| = & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\varphi})| \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi) + r^2} d\varphi + \\ & + \sum_{\mu=1}^m \log \left| \frac{R(z - a_\mu)}{R^2 - \overline{a_\mu}z} \right| - \sum_{\nu=1}^n \log \left| \frac{R(z - b_\nu)}{R^2 - \overline{b_\nu}z} \right|. \end{aligned}$$

Beweis.

Schritt 1: Wir betrachten zuerst den Fall, dass f in $U_R(0)$ weder Null- noch Polstellen hat. Die Funktion f ist in G meromorph, und daher können sich die Null- bzw. Polstellen in G nicht häufen. Also können wir einen Radius $R' > R$ wählen, sodass $U_{R'}(0) \subseteq G$, und sodass f in $U_{R'}(0) \setminus \overline{U_R(0)}$ keine Null- bzw. Polstellen hat. Sei

$$\tilde{G} := U_{R'}(0) \setminus \bigcup_{\substack{w \in \partial U_R(0) \\ f(w) \in \{0, \infty\}}} \{tw : t \geq 1\}.$$

Seien w_1, \dots, w_n die Null- und Polstellen von f auf $\partial U_R(0)$, sei $\delta > 0$, und bezeichne mit γ_δ den Weg in \tilde{G} der aus der Kreislinie $\partial U_R(0)$ besteht mit Ausnahme der Bögen mit Radius δ um die Punkte w_j , und der die Punkte w_j auf Kreisbögen $\gamma_{j,\delta}$ mit Radius δ innen umläuft.



Die Funktion f ist in \tilde{G} analytisch und nullstellenfrei. Da mit jedem Punkt aus \tilde{G} auch die gesamte Verbindungsstrecke dieses Punktes mit dem Nullpunkt in \tilde{G} liegt, ist \tilde{G} einfach zusammenhängend. Wir können also einen Logarithmus von f in $H(\tilde{G})$ wählen, zum Beispiel

$$\log f(z) := \int_{[0,z]} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta. \quad (7.1.1)$$

Sei $z \in U_R(0)$ gegeben, dann ist die Funktion $g(\zeta) := \log f(\zeta) \frac{R^2 - |z|^2}{R^2 - \bar{z}\zeta}$ auf $\tilde{G} \setminus \{\frac{R^2}{\bar{z}}\}$ analytisch. Da $|\frac{R^2}{\bar{z}}| > R$ ist, ist der Weg γ_δ in diesem Gebiet nullhomotop, und wir erhalten aus der Cauchy'schen Integralformel

$$\log f(z) = g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\delta} \log f(\zeta) \frac{R^2 - |z|^2}{R^2 - \bar{z}\zeta} \cdot \frac{1}{\zeta - z} d\zeta.$$

Das Integral längs der Kreisbögen $\gamma_{j,\delta}$ kann man abschätzen durch

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_{j,\delta}} \log f(\zeta) \frac{R^2 - |z|^2}{R^2 - \bar{z}\zeta} \cdot \frac{1}{\zeta - z} d\zeta &\leq \\ &\leq \delta \pi \cdot \max_{|\zeta - w_j| = \delta} |\log f(\zeta)| \cdot \max_{|\zeta - w_j| = \delta} \left| \frac{R^2 - |z|^2}{R^2 - \bar{z}\zeta} \cdot \frac{1}{\zeta - z} \right| \end{aligned}$$

Wir lassen nun δ gegen 0 streben. Der letzte Faktor bleibt klarerweise beschränkt. Da f bei w_j eine Null- oder Polstelle hat, ist $\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}$ von der Form $\frac{a}{\zeta - w_j} + O(1)$, $\zeta \rightarrow w_j$, und damit ist $|\log f(\zeta)| = O(\log \delta)$. Insgesamt sehen wir, dass das Integral längs $\gamma_{j,\delta}$ gegen Null strebt. Es folgt

$$\log f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_R(0)} \log f(\zeta) \frac{R^2 - |z|^2}{R^2 - \bar{z}\zeta} \cdot \frac{1}{\zeta - z} d\zeta,$$

wobei sich das Integral z.B. als Cauchy'scher Hauptwert versteht. Schreibt man $z = re^{i\theta}$ und $\zeta = Re^{i\varphi}$, so folgt

$$\begin{aligned}(R^2 - \bar{z}\zeta)(\zeta - z) &= R(R - re^{i(\varphi-\theta)})(Re^{i\varphi} - re^{i\theta}) = \\ &= Re^{i\varphi}(R^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi) + r^2),\end{aligned}$$

und damit

$$\log f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log f(Re^{i\varphi}) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi) + r^2} d\varphi. \quad (7.1.2)$$

Nimmt man die Realteile, so erhält man die behauptete Formel.

Schritt 2: Sei nun f beliebig. Betrachte die Funktion

$$g(z) := f(z) \prod_{\nu=1}^n \frac{R(\zeta - b_\nu)}{R^2 - \bar{b}_\nu \zeta} \left[\prod_{\mu=1}^m \frac{R(\zeta - a_\mu)}{R^2 - \bar{a}_\mu \zeta} \right]^{-1},$$

dann ist $g \in M(G)$, und hat in $U_R(0)$ weder Null- noch Polstellen. Weiters gilt, für $\zeta = Re^{i\varphi}$ und $x \in U_R(0)$,

$$\left| \frac{R(\zeta - x)}{R^2 - \bar{x}\zeta} \right| = \left| \frac{Re^{i\varphi} - x}{R - \bar{x}e^{i\varphi}} \right| = \left| \frac{R - xe^{i\varphi}}{R - \bar{x}e^{i\varphi}} \right| = 1,$$

also ist $|g(\zeta)| = |f(\zeta)|$ längs $\partial U_R(0)$. Wendet man die bereits bewiesene Formel auf g an, so folgt die Behauptung. \square

7.1.2 Korollar (Jensen Formel). Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f \in M(G)$, und $R > 0$ sodass $\bar{U}_R(0) \subseteq G$. Bezeichne mit a_μ , $\mu = 1, \dots, m$, und b_ν , $\nu = 1, \dots, n$, wieder die Null- bzw. Polstellen von f in $U_R(0)$, aufgezählt gemäß ihrer Vielfachheit. Weiters sei $\lambda := \vartheta_f(0)$, und bezeichne mit c_λ den entsprechenden Koeffizienten in der Laurent-Entwicklung von f um 0. Dann gilt

$$\log |c_\lambda| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\varphi})| d\varphi + \sum_{n=1}^m \log \frac{|a_\mu|}{R} - \sum_{\nu=1}^n \log \frac{|b_\nu|}{R} - \lambda \log R.$$

Beweis. Die Funktion $g(z) := \frac{R^\lambda f(z)}{z^\lambda}$ ist meromorph in G , und hat bei 0 weder eine Null- noch eine Polstelle. Weiters ist $|g(\zeta)| = |f(\zeta)|$, $|\zeta| = R$. Die Poisson-Jensen Formel zugewandt auf g und $z = 0$ zeigt die gewünschte Formel. \square

7.1.3 Bemerkung. Die Funktion

$$P(re^{i\theta}, Re^{i\varphi}) := \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi) + r^2}, \quad 0 \leq r < R, \quad \theta, \varphi \in \mathbb{R},$$

heißt der *Poisson-Kern* für die Kreisscheibe $U_R(0)$. Wir wollen bemerken, dass

$$P(re^{i\theta}, Re^{i\varphi}) = \operatorname{Re} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} = \operatorname{Re} \left(1 + \frac{2z}{\zeta - z} \right), \quad \zeta = Re^{i\varphi}, \quad z = re^{i\theta}.$$

Daraus erhält man unmittelbar die Abschätzung

$$\frac{R-r}{R+r} \leq |P(re^{i\theta}, Re^{i\varphi})| \leq \frac{R+r}{R-r}.$$

Weiters sieht man aus der Poisson-Jensen Formel, angewendet mit der konstanten Funktion $f(z) := e$, dass

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(re^{i\theta}, Re^{i\varphi}) d\varphi = 1.$$

//

Mit Hilfe der Poisson-Jensen Formel kann man einige Integraldarstellungen analytischer Funktionen herleiten.

7.1.4 Proposition (*Poisson'sche Integraldarstellung*). Sei $R > 0$, und sei $f : \overline{U_R(0)} \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion mit $f|_{U_R(0)} \in H(U_R(0))$. Dann gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{i\varphi}) P(re^{i\theta}, Re^{i\varphi}) d\varphi, \quad z = re^{i\theta} \in U_R(0).$$

Beweis. Für $0 < t < 1$ setze $f_t(z) := f(tz)$, dann ist $f \in H(U_{t^{-1}R}(0))$. Wir erhalten aus der Formel (7.1.2), angewendet mit der Funktion $\exp f_t$ und der Kreisscheibe $U_R(0)$,

$$\log(\exp f_t(z)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log(\exp f_t(Re^{i\varphi})) P(re^{i\theta}, Re^{i\varphi}) d\varphi.$$

Wegen unserer Wahl (7.1.1) des Zweiges vom Logarithmus, gilt

$$\log(\exp f_t(z)) = f_t(z) - f_t(0), \quad z \in U_{t^{-1}R}(0),$$

und wir schliessen, dass

$$f_t(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_t(Re^{i\varphi}) P(re^{i\theta}, Re^{i\varphi}) d\varphi.$$

Da f auf $\overline{U_R(0)}$ stetig ist, gilt $\lim_{t \nearrow 1} f_t|_{\partial U_R(0)} = f|_{\partial U_R(0)}$ gleichmäßig. Lässt man in der obigen Formel nun t gegen 1 streben, so folgt die Behauptung. \square

7.1.5 Korollar. Sei $R > 0$, und sei $f : \overline{U_R(0)} \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion mit $f|_{U_R(0)} \in H(U_R(0))$. Dann gilt

$$f(z) = i \operatorname{Im} f(0) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{Re^{i\varphi} + z}{Re^{i\varphi} - z} \cdot \operatorname{Re} f(Re^{i\varphi}) d\varphi, \quad z \in U_R(0).$$

Beweis. Betrachte die Funktion

$$g(z) := i \operatorname{Im} f(0) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{Re^{i\varphi} + z}{Re^{i\varphi} - z} \cdot \operatorname{Re} f(Re^{i\varphi}) d\varphi, \quad z \in U_R(0).$$

Diese ist analytisch in $U_R(0)$, und es gilt wegen der Poisson'schen Integraldarstellung von f

$$\operatorname{Re} g(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} \frac{Re^{i\varphi} + z}{Re^{i\varphi} - z} \cdot \operatorname{Re} f(Re^{i\varphi}) d\varphi = \operatorname{Re} f(z).$$

Weiters ist

$$g(0) = i \operatorname{Im} f(0) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f(Re^{i\varphi}) d\varphi = i \operatorname{Im} f(0) + \operatorname{Re} f(0) = f(0).$$

Es folgt, z.B. mit Hilfe des Maximumprinzips für $\operatorname{Re}(g - f)$, dass $f = g$. \square

Eine weitere Folgerung aus Satz 7.1.1 ist:

7.1.6 Proposition (*Ungleichung von Caratheodory*). *Sei f analytisch auf einem Gebiet welches die Kreisscheibe $\overline{U_R(0)}$ umfasst, und bezeichne*

$$A(r, f) := \max_{|z|=r} \operatorname{Re} f(z), \quad M(r, f) := \max_{|z|=r} |f(z)|.$$

Dann gilt

$$M(r, f) \leq |f(0)| + \frac{2r}{R-r} (A(R, f) - \operatorname{Re} f(0)), \quad 0 \leq r < R.$$

Beweis. Nach Korollar 7.1.5 angewendet mit „ $f, |z| < R$ “ sowie „ $f, z = 0$ “, gilt

$$\begin{aligned} f(z) &= i \operatorname{Im} f(0) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{Re^{i\varphi} + z}{Re^{i\varphi} - z} \operatorname{Re} f(Re^{i\varphi}) d\varphi = \\ &= f(0) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{Re^{i\varphi} + z}{Re^{i\varphi} - z} - 1 \right) \operatorname{Re} f(Re^{i\varphi}) d\varphi, \quad |z| < R. \end{aligned} \tag{7.1.3}$$

Bemerke, dass $\frac{Re^{i\varphi} + z}{Re^{i\varphi} - z} - 1 = \frac{2z}{Re^{i\varphi} - z}$.

Wendet man diese Formel speziell mit der konstanten Funktion „ $f(z) = 1$ “ an, so erhält man

$$\int_0^{2\pi} \frac{z}{Re^{i\varphi} - z} d\varphi = 0, \quad |z| < R.$$

Wir können (7.1.3) also weiter umformen zu

$$f(z) = f(0) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{2z}{Re^{i\varphi} - z} (\operatorname{Re} f(Re^{i\varphi}) - A(R, f)) d\varphi,$$

und erhalten, wegen ($r := |z|$)

$$\left| \frac{2z}{Re^{i\varphi} - z} \right| \leq \frac{2r}{R-r}, \quad |\operatorname{Re} f(Re^{i\varphi}) - A(R, f)| = A(R, f) - \operatorname{Re} f(Re^{i\varphi}),$$

dass

$$\begin{aligned} |f(z)| &\leq |f(0)| + \frac{1}{2\pi} \frac{2r}{R-r} \int_0^{2\pi} (A(R, f) - \operatorname{Re} f(Re^{i\varphi})) d\varphi = \\ &= |f(0)| + \frac{2r}{R-r} (A(R, f) - \operatorname{Re} f(0)). \end{aligned}$$

\square

Es ist eine interessante Aussage, dass sich eine Darstellung wie in Korollar 7.1.5 auch unter einer anderen Voraussetzung als Stetigkeit am Rand zeigen lässt.

7.1.7 Satz (Herglotz'sche Integraldarstellung). Sei $R > 0$ und $f \in H(U_R(0))$ eine Funktion mit nichtnegativen Realteil, d.h. $\operatorname{Re} f(z) \geq 0$, $z \in U_R(0)$. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes endliches positives Borel Maß μ auf der Kreislinie $\partial U_R(0)$, sodass

$$f(z) = i \operatorname{Im} f(0) + \int_{\partial U_R(0)} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} d\mu(\zeta), \quad z \in U_R(0).$$

Beweis. Für den Beweis der Existenz von μ betrachte wieder die Funktionen $f_t(z) := f(tz)$, $t \in (0, 1)$. Nach Korollar 7.1.5 gilt

$$f_t(z) = i \operatorname{Im} f(0) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{Re^{i\varphi} + z}{Re^{i\varphi} - z} \cdot \operatorname{Re} f_t(Re^{i\varphi}) d\varphi.$$

Sei μ_t das Bildmaß auf $\partial U_R(0)$ des absolut stetigen Maßes $\frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} f_t(Re^{i\varphi}) d\varphi$ vermöge der Abbildung $\varphi \mapsto Re^{i\varphi}$, dann können wir also schreiben

$$f_t(z) = i \operatorname{Im} f(0) + \int_{\partial U_R(0)} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} d\mu_t(\zeta).$$

Es ist μ_t ein positives Maß, und seine Totalvariation ist gleich

$$\|\mu_t\| = \int_{\partial U_R(0)} d\mu(\zeta) = \operatorname{Re} f_t(0) = \operatorname{Re} f(0).$$

Nach dem Satz von Banach-Alaoglu existiert eine Folge $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $t_n \nearrow 1$, sodass $(\mu_{t_n})_{n \in \mathbb{N}}$ schwach-* gegen ein gewisses positives endliches Borel Maß μ konvergiert. Es folgt, für jedes $z \in U_R(0)$,

$$\begin{aligned} f(z) &= \lim_{n \rightarrow \infty} f_t(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[i \operatorname{Im} f(0) + \int_{\partial U_R(0)} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} d\mu_t(\zeta) \right] = \\ &= i \operatorname{Im} f(0) + \int_{\partial U_R(0)} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} d\mu(\zeta). \end{aligned}$$

Wir kommen zum Beweis der Eindeutigkeit von μ . Sei dazu allgemein angenommen, dass μ ein endliches komplexes Borel Maß auf $\partial U_R(0)$ ist, mit

$$\int_{\partial U_R(0)} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} d\mu(\zeta) = 0, \quad z \in U_R(0).$$

Setzt man $z = 0$, so folgt $\int_{\partial U_R(0)} d\mu(\zeta) = 0$. Schreibt man nun $\frac{\zeta+z}{\zeta-z} = 1 + \frac{2z}{\zeta-z}$, so erhält man

$$\int_{\partial U_R(0)} \frac{1}{\zeta - z} d\mu(\zeta) = 0, \quad z \in U_R(0) \setminus \{0\}.$$

Sei $\mathcal{A} \subseteq C(\partial U_R(0))$ die Menge aller Funktionen ϕ mit $\int_{\partial U_R(0)} \phi(\zeta) d\mu(\zeta) = 0$. Dann ist \mathcal{A} ein abgeschlossener linearer Teilraum von $C(\partial U_R(0))$. Nach dem

oben gesagten, enthält dieser die Funktion 1, und alle Funktionen $(\zeta - z)^{-1}$, $z \in U_R(0) \setminus \{0\}$. Nun ist, in der Norm von $C(\partial U_R(0))$,

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta}, \quad \lim_{\substack{z_1, \dots, z_n \rightarrow z \\ z_j \text{ paarweise verschieden}}} \prod_{j=1}^n \frac{1}{\zeta - z_j} = \frac{1}{(\zeta - z)^n}.$$

Macht man eine Partialbruchzerlegung, so sieht man dass $\prod_{j=1}^n \frac{1}{\zeta - z_j} \in \mathcal{A}$. Insgesamt folgt, dass \mathcal{A} alle rationalen Funktionen die keine Polstellen in $\mathbb{C}_\infty \setminus U_R(0)$ haben enthält. Nach dem Satz von Stone-Weierstraß ist $\mathcal{A} = C(\partial U_R(0))$. \square

7.2 Nevanlinna's 1st Fundamental Theorem

7.2.1 Definition. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f \in M(G)$. Für $R > 0$ mit $\overline{U_R(0)} \subseteq G$, bezeichne mit b_1, \dots, b_ν die Polstellen von f in $\overline{U_R(0)}$, aufgezählt gemäß ihrer Vielfachheit, und setze $(\log^+ x := \max\{\log x, 0\})$

$$m_\infty(R, f) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(Re^{i\varphi})| d\varphi, \quad N_\infty(R, f) := \sum_{\nu=1}^n \log \left| \frac{R}{b_\nu} \right|.$$

Dann heißt

$$T_\infty(R, f) := m_\infty(R, f) + N_\infty(R, f)$$

die *Nevanlinna Charakteristik* von f . Wir schreiben weiters, für $a \in \mathbb{C}$,

$$m_a(R, f) := m_\infty\left(R, \frac{1}{f-a}\right), \quad N_a(R, f) := N_\infty\left(R, \frac{1}{f-a}\right),$$

$$T_a(R, f) := T_\infty\left(R, \frac{1}{f-a}\right).$$

//

Der Wert $m_\infty(R, f)$ gibt eine durchschnittliche Größe von f längs der Kreislinie $|z| = R$ an, und der Wert $N_\infty(R, f)$ zählt die Pole von f . Insgesamt ist also $T_\infty(R, f)$ ein Maß für die Größe von f , das sich zusammensetzt aus den beiden Komponenten „wie nahe bei ∞ ist f “ und „wie oft wird ∞ angenommen“. Dementsprechend ist dann $T_a(R, f)$ ein Maß dafür wie nahe f dem Wert a kommt.

7.2.2 Lemma. Seien $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{C}$, dann gilt

$$\log^+ \left| \prod_{i=1}^k a_i \right| \leq \sum_{i=1}^k \log^+ |a_i|,$$

$$\log^+ \left| \sum_{i=1}^k a_i \right| \leq \log^+ (k \max_{i=1, \dots, k} |a_i|) \leq \sum_{i=1}^k \log^+ |a_i| + \log k.$$

Beweis. Ist $|\prod_{i=1}^k a_i| \geq 1$, so haben wir

$$\log^+ \left| \prod_{i=1}^k a_i \right| = \log \left| \prod_{i=1}^k a_i \right| = \sum_{i=1}^k \log |a_i| \leq \sum_{i=1}^k \log^+ |a_i|.$$

Anderenfalls steht links 0 und die Ungleichung gilt trivialerweise.

Wegen der Monotonie von \log^+ und der bereits gezeigten Ungleichung gilt

$$\begin{aligned} \log^+ \left| \sum_{i=1}^k a_i \right| &\leq \log^+ \sum_{i=1}^k |a_i| \leq \log^+ \left(k \max_{1 \leq i \leq k} |a_i| \right) \leq \\ &\leq \log^+ k + \log^+ \max_{1 \leq i \leq k} |a_i| \leq \log k + \sum_{i=1}^k \log^+ |a_i|. \end{aligned}$$

□

Wir erhalten einige Rechenregeln für die Nevanlinna Charakteristik.

7.2.3 Korollar. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f \in M(G)$. Für $R > 0$ mit $\overline{U_R(0)} \subseteq G$ gilt

$$\begin{aligned} m_\infty \left(R, \prod_{i=1}^k f_i(z) \right) &\leq \sum_{i=1}^k m_\infty(R, f_i(z)), \\ m_\infty \left(R, \sum_{i=1}^k f_i(z) \right) &\leq \sum_{i=1}^k m_\infty(R, f_i(z)) + \log k, \\ N_\infty \left(R, \prod_{i=1}^k f_i(z) \right) &= \sum_{i=1}^k N_\infty(R, f_i(z)), \\ N_\infty \left(R, \sum_{i=1}^k f_i(z) \right) &\leq \sum_{i=1}^k N_\infty(R, f_i(z)). \end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned} T_\infty \left(R, \prod_{i=1}^k f_i(z) \right) &\leq \sum_{i=1}^k T_\infty(R, f_i(z)), \\ T_\infty \left(R, \sum_{i=1}^k f_i(z) \right) &\leq \sum_{i=1}^k T_\infty(R, f_i(z)) + \log k. \end{aligned}$$

Beweis. Die Aussage für m_∞ folgende unmittelbar aus Lemma 7.2.2, und die Behauptung für N_∞ wegen

$$\vartheta_{f \cdot g}(w) = \vartheta_f(w) + \vartheta_g(w), \quad \vartheta_{f+g}(w) \leq \max \{ \vartheta_f(w), \vartheta_g(w) \} \leq \vartheta_f(w) + \vartheta_g(w).$$

Die Aussagen für T_∞ sind dann klar. □

Aus der Jensen Formel erhält man nun recht einfach das 1st Fundamental Theorem von Nevanlinna:

7.2.4 Satz (First Fundamental Theorem). Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f \in M(G)$. Für $R > 0$ mit $\overline{U_R(0)} \subseteq G$ gilt

$$T_a(R, f) = T_\infty(R, f) - \log |f(0) - a| + \epsilon_a(R, f).$$

Der Restterm ϵ_a kann dabei abgeschätzt werden durch $|\epsilon_a(R, f)| \leq \log^+ |a| + \log 2$.

Beweis. Es ist $\log x = \log^+ x - \log^+ \frac{1}{x}$, $x > 0$. Die Jensen Formel angewandt auf die Funktion $f - a$ schreibt sich daher als (bezeichne mit a_1, \dots, a_m die a -Stellen von f)

$$\begin{aligned} \log |f(0) - a| &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\varphi}) - a| d\varphi + \sum_{\mu=1}^m \log \left| \frac{a_\mu}{R} \right| - \sum_{\nu=1}^n \log \left| \frac{b_\nu}{R} \right| = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(Re^{i\varphi}) - a| d\varphi - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \left| \frac{1}{f(Re^{i\varphi}) - a} \right| d\varphi + \\ &\quad + \sum_{\mu=1}^m \log \left| \frac{a_\mu}{R} \right| - \sum_{\nu=1}^n \log \left| \frac{b_\nu}{R} \right| = \\ &= m_\infty(R, f - a) - m_a(R, f) - N_a(R, f) + N_\infty(R, f) = \\ &= T_\infty(R, f - a) - T_a(f). \end{aligned}$$

Wegen Korollar 7.2.3 gilt

$$T_\infty(R, f - a) \leq T_\infty(R, f) + T_\infty(R, -a) + \log 2 = T_\infty(R, f) + \log^+ |a| + \log 2.$$

Andererseits ist

$$T_\infty(R, f) = T_\infty(R, (f - a) + a) \leq T_\infty(R, f - a) + \log^+ |a| + \log 2,$$

und insgesamt folgt

$$|T_\infty(R, f - a) - T_\infty(R, f)| \leq \log^+ |a| + \log 2.$$

Die gewünschte Formel erhält man nun, indem man $\epsilon_a(R, f) := T_\infty(R, f - a) - T_\infty(R, f)$ setzt. \square

7.2.5 Bemerkung. Sei $f \in M(\mathbb{C})$. Lässt man im 1st Fundamental Theorem R gegen ∞ streben, so sieht man dass

$$T_a(R, f) = T_\infty(R, f) + O(1).$$

D.h. die Funktion $f \in M(\mathbb{C})$ kommt jedem Wert gleich nahe*. \parallel

Ist $f \in H(G)$, so können wir die Größe von f in natürlicher Weise auch anders messen: Für $R > 0$ mit $\overline{U_R(0)} \subseteq G$, setze

$$M(R, f) := \max_{|z|=R} |f(z)| = \max_{z \in U_R(0)} |f(z)|.$$

Es gilt der folgende Zusammenhang zwischen $M(R, f)$ und dem durch T_∞ gegebenen Größenmaß.

7.2.6 Proposition. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f \in H(G)$, und sei $R > 0$ mit $\overline{U_R(0)} \subseteq G$. Dann gilt, für $0 \leq r \leq R$,

$$T_\infty(r, f) \leq \log^+ M(r, f) \leq \frac{R+r}{R-r} T_\infty(R, f).$$

*Man kann zeigen, dass für $f \in M(\mathbb{C})$ die Nevanlinna Charakteristik stets gegen unendlich strebt (außer für konstante Funktionen).

Beweis. Da f analytisch ist, ist $N_\infty(r, f) = 0$, also folgt

$$T_\infty(r, f) = m_\infty(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\varphi})| d\varphi \leq \log^+ M(r, f).$$

Ist $M(r, f) \leq 1$, so ist die zweite Ungleichung trivial. Betrachte also den Fall dass $M(r, f) > 1$. Wähle z_0 mit $|z_0| = r$, sodass $|f(z_0)| = M(r, f)$. Da f keine Pole hat folgt mit der Poisson-Jensen Formel ($z_0 = re^{i\theta}$)

$$\begin{aligned} \log^+ M(r, f) &= \log |f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\varphi})| P(re^{i\theta}, Re^{i\varphi}) d\varphi \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(Re^{i\varphi})| \frac{R+r}{R-r} d\varphi = \frac{R+r}{R-r} m_\infty(R, f) = \frac{R+r}{R-r} T_\infty(R, f). \end{aligned}$$

□

Insbesondere erhält man für $f \in H(\mathbb{C})$, dass das asymptotische Wachstum von M und T_∞ für $R \rightarrow \infty$ im wesentlichen gleich ist.

7.2.7 Korollar. Sei $f \in H(\mathbb{C})$, $k > 0$, und betrachte die Werte

$$C_1 := \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{T_\infty(r, f)}{r^k}, \quad C_2 := \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log^+ M(r, f)}{r^k}.$$

Dann gilt $C_1 \leq C_2$ und $C_2 \leq (2k+1)e \cdot C_1$.

Beweis. Aus der ersten Ungleichung in Proposition 7.2.6 erhält man unmittelbar $C_1 \leq C_2$.

Wir verwenden nun die zweite Ungleichung aus Proposition 7.2.6 mit $R = r(1 + \frac{1}{k})$. Es folgt

$$\frac{1}{r^k} \log^+ M(r, f) \leq \frac{1}{r^k} \frac{R+r}{R-r} T_\infty(R, f) = \frac{(1 + \frac{1}{k})^k}{R^k} \cdot k \left(2 + \frac{1}{k}\right) \cdot T_\infty(R, f).$$

Nun gilt stets $(1 + \frac{1}{k})^k \leq e$. □

7.2.8 Bemerkung. Wie Korollar 7.2.7 zeigt sind die Werte C_1 und C_2 stets gemeinsam gleich 0, positiv und endlich, oder gleich ∞ . Falls sie positiv und endlich sind können sie jedoch durchaus verschieden sein.

Betrachte zum Beispiel die Funktion $f(z) = e^z$ und $k = 1$. Dann ist $C_2 = 1$, aber

$$T_\infty(r, f) = m_\infty(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |e^{re^{i\varphi}}| d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r \cos \varphi d\varphi = \frac{r}{\pi},$$

also $C_1 = \frac{1}{\pi}$. //

7.3 Wachstum vs. Nullstellenverteilung

Eine auf ganz \mathbb{C} analytische Funktion heißt *ganze Funktion*.

7.3.1 Definition. Sei f eine ganze Funktion die nicht identisch gleich Null ist. Dann heißt die Zahl

$$\rho(f) := \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log M(r, f)}{\log r} \in [0, \infty]$$

die *Ordnung* von f .

Für die Nullfunktion $f = 0$ setzt man manchmal $\rho(f) := -\infty$. //

Die Ordnung einer ganzen Funktion misst das Wachstum von f im Vergleich mit der Exponentialfunktion, denn es gilt

$$\begin{aligned} \rho(f) &= \inf \{ \alpha \in \mathbb{R} : \exists R > 0 \text{ mit } |f(z)| \leq e^{|z|^\alpha}, |z| \geq R \} = \\ &= \inf \{ \alpha \in \mathbb{R} : |f(z)| = O(e^{|z|^\alpha}), z \rightarrow \infty \} = \\ &= \inf \{ \alpha \in \mathbb{R} : \log M(r, f) = O(r^\alpha), r \rightarrow \infty \} \end{aligned}$$

7.3.2 Beispiel.

(i) Ist f ein Polynom, so gilt $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{M(r, f)}{r^{\deg f}} \in (0, \infty)$, und daher $\rho(f) = 0$.

(ii) Sei Q ein Polynom und $f := \exp Q$. Dann gilt $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log M(r, f)}{r^{\deg Q}} \in (0, \infty)$, und daher $\rho(f) = \deg Q$.

//

7.3.3 Lemma. Seien f und g ganze Funktionen. Dann gilt

$$\rho(f \cdot g), \rho(f + g) \leq \max \{ \rho(f), \rho(g) \}.$$

Beweis. Wegen $|fg| = |f| \cdot |g|$ ist $M(r, fg) \leq M(r, f)M(r, g)$, und daher

$$\log M(r, fg) \leq \log M(r, f) + \log M(r, g).$$

Ist $\alpha > 0$ und $\log M(r, f), \log M(r, g) = O(r^\alpha)$, so ist also auch $\log M(r, fg) = O(r^\alpha)$. Wir erhalten $\rho(f \cdot g) \leq \max \{ \rho(f), \rho(g) \}$.

Wegen $|f + g| \leq |f| + |g|$ ist

$$M(r, f + g) \leq M(r, f) + M(r, g) \leq 2 \max \{ M(r, f), M(r, g) \},$$

und daher $\log M(r, f + g) \leq \log 2 + \max \{ \log M(r, f), \log M(r, g) \}$. Es folgt, dass $\rho(f + g) \leq \max \{ \rho(f), \rho(g) \}$. \square

Wir wollen nun zeigen, dass die Nullstellen einer ganzen Funktion endlicher Ordnung nicht beliebig dicht sein können; sie müssen mit einer gewissen Mindestgeschwindigkeit gegen unendlich streben. Um diese Aussage zu präzisieren, benötigen wir ein quantitatives Maß für das Wachstum einer Folge komplexer Zahlen.

7.3.4 Definition. Sei a_1, a_2, \dots eine (endliche oder unendliche) Folge komplexer Zahlen, mit $|a_1| \leq |a_2| \leq \dots$ und $a_n \rightarrow \infty$. Dann setzen wir

(i)

$$n(r, (a_n)_n) := \#\{k : |a_k| \leq r\}, \quad N(r, (a_n)_n) := \int_0^r \frac{n(t, (a_n)_n)}{t} dt.$$

(ii)

$$\rho_1((a_n)_n) := \inf \left\{ \alpha > 0 : \sum_{k, a_k \neq 0} \frac{1}{|a_k|^\alpha} < \infty \right\} \in [0, \infty],$$

$$p((a_n)_n) := \inf \left\{ p \in \mathbb{N}_0 : \sum_{k, a_k \neq 0} \frac{1}{|a_k|^{p+1}} < \infty \right\} \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}.$$

Die Zahl $\rho_1((a_n)_n)$ heißt der *Konvergenzexponent* der Folge $(a_n)_n$, die Zahl $p((a_n)_n)$ ihr *Geschlecht*. //

Das Geschlecht einer Folge ist natürlich ein größeres Maß als ihr Konvergenzexponent. Wir werden es jedoch später benötigen. Offenbar gilt

$$p((a_n)_n) \leq \rho_1((a_n)_n) \leq p((a_n)_n) + 1.$$

Wenn aus dem Zusammenhang klar ist, auf welche Folge wir uns beziehen, so schreiben wir auch nur $n(r), N(r)$ oder ρ_1, p .

7.3.5 Lemma. Sei a_1, a_2, \dots eine (endliche oder unendliche) Folge komplexer Zahlen, $a_n \neq 0$, mit $|a_1| \leq |a_2| \leq \dots$ und $a_n \rightarrow \infty$.

(i) Es gilt

$$N(r) = \sum_{|a_k| < r} \log \frac{r}{|a_k|}, \quad n(r) \log \alpha \leq N(\alpha r), \quad \alpha > 1.$$

(ii) Sei $\alpha > 0$. Dann ist

$$\sum_k \frac{1}{|a_k|^\alpha} < \infty \iff \int_0^\infty \frac{n(t)}{t^{\alpha+1}} dt < \infty.$$

Beweis. Seien a_1, \dots, a_n jene Folgenglieder mit $|a_k| < r$, und seien k_1, \dots, k_m sodaß $k_m = n$ und

$$|a_1| = \dots = |a_{k_1}| < |a_{k_1+1}| = \dots = |a_{k_2}| < \dots < |a_{k_{m-1}+1}| = \dots = |a_{k_m}|.$$

Setze weiters $k_0 := 0$, $t_j := |a_{k_j}|$, $j = 0, \dots, m$, und $t_{m+1} := r$.

Es gilt $n(t) = k_j$, $t \in [t_j, t_{j+1})$, $j = 0, \dots, m$, und daher

$$\begin{aligned} N(r) &= \sum_{j=0}^m \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{n(t)}{t} dt = \sum_{j=1}^m k_j (\log t_{j+1} - \log t_j) = \\ &= (-k_1 \log t_1 + k_1 \log t_2) + (-k_2 \log t_2 + k_2 \log t_3) + \dots + \\ &+ (-k_m \log t_m + k_m \log t_{m+1}) = -\sum_{j=1}^m (k_j - k_{j-1}) \log t_j + n \log r = \sum_{k=1}^n \log \frac{r}{|a_k|}. \end{aligned}$$

Sei nun $\alpha > 1$. Da $n(t)$ monoton wachsend und nichtnegativ ist, gilt

$$n(r) \log \alpha = n(r) \int_r^{\alpha r} \frac{dt}{t} \leq \int_r^{\alpha r} n(t) \frac{dt}{t} \leq N(\alpha r).$$

Wir kommen zum Beweis von (ii). Eine Partialsumme $\sum_{|a_k| \leq T} \frac{1}{|a_k|^\alpha}$ läßt sich anschreiben als

$$\sum_{|a_k| \leq T} \frac{1}{|a_k|^\alpha} = \int_0^T \frac{1}{t^\alpha} dn(t) = \frac{1}{T^\alpha} n(T) + \alpha \int_0^T \frac{1}{t^{\alpha+1}} n(t) dt. \quad (7.3.1)$$

Ist $\sum_k \frac{1}{|a_k|^\alpha} < \infty$, so folgt wegen $n(T) \geq 0$, daß auch $\int_0^\infty \frac{1}{t^{\alpha+1}} n(t) dt < \infty$. Sei umgekehrt das Integral konvergent. Da $n(t)$ wachsend ist gilt

$$\frac{1}{\alpha} \left(1 - \frac{1}{2^\alpha}\right) \frac{1}{T^\alpha} n(T) = n(T) \int_T^{2T} \frac{1}{t^{\alpha+1}} dt \leq \int_T^{2T} \frac{n(t)}{t^{\alpha+1}} dt \leq \int_0^{2T} \frac{n(t)}{t^{\alpha+1}} dt,$$

also ist $T^{-\alpha} n(T)$ beschränkt. Damit ist auch die rechte Seite von (7.3.1) beschränkt, also $\sum_k \frac{1}{|a_k|^\alpha} < \infty$. \square

7.3.6 Definition. Sei $f \in H(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$. Bezeichne mit a_1, a_2, \dots die Folge der Nullstellen von f , aufgezählt gemäß ihrer Vielfachheit, und so nummeriert dass $|a_1| \leq |a_2| \leq \dots$. Dann setzen wir

$$n(r, f) := n(r, (a_n)_n), \quad N(r, f) := N(r, (a_n)_n), \\ \rho_1(f) := \rho_1((a_n)_n), \quad p(f) := p((a_n)_n).$$

//

7.3.7 Proposition. Sei f eine ganze Funktion endlicher Ordnung (die nicht identisch verschwindet). Dann gilt, für jedes $\epsilon > 0$,

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r, f)}{r^{\rho(f) + \epsilon}} < \infty.$$

Weiters gilt $\rho_1(f) \leq \rho(f)$.

Beweis. Dividiert man f durch ein Polynom, so ändert das nichts an Ordnung, Konvergenzexponent, sowie den asymptotischen Ungleichung für $n(r, f)$. Also können wir für den gesamten Beweis voraussetzen dass $f(0) = 1$.

Die Jensen-Formel schreibt sich als

$$N(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\varphi})| d\varphi.$$

Sei $\epsilon > 0$, und wähle R sodaß $M(r, f) \leq e^{r^{\rho(f) + \epsilon}}$ für $r \geq R$. Dann folgt also $N(r, f) \leq \log M(r, f) \leq r^{\rho(f) + \epsilon}$, und daher

$$n(r, f) \leq \frac{1}{\log 2} N(2r, f) \leq \frac{2^{\rho(f) + \epsilon}}{\log 2} r^{\rho(f) + \epsilon}, \quad r \geq R.$$

Also ist $\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r, f)}{r^{\rho(f)+\epsilon}} \leq \frac{2^{\rho(f)+\epsilon}}{\log 2}$.

Ist $\alpha > \rho(f) + \epsilon$, so ist

$$\int_R^\infty \frac{n(t, f)}{t^{\alpha+1}} dt \leq \frac{2^{\rho(f)+\epsilon}}{\log 2} \int_R^\infty t^{\rho(f)+\epsilon-\alpha-1} dt < \infty.$$

Es folgt $\rho_1(f) \leq \rho(f) + \epsilon$. Da ϵ beliebig war folgt $\rho_1(f) \leq \rho(f)$. \square

7.4 Der Produktsatz von Hadamard

Der *Produktsatz von Hadamard* ist eine Verschärfung des Produktsatzes von Weierstraß für Funktionen mit endlicher Ordnung. Er besteht aus zwei Teilen.

7.4.1 Satz (Hadamard I). *Sei $(a_n)_n$ eine (endliche oder unendliche) Folge komplexer Zahlen, $a_n \neq 0$, mit $|a_1| \leq |a_2| \leq \dots$ und $a_n \rightarrow \infty$. Weiters sei $m \in \mathbb{N}_0$, und Q ein Polynom.*

Ist $\rho_1((a_n)_n) < \infty$, dann ist das Produkt

$$f(z) := z^m e^{Q(z)} \prod_n E_{p((a_n)_n)}\left(\frac{z}{a_n}\right). \quad (7.4.1)$$

konvergent, und stellt eine ganze Funktion endlicher Ordnung dar. Es gilt

$$\rho(f) = \max \{ \text{grad } Q, \rho_1((a_n)_n) \}. \quad (7.4.2)$$

7.4.2 Satz (Hadamard II). *Sei f eine ganze Funktion die nicht identisch verschwindet. Bezeichne mit $(a_n)_n$ die (endliche oder unendliche) Folge der von Null verschiedenen Nullstellen von f , aufgezählt gemäß ihrer Vielfachheit und angeordnet nach aufsteigenden Beträgen, und setze $m := \vartheta_f(0)$.*

Ist $\rho(f) < \infty$, dann gilt $p(f) \leq \rho(f)$, und es existiert ein Polynom Q mit $\text{grad } Q \leq \rho(f)$, sodaß f durch die Formel (7.4.1) dargestellt wird.

Beweis (von Satz 7.4.1). Sei eine Folge $(a_n)_n$ mit den genannten Eigenschaften gegeben. Die Tatsache, dass das Produkt in (7.4.1) lokal gleichmäßig auf ganz \mathbb{C} konvergiert, ist aus dem Beweis des Weierstraß'schen Produktsatzes (Fall $G = \mathbb{C}$) bereits bekannt. Also definiert die rechte Seite von (7.4.1) tatsächlich eine ganze Funktion. Die wesentliche Aufgabe ist die Größe des kanonischen Produktes $\prod_n E_{p((a_n)_n)}\left(\frac{z}{a_n}\right)$ abzuschätzen. Dazu betrachten wir zunächst die einzelnen Faktoren.

Schritt 1; Abschätzung eines Elementarfaktors: Sei $p \in \mathbb{N}_0$ und $w \in \mathbb{C}$. Dann ist der Weierstraß'sche Elementarfaktor $E_p(w)$ definiert als $E_p(w) = (1 - w) \exp\left(w + \frac{w^2}{2} + \dots + \frac{w^p}{p}\right)$. Eine Abschätzung für kleine Werte von w erhält man wie folgt: Die Funktion

$$g(z) := - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{w^k}{k}, \quad |w| < 1,$$

ist analytisch auf $U_1(0)$, und dort ein Zweig des Logarithmus $\log(1 - w)$. Es folgt dass, für $|w| < 1$,

$$E_p(w) = \exp\left(- \sum_{k=1}^{\infty} \frac{w^k}{k}\right) \cdot \exp\left(w + \frac{w^2}{2} + \dots + \frac{w^p}{p}\right) = \exp\left(- \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{w^k}{k}\right).$$

Daher ist

$$\left| \log |E_p(w)| \right| = \left| \operatorname{Re} \left(- \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{w^k}{k} \right) \right| \leq \sum_{k=p+1}^{\infty} |w|^k = \frac{|w|^{p+1}}{1-|w|}, \quad |w| < 1. \quad (7.4.3)$$

Eine Abschätzung für große Werte von w , nämlich für $|w| \geq \frac{1}{2}$, $w \neq 1$, kann man bei $p > 0$ elementar erhalten: Es ist $2|w| \geq 1$, und damit gilt

$$\begin{aligned} \log |E_p(w)| &\leq \log |1-w| + \sum_{k=1}^p \frac{|w|^k}{k} \leq \log(1+|w|) + \sum_{k=1}^p \frac{1}{k} 2^{p-k} |w|^p \leq \\ &\leq |w| + 2^p |w|^p \leq (2^{p-1} + 2^p) |w|^p, \quad |w| \geq \frac{1}{2}, w \neq 1, p > 0. \end{aligned} \quad (7.4.4)$$

Schritt 2; Abschätzung des kanonischen Produktes: Schreibe $p := p((a_n)_n)$. Für $z \notin \{a_1, a_2, \dots\}$ ist

$$\log \left| \prod_n E_p \left(\frac{z}{a_n} \right) \right| = \sum_{\substack{n \text{ mit} \\ |a_n| > 2|z|}} \log |E_p \left(\frac{z}{a_n} \right)| + \sum_{\substack{n \text{ mit} \\ |a_n| \leq 2|z|}} \log |E_p \left(\frac{z}{a_n} \right)|. \quad (7.4.5)$$

Um die erste Summe in (7.4.5) abzuschätzen, verwenden wir (7.4.3). Schreibe $r := |z|$, $r_n := |a_n|$, und $\rho_1 := \rho_1((a_n)_n)$. Ist $\rho_1 = p+1$, so gilt (beachte $1 - |\frac{z}{a_n}| \geq \frac{1}{2}$)

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n \text{ mit} \\ |a_n| > 2|z|}} \log |E_p \left(\frac{z}{a_n} \right)| &\leq 2 \sum_{\substack{n \text{ mit} \\ |a_n| > 2|z|}} \left(\frac{r}{r_n} \right)^{p+1} \leq \\ &\leq r^{\rho_1} \cdot 2 \sum_n \frac{1}{r_n^{p+1}} = O(r^{\rho_1}). \end{aligned}$$

Betrachte den Fall dass $\rho_1 < p+1$. Dann gilt, für $\epsilon > 0$ so klein dass $\rho_1 + \epsilon < p+1$,

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n \text{ mit} \\ |a_n| > 2|z|}} \log |E_p \left(\frac{z}{a_n} \right)| &\leq 2r^{p+1} \sum_{\substack{n \text{ mit} \\ |a_n| > 2|z|}} \frac{1}{r_n^{p+1}} \left(\frac{r_n}{2r} \right)^{p+1-\rho_1-\epsilon} = \\ &= 2r^{p+1} (2r)^{\rho_1+\epsilon-p-1} \sum_{\substack{n \text{ mit} \\ |a_n| > 2|z|}} \frac{1}{r_n^{\rho_1+\epsilon}} \leq \\ &\leq r^{\rho_1+\epsilon} \cdot 2^{\rho_1+\epsilon-p} \sum_n \frac{1}{r_n^{\rho_1+\epsilon}} = O(r^{\rho_1+\epsilon}). \end{aligned}$$

Wir kommen zur zweiten Summe in (7.4.5). Sei $\epsilon > 0$. Ist $p = 0$, so haben wir, da $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log(1+\frac{r}{r_1})}{r^\epsilon} = 0$,

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n \text{ mit} \\ |a_n| \leq 2|z|}} \log |E_p \left(\frac{z}{a_n} \right)| &\leq \sum_{\substack{n \text{ mit} \\ |a_n| \leq 2|z|}} \log \left(1 + \frac{r}{r_n} \right) \left(\frac{r}{r_n} \right)^{\rho_1+\epsilon} \left(\frac{r_n}{r} \right)^{\rho_1+\epsilon} \leq \\ &\leq \log \left(1 + \frac{r}{r_1} \right) r^{\rho_1+\epsilon} 2^{\rho_1+\epsilon} \sum_{\substack{n \text{ mit} \\ |a_n| \leq 2|z|}} \frac{1}{r_n^{\rho_1+\epsilon}} \leq \\ &\leq r^{\rho_1+2\epsilon} \cdot \frac{\log(1+\frac{r}{r_1})}{r^\epsilon} 2^{\rho_1+\epsilon} \sum_n \frac{1}{r_n^{\rho_1+\epsilon}} = O(r^{\rho_1+2\epsilon}). \end{aligned}$$

Im Fall $p > 0$ verwenden wir die Formel (7.4.4). Setze $A := 2^{p-1} + 2^p$, dann gilt

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n \text{ mit} \\ |a_n| \leq 2|z|}} \log |E_p\left(\frac{z}{a_n}\right)| &\leq Ar^p \sum_{\substack{n \text{ mit} \\ |a_n| \leq 2|z|}} \frac{1}{r_n^p} \leq Ar^p \sum_{\substack{n \text{ mit} \\ |a_n| \leq 2|z|}} \frac{1}{r_n^p} \left(\frac{2r}{r_n}\right)^{\rho_1 + \epsilon - p} = \\ &= Ar^p (2r)^{\rho_1 + \epsilon - p} \sum_{\substack{n \text{ mit} \\ |a_n| \leq 2|z|}} \frac{1}{r_n^{\rho_1 + \epsilon}} \leq \\ &\leq r^{\rho_1 + \epsilon} \cdot A 2^{\rho_1 + \epsilon - p} \sum_n \frac{1}{r_n^{\rho_1 + \epsilon}} = O(r^{\rho_1 + \epsilon}). \end{aligned}$$

Insgesamt folgt, dass für alle hinreichend kleinen Werte von $\epsilon > 0$

$$\left| \prod_n E_p\left(\frac{z}{a_n}\right) \right| \leq C \cdot e^{|z|^{\rho_1 + 2\epsilon}}, \quad z \notin \{a_1, a_2, \dots\},$$

mit einer gewissen Konstanten $C > 0$. Für $z \in \{a_1, a_2, \dots\}$ ist $\prod_n E_p\left(\frac{z}{a_n}\right) = 0$, und diese Abschätzung daher trivialerweise erfüllt. Wir sehen, dass das Produkt $\prod_n E_p\left(\frac{z}{a_n}\right)$ eine ganze Funktion von endlicher Ordnung ist, und dass

$$\rho\left(\prod_n E_p\left(\frac{z}{a_n}\right)\right) \leq \rho_1. \quad (7.4.6)$$

Schritt 3; Die Gleichheit (7.4.2): Mit Beispiel 7.3.2 und Lemma 7.3.3 erhalten wir aus (7.4.6) sofort

$$\rho(f) \leq \max\{\text{grad } Q, \rho_1((a_n)_n)\}.$$

Wir wissen aus Proposition 7.3.7, dass $\rho_1((a_n)_n) = \rho_1(f) \leq \rho(f)$. Im Fall $\text{grad } Q \leq \rho_1((a_n)_n)$ folgt bereits dass die Gleichheit (7.4.2) gilt. Sei $\text{grad } Q > \rho_1((a_n)_n)$. Dann ist wegen (7.4.6), mit $q := \text{grad } Q$,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log M(r, \exp Q)}{r^q} \in (0, \infty), \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log M(r, z^m \prod_n E_p\left(\frac{z}{a_n}\right))}{r^q} = 0,$$

also

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log M(r, f)}{r^q} = \lim_{r \rightarrow \infty} \left[\frac{\log M(r, \exp Q)}{r^q} + \frac{\log M(r, z^m \prod_n E_p\left(\frac{z}{a_n}\right))}{r^q} \right] \in (0, \infty).$$

Wir schliessen, dass $\rho(f) = q$. □

Beweis (von Satz 7.4.2). Sei eine ganze Funktion f von endlicher Ordnung gegeben.

Schritt 1: Wir betrachten als erstes den Fall, dass f keine Nullstellen hat. Dann existiert ein auf ganz \mathbb{C} analytischer Logarithmus von f , d.h. eine Funktion $Q \in H(\mathbb{C})$ mit $f = \exp Q$. Nun gilt

$$\log |f(z)| = \text{Re } Q(z).$$

Für $\epsilon > 0$, existiert $R_0 > 0$ mit

$$\max_{|z|=r} \text{Re } Q(z) = \log M(r, f) \leq r^{\rho(f) + \epsilon}, \quad r \geq R_0.$$

Wendet man die Ungleichung von Caratheodory an mit $R := 2r$, so folgt für $r \geq R_0$

$$\begin{aligned} |Q(z)| &\leq |Q(0)| + 2 \left(\max_{|z|=2r} \operatorname{Re} Q(z) - \operatorname{Re} Q(0) \right) \leq |Q(0)| - 2 \operatorname{Re} Q(0) + 2(2r)^{\rho(f)+\epsilon} = \\ &= r^{\rho(f)+\epsilon} \left(2^{\rho(f)+\epsilon+1} + \frac{|Q(0)| - 2 \operatorname{Re} Q(0)}{r^{\rho(f)+\epsilon}} \right), \quad |z| = r. \end{aligned}$$

Nach Korollar 3.1.2 ist Q ein Polynom vom Grad $\operatorname{grad} Q \leq \rho(f) + \epsilon$. Da ϵ beliebig war, folgt $\operatorname{grad} Q \leq \rho(f)$. Wir haben eine Darstellung der gewünschten Form gefunden.

Schritt 1: Sei nun erlaubt, dass f Nullstellen besitzt, und bezeichne mit $(a_n)_n$ die (endliche oder unendliche) Folge der von Null verschiedenen Nullstellen von f , aufgezählt gemäß ihrer Vielfachheit und nach aufsteigenden Beträgen angeordnet. Nach Proposition 7.3.7 gilt

$$p(f) \leq \rho_1(f) \leq \rho(f).$$

Wie wir in Satz 7.4.1 gezeigt haben, ist

$$P(z) := z^{\vartheta_f(0)} \prod_n E_{p(f)}\left(\frac{z}{a_n}\right)$$

eine ganze Funktion mit Ordnung $\rho_1(f)$. Setze

$$g(z) := f(z) \cdot P(z)^{-1},$$

dann ist $g \in H(\mathbb{C})^*$.

Sei $\epsilon > 0$. Wegen Korollar 7.2.7 und $\rho_1(f) \leq \rho(f)$ haben wir

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{T_\infty(r, f)}{r^{\rho(f)+\epsilon}} < \infty, \quad \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{T_\infty(r, P)}{r^{\rho(f)+\epsilon}} < \infty.$$

Nach dem 1st Fundamental Theorem, vgl. Bemerkung 7.2.5, gilt daher

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{T_\infty(r, \frac{1}{P})}{r^{\rho(f)+\epsilon}} = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{T_0(r, P)}{r^{\rho(f)+\epsilon}} < \infty.$$

Insgesamt folgt $\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{T_\infty(r, g)}{r^{\rho(f)+\epsilon}} < \infty$, und damit, wieder nach Korollar 7.2.7,

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log M(r, g)}{r^{\rho(f)+\epsilon}} < \infty.$$

Wir schliessen, dass die Funktion g von endlicher Ordnung ist, und dass $\rho(g) \leq \rho(f)$ gilt. Nach dem ersten Beweisteil, lässt sich g in der Form $\exp Q$ mit einem Polynom Q vom Grad höchstens $\rho(f)$ schreiben. \square

7.5 Analytische Fouriertransformationen

Sei $a > 0$ und $f \in L^2(-a, a)$. Dann ist die Fouriertransformierte von f für jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ durch das Integral

$$F(z) := \int_{-a}^a f(t) e^{-itz} dt$$

wohldefiniert.

7.5.1 Lemma. Sei $f \in L^2(-a, a)$, und bezeichne $F(z)$ die Fouriertransformierte von f . Dann ist F eine ganze Funktion, erfüllt $|F(z)| \leq Ce^{a|z|}$, $z \in \mathbb{C}$, mit einer gewissen Konstanten $C > 0$, und $F|_{\mathbb{R}} \in L^2(\mathbb{R})$.

Beweis. Für jedes $R > 0$ gilt

$$|f(t)e^{-itz}| \leq |f(t)|e^{aR}, \quad |z| \leq R, \quad t \in (-a, a).$$

Daher ist F auf jeder Kreisscheibe $U_R(0)$ analytisch (Fubini und Morera). Weiters gilt

$$|F(z)| \leq \int_{-a}^a |f(t)|e^{a|z|} dt \leq \int_{-a}^a |f(t)| dt \cdot e^{a|z|}, \quad z \in \mathbb{C},$$

und, wegen der Isometrie der Fouriertransformation,

$$\int_{\mathbb{R}} |F(t)|^2 dt = 2\pi \int_{-a}^a |f(t)|^2 dt < \infty.$$

□

Es ist eine interessante Tatsache, dass die Umkehrung dieses Lemmas gilt.

7.5.2 Satz (von Paley-Wiener/I). Sei F eine ganze Funktion, sodass mit einer gewissen Konstanten $C > 0$

$$|F(z)| \leq Ce^{a|z|}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad \int_{\mathbb{R}} |F(t)|^2 dt < \infty.$$

Dann existiert eine Funktion $f \in L^2(-a, a)$ mit

$$F(z) = \int_{-a}^a f(t)e^{-itz} dt, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Beweis. Unser Ziel ist es eine Funktion Φ zu konstruieren, die auf $\mathbb{C} \setminus [-ia, ia]$ analytisch ist, und mit deren Hilfe man die Fouriertransformierte von F berechnen kann.

Schritt 1; Vier Funktionen: Dazu betrachte die vier Funktionen

$$\begin{aligned} \Phi_r(z) &:= \int_0^\infty F(x)e^{-xz} dx, \quad \operatorname{Re} z > 0 \\ \Phi_l(z) &:= -\int_0^\infty F(-x)e^{xz} dx, \quad \operatorname{Re} z < 0 \\ \Phi_+(z) &:= -i \int_0^\infty F(-ix)e^{izx} dx, \quad \operatorname{Im} z > a \\ \Phi_-(z) &:= i \int_0^\infty F(ix)e^{-izx} dx, \quad \operatorname{Im} z < -a \end{aligned}$$

Liegt ein Punkt z in der Halbebene $\mathbb{C}_{r,\varepsilon} := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$, so gilt $\operatorname{Re}(-xz) = -x \operatorname{Re} z \leq -x\varepsilon$, $x \geq 0$. Damit erhalten wir

$$|F(x)e^{xz}| \leq |F(x)| \cdot e^{-x\varepsilon}, \quad z \in \mathbb{C}_{r,\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0.$$

Da $F|_{[0,\infty)} \in L^2([0,\infty))$ ist, ist die Funktion auf der rechten Seite in $L^1([0,\infty))$. Wir schliessen, dass die Funktion Φ_r in der Halbebene $\mathbb{C}_r := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z >$

$0\}$ wohldefiniert und analytisch ist. Genauso sieht man ein, dass Φ_- in der Halbebene $\mathbb{C}_l := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0\}$ wohldefiniert und analytisch ist.

Liegt ein Punkt z in der Halbebene $H_{+, \varepsilon} := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \geq a + \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$, so gilt $\operatorname{Re}(izx) = -x \operatorname{Im} z \leq -x(a + \varepsilon)$, $x \geq 0$. Damit erhalten wir

$$|F(-ix)e^{izx}| \leq Ce^{ax} \cdot e^{-x(a+\varepsilon)} = Ce^{-\varepsilon x}, \quad z \in H_{+, \varepsilon}, \quad \varepsilon > 0.$$

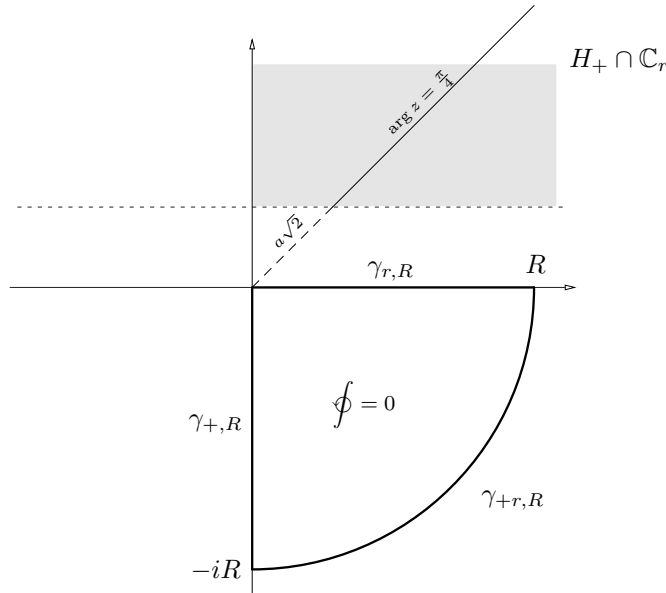
Also ist die Funktion Φ_+ wohldefiniert und analytisch in der Halbebene $H_+ := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > a\}$. Für die Funktion Φ_- geht man analog vor, und erhält dass Φ_- wohldefiniert und analytisch in der Halbebene $H_- := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z < a\}$ ist.

Schritt 2; Der Cauchy'sche Integralsatz: Für $R > 0$ seien $\gamma_{r,R}$, $\gamma_{+,R}$, und $\gamma_{r+,R}$ die Wege

$$\begin{aligned} \gamma_{r,R}(t) &:= t, & 0 \leq t \leq R \\ \gamma_{+,R}(t) &:= -it, & 0 \leq t \leq R \\ \gamma_{r+,R}(t) &:= Re^{i\varphi}, & -\frac{\pi}{2} \leq t \leq 0 \end{aligned}$$

Diese Wege beranden ein geschlossenes Torteneck im vierten Quadranten. Nach dem Cauchy'schen Integralsatz gilt

$$\int_{\gamma_{+,R}} F(\zeta)e^{-\zeta z} d\zeta + \int_{\gamma_{r+,R}} F(\zeta)e^{-\zeta z} d\zeta = \int_{\gamma_{r,R}} F(\zeta)e^{-\zeta z} d\zeta. \quad (7.5.1)$$



Wir lassen $R \rightarrow \infty$ streben. Es ist

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_{r,R}} F(\zeta)e^{-\zeta z} d\zeta = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R F(x)e^{-xz} dx = \Phi_r(z), \quad z \in \mathbb{C}_r,$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_{+,R}} F(\zeta) e^{-\zeta z} d\zeta = \lim_{R \rightarrow \infty} (-i) \int_0^R F(-ix) e^{ixz} dx = \Phi_+(z), \quad z \in H_+.$$

Schließlich schätzen wir das Integral längs des Kreisbogens $\gamma_{+,R}$ ab, wenn z auf dem Strahl $\arg z = \frac{\pi}{4}$ liegt. Sei $z = re^{i\frac{\pi}{4}}$. Dann gilt

$$\operatorname{Re}(-Re^{i\varphi} re^{i\frac{\pi}{4}}) = -Rr \cos(\varphi + \frac{\pi}{4}) \leq -Rr \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq 0,$$

und damit

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_R} F(\zeta) e^{-\zeta z} d\zeta \right| &= \left| \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 F(Re^{i\varphi} \exp(-Re^{i\varphi} re^{i\frac{\pi}{4}})) iRe^{i\varphi} d\varphi \right| \leq \\ &\leq \frac{\pi}{2} \cdot e^{aR} \cdot e^{-Rr \frac{1}{\sqrt{2}}} \cdot R = \frac{\pi}{2} R \cdot e^{R(a-r \frac{1}{\sqrt{2}})}. \end{aligned}$$

Wir sehen, dass für $r > a\sqrt{2}$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} F(\zeta) e^{-\zeta z} d\zeta = 0.$$

Die Beziehung (7.5.1) ergibt nun

$$\Phi_r(z) = \Phi_+(z), \quad z \in \mathbb{C}_r \cap H_+, \quad \arg z = \frac{\pi}{4}.$$

Nach dem Identitätssatz folgt daraus bereits

$$\Phi_r|_{\mathbb{C}_r \cap H_+} = \Phi_+|_{\mathbb{C}_r \cap H_+}.$$

Mit der gleichen Argumentation erhalten wir

$$\Phi_r|_{\mathbb{C}_r \cap H_-} = \Phi_-|_{\mathbb{C}_r \cap H_-}, \quad \Phi_l|_{\mathbb{C}_l \cap H_+} = \Phi_+|_{\mathbb{C}_l \cap H_+}, \quad \Phi_l|_{\mathbb{C}_l \cap H_-} = \Phi_-|_{\mathbb{C}_l \cap H_-}.$$

Aufgrund dieser Übereinstimmungen ist durch die Vorschrift

$$\Phi(z) := \begin{cases} \Phi_r(z), & z \in \mathbb{C}_r \\ \Phi_l(z), & z \in \mathbb{C}_l \\ \Phi_+(z), & z \in \mathbb{H}_+ \\ \Phi_-(z), & z \in \mathbb{H}_- \end{cases}$$

eine Funktion Φ wohldefiniert, und diese ist analytisch in $\mathbb{C} \setminus [-ia, ia]$.

Schritt 3; Die Fouriertransformierte: Für $\varepsilon > 0$ setze $F_\varepsilon(x) := F(x)e^{-\varepsilon|x|}$, $x \in \mathbb{R}$. Dann ist $F_\varepsilon \in L^1(\mathbb{R})$ und die Fouriertransformierte von F berechnet sich als

$$\begin{aligned} \widehat{F_\varepsilon}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} F_\varepsilon(x) e^{-itx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{-\varepsilon|x|} e^{-itx} dx = \\ &= \int_0^{\infty} F(x) e^{-x(\varepsilon+it)} dx + \int_{-\infty}^0 F(x) e^{x(\varepsilon-it)} dx = \Phi_r(\varepsilon+it) - \Phi_l(-\varepsilon+it) = \\ &= \Phi(\varepsilon+it) - \Phi(-\varepsilon+it) \end{aligned}$$

Wir lassen nun $\varepsilon \rightarrow 0$ streben. Nach dem Satz von der beschränkten Konvergenz ist

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|F_\varepsilon - F\|_2 = 0,$$

und daher auch $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\widehat{F_\varepsilon} - \widehat{F}\|_2 = 0$. Andererseits gilt wegen obiger Rechnung

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \widehat{F_\varepsilon}(t) = 0, \quad |t| > a.$$

Wir schliessen, dass $\widehat{F}(t) = 0$, $|t| > a$ f.ü. In anderen Worten $\widehat{F} \in L^2(-a, a)$. Setzt man $f(t) := \frac{1}{2\pi} \widehat{F}(-t)$, so ist $f \in L^2(-a, a)$ und nach der Umkehrformel für die Fouriertransformierte gilt

$$F(x) = \hat{f}(x), \quad x \in \mathbb{R} \text{ f.ü.}$$

Nun sind F und \hat{f} beides ganze Funktionen, und es folgt dass bereits $F(z) = \hat{f}(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$. \square

Hat man eine Funktion $f \in L^2(0, \infty)$, so ist die Fouriertransformierte von f keine ganze Funktion mehr. Aber es ist (wir wechseln hier aus technischen Gründen von „ z “ zu „ $-z$ “) das Integral

$$F(z) := \int_0^\infty f(t) e^{itz} dt$$

zumindest noch auf der oberen Halbebene $\mathbb{C}^+ := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ konvergent.

7.5.3 Lemma. Sei $f \in L^2(0, \infty)$, und bezeichne $F(z)$ die Funktion $F(z) := \int_0^\infty f(t) e^{itz} dt$. Dann ist $F \in H(\mathbb{C}^+)$, und erfüllt

$$\sup_{y>0} \int_{-\infty}^\infty |F(x+iy)|^2 dx < \infty.$$

Beweis. Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt

$$\operatorname{Re}(itz) = -t \operatorname{Im} z \leq -t\varepsilon, \quad \operatorname{Im} z \geq \varepsilon.$$

Daher ist F auf jeder Halbebene $\mathbb{C}_\varepsilon^+ := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \geq \varepsilon\}$ analytisch (Fubini und Morera). Es ist für $y > 0$

$$F(x+iy) = [\widehat{f(t)e^{-ty}}](-x), \quad x \in \mathbb{R},$$

und daher

$$\int_{-\infty}^\infty |F(x+iy)|^2 dx = 2\pi \int_0^\infty |f(t)e^{-ty}|^2 dt \leq 2\pi \|f\|_2^2.$$

\square

Es ist wieder interessant, dass die Umkehrung gilt. Die Beweismethode um dies einzusehen ist ähnlich wie im vorherigen Satz.

7.5.4 Satz (von Paley-Wiener/II). Sei $F \in H(\mathbb{C}^+)$, und gelte

$$\sup_{y>0} \int_{-\infty}^\infty |F(x+iy)|^2 dx < \infty.$$

Dann existiert eine Funktion $f \in L^2(0, \infty)$, sodass

$$F(z) := \int_0^\infty f(t)e^{itz} dt, \quad z \in \mathbb{C}^+.$$

Beweis. Sei C der Wert des Supremums in der Voraussetzung. Für $y > 0$ setze

$$F_y(x) := F(x + iy), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Dann ist also $F_y \in L^2(\mathbb{R})$ und es gilt $\|F_y\|_2 \leq C$.

Schritt 1; Der Cauchy'sche Integralsatz: Für $y, y' \in \mathbb{R}$, $0 < y < y'$, und $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$, betrachte die Funktionen

$$\begin{aligned} g_{y;\alpha\beta}(t) &:= e^{ty} [\widehat{F_y \chi_{(\alpha,\beta)}}](t), \\ \Phi_{y,y';\gamma}(t) &:= \int_{[\gamma+iy, \gamma+iy']} F(\zeta) e^{-it\zeta} d\zeta. \end{aligned}$$

Dann berechnet man

$$\begin{aligned} g_{y;\alpha\beta}(t) &= e^{ty} \int_\alpha^\beta F_y(x) e^{-itx} dx = \int_\alpha^\beta F(x + iy) e^{-it(x+iy)} dx = \\ &= \int_{[\alpha+iy, \beta+iy]} F(\zeta) e^{-it\zeta} d\zeta. \end{aligned}$$

Der Cauchy'sche Integralsatz, angewendet mit dem Integranden $F(\zeta)e^{-it\zeta}$ und dem geschlossenen Weg der die Berandung des Rechtecks mit den Ecken $\alpha + iy, \beta + iy, \beta + iy', \alpha + iy'$ durchläuft, liefert

$$g_{y;\alpha,\beta}(t) = g_{y';\alpha,\beta}(t) - \Phi_{y,y';\beta}(t) + \Phi_{y,y';\alpha}(t). \quad (7.5.2)$$

Schritt 2; $\alpha \rightarrow -\infty$, $\beta \rightarrow +\infty$: Es gilt

$$\lim_{\substack{\alpha \rightarrow -\infty \\ \beta \rightarrow +\infty}} \|F_y \chi_{(\alpha,\beta)} - F_y\|_2 = 0,$$

also folgt dass auch

$$\lim_{\substack{\alpha \rightarrow -\infty \\ \beta \rightarrow +\infty}} \|\widehat{[F_y \chi_{(\alpha,\beta)}]} - \widehat{F_y}\|_2 = 0.$$

Daher kann man aus je zwei Folgen $\alpha_n \rightarrow -\infty$ und $\beta_n \rightarrow +\infty$ Teilfolgen auswählen mit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [\widehat{F_y \chi_{(\alpha_{n_k}, \beta_{n_k})}}](t) = \widehat{F_y}(t), \quad t \in \mathbb{R} \text{ f.ü.},$$

und damit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g_{y;\alpha_{n_k}, \beta_{n_k}}(t) = e^{ty} \widehat{F_y}(t), \quad t \in \mathbb{R} \text{ f.ü.}$$

Die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung zeigt

$$\begin{aligned} |\Phi_{y,y';\gamma}(t)|^2 &= \left| \int_{[\gamma+iy, \gamma+iy']} F(\zeta) e^{-it\zeta} d\zeta \right|^2 = \\ &= \left| \int_y^{y'} F(\gamma + iu) e^{-it(\gamma+iu)} i du \right|^2 \leq \int_y^{y'} |F(\gamma + iu)|^2 du \cdot \int_y^{y'} e^{2tu} du \end{aligned}$$

Setze $\Lambda_{y,y';\gamma} := \int_y^{y'} |F(\gamma + iu)|^2 du$, dann gilt mit Fubini

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Lambda_{y,y';\gamma}(t) d\gamma = \int_y^{y'} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\gamma + iu)|^2 d\gamma du \leq (y' - y)C.$$

Also existieren Folgen $\alpha_n \rightarrow -\infty$ und $\beta_n \rightarrow +\infty$ sodass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Lambda_{y,y';\alpha_n}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Lambda_{y,y';\beta_n}(t) = 0.$$

Für diese Folgen gilt damit auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_{y,y';\alpha_n}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_{y,y';\beta_n}(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Lässt man nun in (7.5.2) längs geeigneter Teilfolgen α und β gegen $-\infty$ bzw. $+\infty$ streben, so erhält man

$$e^{ty} \widehat{F}_y(t) = e^{ty'} \widehat{F}_{y'}(t), \quad t \in \mathbb{R} \text{ f.ü., } 0 < y < y'.$$

Schritt 3; Berechnung der Fouriertransformierten: Setze $g(t) := e^t \widehat{F}_1(t)$. Wir wissen aus dem vorigen Schritt, dass g nicht von y abhängt: $g(t) = e^{ty} \widehat{F}_y(t)$ f.ü. Es gilt also für jedes $y > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2ty} |g(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{F}_y(t)|^2 dt = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |F_y(x)|^2 dx \leq 2\pi C.$$

Mit $y \rightarrow \infty$ erhält man nun $g(t) = 0$, $t < 0$ f.ü., und mit $y \rightarrow 0$ erhält man dann $\int_0^{\infty} |g(t)|^2 dt \leq 2\pi C$. Damit folgt auch

$$\widehat{F}_y(t) = 0, \quad t < 0 \text{ f.ü., } y > 0, \quad F_y \in L^1(\mathbb{R}), \quad y > 0.$$

Die Umkehrformel für die Fouriertransformation liefert nun ($z = x + iy$)

$$\begin{aligned} F(z) = F_y(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \widehat{F}_y(t) e^{itx} dt = \\ &= \int_0^{\infty} g(t) e^{-ty} \cdot e^{itx} dt = \int_0^{\infty} g(t) e^{itz} dt, \quad z \in \mathbb{C}^+. \end{aligned}$$

□

Literaturverzeichnis

- [A] L.AHLFORS: *Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1966.
- [ABR] S.AXLER, P.BOURDON, W.RAMEY: *Harmonic Function Theory*, Graduate texts in mathematics 137, Springer Verlag, 1992.
- [BS] H.BEHNKE, F.SOMMER: *Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen*, Grundlehren der mathematische Wissenschaften 77, Springer Verlag, 1972.
- [BG] C.BERENSTEIN, R.GAY: *Complex Variables: An Introduction*, Graduate texts in mathematics 125, Springer Verlag, 1991.
- [B] L.BIEBERBACH: *Lehrbuch der Funktionentheorie, Band 1,2*, Teubner Verlag, 1927.
- [Bo] R.BOAS: *Entire Functions*, Pure and Applied Mathematics, Academic Press 1954.
- [Bu] R.BURCKEL: *An introduction to classical complex analysis 1*, Mathematische Reihe 64, Birkhäuser Verlag, 1979.
- [C2] J.CONWAY: *Functions of One Complex Variable*, Graduate texts in mathematics 11, Springer Verlag, 1978.
- [C2] J.CONWAY: *Functions of One Complex Variable II*, Graduate texts in mathematics 159, Springer Verlag, 1995.
- [FB] E.FREITAG, R.BUSAM: *Funktionentheorie*, Springer Verlag, 1995.
- [G] T.GAMELIN: *Complex Analysis*, Undergraduate texts in mathematics, Springer Verlag, 2001.
- [H] M.HEINS: *Complex Function Theory*, Pure and Applied Mathematics 28, Academic Press, 1968.
- [J] K.JÄHNICH: *Einführung in die Funktionentheorie*, Springer Verlag, 1977.
- [L] B.LEVIN: *Nullstellenverteilung ganzer Funktionen*, Mathematische Monographien, Akademie Verlag, 1962.
- [M] A.I.MARKUSHEVICH: *The Theory of Analytic Functions*, Mir Publishers, 1983.

- [Re1] R.REMMERT: *Funktionentheorie 1*, Grundwissen Mathematik 5, Springer Verlag, 1992.
- [Re2] R.REMMERT: *Funktionentheorie 2*, Grundwissen Mathematik 6, Springer Verlag, 1992.
- [Ru] W.RUDIN: *Real and Complex Analysis*, International Edition, 3rd Edition, McGraw-Hill 1987.
- [Rü] F.RÜHS: *Funktionentheorie*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1962.
- [S] J.SCHIFF: *Normal Families*, Universitext, Springer Verlag 1993.
- [Ta] R.TASCHNER: *Funktionentheorie*, Manz Verlag, 1983.
- [Ti] E.C.TITCHMARSH: *The theory of functions*, Oxford University Press, 1939.

Index

- $C(G, X)$, 49
- $H(G)$
 - als metrischer Raum, 53
- $M(G)$, 55
 - als metrischer Raum, 56
- $\text{Aut}(G)$, 43
- $\text{Hol}(X_1, X_2)$, 79
- \mathbb{D} , 43
- \mathbb{C} , 1
- \mathbb{C}_∞ , 7
- \mathbb{S}^2 , 7
- w -Stelle, 34
- Überlagerung, 91
- Überlagerungsabbildung, 91
- π , 5

- Ableitung, 2
 - Rechenregeln, 3
- analytisch, 17, 79
- analytisch verträglich, 77
- analytische Fortsetzung, 96
 - bianalytisch äquivalente, 97
 - längs eines Weges, 95
 - maximale, 96
- Argument, 6
- Atlas, 77
- Automorphismengruppe
 - von \mathbb{C} , 46
 - von \mathbb{D} , 43
 - von einf.zusammenh., 72
- Automorphismus, 43

- Bündel der Funktionskeime, 93
- Bündelprojektion, 93
- beschränkte Variation, 8
- Betrag, 2
- Blaschke
 - Faktor, 44

- Cauchy'sche Abschätzung, 33
- Cauchy'sche Integralformel
 - globale, 24
 - Homologieversion, 24
 - lokale, 18
- Cauchy'scher Integralsatz
 - Homologieversion, 26
 - Homotopieversionen, 27
 - lokaler, 18
- Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen, 31
- chordale Metrik, 7
- Cosinus, 6

- differenzierbar (komplex), 2
- Divisor, 55
 - Nullstellen-, 55

- einfach zusammenhängend, 13
 - homolog, 15
- Eulersche Zahl, 5
- Exponentialfunktion, 5
 - Additionstheorem, 5

- First Fundamental Theorem, 106
- Fundamental Normality Test, 72
- Funktionskeim, 93
 - Bündel, 93

- ganze Funktion, 109
- Gauß'sche Zahlenebene, 2
- Gebiet, 11
- Geschlecht, 110
- gleichgradig stetig
 - an einer Stelle, 59
 - auf einer Menge, 59

- Hauptteil
 - in w , 68
 - von f in w , 68
- Hauptteilverteilung, 68
- Herglotz'sche Integraldarstellung, 104
- holomorph, 17

- homolog einfach zusammenhängend, 15
- homotop, 12
 - FEP-, 13
 - loop-, 13
 - null-, 13
- Homotopie, 12
 - FEP-, 13
 - loop-, 13
- Identitätssatz
 - Riemannsche Fläche, 81
- Imaginärteil, 2
- Integraldarstellung
 - Herglotz'sche, 104
 - Poisson'sche, 102
- isolierte Singularität, 44
 - bei ∞ , 46
 - hebbbar, 44
 - Pol, 44
 - wesentliche, 44
- Jensen Formel, 101
- kanonisches Produkt, 66
- Karte, 77
- kompakte Konvergenz, 49
- komplexe Torus, 78
- komplexe Zahlen, 1
 - Argument, 6
 - Betrag, 2
 - konjugierte, 2
- Konjugation, 1
- Konvergenzexponent, 110
- Konvergenzradius, 3
- konvex, 12
- Kurvenintegral, 9
- Laurent-Reihe, 46
- Lemma von Schwarz, 43
- lifting, 89
- Logarithmus
 - von f , 36
 - Zweig, 36
- lokal beschränkte Familie, 60
- lokal bianalytisch, 96
- lokal gleichmäßig Konvergenz, 49
- lokaler Homöomorphismus, 79
- Maximumprinzip, 40
 - Riemannsche Fläche, 81
- meromorph, 55
- Monodromiesatz, 90
 - analytische Funktionen, 95
- Nevanlinna
 - 1st Fundamental Theorem, 106
 - Charakteristik, 105
- normale Familie, 58
- normale Konvergenz, 49
- nullhomolog, 15
- nullhomotop, 13
- Ordnung, 109
- Partition, 8
 - Feinheit, 8
- Pi, 5
- Poisson
 - Integraldarstellung, 102
 - Kern, 101
- Poisson-Jensen Formel, 99
- Polarkoordinaten, 6
- Potenz, 36
- Potenzreihe, 3
 - Anschlußstelle, 3
 - Konvergenzradius, 3
- Produktsatz von Hadamard, 112
- Realteil, 2
- regulär, 17
- rektifizierbar, 8
- Residuum, 48
- Riemann-Stieltjes Integral, 8
- Riemannsche Fläche, 77
 - eines Funktionskeims, 97
 - Umkehrfunktion, 83
- Riemannsche Zwischensumme, 8
- Satz
 - Arzela-Ascoli, 59
 - Caratheodory, 103
 - Caratheodory-Landau, 75
 - Casorati-Weierstraß, 45
 - Fundamental Normality Test, 72
 - Gebietstreue, 39
 - Hadamard, 112
 - Hurwitz, 54
 - Identitätssatz, 34
 - inverse Funktion, 39
 - kleiner Picard, 75
 - Landau, 76

- Lemma von Zalcman, 73
- Liouville, 34
- Marty, 64
- Mittag-Leffler, 69
- Montel, 60
- Morera, 19
- offene Abbildung, 39
 - Riemannsche Fläche, 81
- Osgood, 62
- Paley-Wiener/I, 116
- Paley-Wiener/II, 119
- Phragmen-Lindelöf, 41
- Picard, 75
- Produktsatz von Weierstraß, 64
- Residuensatz, 48
- Riemann'scher Abbildungssatz, 71
- Riemann'scher Hebbbarkeitssatz, 45
- Schottky, 76
- vom logarithmischen Residuum, 37
- von Rouché, 40
- von Vitali, 61
- Sinus, 6
- sphärische Ableitung, 62
- Stammfunktion, 10
- stereographische Projektion, 7
- sternförmig, 11
- Sternmittelpunkt, 11
- Totalvariation, 8
- trivialisierend, 91
- Umlaufzahl, 13
- Vielfachheit, 35
- Weg, 9
 - geschlossener, 9, 11
 - in topologischem Raum, 11
 - rektifizierbarer, 9
- Weierstraßscher Elementarfaktor, 65
- zusammenhängend, 10
 - bogenweise, 11
 - einfach, 13
 - lokal bogenweise, 11
- Zweig
 - der Potenz, 36
 - des Logarithmus, 36
- Zwischenwege, 12