No :

Tanggal :

Clement Samuel Marly 220608214 MD-C

1 a $(1277)_8$

$1277 = (1 \times 8^3) + (2 \times 8^2) + (7 \times 8^1) + (7 \times 8^0)$

$8^3 8^2 8^1 8^0$

$= 512 + 128 + 56 + 7$

$= (703)_{10}$ //

b $22^{326} \bmod 102$

$326 : 2 \to 0$

$163 : 2 \to 1$

$81 : 2 \to 1$

$40 : 2 \to 0$

$20 : 2 \to 0$

$10 : 2 \to 0$

$5 : 2 \to 1$

$2 : 2 \to 0$

$1 : 2 \to 1$

$0 : 2$

$(326)_{10} = (101000110)_2$

$= 2^1 + 2^2 + 2^6 + 2^8$

$22^{326} = 22^{2^1+2^2+2^6+2^8}$

$22^{326} \bmod 102 = 22^{256} \cdot 22^{64} \cdot 22^4 \cdot 22^2 \bmod 102$

$22^2 \bmod 102 = 76$

$102 - 76 = 26$

$22^4 \bmod 102 = (-26)^2 \bmod 102 = 64$

$102 - 64 = 38$

$22^{64} \bmod 102 = (-38)^{16} \bmod 102 = 52$

$102 - 52 = 50$

$22^{128} \bmod 102 = (-50)^2 \bmod 102 = 52$

$22^{326} \bmod 102 = (52 \times 52 \times 64 \times 76) \bmod 102$

$= 13152256 \bmod 102$

$= 70$ //

c 703 dan 70

Prima : gcd (703, 70) = 1

$703 = 70 \cdot 10 + 3$

$70 = 3 \cdot 23 + 1$

$3 = \boxed{1} \cdot 3 + 0$

gcd (703, 70) = 1

∴ terbukti bahwa pasangan jawaban soal a dan b relatif prima

No :

Tanggal :

2 $x \equiv 2 \pmod 3$
$x \equiv 4 \pmod 5$
$x \equiv 3 \pmod 4$
$x \equiv 5 \pmod 7$

$m = 3.4.5.7 = 420$

$M_k = m/m_k$
$M_1 = 420/3 = 140$
$M_2 = 420/5 = 84$
$M_3 = 420/4 = 105$
$M_4 = 420/7 = 60$

y_k = invers M_k mod m_k

y_1 = invers 140 mod 3 , gcd (140, 3) = 1

$140 = 46.3 + 2$
$3 = 2.1 + 1$

$1 = 3 - 2$
$1 = 3 - (140 - 46.3)$
$1 = 47.3 - \underline{1}.140$
invers unik $= -1 + 3$
$0 \leq x \leq 3$
$= 2$

y_2 = invers 84 mod 5 , gcd (84, 5) = 1

$84 = 5.16 + 4$
$5 = 4.1 + 1$

$1 = 5 - 4.1$
$1 = 5 - (84 - 5.16)$
$1 = 17.5 - \underline{1}.84$
invers unik $= -1 + 5$
$0 \leq 0 \leq 5$
$= 4$

y_3 = invers 105 mod 4 , gcd (105, 4) = 1

$105 = 4.26 + 1$
$4 = 1.4 + 0$

$1 = \underline{1}.105 - 4.26$
invers = 1

y_4 = invers 60 mod 7 , gcd (60, 7) = 1

$60 = 7.8 + 4$
$7 = 4.1 + 3$
$4 = 3.1 + 1$

$1 = 4 - 3$
$1 = 4 - (7 - 4)$
$1 = 4.2 - 7$
$1 = (60 - 7.8)2 - 7$
$= \underline{2}.60 - 17.7$
invers = 2

No :

Tanggal :

$: a_1 . M_1 . y_1 + a_2 . M_2 . y_2 + a_3 M_3 . y_3 + a_4 . M_4 . y_4$

$= 2 . 140 . 2 + 4 . 84 . 4 + 3 . 105 . 1 + 5 . 60 . 2$

$= 560 + 1344 + 315 + 600$

$= 2819$

Hasil akhir : $2819 \bmod (420)$

$2819 \equiv 299 \bmod (420)$

$x = 299$ //

3 $a.b = 3^5 . 4^3 . 6^8 . 8^{10}$

$\gcd(a,b) = 3^2 . 4 . 6^3$

$a.b = \gcd(a,b) . \operatorname{lcm}(a,b)$

$3^5 . 4^3 . 6^8 . 8^{10} = 3^2 . 4 . 6^3 . \operatorname{lcm}(a,b)$

$3^3 . 4^2 . 6^5 . 8^{10}$ // $= \operatorname{lcm}(a,b)$

3606947894919168 // $= \operatorname{lcm}(a,b)$

4 $\underset{\text{ganjil}}{n} > 0 \rightarrow n^2 + 2 \equiv 3 \pmod 8$

Berdasarkan definisi bilangan ganjil , $n = 2k+1$, k adalah bilangan bulat positif . Asumsikan $n^2+2 \bmod 8$ akan kongruen dengan $3 \bmod 8$.

$n^2 + 2 \equiv 3 \pmod 8$

$(2k+1)^2 + 2 \equiv 3 \pmod 8$

$4k^2 + 4k + 1 + 3 \equiv 3 \pmod 8$

Berdasarkan kongruensi modular , $n^2+2 \bmod 8 = 3 + 8 . l$ dengan l bilangan bulat.

$4k^2 + 4k + 3 = 3 + 8l$

$4k^2 + 4k = 8l$

$k^2 + k = 2l$

$k^2 + k = 2l$ dibuktikan dengan membuktikan k secara ganjil da genap.

k ganjil, $k = 2m+1$ (definisi bilangan ganjil), m bilangan bulat positif.

$$(2m+1)^2 + (2m+1) = 2l$$
$$4m^2+4m+1+2m+1 = 2l$$
$$4m^2+6m+2 = 2l$$
$$2(2m^2+3m+2) = 2l \rightarrow l \text{ dapat dinyatakan dalam } k \text{ ganjil}$$

k genap, $k = 2n$ (definisi bilangan genap), n bilangan bulat genap

$$(2n)^2+(2n) = 2l$$
$$4n^2+2n = 2l$$
$$2(2n^2+n) = 2l \rightarrow l \text{ dapat dinyatakan dalam } k \text{ genap}$$

l dapat dinyatakan dalam k^2+k baik dalam ganjil maupun genap sehingga l terbukti dalam $n^2+2 = 3+8l$. Karena $n^2+2 = 3+8l$ terbukti, maka $n^2+2 \bmod 8$ kongruen dengan $3 \bmod 8$ untuk n bilangan ganjil.

5 $a|c$ dan $b|d \rightarrow ab|cd$, a,b,c,d bilangan bulat, $a \neq 0$

Berdasarkan teori pembagian, $a|c$ dan $b|d$ dapat dinyatakan dengan $c = a.k$ dan $d = b.l$, dimana k dan l bilangan bulat. $ab|cd$ dapat disubstitusi menjadi

$$c.d = c.d$$
$$c.d = a.k.b.l$$
$$c.d = a.b(l.k)$$

Berdasarkan teori pembagian, $c.d = a.b.x$, dimana $(l.k) = x$. Maka dari itu, $ab|cd$ apabila $a|c$ dan $b|d$ terbukti.

6 $20x^2 + 23x \equiv 17 \pmod{23}$

$$(20 \bmod 23)x^2 + (23 \bmod 23)x = 17 \bmod 23$$
$$(20 \bmod 23)x^2 + 0 = 17 \bmod 23$$
$$20x^2 \equiv 17 \pmod{23}$$

gcd (20,23) = 1 ✓

$20 = 23.0 + 20$ | $\bar{a}.20 \equiv 1 \pmod{23}$ (invers)
$23 = 20.1 + 3$ | $\bar{a}.20 = 23.x + 1$
$20 = 3.6 + 2$ | $15.20 = 23.13 + 1$ ✓
$3 = 2.1 + 1$ | $\bar{a} = 15$
$2 = 1.2 + 0$ | invers : 15

$\bar{a}.a.x^2 \equiv \bar{a}.b \pmod{23}$

$\underbrace{15.20}_{1}.x^2 \equiv 17.15 \pmod{23}$

$x^2 \equiv 255 \pmod{23}$ → $255 \bmod 23 = 2$

$x^2 \equiv 2 \pmod{23}$

$x^2 \equiv 25 \pmod{23}$ → 1 kelas kongruen

$x = \pm 5$

$23 - 5 = 18$

$x = 5$ atau 18 //

7 $x+5 \mid 3x+52$

Berdasarkan teori pembagian

$3x+52 = (x+5).k$, k bil bulat

$x = 32$

$3(32) + 52 = (32+5).k$

$96 + 52 = 37.k$

$148/37 = k$

$4 = k$ → terbukti

∴ Ada bilangan x sehingga $x+5 \mid 3x+52$, yaitu $x = 32$ //

No :
Tanggal :

8 Bilangan cacah : x, y, z

x relatif prima y : gcd (x,y) = 1

y relatif prima z : gcd (y,z) = 1

maka x relatif prima z atau gcd (x,z) = 1

x = 4 gcd (4,5) = 1

y = 5 gcd (5,6) = 1

z = 6

gcd (x,z) → gcd (4,6) = 2

∴ x tidak relatif prima dengan z walau x relatif prima y dan y relatif prima z.

9 Berdasarkan teori komposit, apabila x komposit, maka x ada faktor prima kurang atau sama dengan $\sqrt{x}$ yang bisa membagi x.

x = 2459

$\sqrt{2459} = 49$

prima dibawah ≤ 49 = 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47

tidak ada yang bisa membagi x, maka 2459 adalah bilangan prima.

10 a gcd (79, 1074) = 79s + 1074t → gcd (79,1074) = 1

1074 = 79.13 + 47 | 1 = 15 − 7.2 | 1 = 37.1047 − 503.79

79 = 47.1 + 32 | 1 = 15 − 7 (32 − 15.2) | 1 = 79 (−503) + 1047 (37)

47 = 32.1 + 15 | 1 = 15.15 − 7.32 | s = −503, t = 37

32 = 15.2 + 2 | 1 = 15 (47 − 32) − 7.32

15 = 7.2 + 1 | 1 = 15.47 − 22.32

2 = 1.2 + 0 | 1 = 15.47 − 22 (79 − 47)

1 = 37.47 − 22.79

1 = 37 (1047 − 79.13) − 22.79

No :

Tanggal :

b gcd (79,1074) = 1 , maka 79 mod 1074 memiliki invers.

invers unik : $0 \le x \le 1074$.

Berdasarkan soal a, gcd (79,1074) = $\underline{-503}$. 79 + 1074.37

maka invers dari 79 mod 1074 = -503

invers unik = -503 + 1074

invers unik dari 79 mod 1074 = 571 //