UBB
FMI

Test 2 Ecuații cu derivate parțiale

1) Rezolvați problema de valori și funcții proprii pentru P.D. pt. $(-u'')$ pe intervalul $(0,\pi)$.

2) Fie $E: C_0^1[-2,2] \to \mathbb{R}$, $E(u) = \int_{-2}^{2} \left(\frac{1}{2} u'^2(x) - u(x)\sin x \right) dx$.

a) Calculați $E'(u;v) = \lim_{t \to 0} \frac{E(u+tv) - E(u)}{t}$ pt. $u, v \in C_0^1[-2,2]$

b) Scrieți problema Dirichlet (P.D.) a cărei funcțională energie este E. Arătați că, dacă u este soluția clasică a acestei P.D. atunci $E'(u;v) = 0$ $\forall v \in C_0^1[-2,2]$.

c) Aflați soluția P.D. de la b).

Rezolvare Test 2

1) Folosim teorema de la curs care ne asigură că valorile proprii pt. op. $(-\Delta)$ pe o mulțime deschisă și mărginită sunt pozitive.

Deci, căutăm $\lambda > 0$ a.î. P.D. $\begin{cases} -u'' = \lambda u, & \text{în } (0,\pi) \\ u(0) = u(\pi) = 0 \end{cases}$

are cel puțin o soluție nenulă ϕ.

$-u'' = \lambda u \iff u'' + \lambda u = 0$

$r^2 + \lambda = 0 \iff r^2 = -\lambda < 0 \iff r_{1,2} = \pm i\sqrt{\lambda}$

$$\left.\begin{array}{l} u = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}\, x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}\, x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \\ u(0) = c_1, \quad u(\pi) = c_1 \cos(\pi\sqrt{\lambda}) + c_2 \sin(\pi\sqrt{\lambda}) \\ u(0) = u(\pi) = 0, \quad (c_1, c_2) \neq (0,0) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$c_1 = 0$ și $\sin(\pi\sqrt{\lambda}) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$ și $\pi\sqrt{\lambda} = k\pi,\ k \in \mathbb{N}^*$

Deci $\lambda_k = k^2,\ k \geq 1$ și $\phi_k = \sin(kx)$.

2) a) $$E'(u;v) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left\{ \int_{-2}^{2} \left[\frac{1}{2}(u' + tv')^2 - (u+tv)\sin x\right] dx - \int_{-2}^{2}\left(\frac{1}{2}u'^2 - u\cdot\sin x\right)dx \right\} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left\{ \int_{-2}^{2}\left[\cancel{\frac{1}{2}u'^2} + tu'v' + \frac{t^2}{2}v'^2 - \cancel{u\sin x} - vt\sin x - \cancel{\frac{1}{2}u'^2} + \cancel{u\sin x}\right]dx\right\} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\int_{-2}^{2}\left[u'v' + \frac{t}{2}v'^2 - v\sin x\right]dx = \int_{-2}^{2}(u'v' - v\sin x)\,dx$$

b) $\begin{cases} -u'' = \sin x, & x \in (-2,2) \\ u(-2) = u(2) = 0 \end{cases}$

u este sol. clasică $\Rightarrow u \in C^2[-2,2] \cap C_0^1[-2,2]$; $-u'' = \sin x$

Fie $v \in C_0^1[-2,2] \Rightarrow v(-2) = v(2) = 0$

$$-u'' = \sin x \;\Big|\cdot v, \int_{-2}^{2} \Rightarrow -\int_{-2}^{2} u'' v\, dx = \int_{-2}^{2} v \sin x\, dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{-u'v\Big|_{-2}^{2}}_{=0} + \int_{-2}^{2} u'v'\, dx = \int_{-2}^{2} v \sin x\, dx \Rightarrow \int_{-2}^{2} (u'v' - v\sin x)\, dx = 0$$

$\Rightarrow E'(u; v) = 0$.

c) $-u'' = \sin x \Rightarrow -u' = -\cos x + c_1 \Rightarrow u' = \cos x - c_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow u = \sin x - c_1 x + c_2$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} u(-2) = -\sin 2 + 2c_1 + c_2, \quad u(2) = \sin 2 - 2c_1 + c_2 \\ u(-2) = u(2) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\sin 2 + 2c_1 + c_2 = 0 \\ \sin 2 - 2c_1 + c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = 0 \\ c_1 = \frac{\sin 2}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(x) = \sin x - \frac{\sin 2}{2} x, \quad \forall x \in [-2,2].$$