UBB

FMI

Test 2   Ecuații cu derivate parțiale

1. Să se determine valorile extreme și punctele în care se ating ale soluției problemei Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \rho < 3 \\ u(3,\varphi) = \sin 2\varphi \cos\varphi + \sin\varphi, & \varphi \in [0, 2\pi) \end{cases}$$

2. Fie $E : C_0^1[0,5] \to \mathbb{R}$, $E(u) = \int_0^5 \left(\frac{1}{2} u'^2 - x u \right) dx$.

Justificați că E are un punct de minim strict global și găsiți expresia acestuia.

Rezolvare Test 2

1. Observăm că soluția acestei P.D. nu este o funcție constantă, și este o funcție armonică în $B = B_3(0) \subset \mathbb{R}^2$. Principiul de maxim pentru funcții armonice asigură că își atinge extremele doar pe $\partial B_3(0)$. Prin urmare, problema se reduce la a determina valorile extreme și punctele în care se ating ale funcției $g : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}$, $g(\varphi) = \sin 2\varphi \cos\varphi + \sin\varphi$.

Avem $g(\varphi) = 2\sin\varphi\cos^2\varphi + \sin\varphi = 2\sin\varphi(1-\sin^2\varphi) + \sin\varphi =$

$$= -2\sin^3\varphi + 3\sin\varphi$$

Fie $h(t) = -2t^3 + 3t$. Obs. că $g(\varphi) = h(\sin\varphi)$, $\forall \varphi \in [0, 2\pi)$

Ne propunem să găsim valorile extreme ale lui $h : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ și punctele în care se ating.

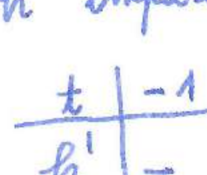
Avem $h'(t) = -6t^2 + 3 = -6\left(t^2 - \frac{1}{2}\right) = -6\left(t - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(t + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $h(0) = 0$,

$h(+1) = 1$, $h\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

h impară.

t	-1		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		1
h'	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
h	-1	$\searrow$	$-\sqrt{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	1

$$\Rightarrow \begin{cases} \max\limits_{[-1,1]} h = \sqrt{2} = h\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ \min\limits_{[-1,1]} h = -\sqrt{2} = h\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \end{cases}$$



$\varphi \in [0, 2\pi)$, $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \iff \varphi \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}$

$\varphi \in [0, 2\pi)$, $\sin\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}} \iff \varphi \in \left\{\frac{7\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \max g = \sqrt{2} = g\left(\frac{\pi}{4}\right) = g\left(\frac{3\pi}{4}\right) \\ \min g = -\sqrt{2} = g\left(\frac{7\pi}{4}\right) = g\left(\frac{5\pi}{4}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \max\limits_{\overline{B}} u = \sqrt{2} = u\left(3, \frac{\pi}{4}\right) = u\left(3, \frac{3\pi}{4}\right) \\ \min\limits_{\overline{B}} u = -\sqrt{2} = u\left(3, \frac{7\pi}{4}\right) = u\left(3, \frac{5\pi}{4}\right) \end{cases}$$

2. $E: C_0^1[0,5] \to \mathbb{R}$, $E(u) = \int_0^5 \left(\frac{1}{2}u'^2 - xu\right)dx$.

Obs. că E este funcționala energie asociată P.D

$$(*)\begin{cases} -u'' = x, & x \in (0,5) \\ u(0) = u(5) = 0 \end{cases}.$$

Principiul lui Dirichlet ne asigură că E are un pct. de minim strict global, iar acesta este ~~soluon~~ soluția P.D. (*), pe care o vom găsi în cele ce urmează.

$$-u'' = x \iff -u' = \frac{x^2}{2} + c_1 \iff -u = \frac{x^3}{6} + c_1 x + c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$\iff u = -\frac{x^3}{6} - c_1 x - c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

$$\left.\begin{array}{l} u(0) = -c_2, \quad u(5) = -\frac{5^3}{6} - 5c_1 - c_2 \\ u(0) = u(5) = 0 \end{array}\right\} \iff \begin{cases} c_2 = 0 \\ -\frac{5^3}{6} - 5c_1 = 0 \end{cases}$$

$$\iff c_1 = -\frac{25}{6}, \quad c_2 = 0$$

Deci $u(x) = -\frac{x^3}{6} + \frac{25}{6}x, \quad x \in [0,5]$.