UBB
FMI

Test 2 Ecuații cu derivate parțiale

5p 1. Găsiți expresia funcției lui Green pentru op. Laplace pe

$$\Omega = \mathbb{R}^2 \times (0,\infty).$$

5p 2. a) Reprezentați punctul $(0,5) \in \mathbb{R}^2$ și cercul cu centrul în $(0,1) \in \mathbb{R}^2$ și raza 1. Scrieți ecuația acestui cerc.

b) Fie $u(y_1, y_2) = y_1^2 - y_2^2 + \ln(y_1^2 + y_2^2 - 10y_2 + 25)$

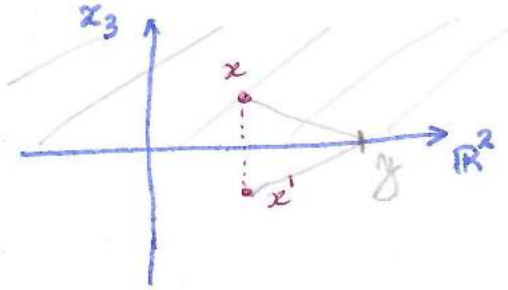
și $\Gamma = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 - 2x_2 = 0\}$.

Folosind teorema de medie pentru funcții armonice calculați:

$$\int_\Gamma u(y)\, d\sigma_y .$$

Rezolvare Test 2

1. $\Omega = \mathbb{R}^2 \times (0, \infty)$



Avem $\bar{\Omega} = \mathbb{R}^2 \times [0, \infty)$, $\partial\Omega = \{x_3 = 0\}$

Funcția lui Green

$G : \Omega \times \bar{\Omega} \setminus \{(x,x) : x \in \Omega\} \to \mathbb{R}$

$G(x,y) = \phi(x,y) - N(x,y)$

unde ϕ satisface urm. condiții pentru $\forall\, x \in \Omega$

$$\begin{cases} \phi(x,\cdot) \in C^2(\bar{\Omega}) \\ \Delta_y \phi(x,y) = 0, \quad \forall\, y \in \Omega \\ \phi(x,y) = N(x-y), \quad \forall\, y \in \partial\Omega \end{cases}$$

iar $N(x-y) = -\dfrac{1}{\omega_3 |x-y|}$, unde $\omega_3 = 4\pi$ (aria sferei unitate).

pt. $x \in \Omega$, $x = (x_1, x_2, x_3)$ cu $x_3 > 0$ definim $x' = (x_1, x_2, -x_3)$

și observăm că $x' \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$.

Justificăm faptul că $\phi(x,y) = N(x'-y)$, $\forall x \in \Omega, \forall y \in \bar{\Omega}$.

Din proprietățile lui N, care este sol. fundam. a op. Δ în $\mathbb{R}^3$, deducem imediat că primele două cond. din def. lui ϕ au loc.

Pentru a arăta că are loc condiția pe $\partial\Omega$ e suficient să arătăm că $|x'-y| = |x-y|$ $\forall\, x \in \Omega$ și $y \in \partial\Omega$.

Într-adevăr, $y = (y_1, y_2, 0) \Rightarrow |x-y| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + x_3^2} = |x'-y|$.

$\cancel{|x'-y|}$

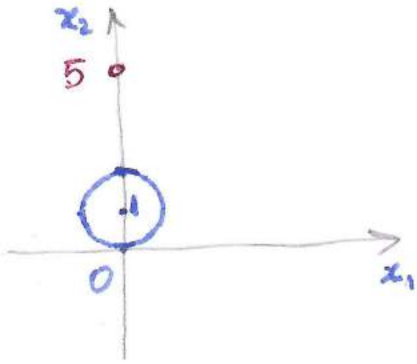
$x - y = (x_1 - y_1, x_2 - y_3, x_3)$

$x' - y = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, -x_3)$

Prin urmare, $G(x,y) = -\dfrac{1}{\omega_3|x'-y|} + \dfrac{1}{\omega_3|x-y|} =$

$$= \frac{1}{4\pi}\left[-\frac{1}{\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3+y_3)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2}}\right]$$

2. a)



Notăm $x^0=(0,5)\in\mathbb{R}^2$

Notăm $B=B_1(0,1)\subset\mathbb{R}^2$

∂B este cercul cu centrul în $(0,1)$ și raza 1

∂B are ecuația

$$x_1^2+(x_2-1)^2=1^2 \iff$$

$$\iff x_1^2+x_2^2-2x_2=0.$$

b) Notăm $u_1(y_1,y_2)=y_1^2-y_2^2$ și $u_2(y)=\ln|y-x^0|^2 =$
$= 2\ln|y-x_0|$

Obs. că $u=u_1+u_2$.

Avem $\Delta u_1 = \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial y_1^2}+\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial y_2^2} = 2-2=0$ și u_1 e polinom.

Atunci u_1 e armonică în $\mathbb{R}^2$. ~~$u_2(y)=\alpha\cdot N(x_0$~~

~~Avem că u_2 este un multi ∃ $\alpha\in\mathbb{R}$ a.î.~~ unde N este sol.

Avem că $\exists\,\alpha\in\mathbb{R}$ a.î. $u_2(y)=\alpha\cdot N(x_0^0-y)$ și u_2 e armonică în $\mathbb{R}^2\setminus\{x^0\}$

fundam. a op Δ în $\mathbb{R}^2$. Atunci u_2 e armonică în $\mathbb{R}^2\setminus\{x^0\}$. Deoarece $\overline{B}\subset\mathbb{R}^2\setminus\{x^0\}$

Prin urmare u e armonică în $\mathbb{R}^2\setminus\{x^0\}$.

avem, ~~și~~ aplicând teorema de medie pt. funcții armonice,

$$u(0,1)=\frac{1}{\omega_2\cdot r^{2-1}}\int_{\partial B} u(y)\,d\sigma_y.$$

Avem: $u(0,1)=-1+\ln 16$, $\omega_2=2\pi$, $r=1$, $\partial B=\Gamma$ $\Big\}\Rightarrow \displaystyle\int_\Gamma u(y)\,d\sigma_y = 2\pi(\ln 16-1)$.