

Aula 1 - Funções de Green - Prova 2 (08/12/20)

Olá! Eu sou

a) As autofunções $u_n(x)$ para o problema homogêneo são,

$$\frac{d^2 u_n(x)}{dx^2} + \frac{n^2 \pi^2}{L^2} u_n(x) = 0$$

Por as condições de contorno $u(0) = u(L) = 0$ escrevemos,

$$u_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sqrt{\frac{2}{L}}$$

Com autovalores iguais a $\frac{n^2 \pi^2}{L^2}$. Assim,

podemos construir a função de Green para esse problema a partir da série bilinear

$$G(x, x') = \sum_n \underbrace{\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x'}{L}\right)}_{\left(-k^2 + \frac{n^2 \pi^2}{L^2}\right)}$$

b) A função de Green para condutores periódicos de contorno, via método das autofunções, parte da equação homogênea

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \lambda u = 0$$

Assumindo a solução da $G(x, x')$ em série de potências escrevemos

$$G(x, x') = \sum_n C_n(x') e^{inx}$$

Aplicando as condições de contorno

$$1) u(-L) = u(L)$$

$$2) u'(-L) = u'(L)$$

$$\frac{d^2G}{dx^2} + k^2 G = \delta(x - x')$$

$$G(x, x') \rightarrow \sum_n C_n(x') e^{inx}$$

$$\delta(x - x') = \sum_n e^{inx} e^{-inx}$$

$$\frac{d^2 G}{dx^2} + k^2 G = \delta(x - x')$$

$$-k_n^2 C_n(x') e^{ik_n x} + k^2 C_n(x') e^{ik_n x} = e^{ik_n |x-x'|}$$

$$C_n(x') e^{ik_n x} (k^2 - k_n^2) = e^{ik_n (x+x')}$$

$$C_n = \frac{e^{ik_n x}}{k^2 - k_n^2}$$

$$G(x, x') = \frac{e^{ik_n x'} e^{ik_n x}}{k^2 - k_n^2}$$

d) Sabemos que as autofunções para a equação,

$$r^2 f'' + 2r f' + [k^2 r^2 - m(m+1)]f = 0$$

com $\lim_{r \rightarrow 0} |g(r, r')| < \infty$ e $g(a, r') = 0$. Para obter

a solução em série consideremos a função de Green,
* Série Fourier-Bessel

$$G(r, r') = \sum_{n=1}^{\infty} C(r) J_m(k_{nm} r) \quad (1)$$

Com $J_m(k_{nm} a) = 0$. Satisfazendo as condições de contorno. Substituindo (1) em

$$r^2 G'' + 2r G' + (k^2 r^2 - m(m+1)) G = 0$$

* Propriedade de

$$(k^2 - k_{nm}^2) C(r) = -\frac{2 k_{nm} J_m(k_{nm} r')}{a^2 [J_{m+1}(k_{nm} a)]^2}$$

$$= \frac{-2 J_m(k_{nm} r')}{a^2 [J_m'(k_{nm} a)]^2}$$

Assim, $G(r, r')$ é

$$G(r, r') = \frac{2}{\alpha^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_m(k_{nm} r') J_m(k_{nm} r)}{(k_{nm}^2 - k^2) [J_m(k_{nm} \alpha)]^2}$$

(12) A função de Green utilizando
as transformadas de Fourier,

$$\mathcal{F}[\nabla^2 G - k^2 G] = \mathcal{F}[\delta(r - r')]$$

$$(-k'^2 - k^2) G_F = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} e^{ik'r'}$$

$$G_F = \frac{-1}{(2\pi)^3} \frac{e^{ik'r}}{(k'^2 + k^2)}$$

Onde G_F é a transformada de Fourier
da função de Green do sistema. Assim
a função de Green é dada por

$$\mathcal{F}^{-1}[G_F] = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik(r-r')}}{(\sqrt{2\pi})^3 [(k'^2 + k^2)]} dk'$$

Utilizando contornos que circulam os polos do denominador, utilizando a residuística de ML e o teorema dos resíduos obtemos a função de Green como

$$G(x) = \frac{1}{4\pi r} e^{-kr}$$

* Desenvolvimento do integral da função de PDF

3) A equação que buscamos a função de Green como solução é

$$r^2 \frac{d^2 G}{dr^2} + 2r \frac{dG}{dr} + [k^2 r^2 - l(l+1)]G = \delta(r-r')$$

No intervalo $0 < r < a$ e sujeito às condições de contorno $G(r, r')$ finita na origem e $G(a, r') = 0$.

As soluções gerais desse equação são Bessel espáreos e Neumann estéreicos.

$$\{ J_l(kr), N_l(kr) \}$$

Como existe a necessidade de que $G(r, r')$
seja finita utilizaremos $j_\ell(kr)$ no intervalo
 $0 < r < r'$ e a combinação linear das duas
no intervalo $r' < r < a$; ou seja,

$$G(r, r') = \begin{cases} a(r') j_\ell(kr) & 0 < r < r' \\ b(r') j_\ell(kr) + c(r') n_\ell(kr) & r' < r < a \end{cases}$$

Na segunda parte da solução aplicamos
a condição de contorno, $G(a, r') = 0$.

$$0 = b(r') j_\ell(ka) + c(r') n_\ell(ka)$$

Com isso podemos escrever a $G(r, r')$
de forma mais compacta no intervalo
 $a \leq r \leq r'$,

$$G(r, r') = A(r') [j_\ell(kr) n_\ell(ka) - n_\ell(kr) j_\ell(ka)]$$

Impõe-se a continuidade em r' para
as duas partes da solução teremos

$$a(r') j_\ell(kr') = A(r') \left[j_\ell(kr') n_\ell(ka) - n_\ell(kr') j_\ell(ka) \right] \quad (1)$$

Aleim disso, devemos levar em consideração a descontinuidade da solução,

$$\frac{dG_2}{dr} - \frac{dG_1}{dr} = \frac{1}{p(r')} \approx \frac{1}{r^2}$$

O que nos leva a,

$$k a(r') j'_\ell(kr') - k A(r') \left[j'_\ell(kr') n_\ell(ka) - n'_\ell(kr') j_\ell(ka) \right] = \frac{1}{r^2} \quad (2)$$

Multiplicando (1) por $k j'_\ell(kr')$, (2) por $j_\ell(kr')$ e subtraindo obtemos,

$$\frac{j_{\ell}(kr')}{r'^2} = -k A(r') j_\ell(ka) \left[j_\ell(kr') n'_\ell(kr') - n_\ell(kr') j'_\ell(kr') \right] \quad (3)$$

Conseguimos identificar o Wronskiano que precisamos para escrever a função de Green.

Calculando o Wronskiano,

$$w(r) = j_\ell'(kr) n_\ell(kr) - j_\ell(kr) n_\ell'(kr)$$

No regime assintótico $w(r)$ e $j_\ell(kr)$ podem ser escritas como senos e cossenos,

$$j_\ell(kr) = \underbrace{\sin(kr - \ell\pi/2)}_{kr}$$

$$n_\ell(kr) = \underbrace{\cos(kr - \ell\pi/2)}_{kr}$$

Então,

$$w(r) = \frac{1}{k^2 r^2} \left[\sin^2(kr - \ell\pi/2) + \cos^2(kr - \ell\pi/2) \right]$$

$$= \frac{1}{k^2 r^2} \quad (4)$$

Substituindo (4) em (3) encontramos A(r)

$$A(r) = -k \frac{j_\ell(kr')}{j_\ell(ka)} \quad (5)$$

e de (2) obtemos $\alpha(r')$ substituindo(s),

$$\alpha(r') = -\frac{k}{j_l(k_0)} \left[j_l(kr') n_l(ka) - j_l(k_0) n_l(kr') \right]$$

Assim, a função de Green $G(r, r')$ fica

$$G(r, r') = -k \frac{j_l(kr)}{j_l(k_0)} \left[j_l(kr') n_l(ka) - j_l(k_0) n_l(kr') \right]$$

Alternando $r \rightarrow r'$ para $r > r'$ e $r' \rightarrow r$
se $r < r'$.

5) A função de Green é a solução de
equação,

$$(\nabla^2 - k^2) G(r, \theta | r', \theta') = \frac{\delta(r-r') \delta(\theta-\theta')}{r}$$

A periodicidade em θ será representada pela
exponencial $e^{i(\theta-\theta')}$ na função de Green.

Assim, a função de Green será de forma

$$G(r, \theta | r', \theta') = \frac{-1}{2\pi} \sum e^{im(\theta - \theta')} D(r, r')$$

Esse tipo de superposição é possível já que a equação é separável. Assim como feito na questão 3 faremos uso das condições de contorno de $G(a, \theta | r', \theta')$ ser finita e $G(a, \theta | r', \theta') = 0$.

Como buscamos a solução partindo de

$$D(r, r') \rightarrow \begin{cases} a(r') I_m(kr) & 0 < r < r' \\ b(r') I_m(kr) + c(r') K_m(kr) & r' < r \leq a \end{cases}$$

* I_m e K_m são funções de Bessel modificadas de 1^ª e 2^ª ordem, respectivamente.

Aplicando $D(a, r') = 0$,

$$0 = b(r') I_m(ka) + c(r') K_m(ka)$$

Com isso escrevemos a solução para o intervalo $r' < r \leq a$ da forma

$$D(r, r') = A(r') [I_m(kr) K_m(ka) - I_m(ka) K_m(kr)]$$

Do discontinuidade, obtemos a expressão

$$\frac{I_m(kr')}{r'} = -A(r') I_m(k\alpha) \left[I_m(kr') K_m'(kr') - K_m(kr') I_m'(kr') \right]$$

O que nos faz perceber o Wronskiano entre elas. Para a função de Bessel modificada, seu wronskiano é:

$$W(r) = \frac{1}{r} \left[I_m(kr) K_m'(kr) - K_m(kr) I_m'(kr) \right]$$

O que deixa a escrever

$$A(r') < \frac{I_m(kr')}{I_m(k\alpha)}$$

Então, a função de Green para a equação de Helmholtz é:

$$G(r, \theta | r', \theta') = \frac{1}{2\pi} \sum_m e^{im(\theta - \theta')} \frac{I_m(kr')}{I_m(k\alpha)} \left[I_m(kr') K_m(kr) - I_m(kr) K_m(kr') \right]$$

13) Partindo da equação para a função de Green,

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) G = 0 \quad (1)$$

Sabendo que $\mathcal{F}\{G\} = G_F$ e utilizando a propriedade do transformado de Fourier obtemos o seguinte equação, *consegue-se resolver por transformado de Laplace também

$$i \frac{\partial G_F}{\partial t} - \kappa^2 G_F = 0$$

A solução geral é $G_F = \frac{C}{\sqrt{2\pi}} e^{ik_1 t}$. Agora apli-

cando a inversa do transformado de Fourier levando em conta que,

$$\int_0^\infty e^{i u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i\pi/4} \quad (2)$$

$$F^{-1} \left\{ e^{-ik_1 t} \right\} = \frac{i}{\sqrt{\kappa_1 t}} e^{-\frac{i x^2}{4t}}$$

Portanto,

$$G(x, t) := \int_0^\infty \frac{e^{ik^2 t}}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} dk$$

completar quadrado, isolar a exponencial em x e usar (1).

$$= \frac{i}{2\sqrt{\pi t}} e^{i\left(\frac{x^2}{4t} - \frac{\pi i}{4}\right)}$$



2)

a)

$$\frac{d}{dx} \left[x \frac{df}{dx} \right] = g$$

$$\frac{df}{dx} + x \frac{d^2 f}{dx^2} = 0 = x f'' + f'$$

$$f(x) = a \ln(x) + C$$

$f(x)$ finito em zero

$$a = 0 \quad f(x) = C$$

$$\bullet f(1) = 0$$

$$f(x) = \ln x$$

$$f(x) = \ln x + C$$

$$C \Rightarrow 0$$

$$\bullet p(x) = x$$

$$w = 0 \ln x + \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$$

$$G(x, x') = \begin{cases} \frac{(1) \ln(x')}{p(x') w(x')} & 0 < x' < x \\ \frac{\ln x (1)}{p(x') w(x')} & x' < x < 1 \end{cases}$$

$$b) \frac{d}{dx} \left((1-x^2) \frac{f}{dx} \right) = 0$$

$$-2x f' + (1-x^2) f'' - 2x f' = (1-x^2) f'' - 2x f'$$

Solução geral é

$$a \left[\ln(x+1) - \ln(1-x) \right] + b$$

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 & ; & \quad f(1) = 0 \\ \downarrow & & & \end{aligned}$$

$$u(x) = \ln(x+1) - \ln(1-x)$$

$$v(x) = 1$$

$$p(x) = 1 - x^2$$

$$w = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{1-x}$$

A constante direta é

$$G(x, x') = \begin{cases} \frac{\ln(x+1) - \ln(1-x)}{(1-x'^2) \left[\frac{1}{x'+1} - \frac{1}{1-x'} \right]} & 0 < x < x' \\ 0 & x' < x < 1 \end{cases}$$

* Resolução integral (2)

$$G(r) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik'r}}{(k'^2 - k^2)} dk'$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} 2\pi \int_0^{\infty} \frac{(k')^2}{(k'^2 + k^2)} \left[e^{irk' \cos \theta} \right] \sin(k' r) dk'$$

$$= -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} \frac{(k')^2}{(k'^2 + k^2)} \left[\frac{e^{irk' k'} - e^{-irk' k'}}{irk' k'} \right]$$

fazendo
por

$$= -\frac{1}{(2\pi)^2} \frac{2}{r} \int_0^{\infty} \frac{k'}{(k'^2 + k^2)} \sin(k'r) dk'$$

$$= \frac{i}{4\pi^2 r} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k'}{(k'^2 + k^2)} e^{ik'r} dk'$$

Os polos são $\pm ik$. Tomando o contorno da semicircunferência no sentido positivo do imaginário e utilizando o limo de Jordan.

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ir\kappa'}}{(\kappa')^2 + \kappa^2} d\kappa' = e^{ir\kappa'} \downarrow \kappa' = 2\pi i \operatorname{Res}_{\kappa' = ik} f(\kappa')$$

O resíduo é $\frac{e^{-rk}}{2}$. Então o integral I fico,

$$I = 2\pi i \frac{e^{-rk}}{2} = i\pi e^{-rk}$$

Assim G(r) será, como feito no início do questão 13,

$$G(r) = \frac{i}{(1+r^2)^{1/2}} i\pi e^{-rk} = -\frac{e^{-rk}}{(1+r^2)^{1/2}}$$