# Teoria dos Potenciais:

A equação de Poisson

$$\nabla^2 \psi = -\frac{\rho(r)}{\varepsilon_0}$$

A equação para a função de Green é

$$\nabla^2 G(r, r') = \delta(r - r') \quad , \quad r \in \mathbb{R}^3$$

Esse problema é definido numa região $\Omega$ contido em $\mathbb{R}^3$. A identidade de Green é

$$\int_\Omega (u \nabla^2 v - v \nabla^2 u) \, d^3 r = \int_{\partial\Omega} \left[ u \left( \frac{\partial v}{\partial n} \right) - v \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right) \right] ds$$

Podemos chegar a essa igualdade colocando o operador divergente em evidência na integral do lado esquerdo,

$$\int_\Omega \vec{\nabla} \cdot \left( u \vec{\nabla} v - v \vec{\nabla} u \right) d^3 r$$

* Aplicando o teorema de Gauss

Que pode ser escrito como

$$\int_{\partial\Omega} [u\nabla v - v\nabla u] \cdot d\vec{S} = \int_S \left[ u\left(\frac{\partial v}{\partial n}\right) - v\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right) \right] ds$$

* $\vec{n}$ é o vetor normal à superfície

Fazendo $u = \psi$ e $v = G$ escrevemos

$$\int_\Omega (\underbrace{\psi \nabla^2 G}_{\delta(r-r')} - G\underbrace{\nabla^2 \psi}_{-\rho/\varepsilon_0}) \, d^3r = \int_{\partial\Omega} \psi \frac{\partial G}{\partial n} ds' - \int G \frac{\partial \psi}{\partial n} ds'$$

$$\psi(r) = -\int G(r-r')\,\frac{\rho(r')}{\varepsilon_0}\, d^3r' + \int_S \psi \frac{\partial G}{\partial n} ds' - \int G \frac{\partial \psi}{\partial n} ds'$$

* Para $\rho(r) = 0$ temos,

$$\psi(r) = \int_{\partial\Omega} \psi \frac{\partial G}{\partial n} ds' - \int_{\partial\Omega} G \frac{\partial \psi}{\partial n} ds'$$

Se é conhecido $\psi$ na fronteira, chamamos esse tipo de problema "Dirichlet"

Caso conhecemos $\frac{\partial \psi}{\partial n}$ na fronteira, chamamos esse tipo de "problema de Neumann"

<u>Dirichlet:</u>

$$\psi(\bar{r}') = f(r')$$

$$\nabla^2 G = \delta(r-r') \to G(r,r') = 0 \quad r \in \partial\Omega$$

$$\psi(r) = \int_{\partial\Omega} \psi(r') \frac{\partial G}{\partial n} ds'$$

<u>Neumann:</u>

$$\left.\frac{\partial \psi(r)}{\partial n}\right|_{r=r'} = f(r')$$

$$\nabla^2 G = \delta(r-r') \qquad \frac{\partial G}{\partial n} = 0 \quad ?$$

$\frac{\partial G}{\partial n} = 0$ é incompatível com a equação para a função de Green já que

$$\nabla \cdot \nabla G = \delta(r-r')$$

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \nabla G \, d^3\vec{r} = \int \delta(r - r') \, d^3 r$$

exige ser diferente de zero

$$\int_{\partial S} \frac{\partial G}{\partial n} \, dS = 1$$

Fazendo $\frac{\partial G}{\partial n} = \frac{1}{A}$, $A = \int_{\partial \Omega} dS$ conseguimos escrever $\psi(r)$ como,

$$\psi(r) = \bar{\psi}(S) - \int_{\partial S} G \frac{\partial \psi}{\partial n} \, dS$$

$$\frac{1}{A} \int_{\partial \Omega} \psi \, dS$$

(valor médio de $\psi$ na fronteira de $S$ ($\partial S$))