Geodésicas:

(08/11/20)

Transporte paralelo:

Um vetor é transportado paralelamente se ele não muda à medida que é transportado ao longo da curva. Isso é descrito por

$$\frac{d\vec{V}}{d\lambda} = 0$$

$$= \frac{d(V^\mu e_\mu)}{d\lambda}$$

$$= \frac{(\partial_\alpha V^\mu) e_\mu + V^\mu \partial_\alpha e_\mu}{d\lambda}$$

$$= \left[(\partial_\nu V^\mu) e_\mu + V^\mu \partial_\nu e_\mu\right] \frac{dx^\nu}{d\lambda}$$

$$= \frac{dx^\nu}{d\lambda}\left(\partial_\nu V^\mu + \Gamma^\mu_{\lambda\nu} V^\lambda\right) e_\mu$$

$$= U^\nu (\nabla_\nu V^\mu) e_\mu = 0$$

Um vetor $\vec{V}$ é transportado paralelamente ao longo de uma curva com vetor tangente $U^{\nu} = dx^{\nu}/d\lambda$ se suas componentes satisfazem

$$U^{\nu}(\nabla_{\nu} V^{\mu}) = 0$$

Retas/Geodésicas:

Numa reta, a tangente à curva num ponto é paralela à curva no ponto anterior.

→ Geodésicas são curvas que transportam paralelamente o próprio vetor tangente $\vec{U}$, ou seja,

$$U^{\mu}(\nabla_{\mu} U^{\alpha}) = 0$$

$$\frac{dU^{\alpha}}{d\lambda} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} U^{\mu} U^{\nu} = 0$$

$$\frac{d^2 x^{\alpha}}{d\lambda^2} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} \frac{dx^{\mu}}{d\lambda} \frac{dx^{\nu}}{d\lambda} = 0$$

Note que, num referencial localmente iner-
cial, essas curvas são de fato retas, já
que os símbolos de Christoffel são nulos.

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\lambda^2} = 0$$

A solução é $x^\alpha = a^\alpha \lambda + b^\alpha$.

O que acontece se alterarmos a parametrização?

Quando mudamos a parametrização também mudamos o vetor tangente,

$$\frac{dx^\mu}{d\theta} = \frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{d\lambda}{d\theta}$$

O que altera a equação da Geodésica para

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\theta^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\theta}\frac{dx^\nu}{d\theta} = f(\theta)\frac{dx^\alpha}{d\theta}$$

Onde $f(\theta)$ é $-\left(\frac{d^2\theta}{d\lambda^2}\right)\cdot\left(\frac{d\theta}{d\lambda}\right)^{-2}$

Princípio Variacional e geodésica:

Uma geodésica é a curva que maximiza o tempo próprio entre dois eventos do tipo tempo, ou minimiza a distância própria entre dois ~~evento~~ do tipo-espaço.

O tempo próprio entre dois eventos no espaço-tempo é,

$$\tau_{AB} = \int_A^B d\tau = \int_A^B \left[-g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta\right]^{1/2}$$

De forma paramétrica,

$$\tau_{AB} = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} d\lambda \left(-g_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\lambda}\frac{dx^\beta}{d\lambda}\right)^{1/2}$$

A variação:

$$\partial_\gamma g_{\mu\nu}(x) = \frac{-g_{\mu\nu}(x) + g_{\mu\nu}(x+\varepsilon\delta x)}{\varepsilon\delta x}$$

$$g_{\mu\nu}(x) + \varepsilon\delta x\, \partial_\gamma g_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu}(x+\varepsilon\delta x)$$