Nome: Otaviano Cruz (17/11/20)

Prova Física Matemática 2

Prof. Licinio Portugal

1) Demonstre as seguintes expressões **(1,5 pontos)**

a)

$$\nabla_m V^m = \frac{\partial V^m}{\partial x^m} + V^k \frac{\partial \log\sqrt{|g|}}{\partial x^k} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial (V^m \sqrt{|g|})}{\partial x^m}.$$

b)

$$\Delta f = \nabla_i \nabla^i f = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^j} \left(g^{jk} \sqrt{|g|} \frac{\partial f}{\partial x^k} \right)$$

$$= g^{jk} \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^k} + \frac{\partial g^{jk}}{\partial x^j} \frac{\partial f}{\partial x^k} + \frac{1}{2} g^{jk} g^{il} \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} \frac{\partial f}{\partial x^k} = g^{jk} \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^k} - g^{jk} \Gamma^l{}_{jk} \frac{\partial f}{\partial x^l}$$

2) Considere o espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$ **(5,5 pontos)**

✓ a) Defina a base para o espaço tangente e para o espaço dual ao tangente em cada ponto induzida pelas coordenadas cartesianas. **(0,25 pontos)**

✓ b) Escreva a função que fornece a transformação de coordenadas cartesianas para esféricas e calcule a matriz transformação de base induzida no espaço tangente. **(0,25 pontos)**

✓ c) Utilize o produto escalar definido em $\mathbb{R}^3$ para mostrar que o tensor métrico na nova base pode ser escrito como **(0,5 pontos)**

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \, d\phi^2 \quad .$$

✓ d) Utilize a métrica acima e transforme o covetor gradiente definido por df em um vetor contravariante em coordenadas esféricas **(0,5 pontos)**. .

✓ e) Faça a restrição a uma superfície esférica (dr = 0) e encontre os termos da conexão associada **(1,0 pontos).**

✓ f) Escreva a equação da geodésica **(1,0 pontos)**.

✓ g) Encontre o tensor de curvatura de Riemman **(1,0 pontos).**

✓ h) Encontre os operadores divergente e Laplaciano **(1,0 pontos)**.

2) a)

$$V \in TM \Rightarrow V = V^m e_m$$

$$= V^m \frac{\partial}{\partial x^m}$$

→ base do espaço tangente

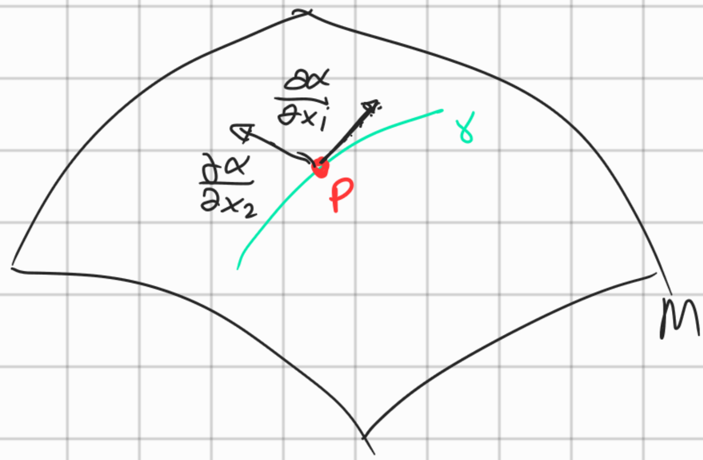
→ No espaço tangente dual

$$w \in TM^* \Rightarrow w = w_m e^m$$

$$= w_m \, dx^m$$

→ base do espaço cotangente

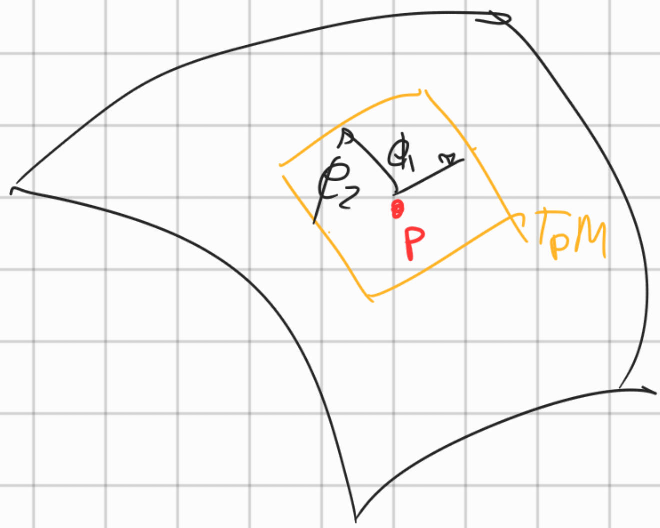
Uma curva α definida na variedade M que passa pelo ponto p



O vetor tangente à curva α é

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x_1} = e_1^\alpha \; ; \; \frac{\partial \alpha}{\partial x_2} = e_2^\alpha$$

Com esses dois vetores conseguimos definir o plano tangente



De maneira geral os vetores do espaço tangente são definidos como

$$\boxed{e_i = \frac{\partial}{\partial x_i}}$$

Para definir a base para o espaço tangente dual é necessário entender o conceito de espaço dual.

Um espaço dual é o conjunto de todos os mapas lineares que partem de um espaço vetorial e retornam um escalar, ou seja

$$\alpha : TM \to \mathbb{R} \qquad \alpha \in TM^*$$
$$(\alpha, w) \mapsto \alpha(w)$$

Esse mapa α tem a necessidade de apresentar propriedades lineares além de ser diferenciável o que a faz ser chamada de 1-forma.

Definimos esse objeto matemática, pois ao definirmos uma base em T_pM existe a indução de uma base em T_pM^*.

Um covetor $\alpha \in T_pM^*$,

$$\alpha = \alpha_i \phi^i$$

Aplicando em $v \in T_pM$

$$\alpha(v) = \alpha_i \phi^i(v^j e_j) = \alpha_i v^j \phi^i(e_j)$$

Como vimos $e_j = \partial/\partial x^j$ escrevemos

$$\alpha_i v^j dx^i(\partial/\partial x^j) = \alpha_i v^j dx^i\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)$$

Impondo a ortogonalidade $dx^i \dfrac{\partial}{\partial x_j} = \delta^i_j$

Como isso definimos da base em $T_p M^*$ $\{dx^i\}$.

$$T_p M = \text{span}\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$$

$$T_p M^* = \text{span}\left\{dx^i\right\}$$

b) No sistema de coordenadas cartesianas escrevemos o vetor ϕ_i,

$$\phi_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$$

Numa transformação de coordenada x'

$$\phi_i = \frac{\partial x'^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x'^j} \Rightarrow \boxed{\phi_i = \frac{\partial x'^j}{\partial x^i}\phi_j'}$$

Para o caso de transformação para coordenadas esféricas

$$\begin{cases} z = r\cos\theta \\ x = r\,\text{sen}\,\theta\cos\phi \\ y = r\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\phi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \phi = \text{arctg}\left(y/x\right) \\ \theta = \text{arctg}\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right) \end{cases}$$

O termo $\dfrac{\partial x'^{i}}{\partial x^{j}}$ pode ser escrito na representação matricial como

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial x'^{1}}{\partial x^{1}} & \dfrac{\partial x'^{1}}{\partial x^{2}} & \dfrac{\partial x'^{1}}{\partial x^{3}} \\[2em] \dfrac{\partial x'^{2}}{\partial x^{1}} & \dfrac{\partial x'^{2}}{\partial x^{2}} & \dfrac{\partial x'^{2}}{\partial x^{3}} \\[2em] \dfrac{\partial x'^{3}}{\partial x^{1}} & \dfrac{\partial x'^{3}}{\partial x^{2}} & \dfrac{\partial x'^{3}}{\partial x^{3}} \end{bmatrix}$$

Calculando separadamente cada componente

$$\frac{\partial x'^{1}}{\partial x^{1}} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) = \left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^{-1} \cdot x$$

$$\frac{\partial x'^{1}}{\partial x^{2}} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) = \left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^{-1} y$$

$$\frac{\partial x'^{1}}{\partial x^{3}} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) = \left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^{-1} z$$

$$\frac{\partial x'^2}{\partial x^1} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\operatorname{arctg}\left(y/x\right)\right) = \frac{-y}{\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right]x^2}$$

$$\frac{\partial x'^2}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\operatorname{arctg}\left(y/x\right)\right) = \frac{1}{x\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right]}$$

$$\frac{\partial x'^2}{\partial x^3} = 0$$

$$\frac{\partial x'^3}{\partial x^1} = \frac{x\left(x^2+y^2\right)^{-1/2}}{\left[1+\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right)^2\right]z}$$

$$\frac{\partial x'^3}{\partial x^2} = \frac{y\left(x^2+y^2\right)^{-1/2}}{\left[1+\left(\frac{(x^2+y^2)}{z^2}\right]z}$$

$$\frac{\partial x'^3}{\partial x^3} = \frac{1}{\left[1+\frac{(x^2+y^2}{z^2}\right]} \quad \sqrt{x^2+y^2}\cdot\left(-z^{-2}\right)$$

Essa é a matriz de transformação das bases partindo das coordenadas cartesianas para coordenadas esféricas.

c) Definindo uma curva $\alpha = (x, y, z)$ e fazendo a transformação de variável

$$\begin{cases} z = r\cos\theta \\ x = r\,\text{sen}\theta\cos\phi \\ y = r\,\text{sen}\theta\,\text{sen}\phi \end{cases}$$

Os vetores da base do espaço tangente são

$$\phi_r = \frac{\partial S}{\partial r} = (\text{sen}\theta\cos\phi, \text{sen}\theta\,\text{sen}\phi, \cos\theta)$$

$$\phi_\theta = \frac{\partial S}{\partial \theta} = (r\cos\theta\cos\phi, r\cos\theta\,\text{sen}\phi, -r\,\text{sen}\theta)$$

$$\phi_\phi = \frac{\partial S}{\partial \phi} = (-r\,\text{sen}\theta\,\text{sen}\phi, r\,\text{sen}\theta\cos\phi, 0)$$

Sabendo disso estabelecemos a componente da métrica como

$$g_{ij} = \phi_i \cdot \phi_j$$

Como $g_{ij} = 0$ para $i \neq j$, calculamos g_{rr}, $g_{\theta\theta}$ e $g_{\phi\phi}$.

$$g_{rr} = \operatorname{sen}^2\theta \cos^2\phi + \operatorname{sen}^2\theta \operatorname{sen}^2\phi + \cos^2\theta$$

$$= \operatorname{sen}^2\theta (\cos^2\phi + \operatorname{sen}^2\phi) + \cos^2\theta$$

$$= 1$$

$$g_{\theta\theta} = r^2\cos^2\theta\cos^2\phi + r^2\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\phi + r^2\operatorname{sen}^2\theta$$

$$= r^2(\cos^2\theta(\cos^2\phi + \operatorname{sen}^2\phi) + \operatorname{sen}^2\theta)$$

$$= r^2$$

$$g_{\phi\phi} = r^2\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}^2\phi + r^2\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\phi$$

$$= r^2\operatorname{sen}^2\theta(\operatorname{sen}^2\phi + \cos^2\phi)$$

$$= r^2\operatorname{sen}^2\theta$$

Assim, a métrica g tem sua representação matricial em coordenadas

$$g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{bmatrix}$$

Sabendo disso o comprimento ds^2

$$ds^2 = g_{ij}\, dx^i dx^j$$

$$= g_{rr}\, dr^2 + g_{\theta\theta}\, d\theta^2 + g_{\phi\phi}\, d\phi^2$$

$$= dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\phi^2$$

d) A métrica tem a propriedade de "subir o índice", ou seja,

$$\phi_i = g_{ij}\phi^j$$

Então, para transformar o covetor gradiente $df = \partial_i \phi^i$ em um vetor contravariante aplicaremos a expressão acima,

$$d_t = \partial_i g^{ij} \Phi_j$$

$$= \partial_r \Phi_r + \frac{1}{r^2} \partial_\theta \Phi_\theta + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta} \partial_\phi \Phi_\phi$$

e) Como podemos escrever unicamente os símbolos de Christoffell a partir da métrica fazendo uso da compatibilidade da métrica e a da condição de torção nula,

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu})$$

Como $dr = 0$ então a métrica fica,

$$g = \begin{bmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \operatorname{sen}^2\theta \end{bmatrix} \quad g^{-1} = \begin{bmatrix} R^{-2} & 0 \\ 0 & (R^2 \operatorname{sen}^2\theta)^{-1} \end{bmatrix}$$

$\partial_\theta g_{\theta\theta} = 0$ $\qquad$ $\partial_\phi g_{\theta\theta} = 0$

$\partial_\theta g_{\phi\phi} = 2R^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta$ $\qquad$ $\partial_\phi g_{\phi\phi} = 0$

Para $\lambda = \{\theta, \phi\}$ temos,

$$\Gamma^{\theta}_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \Gamma^{\theta}_{\theta\theta} & \Gamma^{\theta}_{\theta\phi} \\ \Gamma^{\theta}_{\phi\theta} & \Gamma^{\theta}_{\phi\phi} \end{bmatrix} \qquad \Gamma^{\phi}_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \Gamma^{\phi}_{\theta\theta} & \Gamma^{\phi}_{\theta\phi} \\ \Gamma^{\phi}_{\phi\theta} & \Gamma^{\phi}_{\phi\phi} \end{bmatrix}$$

Onde

$$\Gamma^{\theta}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\theta\rho}\left[\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}\right]$$

$\rightarrow \theta$

$$= \frac{1}{2} g^{\theta\theta}\left[\partial_\mu g_{\nu\theta} + \partial_\nu g_{\theta\mu} - \partial_\theta g_{\mu\nu}\right]$$

$$\Gamma^{\theta}_{\theta\phi} = \frac{1}{2R^2}\left[\cancelto{0}{2\partial_\theta g_{\theta\theta}} + \cancelto{0}{2\partial_\phi g_{\theta\theta}} - \partial_\theta g_{\phi\phi}\right]$$

$$\Gamma^{\theta}_{\phi\phi} = \frac{1}{2R^2}\left(-2R^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta\right) = -\operatorname{sen}\theta\cos\theta$$

$$\Gamma^{\theta}_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\operatorname{sen}\theta\cos\theta \end{bmatrix}$$

//

Calculando

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\phi} = \frac{1}{2} g^{\phi\rho} \left[\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu} \right]$$

$\rho \to \phi$

$$= \frac{1}{2} g^{\phi\phi} \left[\partial_\mu g_{\nu\phi} + \partial_\nu g_{\phi\mu} - \cancel{\partial_\phi g_{\mu\nu}} \right]$$

$\nu \to 0$

$$\Gamma_{\theta\nu}^{\phi} = \frac{1}{2} \frac{1}{R^2 \operatorname{sen}^2\theta} \left[\partial_\theta g_{\phi\nu} + \partial_\nu g_{\phi\phi} \right]$$

$\nu \to \phi$

$$\Gamma_{\theta\phi}^{\phi} = \frac{1}{2R^2 \operatorname{sen}^2\theta} \left[\partial_\theta g_{\phi\phi} \right] = \frac{2R^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta}{2R^2 \operatorname{sen}^2\theta}$$

$$= \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \Gamma_{\phi\theta}^{\phi}$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\phi} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} \\ \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} & 0 \end{bmatrix}$$

f) A equação da geodésica é o transporte do vetor tangente U,

$$\nabla_\mu U^\nu = 0$$

Parametrizando $\theta(\lambda)$ e $\phi(\lambda)$, U será

$U = \dfrac{\partial x^\alpha}{\partial \lambda}$, $\alpha = \theta, \phi$. Então, a equação fica,

$$\frac{d^2 x^\alpha}{\partial \lambda^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0$$

$$\frac{d^2 x^\theta}{d\lambda^2} + \frac{d^2 x^\phi}{d\lambda^2} + \Gamma^\theta_{\phi\phi} \frac{dx^\phi}{d\lambda}\frac{dx^\phi}{dx} + \Gamma^\phi_{\phi\theta}\frac{dx^\phi}{d\lambda}\frac{dx^\theta}{d\lambda}$$

$$+ \Gamma^\phi_{\theta\phi}\frac{dx^\theta}{d\lambda}\frac{dx^\phi}{d\lambda} = 0$$

Substituindo $\Gamma^\phi_{\phi\theta} = \Gamma^\phi_{\theta\phi} = \cos\theta/\operatorname{sen}\theta$ e $\Gamma^\theta_{\phi\phi} = -\operatorname{sen}\theta\cos\theta$ a equação fica,

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 x^\theta}{d\lambda^2} - \operatorname{sen}\theta\cos\theta\left(\dfrac{dx^\phi}{d\lambda}\right)^2 = 0 \\ \dfrac{d^2 x^\phi}{d\lambda^2} + \dfrac{2\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\dfrac{dx^\theta}{d\lambda}\dfrac{dx^\phi}{d\lambda} = 0 \end{cases}$$

g) O tensor de curvatura de Riemann é definido como,

$$R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^{\alpha}_{\beta\nu} - \partial_\nu \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu} + \Gamma^{\alpha}_{\theta\mu}\Gamma^{\theta}_{\beta\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\theta\nu}\Gamma^{\theta}_{\beta\mu}$$

Sabendo que

$$\Gamma^{\theta}_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\operatorname{sen}\theta\cos\theta \end{bmatrix} \qquad \Gamma^{\phi}_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} \\ \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\partial_\theta \Gamma^{\theta}_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta \end{bmatrix}$$

$$\partial_\phi \Gamma^{\theta}_{\mu\nu} = 0$$

$$\partial_\theta \Gamma^{\phi}_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -\operatorname{cosec}^2\theta \\ -\operatorname{cosec}^2\theta & 0 \end{bmatrix}$$

$$\partial_\phi \Gamma^{\phi}_{\mu\nu} = 0$$

Como $\alpha, \beta, \mu, \nu = \theta, \phi$ buscamos as componentes não nulas do tensor de curvatura,

$$R^{\theta}{}_{\theta\theta\theta} = \partial_\theta \cancelto{0}{\Gamma^{\theta}_{\theta\theta}} - \partial_\theta \cancelto{0}{\Gamma^{\theta}_{\theta\theta}} + \left(\cancelto{0}{\Gamma^{\theta}_{\theta\theta}}\,\Gamma^{\theta}_{\theta\theta} + \Gamma^{\theta}_{\phi\theta}\,\cancelto{0}{\Gamma^{\phi}_{\theta\theta}}\right)$$

$$- \left(\cancelto{0}{\Gamma^{\theta}_{\theta\theta}}\,\cancelto{0}{\Gamma^{\theta}_{\theta\theta}} + \Gamma^{\theta}_{\phi\theta}\,\cancelto{0}{\Gamma^{\phi}_{\theta\theta}}\right)$$

$$= 0$$

$$R^{\phi}{}_{\theta\theta\theta} = \partial_\theta \cancelto{0}{\Gamma^{\phi}_{\theta\theta}} - \partial_\theta \cancelto{0}{\Gamma^{\phi}_{\theta\theta}} + \left(\cancelto{0}{\Gamma^{\phi}_{\theta\theta}}\,\Gamma^{\theta}_{\theta\theta} + \Gamma^{\phi}_{\phi\theta}\,\cancelto{0}{\Gamma^{\phi}_{\theta\theta}}\right)$$

$$- \left(\Gamma^{\phi}_{\phi\theta}\,\cancelto{0}{\Gamma^{\phi}_{\theta\theta}} + \Gamma^{\phi}_{\phi\theta}\,\cancelto{0}{\Gamma^{\phi}_{\theta\theta}}\right)$$

$$= 0$$

$$R^{\theta}{}_{\phi\theta\theta} = \partial_\theta \cancelto{0}{\Gamma^{\theta}_{\phi\theta}} - \partial_\theta \cancelto{0}{\Gamma^{\theta}_{\phi\theta}} + \left(\cancelto{0}{\Gamma^{\theta}_{\theta\theta}}\,\cancelto{0}{\Gamma^{\theta}_{\phi\theta}} + \cancelto{0}{\Gamma^{\theta}_{\phi\theta}}\,\Gamma^{\phi}_{\phi\theta}\right)$$

$$- \left(\cancelto{0}{\Gamma^{\theta}_{\theta\theta}}\,\cancelto{0}{\Gamma^{\theta}_{\phi\theta}} + \Gamma^{\theta}_{\phi\theta}\,\cancelto{0}{\Gamma^{\phi}_{\phi\theta}}\right)$$

$$= 0$$

Fazendo esse mesmo procedimento para os outros 13 elementos encontramos,

$$R^{\theta}{}_{\phi\theta\phi} = \operatorname{sen}^2\theta \qquad R^{\phi}{}_{\theta\phi\theta} = 1$$

$$R^{\theta}{}_{\phi\phi\theta} = -\operatorname{sen}^2\theta \qquad R^{\phi}{}_{\theta\theta\phi} = -1$$

Os outros elementos do tensor de curvatura são nulos.

h) O divergente de um campo V é definido como,

$$\nabla_\mu V^\mu = \partial_\mu V^\mu + \Gamma_{\alpha\mu}^{\alpha} V^\mu$$

Os símbolos de Christoffell são relacionados à métrica,

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho}(\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu})$$

No caso de $\lambda, \mu = \alpha$ e $\nu = \mu$ escrevemos,

$$\Gamma_{\mu\alpha}^{\alpha} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}(\partial_\alpha g_{\mu\beta} + \partial_\mu g_{\beta\alpha} - \partial_\beta g_{\alpha\mu})$$

$$= \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}\cancelto{0}{(\partial_\alpha g_{\mu\beta} - \partial_\beta g_{\alpha\mu})} + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}\partial_\mu g_{\beta\alpha}$$

$$\boxed{\Gamma_{\mu\alpha}^{\alpha} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}\partial_\mu g_{\alpha\beta}}$$

//

Definimos $g = \det(g_{\alpha\beta})$ e sua derivada como $\partial_\mu g = g\, g^{\alpha\beta} \partial_\mu g_{\alpha\beta}$. Assim, escrevemos

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha} = \frac{\partial_\mu(\sqrt{-g})}{\sqrt{-g}}$$

Com isso podemos reescrever o divergente como,

$$\nabla_\alpha V^\alpha = \partial_\alpha V^\alpha + \frac{V^\alpha \partial_\alpha(\sqrt{-g})}{\sqrt{-g}}$$

Que pode ser escrito como

$$\nabla_\alpha V^\alpha = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\alpha(\sqrt{-g}\, V^\alpha)$$

Usando a métrica em coordenadas esféricas

$$\nabla_\alpha V^\alpha = \frac{1}{\sqrt{-g}} \Big[(\partial_\theta \sqrt{-g}) V^\theta + \sqrt{-g}\, \partial_\theta V^\phi$$

$$+ \cancelto{0}{\partial_\phi(\sqrt{-g})} V^\phi + \sqrt{-g}\, \partial_\phi V^\phi$$

$$= \partial_\phi V^\phi + \partial_\theta V^\theta + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} V^\theta$$

O operador laplaciano é definido como

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f$$

Sendo f uma função escalar. Por isso podemos escrever

$$\nabla^2 f = \nabla_\mu (g^{\mu\nu} \partial_\nu f)$$

Substituindo na equação para o divergente

$$\nabla_\mu V^\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g}\, V^\mu)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g}\; g^{\mu\nu} \partial_\nu f)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-g}} \Big[g^{\mu\nu} \partial_\nu f (\partial_\mu \sqrt{-g}) + \sqrt{-g}\, \partial_\nu f (\partial_\nu g^{\mu\nu})$$

$$+ \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} (\partial_\mu \partial_\nu f) \Big]$$

1)

a)

O divergente de um campo V é definido como,

$$\nabla_\mu V^\mu = \partial_\mu V^\mu + \Gamma_{\alpha\mu}^{\alpha} V^\mu$$

Os símbolos de Christofell são relacionados à métrica,

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu})$$

No caso de $\lambda, \mu = \alpha$ e $\nu = \mu$ escrevemos,

$$\Gamma_{\mu\alpha}^{\alpha} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\partial_\alpha g_{\mu\beta} + \partial_\mu g_{\beta\alpha} - \partial_\beta g_{\alpha\mu})$$

$$= \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \xcancel{(\partial_\alpha g_{\mu\beta} - \partial_\beta g_{\alpha\mu})}^{0} + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\mu g_{\alpha\beta}$$

$$\boxed{\Gamma_{\mu\alpha}^{\alpha} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\mu g_{\alpha\beta}}$$

Definimos $g = \det(g_{\alpha\beta})$ e sua derivada como $\partial_\mu g = g\, g^{\alpha\beta} \partial_\mu g_{\alpha\beta}$. Assim, escrevemos

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha} = \frac{\partial_\mu(\sqrt{-g})}{\sqrt{-g}}$$

Com isso podemos reescrever o divergente como,

$$\nabla_\alpha V^\alpha = \partial_\alpha V^\alpha + \frac{V^\alpha \partial_\alpha(\sqrt{-g})}{\sqrt{-g}}$$

Que pode ser escrito como

$$\nabla_\alpha V^\alpha = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\alpha(\sqrt{-g}\, V^\alpha)$$

Como $\partial_\alpha(\ln\sqrt{-g}) = \frac{1}{\sqrt{-g}}(\partial_\alpha \sqrt{-g})$ reescrevemos

$$\nabla_\alpha V^\alpha = \partial_\alpha V^\alpha + V^\mu\left[\partial_\mu \ln(\sqrt{-g})\right]$$

b)

O operador laplaciano é definido como

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f$$

Sendo f uma função escalar. Por isso podemos escrever

$$\nabla^2 f = \nabla_\mu \left(g^{\mu\nu} \partial_\nu f \right)$$

Substituindo na equação para o divergente

$$\nabla_\mu V^\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \left(\sqrt{-g}\, V^\mu \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \left(\sqrt{-g}\; g^{\mu\nu} \partial_\nu f \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-g}} \Big[g^{\mu\nu} \partial_\nu f \left(\partial_\mu \sqrt{-g} \right) + \sqrt{-g}\, \partial_\nu f \left(\partial_\mu g^{\mu\nu} \right)$$

$$+ \sqrt{-g}\; g^{\mu\nu} \left(\partial_\mu \partial_\nu f \right) \Big]$$

Esse desenvolvimento também pode ser dado por

$$\nabla \cdot (\nabla f) = \nabla_\mu \left(g^{\mu\nu} \partial_\nu f \right)$$

$$= \partial_\mu \left(g^{\mu\nu} \partial_\nu f \right) - g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \partial_\lambda f$$