Física Matemática II

Grupos:

$(G, +) \rightarrow$ conjunto G associado à operação $+$.

$(G, \cdot) \rightarrow$ conjunto G associado à operação $\cdot$.

Propriedades:

→ Elemento Neutro da operação deve pertencer ao conjunto G.

$(G, +) \rightarrow$ 0 (zero) é o elemento neutro da $+$.

$(G, \cdot) \rightarrow$ 1 é o elemento neutro da $\cdot$.

→ Inversos $\quad g \in G$

$(G, +) \rightarrow \quad g + (-g) = 0$ ← Elemento Neutro

$(G, \cdot) \rightarrow \quad g \cdot (g^{-1}) = 1$ ← Elemento Neutro

→ Associatividade para a operação

$(G, +)$; $g_1, g_2, g_3 \in G$

$$\boxed{(g_1 + g_2) + g_3 = g_1 + (g_2 + g_3)}$$

$(G, \cdot)$; $g_1, g_2, g_3 \in G$

$$\boxed{(g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 = g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3)}$$

* Grupo Abeliano exige que a operação do grupo seja também comutativo.

Anel : $(B, \cdot, +)$

$(B, +)$ = Grupo Abeliano

$(B, \cdot)$ = Associativo

→ Distributividade entre as operações

$\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in B$

$$\boxed{\beta_1 \cdot (\beta_2 + \beta_3) = \beta_1 \cdot \beta_2 + \beta_1 \cdot \beta_3}$$

* Escalar ou Corpo :

$(F, +, \cdot)$

→ Grupo Abeliano $(F, +)$

→ Grupo Abeliano $(F^*, \cdot)$

↳ $F^* = F - \{0\}$

Elemento neutro da adição

Espaço Vetorial : $(V, +, F)$ → Operação → corpo

↳ conjunto

- $(V, +)$ grupo abeliano
- $(F \times V) \to V$

  $(\alpha, v) \mapsto \alpha v$

  *) Multiplicação por Escalar

  $\alpha \in F$; $v \in V$

- Distributividade entre a operação interna e a operação externa.

Álgebra:

$V : (V, +, F) \equiv$ Espaço Vetorial V

- $(V, \cdot)$ anel

$\underbrace{(V, \cdot)}$ ↳ Multiplicação entre vetores associação

- Distributividade entre a multiplicação por escalar e a multiplicação entre vetores.

$$a \cdot (v_1 \cdot v_2) = (a v_1) \cdot v_2 = v_1 \cdot (a v_2)$$

Bases:

Subespaços Vetoriais:

- Subconjunto $W \subset V$
- $\emptyset \in W$
- $\begin{cases} a, b \in F \\ w_1, w_2 \in W \end{cases} \Rightarrow aw_1 + bw_2 \in W$

Então $(W, +, F)$ é um espaço vetorial

$W \subset V \longrightarrow W$ subespaço vetorial de V

- $v_1, \dots, v_k$ de V
- $a^1, \dots, a^k$ de F

$\rightarrow$ Combinação Linear do Conjunto de k de vetores

$$v = a^i v_i \quad ; \quad i = 1, \dots, k$$

Linearmente Independente:

$$\emptyset = a^1 v_1 + \cdots + a^k v_k$$

com $a^i \neq 0$ o conjunto $\{v_1, \ldots, v_k\}$ é L.D.

* Fazendo a combinação linear $a^i v_i$ ser igual a zero. Podemos fazer a seguinte pergunta

Existe alguma maneira de realizar essa igualdade sem que a^i seja zero?

Se sim, chamamos o $\{v_i\}$ de L.D.

Se não, chamamos o $\{v_i\}$ de L.I.

Subconjunto formado pela combinação linear de $\{v_1, \ldots, v_k\}$

$$\text{span}\{v_1, \ldots, v_k\}$$

Caso:

- $\emptyset \in \text{span}\{v_1, \cdots, v_k\}$

$$\begin{cases} v, w \in \text{span}\{v_1, \cdots, v_k\} \\ a, b \in F \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$av + bw \in \text{span}\{v_1, \cdots, v_k\}$$

Então,

span$\{v_1, \cdots, v_k\}$ é um subespaço vetorial gerado por $v_1, \cdots, v_k$.

Bases:

1) $\{v_1, \dots, v_k\} \in V$

$W_k = \text{span}\{v_1, \dots, v_k\} \subset V$

2) $\{v_1, \dots, v_{k+1}\} \in V$

$W_{k+1} = \text{span}\{v_1, \dots, v_{k+1}\} \subset V$

$\vdots$

3) $\{v_1, \dots, v_k\} \in V$

$V = \text{span}\{v_1, \dots, v_n\}$

é a base do espaço vetorial V

→ A base é única? $\boxed{\text{Não}}$

→ O número $\underline{n}$ é únicos? $\boxed{\text{Sim}}$

→ n é a dimensão do espaço V

Base Canônica:

Base: $\{v_1, \dots, v_n\}$ L.I

$V = \mathrm{span}\{v_1, \dots, v_n\}$

$v \in V \Rightarrow v = a^1 v_1 + \dots + a^n v_n$

$n \equiv$ dimensão do espaço vetorial

Soma Direta: $\oplus$

- $V \oplus W = (v, w) \in V \times W$

Regras para $V \oplus W$ ser um espaço vetorial:

$\rightarrow (v_1, w_1) + (v_2, w_2) = (v_1 + v_2, w_1 + w_2)$

$\rightarrow a(v, w) = (av, aw)$

- Decompor espaço vetorial em subespaços

$(V, +, F) = V$

subespaço de V

$U \subset V \; ; \; W \subset V$

Se $U \cap W = \emptyset \rightarrow$ elemento neutro, então $V = U \oplus W$, ou seja, qualquer vetor pode ser escrito como,

$v \in V, \; a \in W, \; u \in U$

$$\boxed{v = au + cb}$$

Mapas Lineares:

$V = (V, +, F)$, $W = (W, +, F)$

Um mapa T, $a, b \in F$
$v_1, v_2 \in V$

$T : V \longrightarrow W$

$T(av_1 + bv_2) = a\boxed{T(v_1)} + b\boxed{T(v_2)}$

vetores pertecentes a W

* Preserva a soma e a multiplicação por escalar.

Homomorfismo: Hom(V, W)

↳ é o conjunto de mapas lineares entre V e W

$T, S \in \text{Hom}(V, W)$

- $[T+S](v) = T(v) + S(v)$

- $a \in F$; $aT(v) = a(T(v))$

Assim, $(Hom(V,W), +, F)$ formam um espaço vetorial.

Isomorfismo: contido em $Hom(V,W)$

- $T(v_1) = T(v_2) \Rightarrow v_1 = v_2$
- $T(v) = Im\,T = W$

Inversa: $T : V \to W$

$T^{-1} : W \to V$

$T \circ T^{-1} = \mathbb{I}(V)$

$T^{-1} \circ T = \mathbb{I}(W$

→ **Isomorfismo:** $\dim V = \dim W$

Endomorfismo: $\mathrm{Hom}(V, V)$

- $T : V \to V$

  $v \to T(v)$

álgebra

→ Produto entre 2 endomorfismos
(Composição)

$S.(T(v)) = S[T(v)]$

$aS.T = (aS).T = S.(aT)$

Espaço Dual :

$$(V, +, F) \Longleftrightarrow (V^*, +, F)$$

$V^* = Hom(V, F)$ Funções lineares de V em F, $\alpha : V \to F$

$$\boxed{\dim V = \dim V^*}$$

$\hookrightarrow$ Isomórficos

Notação de Einstein

- $(V, +, F)$, $\dim V = n$

$\mathrm{span}\{\phi_i\} = V$, $i = 1, \dots, n$

- $v \in V$ $\quad v = \sum_n a^n \phi_n = a^n \phi_n$

→ Componentes: índice em cima.

→ Base: Índice embaixo

→ Índices em cima e embaixo se somam (repetido)

Base do Espaço Dual

$\mathcal{V} = (V, +, \mathbb{F})$, $\dim \mathcal{V} = n$

$\mathcal{V} = \operatorname{span}\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$

- $\beta \in \mathcal{V}^*$, $\beta(v) = \beta(v^i \phi_i) = v^i \beta(\phi_i)$

- $\beta(\phi_i) = \beta_i \in \mathbb{R}$

$$\beta = \beta_i \phi^i \text{ , onde } \phi^i \in \mathcal{V}^*$$

$$\phi^i : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$$

$$\boxed{\phi^i(\phi_j) = \delta^i_j}$$

$\to$ $\beta(v) = \beta_i \phi^i(v^j \phi_j) = \beta_i v^j \phi^i(\phi_j)$

$$= \beta_i v^j \delta^i_j = \beta_i v^i$$

Representação Matricial

$$v = v^i \phi_i \iff \phi_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

Vetores

Matriz Coluna $(n \times 1)$

Covetores

$$\beta = \beta_i \phi^i \iff \beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$$

$$\phi^i (0 \cdots 1 \cdots 0)$$

matriz linha $(1 \times n)$

$T \in End(V)$ $\xrightarrow{} n \times n$

$T(v) = T(v^i \phi_i) = v^i T(\phi_i)$

$T(\phi_i) = T_i^{\,j} \phi_j$

$T(v) = T(v^i \phi_i) = v^i T(\phi_i) = \boxed{v^i T_i^{\,j} \phi_j}$

$\boxed{T_i^{\,j} v^i} \phi_j = [T(v)]^j \phi_j$

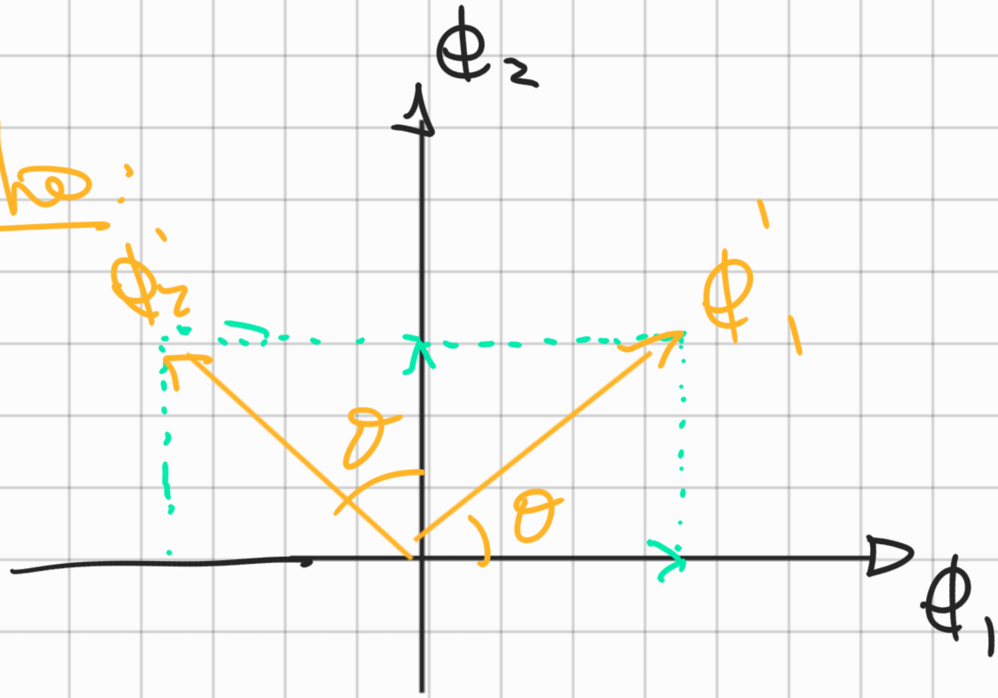
$\hookrightarrow [T(v)]^j$

$$\begin{pmatrix} T(v)^1 \\ \vdots \\ T(v)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1^{\,1} & \cdots & T_n^{\,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ T_1^{\,n} & \cdots & T_n^{\,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix}$$

T^{j}_{i} — j → linha

i → coluna

Exemplo:



$$\phi'_1 = \cos\theta\, \phi_1 + \operatorname{sen}\theta\, \phi_2$$

$$\phi'_2 = \cos\theta\, \phi_2 - \operatorname{sen}\theta\, \phi_1$$

$$\begin{cases} \phi'_1 = T(\phi_1) = T_1^{\,j}\phi_j = T_1^{\,1}\phi_1 + T_1^{\,2}\phi_2 \\ \phi'_2 = T(\phi_2) = T_2^{\,j}\phi_j = T_2^{\,1}\phi_1 + T_2^{\,2}\phi_2 \end{cases}$$

Por composição:

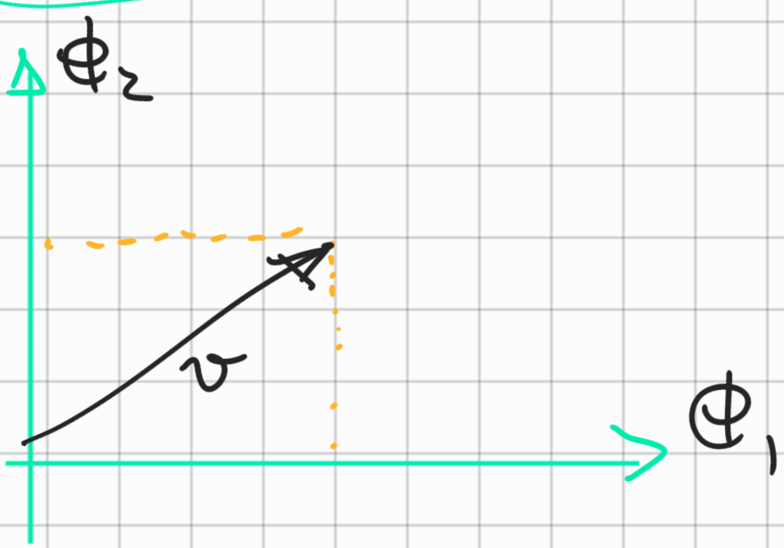
$$T_1^{\,1} = \cos\theta \, ; \quad T_1^{\,2} = \operatorname{sen}\theta$$

$$T_2^{\,1} = -\operatorname{sen}\theta \quad T_2^{\,2} = \cos\theta$$

$$T_i^{\,j} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} v^{1'} \\ v^{2'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix}$$

Mudança de Base:



$$v = v^i \Phi_i$$
$$v = v^{i'} \Phi_{i'}$$

$$T(\Phi_i) = T_i^{\,j} \Phi_j \quad (3)$$

$$T(e_i) = e_i' = T_i^{\,j} e_j$$

$$v = v^{i'} e_i' = v^i e_i$$

$$v^{i'} T_i^{\,j} e_j = v^i e_i$$

$$\boxed{v^{j'} = \left(T_i^{\,j}\right)^{-1} v^i}$$

v^i = contravariante (transforma-se com a matriz inversa da Troca de Base)

e_i = covariante

Covetores: $\phi^{i}(\phi_j) = \delta^{i}_{j}$

$\phi^{i\prime}(\phi'_j) = \delta^{i}_{j}$

$\hookrightarrow \phi'^{i}(T_j^{\ m}\phi_m) = T_j^{\ m}\phi^{i\prime}(\phi_m)$

$\hookrightarrow$ Transformação nos vetores

$\phi^{i\prime} = A^{i}_{k}\phi^{k}$

$\hookrightarrow$ Transformações nos covetores

$$T_j^{\ m}\phi^{i\prime}(\phi_m) = T_j^{\ m}A^{i}_{k}\boxed{\phi^{k}(\phi_m)} = \delta^{i}_{j}$$

$\hookrightarrow \delta^{k}_{m}$

$$T_j^{\ m}A^{i}_{m} = \delta^{i}_{j}$$

$$AT = \mathbb{1}$$

- $\beta = \beta_i \epsilon^i = \beta'_i \epsilon'^i$

$$\beta'_i = T_i^{\;j} \beta_j$$

Componentes de um covetor

$$\beta' = T\beta$$

Mapas Multilineares

* Tensores $\Longleftrightarrow$ Mapas Multilineares

$$(\mathbb{V}, \mathbb{R}) \text{ e } (\mathbb{V}^*, \mathbb{R})$$