Método das Autofunções:

Escrevemos,

$$G(x,x') = \sum_n C_n(x')\, u_n(x)$$

Substituindo no método da função de Green,

$$\mathcal{L}\, G(x,x') + k\,w(x)\, G(x,x') = \delta(x-x')$$

$$\mathcal{L}\left(\sum_n C_n(x')\, u_n(x)\right) + k\,w(x) \sum_n C_n(x')\, u_n(x) = \delta(x-x')$$

$$\sum_n C_n(x')\, \mathcal{L}\, u_n(x) + k\,w(x) \sum C_n(x')\, u_n(x) = \delta(x-x')$$

Como $\mathcal{L}\, u_n(x) = -\lambda_n w(x)\, u_n(x)$, o que leva em

$$\sum_n C_n(x')\left(-\lambda_n w(x)\, u_n(x)\right) + k\,w(x) \sum_n C_n(x')\, u_n(x) = \delta(x-x')$$

$$\sum_n C_n(x')\, w(x)\, u_n(x)\,(k-\lambda_n) = \delta(x-x')$$

Multiplicando ambos lados da equação por $u_m^*(x)$ e integrando no intervalo $[a,b]$,

$$\sum_{n,m} \int_a^b C_n(x') \boxed{\overbrace{w(x)\, u_n(x)\, u_m^*(x)}^{\delta_{mn}}} (k-\lambda_n)\, dx = \int_a^b \sum_n \delta(x-x')\, u_m^*(x)\, dx$$

$$\sum_{n,m} C_n(x')\, \delta_{mn} (k-\lambda_n) = \sum_m \int_a^b \delta(x-x')\, u_m^*(x)\, dx$$

$$\sum_n C_n(x')(k-\lambda_n) = u_n^*(x')$$

Portanto,

$$C_n(x') = \frac{u_n^*(x')}{k-\lambda_n}$$

Substituindo em $G(x,x')$

$$\boxed{G(x,x') = \sum_n \frac{U_n(x)\, U_n^*(x')}{(k-\lambda_n)}}$$

Exemplo: Oscilador Harmônico Simples

A equação homogênea é

$$\frac{d^2u}{dx^2} + k^2 u = 0 \qquad ; \quad u(0) = u(L) = 0$$

A equação para a resolução via método função de Green é

$$\frac{d^2 G(x,x')}{dx^2} + k^2 G(x,x') = \delta(x-x')$$

$$G(0,x') = G(L,x') = 0$$

Os autovalores dos OHS são $\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$ e suas autofunções são $\sqrt{\frac{2}{L}}\, \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$. Assim,

$$G(x,x') = \sum_n \frac{u_n^*(x')\, u_n(x)}{K - \frac{n^2\pi^2}{L^2}}$$

$$G(x,x') = \sum_n \frac{\left(\text{sen}\,\frac{n\pi x'}{L} \;\; \text{sen}\,\frac{n\pi x}{L}\right)}{K^2 - \frac{n^2\pi^2}{L^2}} \left(\frac{2}{L}\right)$$