Delta de Dirac

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, f(x)\, dx = f(0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, dx = 1$$

Propriedades da Delta de Dirac

A delta de Dirac é definida como:

$$\begin{cases} \delta(x) = \infty & , x = 0 \\ \delta(x) = 0 & , x \neq 0 \end{cases} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x)\, dx = f(0)$$

* f deve ser contínua na origem.

* Exemplo:

- Distribuição de carga de uma carga pontual.

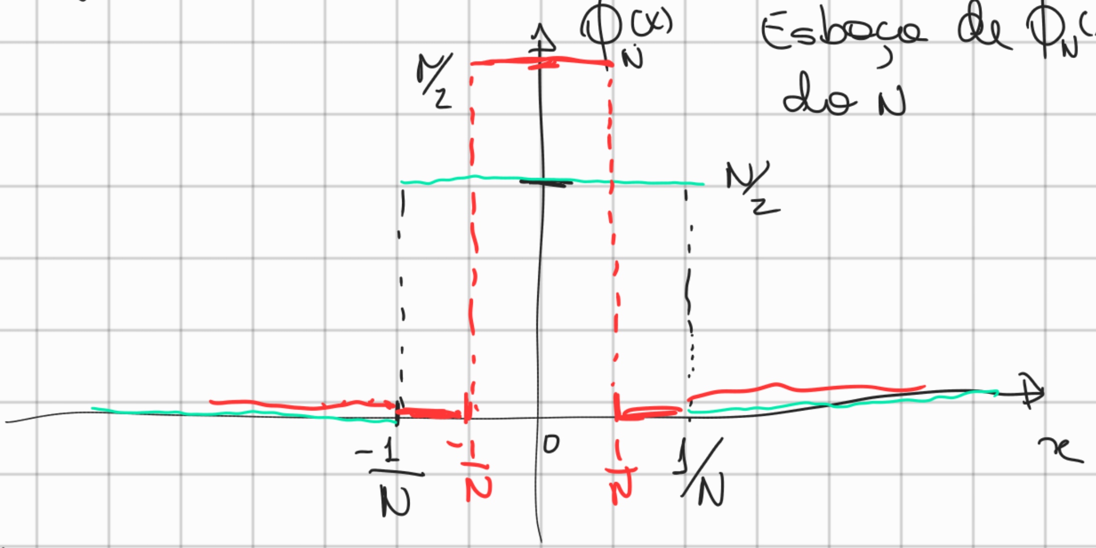
$$\rho(x) = q\, \delta(x - x_0)$$

O delta de Dirac é uma distribuição / função generalizada.

Delta de Dirac como uma sequência de funções

Definimos ϕ_N como

$$\phi_N = \begin{cases} \frac{N}{2}, & |x| < 1/N \\ 0, & |x| > 1/N \end{cases}$$



Esboço de $\phi_N(x)$ variando N

* $\phi_N(x)$, à medida que se aumenta N, se torna mais estreita a $x = 0$.

Calculando

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_N(x)\,dx = \int_{-\frac{1}{N}}^{\frac{1}{N}} \frac{N}{2}\,dx = \frac{N}{2}\, x \Big|_{-\frac{1}{N}}^{\frac{1}{N}} = \frac{N}{2}\,\frac{2}{N} = 1$$

Tomando do o limite para $N \to \infty$

$$\lim_{N\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_N(x)\,dx = 1$$

Agora buscamos observar a segunda propriedade da Delta de Dirac.

$$\lim_{N\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_N(x)\underbrace{f(x)}_{\to \text{ função teste}}\,dx = \lim_{N\to\infty} \frac{N}{2}\int_{-\frac{1}{N}}^{\frac{1}{N}} f(x)\,dx$$

Se $F(x)$ é a primitiva de $f(x)$ escrevemos,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{N}{2}\left[F\left(\frac{1}{N}\right) - F\left(\frac{-1}{N}\right)\right]$$

Observando a definição de derivada temos,

$$\frac{dG}{dx} = \frac{G(x+dx) - G(x)}{dx}$$

Se tomarmos $x = -\frac{1}{N}$ e $dx = 2/N$ temos justamente a definição de derivada. Ou seja,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{F(1/N) - F(-1/N)}{2/N} = \left.\frac{dF}{dx}\right|_{x=0} = f(0)$$

Com isso podemos definir a Delta de Dirac a partir de uma sequência de funções que satisfaçam as propriedades.

Espaço das Funções Teste $f(x)$: $\mathcal{D}(\mathbb{R})$

Conjunto das funções $f(x)$ em $\mathbb{R}$ em que $f(x) \neq 0$ para o intervalo $(a,b) \in \mathbb{R}$. $f(x)$ também $C^{\infty}(\mathbb{R})$. Ou seja,

$$\begin{cases} f(x) \neq 0 & , x \in (a,b) \\ f(x) = 0 & , x \notin (a,b) \end{cases} \quad ; C^{\infty}(\mathbb{R})$$

Exemplo:

$$w(x) = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{-1}{1-x^2}\right) & |x| < 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases} \qquad x \in (1,-1)$$

$$w_{\varepsilon}(x) = \frac{1}{\varepsilon} w(x/\varepsilon) = \begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon} \exp\left[\cancel{\dfrac{-\varepsilon^2}{(\varepsilon^2 - x^2)}}\right] & |x| < \varepsilon \\ 0 & |x| \geq \varepsilon \end{cases}$$

$$x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$$

A normalização $\bar{w}_\varepsilon(x) = C_\varepsilon w_\varepsilon(x)$ de forma que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \bar{w}_\varepsilon(x)\,dx = 1$$

A função característica é:

$$\chi_U = \begin{cases} 1 & x \in U \\ 0 & x \notin U \end{cases}$$

Podemos construir $\eta_u(x,\varepsilon)$ como

$$U_\varepsilon = (a-\varepsilon, b+\varepsilon)$$

$$U_{3\varepsilon} = (a-3\varepsilon, b+3\varepsilon)$$

$$\eta_u(x,\varepsilon) = \begin{cases} 1 & x \in U_\varepsilon \\ 0 & x \in U_{3\varepsilon} \end{cases}$$

$$\eta_u(x,\varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{U_{2\varepsilon}}(v)\, \overline{w}_{\varepsilon}(x-v)\, dv$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{U_{2\varepsilon}}(x-v)\, \overline{w}_{\varepsilon}(v)\, dv$$

?

Definição: Sequência Delta: $\{\delta_n(x)\}$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x)\, dx = 1 \quad \Delta$$

$\delta_n(x)$ satisfaz

e com $f(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x) f(x)\, dx = f(0)$$

Definimos Delta de Dirac como

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x)\, dx = f(0) = \lim_{n\to\infty} \int \delta_n(x) f(x)\, dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,dx = 1 = \lim_{n\to\infty} \int \delta_n(x)\,dx$$

Exemplos de sequências de satisfazem essas propriedades:

1) $\delta_n(x) = \dfrac{n}{\pi} \dfrac{1}{1+n^2x^2}$

2) $\delta_n(x) = \dfrac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2x^2}$

3) $\delta_n(x) = \dfrac{1}{n\pi} \dfrac{\operatorname{sen}^2(nx)}{x^2}$

4) $\delta_n(x) = n J_n[n(1+x)]$

→ n-ésima função de Bessel

Propriedades da função Delta :

i) $$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)\, f(x)\, dx = f(a)$$

ii) $$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(ax)\, f(x)\, dx = \frac{1}{|a|} f(0)$$

função teste

iii) $$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,\delta(ax)\, f(x)\, dx = g(0)\, f(0)$$

iv) $$\int_{-\infty}^{\infty} \delta[g(x)]\, f(x)\, dx = \sum \frac{f(x_i)}{|g'(x_i)|}$$, x_i são as raízes de $g(x)$

$$\begin{cases} g(x_i) = 0 \\ g'(x_i) \neq 0 \end{cases}$$

n-ésima derivada

n-ésima derivada

v) $$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(x)\, f(x)\, dx = (-1)^n f^{(n)}(0)$$

Expansão do Delta Dirac :

i) Série de Potência :

$$f(x) = \sum C_n \underbrace{\varphi_n(x)}_{\text{Base ortonormal}} \quad (1)$$

$$C_n = \int_a^b f(x)\, \varphi_n^*(x)\, \underbrace{\rho(x)}_{\text{Peso do produto interno}}\, dx \quad (2)$$

Substituindo (2) em (1),

$$f(x) = \int_a^b \sum_n \varphi_n^*(y)\, \varphi_n(x)\, f(y)\, \rho(y)\, dy$$

Comparando com a expressão,

$$f(x) = \int \delta(y-x)\, f(y)\, dy$$

Percebemos que

$$\delta(y-x) = \sum_n \varphi_n(x)\, \varphi_n^*(y)\, \rho(y)$$

Expansão válida no domínio de $f(x)$

(ii) Relação entre $H'(x)$ e $\delta(x)$

↳ função escada

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

Partindo de

Integrando por partes

$$\int_{-\infty}^{\infty} H'(x) f(x)\,dx = \cancel{H(x) f(x)\Big|_{-\infty}^{\infty}}^{\,0} - \int_{-\infty}^{\infty} H(x) f'(x)\,dx$$

$$= -\int_{0}^{\infty} f'(x)\,dx = -f(x)\Big|_{0}^{\infty}$$

$$= -(-f(0)) = f(0)$$

Delta Dirac em mais dimensões:

$$\int \delta(r-r') f(r)\, dr = f(r')$$

$$\int \delta(r-r') f(r)\, dr = f(r')$$

$\hookrightarrow \delta(r-r') = \delta(x-x')\,\delta(y-y')\,\delta(z-z')$

$\hookrightarrow \delta(r-r') = \dfrac{\delta(r-r')}{r^2}\,\dfrac{\delta(\theta-\theta')}{\operatorname{sen}\theta}\,\delta(\phi-\phi')$