Derivada Covariante (04/11/20)

Derivar implica em comparar objetos em pontos próximos (no limite que os pontos se aproximam). No entanto, vimos que a definição de tensores em espaços curvos é local: apenas num ponto é legítimo operar como tensores.

No espaço plano, a derivada de um campo vetorial se baseia em mover o vetor do ponto $x+\varepsilon$ para o ponto x e realizar a subtração.

Esse procedimento de transporte paralelo é trivial em espaços planos.

Em espaços curvos o transporte paralelo depende do caminho por onde é realizado.

Conexões:

Considere um campo vetorial $\vec{V}$, que pode ser escrito como $\vec{V} = V^{\mu} \vec{e}_{\mu}$ onde V^{μ} são as componentes, funções gerais de posição.

Em geral, a base ϕ_μ também pode depender do ponto. Suponha queremos calcular a taxa de variação do campo $\vec{V}$ ao longo de uma curva parametrizada por λ. Temos,

$$\frac{d\vec{V}}{d\lambda} = \frac{\vec{V}(\lambda+\Delta\lambda) - \vec{V}(\lambda)}{\Delta\lambda}$$

$$= \frac{V^\mu(\lambda+\Delta\lambda)\cdot\phi_\mu(\lambda+\Delta\lambda) - V^\mu(\lambda)\,\phi_\mu(\lambda)}{\Delta\lambda}$$

Se $\phi_\mu(\lambda+\Delta\lambda) = \phi_\mu(\lambda)$, como ocorre em coordenadas cartesianas, segue que

$$\frac{d\vec{V}}{d\lambda} = \frac{V^\mu(\lambda+\Delta\lambda) - V^\mu(\lambda)}{\Delta\lambda}\cdot\phi_\mu$$

Derivadas em coordenadas polares:

Imagine um campo vetorial $\vec{V}$, decomposto em coordenadas cartesianas $V^a\phi_a$ ou em coordenadas polares $V^{a'}\phi_{a'}$. A derivada do campo $\vec{V}$ ao longo da curva parametrizada por λ é, em coordenadas cartesianas,

$$\frac{d\vec{V}}{d\lambda} = \frac{dV^a}{dx^b}\underbrace{\frac{dx^b}{d\lambda}}_{\to U^b} e_a$$

e_a → não muda ao longo da curva

$$= \partial_b V^a U^b e_a$$

$$= U^b(\partial_b V^a) e_a$$

Em coordenadas polares,

$$\frac{d\vec{V}}{d\lambda} = \frac{d(V^{a'} e_{a'})}{d\lambda} = \left(\frac{dV^{a'}}{d\lambda} e_{a'} + V^{a'}\frac{de_{a'}}{d\lambda}\right)$$

$$= \frac{dV^{a'}}{dx^{b'}}\underbrace{\frac{dx^{b'}}{d\lambda}}_{\to U^{b'}} e_{a'} + V^{a'}\frac{de_{a'}}{dx^{b'}}\underbrace{\frac{dx^{b'}}{d\lambda}}_{\to U^{b'}}$$

$$= (\partial_{b'} V^{a'})U^{b'} e_{a'} + V^{a'}(\partial_{b'} e_{a'})U^{b'}$$

$$= U^{b'}\left[\partial_{b'} V^{a'} e_{a'} + V^{a'}(\partial_{b'} e_{a'})\right]$$

$(\partial_{b'} \Phi_{a'})$ não é zero pois $\Phi_{a'} = \{\Phi_r, \Phi_\theta\}$ mudam ao longo da curva parametrizada.

Agora a derivada do vetor de base deve ser, ele mesmo, um vetor, e este deve poder ser expandido em termos dos próprios vetores da base. Ou seja, podemos definir campos $\Gamma^{c'}_{a'b'}$ tais que

$$\partial_{b'} \Phi_{a'} = \Gamma^{c'}_{a'b'} \Phi_{c'}$$

Em Γ^{c}_{ab}, o índice a dá o vetor de base que está sendo derivado, b diz a coordenada em relação à qual estamos derivando e c denota a componente o vetor derivado resultante. Vamos calcular esses coeficientes explicitamente no caso de coordenadas polares.

Sabemos que $\Phi_r = \cos\theta\, \Phi_x + \sin\theta\, \Phi_y$ e $\Phi_\theta = -r\sin\theta\, \Phi_x + r\cos\theta\, \Phi_y$. Portanto,

$$\frac{\partial \Phi_r}{\partial r} = 0 \longrightarrow \Gamma^{r}_{rr} = \Gamma^{\theta}_{rr} = 0$$

$$\frac{\partial \phi_r}{\partial \theta} = -\text{sen}\,\theta\, \phi_x + \cos\theta\, \phi_y = \frac{1}{r}\phi_\theta$$

$$\hookrightarrow \Gamma^r_{r\theta} = 0 \; ; \; \Gamma^\theta_{r\theta} = 1/r$$

$$\frac{\partial \phi_\theta}{\partial r} = -\text{sen}\,\theta\, \phi_x + \cos\theta\, \phi_y = \frac{1}{r}\phi_\theta$$

$$\hookrightarrow \Gamma^r_{\theta r} = 0 \; ; \; \Gamma^\theta_{\theta r} = 1/r$$

$$\frac{\partial \phi_\theta}{\partial \theta} = -r\cos\theta\, \phi_x - r\,\text{sen}\,\theta\, \phi_y = -r\,\phi_r$$

$$\hookrightarrow \Gamma^r_{\theta\theta} = -r \; ; \; \Gamma^\theta_{\theta\theta} = 0$$

Com isso podemos escrever,

$$\frac{d\vec{V}}{d\lambda} = \frac{d(V^{a'}\phi_{a'})}{d\lambda} = \left(\frac{dV^{a'}}{d\lambda}\right)\phi_{a'} + V^{a'}\frac{d\phi_{a'}}{d\lambda}$$

$$= \left(\frac{dV^{a'}}{dx^{b'}}\frac{dx^{b'}}{d\lambda}\right)\phi_{a'} + V^{a'}\frac{d\phi_{a'}}{dx^{b'}}\frac{dx^{b'}}{d\lambda}$$

$$= (\partial_{b'} V^{a'}) U^{b'} \phi_{a'} + V^{a'} (\partial_{b'} \phi_{a'}) U^{b'}$$

$$= U^{b'} \left[(\partial_{b'} V^{a'}) \phi_{a'} + V^{a'} (\partial_{b'} \phi_{a'}) \right]$$

$$\hookrightarrow \Gamma^{c'}_{a'b'} \phi_{c'}$$

$$= U^{b'} \left[(\partial_{b'} V^{a'}) \phi_{a'} + V^{a'} \Gamma^{c'}_{a'b'} \phi_{c'} \right]$$

$$= U^{b'} \left[(\partial_{b'} V^{a'}) \phi_{a'} + V^{c'} \Gamma^{a'}_{c'b'} \phi_{a'} \right]$$

$$= U^{b'} \underbrace{\left[(\partial_{b'} V^{a'}) + V^{c'} \Gamma^{a'}_{c'b'} \right]}_{\text{Derivada Covariante } (\nabla_{b'} V^{a'})} \phi_{a'}$$

$$= U^{b'} \nabla_{b'} V^{a'} \phi_{a'}$$

Definimos $\nabla_{b'} V^{a'} = \partial_{b'} V^{a'} + \Gamma^{a'}_{c'b'} V^{c'}$.
Em coordenadas polares o divergente é

$$\nabla_{a'} V^{a'} = \partial_{a'} V^{a'} + \Gamma^{a'}_{c'a'} V^{c'}$$

$$= \partial_r V^r + \partial_\theta V^\theta + \frac{1}{r} V^r$$

Caso Geral:

$$\Gamma^{c}_{ab} \phi_c = \partial_b \phi_a$$

→ a e c alteram somente as componentes

→ b altera o tensor já que é esse o índice responsável pela derivada.

Os coeficientes da conexão representam as componentes do tensor $\nabla \phi_b$

$$\nabla_\alpha (\phi_\beta)^\gamma = \partial_\alpha (\phi_\beta)^\gamma + \Gamma^{\gamma}_{\alpha\rho} (\phi_\beta)^\rho = \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}$$

Derivada Covariante de um tensor arbitrário:

Dado $\tilde{p}$ um campo de 1-forma e $\vec{V}$ um campo vetorial, a função escalar ϕ pode ser escrito como,

$$\phi = \tilde{p}(\vec{V})$$

A derivada $\nabla_\alpha \phi = \nabla_\alpha (p_\beta V^\beta)$. Como ϕ é uma função escalar

$$\nabla_\alpha \phi = \partial_\alpha (p_\beta V^\beta) = (\partial_\alpha p_\beta) V^\beta + p_\beta (\partial_\alpha V^\beta)$$

Sabemos que $\nabla_\alpha V^\beta = \partial_\alpha V^\beta + \Gamma^\beta_{\lambda\alpha} V^\lambda$. Isolando $\partial_\alpha V^\beta$ e substituindo na equação acima temos,

$$\nabla_\alpha \phi = (\partial_\alpha p_\beta) V^\beta + p_\beta (\nabla_\alpha V^\beta - \Gamma^\beta_{\lambda\alpha} V^\lambda) \quad (1)$$

A derivada covariante deve obedecer também a seguinte propriedade,

$$(2) \quad \nabla_\alpha \phi = \nabla_\alpha (p_\beta V^\beta) = V^\beta (\nabla_\alpha p_\beta) + p_\beta (\nabla_\alpha V^\beta)$$

Igualando as expressões (1) e (2),

$$V^\beta(\nabla_\alpha p_\beta) + \cancel{p_\beta(\nabla_\alpha V^\beta)} = (\partial_\alpha p_\beta)V^\beta + \cancel{p_\beta(\nabla_\alpha V^\beta - \Gamma^\beta_{\lambda\alpha} V^\lambda)}$$

$$V^\beta(\nabla_\alpha p_\beta) = (\partial_\alpha p_\beta)V^\beta - p_\lambda \Gamma_{\beta\alpha}{}^\lambda V^\beta$$

$$= \left[\partial_\alpha p_\beta - \Gamma_{\beta\alpha}{}^\lambda p_\lambda\right] V^\beta$$

O que faz $\nabla_\alpha p_\beta = \partial_\alpha p_\beta - \Gamma_{\beta\alpha}{}^\lambda p_\lambda$

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla_\alpha V^\beta &= \partial_\alpha V^\beta + \Gamma_{\lambda\alpha}{}^\beta V^\lambda \\ \nabla_\alpha p_\beta &= \partial_\alpha p_\beta - \Gamma_{\beta\alpha}{}^\lambda p_\lambda \end{aligned}}$$

Derivada Covariante

Para o tensor $T_\nu{}^\mu$,

$$\nabla_\alpha T_\nu{}^\mu = \partial_\alpha T_\nu{}^\mu + \Gamma_{\beta\alpha}{}^\mu T_\nu{}^\beta - \Gamma_{\nu\alpha}{}^\lambda T_\lambda{}^\mu$$

$$\nabla_\alpha T_\nu{}^\mu = \partial_\alpha T_\nu{}^\mu + \Gamma_{\beta\alpha}{}^\mu T_\nu{}^\beta - \Gamma_{\nu\alpha}{}^\lambda T_\lambda{}^\mu$$

Relação entre conexão e métrica:

A ideia é, portanto, carregar a noção de transporte paralelo do espaço-tempo de Minkowski a um referencial local de Lorentz (RLL).

Num RLL construído ao redor do ponto P, os vetores da base não mudam de ponto a ponto.

$$\nabla e_\beta = 0$$

O que leva $\Gamma^\lambda_{\alpha\beta} = 0$. Esse sistema de coordenadas já é definido. Nesse referencial

$$\nabla_\alpha = \partial_\alpha$$

1ª condição:

$$\boxed{\nabla_{\hat\gamma}\, g_{\hat\alpha\hat\beta} = \partial_{\hat\gamma}\, g_{\hat\alpha\hat\beta} = 0}$$

Já que RLL, g tem diag(-1, 1, 1, 1)

→ Condição de Compatibilidade entre a métrica e a conexão

2ª condição:

$$\Gamma^\lambda_{\alpha\beta} = \Gamma^\lambda_{\beta\alpha}$$

Essa condição parte de,

- ϕ função arbitrária
- $\partial_\alpha \phi$ 1-forma
- $\nabla_\beta \partial_\alpha \phi$ tensor $(0,2)$

Calculamos

$$\nabla_\alpha \nabla_\beta \phi = \nabla_\beta \nabla_\alpha \phi$$

$$\partial_\alpha \partial_\beta \phi = \partial_\beta \partial_\alpha \phi$$

$$\nabla_\alpha (\phi_\beta) = \nabla_\beta (\phi_\alpha)$$

$$\cancel{\partial_\alpha \phi_\beta} - \Gamma_{\beta\alpha}{}^{\lambda} \phi_\lambda = \cancel{\partial_\beta \phi_\alpha} - \Gamma_{\alpha\beta}{}^{\lambda} \phi_\lambda$$

$$\boxed{\Gamma_{\beta\alpha}{}^{\lambda} = \Gamma_{\alpha\beta}{}^{\lambda}}$$

$\square$

Essa condição é chamada de Torção Nula

Dada uma conexão, definimos o tensor de Torção como a parte antissimétrica da conexão

$$T_{\alpha\beta}^{\ \ \gamma} = \Gamma_{\alpha\beta}^{\ \ \gamma} - \Gamma_{\beta\alpha}^{\ \ \gamma}$$

A condição de compatibilidade entre métrica e a conexão é condição de torção Nula.

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla_\alpha g_{\mu\nu} &= \partial_\alpha g_{\mu\nu} = 0 \\ \Gamma_{\alpha\beta}^{\ \ \lambda} &= \Gamma_{\beta\alpha}^{\ \ \lambda} \end{aligned}}$$

A compatibilidade para 3 permutações de índices é,

1) $\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = \partial_\alpha g_{\mu\nu} - \Gamma_{\mu\alpha}^{\ \ \lambda} g_{\lambda\nu} - \Gamma_{\mu\alpha}^{\ \ \lambda} g_{\mu\lambda}$

2) $\nabla_\nu g_{\alpha\mu} = \partial_\nu g_{\alpha\mu} - \Gamma_{\alpha\nu}^{\ \ \lambda} g_{\lambda\mu} - \Gamma_{\mu\nu}^{\ \ \lambda} g_{\alpha\lambda}$

3) $\nabla_\mu g_{\nu\alpha} = \partial_\mu g_{\nu\alpha} - \Gamma_{\nu\mu}^{\ \ \lambda} g_{\lambda\alpha} - \Gamma_{\alpha\mu}^{\ \ \lambda} g_{\nu\lambda}$

Subtraindo 2 e 3 de 1 e usando a simetria da conexão obtemos

$$\partial_\alpha g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\nu\alpha} - \partial_\nu g_{\alpha\mu} + 2\Gamma_{\mu\nu}^{\ \ \gamma} g_{\gamma\alpha} = 0$$

Resolvendo para conexão,

$$\Gamma_{\mu\nu}{}^{\theta} = \frac{1}{2} g^{\theta\rho} \left(\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu} \right)$$

Lei de Transformação de Conexão:

$$\Gamma_{\beta\alpha}{}^{\gamma} = \nabla_\alpha (\phi_\beta)^\gamma$$

$$\nabla_{\alpha'} (\phi_{\beta'})^{\gamma'} = \Lambda^{\alpha}_{\alpha'} \Lambda^{\gamma'}_{\gamma} \nabla_\alpha (\Lambda^{\beta}_{\beta'} \phi_\beta)^\gamma$$

$$= \Lambda^{\alpha}_{\alpha'} \Lambda^{\gamma'}_{\gamma} \left[(\nabla_\alpha \Lambda^{\beta}_{\beta'}) \phi_\beta + \Lambda^{\beta}_{\beta'} \left[\nabla_\alpha (\phi_\beta) \right]^\gamma \right]$$

$$= \Lambda^{\alpha}_{\alpha'} \Lambda^{\gamma'}_{\gamma} \left[\partial_\alpha \Lambda^{\gamma}_{\beta'} + \Lambda^{\beta}_{\beta'} \Gamma_{\alpha\beta}{}^{\gamma} \right]$$

$$= \Lambda^{\alpha}_{\alpha'} \Lambda^{\gamma'}_{\gamma} \partial_\alpha \Lambda^{\gamma}_{\beta'} + \Lambda^{\alpha}_{\alpha'} \Lambda^{\gamma'}_{\gamma} \Lambda^{\beta}_{\beta'} \Gamma_{\alpha\beta}{}^{\gamma}$$

* A conexão não se transforma como um tensor por causa do 2º termo da equação.

→ Mantendo β fixo, a conexão pode ser vista como um tensor (1,1)

→ Variando β, o segundo termo aparece e a conexão acaba não se comportando como um tensor (2,1).

* A derivada covariante de um tensor (n, m) é um tensor (n+1, m).

$$\nabla_{\mu'} V^{\nu'} = \partial_{\mu'} V^{\nu'} + \Gamma^{\nu'}_{\lambda'\mu'} V^{\lambda'}$$

$$= \Lambda^{\mu}_{\mu'} \partial_{\mu} (\Lambda^{\nu'}_{\nu} V^{\nu}) + \Gamma^{\nu'}_{\lambda'\mu'} \Lambda^{\lambda'}_{\lambda} V^{\lambda}$$

$$= \Lambda^{\mu}_{\mu'} \left[V^{\nu} (\partial_{\mu} \Lambda^{\nu'}_{\nu}) + \Lambda^{\nu'}_{\nu} (\partial_{\mu} V^{\nu}) \right]$$

$$+ \Lambda^{\lambda'}_{\lambda} V^{\lambda} \left[\Lambda^{\nu'}_{\nu} \Lambda^{\lambda}_{\lambda'} \Lambda^{\mu}_{\mu'} \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} + \Lambda^{\mu}_{\mu'} \Lambda^{\nu'}_{\nu} (\partial_{\mu} \Lambda^{\nu}_{\lambda}) \right]$$

$$= \Lambda^{\mu}_{\mu'} V^{\lambda} (\partial_{\mu} \Lambda^{\lambda'}_{\lambda}) + \Lambda^{\mu}_{\mu'} \Lambda^{\lambda'}_{\lambda} \partial_{\mu} V^{\lambda}$$

Trocar por ν

$$+ \Lambda^{\lambda'}_{\lambda} V^{\lambda} \Lambda^{\nu'}_{\nu} \Lambda^{\lambda}_{\lambda'} \Lambda^{\mu}_{\mu'} \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} + \Lambda^{\lambda'}_{\lambda} V^{\lambda} \Lambda^{\mu}_{\mu'} \Lambda^{\nu'}_{\nu} \partial_{\mu} \Lambda^{\nu}_{\lambda}$$

$$= \cancel{\Lambda^{\lambda'}_{\lambda}} \left(\Lambda^{\nu'}_{\nu} \cancel{\Lambda^{\lambda}_{\lambda'}} \Lambda^{\mu}_{\mu'} \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} + \Lambda^{\mu}_{\mu'} \Lambda^{\nu'}_{\nu} \partial_{\mu} \Lambda^{\nu}_{\lambda} \right) V^{\lambda}$$

$$+ \Lambda^{\mu}{}_{\mu'} V^{\gamma} \left(\partial_\mu \Lambda^{\nu'}{}_{\nu}\right) + \underline{\Lambda^{\mu}{}_{\mu'}}\, \underline{\Lambda^{\nu'}{}_{\nu}} \left(\partial_\mu V^{\lambda}\right)$$

$$= \Lambda^{\mu}{}_{\mu'} \Lambda^{\nu'}{}_{\nu} \left(\Gamma^{\nu}{}_{\lambda\mu} V^{\lambda} + \partial_\mu V^{\lambda} \right)$$

$$+ \Lambda^{\mu}{}_{\mu'} V^{\gamma}$$