Mapas Multilineares

• Tensores $\iff$ Mapas Multilineares

$(V, \mathbb{R})$ e $(V^*, \mathbb{R})$

Tensor

$$\begin{cases} T: \underbrace{V \times \cdots \times V}_{m} \times \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{n} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (v_1, \cdots, v_m, \beta^1, \cdots, \beta^n) \longrightarrow T(v_1, \cdots, v_m, \beta^1, \cdots, \beta^n) \end{cases}$$

$$(v_i, \beta^j) \to T(v_i, \beta^j)$$

$$i = 1, \cdots, m \; ; \; j = 1, \cdots, n$$

Obs: A ordem dos espaços vetoriais importa.

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

$$\Downarrow$$

$$(x, y) \neq (y, x)$$

Multilinear: Mapa que é linear em todas as entradas

$v_i, w_i \in V$; $\beta^j, \alpha^j \in V^*$

$av_i + bw_i$; $c\beta^j + d\alpha^j$

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$

$$T(v_1, \dots, av_i + bw_i, \dots, v_m, \beta_1, \dots, \beta^n)$$
$$= aT(v_1, \dots, v_i, \dots, v_m, \beta_1, \dots, \beta^n)$$
$$+ bT(v_1, \dots, w_i, \dots, v_m, \beta_1, \dots, \beta^n)$$

* Um tensor de Ordem (n, m)

n: Nº de vezes V^*

m: Nº de vezes V

$$\boxed{\alpha : V \longrightarrow \mathbb{R}}$$

$\hookrightarrow V^*$ = Tensor de ordem $(0, 1)$

$$\boxed{v : V^* \longrightarrow \mathbb{R}}$$

V = Tensor de ordem $(1,0)$

* Tensores de ordem (n, m) formam um espaço vetorial.

Produto Tensorial

- Tensores como mapas Multilineares
- $\phi^i \in V^*$ $\qquad \phi^i(\phi_j) = \delta^i_j$
- $\phi_i \in V$

$V^* = Hom(V, \mathbb{R})$

↳ Tensor de ordem $(0,1)$

- $\beta \in V^*$ $\qquad \beta(v^i \phi_i) = v^i \beta(\phi_i)$

$\beta = \beta_i \phi^i$; $\boxed{\beta_i = \beta(\phi_i)}$

$$\phi^i(\phi_j) = \delta^i_j$$

• $T(v_1,\dots,v_m,\beta^1,\dots,\beta^n)$

$$T(v_1^{i_1}\phi_{i_1},\dots,v_m^{i_m}\phi_{i_m},\beta^1_{j_1}\phi^{j_1},\dots,\beta^n_{j_n}\phi^{j_n}) =$$

$$v_1^{i_1}\cdots v_m^{i_m}\,\beta^1_{j_1}\cdots\beta^n_{j_n}\,\boxed{T(\underbrace{\phi_{i_1},\dots,\phi_{i_m}}_{\substack{\text{Base de}\\ \text{cada espaço}\\ V}},\underbrace{\phi^{j_1},\dots,\phi^{j_n}}_{\substack{\text{Base de cada}\\ \text{espaço}\\ V^*}})}$$

$$T^{j_1\dots j_n}_{i_1\dots i_m}$$ Tensor de Ordem (n,m)

Tensores de Ordem $(0,2)$

$$T: V\times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

Formas Bilineares (Produto Escalar)

$$(v_1,v_2)\longrightarrow T(v_1,v_2)$$

$$T(v_1^i\phi_i,v_2^j\phi_j) = v_1^i v_2^j\,T(\phi_i,\phi_j)$$

$$= v_1^i v_2^j\,T_{ij}$$

Podem ser representados por elementos de uma matriz $\underline{\underline{n \times n}}$

$\dim V = n$

$$T = T_{ij}\, \phi^i \otimes \phi^j$$

↳ Produto Tensorial

$$\phi^i \otimes \phi^j (\phi_k, \phi_l) = \phi^i(\phi_k) \cdot \phi^j(\phi_l)$$

$$= \underline{\delta^i_k\, \delta^j_l}$$

$$T_{ij}\, \phi^i \otimes \phi^j (v_1, v_2)$$

$$T_{ij}\, \phi^i \otimes \phi^j (v_1^k \phi_k, v_2^l \phi_l)$$

$$T_{ij}\, \phi^i(v_1^k \phi_k) \cdot \phi^j(v_2^l \phi_l)$$

$$T_{ij}\, v_1^k \phi^i(\phi_k) \cdot v_2^l \phi^j(\phi_l)$$

$$T_{ij}\, v_1^k v_2^l\, \delta^i_k\, \delta^j_l$$

$$T_{ij}\, v_1^i\, v^j$$

$\phi^i \otimes \phi^j \in$ Tensores de ordem (0,2) e formo uma base

dimensão n^2

O produto Tensorial faz

$\cdot\ T_1^0 \times T_1^0 \longrightarrow T_2^0$

$T_{ij}\, e^i \otimes e^j$

Que pode ser definido como:

$$T^i_j \otimes T^k_l \longrightarrow T^{i+k}_{j+l}$$

Propriedades:

- Associatividade: $(z \otimes v) \otimes w = z \otimes (v \otimes w)$

  $z, v, w \in V$

- Multiplicação por escalar:

  $\alpha \in \mathbb{R}$

  $\alpha(v \otimes w) = (\alpha v) \otimes w = v \otimes (\alpha w)$

* Produto Tensorial

$$T: \underbrace{V \times \cdots \times V}_{m} \times \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{n} \to \mathbb{R}$$

$$T \in T^n_m(V)$$

O tensor é aplicado em vetores de V

$$T = T^{i_1 \cdots i_m}_{j_1 \cdots j_n} \; \phi_{j_1} \otimes \cdots \phi_{j_n} \otimes \phi^{i_1} \otimes \cdots \otimes \phi^{i_m}$$

componentes do tensor (m,n)

Mudança de Base em Tensores:

$$T^{i_1 \cdots i_m}_{j_1 \cdots j_m}$$

Transformam com a inversa (Contravariantes)

Transforma com a própria matriz (covariantes)

Tensores Simétricos

$$S \in T_2^0(V) \; ; \; S = S_{ij}\, \phi^i \otimes \phi^j$$

$$S(v_1, v_2) = S_{ij}\, \phi^i \otimes \phi^j (v_1^l \phi_l, v_2^k \phi_k)$$

$$= v_1^l v_2^k S_{ij}\, \phi^i \otimes \phi^j (\phi_l, \phi_k)$$

$$= v_1^l v_2^k S_{ij}\, \phi^i(\phi_l) \cdot \phi^j(\phi_k)$$

$$= v_1^l v_2^k S_{ij}\, \delta^i_l \delta^j_k = \boxed{v_1^i v_2^j S_{ij}}$$

$$S(v_2, v_1) = S_{ij}\, \phi^i(v_2)\ \phi^j(v_1)$$

$$= \boxed{v_2^i v_1^j S_{ij}}$$

Desenvolvendo $S(v_1, v_2)$ e $S(v_2, v_1)$,

$$S(v_1, v_2) = S_{ij}\, v_1^i v_2^j$$

$$= S_{11} v_1^1 v_2^1 + S_{12} v_1^1 v_2^2 + S_{21} v_1^2 v_2^1 + S_{22} v_1^2 v_2$$

$$S(v_2, v_1) = S_{ij}\, v_2^i v_1^j$$

$$= S_{11} v_2^1 v_1^1 + S_{12} v_2^1 v_1^2 + S_{21} v_2^2 v_1^1 + S_{22} v_2^2 v_1^2$$

Para que esses dois tensores sejam iguais

$$\boxed{S_{12} = S_{21}}$$

De maneira geral $\boxed{S_{1\cdots i\cdots j\cdots n} = S_{1\cdots j\cdots i\cdots n}}$

Esse comportamento também é válido para $T_0^n(V)$

$$\boxed{S^{1\cdots i\cdots j\cdots n} = S^{1\cdots j\cdots i\cdots n}}$$

Tensores Antisimétricos:

Calculando

$$A_2^0(V) \subset T_2^0(V)$$

$$A(v_1, v_2) = -A(v_2, v_1)$$

$$A_{ij} v_1^i v_2^j = -A_{ij} v_2^i v_1^j$$

Desenvolvendo os índices chegamos em,

$$A_{ij} = -A_{ji}$$

De maneira geral,

$$\boxed{A_{1 \dots i \dots j \dots n} = -A_{1 \dots j \dots i \dots n}}$$

Tensor Métrico:

$V = (V, +, \mathbb{R})$ $\quad g : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$

$\qquad\qquad\qquad v_1, v_2 \longmapsto g(v_1, v_2)$

Produto Interno

Propriedades: $\quad a \in \mathbb{R}, \; v_1, v_2, w \in V$

- $g(v_1 + v_2, w) = g(v_1, w) + g(v_2, w)$
- $g(a v_1, v_2) = a\, g(v_1, v_2)$
- $g(v_1, v_2) = g(v_2, v_1)$ (Simétrico)
- $\boxed{g(v_1, v_1) \geq 0}$; $\boxed{g(v, v) = 0 \Rightarrow (v = 0)}$

Positivo definido | não degenerado

$g \equiv$ Tensor métrico

Esse tensor nos permite definir uma noção de distância no espaço V

Norma de um vetor:

$$|g| = \sqrt{g(v,v)}$$

→ Distância entre v_1 e v_2

$$d(v_1, v_2) = |v_1 - v_2|$$

Base de V^* partindo do tensor métrico:

$(V, g) \longrightarrow v^* \in V^*$

$v \in V$

- $\forall v \in V, \exists v^*, v \in V \Big/ \; v^* = g(v) = \langle v, \; \rangle$

$$\boxed{w \in V; \; v^*(w) = \langle v, w \rangle}$$