Lista 4 - Butkov (1, ..., 7, 12)

(28/10/20)

Otaviano Cruz

Questão 3)

Um tensor de ordem (0,2) é descrito a partir do mapa T,

$$T : V \otimes V \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(v, w) \longmapsto T(v, w)$$

Onde V é um espaço vetorial de dimensão n. Então esse tensor terá a dimensão

$$\dim T = \dim(V) \cdot \dim(V)$$

$$= n \cdot n = n^2$$

Ref.: PDF Elon Cál. Tensorial

Sabendo que o tensor T pode ser descrito a partir de duas diferentes contribuições, simétrica e antissimétrica, de forma que,

$$T = S + A$$

Onde S é um tensor simétrico e A um tensor antissimétrico. Ou seja, a dimensão de T,

$$\dim T = \dim S + \dim A \quad (2)$$

Com tal expressão, temos a $\dim(T) = n^2$ e agora vamos calcular a dim S de forma a fazer uso da representação matricial.

Um tensor simétrico S tem a seguinte condição,

$$S_{ij} = S_{ji}$$

Ou seja, há um "espelhamento" de elementos em relação à diagonal principal. Por isso a dim S é o número de elementos da diagonal principal somado aos elementos acima dela.

No caso de $n = 3$ temos a matriz S

$$S = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix}$$

→ elementos significativos

$\cancel{s_{ij}} = \cancel{s_{ji}}$

Esse número de elementos é dado por

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

Para $n=3$, o número de elementos é 6.
Com isso chegamos à dim S

$$\boxed{\dim S = \frac{n(n+1)}{2}} \quad (3)$$

Assim, substituimos (3) em (2),

$$\dim T = \dim S + \dim A$$

$$n^2 = \frac{n(n+1)}{2} + \dim A.$$

Isolando dim A temos

$$\boxed{\dim A = \frac{n(n-1)}{2}} \quad (4)$$

Portanto chegamos a

$$\dim S = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\dim A = \frac{n(n-1)}{2}$$

Questão 4)

Em 3 dimensões, os Símbolos de Levi-Civita se relaciona pelo Delta de Kronecker a partir da expressão abaixo,

$$\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{lmn} = \det\begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix}$$

Desenvolvendo o determinante chegamos

$$\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{lmn} = \delta_{il}(\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km})$$
$$-\delta_{im}(\delta_{jl}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{kl}) + \delta_{in}(\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl})$$

Fazendo $i=l$ e $j=m$ temos,

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijn} = \delta_{ii}(\delta_{jj}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{kj})$$
$$-\delta_{ij}(\delta_{ji}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{ki}) + \delta_{in}(\delta_{ji}\delta_{kj} - \delta_{jj}\delta_{ki})$$

$$= 3(3\delta_{kn} - \delta_{kn}) - \cancel{\delta_{kn}} + \cancel{\delta_{kn}}$$
$$+ \delta_{kn} - 3\delta_{kn}$$
$$= 9\delta_{kn} - 3\delta_{nk} + \delta_{kn} - 3\delta_{kn}$$
$$= 2\delta_{nk}$$

Para $n=k$ fazemos $\sum_n 2\delta_{nn} = 2+2+2 = 6$

Questão 5)

Partindo da definição do produto externo,

$$A\times B = \varepsilon_{ijk}A^i B^j$$

Além disso definimos o produto interno como

$$A.B = \delta^i_j A_i B^j = A_i B^j$$

a) $\left([A\times B].[C\times D]\right)$

$$(A\times B).(C\times D)$$

$$(A^i B^j \varepsilon_{ijk}).(C^l D^m \varepsilon_{lmz})$$

$$A^i B^j C^l D^m \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmz} \delta_{kz}$$

$$A^i B^j C^l D^m \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmk}$$

$$A^i B^j C^l D^m (-\delta_{im}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jm})$$

$$-(A.D)(B.C) + (A.C)(B.D)$$

b)

$$\underbrace{A\times(B\times C)}_{1} + \underbrace{C\times(A\times B)}_{2} + \underbrace{B\times(C\times A)}_{3} = 0$$

Para 1:

$$A\times(B\times C) = (A\cdot C)B - (A\cdot B)C$$

Para 2:

$$\overset{A}{C}\times(\overset{B}{A}\times\overset{C}{B}) = (C\cdot B)A - (C\cdot A)B$$

Para 3:

$$\overset{A}{B}\times(\overset{B}{C}\times\overset{C}{A}) = (B\cdot A)C - (B\cdot C)A$$

Somando as contribuições

$$\cancel{(A\cdot C)B} - \cancel{(A\cdot B)C} + \cancel{(C\cdot B)A} - \cancel{(C\cdot A)B} + \cancel{(B\cdot A)C} - \cancel{(B\cdot C)}A$$

$$= 0$$

$\square$

$$\begin{array}{ccc} A & B & C \end{array}$$

c) $[A \times [B \times [C \times D]]]$

$A \times [B \times (\varepsilon_{ijk} C^i D^j)$

$A \times (\varepsilon_{lkm} \varepsilon_{ijk} C^i D^j B^l)$

$A^n \varepsilon_{nmy} (\varepsilon_{lkm} \varepsilon_{ijk} C^i D^j B^l)$

$A^n \varepsilon_{nmy} (-\varepsilon_{mlk} \varepsilon_{ijk} C^i D^j B^l)$

$-A^n \varepsilon_{nmy} \left[(\delta_{mi}\delta_{lj} - \delta_{mj}\delta_{li}) C^i D^j B^l \right]$

$A \times \left[C(B \cdot D) - D(B \cdot C) \right]$

$[A \times C][B \cdot D] - [A \times D][B \cdot C]$ //

Questão 6)

O produto entre dois vetores $x = (x_1, x_2, x_3)$ e $y = (y_1, y_2, y_3)$

$$x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

Na representação de matrizes anti-simétricas

$$X = \begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix} \qquad Y = \begin{bmatrix} 0 & -y_3 & y_2 \\ y_3 & 0 & -y_1 \\ -y_2 & y_1 & 0 \end{bmatrix}$$

A multiplicação entre essas matrizes é

$$XY = \begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -y_3 & y_2 \\ y_3 & 0 & -y_1 \\ -y_2 & y_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (-x_3y_3 - x_2y_2) & x_2y_1 & x_3y_1 \\ x_1y_2 & (-x_3y_3 - x_1y_1) & x_3y_2 \\ x_1y_3 & -x_2y_3 & (-x_2y_2 - x_1y_1) \end{bmatrix}$$

O traço de XY é

$$Tr(XY) = -2x_3y_3 - 2x_2y_2 - 2x_1y_1$$

Então o produto interno pode ser dado como

$$\boxed{x \cdot y = -\frac{1}{2} Tr(XY)}$$

O produto externo entre os vetores é dado por

$$x \times y = \det\begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}$$

$$= \phi_1(x_2y_3 - x_3y_2) - \phi_2(x_1y_3 - x_3y_1)$$

$$+ \phi_3(x_1y_2 - x_2y_1)$$

$$= (x_2y_3 - x_3y_2,\ x_3y_1 - x_1y_3,\ x_1y_2 - x_2y_1)$$

Escrito como uma matriz anti-simétrica é

$$x \times y = \begin{bmatrix} 0 & -(x_1y_2 - x_2y_1) & -(x_1y_3 - x_3y_1) \\ x_1y_2 - x_2y_1 & 0 & -(x_2y_3 - y_2x_3) \\ x_1y_3 - x_3y_1 & x_2y_3 - x_3y_2 & 0 \end{bmatrix}$$

Para encontrarmos essa representação começamos calculando

$$YX = \begin{bmatrix} 0 & -y_3 & y_2 \\ y_3 & 0 & -y_1 \\ -y_2 & y_1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$YX = \begin{bmatrix} (-x_3y_3 - x_2y_2) & y_2x_1 & x_1y_3 \\ x_2y_1 & (-x_3y_3 - x_1y_1) & y_3x_2 \\ y_1x_3 & x_3y_2 & (-x_2y_2 - x_1y_1) \end{bmatrix}$$

Retirando subtraindo $-\frac{1}{2}Tr(YX)\mathbb{1}$ temos a relação de antissimetria descrevendo aos componentes do produto externo

$$\begin{bmatrix} x_2y_1 - y_2x_1 \\ -(x_1y_3 - x_3y_1) \\ x_3y_2 - x_2y_3 \end{bmatrix}$$

//

Para o produto vetorial basta fazer

$$\left[XY - \frac{1}{2}Tr(XY)\mathbb{1}\right] - \left[YX - \frac{1}{2}Tr(YX)\mathbb{1}\right] = x \times y$$

As componentes do vetor x se relacionam com os elementos da matriz X,

$$X_{ij} = x_k \varepsilon_{ijk}$$

Questão 1)

1) Um produto externo faz uso do símbolo de Levi-Civita e por isso resulta num tensor antissimétrico. Implicando na exigência dos tensores serem de ordem (0,2) e (2,0).

$$(\phi_i \wedge \phi_j)_k = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \, \phi_i \otimes \phi_j$$

$$(\phi_i \wedge \phi_j)^k = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij}^{\ \ k} \, \phi_i \otimes \phi_j$$

2) Tensor

$\dim V = 3$

$$\begin{cases} T : V \otimes V \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad (v, w) \longmapsto T(v, w) \\ \\ T^* : V^* \otimes V^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad (v^*, w^*) \longmapsto T^*(v^*, w^*) \end{cases}$$

$\to$ Tensores antissimétrico

$\Downarrow$

$(0, n)$ $(n, 0)$

A condição para que uma matriz

3x3 seja um possível representação de um produto externo é que ela seja um tensor (n,0) ou (0,n) e também ser antissimétrico.

Questão 2)

a) Se x e y são componentes de um vetor podemos representar (x, y) como (x^1, x^2). Essas componentes se transformam como (u_1, u_2) como uma rotação,

$$u^1 = x^1 \cos\theta + x^2 \operatorname{sen}\theta$$

$$u^2 = -x^1 \operatorname{sen}\theta + x^2 \cos\theta$$

Ou seja, a matriz de transformação entre (u^1, u^2) e (x^1, x^2) é,

$$T = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Para verificar se A_{ij} é um tensor então A_{ij} deve obedecer as regras de transformação de um tensor, ou seja,

$$A'_{ij} = (T_{ik})^{-1} (T_{jl})^{-1} A_{kl} \qquad i,j,k,l = 1,2$$

$$A'_{ij} = T^{ik}\, T^{jl} A_{kl}$$

Como a matriz inversa de T é igual a T^T então

$$T^{-1} = T^T = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Então, para verificar se A_{ij} é um tensor.

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} x^2 & xy \\ xy & y^2 \end{bmatrix}$$

Assim, vemos escrever A'_{ij} como

$$A' = T A T^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^2 & xy \\ xy & y^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x^2\cos\theta + xy\operatorname{sen}\theta & \cos\theta\, xy + \operatorname{sen}\theta\, y^2 \\ -\operatorname{sen}\theta\, x^2 + xy\cos\theta & -xy\operatorname{sen}\theta + y^2\cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$\to x^2\cos^2\theta + y^2\operatorname{sen}^2\theta + 2xy\cos\theta\operatorname{sen}\theta = (x')^2$

11

$= x^2\cos^2\theta + xy\cos\theta\operatorname{sen}\theta + \cos\theta\operatorname{sen}\theta\, xy + \operatorname{sen}^2\theta\, y^2$

12 $\to \cos\theta\operatorname{sen}\theta(y^2 - x^2) + xy(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) = xy$

$- \cos\theta\operatorname{sen}\theta\, x^2 + xy\cos^2\theta - xy\operatorname{sen}^2\theta + y^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta$

21 $\to \operatorname{sen}\theta\cos\theta(y^2 - x^2) + xy(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) = xy$

$- x^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta - xy\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta\, xy + \operatorname{sen}\theta\cos\theta\, y^2$

22

$\operatorname{sen}^2\theta\, x^2 - xy\cos\theta\operatorname{sen}\theta - xy\operatorname{sen}\theta\cos\theta + y^2\cos^2\theta$

$\to x^2\operatorname{sen}^2\theta + y^2\cos^2\theta - 2xy\operatorname{sen}\theta\cos\theta = (y')^2$

Observando os resultados de

$$(x')^2 = (x\cos\theta + y\,\text{sen}\,\theta)^2 = x^2\cos\theta + y^2\text{sen}^2\theta + 2xy\cos\theta\,\text{sen}\,\theta \quad (1)$$

$$(y')^2 = (-x\,\text{sen}\,\theta + y\cos\theta)^2 = x^2\text{sen}^2\theta + y^2\cos^2\theta - 2xy\cos\theta\,\text{sen}\,\theta \quad (2)$$

$$x'y' = (x\cos\theta + y\,\text{sen}\,\theta)(y\cos\theta - x\,\text{sen}\,\theta)$$

$$= xy\cos^2\theta - x^2\cos\theta\,\text{sen}\,\theta + y^2\text{sen}\,\theta\cos\theta - xy\,\text{sen}^2\theta$$

$$= xy(\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta) + \text{sen}\,\theta\cos\theta(y^2 - x^2) \quad (3)$$

Substituindo em A' temos

$$A' = \begin{bmatrix} (x')^2 & x'y' \\ x'y' & (y')^2 \end{bmatrix}$$

Então, A é um tensor. Vamos fazer o mesmo processo para a matriz B_{ij}. Iremos manter a transformação T de rotação e calcular B' levando em consideração (1), (2) e (3).

Calculando B'

$$B' = T B T'$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} xy & y^2 \\ x^2 & -xy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta\, xy + x^2 \sin\theta & y^2\cos\theta - xy\sin\theta \\ -\sin\theta\, xy + x^2\cos\theta & -y^2\sin\theta - xy\cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$xy \Rightarrow$ (11) $\rightarrow xy(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + (x^2+y^2)\sin\theta\cos\theta$

(21) $-2xy\cos\theta\sin\theta$

(12)

(22)

$$= \begin{bmatrix} \cos^2\theta\, xy + x^2\sin\theta\cos\theta + y^2\sin\theta\cos\theta - xy\sin^2\theta & -\sin\theta\cos\theta\, xy + x^2\sin^2\theta + y^2\cos^2\theta - xy\sin\theta\cos\theta \\ -\sin\theta\cos\theta\, xy + x^2\cos^2\theta - y^2\sin^2\theta - xy\cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta\, xy - x^2\cos\theta\sin\theta - y^2\sin\theta\cos\theta - xy\cos^2\theta \end{bmatrix}$$

No elemento B'_{21} não conseguimos escrever como $(x')^2$ então B não é um tensor.

Agora, vamos fazer o mesmo processo para a matriz C mantendo a transformação T.

Calculando C'

$$C' = TCT'$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y^2 & xy \\ xy & x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta\, y^2 + xy\operatorname{sen}\theta & xy\cos\theta + x^2\operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta\, y^2 + xy\cos\theta & -xy\operatorname{sen}\theta + x^2\cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} (11) \\ = \left[\begin{array}{ll} \cos^2\theta\, y^2 + xy\operatorname{sen}\theta\cos\theta & + xy\cos\theta\operatorname{sen}\theta + x^2\operatorname{sen}^2\theta \\ (21) & \\ -\operatorname{sen}\theta\cos\theta\, y^2 + xy\cos^2\theta & -\operatorname{sen}^2\theta\, xy + x^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta \end{array} \right. \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{ll} (12) & \\ -\operatorname{sen}\theta\cos\theta\, y^2 - xy\operatorname{sen}^2\theta & xy\cos^2\theta + x^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta \\ (22) & \\ \operatorname{sen}^2\theta\, y^2 - xy\cos\theta\operatorname{sen}\theta & -xy\cos\theta\operatorname{sen}\theta + x^2\cos\theta \end{array} \right]$$

Analisando novamente as relações (1), (2) e (3) observamos que B não se transforma como um tensor.

Para D faremos o mesmo processo mantendo a Transformação T.

Calculando D'

$D' = TDT^{-1}$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -xy & x^2 \\ -y^2 & xy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\cos\theta\, xy - \operatorname{sen}\theta\, y^2 & x^2\cos\theta + xy\operatorname{sen}\theta \\ xy\operatorname{sen}\theta - y^2\cos\theta & -x^2\operatorname{sen}\theta + xy\cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

11

$$= \begin{bmatrix} -\cos^2\theta\, xy - \operatorname{sen}\theta\cos\theta\, y^2 + x^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta + xy\operatorname{sen}^2\theta \\ xy\cos\theta\operatorname{sen}\theta - y^2\cos^2\theta - x^2\operatorname{sen}^2\theta + xy\cos\theta\operatorname{sen}\theta \end{bmatrix}$$

21

$$\begin{matrix} xy\operatorname{sen}\theta\cos\theta - y^2\cos\theta & -x^2\operatorname{sen}^2\theta + xy\cos\theta \\ -xy\operatorname{sen}^2\theta + y^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta & -x^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta + xy\cos^2\theta \end{matrix} \Bigg]$$

Analisando as relações (1), (2) e (3) escrevemos

$$D' = \begin{bmatrix} -x'y' & (x')^2 \\ -(y')^2 & x'y' \end{bmatrix}$$

O que faz de D um tensor.

Questão 7)

Definimos $B_k = \varepsilon_{ijk}\left(\dfrac{\partial A_j}{\partial x_i}\right)$. O que leva

$$\varepsilon_{lmk} B_k = \varepsilon_{lmk}\varepsilon_{ijk}\left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i}\right) \quad (4)$$

Utilizando que

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk} = \delta_{mi}\delta_{lj} - \delta_{mj}\delta_{li}$$

E substituindo em (4) temos

$$\left(\delta_{mi}\delta_{lj} - \delta_{mj}\delta_{li}\right)\left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i}\right)$$

$$\delta_{mi}\delta_{\ell j}\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \delta_{mj}\delta_{\ell i}\frac{\partial A_j}{\partial x_i}$$

$$= \frac{\partial A_\ell}{\partial x_m} - \frac{\partial A_m}{\partial x_\ell}$$

A escrever que $B_k = \varepsilon_{ijk}\left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i}\right)$ é o mesmo que escrever $(B)_k = (\nabla \times A)_k$. Ou seja, B_k é a componente do rotacional.

Questão 12)

a) Partindo de como A_{ij} se transforma, ou seja,

$$A'^{i}_{j} = \underbrace{\boxed{\frac{\partial u^i}{\partial x^\ell}}}_{T^{-1}} \underbrace{\boxed{\frac{\partial x^k}{\partial u^j}}}_{T} A^\ell_k$$

Aplicando a operação de determinante

$\det T^{-1} = (\det T)^{-1}$

$$\det(A') = \det(T \cdot T^{-1} A)$$

$$= \det(T) \cdot \det(T^{-1}) \cdot \det(A)$$

$$\det(A') = \det(A)$$

Como após a transformação não há mudança no determinante então det A é um escalar.

b) Para o caso da métrica g_{ij} escrevemos a transformação para g'_{ij} como

$$g'_{ij} = \boxed{\frac{\partial x^{i'}}{\partial u^i}} \boxed{\frac{\partial x^{j'}}{\partial u^j}} g_{i'j'}$$

→ matriz Jacobiana

Então aplicando o determinante dos dois lados temos,

$$\det g' = J^2 \det(g)$$

Tomando $g' = \det(g')$ e $g = \det(g)$ escrevemos,

$$\boxed{\sqrt{g'} = J\sqrt{g}}$$

Isso faz com que $\sqrt{g}$ seja uma densidade tensorial.

c) O tensor de Levi-Civita é definido como,

$$e_{ijk} = \sqrt{g}\,\varepsilon_{ijk}$$

O símbolo de Levi-Civita com índices em cima é obtido a partir de

$$\varepsilon^{ijk} = \text{sign}(g)\,\varepsilon_{ijk}$$

Isso faz com que ε^{ijk} seja uma densidade tensorial de ordem -1. Junto a isso se relacionarmos ao tensor de índices contravariantes, obtido a partir do uso de $g^{\mu\nu}$ para "subir" os índices, temos

$$e^{ijk} = \frac{1}{\sqrt{g}} \varepsilon^{ijk}$$