# Lista 4 - Funções de Green - Prova 2

(08/12/20)

Dorian Cruz

1)

a) As autofunções $u_n(x)$ para o problema homogêneo são,

$$\frac{d^2u_n(x)}{dx^2} + \frac{n^2\pi^2}{L^2}u_n(x) = 0$$

Para as condições de contorno $u(0) = u(L) = 0$ escrevemos,

normalização

$$u_n(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sqrt{\frac{2}{L}}$$

Com autovalores iguais a $\frac{n^2\pi^2}{L^2}$. Assim,

podemos construir a função de Green para esse problema a partir da série bilinear

$$G(x,x') = \sum_n \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x'}{L}\right)}{\left(-k^2 + \frac{n^2\pi^2}{L^2}\right)}\frac{2}{L}$$

b) A função de Green para condições periódicas de contorno, via método de autofunções, parte da equação homogênea

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \lambda u = 0$$

Assumindo a solução de $G(x,x')$ em série de potências escrevemos

$$G(x,x') = C_n(x') e^{in\sqrt{\lambda} x}$$

Aplicando as condições de contorno

1) $u(-L) = u(L)$
2) $u'(-L) = u'(L)$

$$\frac{d^2 G}{dx^2} + k^2 G = \delta(x - x')$$

$$G(x,x') = \sum_n C_n(x') e^{i\lambda_n x}$$

$$\delta(x - x') = \sum_n e^{i\lambda_n x'} e^{i\lambda_n}$$

$$\frac{d^2G}{dx^2} + k^2 G = \delta(x-x')$$

$$-\lambda_n^2 C_n(x') e^{i\lambda_n x} + k^2 C_n(x') e^{i\lambda_n x} = e^{i\lambda_n (x-x')}$$

$$C_n(x') e^{i\lambda_n x} (k^2 - \lambda_n^2) = e^{i\lambda_n (x+x')}$$

$$C_n = \frac{e^{i\lambda_n x'}}{k^2 - \lambda_n^2}$$

$$G(x,x') = \frac{e^{i\lambda_n x'} e^{i\lambda_n x}}{k^2 - \lambda_n^2}$$

d) Sabemos que as autofunções para a equação,

$$r^2 f'' + 2r f' + [k^2 r^2 - m(m+1)] f = 0$$

com $\lim_{x \to 0} |g(r, r')| < \infty$ e $g(a, r') = 0$. Para obter a solução em série consideramos a função de Green,

* Série Fourier-Bessel

$$G(r, r') = \sum_{n=1}^{\infty} C(r') J_m(k_{nm} r) \quad (1)$$

Com $J_m(k_{nm} a) = 0$. Satisfazendo as condições de contorno. Substituindo (1) em

$$r^2 G'' + 2r G' + \left(k^2 r^2 - m(m+1)\right) G = 0$$

* Propriedade da $J_m'$

$$(k^2 - k_{nm}^2) C(r') = -\frac{2 k_{nm}^2 J_m(k_{nm} r')}{a^2 [J_{m+1}(k_{nm} a)]^2}$$

$$= \frac{-2 J_m(k_{nm} r')}{a^2 [J_m'(k_{nm} a)]^2}$$

Assim, $G(r, r')$ é

$$G(r,r') = \frac{2}{a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_m(k_{nm}r')J_m(k_{nm}r)}{(k_{nm}^2-k^2)\left[J'_m(k_{nm}a)\right]^2}$$

12) A função de Green utilizando a transformada de Fourier,

$$\mathcal{F}\left[\nabla^2 G - k^2 G\right] = \mathcal{F}\left[\delta(r-r')\right]$$

$$\left(-k'^2 - k^2\right)G_F = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3}e^{ikr'}$$

$$G_F = \frac{-1}{(2\pi)^3}\,\frac{e^{ik'r}}{(k')^2+k^2}$$

Onde $G_F$ é a transformada de Fourier da função de Green do sistema. Assim a função de Green é dada por

$$\mathcal{F}^{-1}[G_F] = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{-e^{ik'(r-r')}}{(\sqrt{2\pi})^3\left[(k')^2+(k^2)\right]}dk'$$

Utilizando contornos que circulam os polos do denominador, utilizando a desigualdade ML e o teorema dos resíduos obtemos a função de Green como

$$G(x) = \frac{1}{4\pi r} e^{-\kappa r}$$

* Desenvolvimento da integral ao final do PDF

3) A equação que buscamos a função de Green como solução é

$$r^2 \frac{d^2 G}{dr^2} + 2r \frac{dG}{dr} + [k^2 r^2 - l(l+1)]G = \delta(r - r')$$

No intervalo $0 < r < a$ e sujeito às condições de contorno $G(r, r')$ finita na origem e $G(a, r') = 0$.

As soluções gerais dessa equação são Bessel esféricas e Neumann esférica:

$$\{ j_l(kr) \,,\; n_l(kr) \}$$

Como existe a necessidade de que $G(r,r')$ seja finita utilizaremos $j_\ell(kr)$ no intervalo $0<r<r'$ e a combinação linear das duas no intervalo $r'<r<a$, ou seja,

$$G(r,r') = \begin{cases} a(r')\, j_\ell(kr) & 0 \leq r < r' \\ b(r')\, j_\ell(kr) + c(r')\, n_\ell(kr) & r' < r \leq a \end{cases}$$

Na segunda parte da solução aplicamos a condição de contorno, $G(a,r')=0$.

$$0 = b(r')\, j_\ell(ka) + c(r')\, n_\ell(ka)$$

Com isso podemos escrever a $G(r,r')$ da forma mais compacta no intervalo $a \leq r \leq r'$,

$$G(r,r') = A(r') \left[ j_\ell(kr)\, n_\ell(ka) - n_\ell(kr)\, j_\ell(ka) \right]$$

Impondo a continuidade em $r'$ para as duas partes da solução teremos

$$a(r')\, j_\ell(kr') = A(r')\left[ j(kr')\, n_\ell(ka) - n_\ell(kr')\, j_\ell(ka) \right] \quad (1)$$

Além disso, devemos levar em consideração a descontinuidade da solução

$$\frac{dG_2}{dr} - \frac{dG_1}{dr} = \frac{1}{p(r')} \quad \frac{1}{r^2}$$

O que nos leva a,

$$k\, a(r')\, j'(kr') - k A(r')\left[ j'_\ell(kr')\, n_\ell(ka) - n'_\ell(kr')\, j_\ell(ka) \right] = \frac{1}{r'^2} \quad (2)$$

Multiplicando (1) por $k j'_\ell(kr')$, (2) por $j_\ell(kr')$ e subtraindo obtemos,

$$\frac{j_\ell(kr')}{r'^2} = -k A(r')\, j_\ell(ka)\left[ j_\ell(kr')\, n'_\ell(kr') - n_\ell(kr')\, j'_\ell(kr') \right] \quad (3)$$

Conseguimos identificar o Wronskiano que precisamos para escrever a função de Green

Calculando o Wronskiano,

$$W(r) = j_\ell'(kr)\,n_\ell(kr) - j_\ell(kr)\,n_\ell'(kr)$$

No forma assintótico $n_\ell(kr)$ e $j_\ell(kr)$ podem ser escritas como senos e cossenos,

$$j_\ell(kr) = \frac{\text{sen}(kr - \ell\pi/2)}{kr}$$

$$n_\ell(kr) = \frac{\cos(kr - \ell\pi/2)}{kr}$$

Então,

$$W(r) = \frac{1}{k^2r^2}\left[\text{sen}^2(kr - \ell\pi/2) + \cos^2(kr - \ell\pi/2)\right]$$

$$= \frac{1}{k^2r^2} \quad (4)$$

Substituindo (4) em (3) encontramos $A(r')$

$$A(r') = -k\frac{j_\ell(kr')}{j_\ell(ka)} \quad (5)$$

e de (2) obtemos $a(r')$ substituindo (5),

$$a(r') = -\frac{k}{j_\ell(ka)}\left[j_\ell(kr')\,n_\ell(ka) - j_\ell(ka)\,n_\ell(kr')\right]$$

Assim, a função de Green $G(r,r')$ fica

$$G(r,r') = -k\,\frac{j_\ell(kr)}{j_\ell(ka)}\left[j_\ell(kr')\,n_\ell(ka) - j_\ell(ka)\,n_\ell(kr')\right]$$

Alternando $r \to r'$ para $r > r'$ e $r' \to r$ se $r < r'$.

5) A função de Green é a solução da equação,

$$(\nabla^2 - k^2)\,G(r,\theta|r',\theta') = \frac{\delta(r-r')\,\delta(\theta-\theta')}{r}$$

A periodicidade em $\theta$ será representada pela exponencial $e^{i(\theta-\theta')}$ na função de Green.

Assim, a função de Green será da forma

$$G(r,\theta|r',\theta') = \frac{-1}{2\pi}\sum e^{im(\theta-\theta')} D(r,r')$$

Esse tipo de suposição é possível já que a equação é separável. Assim como feito na questão 3 faremos uso das condições de contorno de $G(0,\theta|r',\theta')$ ser finito e $G(a,\theta|r',\theta') = 0$ :

Como buscamos a solução partindo do

$$D(r,r') = \begin{cases} a(r')\, I_m(kr) & 0 \leq r < r' \\ b(r')\, I_m(kr) + c(r')\, K_m(kr) & r' < r \leq a \end{cases}$$

* $I_m$ e $K_m$ são funções de Bessel modificadas de 1ª e 2ª ordem, respectivamente

Aplicando $D(a,r') = 0$,

$$0 = b(r')\, I_m(ka) + c(r')\, K_m(ka)$$

Com isso escrevemos a solução para o intervalo $r' < r \leq a$ da forma

$$D(r,r') = A(r')\left[ I_m(kr)K_m(ka) - I_m(ka)K_m(kr) \right]$$

Da descontinuidade, obtemos a expressão

$$\frac{I_m(kr')}{r'} = -A(r') I_m(ka)\left[I_m(kr') K_m'(kr') - K_m(kr') I_m'(kr')\right]$$

O que nos faz perceber o wronskiano entre chaves. Para a função de Bessel modificada, seu wronskiano é

$$W(r) = \frac{1}{r}\left[I_m(kr) K_m'(kr) - K_m(kr) I_m'(kr)\right]$$

O que leva à escrever

$$A(r') = \frac{I_m(kr')}{I_m(ka)}$$

Então, a função de Green para a equação de Helmholtz é

$$G(r,\theta|r',\theta') = \frac{1}{2\pi}\sum_m e^{im(\theta-\theta')} \frac{I_m(kr')}{I_m(ka)}\left[I_m(kr') K_m(kr) - I_m(rk) K_m(kr)\right]$$

13) Partindo da equação para a função de Green,

$$\left(\frac{i\partial}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) G = 0 \quad (1)$$

Sabendo que $\mathcal{F}\{G\} = G_F$ e utilizando a propriedades da transformada de Fourier obtemos a seguinte equação, * Consegue-se resolver por transformada de Laplace também

$$i\frac{\partial G_F}{\partial t} - k^2 G_F = 0$$

A solução geral é $G_F = \dfrac{e^{ik^2 t}}{\sqrt{2\pi}}$. Agora aplicando a inversa da transformada de Fourier levando em conta que,

$$\int_0^{\infty} e^{iu^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i\pi/4} \quad (1)$$

e

$$F^{-1}\left\{e^{-ik^2 t}\right\} = \frac{i}{\sqrt{4\pi t}} e^{-i\frac{x^2}{4t}}$$

Portanto,

$$G(x,t) = \int_0^\infty \frac{e^{ik^2t}}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}\, dk$$

completar quadrado, isolar a exponencial em x e usar (1).

$$= \frac{i}{2\sqrt{\pi t}} e^{i\left(\frac{x^2}{4t} - \frac{\pi}{4}\right)}$$

2)

a) $$\frac{d}{dx}\left[x \frac{df}{dx}\right] = 0$$

$$\frac{df}{dx} + x\frac{d^2f}{dx^2} = 0 = \underbrace{xf'' + f'}$$

$$\boxed{f(x) = a\ln(x) + c}$$

- $f(x)$ finito em zero

$a = 0 \qquad f(x) = 1$

- $f(1) = 0$ $\qquad f(x) = \ln x$

$f(x) = a\ln x + c$

$c \Rightarrow 0$

- $p(x) = x$ ,

$w = 0 \ln x + \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$

$$G(x,x') \begin{cases} \frac{(1)\ln(x')}{} , & 0 < x < x' \\ \frac{\ln x\,(1)}{} & x' < x < 1 \end{cases}$$

$\frac{u_2(x')\,u_1(x)}{p(x')\,w(x')}$

$\frac{u_1(x')\,u_2(x)}{p(x')\,w(x')}$

b) $\frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{df}{dx}\right) = 0$

$-2xf' + (1-x^2)f'' = 0 = (1-x^2)f'' - 2xf'$

Solução geral é

$$a\left[\ln(x+1) - \ln(1-x)\right] + b$$

- $f(0) = 0$ ; - $f(1) = 0$

$$u(x) = \ln(x+1) - \ln(1-x)$$

$$v(x) = 1$$

$$p(x) = 1 - x^2$$

$$W = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{1-x}$$

A construção direta é

$$G(x,x') = \begin{cases} \dfrac{\ln(x+1) - \ln(1-x)}{(1-x'^2)\left[\dfrac{1}{x'+1} - \dfrac{1}{1-x}\right]} & 0 < x < x' \\ 0 & x' < x < 1 \end{cases}$$

* Resolução integral 12)

- $G(r) = \frac{-1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik'r}}{\left[(k')^2 - k^2\right]} dk'$

$$= \frac{-1}{(2\pi)^3} 2\pi \int_0^{\infty} \frac{(k')^2}{(k')^2+k^2}\left[\int_0^{\pi} e^{ir\cos\theta} \operatorname{sen}\theta \, d\theta\right] dk'$$

$$= \frac{-1}{(2\pi)^2}\int_0^{\infty} \frac{(k')^2}{(k')^2+k^2}\left[\frac{e^{irk'} - e^{-irk'}}{irk'}\right]$$

função par

$$= \frac{-1}{(2\pi)^2}\frac{2}{r}\int_0^{\infty} \frac{k'}{(k')^2+k^2} \operatorname{sen}(k'r)\, dk'$$

$$= \frac{i}{4\pi^2 r}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{k'}{(k')^2+k^2} e^{ik'r} dk'$$

Os polos são $\pm i\hat{k}$. Tomando o contorno da semicircunferência na região positiva do imaginário e utilizando o lema de Jordan.

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k'}{(k')^2 + k^2} e^{irk'} dk' = 2\pi i \, Res\{k' = ik\}$$

O resíduo é $\frac{e^{-rk}}{2}$. Então a integral $I$ fica,

$$I = 2\pi i \frac{e^{-rk}}{2} = i\pi e^{-rk}$$

Assim $G(r)$ será, como feito no início da questão 13,

$$G(r) = \frac{i}{4\pi^2 r} i\pi e^{-rk} = -\frac{e^{-rk}}{4\pi r}$$