

Modelos Lineares

Otaviano da Cruz Neto

Instituto de Ciencias Exatas - ICEx / UFF

02/05/2018

Introdução

► Notação

$$X_i = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_m) \quad (x_0 \in R) \quad (1)$$

$$Y_i = y_i \quad (y_i \in R) \quad (2)$$

$$W = (w_0, w_1, w_2, \dots, w_n) \quad (3)$$

► Hipótese Linear

$$h(w) = XW \quad (4)$$

Regressão Linear

- Caracterização dos Erros E_{in} e E_{out}

$$E_{in}(W) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (X_n W - Y_n)^2 = \frac{1}{N} (XW - Y)^2 \quad (5)$$

- Gradiente de E_{in} ($\vec{\nabla} E_{in}$)

$$\vec{\nabla} E_{in} = \frac{2}{N} X^T (XW - Y) \quad (6)$$

Solução

- ▶ Gradiente decrescente (Minimizar)

$$\vec{\nabla} E_{in} = \frac{2}{N} X^T (XW - Y) = 0 \quad (7)$$

- ▶ Normalização

$$W = X^\dagger Y \quad (8)$$

$$X^\dagger = (X^T X)^{-1} X^T \quad (9)$$

- ▶ Regressão Linear e PLA(Hipótese Inicial)

Interpretação Probabilística

- Gaussiana (IID - Independente e identicamente distribuídos)
Tomando que

$$Y_i = WX_i + \epsilon_i \quad (10)$$

Podemos expressar $\epsilon_i \approx N(0, \sigma^2)$, então a densidade de ϵ_i é dada por:

$$p(\epsilon_i) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(Y_i - WX)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (11)$$

Então a probabilidade(Likelihood) da Hipótese Linear é:

$$L(W) = \prod_{i=1}^N \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(Y_i - WX)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (12)$$

Interpretação Probabilística

Então derivando o $\ln L(w)$ temos:

$$l(W) = \ln L(w) \quad (13)$$

$$= \ln \prod_{i=1}^N \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(Y_i - WX)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (14)$$

$$= \sum_{i=1}^N \ln \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(Y_i - WX)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (15)$$

$$= N \ln \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} - \frac{1}{\sigma^2} \cdot \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (Y_i - WX_i)^2 \quad (16)$$

Interpretação Probabilística

Maximizando temos:

$$l(W) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (Y_i - WX_i)^2 \quad (17)$$

Aplicação

► Dados

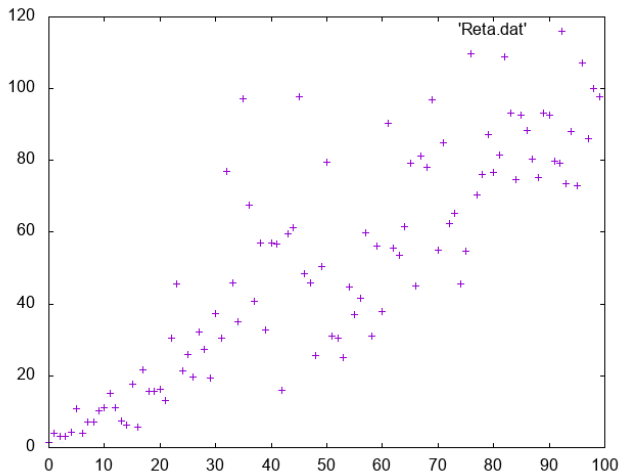


Figure 1: Dados criados a partir da reta $X=Y$.

Aplicação

► Função Custo a cada Iteração

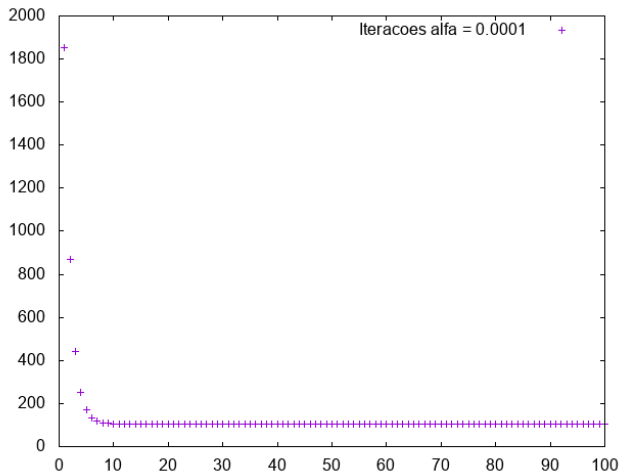


Figure 2: Gráfico de Custo por quantidade de iterações.

Aplicação

► Resultado Final

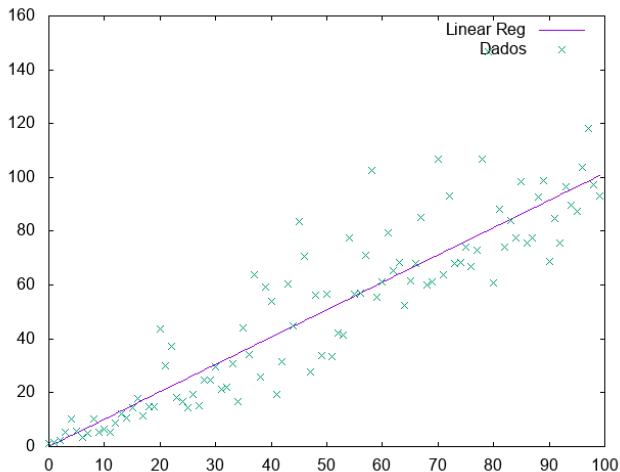


Figure 3: Gráfico da Reta de coeficiente angular 1.01 e coeficiente linear 0.01 criada a partir dos dados gerados.