Modelos Lineares

Otaviano da Cruz Neto

Instituto de Ciencias Exatas - ICEX / UFF

06/06/2018

Introdução

- **O que é o método de Regressão?**
  O método de Regressão é uma ferramenta que leva em consideração a dependência entre as variáveis que caracterizam os dados . Ou seja, a cada valor de entrada é associado a um valor dado por uma Função Target, o padrão a ser aprendido.
- **Tipos de Regressão**
  Os dois tipos de regressão que serão exibidos serão a Regressão Linear e a Regressão Logística. A regressão linear admite a dependência linear entre as variáveis e busca um hiperplano que melhor aproxima a configuração. Já a regressão logística utiliza a associação de cada conjunto de características a respostas binárias, por exemplo, 0 ou 1.

Introdução

- **Dados Individuais ($X^{(i)}$, $Y^{(i)}$)**

$$X^{(i)} = [x_1, x_2, \cdots, x_m] \tag{1}$$

$$Y^{(i)} = y^{(i)} \tag{2}$$

- **Dados da Amostra (X e Y)**

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_1^{(1)} & \cdots & x_m^{(1)} \\ 1 & x_1^{(2)} & \cdots & x_m^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_1^{(N)} & \cdots & x_m^{(N)} \end{bmatrix} \tag{3}$$

Introdução

$$Y = \begin{bmatrix} y^{(1)} \\ y^{(2)} \\ \vdots \\ y^{(N)} \end{bmatrix} \tag{4}$$

Regressão Linear

- **Vetor Normal à Hipótese**

$$W = [w_0, w_1, w_2, \cdots, w_m] \tag{5}$$

- **Hipótese Linear**

$$h(w) = XW^T \tag{6}$$

- **Caracterização do Erro dentro (E_{in}) da amostra**
  A preocupação com o erro que envolve o aprendizado de um padrão é evidente já que há a necessidade de aplicar em outros juntos fora da amostragem. Neste caso temos,

$$E_{in}(W) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left(X^{(n)}W^T - Y^{(n)}\right)^2 = \frac{1}{N}\left(XW^T - Y\right)^2 \tag{7}$$

Regressão Linear

- **Gradiente de** E_{in} $\left(\vec{\nabla} E_{in}\right)$

$$\vec{\nabla} E_{in} = \frac{2}{N} X^T \left(X W^T - Y \right) \tag{8}$$

- **Gradiente descendente (Solução Numérica)** : O método do gradiente decrescente é uma ferramenta que utiliza a propriedade do operador gradiente de apontar sempre na direção de máximo crescimento, afim de minimizar o erro dentro da amostra.

$$\vec{W}_{t+1} = \vec{W}_t - \alpha \vec{\nabla} E_{in} \tag{9}$$

Regressão Linear

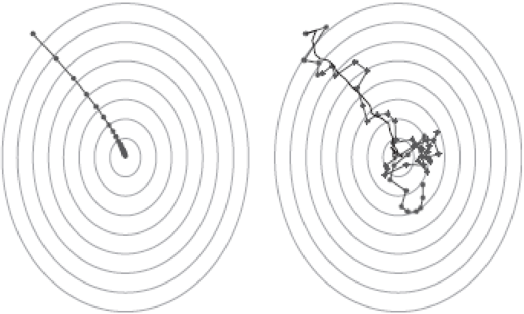


Figura 1: Diferença de valores de passos e suas convergência.

Solução da Regressão Linear

- **Normalização (Solução analítica)**

$$\vec{\nabla} E_{in} = \frac{2}{N} X^T \left(X W^T - Y \right) = 0 \quad (10)$$

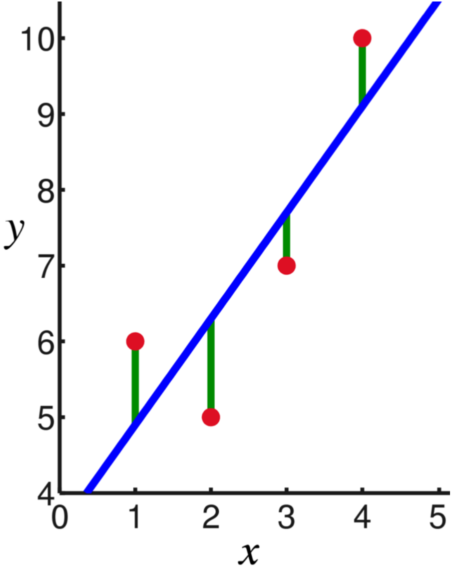
$$W^T = X^\dagger Y \quad (11)$$

$$X^\dagger = \left(X^T X \right)^{-1} X^T \quad (12)$$

- **Regressão Linear e PLA(Hipótese Inicial)**
  Muitas vezes na aplicação do Perceptron Learning Algorithm é inicialmente estipulado os valores do vetor normal (W) de maneira aleatória, e , por isso, pode haver uma demora em relação à convergência do algoritmo. Assim, afim de evitar tal situação, iniciar com uma hipótese que caracteriza melhor a amostragem é uma boa estratégia para diminuir o tempo de convergência. Ou seja, aplicando o algoritmo de regressão linear na amostragem e, a partir do padrão da regressão, aplicar o PLA.

Regressão Linear

- **Visualização Gráfica**



Interpretação Probabilística

- **Gaussiana (IID - Independente e identicamente distribuidos)**
  Tomando que

$$Y^{(i)} = X^{(i)} W^T + \epsilon_i \tag{13}$$

Podemos expressar $\epsilon_i \approx N(0, \sigma^2)$, então a densidade de ϵ_i é dada por:

$$p(\epsilon_i) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma} exp\left(-\frac{(Y^{(i)} - X^{(i)} W^T)^2}{2\sigma^2}\right) \tag{14}$$

Então a probabilidade(Likelihood) da Hipótese Linear é:

$$L(W) = \prod_{i=1}^{N} \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma} exp\left(-\frac{(Y^{(i)} - X^{(i)} W^T)^2}{2\sigma^2}\right) \tag{15}$$

Interpretação Probabilística

É fundamental diferenciar os papeis das duas expressões (14 e 15), respectivamente. Na equação 14 tem-se a probabilidade individual dentro da amostra em função de $Y^{(i)}$ fixando W. Já na 15 temos a probabilidade geral da amostra em função de W, pois é justamente o valor de W que determinará o erro da amostra como um todo.

$$L(W) = L(W; X, Y) = p(Y|X; W) \tag{16}$$

Então derivando o $\ln L(w)$ temos:

$$l(W) = \ln L(w) \tag{17}$$

$$= \ln \prod_{i=1}^{N} \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma} exp\left(-\frac{(Y^{(i)} - X^{(i)}W^T)^2}{2\sigma^2}\right) \tag{18}$$

Interpretação Probabilística

$$= \sum_{i=1}^{N} \ln \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma} exp\left(-\frac{(Y^{(i)} - X^{(i)}W^T)^2}{2\sigma^2} \right) \tag{19}$$

$$= N \ln \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} - \frac{1}{\sigma^2}\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\left(Y^{(i)} - X^{(i)}W^T\right)^2 \tag{20}$$

Maximizando temos:

$$l(W) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\left(Y^{(i)} - X^{(i)}W^T\right)^2 \tag{21}$$

Aplicação

- **Dados**

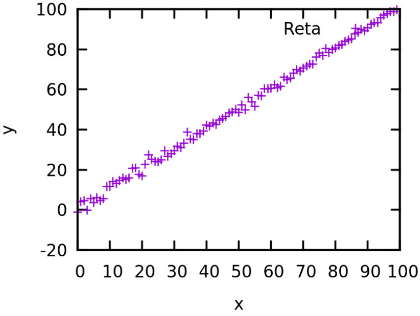


Figura 2: Dados criados a partir da reta X=Y.

Aplicação

- **Função Custo a cada Iteração**

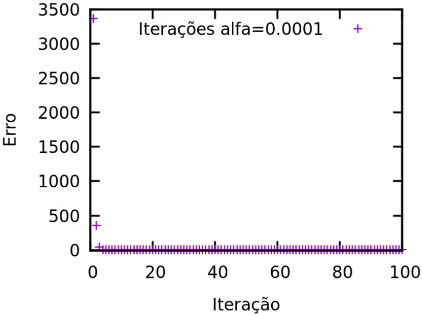


Figura 3: Gráfico de Custo por quantidade de iterações.

Aplicação

- **Resultado Final**

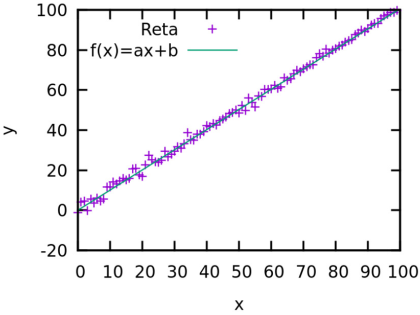


Figura 4: Gráfico da Reta obtida analiticamente de coeficiente angular a = 1.00 e coeficiente linear b = -0.6 criada a partir dos dados gerados.

Aplicação

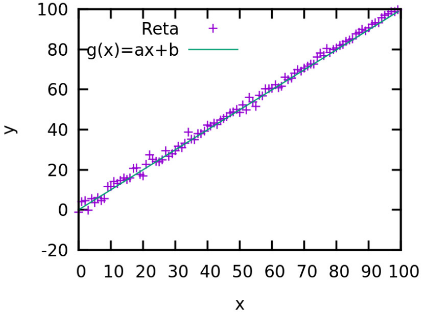


Figura 5: Gráfico da Reta obtida numericamente de coeficiente angular a=0.99 e coeficiente linear b = 0.01 criada a partir dos dados gerados.

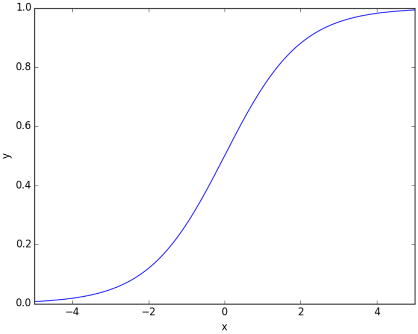
Regressão Logística

- **Classificação**
  A classificação é um problema de regressão que associa a cada valor da amostra um valor discreto. Neste caso vamos analisar para classificação binária (Positivo ou Negativo, 0 ou 1, -1 ou 1, etc).
- **Regressão Logística**
  O método de regressão logística utiliza a probabilidade de um determinado dado da amostra ser classificado por dos um valores discretos. A hipótese da regressão logística é que a probabilidade pode ser descrita como uma função logística (Sigmoid Function) que é dada por:

$$h_w(X^{(i)}) = \frac{1}{1 + e^{-X^{(i)}W^T}} \tag{22}$$

Regressão Logística

- **Sigmoid Function**



O comportamento da função é tal que a função tende a 1 quando $x \to \infty$ e quando $x \to -\infty$ a função tende a zero.

Regressão Logística

- **Método do Gradiente Decrescente**
  Para utilizar essa técnica já descrita anteriormente é necessário o cálculo da derivada de $h_W(X^{(i)})$. Então, $h^{'}(W)$ é dada por:

$$\frac{d}{dW}h_W(X^{(i)}) = \frac{d}{dW} = \frac{1}{1+e^{-X^{(i)}W^T}} = \frac{1}{1+e^{-X^{(i)}W^T}}(e^{-X^{(i)}W^T})$$
$$= \frac{1}{1+e^{-X^{(i)}W^T}}\left(1 - \frac{1}{1+e^{X^{(i)}W^T}}\right) = h_W(X^{(i)})(1-h_W(X^{(i)})) \quad (23)$$

  Assim, de maneira semelhante ao modelo de Regressão Linear em que é adotado um conjunto de superposições de vetores derivadas, aqui é possível utilizar superposições probabilísticas a fim de maximizar o likelihood. Assumindo que a probabilidade de dado um $X^{(i)}$ e um vetor normal à hipótese ser classificado com o valor 1 é $h(W)$ e que a probabilidade dos mesmos vetor normal e $X^{(i)}$ ser classificado com o valor 0 é 1 $h(W)$.

Regressão Logística

- Likelihood
  Ou seja,
$$P(Y^{(i)} = 1|X^{(i)}, W) = h_W(X^{(i)})$$
$$P(Y^{(i)} = 0|X^{(i)}, W) = 1 - h_W(X^{(i)})$$
  Essa configuração de probabilidade condicional pode ser escrita de maneira mais funcional como:
$$p(Y^{(i)}|X^{(i)}, W) = (h_W(X^{(i)}))^{Y^{(i)}}(1 - h_W(X^{(i)}))^{1-Y^{(i)}} \tag{24}$$
  Assim,a probabilidade para um número N de amostras IID é dada pela multiplicação de todas as probabilidades individuais.

Regressão Logística

- Likelihood
  Ou seja:

$$L(W) = \prod_{i=1}^{N} (h_W(X^{(i)}))^{Y^{(i)}} (1 - h_W(X^{(i)}))^{1-Y^{(i)}} \tag{25}$$

Assim como na interpretação probabilística da Regressão Linear, é necessário maximizar o log(L(W)):

$$\sum_{i=1}^{N} Y^{(i)} \log h_W(X^{(i)}) + (1 - Y^{(i)}) \log(1 - h_W(X^{(i)})) \tag{26}$$

Então, derivando:

$$\frac{\partial}{\partial W} l(W) = \left(\frac{y}{h_W(X^{(i)})} - (1 - y) \frac{1}{1 - h_W(X^{(i)})} \right) \frac{\partial}{\partial W} h_W(X^{(i)}) \tag{27}$$

Regressão Logística

- Likelihood

$$\frac{\partial}{\partial W} l(W) = (Y^{(i)} - h_W(X^{(i)}))X^{(i)} \tag{28}$$

Assim, o método do gradiente crescente:

$$W_{t+1} = W_t + \alpha(Y^{(i)} - h_W(X^{(i)}))X^{(i)} \tag{29}$$

Resultados

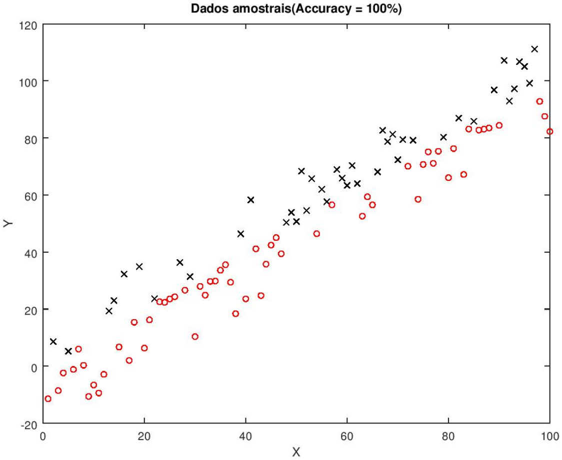


Figura 6: Dados Amostrais classificados por valores binário(0,1), acima da reta é classificado por 1 e abaixo por 0.

Resultdos

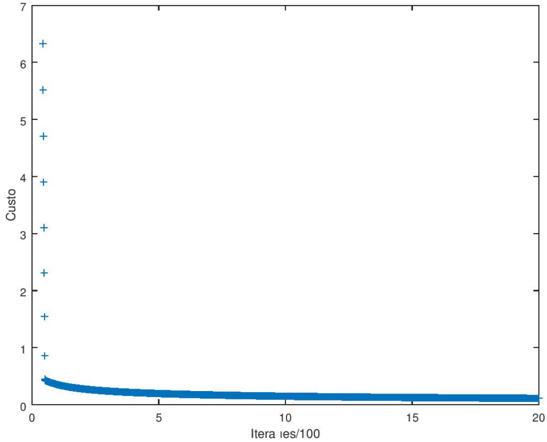


Figura 7: Valores do custo em função do número de iteração.

Resultados

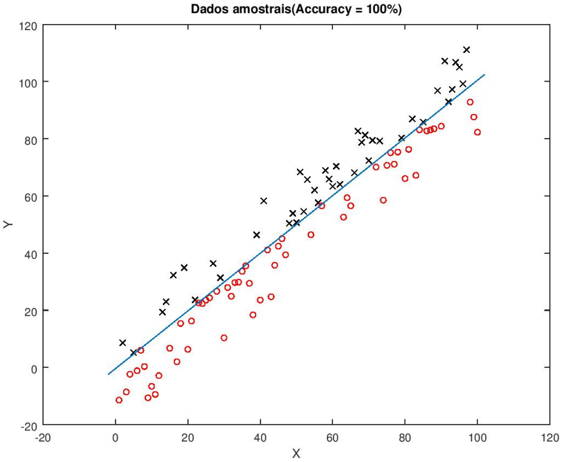


Figura 8: Amostra e Reta de decisão obtida após a implementação.

Referências

[1] http://www.portalaction.com.br/analise-de-regressao. Acessado em 04/05/2018.

[2] https://www.researchgate.net/figure/A-plot-of-the-gradient-descent-algorithm-left-and-the-stochastic-gradient-descent_fig1_303257470. Acessado em 04/05/2018.