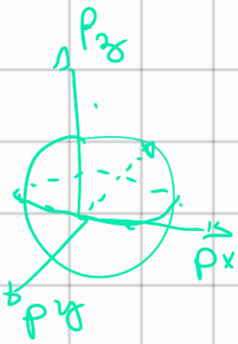
Lista 5 - Termofísica II (09/04/21)

1) A densidade da multiplicidade $d\Omega$:

$$d\Omega = \frac{d^3r \, d^3p}{h^3}$$

Integrando



$$\int d\Omega = \frac{1}{h^3}\int\int d^3r \, d^3p$$

$$= \frac{V}{h^3}\int\int\int p^2 \, \text{sen}\,\theta \, dp \, d\theta \, d\phi$$

$$= \frac{4\pi V}{h^3}\int p^2 \, dp$$

Para um gás de fótons, a energia E é escrito como:

$$E = cp$$

De forma equivalente, pela relação de Planck:

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

→ comprimento de onda

→ frequência

Assim, a integral fica:

$$\frac{4\pi V}{h^3}\int\left(\frac{E}{c}\right)^2\frac{dE}{c} = \frac{4\pi V}{h^3c^3}\int E^2\,dE$$

O que leva à densidade de estados $g(E)$:

2 polarizações

$$2 \cdot g(E) = \frac{4\pi V E^2 \cdot 2}{h^3c^3}$$

Substituindo $E = hc/\lambda$, escrevemos $g(\lambda)$

$$2 \cdot g(\lambda) = \frac{8\,4\pi V}{h^3c^3}\left(\frac{hc}{\lambda}\right)^2 = 2 \cdot \frac{4\pi V}{\lambda hc}$$

Escrevemos a densidade de energia como $\rho_{\text{Energy}} = E\,g(E)\,\overline{n}(E)$. Assim,

$$\rho_{\text{Energia}}(E) = E\,g(E) = \frac{8\pi V E^3}{h^3c^3}\frac{1}{e^{\beta E}-1}\,dE$$

$$\rho_{\text{Energia}}(\lambda) = \frac{8\pi V}{\lambda^5}\frac{hc}{e^{\beta\frac{hc}{\lambda}}-1}\,d\lambda$$

$\rho(E)$ será máximo quando $E = 0$
Energia

$\rho(\lambda)$ será máximo quando $\lambda \to \infty$.
Energia

2)

$$\bar{N} = \int_0^\infty g(\varepsilon)\, \bar{n}(\varepsilon)\, d\varepsilon = \int_0^\infty \frac{8\pi V \varepsilon^2}{(hc)^3} \frac{1}{e^{\varepsilon\beta} - 1} d\varepsilon$$

densidade de estados

ocupação

$$= \frac{CV}{\beta^2} \int_0^\infty \frac{x^2}{e^x - 1} dx$$

Assim, $\bar{N}/V$ é:

$$\frac{\bar{N}}{V} = \frac{8\pi}{(hc)^3} \int_0^\infty \frac{\varepsilon^2}{e^{\varepsilon\beta} - 1} d\varepsilon = \frac{8\pi}{(hc\beta)^3} \boxed{\int_0^\infty \frac{x^2\, dx}{e^x - 1}}$$

Resolvido numericamente

Trapézio

$$\frac{\bar{N}}{V} = \frac{8\pi}{(hc\beta)^3} \cdot (2,4)$$

$$= 3,7 \times 10^{10}$$

URL de Acesso

https://colab.research.google.com/drive/1KEcNYWjk14JAp6hIEPQnUEk64kaoBd4z?usp=sharing

3) Considerando um hipercubo de d-dimensões de volume $V = \prod_i a_i$, onde a_i são os tamanhos das arestas.

O vetor de onda satisfaz a condição de contorno de paredes idealmente,

$$\vec{k} = \frac{1}{2}\left(\frac{m_1}{a_1}, \frac{m_2}{a_2}, \ldots, \frac{m_d}{a_d}\right)$$

onde m_i são inteiros positivos ou zero. Os autovetores $\vec{k}$ geram uma configuração ortonormal.

A frequência ν do é dada por meio da relação de de Broglie:

$$\nu = c\,|\vec{k}|$$

frequência dos modos de vibração

O número de modos g com frequência menor que ν é igual ao número de k pontos na hiperesfera de raio ν/c. Essa esfera tem volume igual

$$V_n \left(\nu/c\right)^n$$

Volume da hiperesfera de raio 1

A probabilidade de uma partícula estar direcionada como o elemento de ângulo sólido $d\omega$ é

$$P = \frac{d\omega}{\iiint \cdots d\omega}$$

O número de fótons em td direção, acertando uma área A em um intervalo de tempo é o produto de 3 fatores;

1) número de modos por unidade de volume

2) A probabilidade P

3) volume V' originalmente ocupado pelos fótons

O número de modo é

$$\frac{4\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \frac{V}{c^d} \nu^{d-1}$$

função gamma

A prob. P,

$$\frac{d\omega}{\iiint d\omega}$$

O volume do hipercilindro

$$A_c \cos\theta \, dt$$

O que resulta em

$$\frac{4\pi^{d/2} V v^{d-1}}{\Gamma(d/2)\, c^{d}} \qquad \frac{A_c \cos\theta \, dt}{V} \qquad \frac{d\omega}{\iiint \cdots \int d\omega}$$

Integrando e dividindo por dt,

$$G \iiint \cdots \int \frac{A_c}{V} \cos\theta \; \frac{d\omega}{\iint \cdots \int d\omega}$$

$$G \frac{A_c}{V} \frac{\iint \cdots \int \cos\theta \, d\omega}{\iiint \cdots \int d\omega}$$

Volume de esfera $(d-1)$-dimensional

Área da hiperesfera de Raio 1 (S_d)

$$G \frac{A_c V_{d-1}}{V S_d} = G \frac{A_c}{V} \frac{V_{d-1}}{d V_d}$$

$S_d \to d V_d$

Resultando em

$$G \cdot \frac{A_c}{V} \; \Gamma(d/2) / 2\sqrt{\pi}\, \Gamma[(n+1)/2] \quad (1)$$

Isso permite calcular a densidade espectral d-dimensional de Planck,

$$\Phi_\nu = (1) \left[\frac{h\nu^n}{e^{(h\nu/kT)} - 1} \right]$$

$$= \frac{2A\pi^{(d-1)/2}}{\Gamma[(d+1)/2]} \frac{h}{c^{d-1}} \frac{\nu^n}{\left[\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1\right]}$$

Integrando em todo o espectro,

$$\Phi = \frac{2A\pi^{(d-1)/2}}{\Gamma[(d+1)/2]} \frac{h}{c^{n-1}} \int_0^\infty \frac{\nu^n \, d\nu}{\left[\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1\right]}$$

$$= \frac{2A\pi^{(d-1)/2}}{\Gamma[(d+1)/2]} \Gamma(d+1)\, \zeta(d+1) \frac{k^{d+1}}{h^d c^{d-1}} T^{n+1}$$

Função zeta de Riemann

Simplificando

$$\Phi = \Theta_d A T^{d+1}$$

Chegando à expressão da Lei de Stefan-Boltzmann para d-dimensões.

4) A potência irradiada é

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \sigma A T^4$$

$$= 1.5 \cdot (310,15)^4 (5,67 \times 10^{-8})$$

$$= 785,45 \ J/s$$

Em um dia a energia necessária é

$$E_{1\,dia} = 785,45 \times 86400 = 67.862.880 \ J$$

5) Para um gás de fótons, a entropia é

$$S(T) = \int_0^T \frac{C_V(T')\, dT'}{T'} = \frac{4aT^3}{3}$$

$$= \frac{32\pi^5}{45} V \left(\frac{k_B T}{hc}\right)^3 k_B$$

A entropia para (T_a, V_a),

$$S(T_a) = \frac{32\pi^5 V_a}{45} \left(\frac{k_B T_A}{hc}\right)^3 k_B$$

A entropia para $(T, 2V_a)$,

$$S(T) = \frac{32\pi^5 2V_a}{45}\left(\frac{k_B T}{hc}\right)^3 k_B$$

Igualando,

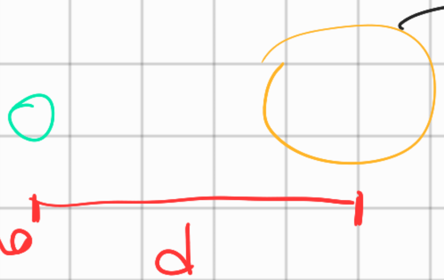
$$S(T_a) = S(T)$$

$$\frac{\cancel{32\pi^5}\,\cancel{V_a}}{\cancel{45}}\left(\frac{\cancel{k_B}T_A}{\cancel{hc}}\right)^3\cancel{k_B} = \frac{\cancel{32\pi^5}\,2\cancel{V_a}}{\cancel{45}}\left(\frac{\cancel{k_B}T}{\cancel{hc}}\right)^3\cancel{k_B}$$

$$T_a^3 = 2T^3$$

$$T = \frac{T_A}{\sqrt[3]{2}}$$

6)



$T = 5500\ K$

$P = \sigma A T^4$

$P_{sol} = 5{,}67 \times 10^{-8}.$

Energia emitida pelo SOL

$C = 0 \times 10^6$ km

Energia Recebida pelo TERRA

$$\boxed{P_{sol}} = \boxed{2\pi R_{terra}^2 \,\sigma T_{terra}^4}$$

$$2\pi R_{sol}^2 T_{sol}^4 \theta = 2\pi R_{terre}^2 T_{terre}^4 \theta$$

$$\frac{2 R_{sol}^2 T_{sol}^4}{R_{terre}^2} = T_{terre}^4$$

$$T_{terre} = T_{sol} \sqrt[4]{\frac{R_{sol}^2}{R_{terre}^2}}$$

7)

a)
$$\begin{cases} U = aVT^4 \\ \quad = \left(\frac{3S}{4}\right)^{4/3} \cdot (aV)^{-1/3} \\ P = -\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S = \frac{1}{3}\frac{U}{V} = \frac{1}{3} a T^4 \end{cases}$$

b) $C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{V,N} = 4aT^3$

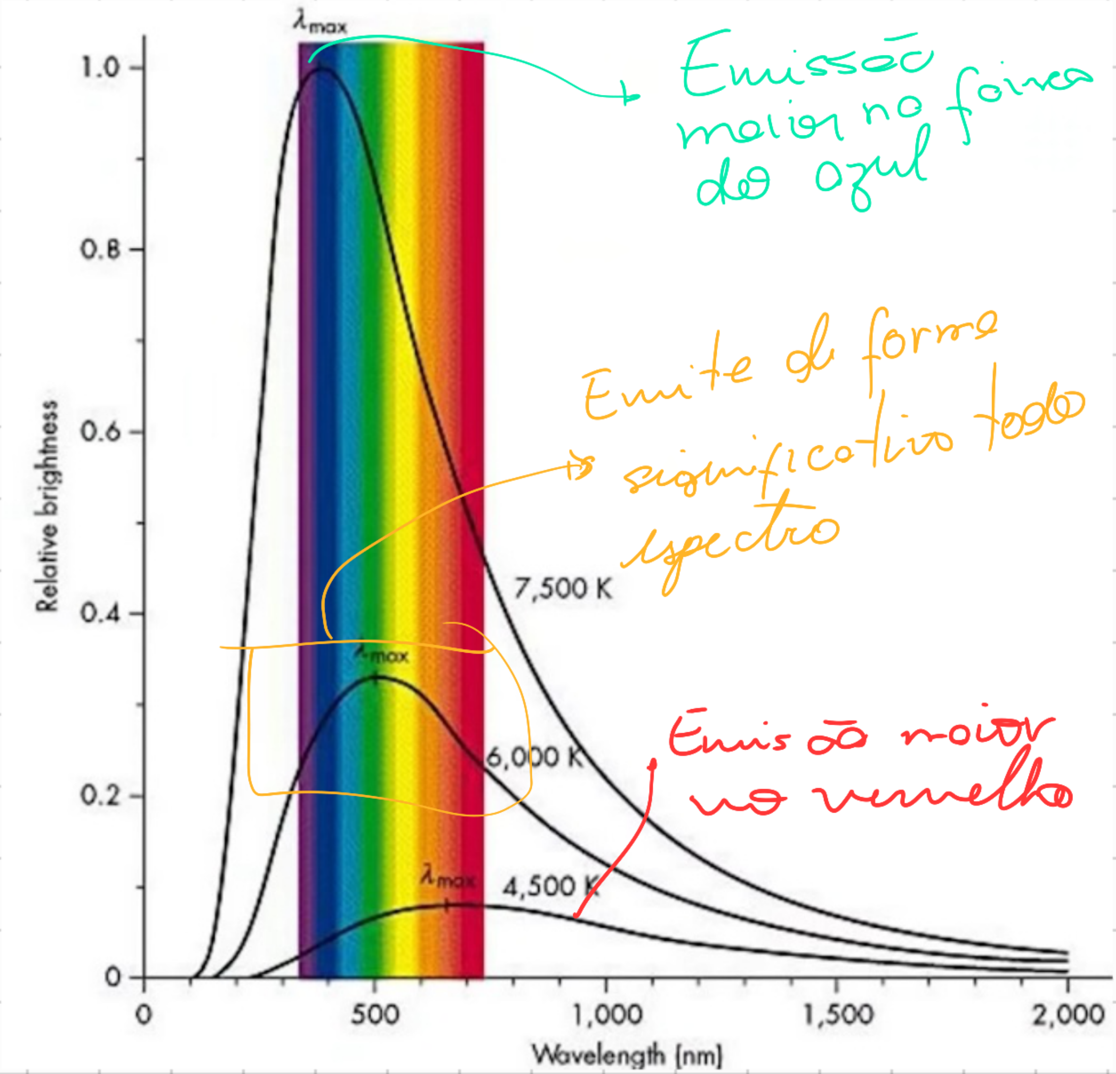
$$S(T) = \int_0^T \frac{C_V(T')}{T'} dT' = \frac{4aT^3}{3}$$

$$= \frac{32\pi^5}{45} V \left(\frac{k_B T}{hc}\right)^3 k_B$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = 4aT^2$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \frac{32\pi^5}{45}\left(\frac{k_B T}{hc}\right)^3 k_B$$

8) Emissão de radiação abrange todo o espectro de luz visível.



Emissão maior na faixa do azul

Emite de forma significativa todo espectro

Emissão maior no vermelho