

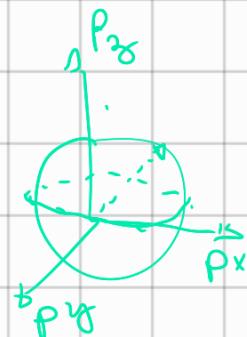
List 5 - Termodinâmica II (09/04/2021)

1) A densidade da multiplicidade dR :

$$dR = \frac{d^3r d^3p}{h^3}$$

Integrandos

$$\begin{aligned} \int dR &= \frac{1}{h^3} \int \int d^3r d^3p \\ &= \frac{V}{h^3} \int \int \int p^2 \sin\theta dp d\theta d\phi \end{aligned}$$



$$= \frac{4\pi V}{h^3} \int p^2 dp$$

Para um gás de fótons, a energia E é escrita assim:

$$E = cp$$

De forma equivalente, pela relação de Planck:

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

() comprimento
() frequência de onda

Assim, o integral fico:

$$\frac{4\pi V}{h^3} \int \left(\frac{E}{c}\right)^2 \frac{dE}{c} = \frac{4\pi V}{h^3 c^3} \int E^2 dE$$

O que leva à densidade de estados $g(E)$:

2º polarização

$$2 \cdot g(E) = \frac{8\pi V E^2}{h^3 c^3}$$

Substituindo $E = hc/\lambda$, escrevemos $g(\lambda)$

$$2 \cdot g(\lambda) : \frac{8\pi V}{h^3 c^3} \left(\frac{hc}{\lambda}\right)^2 = \frac{8\pi V}{\lambda^2 h c}$$

Escrivemos a densidade de energia com
 $\rho_{\text{Energy}} = E g(E) \bar{n}(E)$. Assim,

$$\rho_{\text{Energy}}(E) = E g(E) \bar{n}(E) = \frac{8\pi V E^3}{h^3 c^3} \frac{1}{e^{\beta E} - 1}$$

$$\rho_{\text{Energy}}(\lambda) = \frac{8\pi V}{\lambda^3} \frac{1}{e^{\frac{\beta hc}{\lambda}} - 1}$$

$f(E)$ será máxima quando $E = 0$
 Energia

$p(h)$ será máxima quando $h \rightarrow \infty$
 Energia

2)

$$\bar{N} = \int_0^{\infty} g(\epsilon) \bar{n}(\epsilon) d\epsilon = \int_0^{\infty} \frac{8\pi V \epsilon^2}{(hc)^3} \frac{1}{e^{\epsilon\beta} - 1} d\epsilon$$

densidade de estados

ocupação

$$= \frac{C V}{\beta^2} \int_0^{\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} dx$$

Assim, \bar{N}/V é:

$$\frac{\bar{N}}{V} = \frac{8\pi}{(hc)^3} \int_0^{\infty} \frac{\epsilon^2}{e^{\epsilon\beta} - 1} d\epsilon = \frac{8\pi}{(hc\beta)^3} \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{e^x - 1}$$

↳ Resolvido
numericamente

Trapezio

$$\frac{\bar{N}}{V} = \frac{8\pi}{(hc\beta)^3} \cdot (2,4)$$

$$= 3,7 \times 10^{10}$$

<https://colab.research.google.com/drive/1KEcNYWjk14JAp6hIEPQnUEk64ka0Bd4z?usp=sharing>

URL
de Acesso

3) Considerando um hiper cubo de d-dimensões de volume $V = \prod_i a_i$, onde a_i são os tamanhos das arestas.

O vetor de onda satisfaz a condição de conformes de paredes idealmente,

$$\vec{k} = \frac{1}{2} \left(\frac{m_1}{a_1}, \frac{m_2}{a_2}, \dots, \frac{m_d}{a_d} \right)$$

onde m_i são inteiros positivos ou zero. Os autovetores \vec{k} formam uma configuração ortonormal.

A frequência ν do e- dado por meio da relação de de Broglie:

$$\nu = C |\vec{k}| \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{frequência dos} \\ \text{modos de vibração} \end{array} \right.$$

O número de modos g com frequência menor que ν é igual ao número de k pontos na hiperesfera de raio ν/c . Esse espaço tem volume igual

$$\mathbb{V}_n (\nu/c)^n$$

Volume da hiperesfera de raio 1

A probabilidade de um partícula estar direcionada como o elemento de ângulo sólido da é

$$P = \frac{dw}{\iiint \dots dw}$$

O número de fôtons em d direções, acertando uma área A em um intervalo de tempo é o produto de 3 fôtons;

1) número de modos por unidade de volume

2) A probabilidade P

3) volume V' originalmente ocupado pelos fôtons

O número de modos é

$$\frac{4\pi^{d/2} V}{\Gamma(d/2) C^d} \quad \text{função gamma}$$

A prob. P ,

$$\frac{dw}{\iiint dw}$$

O volume do hipercilindro

$$A_c \cos \theta dt$$

O que resulta em

$$\frac{4\pi^{d/2} \sqrt{v^{d-1}}}{\Gamma(d/2) c^d} \frac{A_c \cos \theta dt}{V}$$

$$\iiint \dots \int du$$

Integrando e dividindo por dt ,

$$G \iiint \dots \int \frac{A_c \cos \theta}{V} \frac{du}{\iiint \dots \int du}$$

$$G \frac{A_c}{V} \iiint \dots \int \cos \theta du = G \frac{A_c}{V} \iiint \dots \int du$$

Volume de esfera
($d-1$)-dimensional

Área do hiperesfero
de Raio \perp (S_d)

$$G \frac{A_c \sqrt{V_{d-1}}}{\sqrt{S_d}} = G \frac{A_c}{V} \frac{\sqrt{V_{d-1}}}{\sqrt{d} \sqrt{V_d}}$$

$\hookrightarrow dV_d$

Resultando em

$$G \cdot \frac{A_c}{V} \frac{\Gamma(d/2)}{2\sqrt{\pi}} \Gamma[(n+1)/2] \quad (1)$$

Isso permite calcular a densidade espectral d-dimensional de Planck,

$$\Phi_v = (1) \left[\frac{hv^n}{e^{(hv/kT)} - 1} \right]$$

$$= \frac{2A\pi^{(d-1)/2}}{\Gamma((d+1)/2)} \frac{h}{c^{d-1}} \frac{v^n}{\left[\exp\left(\frac{hv}{k_B T}\right) - 1 \right]}$$

Integrando em todo o espectro,

$$\Phi = \frac{2A\pi^{(d-1)/2}}{\Gamma((d+1)/2)} \frac{h}{c^{n-1}} \int_0^{\infty} v^n dv$$

$$= \frac{2A\pi^{(d-1)/2}}{\Gamma((d+1)/2)} \Gamma(d+1) \underbrace{\frac{\Gamma(d+1)}{h^d c^{d-1}}} \underbrace{T^{n+1}}_{\text{Função zeta de Riemann}}$$

Simplificando

$$\Phi = \Phi_d A T^{d+1}$$

Chegando à expressão da Lei de Stefan-Boltzmann para d-dimensionais.

1) A potência irradiada é

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \sigma A T^4$$

$$= 1.5 \cdot (310,15) (5,67 \cdot 10^{-8})$$

$$= 785,45 \text{ J/s}$$

Em um dia a energia necessária é

$$E_{\text{dia}} = 785,45 \times 86400 = 67862.880 \text{ J}$$

5) Para um gás de fôtons, a entropia é

$$S(T) = \int_0^T \frac{C_v(T') dT'}{T'} = \frac{4 \alpha T^3}{3}$$

$$= \frac{32 \pi^5}{45} V \left(\frac{k_B T}{h c} \right)^3 k_B$$

A entropia para (T_A, V_A) ,

$$S(T_A) = \frac{32 \pi^5 V_A}{45} \left(\frac{k_B T_A}{h c} \right)^3 k_B$$

A entropia para $(T, \Delta V_a)$,

$$S(T) = \frac{32 \pi^5 \Delta V_a}{45} \left(\frac{k_B T}{hc} \right)^3 k_B$$

Igualando,

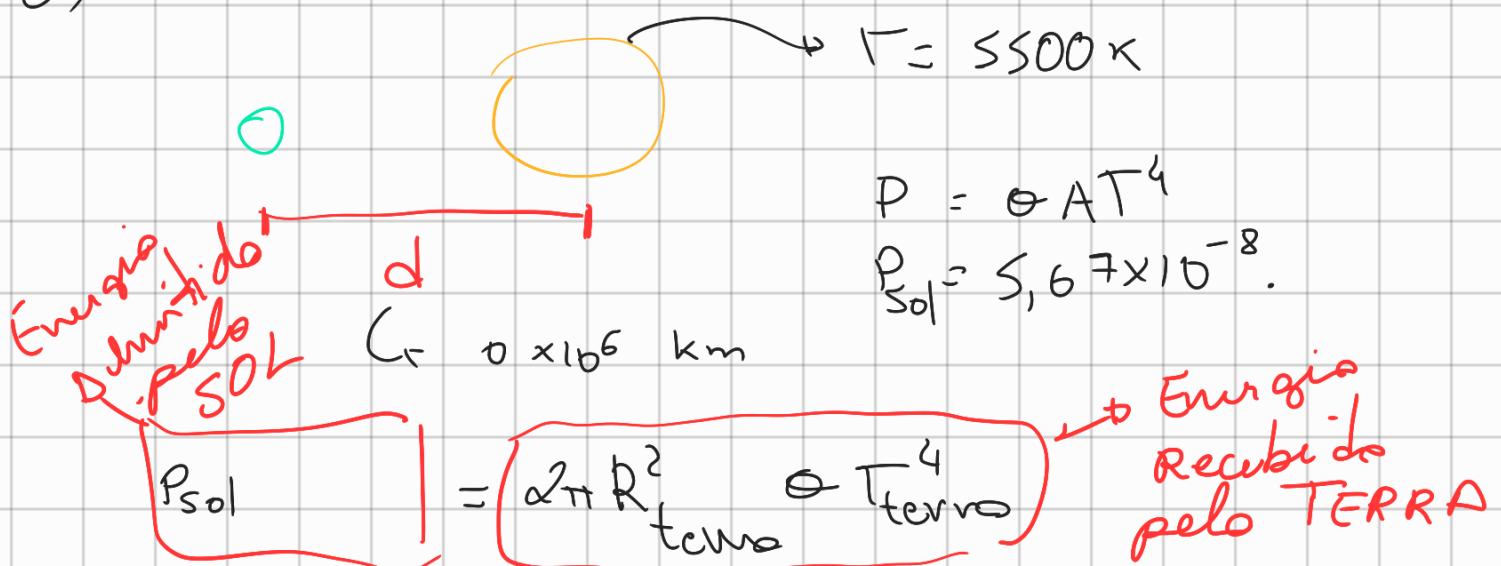
$$S(T_a) \approx S(T)$$

$$\cancel{\frac{32 \pi^5 \Delta V_a}{45} \left(\frac{k_B T_a}{hc} \right)^3 k_B} = \cancel{\frac{32 \pi^5 \Delta V_a}{45} \left(\frac{k_B T}{hc} \right)^3 k_B}$$

$$T_a^3 = 2 T^3$$

$$T = \sqrt[3]{\frac{T_a}{2}}$$

6)



$$2\pi R_{\text{sol}}^2 T_{\text{sol}}^4 \sigma = 2\pi R_{\text{terre}}^2 T_{\text{terre}}^4 \sigma$$

$$\frac{2 R_{\text{sol}}^2 T_{\text{sol}}^4}{R_{\text{terre}}^2} = T_{\text{terre}}^4$$

$$T_{\text{terre}} = T_{\text{sol}} \sqrt[4]{\frac{R_{\text{sol}}^2}{R_{\text{terre}}^2}}$$

F)

$$\text{a) } U = \alpha V T^4$$

$$= \left(\frac{3S}{4}\right)^{1/3} \cdot (\alpha V)^{-1/3}$$

$$P = -\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S = \frac{1}{3} \frac{U}{V} = \frac{1}{3} c T^4$$

$$b) C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_{V,N} = 9aT^3$$

$$S(T) = \int_0^T \frac{C_V(T') dT'}{T'} = \frac{9aT^3}{3}$$

$$= \frac{32\pi^5}{45} V \left(\frac{k_B T}{hc} \right)^3 k_B$$

↓

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V = 9aT^2$$

↓

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T = \frac{32\pi^5}{45} \left(\frac{k_B T}{hc} \right)^3 k_B$$

↓

8) Emissão de radiação abrange todo o espectro de luz visível.

