Semana 7 - Termofísica I

3.37

Otaviano Cruz (27/10/20)

Questão 3.28)

1 litro de ar $\qquad V_f = 2V_0$

$T_0 = 25°C = 297\,K$

$P = 1\,atm = 10^5\,Pa$

↳ constante durante o processo

A entropia S de um gás ideal é dada por

$$S = f(N)\,V^N(2mU)^{3N/2}$$

$$PV = nRT$$

$$dT = \frac{P}{Nk_B}\,dV$$

$$T = \frac{PV}{kK}$$

$$dU = TdS - PdV$$

$$\frac{dU + PdV}{T} = dS$$

$$\Delta S = \int \frac{C_p\,dT}{T} = \int \frac{C_p}{\left(\frac{\cancel{P}V}{Nk_B}\right)} \cdot \frac{\cancel{P}}{\cancel{Nk_B}}\,dV$$

$$\Delta S = \int \frac{C_p}{V} dV = C_p \ln V \Big|_{V_0}^{V_f} = C_p \ln 2$$

$$\boxed{\Delta S = C_p \ln 2}$$

$$C_p = \frac{7}{2} nR = \frac{7}{2}\left(\frac{1}{3} J/K\right)$$

$$\boxed{\Delta S = 0{,}81 \, J/K}$$

Questão 3.37

a) $\mu = -T\left(\frac{\partial S}{\partial N}\right)_{U,V}$ ou $\mu = \left(\frac{\partial U}{\partial N}\right)_{S,V}$ $U \to U + Nmgz$

É o potencial químico. A entropia de um gás ideal monoatômico em $z=0$ é

$$S = Nk_B \left[\ln\left(V \left(\frac{4\pi m U}{3h^2} \right)^{3/2} \right) - \ln N^{5/2} + \frac{5}{2} \right]$$

Substituindo na equação de μ temos,

$$\mu(z=0) = -T\left(\frac{\partial S}{\partial N}\right)_{U,V}$$

$$= -T\left\{k_B\left[\ln\left(V\left(\frac{4\pi m U}{3h^2}\right)^{3/2}\right) - \ln N^{5/2} + 5/2\right]\right.$$

$$\left. - N k_B \frac{5}{2}\frac{1}{N}\right\}$$

$$= -kT\ln\left[\frac{V}{N}\left(\frac{4\pi m U}{3Nh^2}\right)^{3/2}\right]$$

Substituindo $U = \frac{3}{2}NkT$,

$$\mu(z=0) = -kT\ln\left[\frac{V}{N}\left(\frac{2\pi m kT}{h^2}\right)^{3/2}\right].$$

Da segunda fórmula para μ,

$$\mu = \left(\frac{\partial U}{\partial N}\right)_{S,V} = \frac{\partial(U + Nmgz)}{\partial N}$$

$$= \frac{\partial U}{\partial N} + \frac{\partial}{\partial N}(Nmgz)$$

$$= -T\left(\frac{\partial S}{\partial N}\right)_{V,U} + \frac{\partial}{\partial N}(Nmgz)$$

$$\boxed{\mu = -kT \ln\left[\frac{V}{N}\left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{3/2}\right] + mgz}$$

b) No equilíbrio difusivo o potencial químico é igual nas duas alturas, ou seja

$$\mu(z=0) = \mu(z)$$

Levando em consideração que N pode variar com a altura teremos $N(z)$ e $N(0)$

$$-kT\ln\left[\frac{V}{N(0)}\left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{3/2}\right] = mgz - kT\ln\left[\frac{V}{N(z)}\left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{3/2}\right]$$

with $\alpha = \left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{3/2}$

Com isso teremos,

$$\frac{mgz}{kT} = -\ln\frac{V\alpha}{N(0)} + \ln\frac{V\alpha}{N(z)} = -\ln N(z) + \ln N(0)$$

$$\frac{mgz}{KT} = \ln N(0) - \ln N(z)$$

Aplicando a exponeciação,

$$e^{-\frac{mgz}{k_B T}} \cdot e^{\ln N(0)} = e^{\ln N(z)}$$

Resultando,

$$\boxed{N(z) = N(0)\, e^{-mgz/k_B T}}$$