Lista 6 - Gás de Férmions - Termofísica II

Otaviano Cruz (16/04/21)

1) Um gás de férmions,

$$dU = \varepsilon\, g(\varepsilon)\, \overline{n_f}(\varepsilon)\, d\varepsilon$$

$\overline{n_f}(\varepsilon) \rightarrow$ número de ocupação

$g(\varepsilon) \rightarrow$ Densidade de estados

$$= \varepsilon \underbrace{\left(\frac{2\cdot 4\pi V}{h^3}\, \varepsilon^{1/2}\right)}_{g(\varepsilon)} \frac{1}{e^{\beta x}+1}\, d\varepsilon$$

$\frac{1}{e^{\beta x}+1} \rightarrow$ Dist. Fermi-Dirac

A energia U será

$$U = \int_0^{\infty} \varepsilon\, g(\varepsilon)\, \overline{n_f}(\varepsilon)\, d\varepsilon$$

$$\frac{p^2}{2m} = \varepsilon$$

$$p = \sqrt{2m\varepsilon}$$

$$dp = \sqrt{2m}\, \varepsilon^{-1/2} d\varepsilon$$

Em $T = 0$,

$$U = \int_0^{\varepsilon_F} \varepsilon \frac{8\pi V (2m)^{3/2}}{h^3} \frac{\varepsilon^{1/2}}{e^{\beta x}+1}\, d\varepsilon$$

$$= \frac{8\pi V (2m)^{3/2}}{h^3} \int_0^{\varepsilon_F} \frac{\varepsilon^{3/2}}{e^{\beta x}+1} d\varepsilon$$

$$= \frac{8\pi V (2m)^{3/2}}{h^3} \left(\varepsilon_F^{5/2} \right) \frac{2}{5}$$

$p^2 dp$

$\varepsilon 2m \sqrt{2m}\, \varepsilon^{-\frac{1}{2}} d\varepsilon$

$(2m)^{3/2} \varepsilon^{\frac{1}{2}} d\varepsilon$

A energia de um gás de Férmions é extensiva devido à dependência da massa do férmion e do volume ocupador pelo gás.

2) A pressão do gás de férmions

a)

$$P = -\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = \frac{16}{5} \frac{\pi (2m)^{\frac{3}{2}}}{h^3} \varepsilon_F^{5/2}$$

Energia de Fermi

b) Sabendo que o calor específico C_V para o gás de Férmions, pela expansão de Sommerfield

$$C_V \simeq \left(\frac{N \pi^2 k^2}{2 \varepsilon_F} \right) T$$

A entropia S será

$$S = \int \frac{C_v}{T}\, dT = \frac{N\pi^2 k^2}{2\varepsilon_F}$$

c)

A pressão P

$$P = \frac{16\pi}{5} \frac{(2me)^{3/2}}{h^3} \varepsilon_F^{5/2}$$

$$=$$

$$\varepsilon = cp$$

3) O número médio, $\bar{n} = V 4\pi \left(\frac{\varepsilon}{c}\right)^2$

$$\bar{N} = \int_0^{\varepsilon_F} \frac{V 4\pi}{h^3} \left(\frac{\varepsilon}{c}\right)^2 \frac{d\varepsilon}{c}$$

$$= \frac{4}{3} \frac{\pi V \varepsilon_F^3}{h^3 c^3} \Rightarrow \varepsilon_F = \sqrt[3]{\frac{3 \bar{N} (hc)^3}{4\pi V}}$$

A energia média $\bar{U}$

$$\bar{U} = \int_0^{\varepsilon_F} \frac{V 4\pi}{C h^3}\left(\frac{\varepsilon}{C}\right)^3 d\varepsilon = \frac{V\pi}{c(hc)^3}\varepsilon_F^4$$

A pressão P

$$P = -\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = \frac{\pi\,\varepsilon_F^4}{c(hc)^3}$$

5) O material é um isolante, pois ao aumentar a temperatura o calor específico sofre pequenas alterações. Indicando baixa condutividade térmica comportamento observado em Isolantes

6) A expressão 7.112,

$$\frac{x^3}{e^x - 1}$$

Expandindo a exponecial,

$$\frac{x^3}{\left(1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3\right)-1} = x^2\left(1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}x^2\right)^{-1}$$

↳ Expandindo

$$\approx x^2\left[1-\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}x^2\right)+\frac{1}{2}(-1)(-2)\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}x^2\right)^2\right]$$

$$\approx x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{12}x^4$$

Integrando, o até T_D/T

$$U \approx \frac{9NkT^4}{T_D^3}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{T_D}{T}\right)^3 - \frac{1}{8}\left(\frac{T_D}{T}\right)^4 + \frac{1}{60}\left(\frac{T_D}{T}\right)^5\right]$$

$$= 9Nk\,T_D\left[\frac{1}{3}\left(\frac{T}{T_D}\right) - \frac{1}{8} + \frac{1}{60}\left(\frac{T_D}{T}\right)\right]$$

A capacidade térmica C_V

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = 3Nk\left[1-\frac{1}{20}\left(\frac{T_D}{T}\right)^2\right]$$

4) A energia média E é dada pela expressão

$$E = \int_0^{\varepsilon_F} \varepsilon \, \underline{g(\varepsilon)} \, \bar{n}_f(\varepsilon) \, d\varepsilon$$

ocupação

densidade de estados

Pela expansão de Sommerfield escrevemos uma integral como,

$$\bar{E} = \underbrace{\int_0^{\varepsilon} \varepsilon' g(\varepsilon') d\varepsilon'}_{1} + \frac{\pi^2}{6} (kT)^2 \underbrace{\left[\frac{d(\varepsilon' g(\varepsilon'))}{d\varepsilon'} \right]_{\varepsilon}}_{2} + \dots$$

Calculando 1,

$$\int_0^{\varepsilon} \varepsilon' g(\varepsilon') d\varepsilon' = \frac{V}{5\pi^2} \frac{(2m)^{3/2}}{h^3} \mu^{5/2}$$

Calculando 2,

$$\left. \frac{d\varepsilon' g}{d\varepsilon'} \right|_{\varepsilon} = \frac{3V}{4\pi^2} \frac{(2m)^{3/2}}{h^3} \varepsilon^{1/2}$$

Substituindo,

$$\bar{E} \approx \frac{V}{5\pi^2} \frac{(2m)^{3/2}}{h^3} \varepsilon^{5/2} + \frac{V}{8} \frac{(2m)^{3/2}}{h^3} (kT)^2 \varepsilon^{1/2}.$$