张宇高数考研学习笔记

SeanGo

December 2017

Preface

For my life good!

Part I

Limit

综述

1. 定义与性质: 4' and 4'
2. 函数极限的计算: $f(x)$ 4' or 10'
3. 数列极限的计算: $\{x_n\}$ 4' or 10' (2. + 3. = 14')
4. 应用4'

Chapter 1

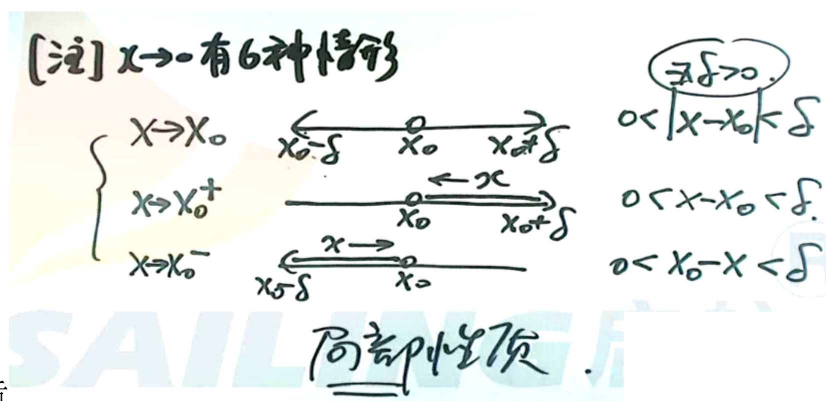
定义与性质

1.1 定义及其考法

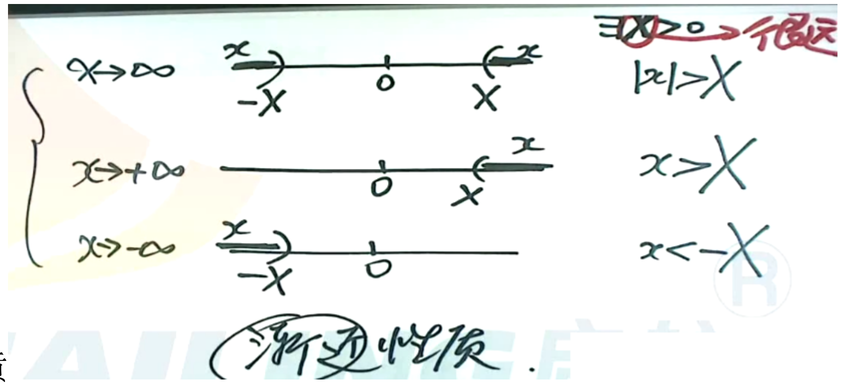
1.1.1 定义

Definition 1.1.1. *Limit of function* $\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,$ *when* $0 < |x - x_0| < \delta$, *have* $|f(x) - A| < \epsilon$

Warning: $x \neq x_0$, 去心！！！



1. 局部性质



2. 渐进性质

Definition 1.1.2. *Limit of Serial* $\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0,\ \exists N > 0,$ *when* $n > N$*, have* $|x_n - a| < \epsilon$

Notes:

1. $n \in N$, $\to \infty$ 无穷的意思是正无穷$\to +\infty$
2. 只有渐进性质

1.1.2 考法

考法1：$\epsilon - \delta$**语言的简单应用**

Solution: 按照定义写出$|f(x) - A| < \epsilon$，从中解出$|x - x_0|$，或者$|x|$，求出δ即可。

Example 1 : 证明: $\lim_{x\to -\frac{1}{2}} \frac{1-4x^2}{2x+1} = 2$

分析:

$\forall\epsilon > 0, \left|\frac{1-4x^2}{2x+1} - 2\right| = |-2x-1| = 2\left|x - (-\frac{1}{2})\right| < \epsilon$

于是有：$\left|x - (-\frac{1}{2})\right| < \frac{\epsilon}{2} = \delta$

Proof. $\forall\epsilon > 0$, let $\delta = \frac{\epsilon}{2}$, when $0 < \left|x - (-\frac{1}{2})\right| < \delta$, we have

$$\left|\frac{1-4x^2}{2x+1} - 2\right| = |-2x-1| = 2\left|x - (-\frac{1}{2})\right| < \epsilon$$

□

Example 2: 证明:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+1}{2x+1}=\frac{3}{2}$$

分析: $\forall\epsilon>0,\exists X>0$, when $x>X$, have

$$\left|\frac{3x+1}{2x+1}-\frac{3}{2}\right|=\frac{1}{2(2x+1)}<\frac{1}{4x}<\epsilon\Leftrightarrow x>\frac{1}{4\epsilon}$$

Proof. $\forall\epsilon>0$, let $X>\frac{1}{4\epsilon}$, when $x>X$, have

$$\left|\frac{3x+1}{2x+1}-\frac{3}{2}\right|=\frac{1}{2(2x+1)}<\frac{1}{4x}<\frac{1}{4X}<\epsilon$$

□

考法2：取ϵ, 讨论$f(x)/x_n$的范围

Theorem 1.1.1 (绝对值不等式)**.**

$$||a|-|b||\leq|a-b|$$

上式左边是a 和b的长度差, 右边是a和b的距离，所以不等式成立，当$a=b$时，取=.
因为$||f(x)|-|A||\leq|f(x)-A|<\epsilon$, and $||x_n|-|a||\leq|x_n-a|<\epsilon$,
所以有:

Theorem 1.1.2.

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Rightarrow\lim_{x\to x_0}|f(x)|=|A|$$

and:

$$\lim_{x\to\infty}x_n=a\Rightarrow\lim_{x\to\infty}|x_n|=|a|$$

Example 3: 设$\lim_{n\to\infty}x_n=-2$, 则当n充分大时:
(A)$x_n>-2-\frac{1}{n}$ (B)$x_n<-2+\frac{1}{n}$ (C)$|x_n|>1$ (D) $|x_n|<1$
答案选C.
A和B是变量，比如还会有x_n落在$-2+/-(2/n),(3/n)$...邻域内。ϵ必须是常量。对于本例，实际上有$|x_n|\to|-2|=2$，取$\epsilon=1$，当n充分大时，有$|x_n|<\epsilon\Rightarrow 1<|x_n|<3$

1.2 性质及其考法

1.2.1 唯一性

Theorem 1.2.1. 若极限存在则唯一
$\lim_{x\to x_0} f(x)\exists \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x)$

Example :

$$I = \lim_{x\to 0}\left[\frac{ln\left(1+e^{\frac{2}{x}}\right)}{ln\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)} + k\cdot\lfloor x\rfloor\right]$$

若I存在，求k和I.
解:
因为

$$\lim_{x\to 0^+}(k\cdot\lfloor x\rfloor) = 0$$

所以

$$I^+ = \lim_{x\to 0^+}\frac{ln\left(1+e^{\frac{2}{x}}\right)}{ln\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)} \xrightarrow[x=\frac{1}{t}]{\frac{\infty}{\infty}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{ln(1+e^{2t})}{ln(1+e^t)} \xrightarrow[L'hospita]{\frac{\infty}{\infty}} =$$

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\frac{2e^{2t}}{1+e^{2t}}}{\frac{e^t}{1+e^t}} = \lim_{t\to+\infty}\frac{2e^t(1+e^t)}{1+e^{2t}} = 2\lim_{t\to+\infty}\frac{e^{-t}+1}{e^{-2t}+1} = 2$$

再求左极限:

$$\lim_{x\to 0^-} k\cdot\lfloor x\rfloor = \lim_{x\to 0^-} k\cdot(-1) = -k$$

$$I^- = \lim_{x\to 0^-}\frac{ln\left(1+e^{\frac{2}{x}}\right)}{ln\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)} - k = \lim_{x\to 0^-}\frac{e^{\frac{2}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}} - k$$

$$= \lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} - k \overset{t=\frac{1}{x}}{\to} = \lim_{t\to-\infty} e^t - k = -k$$

由I存在可知:

$$I = I^+ = I^- \Rightarrow k = -2,\ I = 2$$

1.2.2 局部有界性

Theorem 1.2.2. 若$\lim_{x\to x_0} f(x) = A$存在, 则$\exists M > 0,\ \delta > 0$, 使得当$0 < |x - x_0| < \delta$时, $|f(x)| < M$.

会证，会用！ $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$...
$\lim_{n\to\infty} x_n = a$...

Proof. $\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0,\ \exists\delta > 0$, when $0 < |x - x_0| < \delta$, have $|f(x) - A| < \epsilon$ □

因为：
$|f(x)| = |f(x) - A + A| \le |f(x) - A| + |A| < |A| + \epsilon$
取$\epsilon = 1,\ M = |A| + 1$,则有$|f(x)| < M$
Example：

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}$$

，$\dfrac{\sin x}{x}$在$(0,1)$内有界吗?

对于任意小的$\delta_1,\ \delta_2$,在$[\delta_1, 1-\delta_2]$内有界。当$x \to 0^+$时，$\dfrac{\sin x}{x} \to 1$, 有界。
当$x \to 1^-$时，$\dfrac{\sin x}{x} = \sin 1$，有界，因此，在$(0,1)$上有界。
分析 讨论$f(x)$的有界性，总结如下：

1. 理论法—- 若$f(x)$在$[a,b]$上连续，$\Rightarrow f(x)$在$[a,b]$有界.
2. 计算法—- 若$f(x)$，在(a,b)内连续，$\lim_{x\to a^+} f(x)\exists$, $\lim_{x\to b^-} f(x)\exists$, 则$f(x)$在$(a,b)$内有界。
3. 四则运算法—- 当极限不存在时，**拆!** 有限个有界+有界=有界，有界*有界=有界

Example 设

$$f(x) = \frac{(x^3 - 1)\sin x}{(x^2 + 1)\,|x|}$$

讨论起在定义域内的有界性。
解：

定义域是$x \neq 0$,

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{(x^2+1)\,|x|} \sin x = g(x) \sin x$$

$\lim_{x \to -\infty} g(x) = -1$, 且sin(x)有界，所以$x \to -\infty$时，$f(x)$有界
$\lim_{x \to +\infty} g(x) = 1$, 且sin(x)有界，所以$x \to +\infty$时，$f(x)$有界

$$\lim_{x \to -0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} -\frac{x^3-1}{x^2+1}\frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to -0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^3-1}{x^2+1}\frac{\sin x}{x} = -1$$

所以$f(x)$有界

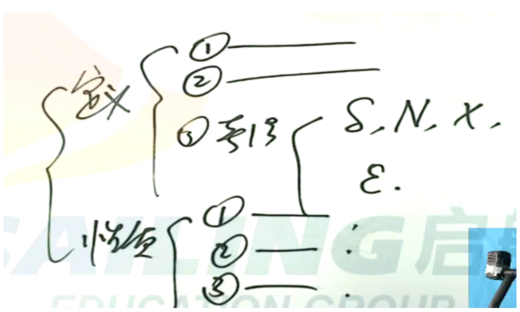
1.2.3 局部保号性

Theorem 1.2.3. 如果$\lim_{x\to\cdot} f(x) = A > (<)0$, 则在$x \to \cdot$中，$f(x) > (<)0$
同时，若$x \to \cdot$，$f(x) \geq (\leq)0$, 若$\lim_{x\to\cdot}$存在，$\Rightarrow \lim_{x\to\cdot} f(x) \geq (\leq)0$

Proof. $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 当$|x - \cdot| < \delta$时, 有$|f(x) - A| < \epsilon \Leftrightarrow -\epsilon < f(x) - A < \epsilon \Leftrightarrow A - \epsilon < f(x) < A + \epsilon$, 取$\epsilon = \frac{A}{2}$，有$f(x) > A - \epsilon = \frac{A}{2} > 0$ □

Example 设：$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^2} = -1$, 问：$f(x)$在$x_0$点的极值情况。
解： $-1 < 0 \Rightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^2} < 0 \Rightarrow f(x) < f(x_0)$, 所以在$x_0$附近有极大值。

1.2.4 小结



Chapter 2

函数极限的计算

综述

1. 化简现行: 恒等变形（+一个-一个，*一个/一个）变量替换etc.
2. 判别类型: $o/o,\ \infty/\infty,\ \infty\cdot o,\ \infty-\infty,\ \infty^o,\ o^o,\ 1^\infty$
   (a) $o/o,\ \infty/\infty,\ \infty\cdot o\ (\Rightarrow o/o \text{ or } \infty/\infty)$
   (b) $\infty-\infty$
   (c) $\infty^o,\ o^o,\ 1^\infty\ (\Rightarrow u(x)^{v(x)}),\ u^v \Longleftrightarrow e^{v\ln u}$
3. 使用工具：洛必达，泰勒
4. 注意事项：学会总结经验教训

Example 求:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{x^2}$$

解:

Appendix A

First Appendix

Last note

Bibliography