作者	**生姜 DrGinger**
脚本	**生姜 DrGinger**
视频	**崔崔 CuiCui**
开源学习资源	**https://github.com/Visualize-ML**
平台	**https://www.youtube.com/@DrGinger_Jiang** **https://space.bilibili.com/3546865719052873** **https://space.bilibili.com/513194466**

2.5 矩阵乘法的几何视角

本节你将掌握的核心技能：

- ▶ 矩阵乘法的几何意义：矩阵乘法不仅是数值操作，更表示线性变换如旋转、缩放、投影、剪切等。
- ▶ $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ 的变换：矩阵 $\boldsymbol{A}$ 将输入向量 $\boldsymbol{x}$ 映射到输出向量 $\boldsymbol{y}$。
- ▶ 2 × 2 矩阵：平面变换，如旋转、镜像、剪切、投影等。
- ▶ 3 × 3 矩阵：三维空间中的旋转、缩放、剪切、投影等。
- ▶ 3 × 2 矩阵：二维向量被映射到三维空间，但映射结果仍处于低维子空间。
- ▶ 2 × 3 矩阵：三维向量通过矩阵投影降维到二维空间中。

矩阵这个数字表格大有作为！不仅仅是储存数字，矩阵的更大作用来自于**线性变换** (linear transformation)。而线性变换利用的数学工具正是矩阵乘法。

本书前文给矩阵乘法开了个头，请大家格外注意，矩阵乘法不是“数字游戏”，更不是“奇技淫巧”！

矩阵乘法不仅仅是数字的排列与运算，它背后蕴含着丰富的几何意义。从几何视角来看，矩阵乘法本质上是一个线性变换，它可以完成旋转、缩放、剪切、投影等等操作。每一个矩阵都可以看作是对向量进行缩放、旋转、镜像、投影或剪切等操作的“工具”。

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$

当我们用矩阵乘以一个向量时，实际上是在对这个向量进行某种几何变换。

为了从几何角度理解线性变换，从而进一步理解矩阵乘法，本章将从下述矩阵乘法切入

$$\boldsymbol{A}_{m\times p}\boldsymbol{x}_{p\times 1} = \boldsymbol{y}_{m\times 1} \tag{1}$$

从矩阵形状来看，$(m \times p)$ @ $(p \times 1)$ 夹在中间的 (p) 被“消去”，矩阵乘法结果的形状为 $(m \times 1)$。

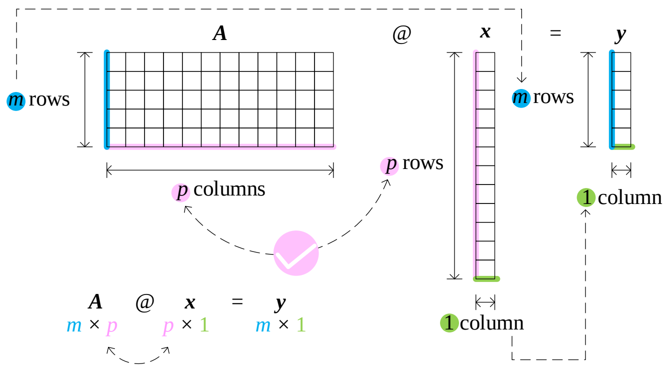


图 1. 矩阵乘法 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$

线性变换

如图 2 所示，从**线性映射** (linear mapping) 角度来看，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ 代表 p 维列向量 $\boldsymbol{x}$ 在 $\boldsymbol{A}$ 的作用下的映射，结果得到一个 m 维列向量 $\boldsymbol{y}$。

列向量 $\boldsymbol{x}_{p\times 1}$ 在 $\mathbb{R}^p$ 中，而列向量 $\boldsymbol{y}_{m\times 1}$ 在 $\mathbb{R}^m$ 中。

也就是说，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ 从 $\mathbb{R}^p$ 空间到 $\mathbb{R}^m$ 空间的某种特定映射。

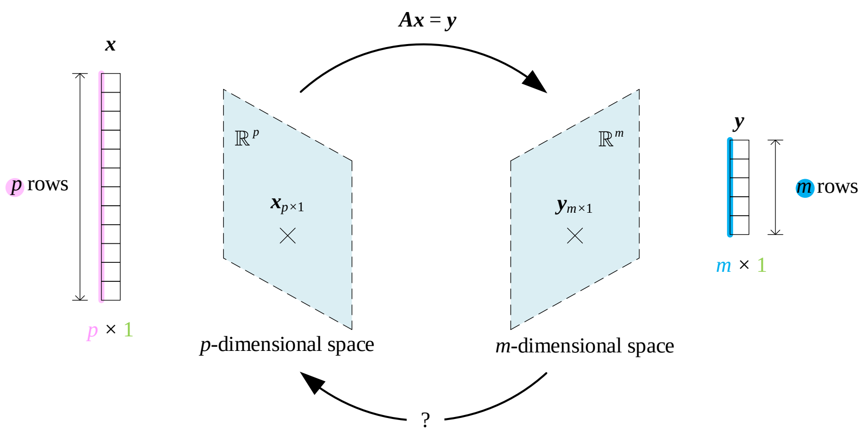


图 2. 线性映射 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$

p 维列向量 $\boldsymbol{x}$ 相当于输入向量，表示某个初始状态；我们可以把 $\boldsymbol{x}$ 看作是 $\mathbb{R}^p$ 空间中的点。

m 维列向量 $\boldsymbol{y}$ 相当于输出向量，表示经过变换后的结果；我们可以把 $\boldsymbol{x}$ 看作是 $\mathbb{R}^m$ 空间中的点。

而矩阵 $\boldsymbol{A}$ 则决定的几何变换的规则；这些几何变换可能是缩放、旋转、投影、镜像等等，或者是这些几何变换的有序组合。

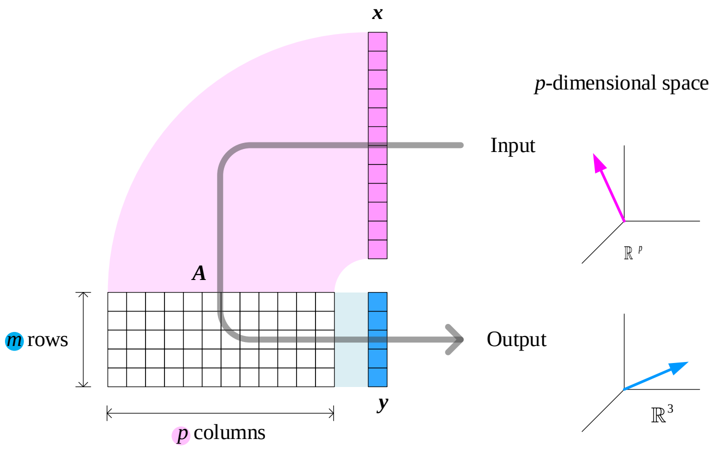


图 3. 矩阵乘法 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{y}$ 的输入和输出

图 3 中这种矩阵乘法对齐方式是矩阵乘法的第一视角，这是下一章要介绍的话题。

四个例子

在本节中，我们将深入探讨矩阵乘法如何通过几何变换作用于向量。

具体来说，我们将分析图 4 中四种不同形状的矩阵——2×2、3×3、3×2 和 2×3——对向量的影响。

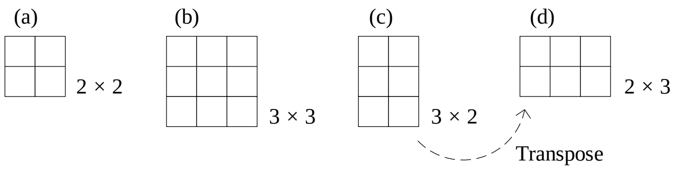


图 4. 四个不同的矩阵 $\boldsymbol{A}$

2×2 矩阵

2×2 矩阵通常用于二维空间中的缩放、旋转、镜像、投影、剪切等等平面几何操作。

对于矩阵乘法 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{y}$，当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的形状为 2×2，输入向量 $\boldsymbol{x}$ 是 2×1 向量；输出向量 $\boldsymbol{y}$ 也是 2×1 向量。

从矩阵形状来看，(2×2) @ (2×1) 夹在中间的 (2) 被“消去”，矩阵乘法结果的形状为 (2×1)。

如根据矩阵乘法规则，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列数和输入向量 $\boldsymbol{x}$ 的行数匹配；而矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行数和输出向量 $\boldsymbol{y}$ 的行数匹配。

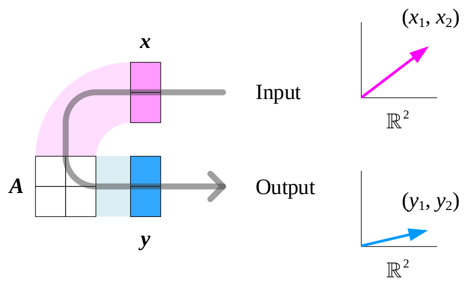


图 5. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为 2×2

几何角度来看，2 维列向量 $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ 相当于平面直角坐标系 $\mathbb{R}^2$ 中的一个点 (x_1, x_2); $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ 也是平面上一个起点位于原点 (0,0)，终点位于 (x_1, x_2) 的向量。

而 2 维列向量 $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ 也是平面直角坐标系中的一个点 (y_1, y_2); $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ 也是平面直角坐标系 $\mathbb{R}^2$ 中一个起点位于原点 (0,0)，终点位于 $(y_1, y_2,)$ 的向量。

本书前文提过，$\mathbb{R}^2$ 表示**二维实数向量空间** (two-dimensional real vector space)。简单来说，向量空间是一个集合，其中的元素 (称为向量) 可以进行加法和数乘运算，并且满足特定的公理 (如结合律、分配律等)，从而形成一个具有线性结构的数学空间。

下面，让我们首先看两个特殊向量，

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

前文提过，它们是平面直角坐标系中的**标准正交基** (standard basis) 向量；其中，单位向量 $\boldsymbol{e}_1$ 指向 x_1 轴正方向，单位向量 $\boldsymbol{e}_2$ 指向 x_2 轴正方向。

给定如下 2×2 矩阵 $\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \tag{3}$$

矩阵乘法 $\boldsymbol{A}$ @ $\boldsymbol{e}_1$

$$\boldsymbol{A} @ \boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} @ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} \tag{4}$$

相当于提取矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 列。类似地，$\boldsymbol{A}$ @ $\boldsymbol{e}_2$ 则提取矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 列。

如下图 (a) 所示，在“红绿”平面上，$\boldsymbol{e}_1$ 代表纯红色向量，$\boldsymbol{e}_2$ 代表纯绿色向量。

下图 (b) 中，“红绿”平面上规则分布的正方形散点，实际上是由 $\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2$ 通过线性组合生成的颜色向量。

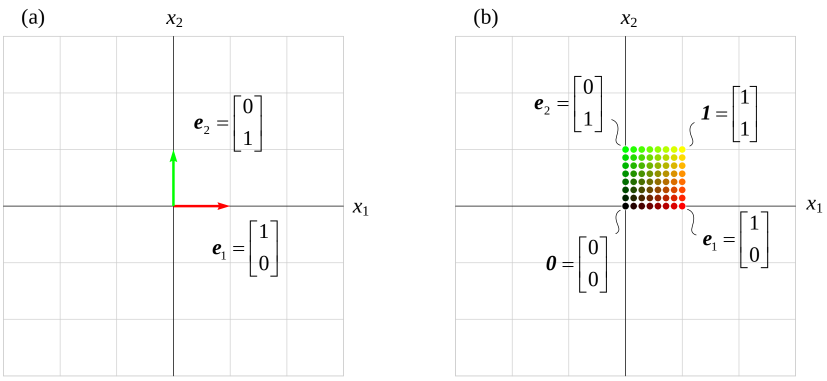


图 6. “红绿”平面上的单位向量和规则散点

接下来，我们将通过不同的 2 × 2 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对“红绿”平面上的标准正交基向量 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$ 以及散点进行映射，观察它们如何从原始的正方形分布变换为各种不同的几何形状。

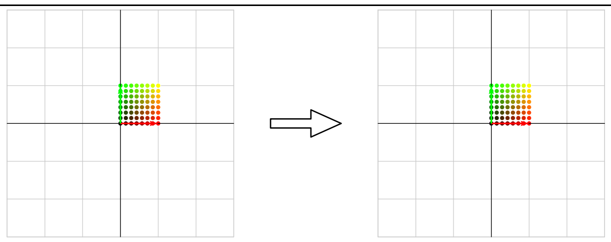
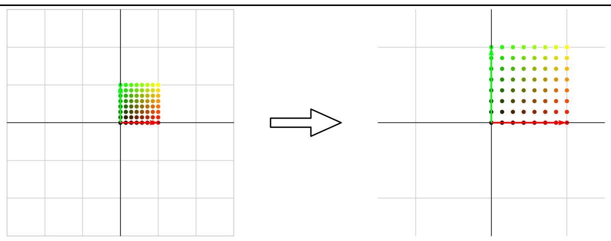
请大家逐一分析表 1 每行对应的几何变换。

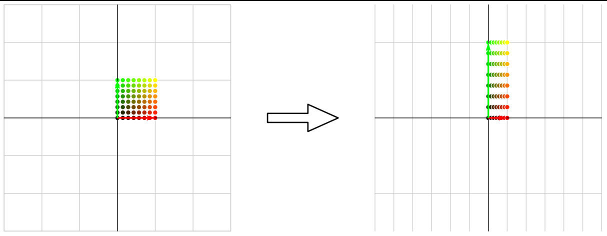
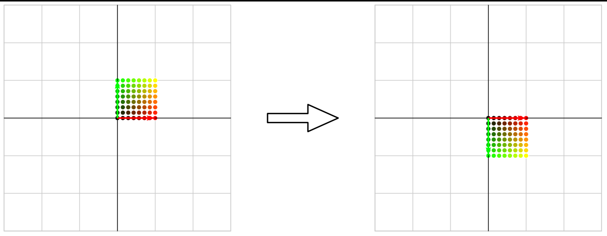
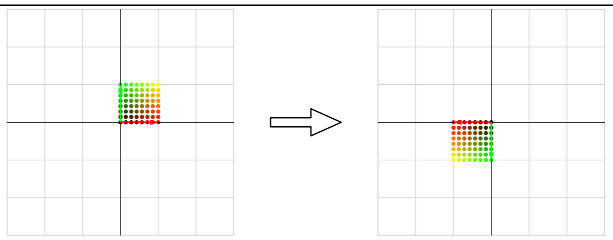
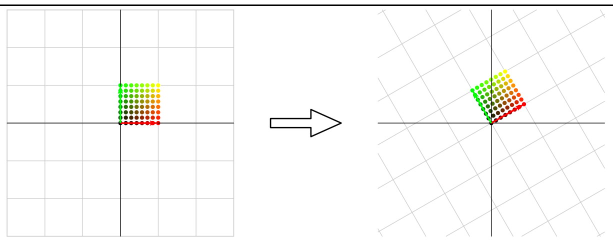
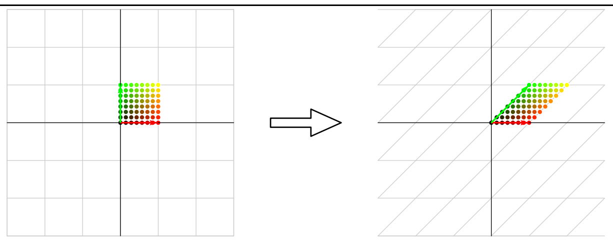
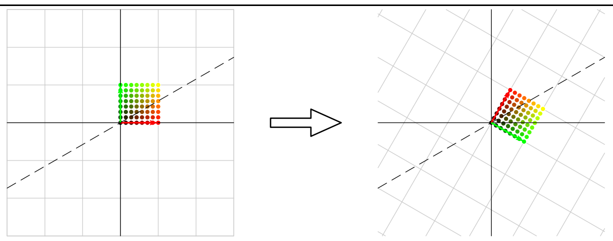
我们还可以观察到，原本的正方形网格在经过矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的映射后，变成了由平行等距的平行四边形网格。值得大家注意的是，无论矩阵 $\boldsymbol{A}$ 如何变化，原点的位置始终保持不变，这是线性映射的一个重要特性。

这里，我们只需要大家对线性变换形成一个初步的直观印象，本书后续章节将会深入探讨线性映射的数学原理及其广泛应用。

此外，不理解这些平面几何变换原理的读者不要怕，本书后续会专门讲解这部分内容。

表 1. 2 × 2 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 产生的几何变换示例

矩阵	矩阵乘法 (建议手算一遍)	几何变换前后
$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 不变	$\boldsymbol{A} @ \boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} @ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{A} @ \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} @ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	
$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ 均匀拉伸 2 倍	$\boldsymbol{A} @ \boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} @ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{A} @ \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} @ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$	

$A=\begin{bmatrix}1/2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$ 挤压	$A@e_1=\begin{bmatrix}1/2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}@\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/2\\0\end{bmatrix}$ $A@e_2=\begin{bmatrix}1/2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}@\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}$	
$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ 关于 x_1 轴镜像	$A@e_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}@\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ $A@e_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}@\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}$	
$A=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ 关于原点对称翻转	$A@e_1=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}@\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}$ $A@e_2=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}@\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}$	
$A=\begin{bmatrix}\cos 30^\circ & -\sin 30^\circ\\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ\end{bmatrix}$ 绕原点逆时针旋转 30 度	$A@e_1=\begin{bmatrix}\cos 30^\circ\\ \sin 30^\circ\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{3}/2\\ 1/2\end{bmatrix}$ $A@e_2=\begin{bmatrix}-\sin 30^\circ\\ \cos 30^\circ\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1/2\\ \sqrt{3}/2\end{bmatrix}$	
$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ 在 x_1 方向上被剪切	$A@e_1=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}@\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ $A@e_2=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}@\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$	
$A=\begin{bmatrix}\cos 60^\circ & \sin 60^\circ\\ \sin 60^\circ & -\cos 60^\circ\end{bmatrix}$ 关于某条直线镜像	$A@e_1=\begin{bmatrix}\cos 60^\circ\\ \sin 60^\circ\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/2\\ \sqrt{3}/2\end{bmatrix}$ $A@e_2=\begin{bmatrix}\sin 60^\circ\\ -\cos 60^\circ\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{3}/2\\ -1/2\end{bmatrix}$	

3 × 3 矩阵

3×3 矩阵则扩展到了三维空间，能够处理更复杂的空间几何变换。

对于矩阵乘法 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$，当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的形状为 3×3 (3 行 3 列)，输入向量 $\boldsymbol{x}$ 是 3×1 向量，$\boldsymbol{x}$ 代表三维空间 $\mathbb{R}^3$ 的坐标点；输出向量 $\boldsymbol{y}$ 也是 3×1 向量，$\boldsymbol{y}$ 也是三维空间 $\mathbb{R}^3$ 的坐标点。

3×3 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 完成了 3 维向量 $\boldsymbol{x}$ 到 3 维向量 $\boldsymbol{y}$ 的映射。

从矩阵形状来看，(3×3) @ (3×1) 夹在中间的 (3) 被“消去”，矩阵乘法结果的形状为 (3×1)。

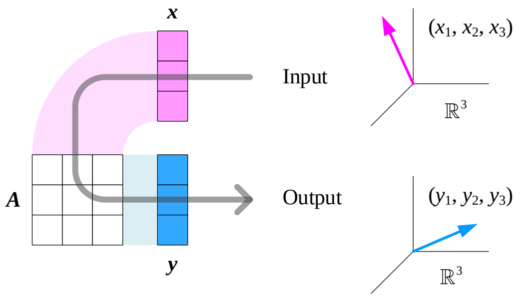


图 7．矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为 3×3

3 维列向量 $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ 是三维直角坐标系上一个点 (x_1, x_2, x_3); $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ 也是三维直角坐标系 $\mathbb{R}^3$ 一个起点位于原点 (0,0,0)，终点位于 (x_1, x_2, x_3) 的向量。

3 维列向量 $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$ 则代表三维直角坐标系上一个点 (y_1, y_2, y_3); $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$ 同样也是三维直角坐标系 $\mathbb{R}^3$ 中一个起点位于原点 (0,0,0)，终点位于 (y_1, y_2, y_3) 的向量。

如下图 (a) 所示，在 RGB 颜色空间中，$\boldsymbol{e}_1$ 代表纯红色向量 $[1, 0, 0]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{e}_2$ 代表纯绿色向量 $[0, 1, 0]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{e}_3$ 代表纯蓝色向量 $[0, 0, 1]^{\mathrm{T}}$。下图 (b) 中，RGB 立方体十二条框线上规则分布的散点，实际上是由 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$ 和 $\boldsymbol{e}_3$ 通过线性组合生成的颜色向量。

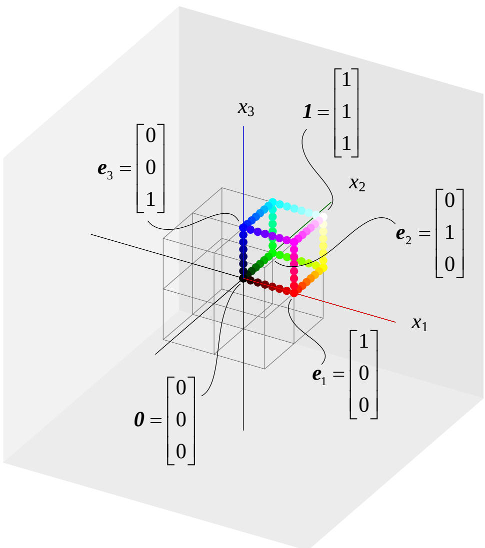
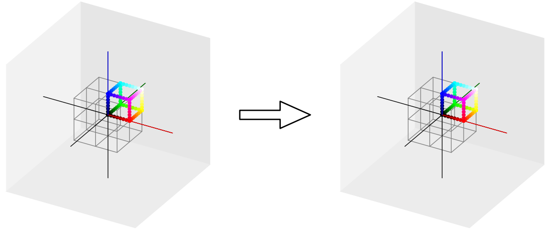
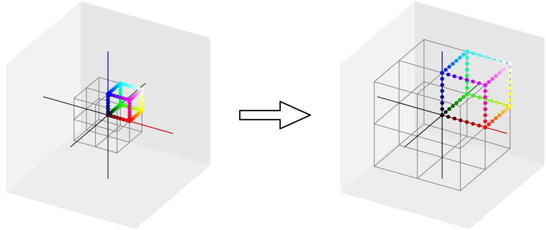
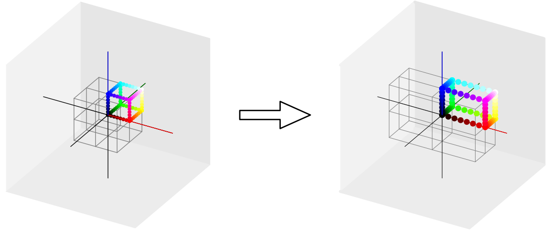
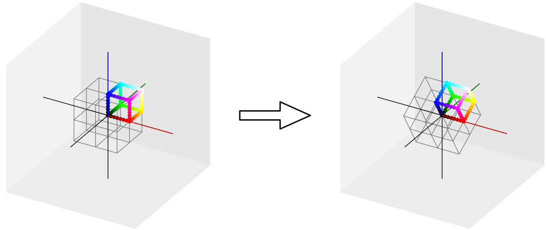
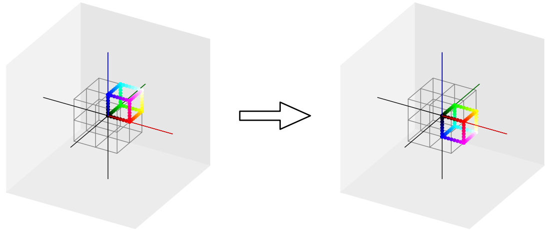
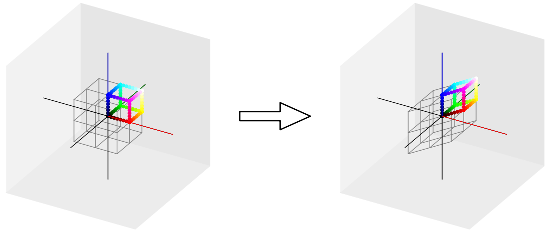


图 8. “红绿蓝”空间中的单位向量和规则散点

表 2 给出了 3×3 矩阵的线性变换的示例，请大家自己逐个分析。

表 2. 3 × 3 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 产生的几何变换示例

矩阵	矩阵乘法 (建议手算一遍)	几何变换前后
$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ 不变	$\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$	
$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$ 均匀拉伸 2 倍	$\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1=\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_2=\begin{bmatrix}0\\2\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\2\end{bmatrix}$	
$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&0.8&0\\0&0&1.25\end{bmatrix}$ 非均匀缩放	$\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1=\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_2=\begin{bmatrix}0\\0.8\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1.25\end{bmatrix}$	
$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\cos 30^\circ&-\sin 30^\circ\\0&\sin 30^\circ&\cos 30^\circ\end{bmatrix}$ 绕 x_1 轴旋转	$\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_2=\begin{bmatrix}0\\\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{1}{2}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_3=\begin{bmatrix}0\\-\frac{1}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$	
$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$ 关于 x_1x_2 平面镜像	$\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\-1\end{bmatrix}$	
$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\\tan 30^\circ&0&1\end{bmatrix}$ 沿 x_3 轴剪切	$\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$	

3 × 2 矩阵

而 3×2 和 2×3 矩阵则涉及不同维度之间的转换，例如将二维向量嵌入到三维空间，或者将三维向量映射到二维空间中。

如图 9 所示，如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的形状为 3×2，输入向量 $\boldsymbol{x}$ 为 2 维，即平面上一点；输出向量 $\boldsymbol{y}$ 为 3 维，代表三维空间中的一点。

从矩阵形状来看，对于矩阵乘法 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ 来说，(3×2) @ (2×1) 夹在中间的 (2) 被“消去”，矩阵乘法结果的形状为 (3×1)。

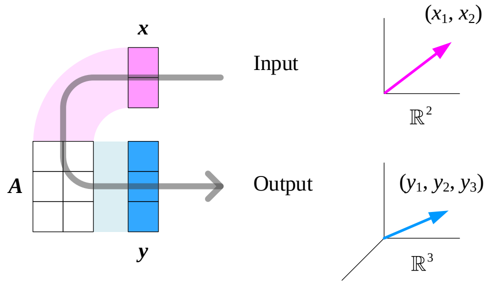


图 9．矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为 3×2

表 3 给出几个示例，请大家自行分析。

主要指出的是，当我们用 3×2 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作用于 2 维向量 $\boldsymbol{x}$ 时，得到的结果是一个 3 维向量 $\boldsymbol{y}$，这似乎将原本的 2 维平面“升维”到了 3 维空间。然而，仔细观察变换后的结果会发现，尽管坐标从 2 维扩展到了 3 维，但这些点并没有充满整个 3 维空间，而是仍然分布在一个平面上。

这是因为表中 3×2 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量张成的空间最大维度是一个二维平面，尽管这个平面被嵌入到了 3 维空间中，但它仍然保持 2 维的特性。因此，这种“升维”实际上是一种嵌入，而不是真正的维度扩展。注意，3×2 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量张成的空间的维度并不总是二维。

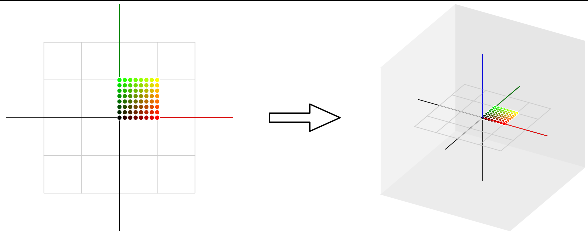
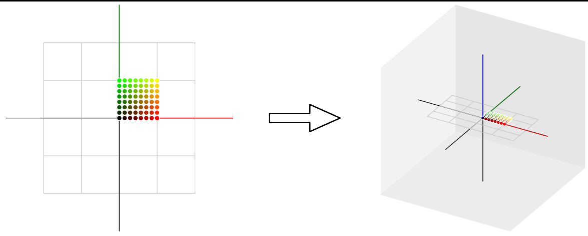
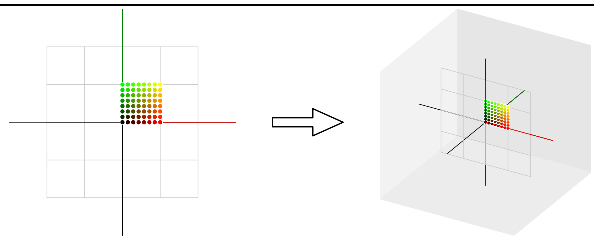
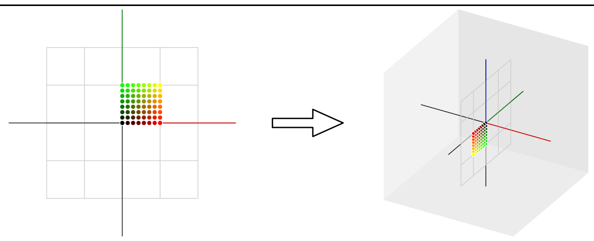
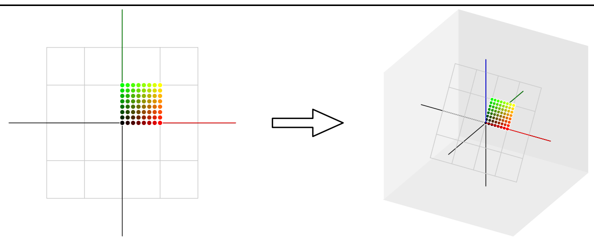
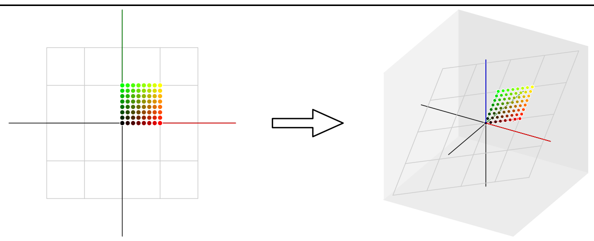
在某些情况下，$\boldsymbol{A}$ 的列向量张成的空间的维度也可以是 1 维。比如 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 的列向量线性相关，即一个向量是另一个的倍数)，$\boldsymbol{A}$ 的列向量张成的空间是一条三维空间的直线。

如果 $\boldsymbol{A}$ 的列向量都是 $\boldsymbol{0}$ 零向量，即 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}$ 的列向量张成的空间的维度为 0 维。

这些情况表明，3×2 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量的线性相关性决定了变换后空间的维度。在后续章节中，我们将进一步探讨矩阵的秩、列空间以及线性变换的几何意义，从而更深入地理解这些现象背后的数学原理。通过研究这些概念，我们可以更好地掌握如何利用矩阵来描述和分析几何变换，以及如何通过矩阵的性质来推断变换后的空间特性。

表 3. 3×2 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 产生的几何变换示例

矩阵	矩阵乘法 (建议手算一遍)	几何变换前后

$A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}$ 升维	$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}$	
$A=\begin{bmatrix}1&0\\0&0.5\\0&0\end{bmatrix}$ 缩放 + 升维	$\begin{bmatrix}1&0\\0&0.5\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\0.5x_2\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}$	
$A=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\\0&1\end{bmatrix}$ 升维到 x_1x_3 平面	$\begin{bmatrix}1&0\\0&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\0\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}$	
$A=\begin{bmatrix}0&0\\-1&0\\0&-1\end{bmatrix}$ 中心对称 + 升维	$\begin{bmatrix}0&0\\-1&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-x_1\\-x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}$	
$A=\begin{bmatrix}1&0\\0&\cos 60^\circ\\0&\sin 60^\circ\end{bmatrix}$ 旋转 + 升维	$\begin{bmatrix}1&0\\0&\cos 60^\circ\\0&\sin 60^\circ\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\\cos 60^\circ x_2\\\sin 60^\circ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}$	
$A=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\\0&1\end{bmatrix}$ 剪切 + 升维	$\begin{bmatrix}1&0\\1&1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\x_1+x_2\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}$	

2 × 3 矩阵

如图 10 所示，如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的形状为 2 × 3，输入向量 $\boldsymbol{x}$ 为 3 维，即三维空间上一点；输出向量 $\boldsymbol{x}$ 为 2 维，代表平面上的一点。

从矩阵形状来看，(2 × 3) @ (3 × 1) 夹在中间的 (3) 被“消去”，矩阵乘法结果的形状为 (2 × 1)。

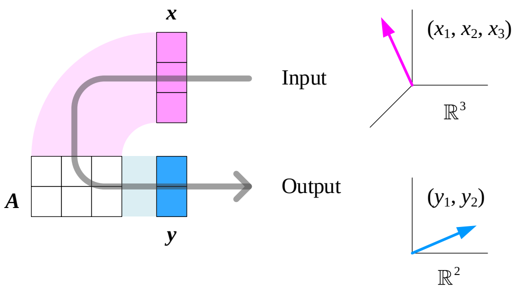


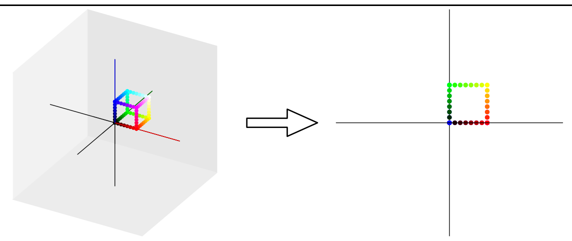
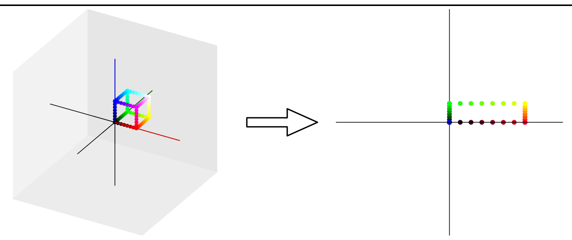
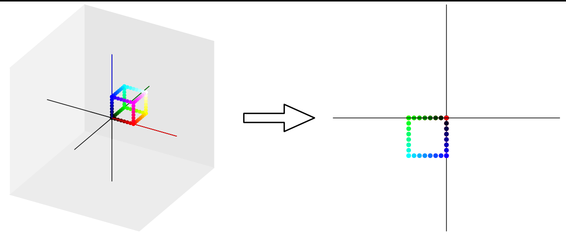
图 10. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为 2×3

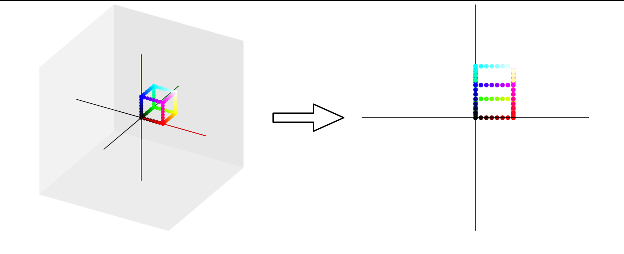
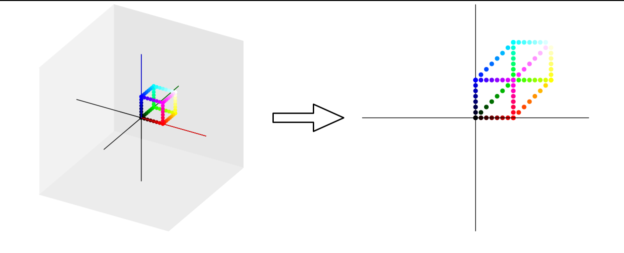
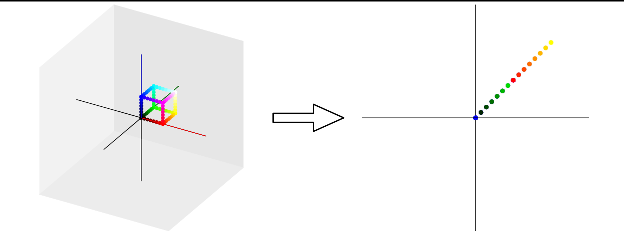
从线性映射角度，形状为 2×3 扁平矩阵 $\boldsymbol{A}$ 完成了 3 维列向量 $\boldsymbol{x}$ 到 2 维列向量 $\boldsymbol{y}$ 的映射。

请大家自行分析表 4 中的几个示例。

当我们用 2×3 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作用于三维向量 $\boldsymbol{x}$ 时，得到的结果是一个二维向量 $\boldsymbol{y}$，这将原本的三维空间“降维”到了二维平面。这种“降维”实际上是一种投影，它将三维空间中的信息压缩到更低维的空间中，同时保留了某些线性结构。

表 4. 2×3 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 产生的几何变换示例

矩阵	矩阵乘法 (建议手算一遍)	几何变换前后
$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$ 降维	$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}$	
$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&0.5&0\end{bmatrix}$ 缩放 + 降维	$\begin{bmatrix}2&0&0\\0&0.5&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x_1\\0.5x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}$	
$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$ 中心对称 + 降维	$\begin{bmatrix}0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-x_2\\-x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}$	

$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos 60° & \sin 60°\end{bmatrix}$ 旋转 + 降维	$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos 60° & \sin 60°\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\ \cos 60° x_2+\sin 60° x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}$	
$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$ 剪切 + 降维	$\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1+x_2\\ x_2+x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}$	
$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$ 投影 + 缩放 + 降维	$\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1+x_2\\ x_1+x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}$	

逆变换

图 2 中，而是否存在"逆变换"，把 $\boldsymbol{y}$ 反向转换成 $\boldsymbol{x}$，这取决于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是否存在**逆矩阵** (matrix inverse)。$\boldsymbol{A}$ 存在逆矩阵的前提是为方阵。

逆矩阵是当方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆时，存在一个矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$，使得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I} \tag{5}$$

其中，$\boldsymbol{I}$ 为和方阵 $\boldsymbol{A}$ 形状相同的单位矩阵。

也就是说，$\boldsymbol{A}^{-1}$ 能将 $\boldsymbol{A}$ 的变换逆转回去。

比如，

$$\underbrace{\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{A}}@\underbrace{\begin{bmatrix}1/2 & 0\\ 0 & 1/2\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{A}^{-1}}=\underbrace{\begin{bmatrix}1/2 & 0\\ 0 & 1/2\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{A}^{-1}}@\underbrace{\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{A}}=\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{I}} \tag{6}$$

如图 11 所示，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 等比例放大 2 倍，逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 等比例缩小为 1/2。

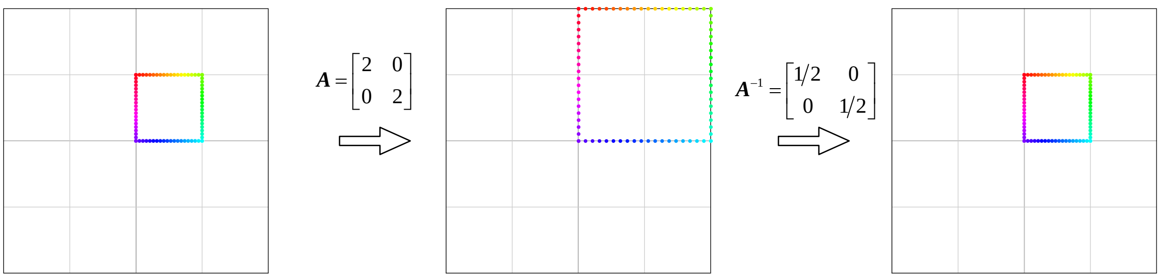


图 11. 平面上的等比例放大，2 × 2 矩阵

不管是先放大 ($\boldsymbol{A}$)、再缩小 ($\boldsymbol{A}^{-1}$)，还是先缩小 ($\boldsymbol{A}^{-1}$)、再放大 ($\boldsymbol{A}$)，平面几何形状都会被还原，这便对应 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$ 。

这里仅仅铺垫一下，本书后续将专门介绍逆矩阵这个话题。

通过这些例子，我们揭示了矩阵乘法如何在不同维度的空间中实现丰富多样的几何变换。下有了这些几何视角，理解矩阵乘法性质将变得更容易，这是本章最后要介绍的内容。

这些几何视角除了帮助我们理解矩阵乘法之外，还会在理解各种矩阵分解中发挥至关重要的作用。

请大家用 DeepSeek/ChatGPT 等工具完成本节如下习题。

Q1. 平面上，如何用矩阵乘法完成缩放？

Q2. 三维空间中，如何用矩阵乘法分别完成绕 x_1、x_2、x_3 轴旋转？

Q3. 平面上，如何用矩阵乘法完成缩放？

Q4. 三维空间中，如何用矩阵乘法完成缩放？

Q5. 平面上，如何用矩阵乘法完成关于 x_1 轴镜像？

Q6. 三维空间中，如何用矩阵乘法完成关于 x_1x_2 平面镜像？

Q7. 平面上，如何用矩阵乘法完成沿 x_1 轴剪切？

Q8. 三维空间中，如何用矩阵乘法完成沿 x_1 轴剪切？