作者	**生姜 DrGinger**
脚本	**生姜 DrGinger**
视频	**崔崔 CuiCui**
开源学习资源	**https://github.com/Visualize-ML**
平台	**https://www.youtube.com/@DrGinger_Jiang** **https://space.bilibili.com/3546865719052873** **https://space.bilibili.com/513194466**

2.6 矩阵乘法性质

本节你将掌握的核心技能：

▶ 矩阵连乘：多个几何操作按顺序施加到向量上，从右向左生效。

▶ 连乘转置：反序，从行向量视角理解变换。

▶ 结合律：改变括号位置不影响结果，可优化计算顺序减少运算量。

▶ 矩阵分解：将复杂矩阵拆解成基本几何变换，更直观理解其作用。

▶ 交换律通常不成立：即使乘积存在，AB、BA 也可能有不同几何含义。

▶ 特殊情况，交换律成立。

▶ 矩阵幂：方阵反复相乘表示相同线性变换多次作用。

有了矩阵乘法几何视角的铺垫，理解矩阵乘法常见性质就变得十分容易了。

矩阵连乘：连续几何变换

若干矩阵顺序相乘，相当于这些几何变换依次作用于几何体上。

以如下三个 2×2 矩阵为例

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1/2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix} \tag{1}$$

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应绕原点旋转 (rotate)，$\boldsymbol{B}$ 对应剪切 (shear)，$\boldsymbol{C}$ 对应缩放 (scale)。

具体来说，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应绕原点逆时针旋转 90 度。

矩阵 $\boldsymbol{B}$ 对应沿 x_1 横轴方向剪切；简单来说，剪切将形状沿某个方向倾斜的变换，使得原本垂直或水平的线段变成倾斜状态，同时保持平行关系不变。

矩阵 $\boldsymbol{C}$ 让横轴缩小为 1/2，纵轴放大至 2 倍。

如果列向量 $\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{y}$ 均代表平面上一点，如下矩阵乘法

$$A@B@C@x = y \tag{2}$$

代表对列向量 $\boldsymbol{x}$ 先后进行缩放 ($\boldsymbol{C}$)、剪切 ($\boldsymbol{B}$)、旋转 ($\boldsymbol{A}$)。

整个几何变换过程如图 1 所示。

⚠ 请大家格外注意矩阵乘法 $\boldsymbol{ABCx} = \boldsymbol{y}$ 先后顺序，从右向左，即 $\boldsymbol{C} \to \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{A}$。

? 请大家手算 $\boldsymbol{ABC}$、$\boldsymbol{CBA}$、$\boldsymbol{ACB}$、$\boldsymbol{BAC}$ 等等各种排列组合的矩阵乘法结果。

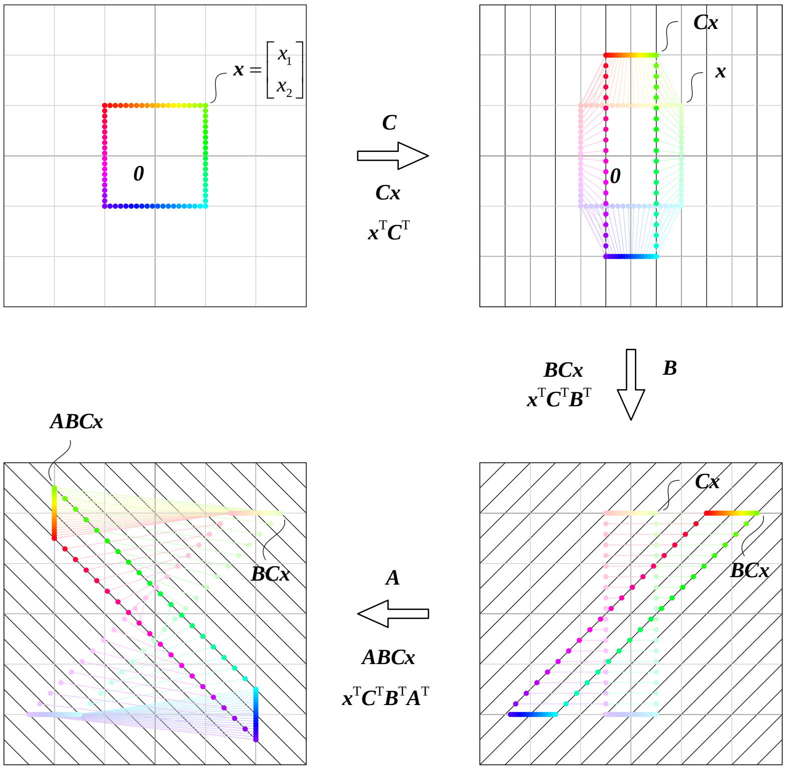

图 1. $\boldsymbol{ABCx} = \boldsymbol{y}$ 对应的分步几何操作

当然，我们也可以先计算 ($\boldsymbol{ABC}$)，然后再把 ($\boldsymbol{ABC}$) 作为一个整体施加到 $\boldsymbol{x}$ 上。

矩阵乘法($\boldsymbol{ABC}$) 相当于复合几何操作，“一步到位”完成几何变换！具体如图 2 所示。

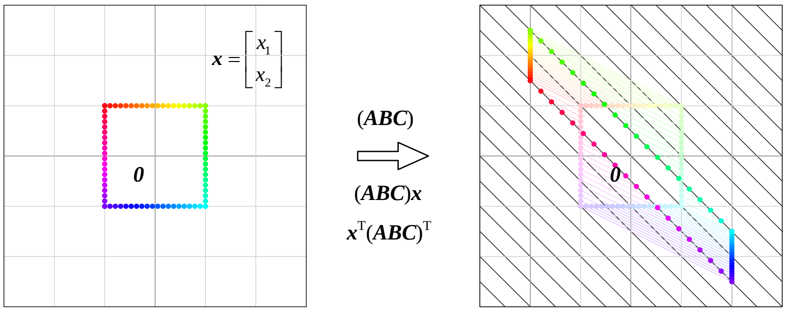

图 2. $(\boldsymbol{ABC})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ 对应的“一步到位”几何操作

矩阵连乘的转置

矩阵连乘的转置如下几个重要性质值得大家重视：

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\\&(\boldsymbol{ABC})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\\&(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_3\cdots\boldsymbol{A}_k)^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}_k^{\mathrm{T}}\cdots\boldsymbol{A}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}\end{aligned} \tag{3}$$

这组性质实际上并不需要“死记硬背”！

以 (2) 为例，对这个矩阵连乘转置

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} @ \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} @ \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} @ \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} \tag{4}$$

列向量 $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ 转置后得到行向量 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}$，代表水平面上一点。上式乘法告诉我们，对于行向量，依次施加缩放 ($\boldsymbol{C}$)、剪切 ($\boldsymbol{B}$)、旋转 ($\boldsymbol{A}$) 几何变换，结果还是如图 1。

结合律

在矩阵运算中，如果有三个矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 参与相乘，先将 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 相乘，再与 $\boldsymbol{C}$ 相乘，或者先将 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 相乘，再左乘 $\boldsymbol{A}$，最终的计算结果是相同的

$$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC}) \tag{5}$$

换句话说，无论我们先计算前两个矩阵的乘积，还是先计算后两个矩阵的乘积，结果都不会受到影响。这一性质可以简化矩阵运算，使我们可以灵活地选择计算顺序，以提高计算效率或便于推导数学公式。本节最后会讲到矩阵连乘中，如何通过结合律提高运算效率。

⚠ 注意，矩阵先后次序不能变。也就是说，矩阵乘法通常不满足交换律，即 $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$。

怎么理解 (5) 呢？

还是利用几何视角，($\boldsymbol{AB}$)、($\boldsymbol{BC}$) 相当于“局部”复合几何变换。

还是以 (1) 为例，($\boldsymbol{AB}$) 相当于复合旋转、剪切 (剪切再先)；($\boldsymbol{BC}$) 相当于复合剪切、缩放 (缩放再先)。

对于平面列向量 $\boldsymbol{x}$，$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{Cx}$ 相当于对 $\boldsymbol{x}$ 先缩放 ($\boldsymbol{C}$)，然后再 ($\boldsymbol{AB}$)，具体如图 3 所示。

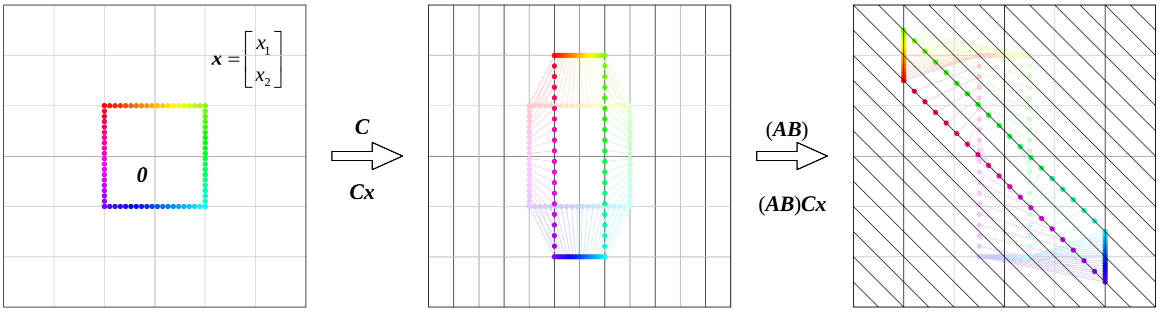

图 3. $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{Cx} = \boldsymbol{y}$ 对应的分步几何操作

对于平面列向量 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})\boldsymbol{x}$ 相当于对 $\boldsymbol{x}$ 先 $(\boldsymbol{BC})$，然后再旋转 $(\boldsymbol{A})$，具体如图 4 所示。

对比图 1、图 2、图 3、图 4，虽然过程中有展开，有合并，我们发现它们的结果是完全一致的。

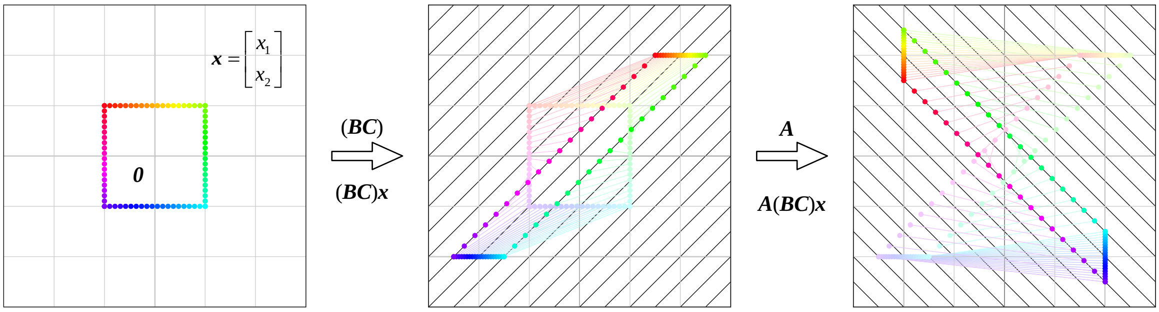

图 4. $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ 对应的分步几何操作

矩阵分解

给定矩阵 $\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 5/4 & -3/4 \\ -3/4 & 5/4 \end{bmatrix} \tag{6}$$

如图 5 所示，$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{y}$ 显然不是我们不熟悉的几何变换。

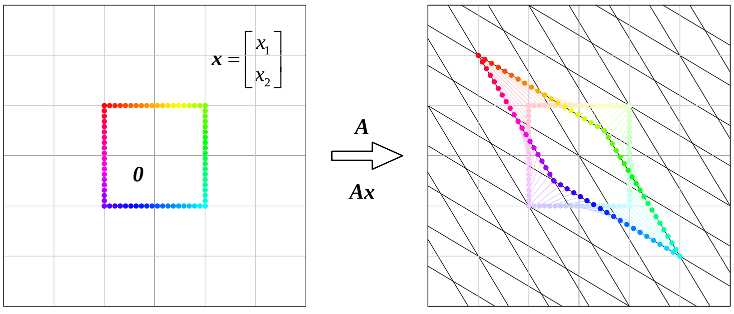

图 5. $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{y}$ 对应的几何操作

要想理解 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$，需要通过矩阵分解 (matrix decomposition) 把图 5 拆解成我们熟悉的几何变换。

简单来说，矩阵分解将一个矩阵分解成几个矩阵的连乘。可以这样理解，矩阵分解是矩阵连乘的逆操作。

几何角度来看，一个“复杂”几何操作可以分解为若干“我们熟悉的”几何操作。

比如，如图 6 所示，我们可以把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 拆解成“旋转 → 缩放 → 旋转”，对应的矩阵乘法为

$$\begin{bmatrix} 5/4 & -3/4 \\ -3/4 & 5/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} @ \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} @ \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \tag{7}$$

需要大家注意的是，图 6 中两个旋转方向正好相反。

(7) 对应的分解叫特征值分解 (Eigen Value Decomposition, EVD)；确切地说，由于矩阵 A 为对称矩阵，这个分解为谱分解 (spectral decomposition)。

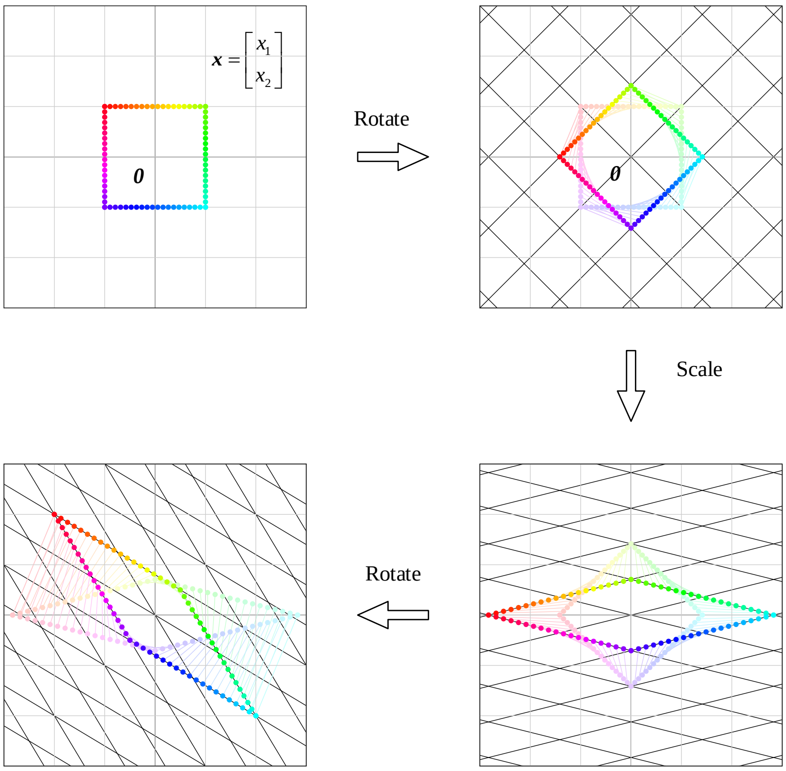

图 6. 把 $\boldsymbol{A}$ 分解成“旋转 → 缩放 → 旋转”

再如，如图 7 所示，我们可以把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 拆解成“剪切 → 缩放 → 剪切”，对应的矩阵乘法为

$$\begin{bmatrix} 5/4 & -3/4 \\ -3/4 & 5/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -0.6 & 1 \end{bmatrix} @ \begin{bmatrix} 1.25 & 0 \\ 0 & 0.8 \end{bmatrix} @ \begin{bmatrix} 1 & -0.6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{8}$$

需要大家注意的是，图 7 中一个剪切沿横轴，另一个沿纵轴。

(8) 这个分解叫做 LDL 分解，和它类似的分解还有 LU 分解、Cholesky 分解。

不同矩阵分解对应不同的算法，它们也都有各自的几何解读；本书后文将介绍各种常见矩阵分解。

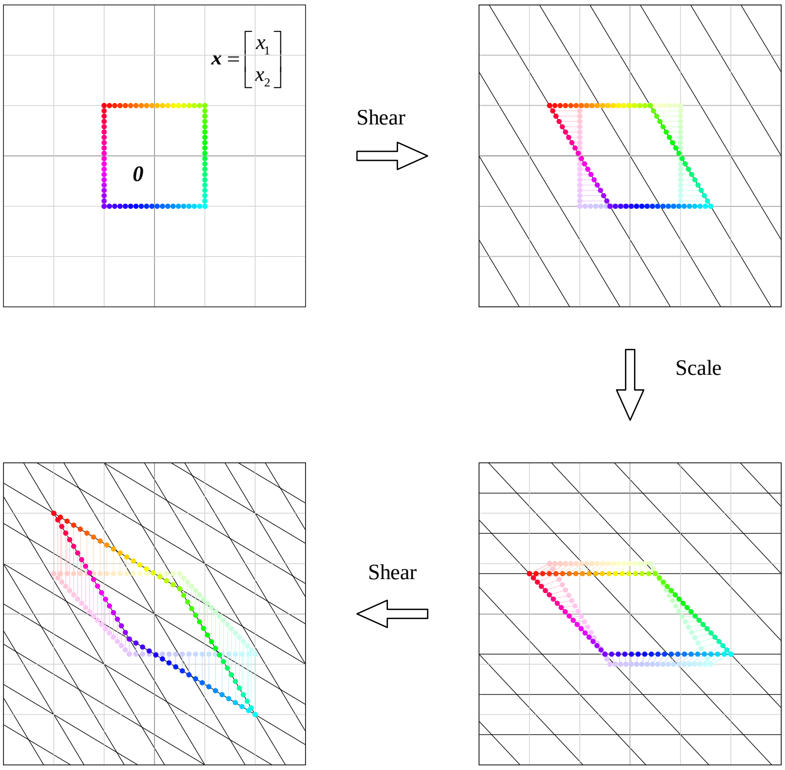

图 7. 把 A 分解成"剪切 → 缩放 → 剪切"

一般情况，*AB* 不等于 *BA*

本书前文提过，即便矩阵乘法 AB、BA 都存在，一般情况

$$AB \neq BA \tag{9}$$

比如，AB、BA 结果的矩阵形状可能不同。

即便 AB、BA 形状相同，两者代表的几何变换也可能不同。

给定如下矩阵 A、B

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{10}$$

矩阵 A 对应缩放，B 对应剪切。

矩阵乘法 ABx 代表先对 x 进行剪切 (B)，再进行缩放 (A)，具体如图 8 所示。

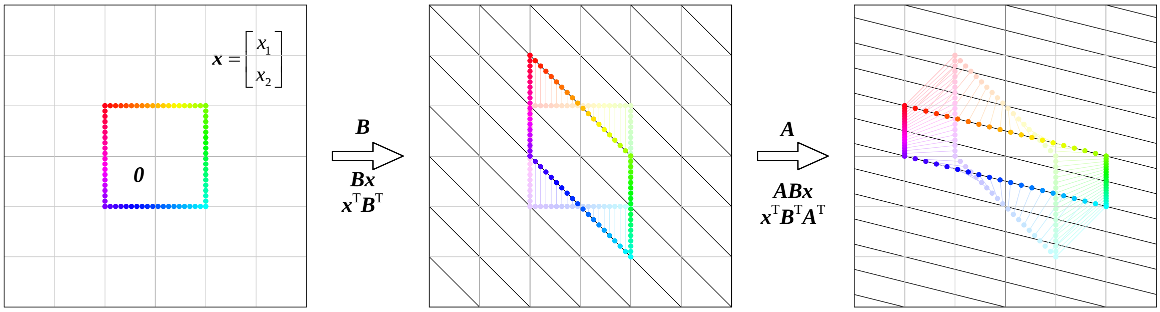

图 8. $\boldsymbol{ABx} = \boldsymbol{y}$ 对应的分步几何操作

矩阵乘法 $\boldsymbol{BAx}$ 代表先对 $\boldsymbol{x}$ 进行缩放 ($\boldsymbol{A}$)，再进行剪切 ($\boldsymbol{B}$)，具体如图 9 所示。

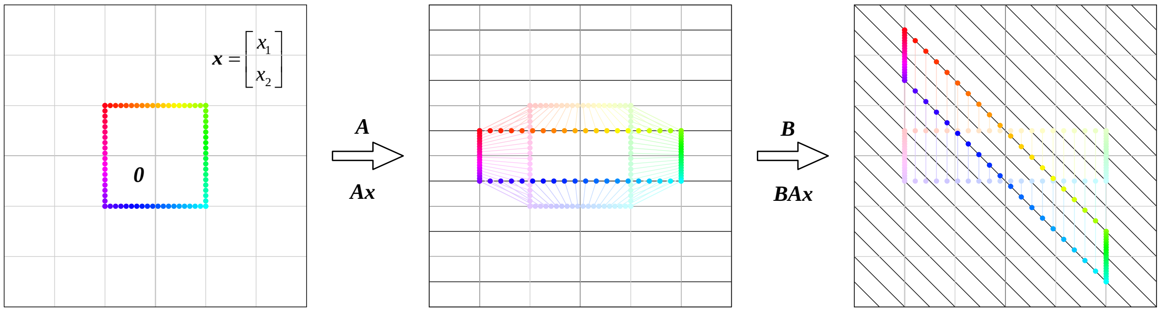

图 9. $\boldsymbol{BAx} = \boldsymbol{y}$ 对应的分步几何操作

特殊情况，$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$

有一些特殊情况，矩阵乘法 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$。下面让我们聊聊。

首先，如果 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 都是形状相同的单位矩阵 $\boldsymbol{I}$，显然 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$。单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 意味着几何体没有任何几何变化。

如果 2×2 矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 都是缩放矩阵，比如

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2/3 \end{bmatrix} \tag{11}$$

计算一下，大家会发现

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} \tag{12}$$

如图 10 所示，哪怕调换缩放矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 的先后，最后的结果完全一致。

? 请大家计算 (11) 中矩阵乘法 $\boldsymbol{AB}$、$\boldsymbol{BA}$。

这说明，这种特殊情况矩阵乘法满足交换律。

再看个例子。

给定 2×2 矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 都是沿纵轴剪切矩阵，比如

$$
\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3/2 & 1 \end{bmatrix} \tag{13}
$$

如图 11 所示，显然 $\boldsymbol{ABx}$ 和 $\boldsymbol{BAx}$ 结果完全一致。

请大家计算 (13) 中矩阵乘法 $\boldsymbol{AB}$、$\boldsymbol{BA}$。

看第三个例子。

给定 2 × 2 矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 都绕原点旋转矩阵，比如

$$
\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix} \tag{14}
$$

如图 12 所示，显然 $\boldsymbol{ABx}$ 和 $\boldsymbol{BAx}$ 结果完全一致。

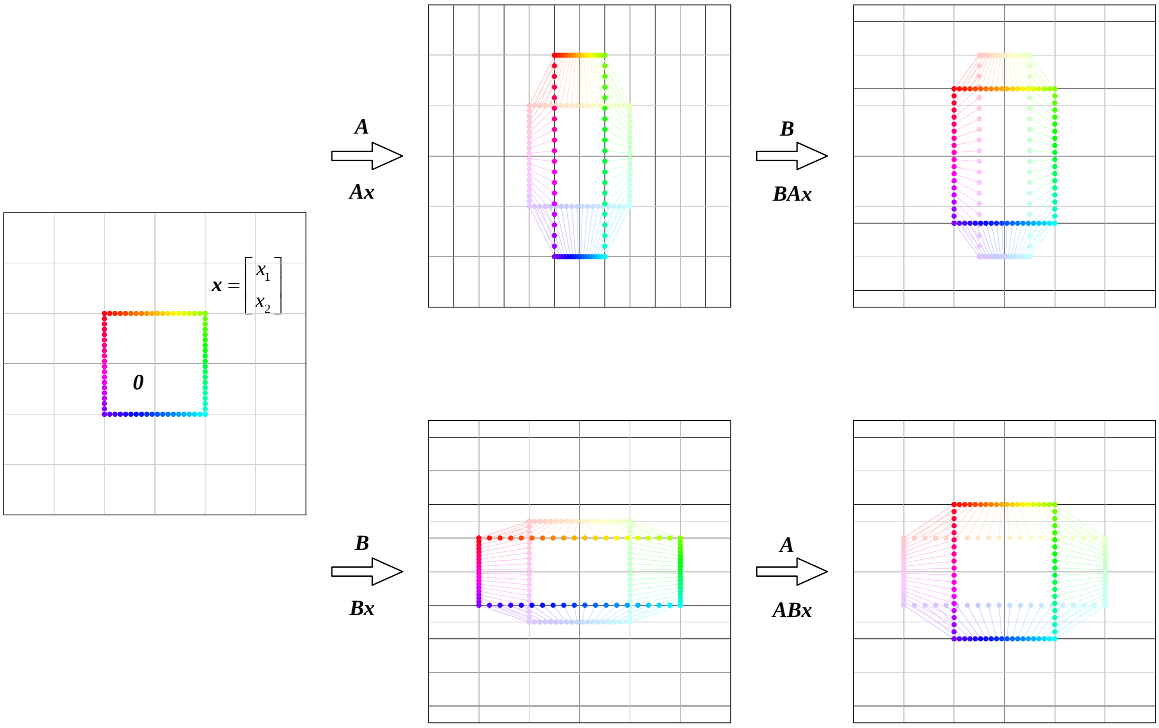

图 10. 2 × 2 矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 都是缩放矩阵，$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$

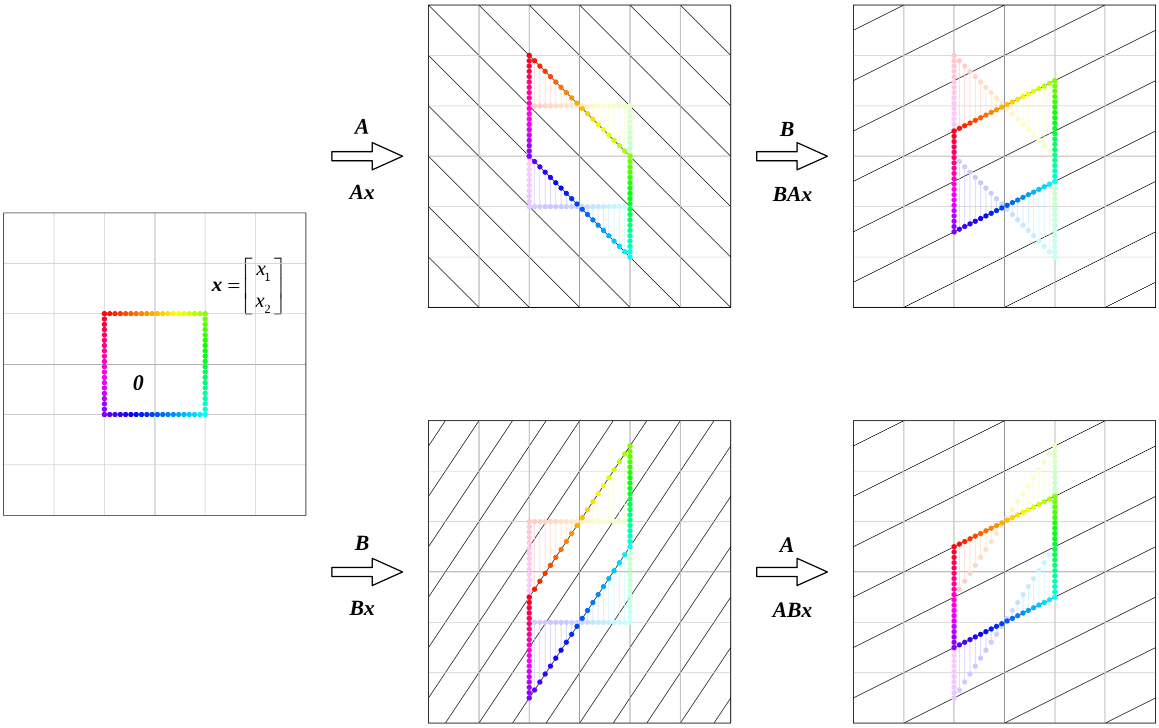

图 11. 2 × 2 矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 都是沿纵轴方向剪切矩阵，$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$

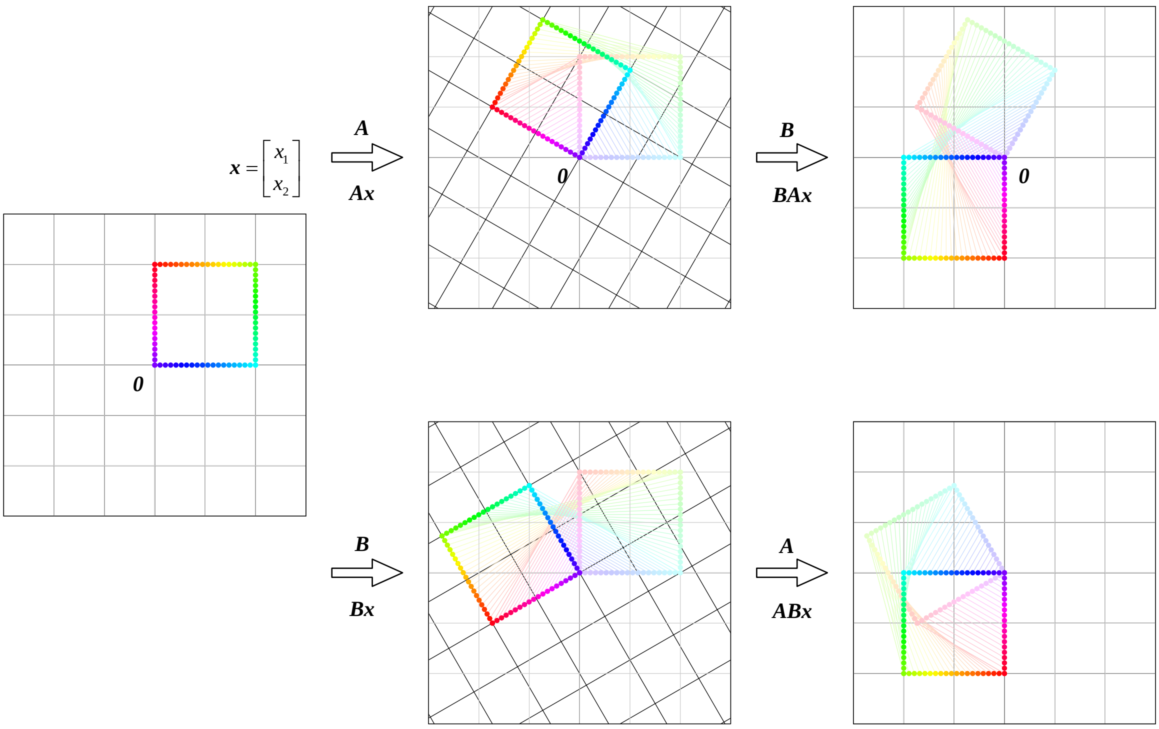

图 12. 2 × 2 矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 都是绕原点旋转矩阵，$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$

本书后续将会从这些几何变化机理角度讲解上述特殊矩阵乘法。

矩阵幂

矩阵幂 (power of a matrix) 指的是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的多次乘积，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^0 &= \boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{A}^1 &= \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{A}^k &= \underbrace{\boldsymbol{A}@\boldsymbol{A}@\cdots@\boldsymbol{A}}_{k\ \text{times}}\end{aligned} \tag{15}$$

注意，矩阵幂的前提是矩阵必须是方阵。如果不是方阵，则矩阵的乘法无法进行多次迭代，因为矩阵维度无法匹配。

此外，上式中 k 可以为负整数，此时要求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆。

几何角度来看，矩阵幂可以解释为线性变换 $\boldsymbol{A}$ 的反复作用，

$$\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{x}\right) \tag{16}$$

举个例子，给定矩阵 $\boldsymbol{A}$ 如下

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix} \tag{17}$$

如图 13 所示，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 连续作用在向量 $\boldsymbol{x}$ 上 ($\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{x}$) 让平面几何形状放大的同时不断旋转。

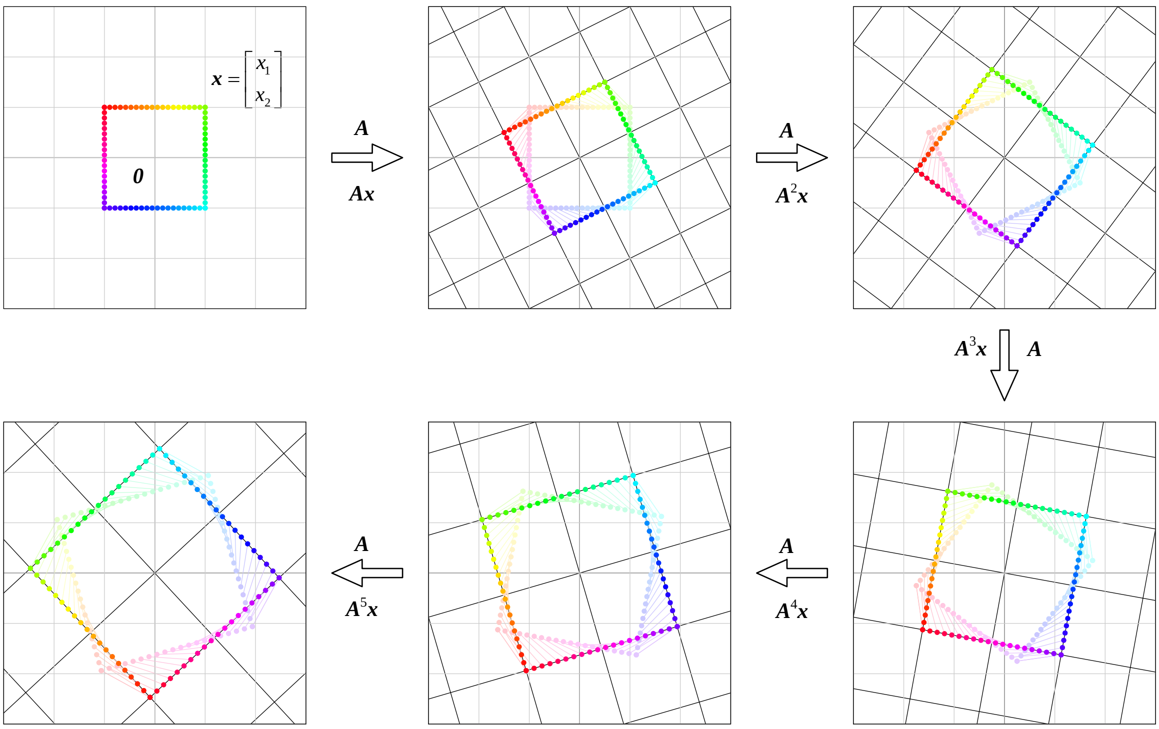

图 13. 2 × 2 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 幂

$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$

如果 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 矩阵乘积为零矩阵，即 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$，不意味着 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为零矩阵；也不意味着 $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{O}$。

举个例子，给定 2 × 2 矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} \tag{18}$$

如图 14 所示，$\boldsymbol{ABx}$ 让正方形“坍塌”到原点。

但是，$\boldsymbol{BA}$ 结果并不是零矩阵；如图 15 所示，正方形发生了降维。

请大家计算 (18) 对应的 $\boldsymbol{AB}$、$\boldsymbol{BA}$ 两个矩阵乘法。

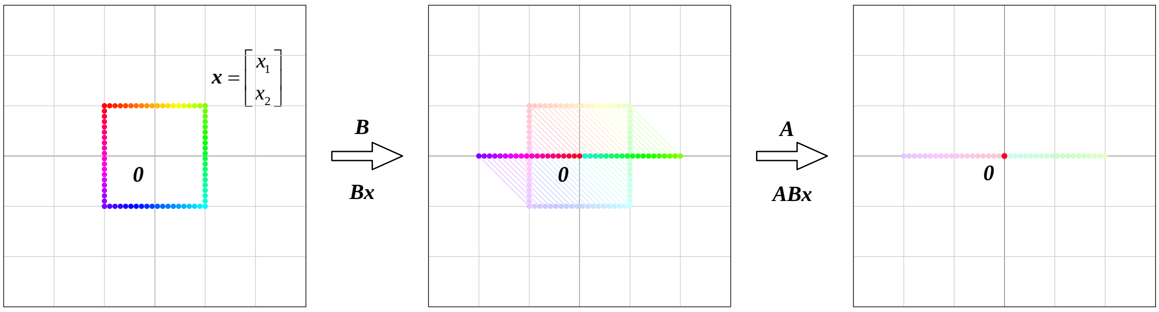

图 14. 2 × 2 矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 矩阵乘积为零矩阵，$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$

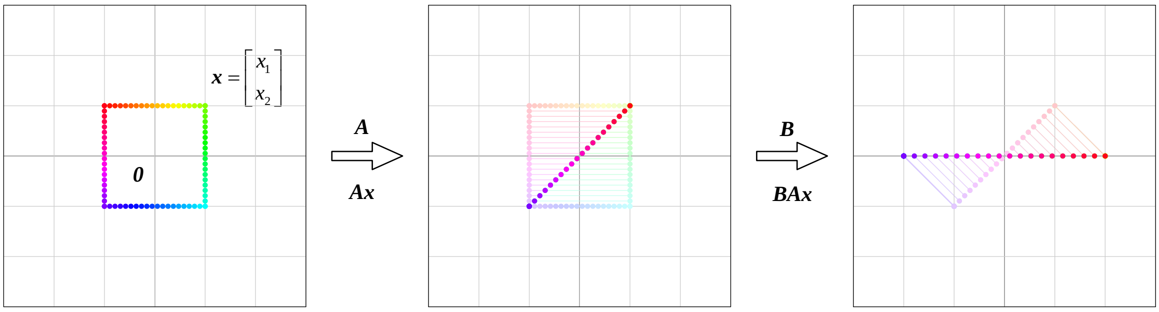

图 15. 2 × 2 矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 矩阵乘积为零矩阵，$\boldsymbol{BA}$ 不为 $\boldsymbol{O}$

此外，如果 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{BC}$ 或 $\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{CB}$。

除非 $\boldsymbol{C}$ 可逆，否则，$\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{BC}$ 不能得出 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$。

复杂度

举个例子，如下 5 个矩阵相乘

$$\boldsymbol{A}_{m\times p_1}\boldsymbol{A}_{p_1\times p_2}\boldsymbol{A}_{p_2\times p_3}\boldsymbol{A}_{p_3\times p_4}\boldsymbol{A}_{p_5\times n} \tag{19}$$

如下图所示，所有中间维度都会在计算过程中消去，只保留首尾维度 m 和 n。

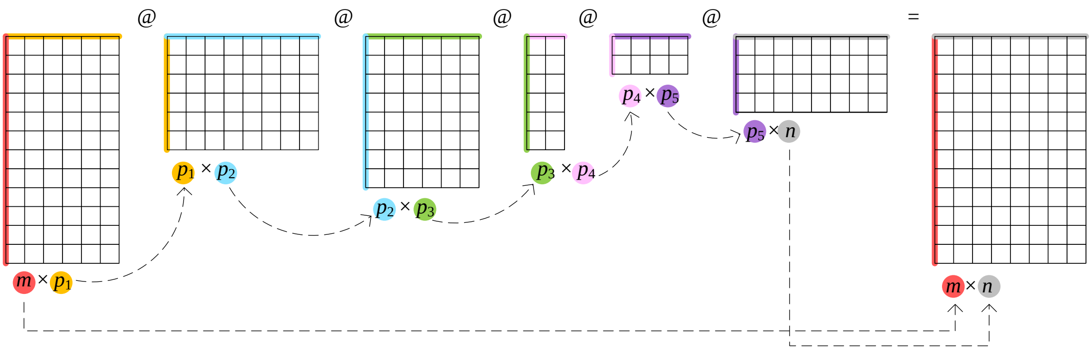

图 16. 矩阵连乘

然而，实际计算时，连乘的顺序会显著影响计算效率，因为矩阵乘法的复杂度取决于矩阵的大小及乘法顺序。

矩阵乘法的复杂度描述的是完成矩阵乘法所需的计算步骤数。复杂度依赖于矩阵的维度以及计算中涉及的加法与乘法次数。由于总计算量主要由乘法主导，本节提到的复杂度只考虑乘法次数。

举个例子，对于两个矩阵 $\boldsymbol{A}$ $(m \times p)$ 和 $\boldsymbol{B}$ $(p \times n)$，矩阵乘法 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB}$ 结果 $\boldsymbol{C}$ 中每个元素是通过 $\boldsymbol{A}$ 的一行和 $\boldsymbol{B}$ 的一列的向量内积计算得到。这意味着，计算每个元素需要 p 次乘法和 $p - 1$ 次加法。

矩阵乘法 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB}$ 有 $m \times n$ 个元素，每个元素需要 p 次乘法运算。因此，总复杂度为 $m \times n \times p$。

下面，让我们看一个例子。如下图所示，四个矩阵连乘，它们分别是 $\boldsymbol{A}$ (5×10)、$\boldsymbol{B}$ (10×4)、$\boldsymbol{C}$ (4×20)、$\boldsymbol{D}$ (20×5)。下面，我们比较两种矩阵乘法顺序；请大家自行分析其他可能顺序及复杂度。

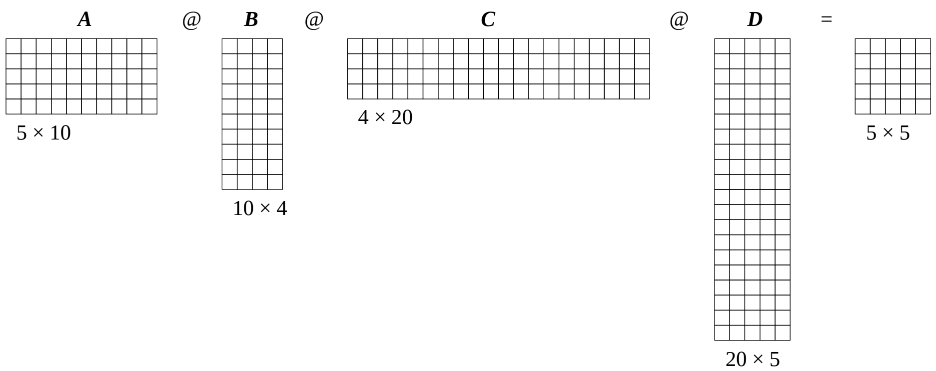

图 17. 优化矩阵连乘顺序

第一种就按照 $\boldsymbol{ABCD}$ 的先后顺序，即$((\boldsymbol{A} @ \boldsymbol{B}) @ \boldsymbol{C}) @ \boldsymbol{D}$；第二种，根据乘法结合律，我们先计算 $\boldsymbol{AB}$ 再算 $\boldsymbol{CD}$，最后将两个结果乘在一起，即$(\boldsymbol{A} @ \boldsymbol{B}) @ (\boldsymbol{C} @ \boldsymbol{D})$。

第一种矩阵连乘的分步复杂度为：

- **第 1 步**，$\boldsymbol{A} @ \boldsymbol{B}$ 复杂度为 200 $(5 \times 10 \times 4)$。
- **第 2 步**，$((\boldsymbol{A} @ \boldsymbol{B}) @ \boldsymbol{C})$复杂度为 400 $(5 \times 4 \times 20)$; $(\boldsymbol{A} @ \boldsymbol{B})$形状为 5×4。
- **第 3 步**，$((\boldsymbol{A} @ \boldsymbol{B}) @ \boldsymbol{C}) @ \boldsymbol{D}$ 复杂度为 500 $(5 \times 20 \times 5)$ $(\boldsymbol{A} @ \boldsymbol{B}) @ \boldsymbol{C})$的形状为 5×20。

第一种矩阵连乘的总复杂度为 1100 (200 + 400 + 500)。

第二种矩阵连乘的分步复杂度为：

- **第 1 步**，$\boldsymbol{A} @ \boldsymbol{B}$ 复杂度为 200 ($5 \times 10 \times 4$)。
- **第 2 步**，$\boldsymbol{C} @ \boldsymbol{D}$ 复杂度为 400 ($4 \times 20 \times 5$)。
- **第 3 步**，$(\boldsymbol{A} @ \boldsymbol{B}) @ (\boldsymbol{C} @ \boldsymbol{D})$复杂度 100 ($5 \times 4 \times 5$)；$(\boldsymbol{A} @ \boldsymbol{B})$形状为 5×4，$(\boldsymbol{C} @ \boldsymbol{D})$形状为 4×5。

第二种矩阵连乘的总复杂度为 700 (200 + 400 + 100)。

这个例子告诉我们，在矩阵连乘的运算中，选择适当的计算顺序至关重要。优先在计算过程中消去较大的中间维度，能够显著减少后续运算量，从而大幅降低整体复杂度。

优化计算顺序不仅仅是一种数学技巧，它还是高效完成大规模线性代数任务的重要基础。特别是在机器学习和数据科学中，矩阵运算广泛用于训练模型、处理高维数据以及计算特征分解。通过优化矩阵乘法顺序，可以显著提高计算性能，尤其是在处理神经网络的前向传播和反向传播时。

此外，现代优化方法还包括利用矩阵的结构特性。例如，稀疏矩阵可以大幅减少非零元素的参与，提高运算速度；块矩阵能够在分块计算中充分利用并行计算资源。这些方法为矩阵运算的进一步优化提供了多样化的工具和思路，推动了线性代数在计算领域的广泛应用。优化计算顺序、利用结构特性和先进算法，共同构成了高效矩阵运算的理论与实践框架。

请大家用 DeepSeek/ChatGPT 等工具完成本节如下习题。

Q1. 用随机正整数发生器生成四个 2×2 矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{D}$，自己写 Python 代码计算所有全排列矩阵 (比如 $\boldsymbol{A} @ \boldsymbol{B} @ \boldsymbol{D} @ \boldsymbol{C}$) 的连乘结果。

Q2. 如下矩阵 $\boldsymbol{A}$ 沿横轴缩放，$\boldsymbol{B}$ 代表沿纵轴方向缩放，是否满足 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$

- $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

Q3. 如下矩阵 $\boldsymbol{A}$ 沿横轴剪切，$\boldsymbol{B}$ 代表沿纵轴剪切，是否满足 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$

- $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Q4. 若干沿横轴剪切矩阵，请计算矩阵乘法 $\boldsymbol{ABCD}$，有什么规律

- $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & k_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & k_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & k_3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 1 & k_4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Q5. 给定如下不同矩阵 $\boldsymbol{A}$，请计算 $\boldsymbol{A}^8$，并从几何角度解释线性变换的作用。

- $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

- $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$