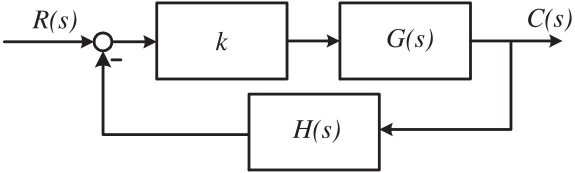
Analiza sistemelor utilizând locul rădăcinilor

Paula Raica
Departamentul de Automatică
Str. Dorobantilor 71, sala C21, tel: 0264 - 401267
Str. Baritiu 26, sala C14, tel: 0264 - 202368
email: Paula.Raica@aut.utcluj.ro

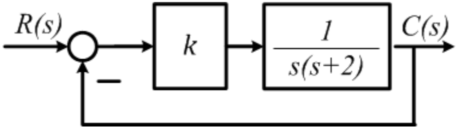
Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

Introducere

- Caracteristicile de bază ale răspunsului tranzitoriu a unui sistem în buclă închisă sunt legate de localizarea polilor sistemului închis.
- Dacă sistemul are un parametru variabil, locația polilor sistemului închis depinde de parametru.
- Este important să determinăm cum se modifică polii în planul s când parametrul este variabil.



Exemplu



- Funcția de transfer în buclă deschisă:

$$kG(s) = k\frac{1}{s(s+2)}$$

  Polii sistemului deschis: 0, -2, nu depind de k

- Funcția de transfer a sistemului închis:

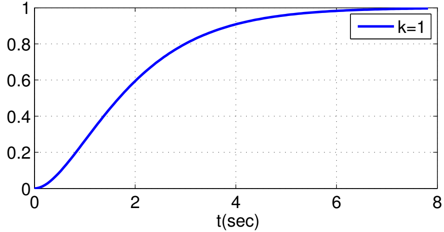
$$G_0(s) = \frac{kG(s)}{1+kG(s)} = \frac{k\dfrac{1}{s(s+2)}}{1+k\dfrac{1}{s(s+2)}} = \frac{k}{s^2+2s+k}$$

  Polii sistemului închis: depind de k

Exemplu

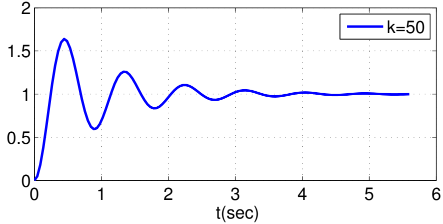
$$k = 1, \quad G_0(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}$$

- Polii $s_1 = s_2 = -1$
- Răspunsul la treaptă este critic amortizat.



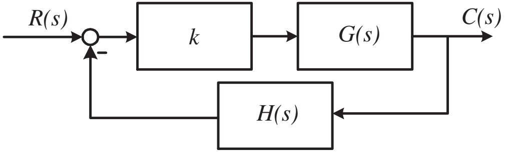
$$k = 50, \quad G_0(s) = \frac{50}{s^2 + 2s + 50}$$

- Polii: $s_{1,2} = -1 \pm 7j$,
- Răspunsul la treaptă este sub-amortizat.



Locul rădăcinilor

Locul rădăcinilor este reprezentarea grafică a rădăcinilor ecuației caracteristice a sistemului **închis** pentru toate valorile unui parametru din sistem, $k \in [0, \infty)$.



- Funcția de transfer a sistemului deschis

$$H_d(s) = kG(s)H(s)$$

- Funcția de transfer a sistemului închis

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{kG(s)}{1 + kG(s)H(s)}$$

Locul rădăcinilor

- *Ecuația caracteristică* a sistemului închis:

$$1 + kG(s)H(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad kG(s)H(s) = -1$$

- Ideea: valorile lui s pentru care $kG(s)H(s) = -1$ trebuie să satisfacă ecuația caracteristică a sistemului.
- $kG(s)H(s)$ este un raport de polinoame în s și $kG(s)H(s)$ este o cantitate complexă:

$$\mid kG(s)H(s) \mid \angle kG(s)H(s) = -1 + j0$$

- *Condiția de fază:*

$$\angle kG(s)H(s) = \angle -1 + j0 = \pm 180^o(2q+1), \quad q = 0, 1, 2, \ldots$$

- *Condiția de modul:*

$$|kG(s)H(s)| = |-1 + j0| = 1$$

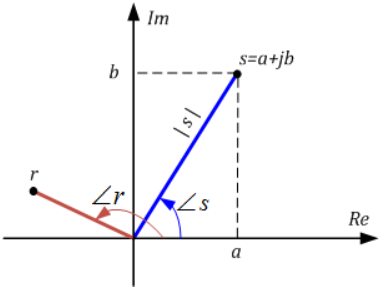
Numere complexe. Recapitulare.

- Valoarea absolută (sau *modulul*):

$$|s| = |a + jb| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

- *Faza* (sau argumentul):

$$\angle s = \arg(s) = \arctan \frac{b}{a}, \quad \text{dacă} \quad a > 0$$



Faza se măsoară de la axa reală pozitivă în sens trigonometric.

Numere complexe. Recapitulare.

- Produsul a două numere complexe: $s_1 = a + jb$ and $s_2 = c + jd$ are modulul:

$$|s_1 s_2| = |s_1| \cdot |s_2| = \sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{c^2 + d^2}$$

  și faza:

$$\angle(s_1 s_2) = \angle s_1 + \angle s_2 = \angle(a + jb) + \angle(c + jd)$$

- Raportul a două numere complexe are modulul:

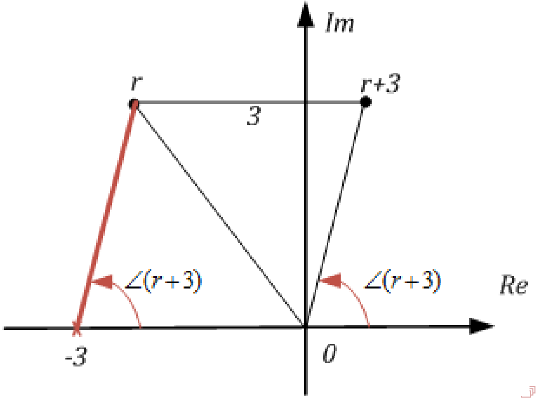
$$\left|\frac{s_1}{s_2}\right| = \frac{|s_1|}{|s_2|} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{c^2 + d^2}}$$

  și faza:

$$\angle\frac{s_1}{s_2} = \angle s_1 - \angle s_2 = \angle(a + jb) - \angle(c + jd)$$

Numere complexe. Recapitulare.

- Se consideră un număr complex r. Dorim să calculăm faza lui $r+3$.
- Punctele r, $r+3$, 0 și -3 formează un paralelogram.
- Faza lui $r+3$ = unghiul (măsurat în sens trig.) de la axa reală pozitivă la linia care unește r cu rădăcina lui $r+3$, adică -3.



Exemplu

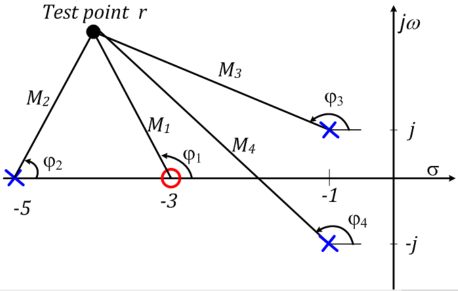
- Se consideră un sistem în buclă închisă cu funcția de transfer a sistemului deschis:

$$kG(s)H(s) = \frac{k(s+3)}{(s+5)(s^2+2s+2)}$$

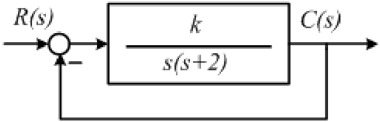
- Pentru un punct de test $s = r$, faza lui $kG(s)H(s)$ este:

$$\angle kG(s)H(s)|_{s=r} = \angle k + \angle(r+3) - \angle(r+5) - \angle(r+1-j) - \angle(r+1+j)$$

$$\angle kG(s)H(s)|_{s=r} = 0 + \varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4$$



Exemplu. Locul rădăcinilor pentru un sistem de ordinul 2



- Funcția de transfer a sistemului deschis $G(s)$:

$$G(s) = \frac{k}{s(s+2)}$$

- Funcția de transfer a sistemului închis:

$$G_0(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{k}{s^2+2s+k}$$

- Ecuația caracteristică:

$$1 + \frac{k}{s(s+2)} = 0 \quad \text{sau } s^2+2s+k = 0$$

- Se va desena locul rădăcinilor pentru $k \in [0, \infty)$.

Exemplu. Locul rădăcinilor pentru un sistem de ordinul 2

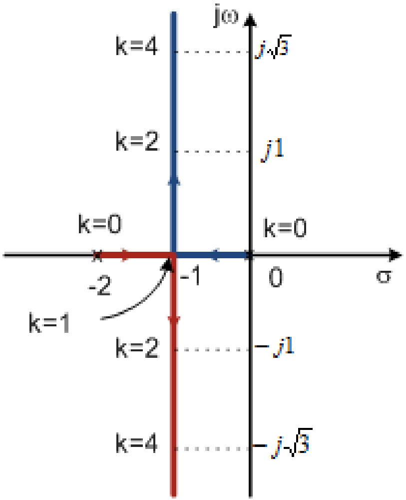
- Rădăcinile ecuației caracteristice (polii sistemului închis):

$$s_1 = -1 + \sqrt{1-k}, \quad s_2 = -1 - \sqrt{1-k}$$

- Rădăcinile sunt reale pentru $k \leq 1$ și complexe pentru $k > 1$.
- Pentru $k = 0$, polii sistemului închis = polii sistemului deschis: $s_1 = 0$, $s_2 = -2$.
- Când k crește în intervalul $(0, 1)$, poli sistemului închis se mișcă spre punctul $(-1, 0)$. Poli reali: sistem supra-amortizat.
- Pentru $k = 1$, polii sistemului închis: $s_1 = s_2 = -1$. Sistemul este critic amortizat.

Exemplu. Locul rădăcinilor pentru un sistem de ordinul 2

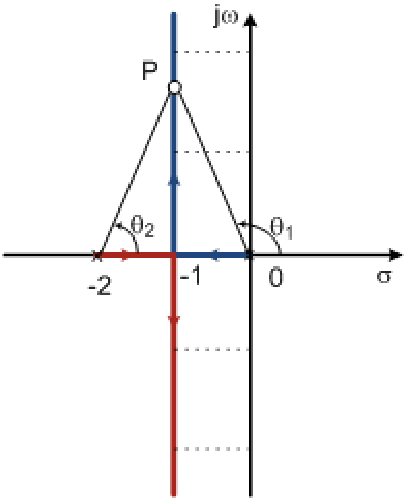
- $k \in (1, \infty)$: polii sistemului închis se desprind de pe axa reală și devin complecși.
- Poli complecși: $s_{1,2} = -1 \pm \sqrt{k-1}j$.
- Polii se mișcă de-s lungul unei linii verticale $Re(s) = -1$, simetric
- $k > 1$: sistem subamortizat, răspuns oscilant.



Exemplu. Locul rădăcinilor pentru un sistem de ordinul 2

Condiția de fază este îndeplinită:

$$\angle \frac{k}{s(s+2)}\Big|_{s=P} =$$
$$= \angle k - \angle s - \angle(s+2) =$$
$$= 0 - \theta_1 - \theta_2 = -180^o$$



pentru că:
într-un punct $s = P \in LR$:
$\theta_1 = \angle s$ și $\theta_2 = \angle(s+2)$ și (din figură):

$$\theta_1 + \theta_2 = 180^o$$

Exemplu. Locul rădăcinilor pentru un sistem de ordinul 2

Pentru o pereche de poli complecși: $s_{1,2} = -1 \pm j1$, factorul k se determină din condiția de modul:

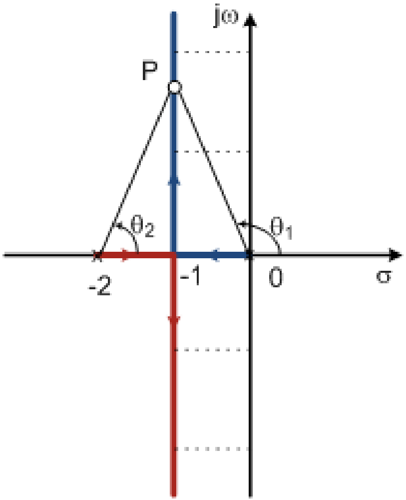
$$|G(s)H(s)| = \left|\frac{k}{s(s+2)}\right|_{s_{1,2}} = 1$$

sau

$$k = |s(s+2)|_{s=-1+j1}$$

$$k = |-1+j1| \cdot |1+j1|$$

$$k = \sqrt{1^2+1^2}\sqrt{1^2+1^2} = 2$$



Locul rădăcinilor - procedura

- Se scrie ecuația caracteristică sub forma:

$$1 + kP(s) = 0.$$

- Se factorizează $P(s)$ în termenii a n_p poli și n_z zerouri

$$1 + k\frac{\prod_{i=1}^{n_z}(s+z_i)}{\prod_{i=1}^{n_p}(s+p_j)} = 0$$

- Se localizează polii și zerourile sistemului deschis în planul s: **x** - polii, **o** - zerourile.
- Se determină numărul de ramuri SL. $SL = n_p$, unde $n_p \geq n_z$, $n_p =$ numărul de poli ai sistemului deschis, $n_z =$ numărul de zerouri ai sistemului deschis.

Locul rădăcinilor - procedura

- Se determină numărul de ramuri SL. $SL = n_p$.
- Se localizează segmentele de pe axa reală care aparțin locului rădăcinilor:
  1. LR se află pe axa reală la stânga unui număr impar de poli și zerouri ai sistemului deschis
  2. LR începe într-un pol al sistemului deschis și se termină la un zero (sau infinit)
- Locul rădăcinilor este simetric față de axa reală.
- LR tinde la infinit de-a lungul asimptotelor centrate în σ_A cu unghiurile Φ_A față de axa reală pozitivă.

$$\sigma_A = \frac{\sum(poli) - \sum(zerouri)}{n_p - n_z}, \ \Phi_A = \frac{2q+1}{n_p - n_z} \cdot 180^o, \ {}_{q=0,1,\dots(n_p - n_z - 1)}$$

- Din criteriul Routh-Hurwitz $\Rightarrow$ intersecția cu axa imaginară (dacă există).

Locul rădăcinilor - procedura

- Se determină punctul de desprindere de pe axa reală (dacă există)
  1. Se calculează $k = -\frac{1}{P(s)} = p(s)$, (din $1 + kP(s) = 0$)
  2. Se obține $dp(s)/ds = 0$
  3. Se determină soluțiile de la 2 sau se utilizează o metodă grafică pentru a afla maximul lui $p(s)$.
- Se determină unghiul de plecare din polii complecși și unghiul cu care LR ajunge în zerouri, din condiția de fază

$$\angle P(s) = \pm 180^o(2q+1),\ at\ s = p_j\ or\ z_i.$$

- Dacă este necesar, se verifică localizarea rădăcinilor care satisfac condiția de fază

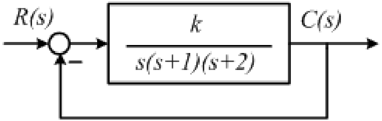
$$\angle P(s) = \pm 180^o(2q+1) \text{ la un pol } s_x$$

- Dacă este necesar, se determină factorul k_x pentru o anumită rădăcină s_x

$$k_x = \frac{\prod_{j=1}^{n_p} \mid s + p_j \mid}{\prod_{i=1}^{n_z} \mid s + z_i \mid} \Big|_{s=s_x}$$

Locul rădăcinilor. Exemplu

Se va schița locul rădăcinilor și se va determina valoarea lui k pentru care factorul de amortizare ζ a unei perechi de poli dominanți complecși este 0.5, pentru sistemul închis:



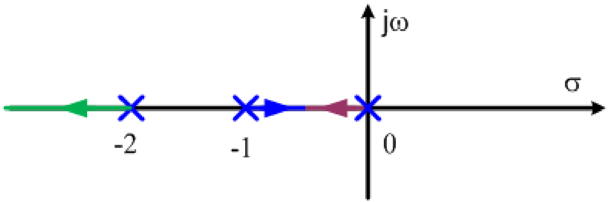
- Ecuația caracteristică:

$$1 + kG(s) = 0, \text{ sau } 1 + \frac{k}{s(s+1)(s+2)} = 0$$

- Funcția de transfer în buclă deschisă nu are zerouri: $n_z = 0$, și are trei poli, $p_1 = 0$, $p_2 = -1$, $p_3 = -2$: $n_p = 3$.

Locul rădăcinilor. Exemplu

- Se plasează polii sistemului deschis în planul complex cu simbolul $\times$.
- LR are $n_p = 3$ ramuri.
- Se localizează segmentele de pe axa reală care aparțin de locul rădăcinilor: între $p_1 = 0$ și $p_2 = -1$, și de la $p_3 = -2$ la $-\infty$.
- Deoarece LR începe într-un pol și se termină în zerou (sau infinit), între 0 și -1 vom găsi un punct de desprindere.



Polii sistemului deschis și LR pe axa reală

Locul rădăcinilor. Exemplu

- LR este simetric față de axa reală.
- Ramurile LR care tind la infinit, sunt de-a lungul unor asimptote, centrate în σ_A și cu unghiurile Φ_A.

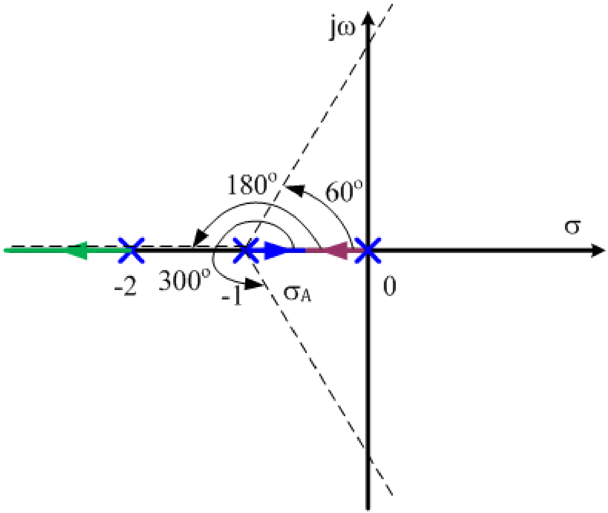
$$\sigma_A = \frac{\sum(p_j) - \sum(z_i)}{n_p - n_z} = \frac{0 - 1 - 2}{3} = -1$$

$$\Phi_A = \frac{2q+1}{n_p - n_z} \cdot 180^o = \frac{2q+1}{3} \cdot 180^o, \quad q = 0, 1, 2$$

sau

$$\Phi_A = 60^o, 180^o, 300^o$$

Locul rădăcinilor. Exemplu



Asimptote

Locul rădăcinilor. Exemplu

Criteriul Routh-Hurwitz:

$$s^3 + 3s^2 + 2s + k = 0$$

Tabelul Routh:

$$\begin{array}{lccc} s^3 & : & 1 & 2 \\ s^2 & : & 3 & k \\ s^1 & : & (6-k)/3 & \\ s^0 & : & k & \end{array}$$

$\Rightarrow$ $k = 6$ (sistemul este la limita de stabilitate $\Rightarrow$ rădăcini pe axa imaginară). Se înlocuiește $k = 6$ în ecuația caracteristică:

$$s^3 + 3s^2 + 2s + 6 = 0 \quad \text{sau} \quad (s+3)(s^2+2) = 0$$

$$\underline{s_{1,2} = \pm j\sqrt{2}}, \quad s_3 = -3$$

Locul rădăcinilor. Exemplu

Punctul de desprindere.
Din ecuația caracteristică:

$$1 + \frac{k}{s(s+1)(s+2)} = 0, \quad \Rightarrow \quad k = -s(s+1)(s+2) = p(s)$$

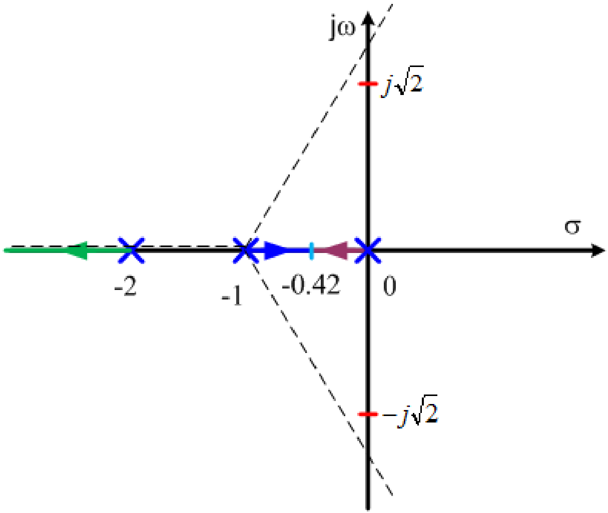
Se calculează soluțiile ecuației:

$$p'(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dp(s)}{ds} = -\frac{d}{ds}\left(s^3 + 3s^2 + 2s\right) = 0$$

$$\frac{dp(s)}{ds} = -(3s^2 + 6s + 2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{s_1 = -0.4226}, \quad s_2 = -1.5774$$

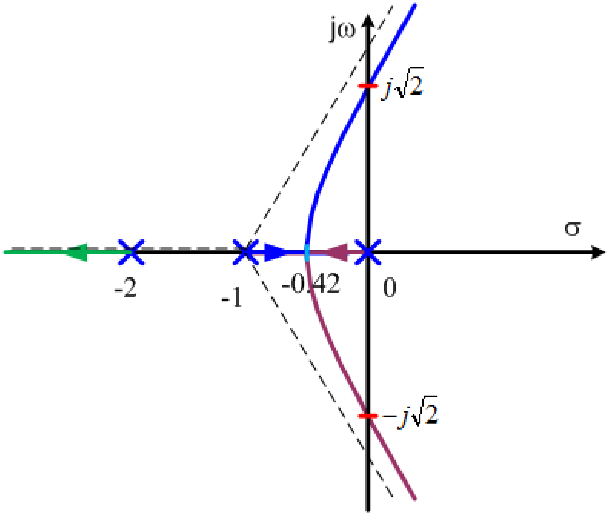
Punctul de desprindere este între 0 și -1, $\Rightarrow \ s_1 = -0.4226$

Locul rădăcinilor. Exemplu



Intersecția cu axa imaginară și punctul de desprindere

Locul rădăcinilor. Exemplu



Locul rădăcinilor

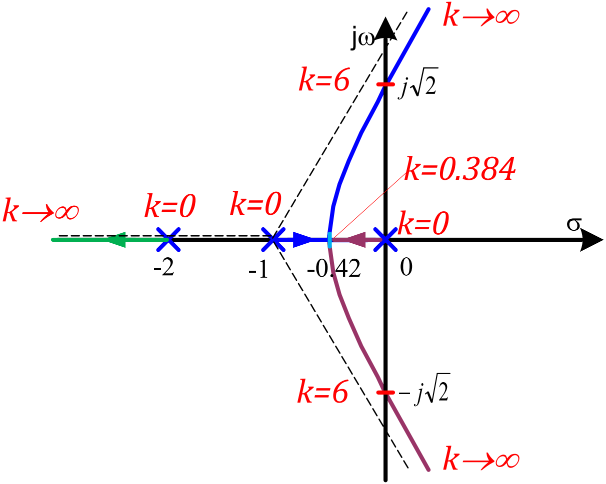
Locul rădăcinilor. Exemplu. Analiză

Valoarea lui k în punctul de desprindere se calculează din condiția de modul:

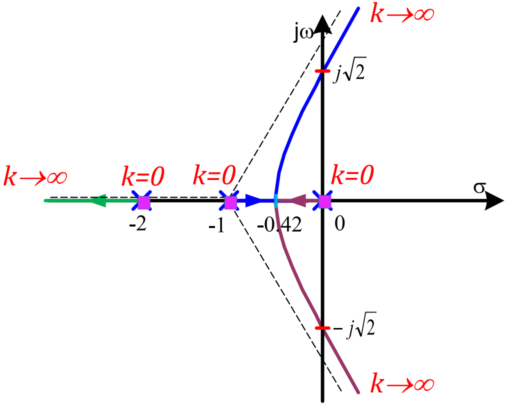
$$|kG(s)|_{s=-0.42} = 1$$

$$\left|\frac{k}{s(s+1)(s+2)}\right|_{s=-0.42} = 1$$

$$k = |-0.42(-0.42+1)(-0.42+2)| = 0.384$$

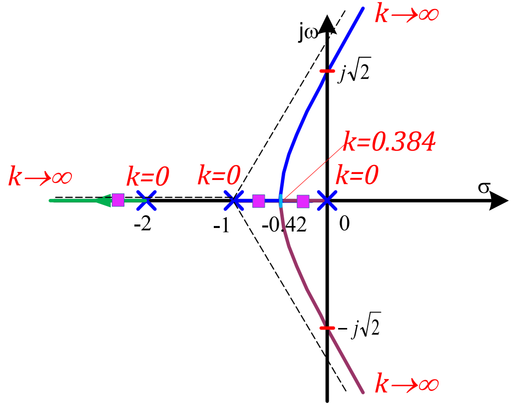


Locul rădăcinilor. Exemplu. Analiză



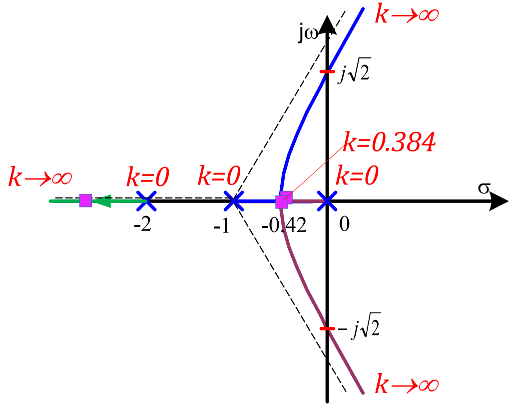
- $k = 0$, polii sistemului închis ■ = polii sistemului deschis $\times$
- 2 poli negativi, 1 pol în 0 $\Rightarrow$ limita de stabilitate

Locul rădăcinilor. Exemplu. Analiză



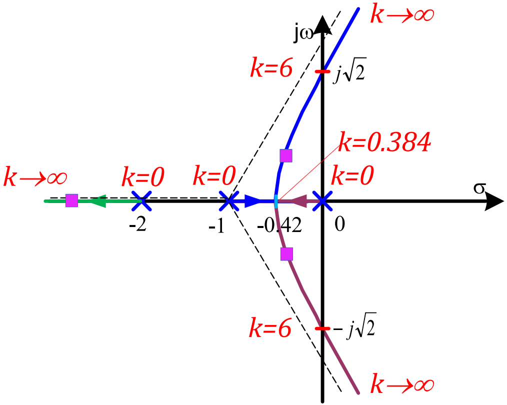
- $k \in (0,\ 0.384)$, polii sistemului închis
- sistemul închis are 3 poli reali negativi $\Rightarrow$ sistemul închis stabil, supra-amortizat

Locul rădăcinilor. Exemplu. Analiză



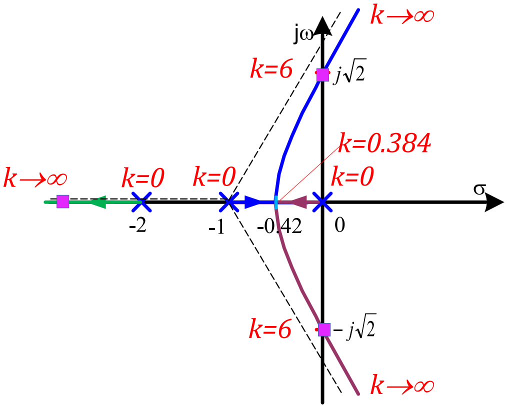
- $k = 0.384$, polii sistemului închis
- sistemul închis are doi poli reali negativi și egali (-0.42), un pol negativ, $\Rightarrow$ sistemul închis stabil, critic amortizat

Locul rădăcinilor. Exemplu. Analiză



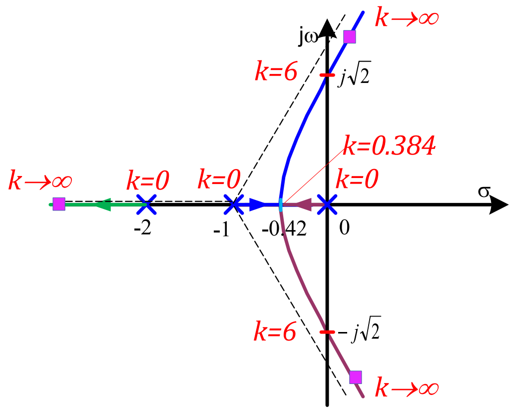
- $k \in (0.384,\ 6)$, polii sistemului închis ■
- doi poli complex-conjugați cu partea reală negativă, un pol negativ, $\Rightarrow$ sistemul închis stabil, sub-amortizat

Locul rădăcinilor. Exemplu. Analiză



- $k = 6$, polii sistemului închis
- doi poli complex-conjugați pe axa imaginară, un pol negativ, $\Rightarrow$ sistemul închis la limita de stabilitate

Locul rădăcinilor. Exemplu. Analiză



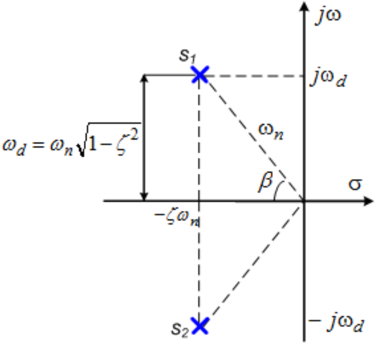
- $k > 6$, polii sistemului închis ■
- doi poli complex-conjugați cu partea reala pozitivă, un pol negativ, ⇒ sistemul închis instabil

Locul rădăcinilor. Exemplu. Analiză - sumar

- $k = 0$, un pol în origine, sistemul este la limita de stabilitate
- $k \in (0, 0.384)$, poli reali negativi, în semiplanul stâng, sistem stabil și supra-amortizat
- $k = 0.384$, doi poli reali negativi și egali, un pol negativ, sistemul este critic amortizat
- $k \in (0.384, 6)$, un pol negativ real și doi poli complecși cu partea reală negativa, sistem stabil, subamortizat
- $k = 6$, un pol real negativ, doi poli pe axa imaginară, sistem la limita de stabilitate
- $k > 6$, un pol real negativ și doi poli complecși cu partea reală pozitivă, sistem instabil

Locul rădăcinilor. Exemplu

Recapitulare. Polii complecși ai unui sistem de ordinul 2:



$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$\cos\beta = \frac{\zeta\omega_n}{\omega_n} = \zeta$$

$$\beta = \arccos\zeta$$

Locul rădăcinilor. Exemplu

Polii sistemului închis cu $\zeta = 0.5$ se află pe liniile care trec prin origine și fac unghiurile $\pm arccos\zeta = \pm arccos 0.5 = \pm 60^o$ cu axa reală negativă.

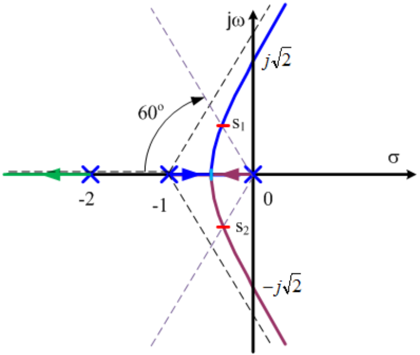


Figura: Locul rădăcinilor și polii cu $\zeta = 0.5$

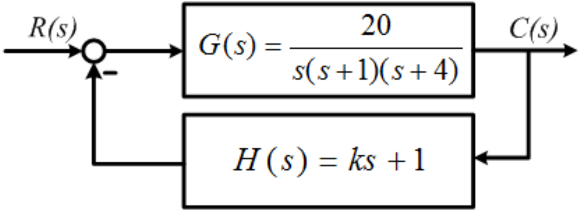
$$s_{1,2} = -0.3337 \pm j0.5780$$

Valoarea lui k pentru $s_{1,2}$ se determină din condiția de modul:

$$k = |s(s+1)(s+2)|_{s_{1,2}} = 1.0383$$

Al treilea pol se găsește la $s = -2.3326$.
Aceste valori precise se pot determina numai utilizând un calculator

Locul rădăcinilor pentru orice parametru variabil. Exemplu



$$G(s) = \frac{20}{s(s+1)(s+4)}, \quad H(s) = 1 + ks$$

Funcția de transfer în buclă deschisă:

$$G(s)H(s) = \frac{20(1+ks)}{s(s+1)(s+4)}$$

Locul rădăcinilor. Exemplu

- Ecuația caracteristică:

$$1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{20(1+ks)}{s(s+1)(s+4)} = 0$$

$$s^3 + 5s^2 + 4s + 20 + 20ks = 0$$

- Se notează $20k = K$ și se împarte cu suma termenilor care nu conțin pe K:

$$\underbrace{s^3 + 5s^2 + 4s + 20} + Ks = 0$$

Rezultă:

$$1 + K\frac{s}{s^3 + 5s^2 + 4s + 20} = 0$$

- Se schițează locul rădăcinilor pe baza noii ecuații caracteristice.

Locul rădăcinilor. Exemplu

- Ecuația caracteristică se poate scrie:

$$1 + K\frac{s}{(s+5)(s^2+4)} = 0$$

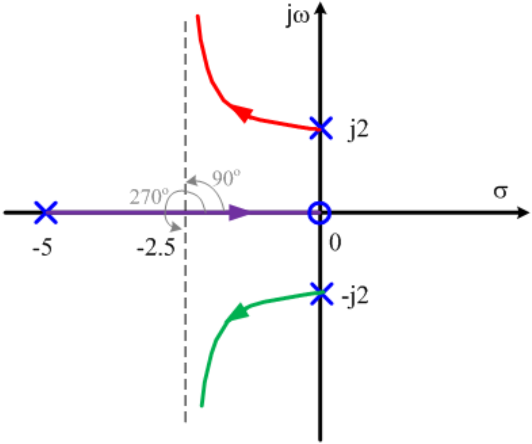
- Polii sistemului deschis: $p_{1,2} = \pm j2$, $p_3 = -5$ și zerourile sistemului deschis: $z_1 = 0$. $\Rightarrow$ $n_z = 1$, $n_p = 3$
- LR are $n_p = 3$ ramuri.
- Pe axa reală: LR este între polul -5 și zeroul din origine. Celelalte două ramuri încep din polii $\pm j2$ și tind spre asimptote pentru K crescător.
- Centrul asimptotelor:

$$\sigma_A = \frac{-5 - j2 + j2 - 0}{2} = -\frac{5}{2} = -2.5$$

și unghiurile asimptotelor:

$$\Phi_A = \frac{\pm 180^o(2q+1)}{2}, \quad q = 0, 1, \quad \Rightarrow \quad \Phi_A = 90^o, 270^o$$

Locul rădăcinilor. Exemplu



Locul rădăcinilor. Exemplu. Analiza

- Pentru $k = 0$ sistemul închis este la limita de stabilitate pentru că doi poli ai sistemului închis se află pe axa imaginară (= doi poli ai sistemului deschis)
- Pentru orice $k > 0$ toți cei trei poli ai sistemului închis sunt în semiplanul stâng al planului s. Sistemul este stabil.
- Pentru orice $k > 0$ sistemului închis va avea doi poli complecși cu partea reală negativă și un pol real negativ. Sistemul este sub-amortizat și răspunsul este oscilant.