Université de Pau et des Pays de l'Adour
Département de Mathématiques

L2-info - Calcul Scientifique

TP-1: Recherche de zéros de fonctions

Exercice 1.

On souhaite calculer une valeur approchée d'un zéro d'une fonction f sur l'intervalle $[a, b]$ en utilisant la méthode de la bisection étudiée en cours.

1. Écrire une fonction qui utilise la méthode de la bisection pour approcher le zéro x de la fonction f. La signature en langage C de cette fonction est la suivante :

```
double bisection(double (*f)(double), double a, double b, double tol);
```

Pour les applications numériques, nous prendrons une tolérence de 10^{-10}.

2. **Application**: Tester votre fonction en calculant $\sqrt{3}$. On remarquera que $\sqrt{3}$ est racine de la fonction $f(x) = x^2 - 3$. Tracer ensuite la valeur approchée du zéro obtenue avec la fonction `bisection` en fonction du nombre d'itérations de la méthode.
3. **Application**: Tester votre fonction en calculant le zéro de la fonction $f(x) = \cos(x) - x$ sur $[0; 1]$. Avant de calculer le zéro, on pourra tracer cette fonction avec `gnuplot`. Combien d'itérations devez-vous effectuer pour obtenir une précision à 10 chiffres après la virgule?
4. **Application**: (lancé d'une balle sans frottement) reprenons l'exemple du cours sur le lancé d'une balle à une vitesse $v = 30m.s^{-1}$ et avec un angle $\theta = \pi/4$ sans frottement. Rappelons qu'il s'agit d'obtenir le zéro de la fonction
$$f(x) = x\tan(\theta) - \frac{gx^2}{2v^2\cos^2(\theta)}$$
sur $[0.1, 200]$ et que $g = 9.81m.s^{-2}$. Comparer le résultat obtenu avec la méthode de la bisection avec le résultat obtenu en cours.
5. **Application**: (lancé d'une balle avec frottement) reprenons l'exemple du cours sur le lancé d'une balle de tennis de masse $m = 57g$ à une vitesse $v = 30m.s^{-1}$ et avec un angle $\theta = \pi/4$ avec frottements $k = 3$. Rappelons qu'il s'agit d'obtenir le zéro de la fonction
$$f(x) = \frac{gm}{k}\left(\frac{x}{v\cos(\theta)} + \frac{m}{k}\ln\left(1 - \frac{kx}{mv\cos(\theta)}\right)\right) + x\tan(\theta)$$
sur $[0.1, 200]$.

Exercice 2.

On souhaite calculer une valeur approchée d'un zéro d'une fonction f sur l'intervalle $[a, b]$ en utilisant une méthode de point fixe. Pour utiliser cette méthode nous devons écrire le zéro x de la fonction f comme point fixe d'une fonction g, c'est- à-dire $g(x) = x$.

1. Écrire une fonction qui permet de calculer les N premières itérées de point fixe en partant de $x0$ pour une fonction $g(x)$. La signature en langage C de cette fonction est la suivante :

```
double pointfixe(double (*g)(double), double x0, int N);
```

2. **Application**: On souhaite rechercher les zéros de la fonction $f(x) = x^3 + x - 1$. Calculer les 20 premières itérations de point fixe à partir d'une intialisation $x0 = 0.5$ avec les trois méthodes vues en cours. Que contatez-vous?

Exercice 3.

On souhaite calculer une valeur approchée d'un zéro d'une fonction f sur l'intervalle $[a, b]$ en utilisant une méthode de Newton.

1. Écrire une fonction qui permet de calculer la racine d'une fonction f à l'aide de la méthode de Newton en partant de `x0`. On note `Nmax` le nombre maximal d'itérations de la méthode. La signature en langage C de cette fonction est la suivante :

```c
double newton(double (*f)(double), double (*fprim)(double), double x0, int Nmax);
```

2. **Application**: Utiliser la méthode de Newton pour calculer $\sqrt{3}$. On remarquera que $\sqrt{3}$ est racine de la fonction $f(x) = x^2 - 3$. Tracer ensuite la valeur approchée du zéro en fonction du nombre d'itérations. Cette méthode converge-t-elle plus rapidemment vers la solution exacte?

3. **Application**: Résoudre sur $\mathbb{R}^{+,*}$, par la méthode de Newton l'équation $-\ln(x) = x$.

4. **Application**: Par la méthode de Newton, déterminer le minimum de la fonction $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$.

5. Écrire une fonction qui permet de calculer la racine d'une fonction f à l'aide de la méthode de la sécante en partant de `x0`. On note `Nmax` le nombre maximal d'itérations de la méthode. La signature en langage C de cette fonction est la suivante :

```c
double secante(double (*f)(double), double x0, double x1, int Nmax);
```

6. **Application**: Vérifier les résultats précédemments obtenus avec la méthode de Newton. Comparer la vitesse de convergence de la méthode avec les autres méthodes pour la calcul d'une valeur approchée de $\sqrt{3}$.