

Exercice 1.

Le programme donné sur Elearn dans le fichier `tp0-exo1.c` est un programme permettant de calculer et afficher la valeur du $N^{\text{ième}}$ terme de la suite (u_n) définie ci-dessous, avec N un entier positif lu au clavier et q un paramètre tel que $q = 0.987$.

$$u_0 = 1, \quad u_n = qu_{n-1}$$

1. Compiler et exécuter ce programme afin de le tester, on utilisera en particulier les valeurs de N suivantes: $N = 0$, $N = 1$, $N = 2$ puis $N = 10$.
2. Compléter le programme pour vérifier la formule générale pour les suites géométriques: $u_n = u_0q^n$

Exercice 2.

On considère les deux suites (a_n) et (b_n) définies par:

$$\begin{cases} a_0 = b_0 = 0 \\ a_{n+1} = a_n^2 - b_n^2 + c \\ b_{n+1} = 2a_nb_n + d \end{cases}$$

Écrire un programme qui demande à l'utilisateur la valeur des paramètres c et d puis qui affiche la valeur de $\sqrt{a_{1000}^2 + b_{1000}^2}$

Tester le programme pour les valeurs suivantes :

- $c = 0.091$ et $d = 0.606$
- $c = 0.091$ et $d = 0.608$ Dans ce cas, la suite diverge, donc le programme ne peut pas calculer.

Exercice 3.

On considère un emprunt d'une somme de $C = 200000$ € à un taux annuel hors assurances de $t_a = 1.32\%$ sur $D = 20$ ans. On cherche à dresser le tableau d'amortissement de ce prêt permettant de visualiser mois par mois la mensualité, les intérêts remboursés, le capital remboursé et le capital restant dû.

Le calcul d'une mensualité fixe M est donné par la formule¹ :

$$M = \frac{Ct(1+t)^{12D}}{(1+t)^{12D} - 1}$$

où t est le taux mensuel, calculé à partir du taux annuel t_a (intérêts composés): $t = (1 + t_a)^{1/12} - 1$

Chaque mois la mensualité permet de payer les intérêts sur le capital restant dû ainsi que de rembourser le capital. La mensualité étant fixe, on rembourse de moins en moins d'intérêts à mesure que le capital est remboursé.

¹<http://images.math.cnrs.fr/Emprunts-mensualites-interet-taux.html>

Ainsi, au $i^{\text{ième}}$ mois, on paye $I_i = t(C - R_{i-1})$ d'intérêts et on rembourse $M - I_i$ au capital. $R_i = \sum_{k=1}^i (M - I_k)$ est le capital remboursé à l'issue du $i^{\text{ième}}$ mois.

Vérifiez que la dernière ligne du tableau correspond à un capital remboursé égal à C .

Mois	Mensualité	Intérêts	CapitalRemboursé	CapitalDu
1	947.90	218.68	729.22	199270.78
2	947.90	217.88	1459.24	198540.76
3	947.90	217.08	2190.06	197809.94
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
240	947.90	1.04	200000.00	0.00

Table 1: Tableau d'amortissement pour $C = 200000$, $t_a = 1.32\%$ et $D = 20$

Au final, quel est le coût total du prêt (capital remboursé plus intérêts)?

Exercice 4. (optionnel) Approximation de la fonction $\sin(x)$.

Utiliser le développement en série entière :

$$\sin(x) \simeq \sum_{n=0}^N (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

1. Écrire un programme qui calcule la valeur approchée de $\sin(x)$ pour un réel x donné par l'utilisateur. Vous choisirez une valeur pour N assez grande. Comparer avec la valeur exacte.

Pour cela, vous écrirez une fonction dont la signature est la suivante:

`double sin_approx(double x, int N);`

On pourra remarquer que si on pose $u_n = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, alors on a que $u_n = \frac{x^2}{(2n+1)(2n)} u_{n-1}$.

2. Tester le programme avec les valeurs $x = 0$, $x = \pi$, $x = \pi/6$ et $x = 10\pi$
3. Pour chacune des valeurs précédentes calculer l'erreur en fonction de N lorsque l'on prend $N = 1$, $N = 2$, $N = 4$ et $N = 8$.