浙江大学
ZheJiang University
运筹与决策

科技创新类通识课程

运筹与决策

浙江大学数学科学学院　谈之奕

浙江大学 ZheJiang University

运筹与决策

数学规划

浙江大学 ZheJiang University 运筹与决策

数学规划

- 若干个变量在满足一些等式或不等式限制条件下，使一个或多个目标函数取得最大值或最小值
- 极值问题
  - 求函数 $f(\mathbf{x})$在 $\mathbf{x}\in S$ 上的极大（小）值
- 条件极值
  - 求函数 $f(\mathbf{x})$在满足 $h_j(\mathbf{x})=0,\quad j=1,\cdots,t$ 条件下的极大（小）值
- 数学规划

$$
\begin{aligned}
\min \quad & f(\mathbf{x}) \\
s.t. \quad & g_i(\mathbf{x})\ge 0 \quad i=1,\cdots,s \\
& h_j(\mathbf{x})=0 \quad j=1,\cdots,t \\
& \mathbf{x}\in\mathbb{R}^n
\end{aligned}
$$

目标函数

min 极小
max 极大

subject to:
以下为约束条件

变量取值范围约束

等式约束

不等式约束

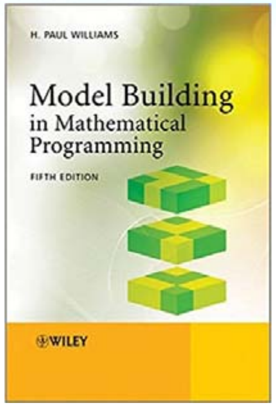
分类

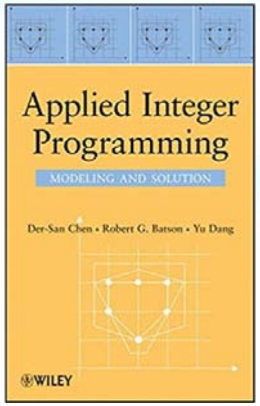
- 线性规划与非线性规划
  - 线性规划：目标函数为线性函数，约束条件为线性等式或不等式
  - 非线性规划：目标函数为非线性函数，或者至少有一个约束条件为非线性等式或不等式
    - 二次规划（**Quadratic Programming**）：目标函数为二次函数，约束条件为线性等式或不等式
    - 带二次约束的二次规划（**Quadratically Constrained Quadratic Program，QCQP**）：目标函数为二次函数，约束条件为线性或二次等式或不等式
- 整数规划：至少有一个决策变量限定取整数值
  - 混合整数规划（**Mixed Integer Programming, MIP**）：部分决策变量取整数值
  - **0-1**规划：所有决策变量都取 **0** 或 **1**

问题建模

运筹与决策

- 将实际问题表示成数学规划的形式使得可以借助数学规划的算法或软件求解一些具体的实例，也可利用数学规划的理论和方法分析解决问题
- 建立实际问题的数学规划模型一般包含确定决策变量、给出目标函数、列出约束条件等步骤





Williams HP. *Model Building in Mathematical Programming*. Wiley, 2013.
Chen DS, Batson RG, Dang Y. *Applied Integer Programming: Modeling and Solution*. Wiley, 2011.

食谱问题

- 食谱问题（**diet problem**）
  - 在市场上可以买到 n 种不同的食品，第 j 种食品的单位售价为 c_j
  - 人体正常生命活动过程需要 m 种基本营养成分，一个人每天至少需要摄入第 i 种营养成分 b_i 个单位
  - 每单位第 j 种食物包含第 i 种营养成分 a_{ij} 个单位
  - 在满足人体营养需求的前提下，如何寻找最经济的配食方案

George Joseph Stigler
（1911－1991）
美国经济学家
1982年诺贝尔经济学奖得主

食谱问题

浙江大学 ZheJiang University 运筹与决策

- 决策变量：食谱中第 j 种食物的数量为 x_j 个单位，$j=1,\cdots,n$
- 目标函数：所有食物费用之和 $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$
- 约束条件：
  - 满足人体营养需求
    - x_j 个单位第 j 种食物中含第 i 种营养成分 $a_{ij}x_j$ 个单位
    - 人体摄入的第 i 种营养成分的总量为 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$
    - 每种营养成分应满足人体需要 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i, i=1,\cdots,m$
  - 摄入食物量非负 $x_j \ge 0,\ j=1,\cdots,n$

食谱问题

$$\min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$s.t. \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i, \quad i = 1, \cdots, m$$

$$x_j \ge 0, \; j = 1, \cdots, n$$

$$\min \; \mathbf{cx}$$

$$s.t. \; \mathbf{Ax} \ge \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \ge \mathbf{0}$$

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$$

$$\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$$

$$\mathbf{c} = (c_1, \cdots, c_n)$$

$$\mathbf{b} = (b_1, \cdots, b_m)^{\mathrm{T}}$$

MATHEMATICA

```
In[55]:= c = {4, 2, 3};
         b = {4, 11};
         A = (2 0 2
              4 3 1);
         LinearProgramming[c, A, b]

Out[58]= {2, 1, 0}
```

LINGO

```
MODEL:
sets:
    nut/1..2/:b;
    food/1..3/:c,x;
    cost(nut,food):a;
endsets
data:
  c=4 2 3;
  b=4 11;
  a=2 0 2 4 3 1;
enddata
min=@sum(food(j):c(j)*x(j));
@for(nut(i): @sum(food(j):a(i,j)*x(j))>b(i););
END
```

```
Global optimal solution found.
Objective value:                10.00000
Infeasibilities:                0.000000
Total solver iterations:               2

Variable           Value
  X( 1)         2.000000
  X( 2)         1.000000
  X( 3)         0.000000
```

浙江大学
ZheJiang University
运筹与决策

食谱问题

营养物质	PDA
热量	3000卡
蛋白质	70克
钙	0.8克
铁	12毫克
维生素A	5000IU
维生素B1	1.8毫克
维生素B2	2.7毫克
烟碱酸	18毫克
维生素C	75毫克

1943年美国研究院发布的从事中等强度活动，体重为154磅的成年男性9种营养成分的每天推荐摄入量（PDA）

TABLE A. NUTRITIVE VALUES OF COMMON FOODS PER DOLLAR OF EXPENDITURE, AUGUST 15, 1939

Commodity	Unit	Price Aug. 15, 1939 (cents)	Edible Weight per $1.00 (grams)	Calories (1,000)	Protein (grams)	Calcium (grams)	Iron (mg.)	Vitamin A (1,000 I.U.)	Thiamine (mg.)	Ribo-flavin (mg.)	Niacin (mg.)	Ascorbic Acid (mg.)
**1. Wheat Flour (Enriched)	10 lb.	36.0	12,600	44.7	1,411	2.0	365		55.4	33.3	441	
2. Macaroni	1 lb.	14.1	3,217	11.6	418	.7	54		3.2	1.9	68	
3. Wheat Cereal (Enriched)	28 oz.	24.2	3,280	11.8	377	14.4	175		14.4	8.8	114	
4. Corn Flakes	8 oz.	7.1	3,194	11.4	252	.1	56		13.5	2.3	68	
5. Corn Meal	1 lb.	4.6	9,861	36.0	897	1.7	99	30.9	17.4	7.9	106	
6. Hominy Grits	24 oz.	8.5	8,005	28.6	680	.8	80		10.6	1.6	110	
7. Rice	1 lb.	7.5	6,048	21.2	460	.6	41		2.0	4.8	60	
71. Tea	¼ lb.	17.4	652	—	—	—	—			2.3	42	
72. Cocoa	8 oz.	8.6	2,637	8.7	237	3.0	72		2.0	11.9	40	
73. Chocolate	8 oz.	16.2	1,400	8.0	77	1.3	39		.9	3.4	14	
74. Sugar	10 lb.	51.7	8,773	34.9	—	—	—					
75. Corn Sirup	24 oz.	13.7	4,966	14.7	—	.5	74				5	
76. Molasses	18 oz.	13.6	3,752	9.0	—	10.3	244		1.9	7.5	146	
77. Strawberry Preserves	1 lb.	20.5	2,213	6.4	11	.4	7	.2	.2	.4	3	

77种常见食物所含各种营养成分数量（以价值1美元计）

G. J. Stigler, The Cost of Subsistence, *Journal of Farm Economics*, 27, 303-314, 1945

食谱问题

食品种类（选自77种常用食品）	Stigler所得近似解		最优解	
	年摄入量	费用（$）	年摄入量	费用（$）
小麦粉（Wheat Flour）	370磅	13.33	299磅	10.78
炼乳（Evaporated Milk）	57加仑	3.84	—	—
卷心菜（Cabbage）	111磅	4.11	111磅	4.10
菠菜（Spinach）	23磅	1.85	23磅	1.83
干菜豆（Dried Navy Beans）	285磅	16.80	378磅	22.29
牛肝（Beef Liver）	—	—	2.57磅	0.69
年度总费用（以1939年度价格计算）		39.93		39.69

运输问题

- 运输问题（**Transportation Problem**）
  - 某货物有 m 个产地，产地 i 的产量为 $a_i, i=1,\cdots,m$，n 个销地，销地 j 的销量为 $b_j, j=1,\cdots,n$
  - 由产地 i 到销地 j 的运输单价为 c_{ij} , $i=1,\cdots,m, j=1,\cdots,n$
  - 产销平衡，$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$
  - 如何调运货物从产地到销地，可使总运输费用最小

1925年全球主要港口到港离港货物量(百万吨)

	到港	离岗	净值
纽约（**New York**）	**23.5**	**32.7**	**-9.2**
旧金山（**San Francisco**）	**7.2**	**9.7**	**-2.5**
圣托马斯（**St. Thomas**）	**10.3**	**11.5**	**-1.2**
布宜诺斯艾利斯(**Buenos Aires**）	**7.0**	**9.6**	**-2.6**
安托法加斯塔（**Antofagasta**）	**1.4**	**4.6**	**-3.2**
鹿特丹（**Rotterdam**）	**126.4**	**130.5**	**-4.1**
里斯本（**Lisbon**）	**37.5**	**17.0**	**20.5**
雅典（**Athens**）	**28.3**	**14.4**	**13.9**
敖德萨（**Odessa**）	**0.5**	**4.7**	**-4.2**
拉各斯（**Lagos**）	**2.0**	**2.4**	**-0.4**
德班（**Durban**）	**2.1**	**4.3**	**-2.2**
孟买（**Bombay**）	**5.0**	**8.9**	**-3.9**
新加坡（**Singapore**）	**3.6**	**6.8**	**-3.2**
横滨（**Yokohama**）	**9.2**	**3.0**	**6.2**
悉尼（**Sydney**）	**2.8**	**6.7**	**-3.9**

Koopmans TC. Optimum utilization of the transportation system. Econometrica, 17(S), 136-146, 1949.

运输问题

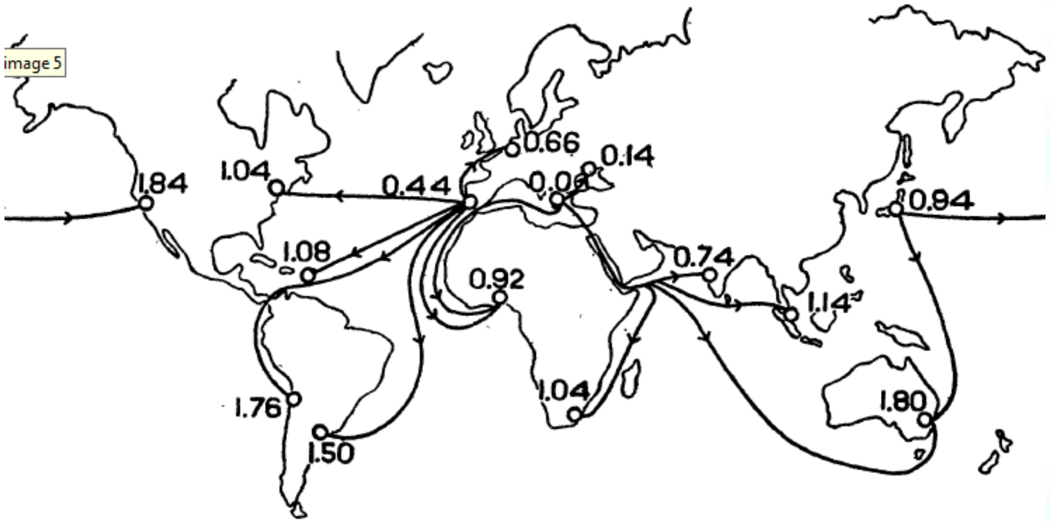
- 决策变量
  - x_{ij}：产地 i 调运到销地 j 的货物数量

$$\min \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$s.t. \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ i=1,\ \cdots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ j=1,\cdots, n$$

$$x_{ij} \ge 0$$



以净输入港口为产地，净输出港口为销地的运输问题的最优解，给出了最优空船调运路线

下料问题

- 下料问题（**Cutting-Stock Problem**）
  - 给定生产一批产品所需的某种材料的大小与数量列表，如何从相同规格的原料中下料，使所用的原料最少
- 装箱问题（**bin-packing problem**）
  - 给定一系列大小已知的物品和若干个容量相同的箱子，如何将物品放入箱子中，使所用箱子数尽可能少

现有**15**米长的钢管若干，生产某产品需**4**米，**5**米，**7**米长的钢管各**100**，**150**，**200**根，如何截取方能使材料最省

如何选择决策变量

下料问题

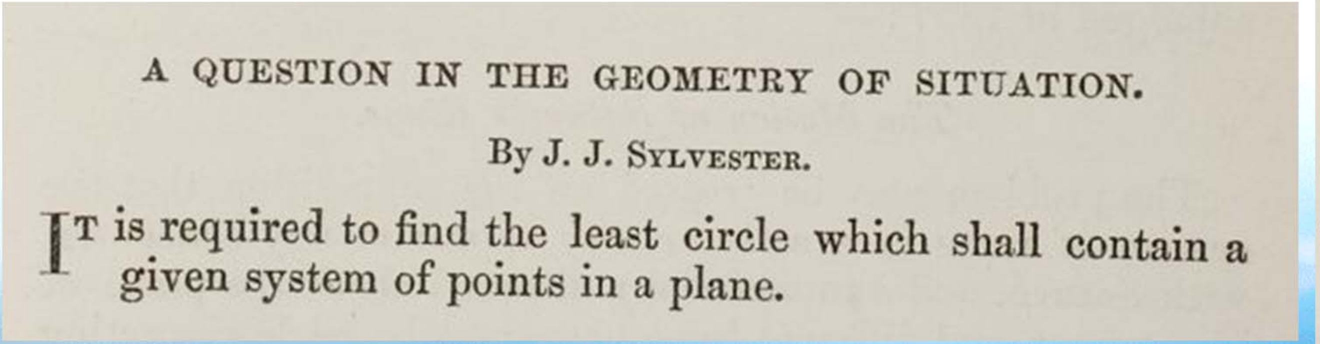
- 列举所有可能的截取方式
- 决策变量
  - x_i：按第 i 种方式截取的原料的数量，$i=1,\cdots,7$
  - x_i 必须取正整数值

方式	1	2	3	4	5	6	7
7米	2	1	1	0	0	0	0
5米	0	1	0	3	2	1	0
4米	0	0	2	0	1	2	3
余料	1	3	0	0	1	2	3

$$
\begin{aligned}
\min\quad & x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7 \\
s.t.\quad & 2x_1+x_2+x_3 \geq 200 \\
& x_2+3x_4+2x_5+x_6 \geq 150 \\
& 2x_3+x_5+2x_6+3x_7 \geq 100 \\
& x_i \geq 0 \text{ 且 } x_i \text{ 为整数，} i=1,2,\cdots,7.
\end{aligned}
$$

选址问题

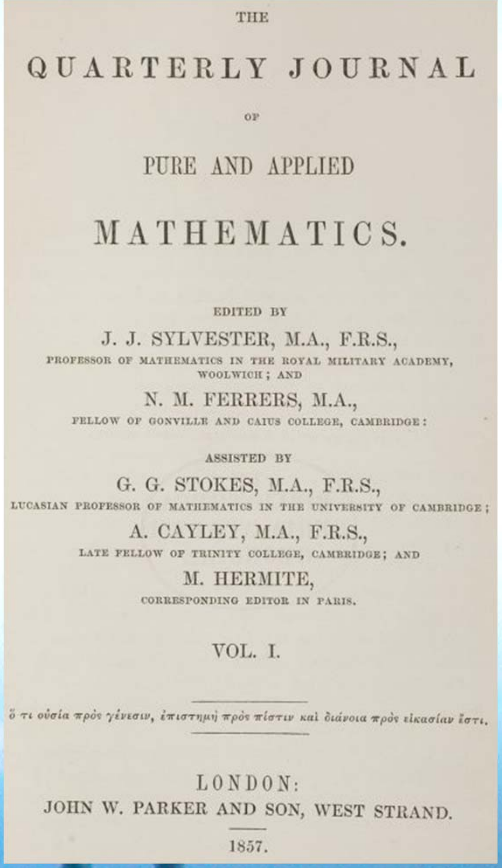
- 选址问题
  - 设在平面上有 n 个点，第 j 个点的坐标为 (x_j, y_j)
  - 求一个面积最小的圆，使这 n 个点均为该圆内的点



A QUESTION IN THE GEOMETRY OF SITUATION.

By J. J. Sylvester.

It is required to find the least circle which shall contain a given system of points in a plane.



THE

QUARTERLY JOURNAL

OF

PURE AND APPLIED

MATHEMATICS.

EDITED BY

J. J. SYLVESTER, M.A., F.R.S.,
PROFESSOR OF MATHEMATICS IN THE ROYAL MILITARY ACADEMY, WOOLWICH; AND

N. M. FERRERS, M.A.,
FELLOW OF GONVILLE AND CAIUS COLLEGE, CAMBRIDGE:

ASSISTED BY

G. G. STOKES, M.A., F.R.S.,
LUCASIAN PROFESSOR OF MATHEMATICS IN THE UNIVERSITY OF CAMBRIDGE;

A. CAYLEY, M.A., F.R.S.,
LATE FELLOW OF TRINITY COLLEGE, CAMBRIDGE; AND

M. HERMITE,
CORRESPONDING EDITOR IN PARIS.

VOL. I.

ὅ τι οὐσία πρὸς γένεσιν, ἐπιστήμη πρὸς πίστιν καὶ διάνοια πρὸς εἰκασίαν ἐστι.

LONDON:
JOHN W. PARKER AND SON, WEST STRAND.
1857.

选址问题

- 选址问题
  - 决策变量：圆心 (x_0, y_0)，半径 r
  - 目标函数：r^2
  - 约束条件：每个点到圆心的距离不超过半径

$$\begin{aligned} &\min \quad r^2 \\ &s.t. \quad (x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 \le r^2, \quad i = 1, 2, \cdots, n \end{aligned}$$

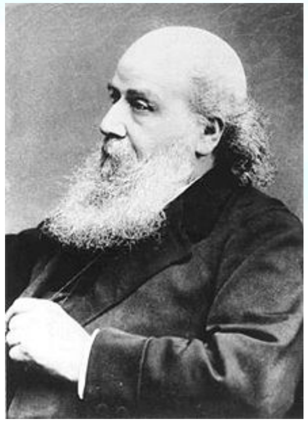
带二次约束的二次规划

- 定义新决策变量 $\lambda = r^2 - (x_0^2 + y_0^2)$ 替代 r

$$\begin{aligned} &\min \quad \lambda + x_0^2 + y_0^2 \\ &s.t. \quad \lambda + 2x_0 x_i + 2y_0 y_i \ge x_i^2 + y_i^2, \quad i = 1, 2, \cdots, n \end{aligned}$$

二次规划

$$x_i^2 - 2x_0x_i + x_0^2 + y_i^2 - 2y_0y_i + y_0^2 \le r^2 \Longrightarrow x_i^2 - 2x_0x_i + y_i^2 - 2y_0y_i \le r^2 - x_0^2 - y_0^2 = \lambda$$



James Joseph Sylvester (1814-1897)
英国数学家

数学规划

- 建立实际问题数学规划的原则与技巧
  - 选择合适的决策变量，数量适中，目标函数和约束条件表达清晰、形式简单
  - 约束条件完整反映问题要求，不遗漏，不冗余。确保数学规划的最优值与原问题的最优值一致
  - 善于转化和变形，一般应尽量减少非线性约束和整数取值限制，灵活处理绝对值、分段函数等复杂情况
  - 善于运用**0-1**变量建立决策变量之间的联系和描述逻辑关系
  - 结合计算求解检验、修正和改进已有规划