

# 第七章 级数

## §7.1 级数的敛散性及基本性质

### 一、级数收敛的定义

中国古代哲学家庄周所著的《庄子·天下篇》引用过一句话：“一尺之棰，日取其半，万世不竭”。其含义就是：一根长为一尺的木棒，每天截下一半，这样的过程可以无限地进行下去。每天截下的木棒长度分别为

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$$

将它们相加

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

便得到无穷多个数的“和”。从直观上可知，上面的“和”等于1.

但是无穷多个数的“和”不一定有确定的含义，例如

$$1 + (-1) + 1 + (-1) + \dots + 1 + (-1) + \dots$$

在上面的和式中，若写作

$$[(-1) + 1] + [(-1) + 1] + \dots + [(-1) + 1] + \dots$$

其“和”为0.若写作

$$1 + [(-1) + 1] + [(-1) + 1] + \dots + [(-1) + 1] + \dots$$

其“和”便等于1. 这样就得到两个不同的结果，自然就提出了下面的问题：如何定义无穷多个数相加后的“和”。

将无穷多个数  $\{a_n\}: a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  写作和式

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (7.1.1)$$

称之为无穷级数，记作  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ . 这仅仅是形式的记号，并不一定有明确的

含义，即不一定有确定的“和”。为此我们引进下面概念.

**定义 7.1.1** 给定数列  $\{a_n\}$ , 将其每一项依次用 “+” 号连接起来的表达式

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

称无穷级数. 由于其通项  $a_n$  都是常数, 也称之为常数项级数, 记作  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ .

在级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  中, 前  $n$  项的和:  $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ , 称为该级数的

部分和. 所得到的数列  $\{S_n\}$  称为部分和数列.

级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  的通项  $a_n$  与其部分和数列  $\{S_n\}$  之间有如下关系

$$a_n = \begin{cases} S_1 & (n=1) \\ S_n - S_{n-1} & (n \geq 2) \end{cases}. \quad (7.1.2)$$

**定义 7.1.2** 若级数(7.1.1)的部分和数列  $\{S_n\}$  收敛于  $S$  (即  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S$ ), 则

称级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  收敛, 此时称部分和数列  $\{S_n\}$  极限  $S$  为级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  的和. 记作

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n.$$

若级数(7.1.1)的部分和数列  $\{S_n\}$  发散, 则称级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  发散.

**定理 7.1.3 (级数收敛的必要条件)** 级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  收敛, 则:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ .

**证明:** 因为级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  收敛, 记其部分和为  $S_n$ , 和为  $S$ . 则

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S.$$

从而有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0.$$

**例7.1.4** 讨论等比级数(也称几何级数)  $a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots$  的敛散性. (其中:  $a \neq 0, q \neq 0$ ).

**解:** 设该几何级数的部分和为  $S_n$ .

(1) 当  $q = 1$  时,  $S_n = na$ , 级数发散.

(2) 当  $q = -1$  时,  $S_{2n} = 0, S_{2n-1} = a (n = 1, 2, \cdots)$ , 级数发散.

(3) 当  $|q| \neq 1$  时,  $S_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$ .

(i). 当  $|q| < 1$  时,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{a}{1-q}$ , 级数收敛, 且其和为  $\frac{a}{1-q}$ .

(ii). 当  $|q| > 1$  时, 级数发散.

总之, 对于几何级数  $\sum_{n=0}^{+\infty} aq^n (a \neq 0, q \neq 0)$  有

$$\sum_{n=0}^{+\infty} aq^n = \begin{cases} \frac{a}{1-q} & (|q| < 1) \\ \text{发散} & (|q| \geq 1) \end{cases}.$$

**例7.1.5** 讨论级数  $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} + \cdots$  的敛散性.

**解:** 当  $k \in N^+$  时, 有

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right]$$

则

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left[ \frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right]. \end{aligned}$$

因此

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{4}.$$

所以, 级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$  收敛, 且该级数的和为  $\frac{1}{4}$ .

由于级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  的收敛或发散(简称为**敛散性**)是通过级数的部分和数列  $\{S_n\}$  的敛散性来判断的, 根据数列极限的柯西收敛准则, 不难得到级数收敛的柯西收敛准则.

**定理 7.1.6 (级数收敛的 Cauchy 准则)** 级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  收敛的充要条件是对

$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$ , 当  $n > N$  时, 对  $\forall p \in N^+$  均有

$$|S_{n+p} - S_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon. \quad (7.1.3)$$

**例 7.1.7** 利用 Cauchy 收敛准则证明级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$  收敛.

**证明:** 当  $k \geq 2$ , 且  $k \in N^+$  时, 有

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

对任意正整数  $p$ , 有

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k^2} < \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{(k-1)k} = \sum_{k=n+1}^{n+p} \left( \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}.$$

所以, 对  $\forall \varepsilon > 0, \exists N = [\frac{1}{\varepsilon}]$ , 当  $n > N$  时, 对  $\forall p \in N^+$  均有

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k^2} < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

根据 Cauchy 收敛准则, 级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$  收敛.

**例7.1.8** 利用 Cauchy 收敛准则证明级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$  发散.

**证明:** 取  $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$ , 对  $\forall N \in N^+$ ,  $\exists n_0 \in N^+$ , 使得  $n_0 > N$ , 取  $p_0 = n_0$ , 有

$$\begin{aligned} \sum_{k=n_0+1}^{n_0+p_0} \frac{1}{k} &= \frac{1}{n_0+1} + \frac{1}{n_0+2} + \cdots + \frac{1}{n_0+n_0} \\ &> \frac{1}{n_0+n_0} + \cdots + \frac{1}{n_0+n_0} = \frac{1}{2} = \varepsilon_0. \end{aligned}$$

根据 Cauchy 收敛准则, 级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$  发散.

级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$  称为调和级数, 由例 (7.1.8) 可知,

调和级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$  发散.

## 二、收敛级数的基本性质

**定理 7.1.9** 若级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n, \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  均收敛, 则: 对任意  $k_1, k_2 \in R$   $\sum_{n=1}^{+\infty} (k_1 a_n + k_2 b_n)$  也收敛, 且

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (k_1 a_n + k_2 b_n) = k_1 \sum_{n=1}^{+\infty} a_n + k_2 \sum_{n=1}^{+\infty} b_n.$$

由 Cauchy 收敛准则可知, 级数收敛与否取决于: 对任意给定的正数  $\varepsilon$ , 是否存在正整数  $N$ , 当  $n > N$  时, 对任意正整数  $p$ , 使得式 (7.1.3) 恒成立. 由此可知, 级数是否收敛与级数的前面有限项无关.

**定理 7.1.10** 去掉、添加或改变级数的有限项, 不改变级数的敛散性.

由此定理可得, 若级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  收敛, 则级数

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p} + \cdots \quad (7.1.4)$$

也收敛, 且其和  $r_n = S - S_n$ . 其中  $S$  为收敛级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  的和.

式 (7.1.4) 称为级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  的余项(误差).

**定理 7.1.11** 收敛级数任意添加括号后所得级数仍然收敛, 且其和不变.

事实上, 级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  添加括号所得到的新级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ , 其部分和数列  $\{T_n\}$  为原级数部分和数列  $\{S_n\}$  的子数列. 若级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  收敛, 则其部分和数列  $\{S_n\}$  收敛. 又收敛数列的任何子数列都收敛,  $\{T_n\}$  为收敛数列  $\{S_n\}$  的子数列,  $\{T_n\}$  当然收敛.

**注意:** 发散级数添括号后所得到的级数可能收敛. 例如

$$1-1+1-1+\cdots+1-1+\cdots$$

很显然, 该级数为发散的; 但添加括号后

$$(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)+\cdots$$

所得的级数是收敛的.

## §7.2 正项级数

### 一、正项级数的一般性判别法

每一项均为正数的级数称为**正项级数**. 对于正项级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ , 其部分和数列  $\{S_n\}$  为

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

显然,  $\{S_n\}$  单调递增; 根据数列的单调收敛准则有

**定理 7.2.1** 正项级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  收敛的充要条件为部分和数列  $\{S_n\}$  有界.

即, 存在正数  $M > 0$ , 对  $\forall n \in N^+$  都有

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k \leq M.$$

级数收敛是根据其部分和数列是否存在极限来判断的, 但要精确计算出级数的部分和  $S_n$  并非易事; 而判断  $S_n$  是否有界要简单很多.

由定理 (7.2.1.) 容易得到如下关于正项级数的敛散性判别法.

### 二、正项级数的比较判别法

**定理 7.2.2 (比较判别法)** 对正项级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 、 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ , 如果存在自然数  $N$ ,

当  $n > N$  时, 有  $a_n \leq b_n$ . 则

(1) 若级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  收敛, 则级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  也收敛;

(2) 若级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  发散, 则级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  必发散.

**证明:** 由于改变级数的有限项, 不改变级数的敛散性, 不妨假设对任意

自然数  $n$  都有  $a_n \leq b_n$ . 记级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 、 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  的部分和分别为  $S_n$ 、 $T_n$ , 则:

$$S_n \leq T_n.$$

(1) 若级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  收敛, 记其和为  $T$ , 则:  $T_n \leq T$ . 从而有,  $S_n \leq T_n \leq T$ .

由定理(7.2.1) 级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  收敛.

(2) 当级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  发散时, 若级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  收敛, 根据 (1) 的结论,  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$

收敛. 这与条件  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  发散矛盾.

为了便于实际应用, 比较判别法常常以极限形式表示.

**定理 7.2.3 (极限判别法)** 对于正项级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 、 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ , 若  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$ , 则

(1) 当  $0 < l < +\infty$  时, 级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ ,  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  有相同的敛散性;

(2) 当  $l = 0$  时, 若  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  收敛, 则  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  收敛;

(3) 当  $l = +\infty$  时, 若  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  收敛, 则  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  收敛.

下面给出 (1) 的证明, 其它情况由读者完成.

**证明:** 若  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$ , 且  $0 < l < +\infty$ , 对  $\varepsilon = \frac{l}{2}$ ,  $\exists N > 0$ , 当  $n > N$  时, 有

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - l \right| < \varepsilon = \frac{l}{2}.$$

即

$$\frac{1}{2}l < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3}{2}l.$$

从而

$$\frac{1}{2}lb_n < a_n < \frac{3}{2}lb_n.$$



如果  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  收敛, 则:  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{l}{2} b_n$  收敛, 从而  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  也收敛.

如果  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  收敛, 则:  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{2} l b_n$  收敛, 从而  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  也收敛.

通常称级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$  为  $p$ -级数. 下面讨论  $p$ -级数的敛散性.

**例7.2.4** 判断  $p$ -级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$  的敛散性.

**解:** 根据例(7.1.8), 当  $p \leq 1$  时,  $\frac{1}{n^p} \geq \frac{1}{n}$ ; 而调和级数发散, 因此, 当

$p \leq 1$  时, 级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$  发散.

当  $p > 1$  时, 对函数  $f(x) = \frac{1}{x^{p-1}}$  ( $x \geq 1$ ) 在区间  $[n, n+1]$  上应用拉格朗日中值定理,  $\exists \theta_n \in (0, 1)$  使得

$$f(n+1) - f(n) = \frac{1}{(n+1)^{p-1}} - \frac{1}{n^{p-1}} = -\frac{p-1}{(n+\theta)^p}.$$

则

$$\frac{1}{p-1} \left( \frac{1}{n^{p-1}} - \frac{1}{(n+1)^{p-1}} \right) = \frac{1}{(n+\theta_n)^p} > \frac{1}{(n+1)^p}.$$

又正项级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{n^{p-1}} - \frac{1}{(n+1)^{p-1}} \right)$  收敛, 根据比较判别法, 级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$  收敛.

总之, 当  $p \leq 1$  时, 级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$  发散; 当  $p > 1$  时, 级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$  收敛.

**例7.2.5** 判断级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} 3^n \sin \frac{2n+1}{5^n}$  的敛散性.

**解:** 因为  $0 < 3^n \sin \frac{\pi}{5^n} < \pi \left( \frac{3}{5} \right)^n$ , 而级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \pi \left( \frac{3}{5} \right)^n$  收敛, 根据比较判别法,

级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} 3^n \sin \frac{2n+1}{5^n}$  也收敛.

**例7.2.6** 判断级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{n} - \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \right)$  的敛散性.

**解：**因为当  $x \rightarrow 0$  时， $x - \ln(1+x) = x - [x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)] = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ .

所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

从而

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left( \frac{1}{n} - \ln(1 + \frac{1}{n}) \right) = \frac{1}{2}.$$

而级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$  收敛，因此，级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{n} - \ln(1 + \frac{1}{n}) \right)$  也收敛.

**例7.2.7** 设  $a_n = \int_0^{\frac{1}{n}} \sqrt{\frac{x}{1+x^2}} dx$  ( $n=1, 2, \dots$ )，试判断级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  的敛散性.

**解：**本题要计算出  $a_n$  的具体数值有难度，而题目要求仅仅是判断级数

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  的敛散性，通过适当的“缩放”可完成.

由于

$$a_n = \int_0^{\frac{1}{n}} \sqrt{\frac{x}{1+x^2}} dx < \int_0^{\frac{1}{n}} \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{n\sqrt{n}}.$$

而级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$  收敛，因此，原级数也收敛.

**例7.2.8** 设  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  和  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  都是正项级数，且  $\exists N > 0$ ，当  $n > N$  时，有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

成立. 则

(1) 若级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  收敛，则级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  也收敛；

(2) 若级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  发散，则级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  也发散.

**证明：**不失一般性可以认为对任意正整数上述不等式均成立，则

$$\frac{a_2}{a_1} \leq \frac{b_2}{b_1}, \frac{a_3}{a_2} \leq \frac{b_3}{b_2}, \dots, \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}, \dots.$$

各式两边相乘可得

$$\frac{a_n}{a_1} \leq \frac{b_n}{b_1}.$$

从而有

$$0 < a_n \leq \frac{a_1}{b_1} b_n.$$

由比较判别法可知, 结论成立.

### 三、正项级数的比值与根值判别法

**定理 7.2.9【比值判别法、D'Alembert<sup>30</sup>(达朗贝尔)判别法】**

设  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  是正项级数, 且  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l (0 \leq l \leq +\infty)$  则

(1) 当  $0 \leq l < 1$  时, 级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  收敛;

(2) 当  $l > 1$  或  $l = +\infty$  时, 级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  发散.

**证明:** (1) 当  $l < 1$  时, 取  $\varepsilon_0 > 0$ , 且  $\varepsilon_0 < 1 - l$ , 则  $\exists N > 0$ , 当  $n > N$  时, 有

$$l - \varepsilon_0 < \frac{a_{n+1}}{a_n} < l + \varepsilon_0.$$

记  $l + \varepsilon_0 = r$ , 则:  $0 < r < 1$ . 由上式可得, 当  $n > N$  时, 有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdots \frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} < r^{n-N}.$$

即

---

<sup>30</sup> **D'Alembert** (达朗贝尔, 1717-1783), 法国数学家、物理学家。达朗贝尔认为求解物理(力学, 包括天体力学)问题是数学的目标。在动力学基础的建立、流体力学研究和天体力学的研究中(月球运动理论, 关于地球形状和自转理论)都作出了很大贡献, 也是数学分析(极限、级数和微分方程等)的开拓者。

$$a_{n+1} < a_{N+1} \cdot r^{n-N}.$$

而级数  $\sum_{n=N+1}^{+\infty} r^{n-N}$  收敛, 根据比较判别法, 级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  收敛.

(2) 当  $l > 1$  (或  $+\infty$ ) 时, 取  $\varepsilon_0 = \frac{l-1}{2}$ , 则  $\exists N > 0$ , 当  $n > N$  时, 有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > l - \varepsilon_0 = \frac{l+1}{2} > 1.$$

因此, 当  $n > N$  时,  $a_{n+1} > a_n$ ; 即级数  $\{a_n\} (n > N)$  单调递增. 从而,

级数的通项  $\{a_n\}$  的极限不等于 0. 所以, 级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  发散.

**例7.2.10** 讨论级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)q^n$  的敛散性. ( $q > 0$ )

**解:** 因为

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+2)q^{n+1}}{(n+1)q^n} = q.$$

所以

(1) 当  $0 < q < 1$  时, 级数收敛; (2) 当  $q > 1$  时, 级数发散;

(3) 当  $q = 1$  时,  $a_n = n+1$ , 级数显然发散.

**例7.2.11** 判断级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$  的敛散性.

**解:** 因为

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^{n+1} \cdot (n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{n^n}{3^n \cdot n!} = 3 \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = 3 \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{3}{e} > 1.$$

所以, 级数发散.

**定理 7.2.12 (Cauchy 根值判别法)** 设  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  是正项级数, 且

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho. (0 \leq \rho \leq +\infty)$$

则

(1) 当  $\rho < 1$  时, 级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  收敛;

(2) 当  $\rho > 1$  或  $\rho = +\infty$  时, 级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  发散.

本定理的证明, 可参考定理 (7.2.9) 的证明, 由读者自行完成.

**例7.2.13** 判断级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)^2}{3^n}$  的敛散性.

**解:** 因为  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{(n+1)^2}}{3} = \frac{1}{3} < 1$ , 因此, 级数收敛.

当然, 本题也可以用比值判别法求解.

**例7.2.14** 判断级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3+(-1)^n \cdot 2}{2^n}$  的敛散性.

**解:** 由于

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3+(-1)^{n+1} \cdot 2}{3+(-1)^n \cdot 2} = \begin{cases} \frac{5}{2} & (n \text{ 为奇数}) \\ \frac{1}{10} & (n \text{ 为偶数}) \end{cases}.$$

因此, 用比值判别法无法判断其敛散性; 可用根值或其它判别法判断.

**【方法一】:** 由于  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{3+(-1)^n \cdot 2} = \frac{1}{2} < 1$ , 因此, 级数收敛.

**【方法二】:** 由于  $0 < a_n < \frac{5}{2^n}$ , 而级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5}{2^n}$  收敛, 所以原级数也收敛.

**【注意】:** 在比值判别法与根值判别法中, 都没有给出当  $l=1$  或  $\rho=1$  时,

级数的敛散性; 对于  $p$ -级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$  有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^p}{(n+1)^p} = 1.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^p} = 1.$$

而当  $p > 1$  时, 级数收敛; 当  $p \leq 1$  时, 级数发散. 因此, 对于  $l=1$  或  $\rho=1$  的情况, 比值判别法或根值判别法都无法判断级数的敛散性; 即级数可能收敛也可能发散. 需要由其它判别方法来判断级数的敛散性.

#### 四、正项级数的积分判别法

对于形如  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$  ( $p > 0$ ) 的级数, 应用上面介绍的级数敛散性判

别法来判断其敛散都有难度, 为此引进积分判别法.

**定理 7.2.15 (Cauchy 积分判别法)** 设函数  $f(x)$  在  $[1, +\infty)$  上恒正且单

调递减, 则级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$  与广义积分  $\int_1^{+\infty} f(x)dx$  有相同的敛散性.

**证明:** 由于  $f(x)$  单调递减, 则当  $x \in [k, k+1]$  ( $k \in N^+$ ) 时, 有

$$f(k+1) \leq f(x) \leq f(k).$$

从而

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq f(k).$$

因此

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k+1) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(x)dx = \int_1^n f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k).$$

记级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$  的部分和为  $S_n$ , 则

$$S_n - f(1) \leq \int_1^n f(x)dx \leq S_{n-1}.$$

(1) 当广义积分  $\int_1^{+\infty} f(x)dx$  收敛时, 有

$$S_n \leq f(1) + \int_1^n f(x)dx \leq f(1) + \int_1^{+\infty} f(x)dx.$$

级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$  的部分和有界, 所以, 级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$  收敛.

(2) 当级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$  收敛时, 记其和为  $S$ , 则

$$\int_1^n f(x)dx \leq S_{n-1} \leq S.$$

根据广义积分的敛散性判别, 广义积分  $\int_1^{+\infty} f(x)dx$  也收敛.

**例7.2.16** 判断级数  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$  的敛散性.

**解:** 由于广义积分  $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p} \stackrel{\ln x=u}{=} \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{du}{u^p}$ , 当  $p > 1$  时收敛; 当  $p \leq 1$

时发散. 由积分判别法当  $p > 1$  时, 级数  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$  收敛; 当  $p \leq 1$  时,

级数  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$  发散.

根据积分判别法, 很容易得到: 当  $p > 1$  时,  $p$ -级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$  收敛. 由于

广义积分

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \frac{1}{p-1} & (p > 1) \\ +\infty & (p \leq 1) \end{cases}.$$

因此, 当  $p \leq 1$  时, 级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$  发散; 当  $p > 1$  时, 级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$  收敛.

## §7.3 一般项级数的敛散性判别

前面讨论了正项级数的敛散性判别, 下面讨论一般项级数

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  ( $a_n \in R$ ) 的敛散性问题, 我们先讨论一种特殊的一般项级数——“交错级数”的敛散性判别.

### 一、交错级数

在讨论一般项级数之前, 我们先讨论一类特殊的级数.

若  $a_n \geq 0$  ( $n=1, 2, \dots$ ), 则称  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n$  为交错级数(或交叉级数). 具体为

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{n-1} a_n + \dots$$

**定理 7.3.1 (Leibniz 判别法)** 若交错级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n$  满足

(1) 数列  $\{a_n\}$  单调递减, 即  $a_{n+1} \leq a_n$ . ( $n=1, 2, \dots$ )

(2)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ .

则交错级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n$  收敛, 且其和  $S \leq a_1$ .

**证明:** 由于  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ , 则对  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists N > 0$ , 当  $n > N$  时, 有

$$0 \leq a_n < \varepsilon.$$

又数列  $\{a_n\}$  单调递减, 则

(1) 当  $p$  为偶数时,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^p (-1)^{n+k-1} a_{n+k} \right| &= (a_{n+1} - a_{n+2}) + (a_{n+3} - a_{n+4}) + \dots + (a_{n+p-1} - a_{n+p}) \\ &= a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - \dots - (a_{n+p-2} - a_{n+p-1}) - a_{n+p} \leq a_{n+1}. \end{aligned}$$



(2) 当  $p$  为奇数时,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^p (-1)^{n+k-1} a_{n+k} \right| &= (a_{n+1} - a_{n+2}) + (a_{n+3} - a_{n+4}) + \cdots + (a_{n+p-2} - a_{n+p-1}) + a_{n+p} \\ &= a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - \cdots - (a_{n+p-1} - a_{n+p}) \leq a_{n+1}. \end{aligned}$$

因此, 对  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists N > 0$ , 当  $n > N$  时, 有

$$\left| \sum_{k=1}^p (-1)^{n+k-1} a_{n+k} \right| < a_{n+1} < \varepsilon.$$

根据 Cauchy 收敛准则, 级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n$  收敛.

根据上面的证明过程, 同样有  $S_n \leq a_1$ , 因此,

$$S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n \leq a_1.$$

**例7.3.2** 判断级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$  的敛散性.

**解:** 记  $a_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ , 则:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ . 且

$$\begin{aligned} a_n - a_{n+1} &= \frac{\sqrt{n}}{n+1} - \frac{\sqrt{n+1}}{(n+1)+1} = \frac{(n+2)\sqrt{n} - (n+1)^{\frac{3}{2}}}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n^2 + n - 1}{(n+1)(n+2)[(n+2)\sqrt{n} + (n+1)^{\frac{3}{2}}]} > 0. \end{aligned}$$

因此, 数列  $\{a_n\}$  单调递减. 由莱布尼茨判别法, 级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$  收敛.

数列  $\{a_n\}$  的单调性, 也可通过函数  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$  单调性判别. 由于

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \leq 0 \quad (x \geq 1).$$

因此, 函数  $f(x)$  单调递减, 从而数列  $\{a_n\}$  也单调递减.

**例7.3.3** 判断级数  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$  的敛散性.

**解:** 由于  $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} = \frac{(-1)^n [\sqrt{n} - (-1)^n]}{n-1} = (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n-1} - \frac{1}{n-1}$ , 根据例 (7.3.2)

可知, 级数  $\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n-1}$  收敛, 而调和级数  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n-1}$  发散.

所以, 级数  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$  发散.

**例7.3.4** 判断级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$  的敛散性.

**解:** 由于  $\sin(n\pi - \alpha) = (-1)^{n-1} \sin \alpha$ , 则

$$\sin(\pi\sqrt{n^2+1}) = (-1)^{n-1} \sin(\pi\sqrt{n^2+1} - \pi n) = (-1)^n \sin \pi(\sqrt{n^2+1} - n).$$

记  $a_n = \sin \pi(\sqrt{n^2+1} - n)$ , 则

$$0 < a_n \leq \pi(\sqrt{n^2+1} - n) = \frac{\pi}{\sqrt{n^2+1} + n}.$$

因此

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0.$$

又数列  $a_n = \sin \frac{\pi}{\sqrt{n^2+1} + n}$  单调递减, 根据莱布尼茨判别法, 级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2+1}) \text{ 收敛}.$$

## 二、级数的条件收敛与绝对收敛

下面讨论一般项级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  的收敛情况, 其中  $a_n$  为任意实数.

**定义 7.3.5** 若级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$  收敛, 则称级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  绝对收敛; 若级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$

收敛, 而  $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$  发散, 则称级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  条件收敛.

根据上面定义容易得到, 级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2}$  是绝对收敛的; 级数

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$  是条件收敛的.

级数绝对收敛与级数收敛之间有如下关系.

**定理 7.3.6** 如果级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  绝对收敛, 则级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  必收敛.

**证明:** 如果级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  绝对收敛, 由 Cauchy 收敛准则, 对  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists N > 0$ ,

当  $n > N$  时, 对  $\forall p \in \mathbb{N}^+$ , 有

$$|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+p}| < \varepsilon.$$

因此

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+p}| < \varepsilon.$$

根据 Cauchy 收敛准则, 级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  收敛.

**例 7.3.7** 判断级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-1)^n}{n(n+2)}$  的敛散性.

**解:** 由于  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|(x-1)^{n+1}|}{(n+1)(n+3)} \cdot \frac{n(n+2)}{|(x-1)^n|} = |x-1|$ , 因此

(1) 当  $|x-1| < 1$ , 即  $0 < x < 2$  时, 级数绝对收敛;

(2) 当  $|x-1| > 1$ , 即  $x < 0$  或  $x > 2$  时, 级数发散;

(3) 当  $x = 0$  或  $x = 1$  时,  $|a_n| = \frac{1}{n(n+2)}$ , 故, 级数绝对收敛.

所以, 当  $0 \leq x \leq 2$  时, 级数绝对收敛; 当  $x < 0$  或  $x > 2$  时, 级数发散.

**例7.3.8** 判断级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{3^n} (1 + \frac{1}{n})^{n^2}$  的敛散性.

**解:** 由于

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = \frac{e}{3} < 1,$$

则级数绝对收敛; 从而, 级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{3^n} (1 + \frac{1}{n})^{n^2}$  收敛.

### 三、Abel<sup>31</sup>(阿贝尔)判别法与狄利克雷判别法

下面介绍两个判别一般项级数收敛的方法, 先引进一个公式.

**引理 7.3.9 (Abel 变换)** 设级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 、 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  的部分和分别为  $A_n$ 、 $B_n$ , 则

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = a_n B_n + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k.$$

**证明:** 记  $B_0 = 0$ , 则

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k b_k &= \sum_{k=1}^n a_k (B_k - B_{k-1}) = \sum_{k=1}^n a_k B_k - \sum_{k=2}^n a_k B_{k-1} \\ &= a_n B_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k B_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1} B_k \\ &= a_n B_n + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k. \end{aligned}$$

---

<sup>31</sup> **Abel** (阿贝尔, 1802-1829), 挪威数学家。阿贝尔很早便显示了数学方面的才华。16岁遇到了霍姆伯 (Holmboe) 介绍他阅读牛顿、欧拉、拉格朗日、高斯的著作, 他很快被推进到当时数学研究的前沿阵地。他在笔记中写道: “要想在数学上取得进展, 就应该阅读大师的而不是他们的门徒的著作”。阿贝尔积分、阿贝尔函数、阿贝尔积分方程、阿贝尔群、阿贝尔级数、阿贝尔部分和公式、阿贝尔基本定理、阿贝尔极限定理、阿贝尔可和性……很少几个数学家能使自己的名字同近世数学中这么多的概念和定理联系在一起。然而这位卓越的数学家却是一个命途多舛的早夭者, 只活了短短的 27 年。尤其可悲的是, 在他生前, 社会并没有给他的才能和成果以公正的承认。

**推论 7.3.10 (Abel 引理)** 若数列  $\{a_n\}$  与级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  的部分和  $\{B_n\}$  满足

(1) 数列  $\{a_n\}$  单调且存在  $M > 0$ , 对  $\forall n \in N$  均有  $|a_n| \leq A$ ;

(2) 存在  $\varepsilon > 0$ , 对  $\forall n \in N$  均有  $|B_n| \leq \varepsilon$ .

则: 对  $\forall n \in N$  有,  $\left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right| \leq 3A\varepsilon$ .

**证明:** 根据 Abel 变换

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right| &= \left| a_n B_n + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k \right| \\ &\leq |a_n B_n| + \sum_{k=1}^{n-1} |a_k - a_{k+1}| \cdot |B_k| \\ &\leq A\varepsilon + \varepsilon \sum_{k=1}^{n-1} |a_k - a_{k+1}| \\ &= A\varepsilon + \varepsilon \left| \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) \right| \\ &= A\varepsilon + \varepsilon |a_1 - a_n| \leq 3A\varepsilon. \end{aligned}$$

下面讨论级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n + \cdots$$

的敛散性判别.

**定理 7.3.11 (Abel 判别法)** 设数列  $\{a_n\}$  单调有界, 级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  收敛, 则

级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$  收敛.

**证明:** 由于数列  $\{a_n\}$  单调有界, 则:  $\exists M > 0$ , 对  $\forall n \in N^+$  均有  $|a_n| \leq M$ .

又级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  收敛, 根据 Cauchy 收敛准则, 对  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists N > 0$ , 当  $n > N$

时, 对  $\forall p \in N^+$ , 有

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} b_k \right| < \frac{\varepsilon}{3M}.$$

根据 Abel 引理

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k \right| \leq 3M \cdot \frac{\varepsilon}{3M} = \varepsilon.$$

由 Cauchy 收敛准则, 级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$  收敛.

根据 Abel 判别法, 若级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  收敛, 则下面两个级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^p} \quad (p > 0), \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n+1}}$$

都收敛.

**定理 7.3.12 (Dirichlet 判别法)** 设数列  $\{a_n\}$  单调且  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ , 级数

$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  的部分和有界, 则级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$  收敛.

**证明:** 由于  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ , 则对  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists N > 0$ , 当  $n > N$  时, 有  $|a_n| < \varepsilon$ .

又级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  的部分和  $B_n$  有界, 即存在  $M > 0$ , 对  $\forall n \in \mathbb{N}$  均有  $|B_n| \leq M$ .

由 Abel 变换, 对  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists N > 0$ , 当  $n > N$  时, 对  $\forall p \in \mathbb{N}$ , 有

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k \right| &= \left| a_{n+p} B_{n+p} - a_{n+1} B_n + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (a_k - a_{k+1}) B_k \right| \\ &\leq 2M\varepsilon + M \left| \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (a_k - a_{k+1}) \right| \\ &= 2M\varepsilon + M |a_{n+1} - a_{n+p}| \leq 4M\varepsilon. \end{aligned}$$

因此, 级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$  收敛.

**例 7.3.13** 证明: 级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n}$  和  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n}$  对  $\forall x \in (0, 2\pi)$  均条件收敛.

**证明:** 记  $a_n = \frac{1}{n}$ ,  $b_n = \sin nx$ , 则:  $\{a_n\}$  单调递减, 且  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ .

又级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin nx$  的部分和

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n b_k &= \sum_{k=1}^n \sin kx = \frac{1}{2\sin \frac{x}{2}} \sum_{k=1}^n 2\sin \frac{x}{2} \sin nx \\ &= \frac{1}{2\sin \frac{x}{2}} \sum_{k=1}^n \left( \cos(k - \frac{1}{2})x - \cos(k + \frac{1}{2})x \right) \\ &= \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos(n + \frac{1}{2})x}{2\sin \frac{x}{2}}.\end{aligned}$$

因此,  $\left| \sum_{k=1}^n \sin kx \right| \leq \frac{1}{\left| \sin \frac{x}{2} \right|}$ . 从而, 级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  的部分和有界.

根据 Dirichlet 判别法, 级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n}$  收敛.

同样, 有

$$\sum_{k=1}^n \cos kx = \frac{\sin \frac{x}{2} - \sin(n + \frac{1}{2})x}{2\sin \frac{x}{2}} = \frac{1}{2} - \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{2\sin \frac{x}{2}}.$$

故, 级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \cos nx$  的部分和有界, 从而级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n}$  收敛.

因为  $\frac{|\sin nx|}{n} \geq \frac{\sin^2 nx}{n} = \frac{1 - \cos 2nx}{2n} = \frac{1}{2n} - \frac{\cos 2nx}{2n}$ , 而调和级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$  发

散, 级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos 2nx}{2n}$  收敛. 所以, 级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\sin nx|}{n}$  发散, 故级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n}$

条件收敛.

同样, 级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n}$  也条件收敛.

#### 四、绝对收敛级数的性质

绝对收敛级数的许多性质是条件收敛级数所没有的, 下面给出绝对收敛级数的重排性质.

**定理 7.3.14** 绝对收敛级数任意改变项的位置后构成的级数也绝对收敛, 且与原级数有相同的和.

先说明级数重排的概念.

设  $\sigma: N^+ \rightarrow N^+$  是一一映射, 即对  $\forall k \in N^+$ ,  $\sigma: k \rightarrow n_k$  是一一映射.

级数

$$S: a_1 + a_2 + \cdots + a_k + \cdots \quad (7.3.1)$$

重排后, 得到级数

$$T: a_{n_1} + a_{n_2} + \cdots + a_{n_k} + \cdots \quad (7.3.2)$$

级数的重排是相互的, 即级数 (7.3.2) 是级数 (7.3.1) 的重排; 同样, 级数 (7.3.1) 也是级数 (7.3.2) 的重排. 这两个级数的部分和分别记作  $S_n$  与  $T_n$ .

**证明:** (1) 我们首先证明定理对收敛的正项级数成立.

假设级数 (7.3.1) 为收敛的正项级数, 且其和为  $S$ , 即  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S$ . 对重排后的级数 (7.3.2) 有

$$T_k = a_{n_1} + a_{n_2} + \cdots + a_{n_k}.$$

记  $m_k = \max\{n_1, n_2, \cdots, n_k\}$ , 则

$$T_k = \sum_{i=1}^k a_{n_i} \leq \sum_{i=1}^{m_k} a_i = S_{m_k} \leq S.$$



所以, 重排后的级数收敛; 设其和为  $T$ . 则

$$T = \lim_{k \rightarrow +\infty} T_k \leq S.$$

级数 (7.3.1) 也是级数 (7.3.2) 的重排, 故,  $S \leq T$ . 从而有

$$T = S.$$

(2) 下面再证明定理对绝对收敛的级数也成立.

设级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$  收敛, 记

$$a_n^+ = \frac{1}{2}(|a_n| + a_n), \quad a_n^- = \frac{1}{2}(|a_n| - a_n) \quad (n=1, 2, \dots).$$

显然,  $a_n^+ \geq 0$ ,  $a_n^- \geq 0$ ; 且  $a_n^+ \leq |a_n|$ ,  $a_n^- \leq |a_n|$ , 故正项级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^+$ 、 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^-$

都收敛. 且  $a_n = a_n^+ - a_n^-$ , 从而有  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^-$ .

级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  重排后得到新的级数, 记作  $\sum_{n=1}^{+\infty} a'_n$ . 其对应的级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^+$ ,

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^-$  分别是级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^+$ 、 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^-$  的重排, 由(1)可得

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n'^+ = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^+, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n'^- = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^-.$$

因此

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a'_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n'^+ - \sum_{n=1}^{+\infty} a_n'^- = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^- = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$

即, 绝对收敛级数重排后所得级数依然收敛, 且其和不变.

但条件收敛级数重排后所得到的级数不一定收敛, 即使收敛其和也不一定是原级数的和.

在本章第 5 节中, 有如下结论

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots \quad (7.3.3)$$

两边同乘 $\frac{1}{2}$ 后, 有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\ln 2 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots \\ &= 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + \cdots\end{aligned}$$

两式相加, 有

$$\frac{3}{2}\ln 2 = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots \quad (7.3.4)$$

式 (7.3.4) 是式 (7.3.3) 的重排, 而级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 是条件收敛, 其重排后所得到的级数尽管收敛, 但其和发生了变化.

## §7.4 幂级数及其和函数

本章讨论由幂函数列  $\{a_n(x-x_0)^n\}$  ( $a_n, x_0$  为实常数) 构成函数项级数

$$a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots. \quad (7.4.1)$$

称上述级数为**幂级数**. 它是一类最简单的函数项级数, 可看成多项式函数的延伸. 幂级数在理论和实际中, 都有着广泛的应用.

下面着重讨论  $x_0 = 0$  的幂级数, 即

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots. \quad (7.4.2)$$

的形式. 在式 (7.4.1) 中, 令  $x-x_0 = u$ , 就得到关于  $u$  的形如式 (7.4.2) 的幂级数.

### 一、幂级数及其收敛半径

对于幂级数 (7.4.2), 当  $x=0$  时一定收敛; 但  $x$  取其它值时, 级数未必收敛. 由所有收敛点组成的集合称为幂级数的**收敛区间**或**收敛域**. 我们首先讨论幂级数在哪些点是收敛的, 在哪些点是发散的? 为此, 我们引进下面定理.

**定理 7.4.1 (Abel 定理)** 若幂级数  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  在  $x = x_0 \neq 0$  处收敛, 则对满

足不等式  $|x| < |x_0|$  的所有  $x$  都收敛且绝对收敛; 若幂级数  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  在

$x = x_0 \neq 0$  处发散, 则对满足不等式  $|x| > |x_0|$  的所有  $x$  都发散.

**证明:** 级数  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_0^n$  收敛, 则  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n x_0^n = 0$ . 从而存在  $M > 0$ , 对  $\forall n \in \mathbb{N}$  有

$$|a_n x_0^n| \leq M.$$

当  $|x| < |x_0|$  时, 记  $r = \left| \frac{x}{x_0} \right| < 1$ , 有

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right|^n \leq M r^n.$$

而级数  $\sum_{n=0}^{+\infty} M r^n$  收敛, 因此, 级数  $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n x^n|$  也收敛.

故, 当  $|x| < |x_0|$  时, 级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$  绝对收敛.

定理的第二部分可用反证法证明.

设幂级数  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  在  $x = x_0$  处发散, 若存在  $|c| > |x_0|$ , 且  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n c^n$  收敛. 根

据上面的结论, 幂级数  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_0^n$  在  $x = x_0$  处绝对收敛, 这与其发散矛盾.

根据定理 7.4.1, 幂级数  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ , 若在  $x = x_0 \neq 0$  处收敛, 则在区间

$(-|x_0|, |x_0|)$  内该幂级数绝对收敛; 若在  $x = x_0 \neq 0$  处发散, 则在区间

$[-|x_0|, |x_0|]$  外该幂级数均发散.

**推论 7.4.2** 如果幂级数  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  不在整个实数轴上收敛, 也不是仅在

$x = 0$  处收敛, 则存在正数  $r$  使得幂级数  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  有

(1) 当  $|x| < r$  时, 幂级数绝对收敛;

(2) 当  $|x| > r$  时, 幂级数发散.

当  $x = -r$  或  $x = r$  时, 幂级数可能收敛也可能发散.

上面推论中的正数  $r$  称为幂级数  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  的收敛半径；再由幂级数

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  在  $x = \pm r$  处的收敛情况可确定其收敛域： $(-r, r), (-r, r],$

$[-r, r), [-r, r]$ . 我们称上述区间为收敛区间或收敛域.

如果幂级数仅在  $x = 0$  处收敛，其收敛半径  $r = 0$ ；如果幂级数在整个实数轴上都收敛，则其收敛半径  $r = +\infty$ ，收敛域为  $(-\infty, +\infty)$ .

**定理 7.4.3** 对于幂级数  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ，如果

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = l.$$

则该幂级数的收敛半径

(1) 当  $0 < l < +\infty$  时， $r = \frac{1}{l}$ ；(2) 当  $l = 0$  时， $r = +\infty$ ；(3) 当  $l = +\infty$  时， $r = 0$ .

**证明：**记  $u_n(x) = a_n x^n$ ，则

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \cdot |x| = l|x|.$$

由 D'Alembert 比值判别法

(1) 若  $0 < l < +\infty$ ，则当  $l|x| < 1$ ，即  $|x| < \frac{1}{l}$  时，幂级数收敛；当  $|x| > \frac{1}{l}$  时，幂级数  $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n x^n|$  发散，其通项  $|a_n x^n|$  不趋向于 0；从而幂级数  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

发散. 故，幂级数的收敛半径  $r = \frac{1}{l}$ .

(2) 如果  $l = 0$ ，则：对  $\forall x \in \mathbb{R}$  均有  $l|x| = 0 < 1$ ，故，幂级数  $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n x^n|$  收

敛. 从而幂级数  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  也收敛，因此，收敛半径  $r = +\infty$ .

(3) 如果  $l = +\infty$ , 除  $x = 0$  外, 其他点处幂级数都发散, 故,  $r = 0$ .

类似地, 可利用 Cauchy 根值判别法得到幂级数收敛半径的计算.

**定理 7.4.4** 对于幂级数  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ , 如果

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho.$$

则该幂级数的收敛半径

(1) 当  $0 < \rho < +\infty$  时,  $r = \frac{1}{\rho}$ ; (2) 当  $\rho = 0$  时,  $r = +\infty$ ;

(3) 当  $\rho = +\infty$  时,  $r = 0$ . 求幂级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$  的收敛区间.

**例 7.4.5** 求幂级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$  的收敛区间.

**解:** 因为  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1$ , 所以幂级数的收敛半径  $r = 1$ .

当  $x = 1$  时, 调和级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$  发散;

当  $x = -1$  时, 交错级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  收敛.

综上可得, 幂级数的收敛区间是:  $[-1, 1)$ .

**例 7.4.6** 求幂级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^{2n}$  的收敛区间.

**解: 【方法一】:** 令  $x^2 = t$ , 考虑幂级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} t^n$ . 因为

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n+2)!}{[(n+1)!]^2} \cdot \frac{(n!)^2}{(2n)!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} = 4.$$

所以, 幂级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} t^n$  的收敛半径  $r = \frac{1}{4}$ .

因此, 当  $t = x^2 < \frac{1}{4}$ , 即  $|x| < \frac{1}{2}$  时, 幂级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^{2n}$  收敛;

当  $t = x^2 > \frac{1}{4}$ , 即  $|x| > \frac{1}{2}$  时, 幂级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^{2n}$  发散.

所以, 幂级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^{2n}$  的收敛半径  $r = \frac{1}{2}$ .

当  $x = \pm \frac{1}{2}$  时, 讨论级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}$  的敛散性; 记  $a_n = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}$ . 则

$$a_n = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} = \frac{(2n)!}{[(2n)!!]^2} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} > \frac{1}{2n}.$$

因此, 级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}$  发散, 所以, 幂级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^{2n}$  的收敛区间是

$$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

**【方法二】:** 记  $u_n(x) = \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^{2n}$ , 有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = x^2 \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} = 4x^2.$$

因此, 当  $4x^2 < 1$ , 即  $|x| < \frac{1}{2}$  时, 幂级数收敛; 当  $4x^2 > 1$ , 即  $|x| > \frac{1}{2}$  时,

幂级数发散. 所以, 幂级数的收敛半径  $r = \frac{1}{2}$ .

当  $x = \pm \frac{1}{2}$  时, 级数发散. (理由如**方法一**)

所以, 幂级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^{2n}$  的收敛区间是  $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ .

**例7.4.7** 求幂级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-1)^n}{3^n \cdot n}$  的收敛区间.

**解:** 记  $x-1=t$ , 考虑幂级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{3^n \cdot n}$ . 有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n \cdot n}{3^{n+1} \cdot (n+1)} = \frac{1}{3}.$$

因此,  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{3^n \cdot n}$  的收敛半径  $r = 3$ .

当  $t = -3$  时, 级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  收敛; 当  $t = 3$  时, 级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$  发散. 因此,

幂级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{3^n \cdot n}$  的收敛区间为  $[-3, 3)$ . 故, 当  $-3 \leq x-1 < 3$ , 即  $-2 \leq x < 4$

时, 幂级数收敛.

所以, 幂级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-1)^n}{3^n \cdot n}$  的收敛区间是  $[-2, 4)$ .

## 二、幂级数的分析性质

假设幂级数  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  的收敛区间为  $I$ , 定义区间  $I$  上的函数

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad (\forall x \in I).$$

称  $S(x)$  为幂级数  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  的**和函数**. 幂级数和函数  $S(x)$  的定义域即为幂级数的收敛域 (收敛区间).

幂级数

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \quad (7.4.3)$$

经过逐项求导, 逐项求积后, 分别得到幂级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + n a_{n-1} x^n + \cdots \quad (7.4.4)$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \frac{a_2}{3} x^3 + \cdots + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \cdots \quad (7.4.5)$$

可以证明, 这三个幂级数中, 有一个幂级数的收敛半径为  $r$ , 则另外两个幂级数的收敛半径也是  $r$ . 即, 幂级数经过逐项求导或求积后, 其收敛半径不变. 但收敛域有可能发生变化. 请读者自己举例说明.



幂级数的和函数有很多重要的性质，下面不加证明给出这些性质，具体证明读者可参考一般“数学分析”教材。

**定理 7.4.8 (和函数的连续性)** 若幂级数  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  的收敛区间为  $I$ ，则它的和函数  $S(x)$  在区间  $I$  上连续。

**定理 7.4.9 (和函数的逐项可积性)** 若幂级数  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  的收敛区间为  $I$ ，则它的和函数  $S(x)$  在  $I$  的任何有限子区间  $[a, b]$  上都可积，且有

$$\int_a^b S(x) dx = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b a_n x^n dx.$$

特别地，对  $\forall x \in I$  有，

$$\int_0^x S(t) dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

即，幂级数的和函数在收敛区间内可积，且可逐项求积。

**定理 7.4.10 (和函数的逐项可导性)** 设幂级数  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  的收敛半径为  $r > 0$ ，和函数为  $S(x)$ ，则在  $(-r, r)$  内  $S(x)$  可导，且有

$$S'(x) = \left( \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}.$$

即，幂级数在收敛开区间  $(-r, r)$  内可导，且可逐项求导。

下面我们利用上面幂级数的三个分析性质，来计算某些幂级数的和函数。

### 三、幂级数的和函数

几何级数

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x}. \quad (-1 < x < 1)$$

**例 7.4.11** 求幂级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$  的和函数。

**解：**由例 (7.4.5) 可知，幂级数的收敛区间是  $[-1, 1)$ 。记  $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ ，则

$$S'(x) = \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}.$$

两边同时求积, 有

$$S(x) = S(0) + \int_0^x \frac{dx}{1-x} = -\ln(1-x). \quad (-1 \leq x < 1)$$

**例7.4.12** 求幂级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-1)^n}{3^n \cdot n}$  的和函数.

**解:** 由例 (7.4.7) 可知, 幂级数的收敛区间是  $[-2, 4)$ .

记  $\frac{x-1}{3} = t$ , 由上题可得

$$S(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n} = -\ln(1-t). \quad (-1 \leq t < 1)$$

因此

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-1)^n}{3^n \cdot n} = S\left(\frac{x-1}{3}\right) = -\ln\left(1 - \frac{x-1}{3}\right) = \ln 3 - \ln(4-x). \quad (-2 \leq x < 4).$$

**例7.4.13** 求幂级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n$  的收敛区间与和函数.

**解:** (1) 级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n$  的收敛半径  $r=1$ , 当  $x=\pm 1$  时都发散, 故其收敛域为  $(-1, 1)$ .

(2) 记  $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}$ , 则

$$\int_0^x S(x) dx = \int_0^x \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^x nx^{n-1} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} - 1.$$

两边同时求导

$$S(x) = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

所以

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = xS(x) = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad (-1 < x < 1)$$

**例7.4.14** 计算:  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(n+2)}{3^n}$ .

**解:** 设  $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+2)x^n$ , 容易得到, 该幂级数的收敛域为  $(-1, 1)$ . 又

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+2)x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)x^n + 3\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n.$$

记  $S_1(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)x^n$ ,  $S_2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n$ , 收敛域均为  $(-1, 1)$ .

由于

$$S_1(x) = x^2 \left( \sum_{n=1}^{+\infty} (x^n)'' \right) = x^2 \left( \sum_{n=1}^{+\infty} x^n \right)'' = x^2 \left( \frac{1}{1-x} - 1 \right)'' = \frac{2x^2}{(1-x)^3}.$$

$$S_2(x) = x \sum_{n=1}^{+\infty} (x^n)' = x \left( \sum_{n=1}^{+\infty} x^n \right)' = x \left( \frac{x}{1-x} \right)' = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

则

$$S(x) = \frac{2x^2}{(1-x)^3} + \frac{3x}{(1-x)^2} = \frac{3x-x^2}{(1-x)^3}, \quad (|x| < 1)$$

所以

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(n+2)}{3^n} = S\left(\frac{1}{3}\right) = 3.$$

## § 7.5 函数的幂级数展开

### 一、泰勒级数

上一节讨论了幂级数的和函数，且所求的和函数在收敛开区间  $(-r, r)$  ( $r > 0$ ) 内存在任意阶导数；反过来，给定函数  $f(x)$  在  $x = x_0$  的某

领域内有任意阶导数，是否存在幂级数  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$  使得

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n \quad (7.5.1)$$

成立？

在式 (7.5.1) 成立时，又如何确定  $a_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ )？

在本教材上册泰勒定理一节中，曾介绍过：若  $f(x)$  在  $x_0$  的某领域内存在  $n+1$  阶导数，则

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_n(x). \quad (7.5.2)$$

其中： $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$  ( $0 < \theta < 1$ ) 为拉格朗日余项.

在式 (7.5.2) 中，若令  $n \rightarrow +\infty$ ，右边的幂级数

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

是否收敛？若收敛，是否收敛于  $f(x)$ ？

**定理 7.5.1** 如果式 (7.5.1) 在  $|x - x_0| < r$  ( $0 < r \leq +\infty$ ) 时成立，则

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}. \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (7.5.3)$$

特别地，记  $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$ .

**证明：**假设式 (7.5.1) 在  $|x - x_0| < r$  ( $0 < r \leq +\infty$ ) 时成立，有

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots.$$

在区间  $(x_0 - r, x_0 + r)$  内两边求导，有

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \cdots + na_n(x - x_0)^{n-1} + \cdots$$

.....

$$f^{(n)}(x) = n!a_n + (n+1)n(n-1)\cdots 2 \cdot a_{n+1}(x - x_0) + \cdots.$$

再令  $x = x_0$ ，有

$$a_0 = f(x_0), a_1 = f'(x_0), \cdots, a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \cdots.$$

因此

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}. (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

**定理 7.5.2 (泰勒定理)** 设  $f(x)$  在  $x_0$  的某领域内存在任意阶导数，则

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0.$$

其中： $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$  ( $0 < \theta < 1$ ) 为拉格朗日余项.

**定义 7.5.3** 以式(7.5.3) 为系数的幂级数  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$  称为  $f(x)$  在

$x = x_0$  处的**泰勒级数**；特别地，在  $x_0 = 0$  处的泰勒级数称为**麦克劳林级数**.

定理 7.5.2 的证明作为练习由读者自行完成.

由上面定理可知，若函数  $f(x)$  在某区间  $|x - x_0| < r$  ( $x > 0$ ) 内可以展开成关于  $(x - x_0)$  的幂级数，即式 (7.5.1) 成立，则所得的幂级数必为  $f(x)$

在  $x = x_0$  处的泰勒级数. 即函数  $f(x)$  在  $x = x_0$  处的泰勒级数展开式是唯一的, 这便是函数幂级数展开的唯一性.

## 二、常见函数的幂级数展开

**例7.5.4** 求函数  $f(x) = e^x$  的麦克劳林级数.

**解:** 由于  $f^{(n)}(x) = e^x$ , 则:  $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{n!}$ ; 且其余项

$$R_n(x) = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}. (\text{其中: } 0 < \theta < 1, n = 1, 2, \dots)$$

对  $\forall x \in (-\infty, +\infty)$ , 取  $M > 0$  使得  $|x| \leq M$ , 则

$$|R_n(x)| \leq \frac{e^M}{(n+1)!} M^{n+1}.$$

考虑级数  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^M}{(n+1)!} M^{n+1}$ , 记  $u_n = \frac{e^M}{(n+1)!} M^{n+1}$ , 有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{M}{n+2} = 0.$$

因此, 级数  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^M}{(n+1)!} M^{n+1}$  收敛, 从而,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0$ .

根据泰勒定理, 有

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (-\infty < x < +\infty).$$

特别地, 当  $x = 1$  时, 有

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots.$$

进一步, 有

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{n \cdot n!}. (0 < \theta_n < 1)$$

此结论的证明由读者自行完成, 根据此结论容易证明  $e$  为无理数.

**例7.5.5** 求  $f(x) = \sin x$  的麦克劳林级数.

**解:** 由于  $f^{(n)}(x) = \sin(x + \frac{n\pi}{2})$ , 则

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \begin{cases} \frac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)!} & (n = 2m-1) \\ 0 & (n = 2m) \end{cases} \quad (m = 1, 2, \dots).$$

且其余项

$$R_n(x) = \frac{\sin[\theta x + \frac{(n+1)\pi}{2}]}{(n+1)!} x^{n+1}. \quad (0 < \theta < 1)$$

对  $\forall x \in (-\infty, +\infty)$ , 取  $M > 0$  使得  $|x| \leq M$ , 有

$$|R_n(x)| \leq \frac{M^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0. \quad (n \rightarrow +\infty)$$

所以

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (-\infty < x < +\infty).$$

同样, 有

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (-\infty < x < +\infty).$$

下面不加证明给出函数  $\ln(1+x)$  和  $(1+x)^\alpha$  的麦克劳林级数.

**例7.5.6** 求函数  $\ln(1+x)$  和  $(1+x)^\alpha$  的麦克劳林级数.

**解:** 根据泰勒定理可得

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^n \frac{x^{n-1}}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \quad (-1 < x \leq 1).$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \dots$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n \quad (-1 < x < 1).$$

特别地, 当  $x=1$  时, 有

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \dots.$$

上面我们根据泰勒定理给出了一些常见函数的麦克劳林级数, 下面我们根据一些已知函数的麦克劳林级数, 利用幂级数的分析性质计算某些函数的麦克劳林级数或泰勒级数.

**例7.5.7** 求函数  $f(x) = \arctan x$  的麦克劳林级数.

**解:** 根据例 (7.5.6), 取  $\alpha = -1$  有

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots \quad (-1 < x < 1).$$

则 
$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots \quad (-1 < x < 1).$$

两边求定积分

$$\arctan x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = x - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

而级数  $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$  的收敛域为  $-1 \leq x \leq 1$ , 所以

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (-1 \leq x \leq 1).$$

**例7.5.8** 求函数  $f(x) = \arcsin x$  的麦克劳林级数.

**解:** 在例 (7.5.6) 中, 令  $\alpha = -\frac{1}{2}$ , 用  $(-x^2)$  代替  $x$ , 可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 + \cdots + \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)}x^{2n} + \cdots \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n} \end{aligned}$$

两边求定积分  $\arcsin x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n+1}$

$$= x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \cdots + \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n+1} + \cdots \quad (-1 < x < 1)$$

**例7.5.9** 将函数  $f(x) = \sin^2 x$  展开为  $x = \frac{\pi}{4}$  处的泰勒级数.

**解:** 令  $x - \frac{\pi}{4} = u$ , 则

$$\begin{aligned} \sin^2 x &= \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin 2u = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2u)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^{2n}}{(2n+1)!} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}. \quad (-\infty < x < +\infty) \end{aligned}$$



**例7.5.10** 将函数  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4x - 5}$  展开成关于  $(x-1)$  的幂级数, 并计算

$f^{(n)}(1)$  的值. ( $n=1, 2, \dots$ ).

**解:** 由于

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{(x-5)(x+1)} = \frac{1}{6} \left( \frac{1}{x-5} - \frac{1}{x+1} \right) \\ &= \frac{1}{24} \cdot \frac{1}{\frac{x-1}{4} - 1} - \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{\frac{x-1}{2} + 1}. \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} \frac{1}{\frac{x-1}{4} - 1} &= -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-1)^n}{4^n} \quad (-3 < x < 5); \\ \frac{1}{\frac{x-1}{2} + 1} &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^n}{2^n} \quad (-1 < x < 3). \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{1}{24} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-1)^n}{4^n} - \frac{1}{12} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^n}{2^n} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{n+1} - 1}{3 \times 2^{2n+3}} (x-1)^n. \quad (\text{其中: } -1 < x < 3) \end{aligned}$$

由此可得,  $a_n = \frac{(-1)^{n+1} 2^{n+1} - 1}{3 \times 2^{2n+3}}$ .

根据幂级数泰勒展开式的唯一性, 有

$$f^{(n)}(1) = n! a_n = \frac{[(-1)^{n+1} 2^{n+1} - 1] n!}{3 \times 2^{2n+3}}. \quad (n=1, 2, \dots)$$

**例7.5.11** 计算:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\arcsin x - \arctan x) - x^3}{\ln(1+x^2)(e^{-x^3} - 1)}$ .

**解:** 由于

$$\arcsin x = x + \frac{1}{6} x^3 + \frac{3}{40} x^5 + o(x^5),$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5).$$

因此

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\arcsin x - \arctan x) - x^3}{\ln(1+x^2)(e^{-x^3}-1)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\arcsin x - \arctan x) - x^3}{x^2 \cdot (-x^3)} \\&= -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\left[\left(x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + o(x^5)\right) - \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)\right)\right] - x^3}{x^5} \\&= -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{4}x^5 + o(x^5)}{x^5} = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

**例7.5.12** 求幂级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{nx^{2n}}{(2n+1)!}$  的收敛区间与和函数.

**解:** (1) 记  $u_n(x) = (-1)^n \frac{nx^{2n}}{(2n+1)!}$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{(2n+3)!} \cdot \frac{(2n+1)!}{n} \cdot x^2 = 0.$$

所以, 级数的收敛半径为  $+\infty$ , 收敛域为  $(-\infty, +\infty)$ .

(2) 设  $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{nx^{2n}}{(2n+1)!}$ , 当  $x=0$  时,  $S(0)=0$ ;

当  $x \neq 0$  时, 有

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{2S(x)}{x} dx &= \int_0^x \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2nx^{2n-1}}{(2n+1)!} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\&= \frac{1}{x} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} - x \right) = \frac{\sin x - x}{x}.\end{aligned}$$

因此

$$\frac{2S(x)}{x} = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}.$$

所以

$$S(x) = \begin{cases} \frac{x \cos x - \sin x}{2x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

**【注】:** 本题还可以用下面方法求解.

由于  $\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ , 则

当  $x \neq 0$  时,  $\frac{\sin x}{x} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$ , 因此

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2n}{(2n+1)!} x^{2n-1}.$$

所以

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{nx^{2n}}{(2n+1)} = \begin{cases} \frac{x \cos x - \sin x}{2x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

### 三、幂级数在近似计算中的应用

运用幂级数的展开可以近似计算许多初等函数在某些点处的函数值, 如三角函数、根式函数、指数函数与对数函数等, 也可根据函数的展开式近似计算某些函数的定积分值, 并且可根据幂级数展开式的余项  $R_n(x)$  估计所得近似值的误差.

**例7.5.13** 计算  $\ln 2$  的近似值, 并使误差不超过  $10^{-4}$ .

**解:** 由于当  $-1 < x \leq 1$  时, 有

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \cdots.$$

其误差(余项)

$$|R_n| = \left| \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{(-1)^n n!}{(1+\theta)^{n+1}} \right| \leq \frac{1}{n+1}.$$

如果误差要求不超过  $10^{-4}$ , 则要运算到  $n = 10^4$ . 计算量很大, 下面对上面的计算方法做进一步的修正.

将展开式

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots \quad (-1 < x \leq 1).$$

用  $(-x)$  代替  $x$ , 有

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots - \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots \quad (-1 \leq x < 1).$$

两式相减, 有

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left( x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots \right) \quad (-1 < x < 1).$$

令  $\frac{1+x}{1-x} = 2$ , 则:  $x = \frac{1}{3}$ . 将其代入上式, 有

$$\ln 2 = 2 \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3^5} + \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3^7} + \cdots \right).$$

若取前 4 项作为  $\ln 2$  的近似值, 则其误差

$$\begin{aligned} R_4 &= 2 \left( \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{3^9} + \frac{1}{11} \cdot \frac{1}{3^{11}} + \cdots \right) < \frac{2}{9} \left( \frac{1}{3^9} + \frac{1}{3^{11}} + \frac{1}{3^{13}} + \cdots \right) \\ &= \frac{2}{3^{11}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{1}{4 \times 3^9} < \frac{1}{70000} < 10^{-4}. \end{aligned}$$

于是, 有

$$\ln 2 \approx 2 \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3^5} + \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3^7} \right) \approx 0.6931.$$

**例7.5.14** 计算定积分  $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$  的近似值, 要求误差不超过  $10^{-4}$ .

**解:** 由于  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ , 可补充定义  $\frac{\sin x}{x}$  在  $x=0$  处的函数值为 1, 则: 函

数  $\frac{\sin x}{x}$  在  $[0, 1]$  上连续, 积分  $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$  为常义积分.

由  $\sin x$  的麦克劳林展开, 可得

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)(2n+1)!} \\ &= 1 - \frac{1}{3 \cdot 3!} + \frac{1}{5 \cdot 5!} - \frac{1}{7 \cdot 7!} + \cdots. \end{aligned}$$

所得到的级数为交错级数, 取前 3 的和, 其误差  $R_4 \leq \frac{1}{7 \cdot 7!} = \frac{1}{35280} < 10^{-4}$ .

所以

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx \approx 1 - \frac{1}{3 \cdot 3!} + \frac{1}{5 \cdot 5!} \approx 0.9461.$$

## § 7.6 函数项级数的一致收敛性\*

### 一、函数项级数

设  $u_n(x)$  是定义在数集  $D$  上的函数列, 和式

$$u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots \quad (7.6.1)$$

称为定义在数集  $D$  上的函数项级数. 称

$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x).$$

为函数项级数 (7.6.1) 的前  $n$  项的部分和, 所构成的函数列  $\{S_n(x)\}$  称为部分和函数列.

当  $x_0 \in D$  时, 数项级数

$$u_1(x_0) + u_2(x_0) + \cdots + u_n(x_0) + \cdots$$

收敛, 则称  $x_0$  为函数项级数 (7.6.1) 的收敛点, 函数项级数所有收敛点组成的集合称为函数项级数 (7.6.1) 的收敛域. 在收敛域上的任意一点  $x$  都有确定的和  $S(x)$  与之对应, 称  $S(x)$  为函数项级数的和函数.

#### 例7.6.1 几何级数

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

当  $x \neq 1$  时, 其前  $n$  项的和

$$S_n(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

因此, 当  $|x| < 1$  时, 有

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x}.$$

即几何级数的部分和函数列为  $\left\{ \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \right\} (x \neq 1)$ , 当  $|x| \geq 1$  时, 几何级

数发散; 当  $|x| < 1$  时, 几何级数收敛, 且其和函数  $S(x) = \frac{1}{1-x}$ . 所以, 几何级数的收敛域为  $(-1, 1)$ .

在前面微分学与积分学部分中, 曾介绍过函数连续、可导与可积的线性性质, 即有限多个函数和的极限等于每个函数极限的和等, 这些性质在无限和(函数项级数)中是否依然成立呢?

**例7.6.2** 设  $u_0(x) = 1 - x$ ,  $u_n(x) = x^n - x^{n+1}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) 是定义在区间  $[0, 1]$  上的函数列, 则函数项级数  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$  的部分和函数  $S_n(x) = 1 - x^n$  ( $n \geq 1$ ),

因此

$$S(x) = \begin{cases} 1 & (0 \leq x < 1) \\ 0 & (x = 1) \end{cases}.$$

由于  $\lim_{x \rightarrow 1^-} S(x) = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1^-} S_n(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (1 - x^n) = 0$ , 从而有  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow 1^-} S_n(x) = 0$ .

因此

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow 1^-} S_n(x).$$

或者

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) \neq \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow 1^-} u_n(x).$$

上面说明, 在函数项级数中, 和函数的极限与极限函数的和不一定相等; 或者说极限符号“ $\lim$ ”与“ $\sum$ ”符号不一定可交换.

## 二、函数项级数的一致收敛

设函数项级数  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$  在区间  $D$  上收敛于和函数  $S(x)$ , 即对  $\forall x_0 \in D$ ,

数项级数  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x_0)$  收敛于  $S(x_0)$ . 即数列  $\{S_n(x_0)\}$  收敛于  $S(x_0)$ . 由数列极

限的定义, 对  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists N \in \mathbb{N}^+$ , 当  $n > N$  时, 有

$$|S_n(x_0) - S(x_0)| < \varepsilon.$$

上面的  $N$  一般依赖于讨论点  $x_0$ , 即与讨论点  $x_0$  有关; 下面我们引进条件更强的函数列 (函数项级数) 的收敛——“一致收敛”.

**定义 7.6.3** 给定区间  $D$  上的函数列  $\{S_n(x)\}$  及函数  $S(x)$ , 若对  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists N \in \mathbb{N}^+$ , 当  $n > N$  时, 对  $\forall x \in D$  均有

$$|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon.$$

则称函数列  $\{S_n(x)\}$  在区间  $D$  上**一致收敛**于  $S(x)$ .

注意, 上面定义中的  $N$  是对所有  $x \in D$  都适用的, 因此, 若函数列在区间  $D$  上一致收敛, 则在区间  $D$  上必收敛; 但反之不然.

**定义 7.6.4** 给定区间  $D$  上的函数项级数  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ , 其部分和函数列为

$\{S_n(x)\}$ , 若  $\{S_n(x)\}$  在区间  $D$  上一致收敛于  $S(x)$ , 则称函数项级数  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$

在区间  $D$  上一致收敛于  $S(x)$ .

**例7.6.5** 证明几何级数  $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$  在  $(-1, 1)$  内非一致收敛.

**证明:** 设几何级数的部分和函数、和函数分别为  $S_n(x)$ 、 $S(x)$ , 则

$$S_n(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}, \quad S(x) = \frac{1}{1-x} \quad (-1 < x < 1).$$

从而有

$$|S_n(x) - S(x)| = \frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

对任意  $n \in \mathbb{N} (n \geq 2)$ , 有  $1 - \frac{1}{n} \in (-1, 1)$ , 而  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(1 - \frac{1}{n})^n = +\infty$ , 因此,

对  $\varepsilon_0 = 1$ , 及  $\forall N \in \mathbb{N}^+$ ,  $\exists n > N$ , 使得

$$n(1 - \frac{1}{n})^n > \varepsilon_0 = 1.$$

从而

$$|S_n(x) - S(x)|_{x=1-\frac{1}{n}} = n(1 - \frac{1}{n})^n > \varepsilon_0 = 1.$$

所以, 几何级数  $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$  在  $(-1, 1)$  内非一致收敛.

可以证明, 几何级数在任何  $(-1, 1)$  内的闭区间  $[\alpha, \beta] (-1 < \alpha < \beta < 1)$  上都一致收敛. 这种一致收敛称为内闭一致收敛.

**定理 7.6.6 (函数项级数一致收敛的柯西收敛准则)**

函数项级数  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$  在区间  $D$  上一致收敛的充要条件是对  $\forall \varepsilon > 0$ ,

$\exists N \in \mathbb{N}^+$ , 当  $n > N$  时, 对  $\forall p \in \mathbb{N}^+$  及  $\forall x \in D$ , 都有

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon.$$

**证明:(必要性)** 设函数项级数  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$  的部分和函数为  $S_n(x)$ , 且在  $D$  上

一致收敛于  $S(x)$ , 则对  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists N \in \mathbb{N}^+$ , 当  $n > N$  时, 对  $\forall x \in D$ , 都有

$$|S_n(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

于是对  $\forall p \in \mathbb{N}^+$ , 有

$$\begin{aligned} |u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots + u_{n+p}(x)| &= |S_{n+p}(x) - S_n(x)| \\ &\leq |S_{n+p}(x) - S(x)| + |S_{n+1}(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

**(充分性)** 若对  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists N \in \mathbb{N}^+$ , 当  $n > N$  时, 对  $\forall p \in \mathbb{N}^+$  及  $\forall x \in D$ , 都有

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots + u_{n+p}(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

即

$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

根据数列收敛的柯西收敛准则, 对  $\forall x \in D$ , 部分和函数列  $\{S_n(x)\}$  都收敛, 设其和函数为  $S(x)$ . 上式中令  $p \rightarrow +\infty$ , 则对  $\forall x \in D$  都有

$$|S_n(x) - S(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

因此,  $\{S_n(x)\}$  在  $D$  上一致收敛于  $S(x)$ , 即,  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$  在  $D$  上一致收敛于  $S(x)$ .

**定理 7.6.7 (魏尔斯特拉斯判别法)** 设  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$  是定义在区间  $D$  上的函数项级数, 若存在正项级数  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ , 使得

(1) 存在  $n_0 \in \mathbb{N}^+$ , 当  $n > n_0$  时, 对  $\forall x \in D$  有  $|u_n(x)| \leq a_n$ ;

(2) 级数  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$  收敛.

则函数项级数  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$  在区间  $D$  上一致收敛.



**证明：** 由于  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$  收敛，根据柯西收敛准则，对  $\forall \varepsilon > 0$ ， $\exists N > n_0 > 0$ ，

当  $n > N$  时，对  $\forall p \in \mathbb{N}^+$  有

$$\left| a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p} \right| < \varepsilon.$$

由条件 (1) 对  $\forall x \in D$ ，都有

$$\begin{aligned} & \left| u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots + u_{n+p}(x) \right| \\ & \leq \left| u_{n+1}(x) \right| + \left| u_{n+2}(x) \right| + \cdots + \left| u_{n+p}(x) \right| \\ & \leq a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p} \\ & = \left| a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p} \right| < \varepsilon. \end{aligned}$$

所以，函数项级数  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$  在区间  $D$  上一致收敛.

若函数项级数  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$  与正项级数  $\sum_{n=0}^{+\infty} M_n$  满足： $|u_n(x)| \leq M_n$ .

( $\forall x \in D$ ,  $n > n_0$ )，且  $\sum_{n=0}^{+\infty} M_n$  收敛，则称级数  $\sum_{n=0}^{+\infty} M_n$  为函数项级数  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$

的优级数，魏尔斯特拉斯判别法也称为优级数判别法或  $M$  判别法.

**例7.6.8** 证明：函数项级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$  在  $(-\infty, +\infty)$  上一致收敛.

**证明：** 对任意  $x \in (-\infty, +\infty)$  都有，

$$\left| \frac{\sin nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}.$$

而正项级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$  收敛，根据优级数判别法， $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$  在  $(-\infty, +\infty)$

上一致收敛.

下面讨论如下形式的函数项级数

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)v_n(x) = u_0(x)v_0(x) + u_1(x)v_1(x) + \cdots + u_n(x)v_n(x) + \cdots$$

为此介绍两个关于此类函数项级数一致收敛的判别法：阿贝尔判别法与狄利克雷判别法.

**定理 7.6.9 (阿贝尔判别法)** 若函数项级数  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)v_n(x)$  满足下列条件

- (1)  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$  在区间  $D$  上一致收敛；
- (2) 对  $\forall x \in D$ , 数列  $\{v_n(x)\}$  是单调的；
- (3) 函数列  $\{v_n(x)\}$  在  $D$  上一致有界, 即  $\exists M > 0$ , 对  $\forall n \in \mathbb{N}$  及  $\forall x \in D$ , 有
 
$$|v_n(x)| \leq M.$$

则函数项级数  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)v_n(x)$  在区间  $D$  上一致收敛.

**定理 7.6.10 (狄利克雷判别法)** 若函数项级数  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)v_n(x)$  满足下列条件

- (1)  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$  的部分和函数列  $\{S_n(x)\}$  在区间  $D$  上一致有界；即
 
$$\exists M > 0, \text{ 对 } \forall x \in D \text{ 及 } n \in \mathbb{N}^+ \text{ 都有, } |S_n(x)| \leq M.$$
- (2) 对  $\forall x \in D$ , 数列  $\{v_n(x)\}$  是单调的；
- (3) 函数列  $\{v_n(x)\}$  在  $D$  上一致趋向于零.

则函数项级数  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)v_n(x)$  在区间  $D$  上一致收敛.

上面两个定理的证明可以参考本章第三节阿贝尔判别法与狄利克雷判别法的证明.

**例 7.6.11** 证明: 对  $\forall \alpha \in (0, \pi)$ , 级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n}$  在  $[\alpha, 2\pi - \alpha]$  上一致收敛.

**证明:** 记  $u_n(x) = \cos nx$ ,  $v_n(x) = \frac{1}{n}$ , 则

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \sum_{k=1}^n \cos kx = \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \sum_{k=1}^n 2 \sin \frac{x}{2} \cos kx \\ &= \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \sum_{k=1}^n \left( \sin(k - \frac{1}{2})x - \sin(k + \frac{1}{2})x \right) = \frac{\sin \frac{x}{2} - \sin(n + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}}. \end{aligned}$$

从而, 对  $\forall x \in [\alpha, 2\pi - \alpha]$  及任何自然数  $n$ , 有

$$|S_n(x)| \leq \frac{2}{\left|2\sin\frac{x}{2}\right|} \leq \frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

即, 级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \cos nx$  的部分和函数在  $[\alpha, 2\pi - \alpha]$  上一致有界.

又函数列  $v_n(x) = \frac{1}{n}$  在  $[\alpha, 2\pi - \alpha]$  上一致收敛于零, 根据狄利克雷判

别法, 级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n}$  在  $[\alpha, 2\pi - \alpha]$  上一致收敛.

### 三、一致收敛级数的性质

本节讨论由函数列或函数项级数所确定的极限函数(和函数)的分析性质: 连续性、可导性与可积性.

**定理 7.6.12(连续性)** 如果函数项级数  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$  的各项  $u_n(x)$  在  $[a, b]$  上均连续, 且  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$  在  $[a, b]$  上一致收敛于  $S(x)$ , 则  $S(x)$  在  $[a, b]$  上连续.

**证明:** 设级数  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$  的部分和为  $S_n(x)$ , 对  $\forall x_0 \in [a, b]$ , 及  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,

$S_n(x)$  在点  $x = x_0$  处连续. 则对  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$ , 当  $x \in U(x_0, \delta)$  时, 有

$$|S_n(x) - S_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

又级数  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$  在  $[a, b]$  上一致收敛, 故, 对  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists N \in \mathbb{N}^+$ , 当  $n > N$  时, 对  $\forall x \in [a, b]$  有

$$|S_n(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

当然有

$$|S_n(x_0) - S(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

因此, 对  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$ , 当  $x \in U(x_0, \delta)$  时, 取  $n > N$ , 有

$$\begin{aligned} |S(x) - S(x_0)| &= |[S(x) - S_n(x)] + [S_n(x) - S_n(x_0)] + [S_n(x_0) - S(x_0)]| \\ &\leq |S(x) - S_n(x)| + |S_n(x) - S_n(x_0)| + |S_n(x_0) - S(x_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

所以, 和函数  $S(x)$  在点  $x_0$  处连续, 从而,  $S(x)$  在  $[a, b]$  上连续.

**定理 7.6.13 (可积性)** 如果函数项级数  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$  的各项  $u_n(x)$  在  $[a, b]$  上均连续, 且  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$  在  $[a, b]$  上一致收敛于  $S(x)$ , 则: 级数  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$  在  $[a, b]$  上可逐项求积. 即

$$\int_a^b S(x)dx = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b u_n(x)dx.$$

且函数项级数  $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^x u_n(t)dt$  在  $[a, b]$  上也一致收敛.

**证明:** 设级数  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$  的部分和函数为  $S_n(x)$ , 和函数为  $S(x)$ . 由于

$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$  在  $[a, b]$  上一致收敛,  $u_n(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 则:  $S(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 从而  $S_n(x)$  与  $S(x)$  在  $[a, b]$  上均可积.

由于  $S_n(x)$  在  $[a, b]$  上一致收敛于  $S(x)$ , 则: 对  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists N \in \mathbb{N}^+$ , 当  $n > N$  时, 对  $\forall x \in [a, b]$  均有

$$|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon.$$

根据定积分的性质, 当  $n > N$  时,

$$\left| \int_a^b S_n(x)dx - \int_a^b S(x)dx \right| \leq \int_a^b |S_n(x) - S(x)|dx < (b-a)\varepsilon.$$

即

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b S_n(x)dx = \int_a^b S(x)dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x)dx.$$

所以

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b u_n(x)dx.$$

且函数项级数  $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^x u_n(t)dt$  在  $[a, b]$  上一致收敛于  $\int_a^x S(t)dt$ .

**定理 7.6.14 (可导性)** 设  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$  是定义在  $[a, b]$  上的函数项级数, 且

在  $x_0 \in [a, b]$  处收敛, 级数  $\sum_{n=0}^{+\infty} u'_n(x)$  在  $[a, b]$  上一致收敛. 则

级数  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$  在  $[a, b]$  上可逐项求导. 即

$$\left( \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) \right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} u'_n(x).$$

**证明：** 记  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x_0) = A$ ，级数  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$  的部分和函数为  $S_n(x)$ 。则

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x_0) = A.$$

又  $\sum_{n=0}^{+\infty} u'_n(x)$  在  $[a, b]$  上一致收敛，设其和函数为  $f(x)$ 。下面证明：

对  $\forall x \in [a, b]$ ，函数项级数  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$  均收敛，其和函数  $S(x)$  可导，且

$$S'(x) = f(x)$$

由定理条件，对  $\forall x \in [a, b]$ ，有

$$S_n(x) = S_n(x_0) + \int_{x_0}^x S'_n(t) dt.$$

根据定理 7.6.13，有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{x_0}^x S'_n(t) dt = \int_{x_0}^x \lim_{n \rightarrow +\infty} S'_n(t) dt = \int_{x_0}^x f(t) dt.$$

因此

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x_0) + \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{x_0}^x S'_n(t) dt = A + \int_{x_0}^x f(t) dt.$$

即

$$S(x) = A + \int_{x_0}^x f(t) dt.$$

所以

$$S'(x) = \left( \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) \right)' = f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u'_n(x).$$

由上面证明可知，级数  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$  在  $[a, b]$  也一致收敛。

**例7.6.15** 证明：函数列  $f_n(x) = 2n^2 x e^{-n^2 x^2}$  在  $(-\infty, +\infty)$  上收敛，但

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx \neq \int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx.$$

**证明：** 对  $\forall x \in (-\infty, +\infty)$ ，有  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$ ；即  $f_n(x)$  的极限函数  $f(x) = 0$ 。

因此

$$\int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx = \int_0^1 f(x) dx = 0.$$

又  $\int_0^1 f_n(x) dx = -\int_0^1 e^{-n^2 x^2} d(-n^2 x^2) = 1 - e^{-n^2}$ ，故  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = 1$ 。

所以

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx \neq \int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx.$$

**例7.6.16** 对于函数列  $f_n(x) = \frac{1}{n} \arctan(x^n)$ ,  $(0 < x < +\infty)$ , 有

$$0 \leq f_n(x) \leq \frac{\pi}{2n}.$$

而  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2n} = 0$ , 因此, 函数列  $\{f_n(x)\}$  在  $(0, +\infty)$  上一致收敛于  $f(x) = 0$ .

又  $f'_n(x) = \frac{x^{n-1}}{1+x^{2n}}$  在  $(0, +\infty)$  上收敛, 且其极限函数

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x \in (0, 1) \cup (1, +\infty) \\ \frac{1}{2} & x = 1 \end{cases}.$$

则

$$f'_n(1) = \frac{1}{2}, \text{ 但 } \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right)' \Big|_{x=1} = 0.$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(1) \neq \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right)'.$$

由于  $f'_n(x)$  在  $(0, +\infty)$  内连续, 但其极限函数  $g(x)$  并不连续, 因此, 函数列  $f'_n(x)$  在  $(0, +\infty)$  内并不一致收敛.

本例说明, 即使函数列  $\{f_n(x)\}$  一致收敛, 但其导函数列  $\{f'_n(x)\}$  不一致收敛, 其导数符号与极限符号也不一定能交换; 这在函数项级数中的相对应的就是级数不一定能逐项求导.

## § 7.7 函数的傅里叶级数

本节讨论在数学理论与工程技术中都有广泛应用的一类函数项级数——“三角级数”，即由三角函数列所构成的级数. 我们着重讨论 Fourier<sup>32</sup> (傅里叶) 级数.

### 一、三角级数与三角函数系的正交性

在科学实验、工程技术及日常生活中，经常会碰到周期运动，最简单的周期运动就是简谐振动（或简谐运动），其运动方程可用正弦函数

$$y = A \sin(\omega x + \varphi) \quad (7.7.1)$$

来描述. 式 (7.7.1) 所反映的周期运动称为简谐振动，其中：A 为振幅， $\omega$  为角频率， $\varphi$  为初相角， $T = \frac{2\pi}{\omega}$  为该周期运动的最小正周期.

在实际应用中，除了正弦函数外，会遇到一些更复杂的非正弦的周期函数，它们反映了复杂的周期现象，如电子技术中的矩形波，就是一个非正弦函数的例子. 对于复杂的周期运动，常常由几个简谐运动

$$y_k = A_k \sin(k\omega x + \varphi_k) \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

的叠加

$$y = \sum_{k=1}^n y_k = \sum_{k=1}^n A_k \sin(k\omega x + \varphi_k)$$

它仍然是周期  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  的周期函数. 由无穷多个简谐运动叠加便得到函数项级数——“三角级数”

$$y = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \sin(n\omega x + \varphi_n) \quad (7.7.2)$$

其中： $A_0$ ,  $A_n$ ,  $\varphi_n (n = 1, 2, \dots)$  都是实常数.

---

<sup>32</sup> **Fourier** (傅里叶, 1768–1830), 法国著名数学家、物理学家. 1817 年当选为巴黎科学院院士, 1822 年任该院终身秘书, 后又任法兰西学院终身秘书和理工科大学校务委员会主席, 主要贡献是在研究热的传播时创立了一套数学理论. 傅立叶应用三角级数求解热传导方程, 为了处理无穷区域的热传导问题又导出了当前所称的“傅立叶积分”, 这一切都极大地推动了偏微分方程边值问题的研究.

将周期函数按上述方式展开, 其物理意义是很明显的. 就是将一个比较复杂的周期运动看成许多个不同频率的周期运动的叠加. 在电工学中, 这种展开称为“频谱分析”. 其中:  $A_0$  称为直流分量,  $A_1 \sin(\omega x + \varphi_1)$  称为一次谐波(基波), 而  $A_n \sin(n\omega x + \varphi_n) (n=2,3,\dots)$  称为  $n$  次谐波.

如果级数 (7.7.2) 收敛, 则其表示一种更复杂的周期运动, 其周期  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ . 下面我们主要讨论  $\omega=1$  的情况, 对于更一般的情况, 可用  $\omega x$  替代  $x$ .

为讨论方便起见, 我们将正弦函数  $A_n \sin(nx + \varphi_n) (\omega=1)$  展开

$$A_n \sin(nx + \varphi_n) = A_n \sin \varphi_n \cos nx + A_n \cos \varphi_n \sin nx$$

并令:  $\frac{a_0}{2} = A_0$ ,  $a_n = A_n \sin \varphi_n$ ,  $b_n = A_n \cos \varphi_n (n=1,2,\dots)$ .

这样, 式 (7.7.2) 可表示为

$$y = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (7.7.3)$$

我们称形如 (7.7.3) 的级数为三角级数. 其中:  $a_0$ 、 $a_n$ 、 $b_n (n=1,2,\dots)$  均为实常数.

三角级数是有三角函数列(也称三角函数系)

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$$

所生成的. 三角函数系在区间  $[-\pi, \pi]$  上具有正交的性质, 即任意两个不同函数的乘积在  $[-\pi, \pi]$  上的定积分为零, 我们称此性质为三角函数系的正交性. 即

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx dx = 0.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \cos mx dx = 0 \quad (n \neq m).$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \sin mx dx = 0 \quad (n \neq m).$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \sin mx dx = 0.$$



我们验证其中的一个, 当  $n \neq m$  时, 有

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx &= 2 \int_0^{\pi} \cos nx \cos mx dx \\&= \int_0^{\pi} (\cos(m+n)x + \cos(n-m)x) dx \\&= \frac{\sin(m+n)x}{m+n} \Big|_0^{\pi} + \frac{\sin(n-m)x}{n-m} \Big|_0^{\pi} = 0.\end{aligned}$$

其它情况由读者自行验证.

当然, 任何一个函数与其自身的乘积, 在  $[-\pi, \pi]$  上的积分均非零. 以下积分计算将在接下来的函数的傅里叶展开中用到:

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1^2 dx = 2\pi, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \pi.$$

## 二、周期为 $2\pi$ 函数的傅里叶展开

设  $f(x)$  是周期  $T = 2\pi$  的函数, 且能展开成三角级数

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \quad (7.7.4)$$

上式中的“ $\sim$ ”表示等式右边为周期函数  $f(x)$  的三角级数展开式.

以下问题是我们必须考虑的:

(1) 级数 (7.7.4) 中的系数  $a_0$ 、 $a_n$ 、 $b_n$  ( $n=1, 2, \dots$ ) 与函数  $f(x)$  之间有什么关系? 是否如函数的泰勒展开一样, 可用  $f(x)$  表示?

(2) 级数 (7.7.4) 是否收敛? 若收敛, 是否收敛于  $f(x)$ ?

为此, 我们假设级数 (7.7.4) 可逐项求积. 如果级数 (7.7.4) 收敛, 且其和函数为  $f(x)$ , 即

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \quad (7.7.5)$$

那么, 等式 (7.7.5) 两边同时在  $[-\pi, \pi]$  上求定积分, 有

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx.$$

等式 (7.7.5) 两边同乘  $\cos nx$ , 再同时在  $[-\pi, \pi]$  求定积分, 有

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx.$$

同样可得

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx.$$

若  $f(x)$  是周期  $T = 2\pi$  的函数, 且在一个周期内可积, 则上述三个积分都存在, 根据上述积分所得到的系数  $a_0$ 、 $a_n$ 、 $b_n$  ( $n=1, 2, \dots$ ) 称为**傅里叶系数**, 将其代入级数 (7.7.4) 后, 所得到的三角级数称为**傅里叶级数**.

由上面讨论可知, 一个周期为  $2\pi$  的函数  $f(x)$ , 若在一个周期内可积, 则一定有与之对应的傅里叶级数 (7.7.4), 但该级数是否收敛? 若收敛, 是否收敛于  $f(x)$ ? 这些问题的回答并不是肯定的. 那么, 周期函数  $f(x)$  在满足什么条件下, 可展开为傅里叶级数, 且该级数收敛于  $f(x)$  呢? 为此, 我们不加证明引进狄利克雷收敛定理.

**定理 7.7.1 (狄利克雷收敛定理)** 设  $f(x)$  是周期为  $2\pi$  的函数, 且满足

- (1) 在一个周期内连续或只有有限个第一类间断点;
- (2) 在一个周期内只有有限个极值点.

则  $f(x)$  的傅里叶级数收敛, 且收敛于左右极限的平均值, 即

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}.$$

由狄利克雷收敛定理可得, 只要函数  $f(x)$  在一个周期内至多有有限个第一类间断, 且不作无限次振荡, 则在连续点收敛于该点的函数值; 在间断点处收敛于左右极限的平均值. 周期函数展开成傅里叶级数的条件要比函数展开成泰勒级数的条件弱很多.

**例7.7.2** 设  $f(x)$  是周期为  $2\pi$  的函数, 且

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi \leq x < 0 \\ x, & 0 \leq x < \pi \end{cases}.$$

将  $f(x)$  展开为傅里叶级数.

**解:** 所给函数  $f(x)$  满足收敛定理的条件, 且在  $x = k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$  处

不连续, 在其它点处都连续. 曲线  $y = f(x)$  的图形如下图所示.

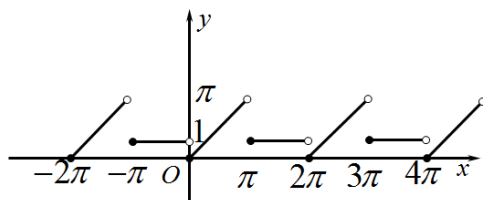


图 7.1

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 dx + \int_0^{\pi} x dx \right) = 1 + \frac{\pi}{2}.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 \cos nx dx + \int_0^{\pi} x \cos nx dx \right) = \frac{(-1)^n - 1}{n^2 \pi}.$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 \sin nx dx + \int_0^{\pi} x \sin nx dx \right) \\ &= \left( -\frac{\cos nx}{n\pi} \right) \Big|_{-\pi}^0 + \left( -\frac{x \cos nx}{n\pi} + \frac{\sin nx}{n^2 \pi} \right) \Big|_0^{\pi} \end{aligned}$$

$$= \frac{(-1)^n (1 - \pi) - 1}{n\pi}. \quad (n \in N^+)$$

根据狄利克雷收敛定理, 有

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\pi+2}{4} - \frac{2}{\pi} \cos x + \frac{\pi-2}{\pi} \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{3^2} \cos 3x + \frac{\pi-2}{3\pi} \sin 3x - \dots \\ &= \frac{\pi+2}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (1-\pi) - 1}{n\pi} \sin nx. \\ &\quad (x \neq k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \end{aligned}$$

下面我们对所得到的结果做进一步的讨论.

上式中, 若令  $x=0$ , 有

$$\frac{\pi+2}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{f(0-0) + f(0+0)}{2} = \frac{1}{2}.$$

因此

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

记  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sigma$ , 则:  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{\sigma^2}{4}$ . 从而, 有

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{3}{4}\sigma = \frac{\pi^2}{8}.$$

所以

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

**例7.7.3** 将函数  $f(x) = \begin{cases} -x, & -\pi \leq x < 0 \\ x, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$  展开成傅里叶级数.

所给函数  $f(x)$  并不是周期为  $2\pi$  的函数, 但在  $[-\pi, \pi)$  上满足狄利克雷收敛定理的条件, 我们可以补充定义函数  $f(x)$  在区间  $[-\pi, \pi)$  或  $(-\pi, \pi]$  外的函数值. 即将其延拓为周期为  $2\pi$  的函数  $F(x)$ . 延拓后所得的函数在区间  $(-\pi, \pi)$  内满足  $F(x) \equiv f(x)$ , 再将周期为  $2\pi$  的函数  $F(x)$  展开为傅里叶级数, 最后将其限制在区间  $(-\pi, \pi)$  内, 便得到函数  $f(x)$  的傅里叶级数.

**解:** 将函数  $f(x)$  延拓成周期为  $2\pi$  的函数  $F(x)$ , 显然  $F(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上连续, 且满足狄利克雷收敛定理的条件. (如下图所示)

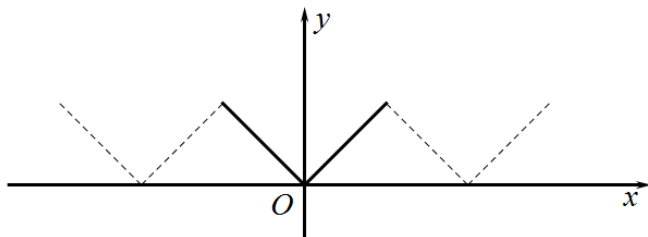


图 7.2

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \pi. \\
 a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx \\
 &= \frac{2}{n\pi} (x \sin nx) \Big|_0^{\pi} + \frac{2}{n^2 \pi} \cos nx \Big|_0^{\pi} \\
 &= \frac{2[(-1)^n - 1]}{n^2 \pi} = \begin{cases} -\frac{4}{n^2 \pi} & (n = 1, 3, 5, \dots) \\ 0 & (n = 2, 4, 6, \dots) \end{cases}.
 \end{aligned}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x f(x) dx = 0.$$

根据狄利克雷收敛定理, 有

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left( \cos x + \frac{1}{3^2} \cos 3x + \frac{1}{5^2} \cos 5x + \dots \right) \\
 &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)x. \quad (-\pi \leq x < \pi)
 \end{aligned}$$

如果函数  $f(x)$  是周期为  $2\pi$  的偶函数, 则

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx. \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \\
 b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = 0. \quad (n = 1, 2, \dots)
 \end{aligned}$$

如果函数  $f(x)$  是周期为  $2\pi$  的奇函数, 则

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = 0. \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \\
 b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx. \quad (n = 1, 2, \dots)
 \end{aligned}$$

由此可得, 周期为  $2\pi$  的偶函数, 其傅里叶级数展开式中只含余弦项, 我们称只含余弦项的级数为**余弦级数**; 同样, 周期为  $2\pi$  的奇函数, 其傅里叶级数展开式中只含正弦项, 所得级数为**正弦级数**.

**例7.7.4** 将函数  $f(x) = x$  在  $[0, \pi]$  上展开为余弦级数.

**解:** 函数  $f(x)$  仅在区间  $[0, \pi]$  上有定义, 因此, 需将其延拓为整个实数

轴上均有定义的周期函数, 且为偶函数. 先将  $f(x)$  延拓成区间  $[-\pi, \pi]$  上的偶函数, 再将其延拓成周期为  $2\pi$  的函数. 延拓后的函数如图所示.

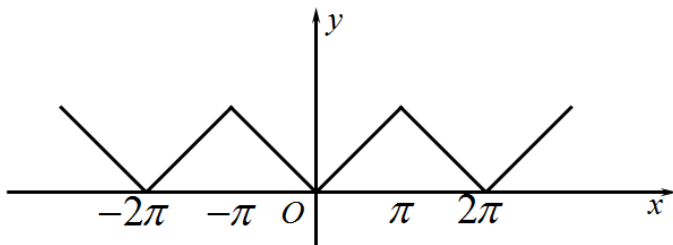


图 7.3

$$b_n = 0 \ (n=1,2,\cdots), \ a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \pi.$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{n^2 \pi} ((-1)^n - 1).$$

由狄利克雷收敛定理, 有

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left( \cos x + \frac{1}{3^2} \cos 3x + \frac{1}{5^2} \cos 5x + \cdots \right) \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}. \quad (0 \leq x \leq \pi) \end{aligned}$$

**例7.7.5** 将函数  $f(x) = \arcsin(\sin x)$  展开成傅里叶级数.

**解:** 由于  $f(x)$  是周期为  $2\pi$  的奇函数, 则:  $a_n = 0$ . ( $n=0,1,2,\cdots$ ) 且

$$f(x) = \begin{cases} x & (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}) \\ \pi - x & (\frac{\pi}{2} < x \leq \pi) \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin nx dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\pi - x) \sin nx dx \right) \\ &= \frac{4}{n^2 \pi} \sin \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0 & (n \text{ 为偶数}) \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{4}{n^2 \pi} & (n \text{ 为奇数}) \end{cases}. \end{aligned}$$

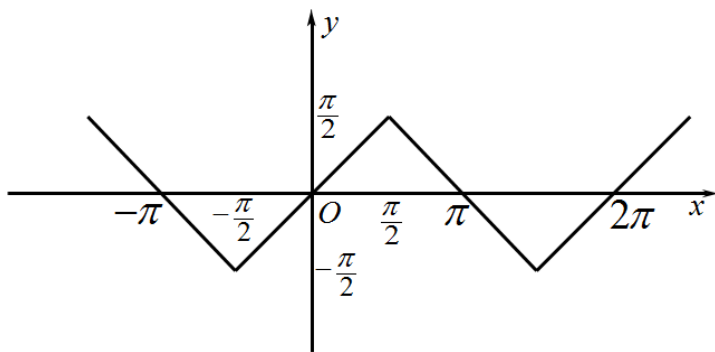


图 7.4

根据狄利克雷收敛定理，有

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} \sin(2n-1)x. \quad (-\infty < x < +\infty)$$

### 三、一般周期函数的傅里叶展开

对于周期为  $2l (l > 0)$  的周期函数  $f(x)$ ，可以通过变量代换

$$x = \frac{l}{\pi} u \quad \text{或} \quad u = \frac{\pi}{l} x$$

将周期为  $2l$  的函数  $f(x)$  变为周期为  $2\pi$  的函数  $F(u) = f(\frac{l}{\pi} u)$ . 若  $f(x)$  在  $[-l, l]$  上可积，则  $F(u)$  在  $[-\pi, \pi]$  上也可积，此时  $F(u)$  的傅里叶级数展开式为

$$F(u) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nu + b_n \sin nu).$$

其中

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(u) \cos nu du = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{\pi}{l} nx dx. \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(u) \sin nu du = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{\pi}{l} nx dx. \quad (n = 1, 2, \dots)$$

如果函数  $f(x)$  满足狄利克雷收敛定理的条件，则

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( a_n \cos \frac{\pi}{l} nx + b_n \sin \frac{\pi}{l} nx \right) = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}.$$

**例7.7.6** 设  $f(x) = \begin{cases} x+2, & 0 \leq x < 1 \\ x^2, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$ , 且  $b_n = \int_0^2 f(x) \sin \frac{n\pi x}{2} dx$  ( $n=1, 2, \dots$ ),

记  $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{2}$ . 求:  $S(7)$  与  $S(-\frac{5}{2})$  的值.

**解:** 将  $f(x)$  延拓成区间  $(-2, 2]$  上的奇函数  $F(x)$ .

$$F(x) = \begin{cases} -x^2 & (-2 < x \leq -1) \\ x-2 & (-1 < x < 0) \\ f(x) & (0 \leq x \leq 2) \end{cases}.$$

再将  $F(x)$  延拓为  $(-\infty, +\infty)$  上周期为 4 的函数.

则函数  $F(x)$  的傅里叶展开的系数

$$A_n = 0. (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$B_n = \int_0^2 F(x) \sin \frac{\pi}{2} n x dx = \int_0^2 f(x) \sin \frac{n\pi x}{2} dx = b_n. (n = 1, 2, \dots)$$

因此

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{2} = \frac{F(x-0) + F(x+0)}{2}.$$

所以

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{2} = \frac{F(x-0) + F(x+0)}{2}.$$

则

$$\begin{aligned} S(7) &= S(-1) = -S(1) = -\frac{F(1-0) + F(1+0)}{2} \\ &= -\frac{f(1-0) + f(1+0)}{2} = -2. \\ S(-\frac{5}{2}) &= S(\frac{3}{2}) = f(\frac{3}{2}) = \frac{9}{4}. \end{aligned}$$

**例7.7.7** 将函数  $f(x) = \begin{cases} \sin \pi x, & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 0, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$  展开为正弦级数.

**解:** 首先将函数  $f(x)$  延拓成区间  $[-1, 1]$  上的奇函数, 再延拓成周期  $T = 2$



的周期函数，则

$$a_n = 0. \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$b_1 = 2 \int_0^1 f(x) \sin \pi x dx = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \sin^2 \pi x dx = \frac{1}{2}.$$

$$b_n = 2 \int_0^1 f(x) \sin n\pi x dx = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \sin \pi x \sin n\pi x dx$$

$$= - \int_0^{\frac{1}{2}} (\cos(n+1)\pi x - \cos(n-1)\pi x) dx$$

$$= \frac{\sin \frac{(n-1)\pi}{2}}{(n-1)\pi} - \frac{\sin \frac{(n+1)\pi}{2}}{(n+1)\pi}$$

$$= \begin{cases} 0 & (n > 1, \text{ 且 } n \text{ 为奇数}) \\ (-1)^{\frac{n+2}{2}} \frac{2n}{(n^2-1)\pi} & (n \text{ 为偶数}) \end{cases}.$$

所以，  $f(x) = \frac{1}{2} \sin \pi x - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{4n^2 - 1} \sin 2n\pi x$ . 其中：  $x \in [0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1]$ .

## 习题 7.1

1. 已知级数  $\sum_{n=1}^n \frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$ .

(1) 写出该级数的前 5 项, 并求该级数前  $n$  项的部分和  $S_n$ ;

(2) 根据级数收敛的定义判断级数是否收敛? 若收敛, 求级数的和.

2. 求 8 进制无限循环小数  $(24.076076076\cdots)_8$  的值.

3. 求下列级数的前  $n$  项的部分和, 并根据级数敛散性的定义, 判断级数是否收敛? 若收敛, 求该级数的和.

(1)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n}$ ;

(2)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n^2 + n}}$ ;

(3)  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)}$ ;

(4)  $\sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$ ;

(5)  $\sum_{n=2}^{+\infty} \ln(1 - \frac{1}{n^2})$ ;

(6)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n-1}{2^n}$ .

4. 证明: 若级数  $\sum a_n$  收敛, 则  $\sum ka_n$  ( $k$  为实常数) 也收敛; 反之是否成立?

5. 对于级数  $\sum a_n$  和  $\sum b_n$ , 下列陈述是否正确? 为什么?

(1) 若  $\sum a_n$  和  $\sum b_n$  都发散, 则:  $\sum (a_n + b_n)$  也发散;

(2) 若  $\sum a_n$  收敛,  $\sum b_n$  发散, 则:  $\sum (a_n + b_n)$  必发散.

6. 证明：若级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  收敛，则  $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_{2n-1} + a_{2n})$  也收敛；反之成立吗？

若不成立 请举例说明，并给出在级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_{2n-1} + a_{2n})$  收敛的条件下，

级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  收敛的充要条件.

7. 利用柯西收敛准则判断下列级数的敛散性

$$(1) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n};$$

$$(2) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n^2};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}};$$

$$(4) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n^2}{2n^2 + 3}.$$

8. 试举例说明：若级数  $\sum a_n$  对某固定的正整数  $p$  满足条件

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}) = 0.$$

此级数仍可能发散.

## 习题 7.2

9. 用比较判别法或极限判别法判断下列级数的敛散性

$$(1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{2n^2 + n - 4};$$

$$(2) \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{n+1}{3n-1} \right)^n;$$

$$(3) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sin \frac{\pi}{n};$$

$$(4) \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) - 1 \right];$$

$$(5) \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln \frac{n+1}{n-1};$$

$$(6) \sum_{n=1}^{+\infty} 3^n \sin \frac{\pi}{4^n};$$

$$(7) \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ e - \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \right];$$

$$(8) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n \sqrt{n}};$$

$$(9) \sum_{n=2}^{+\infty} \left[ \sqrt[n]{2} + \frac{1}{\sqrt[n]{2}} - 2 \right];$$

$$(10) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^{\ln n}}.$$

10. 用比值判别法或根值判别法判别下列级数的敛散性

$$(1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{n!};$$

$$(2) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{3^n};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \tan \frac{\pi}{3^n};$$

$$(4) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n}{5^n - 3^n};$$

$$(5) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n n!}{n^n} \quad (a > 0);$$

$$(6) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{\left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2}};$$

$$(7) \sum_{n=1}^{+\infty} \left( 1 - \frac{\ln n}{n} \right)^n;$$

$$(8) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n)! \cdot n^3};$$

11. 用适当的方法判别下列级数的敛散性

$$(1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{[4+(-1)^n]^n};$$

$$(2) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{3^n} \sin^2 \frac{n\pi}{3};$$

$$(3) \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n} \ln\left(1 + \frac{2}{\ln n}\right);$$

$$(4) \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln n (\ln n)^p};$$

$$(5) \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n (\ln n)^p (\ln \ln n)^q};$$

$$(6) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n})};$$

$$(7) \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{x}{\sqrt[3]{x^3+1}} dx;$$

$$(8) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\int_0^n \sqrt[3]{x^3+1} dx};$$

$$(9) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n (n!)^2}{n^n (2n)!!};$$

$$(10)^* \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^p;$$

$$(11) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)} \cdot (a > 0)$$

12. 利用级数收敛的必要条件证明下列等式

$$(1) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^n}{n!} = 0;$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n}{(n!)^2} = 0.$$

13. 对收敛的正项级数  $\sum a_n$ .

(1) 证明: 当  $\alpha > 0$  时, 级数  $\sum n^{-(\alpha+\frac{1}{2})} \sqrt{a_n}$  也收敛;

(2) 当  $\alpha = 0$  时, 上面级数是否收敛? 若不收敛请举出反例.

14. 若  $a_n > 0$ , 且  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} = q$ , 试证:

(1) 当  $q > 1$  时, 级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  收敛; (2) 当  $0 \leq q < 1$  时, 级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  发散.

15. 设  $x_n (n=1, 2, \dots)$  为方程  $\tan x = x$  的正根, 且从小到大排列, 试证:

级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x_n^2}$  收敛.

16. 已知正项数列  $\{a_n\}$  严格单调递增, 求证:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} \text{ 收敛} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} \text{ 收敛}.$$

### 习题 7.3

17. 判别下列级数是否收敛？若收敛，是条件收敛还是绝对收敛？

$$(1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos \frac{n\pi}{3}}{n(\ln n)^2 + 1};$$

$$(2) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} (\sqrt[n]{a} - 1) \quad (a > 0);$$

$$(3) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \sin \frac{\pi}{n};$$

$$(4) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sqrt{n} + 1}{n + 2};$$

$$(5) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{n+1}{2n+3};$$

$$(6) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n};$$

$$(7) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} (\sqrt[n]{n} - 1);$$

$$(8) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{e^n \cdot n!}{n^n};$$

18. 设数列  $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$  满足:  $a_n \leq b_n \leq c_n$  ( $n \in N^+$ ), 若级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n, \sum_{n=1}^{+\infty} c_n$

均收敛, 证明: 级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  收敛.

19. 讨论级数  $1 - \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6^\alpha} + \cdots$  的敛散性. ( $\alpha \in R$ )

20. 若级数  $\sum a_n$  收敛, 数列  $\{b_n\}$  满足  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 1$ , 试问: 级数  $\sum a_n b_n$  是否收敛? 若收敛, 请证明你的结论; 若发散, 请举反例说明.

21. 若级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n$  ( $a_n > 0$ ) 条件收敛, 试问:

(1)  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{2n-1}$  是否收敛? 为什么? (2)  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{2n}$  收敛吗? 为什么?

22. 设  $f(x)$  在  $x=0$  的某领域内有 2 阶连续导数, 且  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = a (a \geq 0)$ ,

讨论级数  $\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$  和  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n f\left(\frac{1}{n}\right)$  的敛散性.

23. 设  $f(x)$  为偶函数, 且在  $x=0$  的某领域内有二阶连续导数,  $f(0)=1$ ,

$f''(0)=2$ . 试证: 级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(f\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right)$  绝对收敛.

24. 设  $a_n > 0$ , 且  $\{a_n\}$  单调递减,  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n$  发散, 试判断级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{1+a_n}\right)^n$

的敛散性.

25. 设  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上连续, 且  $f(x) = e^x - 1 + \int_0^x t f(x-t) dt$ .

试证: 级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n f\left(\frac{1}{n}\right)$  条件收敛.

26. 设  $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$ , 证明: 级数  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$  收敛.

27. 用阿贝尔或狄利克雷判别法判别下列级数的敛散性\*

$$(1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \cdot \frac{x^n}{x^n + 1} \quad (x > 0); \quad (2) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n^\alpha} \quad (0 < x < 2\pi, \alpha > 0);$$

$$(3) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n \cdot \sin n^2}{n}; \quad (4) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos^2 n}{n}.$$



28. 若级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^p}$  收敛, 证明: 当  $q > p$  时, 级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^q}$  收敛.

29. 设  $a_n > 0$ , 且  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  发散, 试判断级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{a_n + 1}$  的敛散性.

## 习题 7.4

30. 求下列幂级数的收敛区间

$$(1) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1) \cdot 2^n};$$

$$(2) \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{3^n}{n^2} + \frac{n}{2^n} \right) x^n;$$

$$(3) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+1)^{2n}}{n \cdot 4^n};$$

$$(4) \sum_{n=1}^{+\infty} \left( 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \right) x^n;$$

$$(5) \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n (x+1)^n}{n (\ln n)^\alpha} \quad (\alpha < 1);$$

$$(6) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} x^n;$$

$$(7) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^3 (2x-1)^{2n}}{(3n)!};$$

$$(8) \sum_{n=1}^{+\infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2} x^n;$$

$$(9) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^{2n};$$

$$(10) \sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \cdot 3^n x^{2n}.$$

31. 求下列幂级数的收敛区间与和函数

$$(1) \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1) x^{n-1};$$

$$(2) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n+1)};$$

$$(4) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n-1};$$

$$(5) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{4n-3}}{4n-3};$$

$$(6) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-2)^{2n}}{n \cdot 4^n};$$

$$(7) \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^n;$$

$$(8) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n+2)}.$$

32. 证明下列级数收敛, 并计算级数的和

$$(1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1) \cdot 4^n};$$

$$(2) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(2n-1)};$$

$$(4) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n}.$$

33. 求函数项级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x^2-1)^n}{n(n+1)}$  的收敛域与和函数.

## 习题 7.5

34. 证明 Taylor 定理.

35. 将  $f(x) = \frac{d}{dx} \left( \frac{e^x - 1}{x} \right)$  展开成 Maclaurin 级数, 并计算  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)!}$ .

36. 将下列函数展开成关于  $x$  的幂级数, 并求其收敛区间

(1)  $\frac{e^x + e^{-x}}{2};$

(2)  $(x+1)e^{2x};$

(3)  $\sin^2 x;$

(4)  $\cos(x - \frac{\pi}{3});$

(5)  $\frac{1}{\sqrt{1-x}} + \sqrt{1+x};$

(6)  $\ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}};$

(7)  $\ln(x + \sqrt{1+x^2});$

(8)  $\frac{1}{x^2 - 5x - 14};$

(9)  $\ln(2 - x - x^2);$

(10)  $\arctan \frac{1-x^2}{1+x^2}.$

37. 设  $f(x) = \sin 3x \cos x$ , 计算:  $f^{(n)}(0). (n=1, 2, \dots)$

38. 将  $f(x) = \arctan \frac{1-2x}{1+2x}$  展开成  $x$  的幂级数, 并计算  $f^{(n)}(0). (n=1, 2, \dots)$

39. 计算:  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 + 3n - 4}{n!}$  的值.

40. 利用函数的幂级数展开, 计算下列极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2[\ln(1+x) - \sin x] + x^2}{x(\sqrt{1-2x}-1) \cdot \arcsin x}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \arcsin x}{\ln(1+x^2)(\sqrt{1-x}-1)};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(1+\cos x) - 2\sin^2 x}{x^4}; \quad (4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{x^2}{2}} - \cos x}{\ln(1-2x^3) \cdot \arcsin x}.$$

41. 设  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{ax - \sin x} \int_b^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t}} dt = c$  ( $c$  为实常数), 求: 常数  $a$ 、 $b$ 、 $c$  的值.

42. 当  $x \rightarrow 0$  时,  $\int_0^x e^t \cos t dt - x - \frac{x^2}{2}$  与  $Ax^n$  为等价无穷小, 求: 常数  $A$  与  $n$  的值.

43. 求幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n!} x^{2n}$  的收敛区间与和函数, 并计算  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n!} 2^n$  的值.

44. 求级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x^2 - 6x - 4)^n}{n \cdot 12^n}$  的收敛域与和函数.

45. 将下列函数在指定点  $x_0$  处展开成 Taylor 级数

$$(1) \ln(x+1), \quad x_0 = 2; \quad (2) \frac{2x+3}{x^2+3x}, \quad x_0 = -2.$$

46. 利用函数幂级数的展开式, 计算下列定积分的近似值

$$(1) \int_0^1 e^{-x^2} dx \text{ (精确到 } 10^{-4} \text{)}; \quad (2) \int_0^1 \frac{dx}{x^3+1} \text{ (精确到 } 10^{-4} \text{)}.$$

## 习题 7.6

47. 求下列函数项级数的收敛域

$$(1) \sum_{n=1}^{+\infty} (\ln x)^n;$$

$$(2) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} \left( \frac{x-1}{x+1} \right)^n;$$

$$(3) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{x^n};$$

$$(4) \sum_{n=1}^{+\infty} n e^{-nx};$$

$$(5) \sum_{n=1}^{+\infty} (1 - \sin x)^n;$$

$$(6) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n} \left( \frac{x+1}{2x-1} \right)^n.$$

$$(7) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{1+x^{2n-1}};$$

$$(8) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n+1} \left( \frac{2x+1}{x-1} \right)^n.$$

48. 讨论下列函数列在所示区间  $D$  上是否一致收敛? 并说明理由.

$$(1) f_n(x) = \frac{1}{x+n}, \quad n=1,2,\dots, \quad D=[0,+\infty).$$

$$(2) f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}, \quad n=1,2,\dots, \quad D=(-1,1).$$

$$(3) f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2}, \quad n=1,2,\dots; \quad (i) D=[0,1]; \quad (ii) D=(1,+\infty).$$

$$(4) f_n(x) = \sin \frac{x}{n}, \quad n=1,2,\dots; \quad (i) D=[-a, a]; \quad (ii) D=(-\infty, +\infty).$$

49. 判断下列级数在给定区间上的一致收敛性

$$(1) \sum_{n=1}^{+\infty} \arctan \frac{2x}{x^2+n^2}, \quad D=(-\infty, +\infty); \quad (2) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{2^n}, \quad D=(-\infty, +\infty);$$

$$(3) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}, \quad D=(0, +\infty); \quad (4) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}, \quad D=[-1,1];$$

$$(5) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n + \sin x}, \quad D = (-\infty, +\infty);$$

$$(6) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+x)}}, \quad D = (-\infty, +\infty); \quad (7) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x^2 + n^2}, \quad D = (-\infty, +\infty);$$

$$(8) \sum_{n=1}^{+\infty} x^2 e^{-nx}, \quad D = [0, +\infty).$$

50. 设函数项级数  $\sum u_n(x)$  在  $D$  上一致收敛于  $S(x)$ , 函数  $g(x)$

在  $D$  上有界. 证明级数  $\sum g(x)u_n(x)$  在  $D$  上一致收敛于  $g(x)S(x)$ .

51. 证明函数  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$  在  $(-\infty, +\infty)$  上连续, 且有连续的导函数.

52. 证明级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$  在  $(1, +\infty)$  内不一致收敛, 在  $[1+\alpha, +\infty)$  ( $\alpha > 0$ ) 上

一致收敛.

## 习题 7.7

53. 设  $f(x) = x^2$  ( $0 \leq x \leq 1$ ), 而  $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin n\pi x$  ( $-\infty < x < +\infty$ ), 其中

$$b_n = 2 \int_0^1 f(x) \sin n\pi x dx. \quad (n = 1, 2, \dots)$$

求:  $S\left(-\frac{1}{2}\right)$  的值.

54. 将下列周期为  $2\pi$  的函数展开成傅里叶级数

$$(1) \quad f(x) = \begin{cases} 1-x & (-\pi \leq x < 0) \\ 1+x & (0 \leq x < \pi) \end{cases};$$

$$(2) \quad f(x) = \begin{cases} x & (-\pi \leq x < 0) \\ 2x & (0 \leq x < \pi) \end{cases};$$

$$(3) \quad f(x) = \begin{cases} x^2 & (0 < x < \pi) \\ 0 & (x = \pi) \\ -x^2 & (\pi < x \leq 2\pi) \end{cases};$$

$$(4) \quad f(x) = \begin{cases} -x-1 & (-\pi \leq x < -\frac{\pi}{2}) \\ x & (-\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{2}) \\ x-1 & (\frac{\pi}{2} \leq x < \pi) \end{cases};$$

$$(5) \quad f(x) = \pi^2 - x^2 \quad (-\pi \leq x < \pi);$$

55. 设  $f(x)$  是周期为  $2\pi$  的函数, 在指定区间内将  $f(x)$  展开成傅里叶级数



$$(1) f(x) = x, \quad (i) -\pi \leq x < \pi; \quad (ii) 0 \leq x < 2\pi.$$

$$(2) f(x) = x^2, \quad (i) -\pi \leq x < \pi; \quad (ii) 0 \leq x < 2\pi.$$

$$(3) f(x) = ax^2 + bx + c, \quad (i) -\pi \leq x < \pi; \quad (ii) 0 \leq x < 2\pi.$$

56. 将函数

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{4} & (-\pi \leq x < 0) \\ \frac{\pi}{4} & (0 \leq x < \pi) \end{cases}$$

展开成傅里叶级数，并由此推出

$$(1) \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots;$$

$$(2) \frac{\pi}{3} = 1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} - \frac{1}{19} - \frac{1}{23} + \cdots.$$

57. 将  $f(x) = \sin^4 x$  展开成傅里叶级数.

58. 将下列函数分别展开成正弦级数和余弦级数

$$(1) f(x) = x - 1 \quad (0 \leq x < \pi); \quad (2) f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \quad (0 < x \leq \frac{\pi}{2});$$

$$(3) f(x) = \begin{cases} x & (0 \leq x < \frac{\pi}{2}) \\ \pi - x & (\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi) \end{cases};$$

$$(4) f(x) = f(x) = \begin{cases} x - 2 & (0 \leq x < \frac{\pi}{2}) \\ 0 & (\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi) \end{cases}.$$

59. 将  $f(x) = 2\pi^2 - x^2$  ( $-\pi \leq x < \pi$ ) 展开成傅里叶级数, 并计算级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \text{ 与级数 } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \text{ 的值.}$$

60. 求函数  $f(x) = \arccos(\cos x)$  的傅里叶级数展开式.

61. 将函数  $f(x) = (x-1)^2$  ( $0 < x < 1$ ) 展开成傅里叶级数, 并推出

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

62. 试求三角多项式

$$T_n(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^n (A_k \cos kx + B_k \sin kx).$$

的傅里叶级数展开式. 其中:  $A_0, A_k, B_k$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ) 均为常数.

63. 设  $f$  是  $[-\pi, \pi]$  上的连续函数,  $a_0, a_k, b_k$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ) 为  $f$  的

傅里叶系数; 记  $T_n(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^n (A_k \cos kx + B_k \sin kx)$ , 证明积分

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T_n(x)]^2 dx \text{ 的最小值为 } \int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 dx - \pi \left[ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right].$$

## 第 8 章 矢量代数与空间解析几何

在科学研究和实际应用中,许多量(例如力、速度和力矩等)皆需要用矢量来表示和计算,本章主要介绍三维欧氏空间 $R^3$ 中的矢量(向量)及其运算,并在此基础上介绍平面、空间直线和一些常见曲面,特别是二次曲面的方程及其特性等内容.

### §8.1 矢量概念及其线性运算

#### 一、矢量的概念

**定义 8.1.1** 设 $A, B$ 为 $R^3$ 中的两个点,以 $A$ 为始点, $B$ 为终点所决定的既有大小( $A$ 到 $B$ 的距离)又有方向(从 $A$ 指向 $B$ 的方向)的几何量称为**矢量**,记为 $\overrightarrow{AB}$ .矢量的大小又称为矢量的**模**,记为 $|\overrightarrow{AB}|$ .

几何上用带箭头的线段表示矢量,线段的长度代表矢量的模,箭头所指的方向代表矢量的方向.在记号上,也常用黑体字母 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 等表示矢量,但因黑体字在书写不方便,所以通常用带箭头的字母来表示,如 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 等,如图 8.1,并用 $|\vec{a}|$ 表示矢量 $\vec{a}$ 的模.

决定一个矢量需要有两个因素,一是“大小”,即矢量的模,二是方向.平行移动一矢量不会改变这两个属性,因此,若矢量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ ,经过平行移动可以使始点和终点分别重合,也就是 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 经平行移动后完全重合,则称矢量 $\mathbf{a}$ 与矢量 $\mathbf{b}$ **相等**,记为 $\mathbf{a}=\mathbf{b}$ .这种经平行移动不改变其属性的矢量我们称为**自由矢量**,下面我们讨论的矢量皆为自由矢量.如图 8.2

模为 1 的矢量称为**单位矢量**,模为 0 的矢量称为**零矢量**.零矢量记为 $\mathbf{0}$ ,在不引起混淆的情况下也记为 0.这里要特别指出,零矢量的方向可看作是任意的.

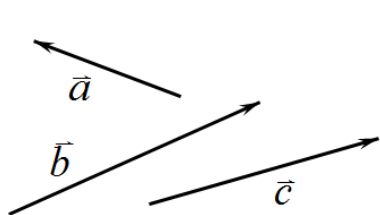


图 8.1

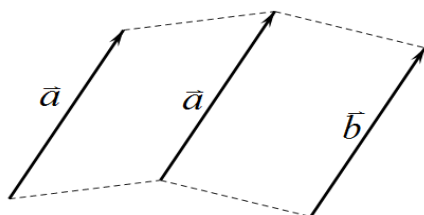


图 8.2

**定义 8.1.2** 将非零矢量  $a$  和  $b$  平行移动，使之始点重合，它们之间不大于  $\pi$  的夹角称为  $a$  与  $b$  的夹角. 当夹角为  $\frac{\pi}{2}$  时，称矢量  $a$  与  $b$  相互垂直，记作  $a \perp b$ ；当夹角为  $0$  或  $\pi$  时，称矢量  $a$  与  $b$  平行（或共线），记作  $a \parallel b$ . 如图 8.3

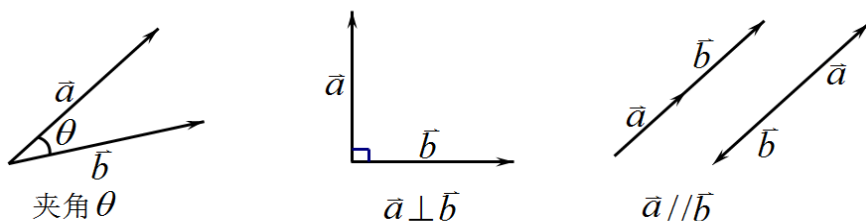


图 8.3

两个以上的矢量将它们的起点（经平行移动）移到同一点，如果这些矢量落在同一个平面内，则称这些矢量是共面的.

## 二、矢量的线性运算

### (1) 矢量的加减法

**定义 8.1.3** 将矢量  $a$  与  $b$  平行移动使其始点重合，以  $a$  与  $b$  为邻边得到一个平行四边形，以  $a$  与  $b$  的始点为始点的平行四边形的对角线矢量  $c$  称为  $a$  与  $b$  的和矢量，记作  $a+b=c$  或  $c=a+b$ . 如图 8.4.

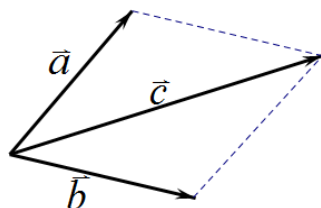


图 8.4

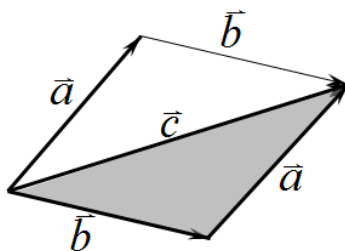


图 8.5

求和矢量的方法称为矢量的**加法**.

因矢量可以平行移动, 所以, 我们可以这样来得到  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ : 平行移动  $\mathbf{b}$  将其始点与矢量  $\mathbf{a}$  的终点重合, 以矢量  $\mathbf{a}$  的始点为始点, 矢量  $\mathbf{b}$  的终点为终点的矢量  $\mathbf{c}$  即为  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{b}$  的和矢量. 当然也可以平行移动使  $\mathbf{a}$  的始点与  $\mathbf{b}$  的终点重来得到  $\mathbf{c}$ , 如图 8.5. 图 8.4 中求和矢量的方法称为矢量加法的**平行四边形法则**, 图 8.5 求和矢量的方法称为矢量加法的**三角形法则**. 三角形法对多个矢量求和非常方便, 只要将它们依次首尾相接, 然后连接第一个矢量的始点和最后一个矢量的终点即为和矢量. 如图 8.6.

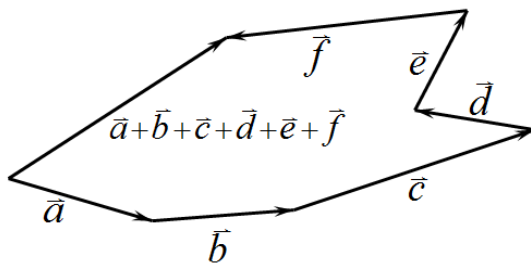


图 8.6

如果两个矢量  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{b}$  共线, 它们的和矢量是何情形? (请读者自己完成).

由矢量加法的平行四边形法则和三角形法则容易得到矢量的加法满足:

(i)  $\mathbf{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a}$

(ii) **交换律**:  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$

(iii) **结合律**:  $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$

其中  $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$  和  $\mathbf{c}$  为任意矢量.

**定义 8.1.4** 若矢量  $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$  和  $\mathbf{c}$  满足  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c}$ , 则称  $\mathbf{a}$  为  $\mathbf{c}$  与  $\mathbf{b}$  的**差矢量**, 记作  $\mathbf{a} = \mathbf{c} - \mathbf{b}$ ; 或  $\mathbf{b}$  为  $\mathbf{c}$  与  $\mathbf{a}$  的差矢量, 记作  $\mathbf{b} = \mathbf{c} - \mathbf{a}$ .

求差矢量的方法称为矢量的**减法**.

由加法的三角形法则我们不难得到减法  $\mathbf{a} - \mathbf{b}$  的三角形法则: 平行移动使  $\mathbf{a}$  和  $\mathbf{b}$  的始点重合, 从  $\mathbf{b}$  的终点到  $\mathbf{a}$  的终点的矢量即为  $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ . 如图 8.7

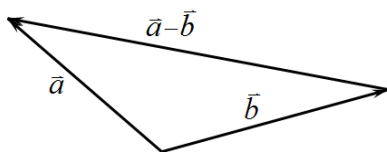


图 8.7

## (2) 矢量的数乘

**定义 8.1.5** 由矢量  $a$  与实数  $k$  生成的矢量  $d$  称为  $a$  的一个数乘, 记为  $d = ka$ ,

其中:

(1)  $d$  的模  $|d| = |k| \cdot |a|$ ;

(2)  $d$  的方向为: 当  $k > 0$  时,  $d$  与  $a$  的方向相同, 当  $k < 0$  时,  $d$  与  $a$  的方向相反.

由定义 8.1.5 易得数乘满足:

(i)  $1 \cdot a = a$

(ii) 分配律  $k(a + b) = ka + kb$ ;  $(k + l)a = ka + la$

(iii) 结合律  $(kl)a = k(la)$

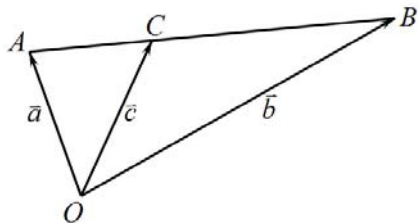
其中  $a, b$  为任意矢量,  $k, l$  为任意实数.

对矢量  $a$  我们有  $(-1) \cdot a = -a$ , 称  $-a$  为  $a$  的相反矢量, 它与  $a$  模相同, 方向相反. 且有, 对矢量  $a, b$ ,  $a - b = a + (-b)$ .

当  $a$  为非零矢量时, 通常用  $a^0$  表示方向与  $a$  相同的单位矢量, 由数乘运算知

$$a^0 = \frac{a}{|a|} \text{ 或 } a = |a| \cdot a^0.$$

**例 8.1.6** 已知矢量  $a, b$ , 如图.  $c$  的终点  $C$  在  $A$  与  $B$  的连线上, 且  $AB = 3AC$ , 求矢量  $c$ .



解：由矢量的减法和数乘知  $\mathbf{b} - \mathbf{a} = 3(\mathbf{c} - \mathbf{a})$ ，所以，

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \frac{1}{3}(\mathbf{b} - \mathbf{a}).$$

由数乘及其几何特性可得到以下结论.

**定理 8.1.7** 矢量  $\mathbf{b}$  与非零矢量  $\mathbf{a}$  共线的充分必要条件是存在唯一的实数  $k$ , 使得  $\mathbf{b} = k\mathbf{a}$ .

**证明** 充分性：若有实数  $k$  使  $\mathbf{b} = k\mathbf{a}$ ，由定义 8.1.5 知  $\mathbf{b}$  与  $\mathbf{a}$  必方向相同或方向相反，所以  $\mathbf{b}$  与  $\mathbf{a}$  共线.

必要性：若  $\mathbf{b}$  与  $\mathbf{a}$  共线，则  $\mathbf{b}$  与  $\mathbf{a}$  的方向相同或相反.  $\mathbf{b} = 0$  时取  $k = 0$  即可，显然成立. 现设  $\mathbf{b} \neq 0$ .

(i) 如果  $\mathbf{b}$  与  $\mathbf{a}$  方向相同，令  $k = \frac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|} > 0$ , 有：  $|\mathbf{b}| = k|\mathbf{a}| = |k\mathbf{a}|$ ，从而有

$$\mathbf{b} = k\mathbf{a};$$

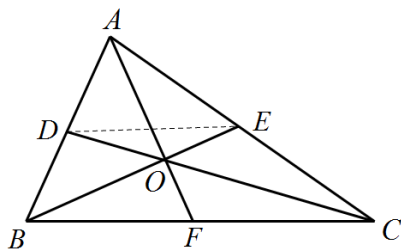
(ii) 如果  $\mathbf{b}$  与  $\mathbf{a}$  方向相反，令  $k = -\frac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|} < 0$ ,  $|\mathbf{b}| = -k|\mathbf{a}| = |k\mathbf{a}|$ ，从而

$$\mathbf{b} = k\mathbf{a}.$$

最后证明  $k$  的唯一性：若存在  $k_1 \neq k_2$ ，使  $\mathbf{b} = k_1\mathbf{a}$ ， $\mathbf{b} = k_2\mathbf{a}$ ，则  $(k_1 - k_2)\mathbf{a} = 0$ ，而  $\mathbf{a} \neq 0$ ，所以  $k_1 - k_2 = 0$ , 得  $k_1 = k_2$ ，与假设矛盾，因此，存在唯一的  $k$ , 使  $\mathbf{b} = k\mathbf{a}$ .

**例 8.1.8** 证明三角形三条中线相交于一点.

**证明** 作  $\triangle ABC$ ,  $D$ 、 $E$ 、 $F$  分别为三条边的中点，连接  $BE$ 、 $CD$  交于  $O$  点，再连接  $AO$  及  $OF$ ，现只要证明矢量  $\mathbf{AO}$  与  $\mathbf{OF}$  共线.



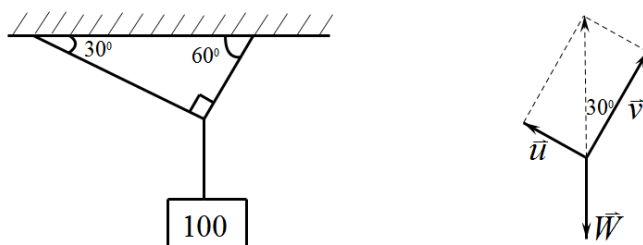
因为 $\triangle DOE$ 与 $\triangle COB$ 相似, 且 $DE = \frac{1}{2}BC$

所以 $OD = \frac{1}{2}CO$ , 即 $DO = \frac{1}{2}OC$ . 于是:

$$\begin{aligned} AO &= AD + DO = DB + \frac{1}{2}OC = DO + OB + \frac{1}{2}OC \\ &= OC + OB = OC + OC + CB = 2OC + 2CF \\ &= 2(OC + CF) = 2OF \end{aligned}$$

由定理 8.1.7 知,  $AO$  与  $OF$  共线, 因此, 三条中线  $BE$ 、 $CD$  和  $AF$  相交于一点.

**例 8.1.9** 一重量为 100 牛顿的物体挂在横梁的绳子上, 如图所示, 求两条绳子所受的力.



**解法 1:** 设物体重力为  $\mathbf{W}$ , 两条绳子受力为  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  如图. 则有

$$\begin{cases} |\mathbf{u}| \cos 30^\circ = |\mathbf{v}| \cos 60^\circ \\ |\mathbf{u}| \sin 30^\circ + |\mathbf{v}| \sin 60^\circ = |\mathbf{w}| = 100 \end{cases}$$

解得:  $|\mathbf{u}| = 50$  (牛顿),  $|\mathbf{v}| = 50\sqrt{3}$  (牛顿). 因此, 两条绳子所受的力分别为 50 牛顿和  $50\sqrt{3}$  牛顿, 方向沿绳子向上 (如图所示).

**解法 2:** 设  $\mathbf{w}$ ,  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  如上, 由力学知识知必有:  $-\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$ , 如图, 所以

$$|\mathbf{u}| = |\mathbf{w}| \sin 30^\circ = \frac{100}{2} = 50 \text{ (牛顿)},$$



$$|\boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{w}| \cos 30^\circ = 100 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 50\sqrt{3} \text{ (牛顿)},$$

即两条绳子所受的力分别为 50 牛顿和  $50\sqrt{3}$  牛顿. 方向沿绳子向上.

在例 8.1.9 中, 其实就是要将力  $-\boldsymbol{w}$  向  $\boldsymbol{u}^0$  与  $\boldsymbol{v}^0$  两个方向上“分解”, 显然有:  $-\boldsymbol{w} = 50\boldsymbol{u}^0 + 50\sqrt{3}\boldsymbol{v}^0$

事实上, 对两个任意的不共线的矢量  $\boldsymbol{a}$ ,  $\boldsymbol{b}$  只要矢量  $\boldsymbol{c}$  落在  $\boldsymbol{a}$ ,  $\boldsymbol{b}$  所决定的平面内, 则必可向  $\boldsymbol{a}$ ,  $\boldsymbol{b}$  两个方向上“分解”, 也就是说, 必存在常数  $k_1, k_2$ , 使  $\boldsymbol{c} = k_1\boldsymbol{a} + k_2\boldsymbol{b}$ . 我们有如下定理.

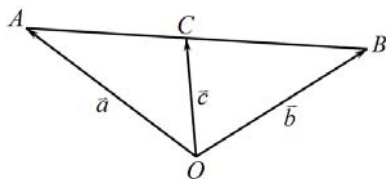
**定理 8.1.10** 设矢量  $\boldsymbol{a}$ ,  $\boldsymbol{b}$  不共线, 则矢量  $\boldsymbol{c}$  与  $\boldsymbol{a}$ 、 $\boldsymbol{b}$  共面的充分必要条件是存在唯一确定的两个实数  $k_1, k_2$ , 使得  $\boldsymbol{c} = k_1\boldsymbol{a} + k_2\boldsymbol{b}$ .

证明可从矢量加法与数乘的几何性质得出. 同理我们进一步有以下定理.

**定理 8.1.11** 若矢量  $\boldsymbol{a}$ 、 $\boldsymbol{b}$  和  $\boldsymbol{c}$  不共面, 则对任意矢量  $\boldsymbol{u}$ , 存在唯一确定的实数  $k_1, k_2, k_3$ , 使得  $\boldsymbol{u} = k_1\boldsymbol{a} + k_2\boldsymbol{b} + k_3\boldsymbol{c}$ .

请读者自行完成定理 8.1.10 和定理 8.1.11 的证明.

**例 8.1.12** 设矢量  $\boldsymbol{a}$ 、 $\boldsymbol{b}$  不共线,  $\boldsymbol{c} = k_1\boldsymbol{a} + k_2\boldsymbol{b}$ ,  $k_1, k_2$  为常数, 且  $\boldsymbol{a}$ ,  $\boldsymbol{b}$ ,  $\boldsymbol{c}$  的始点重合, 试证矢量  $\boldsymbol{a}$ ,  $\boldsymbol{b}$  和  $\boldsymbol{c}$  的终点在一条直线上的充分必要条件是  $k_1 + k_2 = 1$ .



**证明** 如图. 必要性: 若  $A, B, C$  共线, 则由定理 8.1.7 知存在唯一的实数  $k$ , 使  $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c} = k(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a})$ , 将  $\boldsymbol{c} = k_1\boldsymbol{a} + k_2\boldsymbol{b}$  代入得:

$$(kk_1 - k + k_1)\boldsymbol{a} + (kk_2 - 1 + k_2)\boldsymbol{b} = \mathbf{0}$$

因为  $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$  不共线, 所以有:

$$\begin{cases} kk_1 - k + k_1 = 0 \\ kk_2 - 1 + k_2 = 0 \end{cases} \quad \text{即: } k_1 = \frac{k}{k+1}, \quad k_2 = \frac{1}{k+1}$$

因此,  $k_1 + k_2 = 1$

充分性: 若  $k_1 + k_2 = 1$ . 即  $k_2 = 1 - k_1$ , 则有:

$$\mathbf{b} - \mathbf{c} = \mathbf{b} - k_1 \mathbf{a} - (1 - k_1) \mathbf{b} = k_1 (\mathbf{b} - \mathbf{a})$$

所以,  $\mathbf{b} - \mathbf{c}$  与  $\mathbf{b} - \mathbf{a}$  共线, 因此  $A$ 、 $B$ 、 $C$  三点共线.

## §8.2 矢量的乘法

### 一、矢量的点乘

在力学中, 若一物体在力  $\boldsymbol{F}$  的作用下从  $A$  点移到  $B$  点 (如图 8.8), 则力  $\boldsymbol{F}$  所作的功为:

$$W = |\boldsymbol{F}| \cdot |\boldsymbol{AB}| \cdot \cos \theta$$

其中  $\theta$  为  $\boldsymbol{F}$  与  $\boldsymbol{AB}$  的夹角. 又例如要求矢量  $\boldsymbol{a}$  在矢量  $\boldsymbol{b}$  上的有向投影 (长度):

$$(\boldsymbol{a})_b = |\boldsymbol{a}| \cos \theta = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}^0| \cos \theta$$

如图 8.9 所示.

对于以上这种特殊形式的矢量运算, 我们给出以下定义.

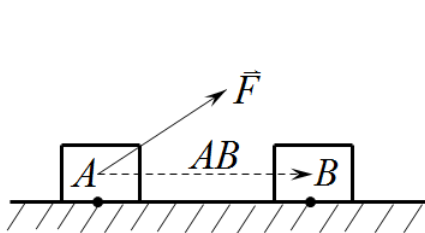


图 8.8

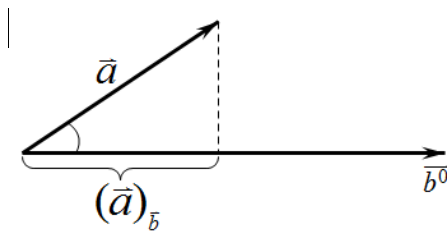


图 8.9

**定义 8.2.1** 矢量  $\boldsymbol{a}$  与  $\boldsymbol{b}$  的运算  $|\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cos \theta$  称为矢量  $\boldsymbol{a}$  和  $\boldsymbol{b}$  的点乘, 记为  $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ , 即  $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cos \theta$ . 其中  $\theta$  为  $\boldsymbol{a}$  和  $\boldsymbol{b}$  的夹角.

矢量的点乘也称为矢量的数量积、内积或点积.

由定义 8.2.1 知, 上述力  $\boldsymbol{F}$  所作的功可表示为  $W = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{AB}$ ; 矢量  $\boldsymbol{a}$  在  $\boldsymbol{b}$  上的有向投影 (长度) 可表示为  $(\boldsymbol{a})_b = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}^0$ .

特别地, 由矢量  $\boldsymbol{a}$  与  $\boldsymbol{a}$  的点乘可得  $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}}$ .

矢量的点乘满足以下运算规律:

- (i) 交换律  $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$
- (ii) 结合律  $k(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) = (k\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \cdot (k\boldsymbol{b})$
- (iii) 分配律  $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}$

其中  $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$  为任意矢量,  $k$  为任意实数.

在矢量点乘的定义中, 若  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , 即  $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$ , 则:  $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$ . 反之, 若

$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$ ，如果  $\boldsymbol{a}$  与  $\boldsymbol{b}$  均为非零矢量，那么必有  $\theta = \frac{\pi}{2}$ 。考虑到零矢量方向的任意性，我们可得以下定理。

**定理 8.2.2** 矢量  $\boldsymbol{a}$  和  $\boldsymbol{b}$  相互垂直的充分必要条件是它们的点乘等于零，即

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0.$$

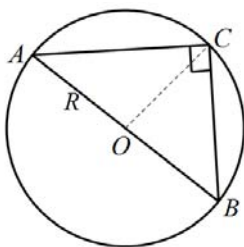
**例 8.2.3** 证明直径所对的圆周角为直角。

**证明** 如图所示，设圆半径为  $R$ ，要证明  $\angle ACB$  为直角，只要证明矢量  $\boldsymbol{AC} \perp \boldsymbol{BC}$  即可。因为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{AC} \cdot \boldsymbol{BC} &= (\boldsymbol{AO} + \boldsymbol{OC}) \cdot (\boldsymbol{BO} + \boldsymbol{OC}) \\ &= \boldsymbol{AO} \cdot (-\boldsymbol{OB}) + \boldsymbol{OC} \cdot (-\boldsymbol{OB}) + \boldsymbol{AO} \cdot \boldsymbol{OC} + \boldsymbol{OC} \cdot \boldsymbol{OC},\end{aligned}$$

又因为  $\boldsymbol{AO} = \boldsymbol{OB}$ ，且  $\boldsymbol{AO} \cdot \boldsymbol{AO} = \boldsymbol{OC} \cdot \boldsymbol{OC} = R^2$ ，

所以  $\boldsymbol{AC} \cdot \boldsymbol{BC} = -R^2 + R^2 = 0$ ，即得  $\boldsymbol{AC} \perp \boldsymbol{BC}$ 。



## 二、矢量的叉乘

在图 8.10 中，木棒在力  $\boldsymbol{F}$  的作用下发生转动，是因为由  $\boldsymbol{F}$  对木棒产生了一个力矩，其大小为  $|\boldsymbol{F}| \cdot |\boldsymbol{r}| \sin \theta$ 。而  $\boldsymbol{F}$  方向的改变可能引起转动方向相应的变化，当  $\boldsymbol{F}$  与  $\boldsymbol{r}$  平行时（即  $\theta = 0$  或  $\pi$ ），木棒不会转动，因为此时力矩为 0。

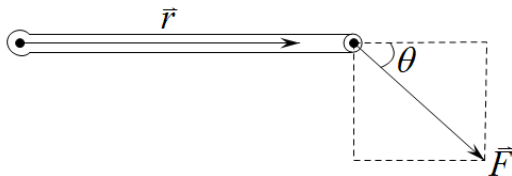


图 8.10

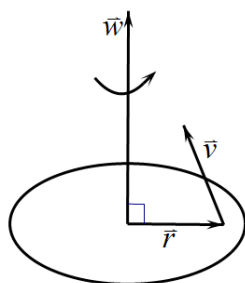


图 8.11

又如图 8.11 所示, 角速度为  $\boldsymbol{w}$  的圆盘, 其上某点的速度为  $\boldsymbol{v}$ , 其大小为  $|\boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{w}| \cdot |\boldsymbol{r}| \cdot \sin \frac{\pi}{2}$ ,  $\boldsymbol{v}$  为一个矢量, 其方向由右手法则确定, 即矢量  $\boldsymbol{w}$ ,  $\boldsymbol{r}$ ,  $\boldsymbol{v}$  符合**右手法则**: 伸出右手四指, 指向  $\boldsymbol{w}$  方向, 四指自然弯曲向  $\boldsymbol{r}$  方向, 大拇指所指方向即为  $\boldsymbol{v}$  方向.  $\boldsymbol{v}$  可以看作是矢量  $\boldsymbol{w}$  和  $\boldsymbol{r}$  经过一种特殊的运算得到, 这种运算具有普遍性, 有广泛的应用, 因此我们引入矢量的叉乘.

**定义 8.2.4** 矢量  $\boldsymbol{a}$  和  $\boldsymbol{b}$  按以下方式确定的矢量  $\boldsymbol{c}$  称为  $\boldsymbol{a}$  与  $\boldsymbol{b}$  的叉乘, 又称矢量积 (矢积)、外积或叉积, 记为  $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ :

(i)  $|\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \sin \theta$ , 其中  $\theta$  为  $\boldsymbol{a}$ 、 $\boldsymbol{b}$  的夹角;

(ii)  $\boldsymbol{c} \perp \boldsymbol{a}$ ,  $\boldsymbol{c} \perp \boldsymbol{b}$ , 且  $\boldsymbol{a}$ 、 $\boldsymbol{b}$ 、 $\boldsymbol{c}$  符合右手法则, 如图 8.12.

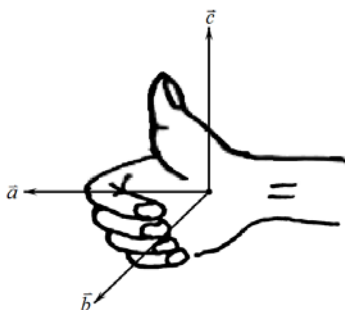


图 8.12

这样以上的力矩可表示为:  $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$ ; 速度可表示为:  $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w} \times \boldsymbol{r}$ .

几何上, 由定义 8.2.4, 矢量  $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$  的模即为以矢量  $\boldsymbol{a}$  与  $\boldsymbol{b}$  为邻边的平行四边形的面积.

要构造一个同时垂直两个矢量的矢量, 利用叉乘是比较方便的.

叉乘运算满足 (其中  $\boldsymbol{a}$ 、 $\boldsymbol{b}$ 、 $\boldsymbol{c}$  为任意矢量,  $k$  为任意实数):

(i) 反交换律  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$

(ii) 结合律  $k(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (k\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (k\mathbf{b})$

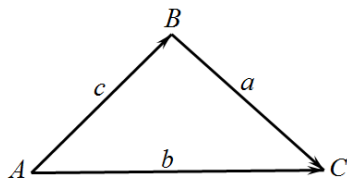
(iii) 分配律  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$ ,

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}.$$

在矢量的叉乘定义中, 若  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{b}$  的夹角  $\theta$  为  $0$  或  $\pi$ , 即  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{b}$  共线 (或  $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ ) 时,  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ ; 反之, 当  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$  时, 若  $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$  为非零矢量, 则必有  $\theta = 0$  或  $\pi$ , 即  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{b}$  共线 (平行). 注意到零矢量方向的任意性, 得以下定理.

**定理 8.2.5** 矢量  $\mathbf{a}$  和  $\mathbf{b}$  平行 (共线) 的充分必要条件是它们的叉乘为零矢量, 即  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ .

**例 8.2.6** 证明正弦定理  $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$ , 其中  $a, b, c$  为  $\triangle ABC$  的三条边,  $A, B, C$  为对应的三个角 (如图).



**证明:** 由矢量叉乘的几何意义,  $\triangle ABC$  的面积

$$S = \frac{1}{2} |\mathbf{AB} \times \mathbf{AC}| = \frac{1}{2} bc \sin A,$$

同理可得  $S = \frac{1}{2} |\mathbf{AC} \times \mathbf{CB}| = \frac{1}{2} ab \sin C$ ,  $S = \frac{1}{2} |\mathbf{BA} \times \mathbf{BC}| = \frac{1}{2} ac \sin B$ , 所以,

$$bc \sin A = ab \sin C = ac \sin B, \text{ 于是有: } \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}.$$

### 三、矢量的混合积

**定义 8.2.7** 设矢量  $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$  和  $\mathbf{c}$ , 称运算  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$  为矢量  $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$  和  $\mathbf{c}$  的混合积 (或三重积).

由矢量叉乘和点乘的定义知

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \cdot |\mathbf{c}| \cos \alpha = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \sin \theta \cdot |\mathbf{c}| \cos \alpha$$

其中  $\theta$  为  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{b}$  的夹角,  $\alpha$  为  $\mathbf{c}$  与  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  的夹角.

### 混合积的几何意义:

因为  $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$  为以  $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$  为邻边的平行四边形面积,  $|\mathbf{c}| \cos \alpha$  为以  $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ 、 $\mathbf{c}$  为相邻三条棱的平行六面体的高 (如图 8.13) (若  $\alpha$  为钝角,  $-|\mathbf{c}| \cos \alpha$  为其高). 所以混合积的绝对值  $|(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}|$  在几何上表示以  $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$  和  $\mathbf{c}$  为相邻三条棱的平行六面体的体积.

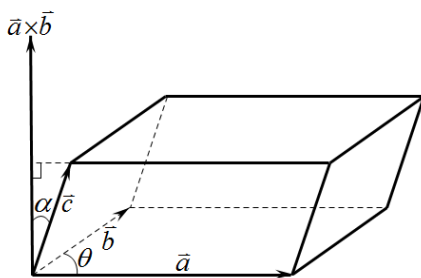


图 8.13

由混合积的这个几何意义及三个矢量的夹角情况不难得出混合积有以下性质, 我们称之为**轮换性**, 即对任意矢量  $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ 、 $\mathbf{c}$ , 有

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}$$

由混合积的几何意义我们还可得到以下定理, 并以此可方便地判断三个矢量是否共面.

**定理 8.2.8** 三个矢量  $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$  和  $\mathbf{c}$  共面的充分必要条件是它们的混合积为零, 即  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 0$ .

### §8.3 空间直角坐标系中矢量（向量）的表示及运算

前面从几何上定义了矢量及其运算，但这样的矢量表示和运算并不方便，为此，我们引进空间直角坐标系，把矢量和坐标中的点联系起来，使得矢量的表示和运算方便、快捷。

#### 一、空间直角坐标系

过空间一点  $O$  引三条相互垂直的数轴  $ox, oy$  和  $oz$ ，使其依次成右手法则，这样就建立了一个空间直角坐标系  $Oxyz$ ，如图 8.14. 其中  $O$  称为坐标原点，三条数轴称为坐标轴（ $x$  轴， $y$  轴和  $z$  轴），由任两条坐标轴确定的平面称为坐标平面（ $xoy$  平面， $yoz$  平面和  $zox$  平面）。三个坐标平面将空间分成八个部分，称为八个卦限，八个卦限编号如图 8.15.

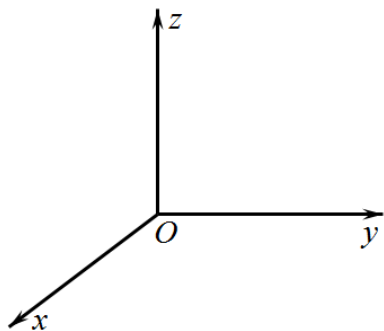


图 8.14

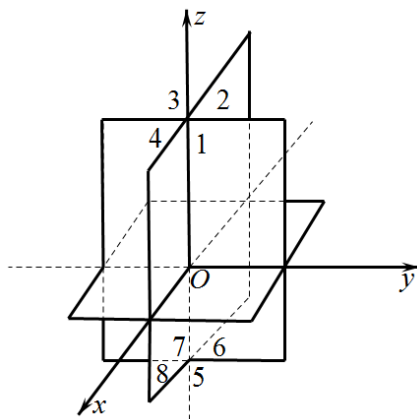


图 8.15

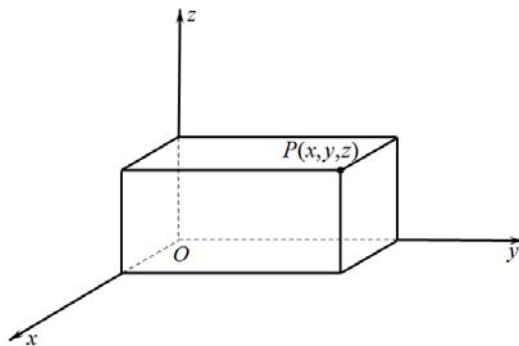


图 8.16



在空间直角坐标系中，我们用一组有序数  $(x, y, z)$  与空间的一点作对应。

对空间任一点  $P$ ，通过  $P$  分别作平行于三个坐标平面的平面，这三个平面与  $x$  轴， $y$  轴， $z$  轴的交点的读数  $x, y, z$  组成的有序数组  $(x, y, z)$  与  $P$  点相对应。反之，对任一有序数  $(x, y, z)$ ，过  $x$  轴上的  $x$  点， $y$  轴上的  $y$  点及  $z$  轴上的  $z$  点分别作平行于  $yoz$  平面， $zox$  平面及  $xoy$  平面的平面，此三个平面相交于一点  $P$ 。因此，空间的点  $P$  与有序数组  $(x, y, z)$  构成一一对应关系，我们称有序数组  $(x, y, z)$  为空间的点  $P$  的坐标，并称  $x$  为  $P$  的横坐标， $y$  为  $P$  的纵坐标， $z$  为  $P$  的竖坐标。如图 8.16。

例如点  $P_1$  的坐标为  $(-2, 1, 1)$ ，在第二卦限，点  $P_2$  的坐标为  $(2, -1, -2)$ ，在第七卦限。如图 8.17。

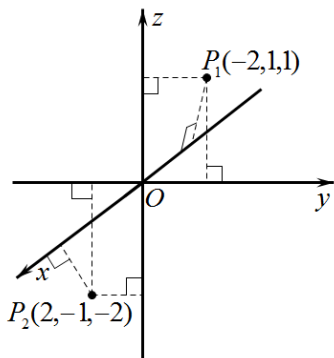


图 8.17

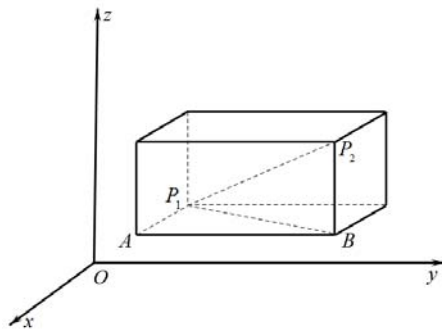


图 8.18

有了坐标表示，我们可以较容易地得到空间两点  $P_1, P_2$  之间的距离。如图 8.18 所示。

设  $P_1$  的坐标为  $(x_1, y_1, z_1)$   $P_2$  的坐标为  $(x_2, y_2, z_2)$ ，则有：

$$P_1A = |x_2 - x_1|, \quad AB = |y_2 - y_1|, \quad BP_2 = |z_2 - z_1|$$

所以  $P_1$  与  $P_2$  之间的距离为

$$P_1P_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

特别，空间任一点  $(x, y, z)$  与原点  $(0, 0, 0)$  之间的距离为

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

## 二、矢量及其运算的坐标表示

由定理 8.1.11 知，空间任一矢量可由三个不共面的矢量表示出来. 现在我们引入三个方向分别为三个坐标轴正向的单位矢量，记为  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ， $\mathbf{i}$  的方向与  $x$  轴正向一致， $\mathbf{j}$  的方向与  $y$  轴正向一致， $\mathbf{k}$  的方向与  $z$  轴正向一致.  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  三个矢量两两垂直. 如图 8.19 所示. 因此，空间任一矢量  $\mathbf{a}$  可由  $\mathbf{i}$ ， $\mathbf{j}$  和  $\mathbf{k}$  表示.

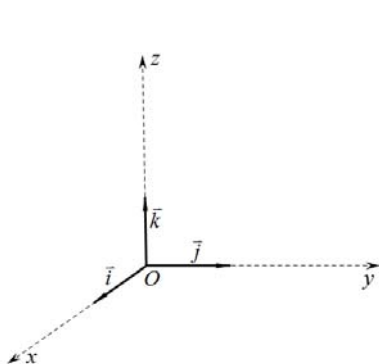


图 8.19

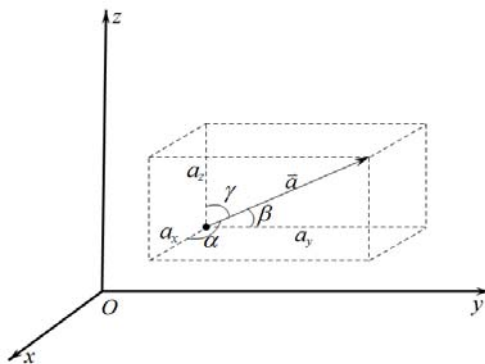


图 8.20

事实上，对任一矢量  $\mathbf{a}$ ，假设它在  $x$  轴， $y$  轴和  $z$  轴上的有向投影分别为  $a_x, a_y$  和  $a_z$ ，由矢量的加法和数乘知

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k} \quad (8.1)$$

(8.1) 式称为矢量  $\mathbf{a}$  的坐标表达式，即矢量  $\mathbf{a}$  沿三个坐标的矢量分解式. 如图 8.20.  $a_x, a_y, a_z$  分别称为  $\mathbf{a}$  在  $x$  轴， $y$  轴， $z$  轴上的坐标分量.

当矢量的始点为坐标原点时, 则矢量的终点坐标  $P(x, y, z)$  的三个值  $x, y, z$  即为矢量  $\mathbf{OP}$  在三个坐标轴上的分量, 即  $\mathbf{OP} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ . 始点在原点的矢量也称为**向量**. 因为我们讨论的是自由矢量, 因此矢量的表示和运算也就为向量的表示和运算. 显然, 向量由其终点的坐标所决定, 为方便起见, 在和坐标点不引起混淆的情况下, 通常我们把终点为  $P(x, y, z)$  的向量直接表示为

$$\mathbf{OP} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = (x, y, z).$$

设向量  $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k} = (a_x, a_y, a_z)$ , 由图 8.20 易知在直角坐标系中, 向量的模与方向可由下列表达式给出:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

$\mathbf{a}$  的方向由  $\mathbf{a}$  分别与三个坐标轴正向的夹角  $\alpha, \beta$  和  $\gamma$  来确定, 称  $\alpha, \beta$  和  $\gamma$  为向量  $\mathbf{a}$  的**方向角**. 显然, 当  $\mathbf{a} \neq 0$  时, 有

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\mathbf{a}|}, \quad \cos \beta = \frac{a_y}{|\mathbf{a}|}, \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{|\mathbf{a}|}.$$

这里,  $\cos \alpha, \cos \beta$  和  $\cos \gamma$  称之为向量  $\mathbf{a}$  的**方向余弦**. 通过方向余弦的计算可以确定方向角 ( $\alpha, \beta, \gamma \in [0, \pi]$ ). 由方向余弦的表达式可得关系式

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

$$\mathbf{a}^\circ = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \cos \alpha \cdot \mathbf{i} + \cos \beta \cdot \mathbf{j} + \cos \gamma \cdot \mathbf{k}$$

有了向量的坐标表达式, 在直角坐标系中, 向量运算可归结为向量对应的“坐标”运算.

### (i) 向量的加减法与数乘的坐标运算

设  $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}$ , 则由向量加减法与数乘的

运算规律得:

$$\mathbf{a} \pm \mathbf{b} = (a_x \pm b_x)\mathbf{i} + (a_y \pm b_y)\mathbf{j} + (a_z \pm b_z)\mathbf{k}$$

$$k\mathbf{a} = (ka_x)\mathbf{i} + (ka_y)\mathbf{j} + (ka_z)\mathbf{k}. \quad (k \text{ 为常数})$$

即两个向量相加(减)即为对应的坐标分量相加(减). 一个数乘向量即为此数乘到向量的各坐标分量上.

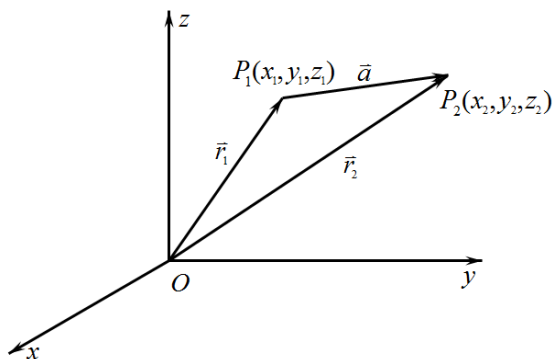


图 8.21

如图 8.21, 若某矢量  $\mathbf{a}$  的始点坐标为  $P_1(x_1, y_1, z_1)$  终点坐标为  $P_2(x_2, y_2, z_2)$  设始点和终点对应的向量分别为  $\mathbf{r}_1$  和  $\mathbf{r}_2$ , 则  $\mathbf{a} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ .

在直角坐标系下, 定理 8.1.7 可描述为: 两个向量共线(平行)的充分必要条件是它们对应的坐标分量成比例.

**例 8.3.1** 设空间三个点  $A(1, 0, -1)$ ,  $B(2, 3, 1)$  和  $C(0, -1, 3)$ , 在  $\triangle ABC$  中  $D$  为  $BC$  的中点, 求向量  $\mathbf{AD}$  的模与方向余弦.

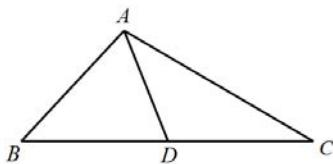


图 8.22

解: 如图 8.22,  $\mathbf{AD} = \mathbf{AB} + \mathbf{BD}$ , 即:  $\mathbf{AD} = \mathbf{AB} + \frac{1}{2}\mathbf{BC}$

而  $\mathbf{AB} = (2-1)\mathbf{i} + (3-0)\mathbf{j} + (1+1)\mathbf{k} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

$$\mathbf{BC} = -2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}, \quad \frac{1}{2}\mathbf{BC} = -\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

因此,  $\mathbf{AD} = \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ ,  $|\mathbf{AD}| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$

$$\cos \alpha = 0, \quad \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{10}}, \quad \cos \gamma = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

### (ii) 向量点乘的坐标运算

设  $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}$ , 则由点乘的运算规律得:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= (a_x b_x)(\mathbf{i} \cdot \mathbf{i}) + (b_x a_y + a_x b_y)(\mathbf{i} \cdot \mathbf{j}) + (a_z b_x + a_x b_z)(\mathbf{i} \cdot \mathbf{k}) + (a_y b_y)(\mathbf{j} \cdot \mathbf{j}) \\ &\quad + (a_z b_y + a_y b_z)(\mathbf{j} \cdot \mathbf{k}) + a_z b_z(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}) \end{aligned}$$

因为  $\mathbf{i}$ 、 $\mathbf{j}$  和  $\mathbf{k}$  是两两垂直的单位向量, 所以  $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0$ ,

$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$ , 于是

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad (8.2)$$

即两个向量的点乘等于它们对应的坐标分量乘积之和.

由公式 (8.2), 在直角坐标系中可容易地求出两向量的夹角.

设  $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ ,  $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$ , 则  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos \theta$ . ( $\theta$  为  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{b}$  的夹角), 有

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

**例 8.3.2** 设  $\mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{b} = \mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$ , 求  $\mathbf{a}$  在  $\mathbf{b}$  上的有向投影及  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{b}$  的夹角  $\theta$ .

**解:**  $\mathbf{a}$  在  $\mathbf{b}$  上的有向投影  $(a)_b = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}^0$

$$\text{而} \quad \mathbf{b}^0 = \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} = \frac{1}{\sqrt{1+16+64}}(\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 8\mathbf{k}) = \frac{1}{9}\mathbf{i} - \frac{4}{9}\mathbf{j} + \frac{8}{9}\mathbf{k}$$

所以  $\mathbf{a}$  在  $\mathbf{b}$  上的有向投影

$$(a)_b = \frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{16}{9} = \frac{7}{3}$$

又 
$$\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|} = \frac{1+4+16}{\sqrt{1+1+4} \cdot 9} = \frac{7\sqrt{6}}{18}.$$

因此  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{b}$  的夹角为  $\theta = \arccos \frac{7\sqrt{6}}{18}.$

**例 8.3.3** 设力  $\mathbf{F}$  将质点  $M$  从原点移到  $A(0,1,2)$  所作功为 11, 又从  $A$  移到  $B(-2,2,5)$  所作功为 28, 已知  $\mathbf{F}$  落在  $A, B$  与原点三点确定的平面内, 试求  $\mathbf{F}$ .

**解:** 由题设知  $\mathbf{F}$  与向量  $\mathbf{OA}, \mathbf{AB}$  共面.  $\mathbf{OA} = (0,1,2), \mathbf{AB} = (-2,1,3)$ , 所以有  $\mathbf{F} = k_1 \mathbf{OA} + k_2 \mathbf{AB}$ , (其中  $k_1, k_2$  为常数)

又因为  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{OA} = 11, \mathbf{F} \cdot \mathbf{AB} = 28$ , 有

$$\begin{cases} k_1 |\mathbf{OA}|^2 + k_2 \mathbf{OA} \cdot \mathbf{AB} = 11 \\ k_1 \mathbf{OA} \cdot \mathbf{AB} + k_2 |\mathbf{AB}|^2 = 28 \end{cases}$$

即: 
$$\begin{cases} 5k_1 + 7k_2 = 11 \\ 7k_1 + 14k_2 = 28 \end{cases} \quad \text{解得: } k_1 = -2, \quad k_2 = 3. \text{ 因此:}$$

$$\mathbf{F} = -2\mathbf{OA} + 3\mathbf{AB} = -6\mathbf{i} + \mathbf{j} + 5\mathbf{k}.$$

(iii) 向量叉乘的坐标运算.

设  $\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}, \mathbf{b} = b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}$ , 则由叉乘的运算规律得

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) \times (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}) \\ &= a_x b_x \mathbf{i} \times \mathbf{i} + a_y b_x \mathbf{j} \times \mathbf{i} + a_z b_x \mathbf{k} \times \mathbf{i} + a_x b_y \mathbf{i} \times \mathbf{j} + a_y b_y \mathbf{j} \times \mathbf{j} + a_z b_y \mathbf{k} \times \mathbf{j} \\ &\quad + a_x b_z \mathbf{i} \times \mathbf{k} + a_y b_z \mathbf{j} \times \mathbf{k} + a_z b_z \mathbf{k} \times \mathbf{k} \end{aligned}$$

因为  $\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0, \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$ , 因此

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_y b_z - a_z b_y) \mathbf{i} - (a_x b_z - a_z b_x) \mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \mathbf{k}$$

$$= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \mathbf{k} \quad (8.3)$$

为了记忆方便, 我们形式上用三阶行列式来表示向量叉乘的坐标运算表达式

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

**例 8.3.4** 设  $\mathbf{a} = (2, 1, -1)$ ,  $\mathbf{b} = (1, 0, -2)$ , 求

$$(1) \mathbf{a} \times \mathbf{b} \quad (2) (2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - \mathbf{b})$$

解: (1)  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -2\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k} + 4\mathbf{j} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$

$$(2) (2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = 2\mathbf{a} \times \mathbf{a} + 3\mathbf{b} \times \mathbf{a} - 2\mathbf{a} \times \mathbf{b} - 3\mathbf{b} \times \mathbf{b} \\ = -5\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -5(-2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}) = 10\mathbf{i} - 15\mathbf{j} + 5\mathbf{k}.$$

**例 8.3.5** 求以  $A(3, 0, -2)$ ,  $B(0, 1, 2)$ ,  $C(5, -1, 0)$  为顶点的三角形的面积.

解:  $\mathbf{AB} = (-3, 1, 4)$ ,  $\mathbf{AC} = (2, -1, 2)$ , 所以  $\triangle ABC$  的面积

$$S = \frac{1}{2} |\mathbf{AB} \times \mathbf{AC}|,$$

而  $\mathbf{AB} \times \mathbf{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 3\mathbf{k} - 2\mathbf{k} + 6\mathbf{j} + 4\mathbf{i} = 6\mathbf{i} + 14\mathbf{j} + \mathbf{k}$ , 于是所

求三角形面积为

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{36 + 196 + 1} = \frac{\sqrt{233}}{2}.$$

(iv) 向量的混合积的坐标运算

设  $\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{b} = b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{c} = c_x \mathbf{i} + c_y \mathbf{j} + c_z \mathbf{k}$ , 则由叉乘和点乘的坐标运算公式 (8.2) 式, (8.3) 式得

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \left( \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \mathbf{k} \right) \cdot (c_x \mathbf{i} + c_y \mathbf{j} + c_z \mathbf{k})$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} c_x - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} c_y + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} c_z \\
&= \begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \quad (8.4)
\end{aligned}$$

根据行列式“交换两行，行列式的值改变符号”的性质可得混合积的轮换性：

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}.$$

**例 8.3.6** 设五点  $A(0,1,0)$ ,  $B(1,0,1)$ ,  $C(4,4,6)$ ,  $D(2,2,3)$ ,  $E(10,14,17)$ .

(1) 试求以  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  为顶点的四面体体积  $V$ ;

(2) 证明  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$  四点共面.

(1) **解：**  $\mathbf{AB} = (1, -1, 1)$ ,  $\mathbf{AC} = (4, 3, 6)$ ,  $\mathbf{AD} = (2, 1, 3)$ , 所以

$$V = \frac{1}{6} |(\mathbf{AB} \times \mathbf{AC}) \cdot \mathbf{AD}|$$

$$\text{而 } (\mathbf{AB} \times \mathbf{AC}) \cdot \mathbf{AD} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 12 + 4 - 6 + 12 - 6 = 1$$

$$\text{因此 } V = \frac{1}{6}.$$

(2) **证明：** 因为  $\mathbf{BC} = (3, 4, 5)$ ,  $\mathbf{BD} = (1, 2, 2)$ ,  $\mathbf{BE} = (9, 14, 16)$ .

于是

$$(\mathbf{BC} \times \mathbf{BD}) \cdot \mathbf{BE} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \\ 9 & 14 & 16 \end{vmatrix} = 96 + 72 + 70 - 90 - 84 - 64 = 0$$

因此向量  $\mathbf{BC}$ ,  $\mathbf{BD}$ ,  $\mathbf{BE}$  共面，即有  $B, C, D, E$  四点共面.



## §8.4 平面与空间直线

在三维空间中，我们不难想象一张无限伸展的平面或一条无限伸展的直线是一个什么样的情形。但在空间直角坐标系中，我们如何来表示它们呢？以下介绍平面与空间直线方程。

我们用代数方程表示平面或直线，那么何为某平面（直线）的方程呢？我们有以下定义：若满足某方程的点皆落在某平面（直线）上，且此平面（直线）上的点皆满足该方程，则称该方程为此平面（直线）的方程。

例如若满足  $f(x, y, z) = 0$  的点  $(x, y, z)$  皆落在平面  $\pi$  上，且平面  $\pi$  上的点  $(x, y, z)$  皆满足方程  $f(x, y, z) = 0$ ，则  $f(x, y, z) = 0$  即为平面  $\pi$  的方程。

### 一、平面方程

我们知道，要确定一个平面，可以有多种条件，例如已知以下条件之一即可确定一个平面：

- (i) 平面上一点和一个与平面垂直的矢量；
  - (ii) 平面上三个不共线的点；
  - (iii) 平面上一点和两个不平行的且与平面皆平行的矢量。
- 等等。

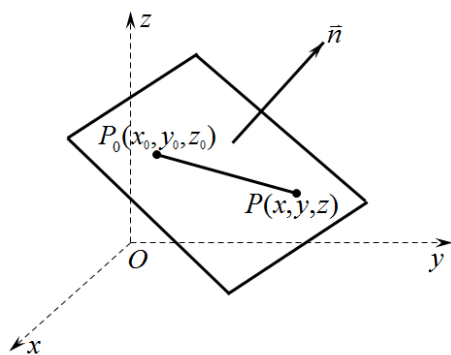


图 8.23

现在，对条件 (i)，来求所确定平面的方程。假设平面  $\pi$  通过点  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  且与非零矢量  $\mathbf{n} = (A, B, C)$  垂直。（如图 8.23），对  $\pi$  上任意

一点  $P(x, y, z)$ , 有  $\overrightarrow{P_0P} \perp \mathbf{n}$ , 即:

$$\overrightarrow{P_0P} \cdot \mathbf{n} = 0.$$

因为  $\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ , 所以

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad (8.5)$$

也就是说, 平面  $\pi$  上的点  $(x, y, z)$  皆满足方程 (8.5); 反之, 若点  $(x, y, z)$  满足 (8.5) 式, 则有  $(A, B, C) \perp (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ , 于是  $(x, y, z)$  必落在平面  $\pi$  上, 因此, 方程 (8.5) 即为所确定平面的方程, 我们称方程 (8.5) 为平面的点法式方程, 矢量  $\mathbf{n} = (A, B, C)$  称为平面的法矢量 (或法向).

将方程 (8.5) 改写得 (其中  $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$ ):

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (8.6)$$

为一个关于  $x, y, z$  的三元一次方程. 因此, 平面方程是一个三元一次方程. 事实上, 反之亦然, 三元一次方程必表示一个平面: 设任一三元一次方程  $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ , (其中  $A_1, B_1, C_1$  不全为零), 此方程必有解,

不妨设  $A_1 \neq 0$ , 则  $x = -\frac{D_1}{A_1}$ ,  $y = 0, z = 0$  即为其解, 也就是说点  $(-\frac{D_1}{A_1}, 0, 0)$

满足三元一次方程  $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ , 方程可改写为:

$A_1(x_1 + \frac{D_1}{A_1}) + B_1(y - 0) + C_1(z - 0) = 0$ , 此方程即表示一个通过点

$(-\frac{D_1}{A_1}, 0, 0)$  且与矢量  $\mathbf{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$  垂直的平面.

方程 (8.6) 称为平面的一般式方程. 显然, 平面的点法式方程和一般式方程是等价的, 可以互相转化.

特别, 利用平面的点法式或一般式方程皆能容易地得到三个坐标平面的方程为:

$xoy$  平面:  $z = 0$

$yoz$  平面:  $x = 0$

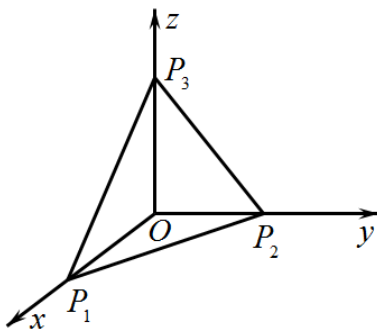
$zox$  平面:  $y = 0$

另外, 平面一般式方程中各系数满足特殊条件时, 平面就有特殊的几何位置和性质, 例如若平面方程  $Ax + By + Cz + D = 0$  中  $D = 0$  时, 即可知道此平面必通过原点, 反之亦然. (8.6) 式方程中若  $A, B, C$  中恰有一个为零或恰有二个为零, 这时平面又分别有什么特性呢, 请读者自行分析.

**例 8.4.1** 求过三点  $P_1(a, 0, 0), P_2(0, b, 0), P_3(0, 0, c)$  的平面方程, 其中  $a, b, c$  皆为非零常数.

**解法 1** 设所求平面方程为  $Ax + By + Cz + D = 0$ , 将  $P_1, P_2, P_3$  点的坐标代入得

$$\begin{cases} Aa + D = 0 \\ Bb + D = 0 \\ Cc + D = 0 \end{cases} \quad \text{解得} \quad A = -\frac{D}{a}, \quad B = -\frac{D}{b}, \quad C = -\frac{D}{c}$$



所以所求平面方程为:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad (8.7)$$

因为这里的  $a, b, c$  其实就是平面在三个坐标轴上的截距, 所以, (8.7) 式的方程称为平面的**截距式方程**. 注意, 只有平面在三个坐标轴的截距都不为零时, 才具有形如 (8.7) 式的截距式方程.

**解法 2** 利用平面的点法式方程.  $\overrightarrow{P_1P_2} = -ai + bj$ ,  $\overrightarrow{P_1P_3} = -ai + ck$

$$\text{所以所求平面的法向量可取为 } \mathbf{n} = \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = bci + acj + abk$$

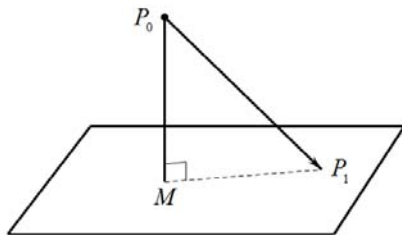
任取  $P_1, P_2, P_3$  中的一点, 如取  $P_1(a, 0, 0)$  得平面方程为

$$bc(x-a) + ac(y-0) + ab(z-0) = 0,$$

化简为:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

**例 8.4.2** 求点  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  到平面  $Ax + By + Cz + D = 0$  的距离.



**解:** 如图, 过  $P_0$  作平面的垂线  $P_0M$ , 交平面于  $M$  点, 则矢量  $\mathbf{P}_0\mathbf{M}$  与平面的法矢量  $\mathbf{n} = (A, B, C)$  平行, 再在平面内任取一点  $P_1(x_1, y_1, z_1)$ , 可知所求距离  $d = |\mathbf{P}_0\mathbf{M}|$  即为矢量  $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$  在单位法矢量

$\mathbf{n}^\circ = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \cdot (A, B, C)$  上的投影长度. 所以

$$\begin{aligned} d = |\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{n}^\circ| &= \frac{|A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \\ &= \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 - Ax_0 - By_0 - Cz_0|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \end{aligned}$$

因为  $P_1$  在平面上, 所以  $Ax_1 + By_1 + Cz_1 = -D$ , 于是

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (8.8)$$

(8.8) 式即为点到平面的距离公式.

## 二、直线方程

与平面一样, 要确定一条空间直线, 也可有多种条件, 例如只要已知以下任一条件皆可确定一条直线:

- (i) 直线上的一点和一个与直线平行的矢量;
- (ii) 直线上两个点;
- (iii) 给定两个通过直线的不同平面 (交线).

等等.

若已知直线  $L$  上一点  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  和与直线平行的矢量  $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ , 如图 8.24. 在  $L$  上任取一点  $P(x, y, z)$ .

$$\mathbf{P_0P} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$$

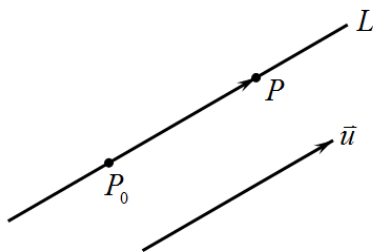


图 8.24

则有:  $\mathbf{P_0P} \parallel \mathbf{u}$ , 由两个矢量平行的充分必要条件知:

$$\frac{x - x_0}{u_x} = \frac{y - y_0}{u_y} = \frac{z - z_0}{u_z} \quad (8.9)$$

即直线  $L$  上的点皆满足 (8.9) 式, 反之, 满足 (8.9) 式的点  $(x, y, z)$  必在直线  $L$  上. 因此, (8.9) 式的方程即为所求直线方程. 事实上 (8.9) 式又可改写为  $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + k(u_x, u_y, u_z)$ , 即直线上的任一点可由点  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  和方向  $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$  唯一确定 (唯一的  $k$ ), 因此, (8.9) 式称之为直线的点向式方程, 也称为直线的对称式方程.

(8.9) 式也可分开写成

$$\begin{cases} \frac{x - x_0}{u_x} = \frac{y - y_0}{u_y} \\ \frac{x - x_0}{u_x} = \frac{z - z_0}{u_z} \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} \frac{x - x_0}{u_x} = \frac{y - y_0}{u_y} \\ \frac{y - y_0}{u_y} = \frac{z - z_0}{u_z} \end{cases}$$

容易看出, 这是两个方程联立, 每个方程代表一个平面, 因此, 直

线可以看成是两个平面的交线. 当然, 任一条直线看成为两个平面的交线时, 这两个平面的选取是不唯一的, 且可有无限多种取法.

在 (8.9) 式中, 若  $u_x, u_y, u_z$  中有一个为零, 譬如  $u_x = 0$ , 则方程可写为

$$\begin{cases} x = x_0 \\ \frac{y - y_0}{u_y} = \frac{z - z_0}{u_z} \end{cases}$$

若  $u_x, u_y, u_z$  中有二个为零, 例如  $u_x = u_y = 0$ , 则直线方程即为:

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \end{cases}$$

从上可知, 若已知过直线的两个不同的平面  $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$  和  $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ . (此时  $\mathbf{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$  与  $\mathbf{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$  必不平行), 则直线方程可表示为

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \quad (8.10)$$

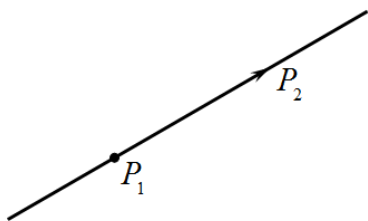
(8.10) 式称为直线的一般式方程.

若在 (8.9) 式中引入参数  $t$ , 令  $\frac{x - x_0}{u_x} = \frac{y - y_0}{u_y} = \frac{z - z_0}{u_z} = t$ , 则

$$\begin{cases} x = x_0 + u_x t \\ y = y_0 + u_y t \\ z = z_0 + u_z t \end{cases}, \quad t \in (-\infty, +\infty) \quad (8.11)$$

(8.11) 式称为直线的参数式方程,  $t$  为参数.

**例 8.4.3** 求过  $P_1(x_1, y_1, z_1)$  和  $P_2(x_2, y_2, z_2)$  的直线方程.



解：由直线的点向式方程，可取

$$\mathbf{u} = \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

再取  $P_1$  点，因此得所求直线方程为

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \quad (8.12)$$

(8.12) 式称为直线的两点式方程.

**例 8.4.4** 将直线的一般式方程  $\begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ 2x - y + z - 7 = 0 \end{cases}$  化为直线的点向式方程.

解：设直线的方向为  $\mathbf{u}$ ，知  $\mathbf{u}$  必与平面  $x + y + z + 1 = 0$  与  $2x - y + z - 7 = 0$  的法向  $\mathbf{n}_1 = (1, 1, 1)$  和  $\mathbf{n}_2 = (2, -1, 1)$  皆垂直，所以可取：

$$\mathbf{u} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k},$$

现再取直线上一点：令  $z = 0$ ，代入直线方程得：  $\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ 2x - y - 7 = 0 \end{cases}$ ，解得：

$\begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}$  于是得直线上一点为  $(2, -3, 0)$ ，因此直线的点向式方程为

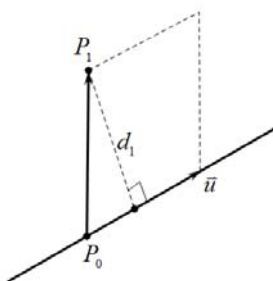
$$\frac{x - 2}{2} = \frac{y + 3}{1} = \frac{z}{-3}.$$

**例 8.4.5** 求点  $P_1(x_1, y_1, z_1)$  到直线  $\frac{x - x_0}{u_x} = \frac{y - y_0}{u_y} = \frac{z - z_0}{u_z}$  的距离  $d_1$ .

解：如图，在直线上取一点  $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ，则所求距离  $d_1$  即为由  $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$  与直线方向  $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$  所组成的平行四边形的高. 设平行四边形面积为  $S$ ，则有：

$$S = |\mathbf{u}| \cdot d_1. \quad \text{又有} \quad S = |\mathbf{u} \times \mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|, \quad \text{所以}$$

$$d_1 = \frac{|\mathbf{u} \times \mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1|}{|\mathbf{u}|} \quad (8.13)$$



计算得:

$$d_1 = \frac{\sqrt{[u_y(z_1 - z_0) - u_z(y_1 - y_0)]^2 + [u_x(z_1 - z_0) - u_z(x_1 - x_0)]^2 + [u_y(x_1 - x_0) - u_x(y_1 - y_0)]^2}}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}}.$$

(8.13)式即为点到直线的距离公式.

### 三、平面束方程

我们知道, 通过一条定直线的平面可有无限多个, 若已知定直线  $L$  的方程, 如何来表示通过  $L$  的这无限多个平面呢?

假设直线  $L$  的方程为

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases},$$

记  $\mathbf{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ ,  $\mathbf{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ . 我们考察如下方程

$$\lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0 \quad (8.14)$$

其中  $\lambda, \mu$  为任意实数, 且不同时为零.

因为  $\mathbf{n}_1$  与  $\mathbf{n}_2$  不平行, 因此 (8.14) 式必是一个三元一次方程, 即为一个平面方程. 又因为满足直线  $L$  的方程的点必满足 (8.14) 式, 所以, (8.14) 式表示的平面过直线  $L$ .

反之, 任一通过  $L$  的平面皆可表示成 (8.14) 式的形式:

(1) 当  $\lambda \neq 0, \mu = 0$  时, (8.14) 式即为平面  $\pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ ;

(2) 当  $\lambda = 0, \mu \neq 0$  时, (8.14) 式为平面  $\pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ ;



(3) 对  $\pi_1, \pi_2$  以外的通过直线  $L$  的平面  $\pi$ , 我们也必可用 (8.14) 式来表示: 设  $\pi$  通过直线  $L$  外一点  $P_0(x_0, y_0, z_0)$ , 则  $P_0 \notin \pi_1, P_0 \notin \pi_2$ , 即有

$$t_1 = A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1 \neq 0, \quad t_2 = A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2 \neq 0,$$

代入(8.14)式得  $\lambda t_1 + \mu t_2 = 0$ . 所以, 只要取  $\lambda = -\frac{t_2}{t_1}\mu$ , 所得方程

$$-\frac{t_2}{t_1}(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

即为平面  $\pi$  的方程 (因为过一条直线和直线外一点的平面是唯一确定的).

因此, (8.14) 式表示所有通过直线  $L$  的平面. 我们称之为通过直线  $L$  的平面束方程. 如图 8.25.

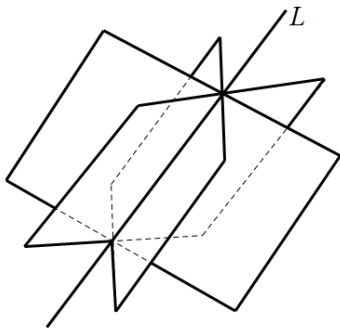


图 8.25

有时, 为方便起见, 平面束方程 (8.14) 式可以改写为只有一个参数的方程  $\lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

或  $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \mu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$

但须注意, 以上两个平面束方程分别不含平面  $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$  和  $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ .

在解决有关求平面的方程等问题时, 利用平面束方程会带来很大的方便.

**例 8.4.6** 求过直线  $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-2}$  且与平面  $x-2y+z-3=0$  垂直的平面方程.

**解法 1:** 利用平面的点法式方程. 所求平面通过点  $(1, -1, 0)$ . 已知直线的方向矢量为  $\mathbf{u} = (2, 1, -2)$ , 已知平面的法向为  $\mathbf{n} = (1, -2, 1)$ , 于是所求平面的法向矢量可取为

$$\mathbf{n}_1 = \mathbf{u} \times \mathbf{n} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k},$$

因此, 所求平面方程为  $-3(x-1) - 4(y+1) - 5(z-0) = 0$ , 即:

$$3x + 4y + 5z + 1 = 0.$$

**解法 2:** 利用平面束方程. 将已知直线方程写为

$$\begin{cases} \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} \\ \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-2} \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x-2y-3=0 \\ 2y+z+2=0 \end{cases}, \text{ 从而设所求平面方程为}$$

$$\lambda(x-2y-3) + \mu(2y+z+2) = 0, \quad \text{即: } \lambda x + (2\mu - 2\lambda)y + \mu z + 2\mu - 3\lambda = 0,$$

其法向  $\mathbf{n}_1 = (\lambda, 2\mu - 2\lambda, \mu)$  与已知平面法向  $\mathbf{n} = (1, -2, 1)$  垂直, 于是有:

$$\lambda - 2(2\mu - 2\lambda) + \mu = 0,$$

得:  $\lambda = \frac{3}{5}\mu$ , 于是所求平面方程为:  $\frac{3}{5}\mu x + \frac{4}{5}\mu y + \mu z + \frac{1}{5}\mu = 0$ , 即:

$$3x + 4y + 5z + 1 = 0.$$

## 四、平面、直线的位置关系

### (1) 平面与平面

两个平面  $\pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$  与  $\pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$  的位置关系有平行与相交两种. 记  $\mathbf{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ ,  $\mathbf{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ , 有

(i)  $\pi_1 \parallel \pi_2$  的充分必要条件是  $\mathbf{n}_1 \parallel \mathbf{n}_2$ , 即:  $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ .

两个平面重合可看成是两个平面平行的特殊情况, 易知,  $\pi_1$  与  $\pi_2$  重

合的充分必要条件是  $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$ .

(ii) 当  $\pi_1$  与  $\pi_2$  相交时, 其夹角 (二面角) 即为  $\mathbf{n}_1$  与  $\mathbf{n}_2$  的夹角  $\theta$  (当  $\theta \leq \frac{\pi}{2}$  时) 或  $\pi - \theta$  (当  $\theta > \frac{\pi}{2}$  时).

特别当  $\theta = 0$  或  $\pi$  时, 即为  $\pi_1 \parallel \pi_2$ . 当  $\theta = \frac{\pi}{2}$  时,  $\pi_1 \perp \pi_2$ , 因此  $\pi_1 \perp \pi_2$  的充分必要条件是  $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$ .

## (2) 平面与直线

设平面  $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$ , 直线  $L: \frac{x-x_0}{u_x} = \frac{y-y_0}{u_y} = \frac{z-z_1}{u_z}$ , 它们之间的位置关系有平行与相交两种.

(i) 直线  $L$  与平面  $\pi$  平行的充分必要条件  $\mathbf{n} \perp \mathbf{u}$ , 其中  $\mathbf{n} = (A, B, C)$ ,  $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ , 即  $Au_x + Bu_y + Cu_z = 0$ .

直线  $L$  落在平面  $\pi$  内可以看成是直线  $L$  平行于平面  $\pi$  的特殊情况, 显然, 直线  $L$  落在平面  $\pi$  内的充分必要条件是 “ $\mathbf{n} \perp \mathbf{u}$  且直线  $L$  与平面  $\pi$  有一交点” 或 “直线  $L$  与平面  $\pi$  有两个不同的交点”.

(ii) 当直线  $L$  与平面  $\pi$  相交时 (唯一交点), 它们之间的交角  $\alpha$  是  $\frac{\pi}{2} - \theta$  (当  $\theta < \frac{\pi}{2}$  时) 或  $\theta - \frac{\pi}{2}$  (当  $\theta > \frac{\pi}{2}$  时), 其中  $\theta$  为  $\mathbf{n}$  与  $\mathbf{u}$  的夹角, 如图 8.26. 特别, 当  $\theta = 0$  或  $\pi$  时, 直线  $L$  与平面  $\pi$  垂直. 当  $\theta \neq \frac{\pi}{2}$  时, 直线  $L$  与平面  $\pi$  有唯一交点.

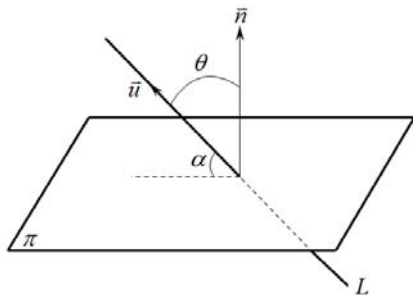


图 8.26

### (3) 直线与直线

设两条直线方程为:

$$L_1: \frac{x-x_1}{u_x} = \frac{y-y_1}{u_y} = \frac{z-z_1}{u_z}, \quad L_2: \frac{x-x_2}{v_x} = \frac{y-y_2}{v_y} = \frac{z-z_2}{v_z},$$

它们的方向矢量分别为  $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$  和  $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ . 则它们的位置关系有平行、相交和异面三种.

(i)  $L_1$  与  $L_2$  平行的充分必要条件是  $\mathbf{u} \parallel \mathbf{v}$ . 两条直线重合可看成是两条直线平行的特殊情况. 显然,  $L_1$  与  $L_2$  重合的充分必要条件是 “ $\mathbf{u} \parallel \mathbf{v}$  且  $L_1$  与  $L_2$  有一个交点” 或 “ $L_1$  与  $L_2$  有两个交点”.

当  $L_1$  与  $L_2$  不平行时, 其夹角为  $\theta$  (当  $\theta \leq \frac{\pi}{2}$  时) 或  $\pi - \theta$  (当  $\theta > \frac{\pi}{2}$  时), 其中  $\theta$  为  $\mathbf{u}$  与  $\mathbf{v}$  的夹角. 特别当  $\theta = \frac{\pi}{2}$  时,  $L_1 \perp L_2$ .

(ii)  $L_1$  与  $L_2$  有唯一交点的充分必要条件是存在唯一确定的实数  $t_1$  和  $t_2$ , 使

$$\begin{cases} x_1 + t_1 u_x = x_2 + t_2 v_x \\ y_1 + t_1 u_y = y_2 + t_2 v_y \\ z_1 + t_1 u_z = z_2 + t_2 v_z \end{cases}$$

或以下方程组 (其实可写成四个方程)

$$\begin{cases} \frac{x-x_1}{u_x} = \frac{y-y_1}{u_y} = \frac{z-z_1}{u_z} \\ \frac{x-x_2}{v_x} = \frac{y-y_2}{v_y} = \frac{z-z_2}{v_z} \end{cases}$$

有唯一解  $(x_0, y_0, z_0)$ , 此解即为交点.

(iii) 若  $L_1$  与  $L_2$  既不平行又不相交 (无交点), 则我们称两条直线为异面直线. 如图 (8.27).

记  $P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2)$ , 那么  $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ , 根据混合积的几何意义, 易知  $L_1$  与  $L_2$  异面的充分必要条件为

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 \neq 0.$$

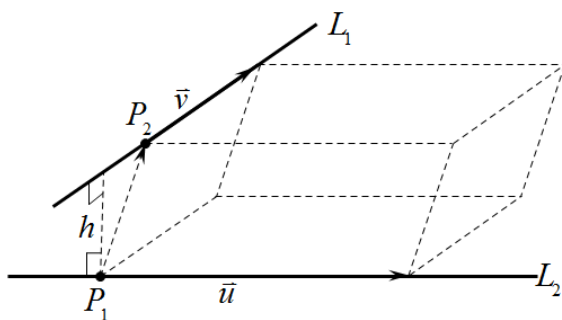


图 8.27

设  $M, N$  为  $L_1$  与  $L_2$  上的点, 若  $M, N$  所在的直线和  $L_1$  与  $L_2$  皆垂直, 则称线段  $MN$  的长为异面直线  $L_1$  与  $L_2$  的距离.

过  $L_1$  作平行于  $L_2$  的平面, 则从  $L_2$  上任一点到此平面的距离即为异面直线  $L_1$  与  $L_2$  的距离. 如图 8.27 中的  $h$  即为  $L_1$  与  $L_2$  的距离, 并有:

$$h = \frac{|(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2|}{|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|}$$

请读者自己推导此公式.

## §8.5 曲面与空间曲线

### 一、曲面方程

我们知道, 在三维空间中, 与某定点  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  的距离为常数  $R$  的所有点的轨迹 (图象) 是一个球心为  $P_0$ , 半径为  $R$  的球面, 如图 8.28, 且由距离公式知此球面的方程可写为:

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2,$$

且任意满足此方程的点  $P(x, y, z)$  必在球面上, 所以  $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2$  即为球心为  $P_0$ , 半径为  $R$  的球面方程.

一般, 在空间直角坐标系中, 一张曲面可由方程  $F(x, y, z) = 0$  来表示. 例如平面方程  $Ax + By + Cz + D = 0$  可以说是曲面最简单的情形.

曲面方程还可以用含有两个独立参变量的参数方程

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases} \quad (\text{其中 } u, v \text{ 为参数})$$

来表示. 例如球面方程  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  可用参数方程

$$\begin{cases} x = R \sin \varphi \cos \theta \\ y = R \sin \varphi \sin \theta \\ z = R \cos \varphi \end{cases} \quad (0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta < 2\pi)$$

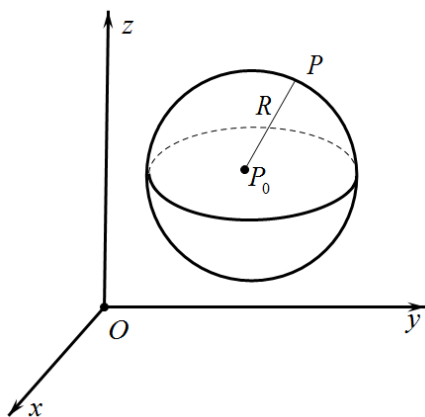


图 8.28

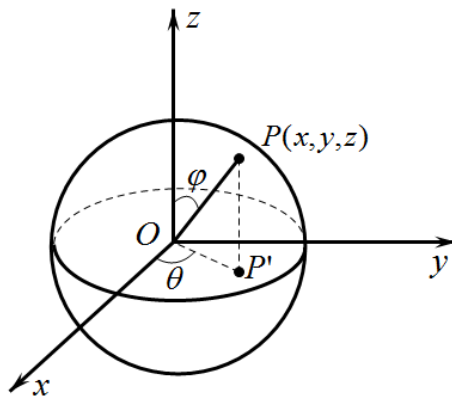


图 8.29

其中  $\varphi, \theta$  为参数,  $\varphi$  为  $z$  轴正向到  $OP$  的夹角,  $\theta$  为  $x$  轴正向到  $OP'$  的夹角.  $P'$  为  $P$  在  $xoy$  平面上的投影点. 如图 8.29.

同理, 球面方程  $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2$  可用参数方程

$$\begin{cases} x = x_0 + R \sin \varphi \cos \theta \\ y = y_0 + R \sin \varphi \sin \theta \\ z = z_0 + R \cos \varphi \end{cases} \quad (\varphi, \theta \text{ 为参数})$$

来表示.

## 二、曲线方程

直线可以表示成两个平面的交线 (直线的一般式方程), 一般, 空间曲线可以看成两张曲面的交线, 因此, 空间曲线的方程可写为:

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad (8.15)$$

例如方程

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ z = 1 \end{cases} \quad (8.16)$$

表示一个球面与一个平面的交线, 为一个圆, 如图 8.30.

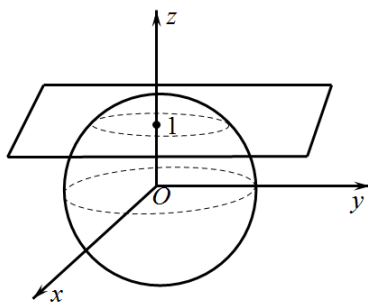


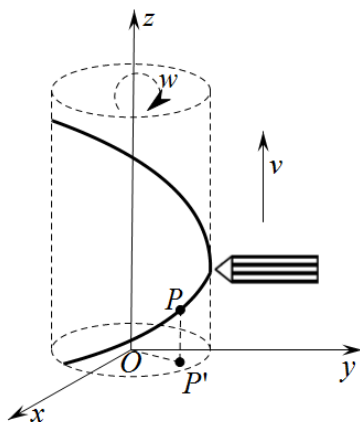
图 8.30

当然, 与直线的一般式方程一样, 空间曲线的方程 (8.15) 式也不是唯一的. 例如 (8.16) 式的圆也可用方程  $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 3 \end{cases}$  来表示, 即用两个球面的交线来表示等等.

和曲面一样，空间曲线的方程也可用参数方程来表示，但此时参数的个数只有一个．一般，空间曲线的参数方程为：

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad (t \text{ 为参数}).$$

**例 8.5.1** 有一无限长的圆木，横截面半径为  $a$ ，现将其绕中心轴以角速度  $w$  旋转，今有一铅笔从侧面底部沿圆木以速度  $v$  匀速向上运动，求铅笔在圆木上画出的曲线的方程．



**解：**如图所示，设圆木底部落在  $xoy$  平面， $z$  轴为其中心轴．对所画曲线上任一点  $P(x, y, z)$ ， $P$  在  $xoy$  平面的投影点为  $P'$ ， $x$  轴正向和  $OP'$  的夹角为  $\theta$ ，则  $\theta = wt$ ，( $t$  为时间)，由题设知

$$x = |OP'| \cos \theta, \quad y = |OP'| \sin \theta, \quad z = vt,$$

即所求曲线的参数方程为

$$\begin{cases} x = a \cos wt \\ y = a \sin wt \\ z = vt \end{cases} \quad (0 \leq t < +\infty),$$

此曲线称为**圆柱螺线**．

求某曲面或空间曲线的方程和给出曲面或空间曲线的方程来画出其图形都不是一件简单的事，本节仅介绍一些特殊的、形式简单的曲面与空间曲线．



### 三、旋转曲面、柱面和锥面

**定义 8.5.2** 某曲线绕直线(旋转轴)旋转一周而生成的曲面称为**旋转曲面**.

为方便起见,我们先取曲线为坐标平面上的曲线,旋转轴为坐标轴来写出旋转曲面的方程.

假设曲线  $\Gamma: \begin{cases} f(y, z) = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ , 此曲线落在  $yo z$  平面上, 它绕  $y$  轴旋转得

到的旋转曲面方程可如下求得: 对曲面上任意一点  $P(x, y, z)$ , 此点必为  $\Gamma$  上某点  $P_0(0, y_0, z_0)$  旋转所得, 如图 8.31, 所以  $MP_0 = MP$ ,

$$\text{即} \quad \begin{cases} y = y_0 \\ x^2 + z^2 = z_0^2 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} y_0 = y \\ z_0 = \pm \sqrt{x^2 + z^2} \end{cases}$$

将其代入  $f(y, z) = 0$  中得所求曲面方程为

$$f(y, \pm \sqrt{x^2 + z^2}) = 0$$

同理, 可以得到曲线  $\begin{cases} f(y, z) = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ , 绕  $z$  轴旋转所得的旋转曲面方程为

$$f(\pm \sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$$

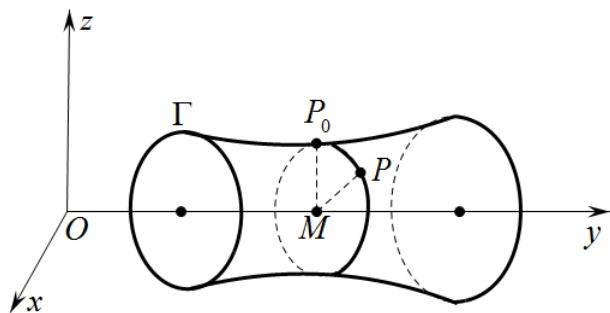


图 8.31

例如曲线  $\begin{cases} z = 2y^2 \\ x = 0 \end{cases}$  绕  $z$  轴旋转所得的旋转曲面方程为

$$z = 2(\pm \sqrt{x^2 + y^2})^2, \text{ 即: } z = 2(x^2 + y^2).$$

读者可以自己分别求得曲线  $\begin{cases} g(x, z) = 0 \\ y = 0 \end{cases}$  绕  $x$  轴或  $z$  轴、曲线

$\begin{cases} h(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$  绕  $x$  轴或  $y$  轴旋转所生成的旋转曲面方程.

**例 8.5.3** 求过  $P_1(1,2,0)$  和  $P_2(0,1,2)$  的直线绕  $z$  轴旋转生成的旋转曲面方程.

解: 如图 8.32, 直线方程为: 
$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 - t \\ z = 2t \end{cases}$$
 曲面上任一点  $M(x, y, z)$  为直线上

某点  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  旋转所得, 所以有 
$$\begin{cases} z_0 = z \\ x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2 \end{cases}$$
, 因为有  $t_0$  使

$$\begin{cases} x_0 = 1 - t_0 \\ y_0 = 2 - t_0 \\ z_0 = 2t_0 \end{cases}, \text{ 所以 } t_0 = \frac{z_0}{2} = \frac{z}{2}, \quad x_0 = 1 - \frac{z}{2}, \quad y_0 = 2 - \frac{z}{2}, \text{ 代入 } x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2$$

得所求曲面方程为

$$x^2 + y^2 = \left(1 - \frac{z}{2}\right)^2 + \left(2 - \frac{z}{2}\right)^2.$$

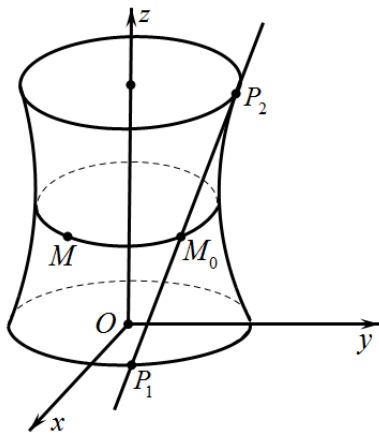


图 8.32

特别, 我们容易求得直线  $\begin{cases} y = a \\ x = 0 \end{cases}$  绕  $z$  轴旋转所得的曲面方程为

$x^2 + y^2 = a^2$ . 这是一个圆柱. 注意不要与二维平面上圆的方程相混淆. 如图 8.33, 它是旋转曲面的特例, 也是柱面的一个特例. 以下我们就给出柱面更一般的定义.

**定义 8.5.4** 由一条直线沿一条曲线平行移动所生成的曲面称为**柱面**, 并称此直线为柱面的**母线**, 所沿曲线为柱面的**准线**. 如图 8.34.

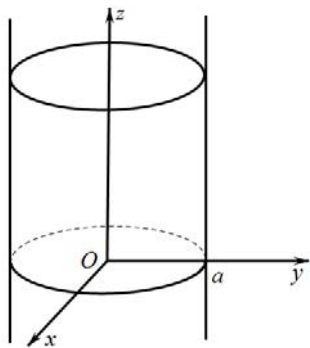


图 8.33

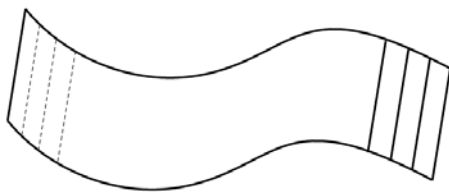
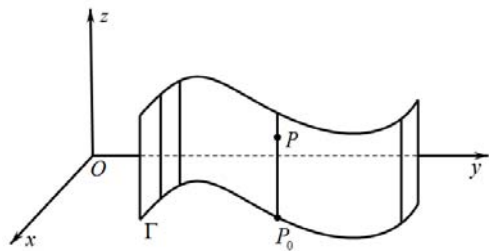


图 8.34

由定义 8.5.4, 圆柱面方程  $x^2 + y^2 = a^2$  可以看成是直线  $\begin{cases} y = a \\ x = 0 \end{cases}$  沿曲线  $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ z = 0 \end{cases}$  平行移动所得的柱面.

显然, 平面也是柱面的特殊情况.

**例 8.5.5** 求平行于矢量  $\mathbf{u} = (0, 0, 1)$  的直线沿曲线  $\Gamma: \begin{cases} f(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$  平行移动所得的柱面方程.



**解:** 对曲面上任意一点  $P(x, y, z)$ , 必有  $\Gamma$  上的点  $P_0(x_0, y_0, z_0)$ , 使  $\overrightarrow{P_0P} \parallel \mathbf{u}$ , 而  $\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0, y - y_0, z)$ , 因此, 由矢量平行条件有:  $x = x_0, y = y_0$ , 代入  $\Gamma$  的方程得柱面方程为:

$$f(x, y) = 0.$$

事实上, 任一不含变量  $z$  的方程  $f(x, y) = 0$  必为母线平行于  $z$  轴的柱面. 因为它可以看成是平行于矢量  $(0, 0, 1)$  沿曲线  $\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$  平行移动所得的柱面方程.

例如,  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 、 $y = x^2$  分别为母线平行于  $z$  轴的椭圆柱面和抛物柱面, 如图 8.35.

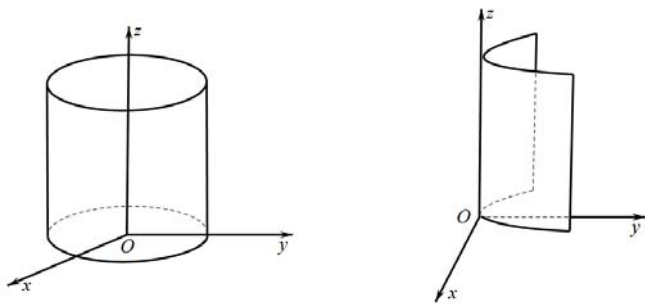


图 8.35

同理， $g(x, z)=0$  与  $h(y, z)=0$  分别表示母线平行于  $y$  轴与  $x$  轴的柱面.

对空间曲线  $\Gamma: \begin{cases} F_1(x, y, z)=0 \\ F_2(x, y, z)=0 \end{cases}$ ，若将  $z$  消去得方程  $F(x, y)=0$ ，此为

母线平行于  $z$  轴的柱面，且此柱面必通过  $\Gamma$ 。我们称柱面

$$F(x, y)=0$$

为曲线  $\Gamma$  投影到  $xoy$  平面的投影柱面，而称曲线  $\Gamma_1: \begin{cases} F(x, y)=0 \\ z=0 \end{cases}$  为  $\Gamma$  在  $xoy$

平面上的投影曲线。如图 8.36 所示.

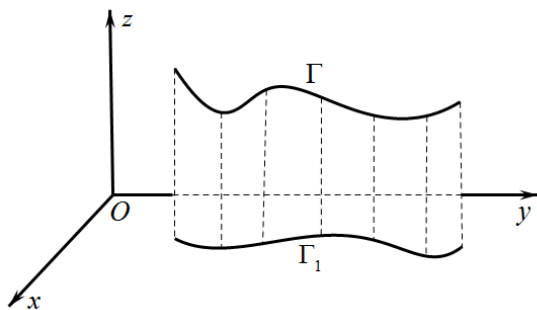


图 8.36

同理，在  $\Gamma$  的两个方程中消去  $x$  或  $y$  所得的方程  $G(y, z)=0$  或  $H(x, z)=0$  称为空间曲线  $\Gamma$  投影到  $yo z$  平面或  $zox$  平面上的投影柱面。而

曲线  $\Gamma_2: \begin{cases} G(y, z)=0 \\ x=0 \end{cases}$  和  $\Gamma_3: \begin{cases} H(x, z)=0 \\ y=0 \end{cases}$  分别为  $\Gamma$  在  $yo z$  平面和  $zox$  平面的

投影曲线.

例如  $\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 6 \end{cases}$  投影到  $xoy$  平面上的投影柱面为

$x^2 + y^2 = 5$ ， $\Gamma$  在  $xoy$  平面上的投影曲线为  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ z = 0 \end{cases}$ .

**例 8.5.6** 求以曲线  $\Gamma: \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$  为准线, 母线平行于平面  $x + 2y + 3z = 6$

的法矢量的柱面方程, 并写出此柱面方程与已知平面的交线  $C$  的方程. (所求柱面也称为曲线  $\Gamma$  投影到平面  $x + 2y + 3z = 6$  的投影柱面方程, 曲线  $C$  即为  $\Gamma$  在已知平面上的投影曲线.)

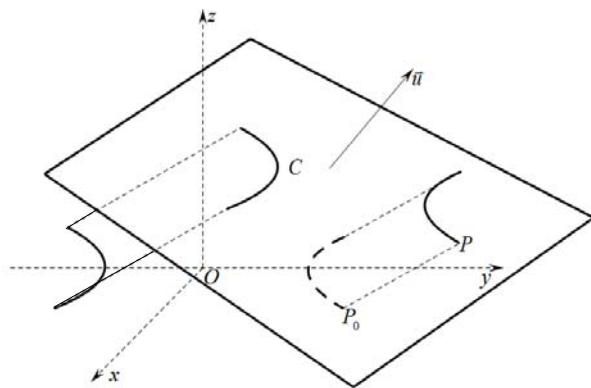


图 8.37

**解:** 设柱面上任一点  $P(x, y, z)$ , 过  $P$  的母线交准线于  $P_0(x_0, y_0, 0)$ , 如图 8.37, 且有  $\overrightarrow{P_0P} \parallel \mathbf{u}$ , 其中  $\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0, y - y_0, z)$ ,  $\mathbf{u} = (1, 2, 3)$ , 所以:

$$\frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y_0}{2} = \frac{z}{3}$$

得:  $x_0 = x - \frac{z}{3}$ ,  $y_0 = y - \frac{2}{3}z$ , 代入到方程  $\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1$  得所求柱面方程为

$$\frac{1}{a^2} \left(x - \frac{z}{3}\right)^2 - \frac{1}{b^2} \left(y - \frac{2}{3}z\right)^2 = 1,$$

于是交线  $C$  的方程为

$$\begin{cases} \frac{1}{a^2} \left(x + \frac{z}{3}\right)^2 - \frac{1}{b^2} \left(y - \frac{2}{3}z\right)^2 = 1 \\ x + 2y + 3z = 6 \end{cases}.$$

如果将一条通过原点的直线, 如  $\begin{cases} z = y \\ x = 0 \end{cases}$  绕  $z$  轴旋转, 易知其方程为

$z^2 = x^2 + y^2$ , 其图形为一个圆锥面, 如图 8.38, 因此, 圆锥面是一种旋转曲面. 下面给出一般锥面的定义.

**定义 8.5.7** 一条直线过一定点, 沿不过此定点的一条曲线移动所生成的曲面称为**锥面**. 此直线称为锥面的**母线**, 此定点称为锥面的**顶点**, 所沿曲线称为锥面的**准线**.

例如曲面  $z^2 = 4x^2 + 9y^2$  即为一个以原点为顶点的椭圆锥面, 它可以

看成是直线过原点, 沿着准线  $\begin{cases} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \\ z = 6 \end{cases}$  移动所生成的锥面. 如图

8.39.

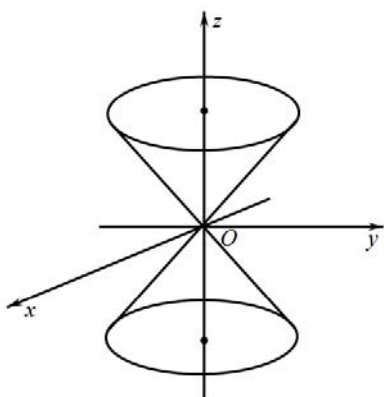


图 8.38

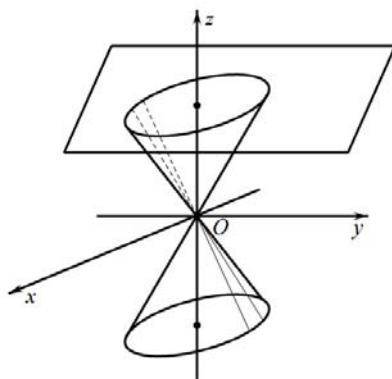


图 8.39

**例 8.5.8** 求以  $A(1,1,0)$  为顶点, 以  $\Gamma: \begin{cases} y = x^2 \\ z = 3 \end{cases}$  为准线的锥面方程.

**解:** 对锥面上任意一点  $P(x, y, z)$ , 必有  $\Gamma$  上一点  $P_0(x_0, y_0, 3)$  点, 使

$\overrightarrow{AP} \parallel \overrightarrow{AP_0}$ , 所以  $\frac{x-1}{x_0-1} = \frac{y-1}{y_0-1} = \frac{z-0}{3-0}$ , 有:

当  $z=0$  时,  $x=1, y=1$ ;

当  $z \neq 0$  时,  $x_0 = 1 + \frac{3}{z}(x-1)$ ,  $y_0 = 1 + \frac{3}{z}(y-1)$ , 代入方程  $y_0 = x_0^2$  得所求

锥面方程为:

$$1 + \frac{3}{z}(y-1) = \left[1 + \frac{3}{z}(x-1)\right]^2,$$

即:  $3(x-1)^2 + 2z(x-1) - z(y-1) = 0.$

图 8.40 是所求锥面的  $xoy$  平面以上的一部分.

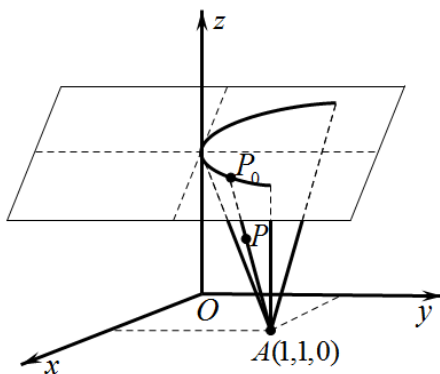


图 8.40

#### 四、二次曲面

我们称方程

$$a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + b_1xy + b_2yz + b_3zx + c_1x + c_2y + c_3z + d = 0$$

表示的曲面为二次曲面. 其中  $a_i, b_i, c_i, (i=1,2,3), d$  为常数且

$a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$  不全为零. 二次曲面是常见的较简单的曲面, 如前面碰

到的球面  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ , 圆柱面  $x^2 + y^2 = a^2$  和圆锥面  $z^2 = x^2 + y^2$  都是典型的二次曲面, 下面我们介绍几种常见二次曲面的标准方程 (曲面方程的最简单形式) 及其图形.

根据方程画出曲面的图形往往比较困难, 但我们可以通过这些曲面与平行于坐标平面的一系列平面的交线的图形来分析画出曲面的大致形状, 这个方法我们称之为截痕法.

##### (1) 椭球面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0, c > 0) \quad (8.17)$$

(8.17) 式表示的曲面称为椭球面.

用平面  $z = m$  ( $|m| \leq c$ ) 去截椭球面, 其交线 (截痕)  $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{m^2}{c^2} \\ z = m \end{cases}$

为一个椭圆,  $|m|$  越大, 这个椭圆的两个半轴越小, 当  $|m|=c$  时, 交线收缩为一点. 当  $|m|>c$  时,  $z=m$  与椭球面不相交. 同样可用  $x=n$  ( $|n|\leq a$ ) 和  $y=l$  ( $|l|\leq b$ ) 去截椭球面, 所得交线也为类似的椭圆. 由此可知, (8.17) 式表示的椭球面图形为如图 8.41 所示.

特别, 当  $a=b=c$  时, (8.17) 式表示一球面.

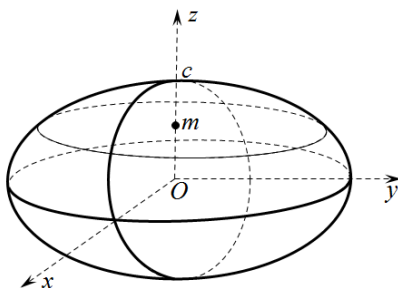


图 8.41

## (2) 椭圆抛物面

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \quad (a > 0, b > 0) \quad (8.18)$$

(8.18) 式表示的曲面称为椭圆抛物面.

用  $z=k$  ( $k \geq 0$ ) 去截椭圆抛物面, 其截痕  $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = k \\ z = k \end{cases}$  为一椭圆, 且

当  $k$  越大, 椭圆的两个半轴也越大. 当  $k=0$  时缩为一点 (原点). 在  $xoy$  平面下方无图形.

用  $y=h$  去截椭圆抛物面, 其截痕  $\begin{cases} z - \frac{h^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} \\ y = h \end{cases}$  为一抛物线, 且  $|h|$  越

大, 抛物线的顶点越高 (顶点  $z$  轴分量坐标值越大). 用  $x=j$  去截椭圆抛物面所得的交线也为类似的抛物线. 于是可知 (8.18) 式表示的椭圆抛物面的大致图形如图 8.42 所示.



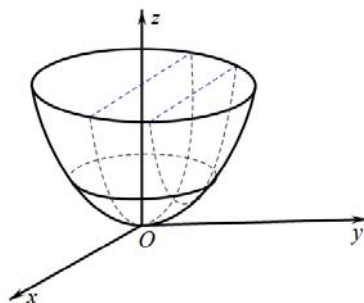


图 8.42

同理可画出椭圆抛物面  $x = \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$  和  $y = \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}$  的图形.

### (3) 单叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (a > 0, b > 0, c > 0) \quad (8.19)$$

(8.19) 式表示的曲面称为**单叶双曲面**. 可得其图形如图 8.43 所示.

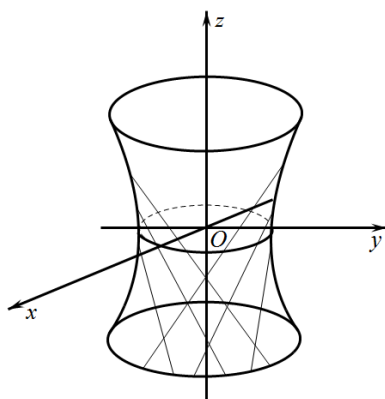


图 8.43

(8.19) 式方程可改写为  $\left(\frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right) = \left(1 - \frac{x}{a}\right)\left(1 + \frac{x}{a}\right),$

此方程可看作方程组

$$\begin{cases} \left(\frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right)k_1 = \left(1 - \frac{x}{a}\right)k_2 \\ \left(\frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right)k_2 = \left(1 + \frac{x}{a}\right)k_1 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} \left(\frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right)k_1 = \left(1 + \frac{x}{a}\right)k_2 \\ \left(\frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right)k_2 = \left(1 - \frac{x}{a}\right)k_1 \end{cases},$$

其中 $k_1$ 和 $k_2$ 为任意常数. 这两个方程组皆表示直线, 因此, 单叶双曲面可看成是两族直线“编织”而成的曲面, 这类可由直线构成的曲面称为直纹面. 例 8.5.3 所求的曲面也为一个直纹面, 它是由一条直线旋转而成.

#### (4) 双叶双曲面

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0, c > 0) \quad (8.20)$$

(8.20) 式表示的曲面称为**双叶双曲面**, 读者可自行分析其图形特点, 大致图形如图 8.44 所示.

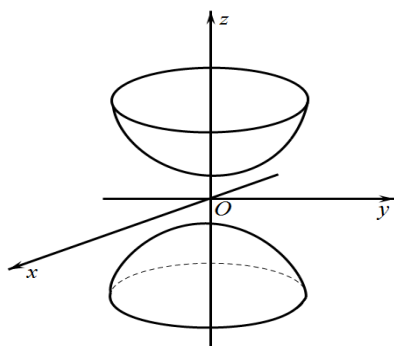


图 8.44

#### (5) 双曲抛物面

$$z = -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \quad (a > 0, b > 0) \quad (8.21)$$

(8.21) 表示的曲面称为**双曲抛物面**, 如图 8.45 所示. 因其形状酷似马鞍, 所以双曲抛物面亦称**马鞍面**. 从 (8.21) 式方程可得出马鞍面也是一个直纹面, 可分别由通过原点的两族直线构成.

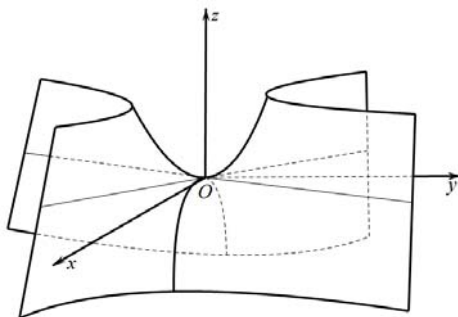
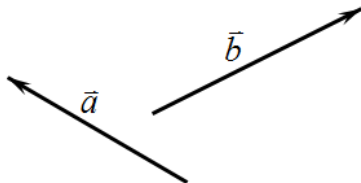


图 8.45

## 习题 8.1

1. 已知矢量  $\vec{a}, \vec{b}$  如图, 请画出矢量  $2\vec{a}$ ,  $-\frac{1}{2}\vec{b}$ ,  $\vec{a} + \vec{b}$  和  $\vec{a} - \vec{b}$ .



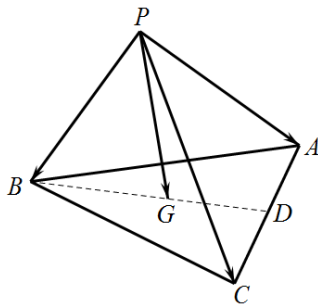
2. 画图说明以下情形:

- (1) 两个单位矢量相加等于一个单位矢量;
- (2) 两个单位矢量相减等于一个单位矢量;
- (3) 两个矢量相加的模等于两个矢量相减的模.

3. 用矢量方法证明对角线相互平分的四边形是平行四边形.

4. 设  $\triangle ABC$  的上方一点  $P$ , 如图,  $G$  为  $\triangle ABC$  的重心, 试证

$$\vec{PG} = \frac{1}{3}(\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC})$$

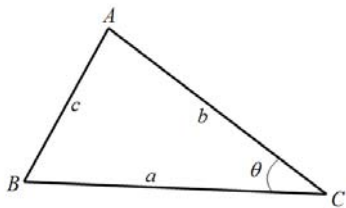


5. 设矢量  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  不共面, 试证三个矢量  $2\vec{a} + \vec{b}$ ,  $\vec{a} - 2\vec{b}$ ,  $4\vec{a} + 7\vec{b}$  必共面.

## 习题 8.2

6. 用矢量方法证明三角形的三条高交于一点.

7. 用矢量方法证明余弦定理  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$ .



8. 已知  $|\mathbf{a}| = 2, |\mathbf{b}| = 3, |\mathbf{a} + \mathbf{b}| = 19$ , 求  $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|$ .

9. 设  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 3$ , 求  $[(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{b} + \mathbf{c})] \cdot (\mathbf{c} + \mathbf{a})$  的值.

10. 已知  $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$ ,  $|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| + |\mathbf{c}| = 1$ , 求  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{a}$  的值.

11. 设矢量  $\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$  与  $7\mathbf{a} - 5\mathbf{b}$  垂直,  $\mathbf{a} - 4\mathbf{b}$  与  $7\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$  垂直, 求  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{b}$  的夹角  $\theta$ .

### 习题 8.3

12. 设有两点  $M_1(x_1, y_1, z_1)$ ,  $M_2(x_2, y_2, z_2)$ ,  $M$  为  $M_1$  与  $M_2$  的连线上一点, 且  $M_1M = \frac{1}{5}MM_2$ , 求  $M$  的坐标.
13. 写出点  $A(1, -1, 2)$  关于三个坐标平面  $xoy$  平面,  $yo z$  平面和  $zox$  平面的对称点  $B$ 、 $C$  和  $D$  的坐标, 并分别求向量  $\overrightarrow{AB}$ 、 $\overrightarrow{AC}$ 、 $\overrightarrow{AD}$  的模与方向余弦.
14. 已知  $\mathbf{a} = (2, 1, 2)$ ,  $\mathbf{b} = (1, 3, 5)$ , 向量  $\mathbf{c}$  与  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  共面, 且  $\mathbf{a} \perp \mathbf{c}$ , 求  $\mathbf{c}$ .
15. 设有一力  $\mathbf{F} = (3, 1, -2)$  作用在一质点上, 使质点从  $A(-1, 0, 1)$  沿直线移动到  $B(2, -1, 3)$ , 求  $\mathbf{F}$  所作的功  $W_0$  (力的单位为牛顿, 位移单位为米).
16. 设有三点  $A(1, 1, 1)$ ,  $B(3, 2, 0)$ ,  $C(2, 4, 1)$  求
- (1) 三角形  $\triangle ABC$  各边的长;
  - (2) 三角形  $\triangle ABC$  的面积;
  - (3) 垂直于  $\triangle ABC$  所在平面的单位向量;
  - (4) 若  $D(1, 2, k)$  与  $A, B, C$  共面, 求  $k$  的值.
17. 已知  $\mathbf{a} = (2, -1, 0)$ ,  $\mathbf{b} = (0, 1, 2)$ .
- (1) 若  $\theta$  为  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{b}$  的夹角, 求  $\tan \theta$ ;
  - (2) 证明以  $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$  的邻边的平地四边形为菱形, 并求此菱形的高.
18. 证明  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = |\mathbf{a}|^2 \cdot |\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2$ .
19. 证明  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$

## 习题 8.4

20. 求满足下列给定条件的平面方程:

- (1) 过点  $(1, 0, -2)$ , 法向为  $\{3, -2, 1\}$ ;
- (2) 过点  $(2, -1, 3)$ , 且平行于平面  $x - y + 2z + 1 = 0$ ;
- (3) 过  $(4, 2, 1)$ ,  $(-1, -2, 2)$ ,  $(0, 4, -5)$  三点;
- (4) 过  $(3, 4, 5)$  且平行于  $yoz$  平面;
- (5) 过  $(1, 2, 3)$  和  $(-1, -2, -3)$  且与平面  $2x + 3z = 5$  垂直;
- (6) 过  $(5, -7, 4)$  且在三个坐标轴上的截距相等 (截距不为零).

21. 求点  $P(1, -1, -2)$  到通过原点且与两平面  $x - y + z - 7 = 0$  和  $3x + 2y - 12z + 5 = 0$  皆垂直的平面的距离.

22. 求两平行平面  $Ax + By + Cz + D_1 = 0$  和  $Ax + By + Cz + D_2 = 0$  之间的距离.

23. 设点  $M(2, 1, -1)$  是原点到平面  $\pi$  所引垂线的垂足, 求平面  $\pi$  的方程.

24. 求满足下列给定条件的直线方程:

- (1) 过点  $(-2, 1, -1)$  且与向量  $(1, -2, 3)$  平行;
- (2) 过两点:  $(3, -2, -1)$  与  $(5, 3, 2)$ ;
- (3) 过原点且与平面  $x + y + 2z + 2 = 0$  垂直;
- (4) 过点  $(2, 0, 1)$  且与平面  $x - y + z + 3 = 0$  和  $x + y - z + 5 = 0$  皆平行;
- (5) 过点  $(-1, -2, 0)$  且落在平面  $2x + 3y - z + 8 = 0$  内又与直线

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-5}{2} \text{ 相交.}$$

25. 将直线方程  $\begin{cases} 5x+y+z=0 \\ 2x+3y-2z+5=0 \end{cases}$  化为点向式方程（对称式方程）和参数式方程.

26. 求原点到直线  $\begin{cases} x=2+t \\ y=-1+3t \\ z=3-2t \end{cases}$  的距离.

27. 求直线  $\begin{cases} 3x+z=6 \\ y+2z=0 \end{cases}$  与  $z$  轴之间的距离.

28. 求过两平行直线  $\frac{x-3}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{2}$  和  $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{2}$  的平面方程.

29. 求经过直线  $\frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{1}$  且在  $x$  轴上的截距为 1 的平面方程.

30. 求过直线  $\begin{cases} x+2y-2z=5 \\ 5x-2y-z=0 \end{cases}$  且与  $zOx$  平面垂直的平面方程.

31. 求过  $y$  轴且与平面  $x-z+4=0$  成二面角为  $\frac{\pi}{4}$  的平面方程.

32. 求两直线  $L_1: \frac{x+2}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1}$  与  $L_2: \begin{cases} x=1+t \\ y=2 \\ z=3-t \end{cases}$  的公垂线（与  $L_1$  与  $L_2$  皆垂直相交的直线）方程.

33. 在平面  $x+y+z+1=0$  内求垂直于直线  $\begin{cases} y-z+1=0 \\ x+3z=0 \end{cases}$  的直线方程.

34. 分别判断过下列给定的两条直线是否可以作一平面？若可以，求出此平面；若不可以，说明理由：

$$(1) \begin{cases} x+2y-2z=5 \\ 5x-2y-z=0 \end{cases} \quad \text{和} \quad \frac{x+3}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{4};$$

$$(2) \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{1} \quad \text{和} \quad \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{2};$$

$$(3) \begin{cases} x=1+3t \\ y=0 \\ z=2-2t \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} x=2+t \\ y=1+2t \\ z=3t \end{cases}.$$

35. 求过两点  $(0, 0, 5)$  与  $(5, 0, 0)$  且与球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  相切的平面方程.



## 习题 8.5

36. 写出曲线  $\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases}$  分别绕  $z$  轴和  $y$  轴旋转所成的旋转曲面方程.

37. 求直线  $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-3}{2}$  绕  $y$  轴旋转所生成的旋转曲面方程.

38. 求下列曲线绕相应的轴旋转而成的旋转曲面方程:

$$(1) \begin{cases} 4z = y^2 \\ x = 0 \end{cases} \text{ 绕 } z \text{ 轴}; \quad (2) \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases} \text{ 绕 } y \text{ 轴}.$$

39. 求曲线  $\begin{cases} x^2 + z^2 = 3 \\ y = 1 \end{cases}$  绕  $z$  轴旋转一周所生成的旋转曲面方程.

40. 求母线平行于  $y$  轴, 准线为  $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$  的柱面方程.

41. 求曲线  $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ z = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$  在  $xoy$  平面和  $yoz$  平面上的投影曲线方程.

42. 求准线为  $\begin{cases} x^2 + y^2 - x = \sqrt{x^2 + y^2} \\ z = 0 \end{cases}$ , 母线平行于向量  $\vec{u} = (0, 1, 1)$  的柱面方程.

43. 求以原点为顶点, 以  $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = c \end{cases} \quad (c \neq 0)$  为准线的锥面方程.

44. 求准线为  $\Gamma: \begin{cases} F(x, y) = 0 \\ z = h \end{cases}$  ( $h \neq 0$ ), 顶点为原点的锥面方程.

45. 求顶点为  $(1, 2, 3)$ , 母线与直线  $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{-1}$  的夹角为  $\frac{\pi}{6}$  的正圆锥面的方程.

46. 请在空间直角坐标系中画出下列曲面的图形:

(1)  $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ ;      (2)  $9x^2 + 4y^2 + 36z^2 = 36$ ;

(3)  $2 - z = x^2 + y^2$ ;      (4)  $x^2 + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 0$ ;

(5)  $z = \sqrt{4x^2 + 25y^2}$ ;      (6)  $x^2 + y^2 = 2x$ .

47. 请在空间直角坐标系中画出以下曲线:

(1)  $\begin{cases} z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} \\ z = x^2 + y^2 \end{cases}$ ;      (2)  $\begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2} \\ x^2 + y^2 = 2x \end{cases}$ ;

(3)  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$ .

48. 写出椭球面  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0, c > 0$ ) 的一个参数方程.

49. 写出曲线  $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$  的一个参数方程.

50. 证明一条直线  $L_1$  绕另一条与  $L_1$  不垂直的异面直线  $L_2$  旋转所成的旋转曲面是单叶双曲面.

51. 设抛物线  $\begin{cases} x^2 = 4(z-1) \\ y = 5 \end{cases}$  平行移动且其顶点在抛物线  $\begin{cases} (y-2)^2 = 9z \\ x = 0 \end{cases}$  上,

试求其轨迹方程.

## 第 9 章 多元函数微分学

在上册第 1-4 章中, 我们讨论了一元函数的微分学, 但在自然现象中, 一个事物往往依赖于多个因素. 本章讨论的多元函数就是用来描述、研究多因素之间内在的数量关系, 与一元函数类似, 多元函数的微积分学也包括微分与积分两部分. 本章先讨论多元函数的微分学, 它所涉及的一些基本概念、基本理论和基本方法, 与一元函数有密切的联系, 但也有很大的区别.

### § 9.1 多元函数

#### 一、 $n$ 维欧氏空间

记实数  $\mathbb{R}$  的  $n$  次笛卡尔乘积集为  $\mathbb{R}^n$ , 即

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n\}.$$

$\mathbb{R}^n$  中的元素是由  $n$  个实数  $x_i (i = 1, 2, \dots, n)$  组成的有序数组  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,

称其为  $\mathbb{R}^n$  中的一个点.

在  $\mathbb{R}^n$  空间中定义两点  $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 、 $B(y_1, y_2, \dots, y_n)$  之间的距离

$$d = |AB| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

在  $\mathbb{R}^n$  中定义了上述距离后, 称  $\mathbb{R}^n$  为  $n$  维欧氏空间.

显然, 当  $n = 1, 2, 3$  时,  $\mathbb{R}^n$  空间就是我们所熟知的一维实数轴、

二维平面与三维空间.

与一元函数类似, 在  $\mathbb{R}^n$  中同样有邻域的概念.

**定义 9.1.1** 在  $\mathbb{R}^2$  和  $\mathbb{R}^3$  空间中, 取  $\delta > 0$ , 定义

$$U(P_0, \delta) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta\}$$

$$U(M_0, \delta) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} < \delta\}$$

分别称为点  $P_0(x_0, y_0)$  和  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  的  $\delta$ -邻域. 在几何上, 分别表示以  $P_0$  为圆心,  $\delta$  为半径的开圆和以  $M_0$  为球心,  $\delta$  为半径的开球 (不包括边界). 如图 9.1 所示.

如果上述邻域不包括中心, 称之为去心邻域; 例如

$$U^0(P_0, \delta) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta\}.$$

为  $\mathbb{R}^2$  空间中, 点  $P_0$  的  $\delta$ -去心邻域.

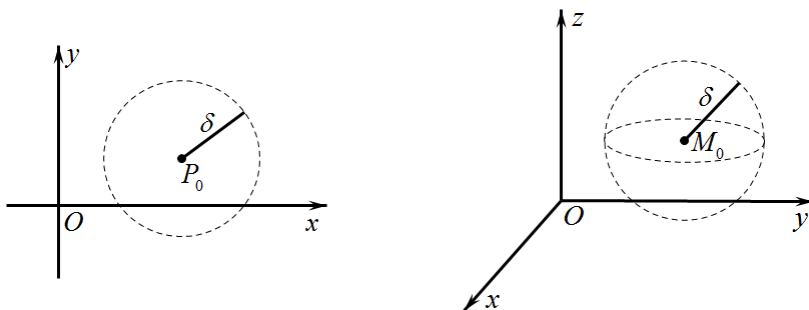


图 9.1

上面所介绍的邻域称为圆邻域, 类似的还有方邻域.

**定义 9.1.2** 在  $\mathbb{R}^2$  空间中, 定义

$$U(P_0, \delta) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x-x_0| < \delta, |y-y_0| < \delta\}.$$

称为点  $P_0$  的  $\delta$ -邻域.

在  $\mathbb{R}^n$  空间中, 根据情况可以选择使用圆邻域, 也可以使用方邻域, 两者的作用一般来说是等价的. 目前常常使用的是圆邻域.

类似地, 也有点  $P_0$  的  $\delta$  去心邻域的概念. 在  $\mathbb{R}^2$  空间中, 点  $P_0$  的  $\delta$  去

心邻域为

$$U^0(P_0, \delta) = \{(x, y) \mid |x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \delta \text{ 且 } (x, y) \neq (x_0, y_0)\}.$$

$$\text{或 } U^0(P_0, \delta) = U(P_0, \delta) - \{(x_0, y_0)\}.$$

## 二、平面点集

下面主要讨论  $\mathbb{R}^2$  中的点集, 有关概念与结论可推广到  $\mathbb{R}^n$  中. 对于平面非空点集  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ , 我们有以下概念:

**内点:** 如果对于点  $P_0$ , 存在  $\delta > 0$ , 有  $U(P_0, \delta) \subset D$ , 则称  $P_0$  为  $D$  的内点. 点集  $D$  的全部内点组成的集合称为  $D$  的内部, 记作  $\text{int } D$ .

**外点:** 如果存在  $\delta > 0$ , 有  $U(P_0, \delta) \cap D = \emptyset$ , 则称  $P_0$  为  $D$  的外点.

**界点:** 如果对任意  $\delta > 0$ ,  $U(P_0, \delta)$  中既有属于  $D$  的点, 也有不属于  $D$  的点, 则称  $P_0$  为  $D$  的界点. 即对  $\forall \delta > 0$ , 均有

$$U(P_0, \delta) \cap D \neq \emptyset \text{ 且 } U(P_0, \delta) \cap \bar{D} \neq \emptyset.$$

其中:  $\bar{D}$  为点集  $D$  关于  $\mathbb{R}^2$  的补集.

点集  $D$  的所有界点组成的集合称为  $D$  的**边界**. 记作  $\partial D$ .

**例 9.1.3** 对于平面点集

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(1, 2)\}$$

满足  $x^2 + y^2 < 1$  的点均是  $D$  的内点; 点  $P(1, 2)$  不是  $D$  的内点, 也不是  $D$  的外点, 而是  $D$  的界点; 单位圆周  $x^2 + y^2 = 1$  上的点也是  $D$  的界点. 点  $Q(2, 3)$  是  $D$  的外点.

从上面例子中可以看出, 点集  $D$  的内点属于  $D$ , 外点不属于  $D$ , 而界点可能属于  $D$ , 也可能不属于  $D$ . 而上例中的点  $(1, 2)$  通常称为点集  $D$  的孤立点.

**定义 9.1.3** 设  $D \subseteq \mathbb{R}^2$

- (1) 若  $D = \text{int } D$ , 则称  $D$  为  $\mathbb{R}^2$  中的 **开集**.
- (2) 若  $D$  的补集  $\overline{D} = \mathbb{R}^2 - D$  为开集, 则称  $D$  为  $\mathbb{R}^2$  中的 **闭集**.
- (3) 若存在  $M > 0$ , 满足  $D \subset U(O, M)$ , 则称  $D$  为 **有界集**. 点  $O$  为坐标原点.

根据定义, 开集  $D$  中的点均是内点;  $\mathbb{R}^2$  既是开集, 又是闭集.

**定义 9.1.4** 设  $D \subseteq \mathbb{R}^2$

- (1) 若  $D$  中任何两点  $P, Q$  之间都可以用一条属于  $D$  的有限折线(由有限条 直线段连接而成的折线) 相连接, 则称  $D$  是 **连通的**.
- (2) 连通的开集称为 **开域** (或 **连通开集**).
- (3) 开域连同其边界上的点组成的集合称为 **闭域**.

**例 9.1.5** (1) 对于平面点集  $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy > 0\}$ ,  $D_1$  中的每个点都是内点, 故  $D_1$  是开集; 但  $D_1$  不连通, 因此,  $D_1$  不是开域;  $D_1$  是无界集.

(2) 对于平面点集  $D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$ ,  $D_2$  是有界集, 又是连通的, 是闭域. 但平面点集  $D_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2 + y^2 \leq 4\}$ , 既不是开集, 也不是闭集, 原点为其边界点.

### 三、多元函数的概念

**定义 9.1.6** 设  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ , 若存在对应法则  $f$ , 对任意  $P \in D$  均有唯一的实数  $z$  与之对应, 则称  $f$  为定义在  $D$  上的  $n$  元函数. 记作:  $z = f(P)$ .

若  $P$  表示为  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , 则该  $n$  元函数也可记作

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

其中:  $D$  为  $f$  的定义域, 集合  $R_f = \{z \mid z = f(P), P \in D\}$  为  $f$  的值域.

当  $n=1$  时,  $f$  就是我们熟悉的一元函数; 当  $n=2$  时,  $f$  称为二元函数; 当  $n=3$  时,  $f$  称为三元函数等. 本章着重讨论二元和三元函数.

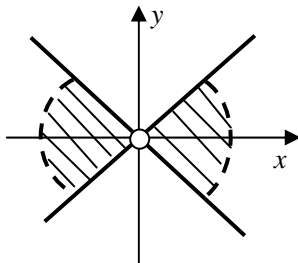
多元函数自然定义域的确定与一元函数类似, 可由函数的解析表达式或实际问题确定. 例如: 对于函数  $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ , 其定义域是  $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$ , 为平面上以原点为圆心, 2 为半径的“圆盘”.

**例 9.1.7** 确定下列函数的定义域

$$(1) z = \ln(1 - x^2 - y^2) + \arccos \frac{y}{x}; \quad (2) u = \sqrt{4 - x^2 - y^2 - z^2} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 1}}.$$

**解:** (1) 要使函数表达式有意义, 则

$$\begin{cases} 1 - x^2 - y^2 > 0 \\ \left| \frac{y}{x} \right| \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 < 1 \\ |y| \leq |x| \text{ 且 } x \neq 0 \end{cases}.$$



因此, 函数的定义域

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1, |y| \leq |x| \text{ 且 } x \neq 0\}.$$

(2) 要使函数表达式有意义, 则

$$\begin{cases} 4 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow 1 < x^2 + y^2 + z^2 \leq 4.$$

因此, 函数的定义域  $D = \{(x, y, z) \mid 1 < x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$ . 即为球心在原点半径为 2 的球挖去球心在原点半径为 1 的球剩下的部分.

多元函数  $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  (其中:  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$ ) 的图形是

$$G = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, z) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid z = f(x_1, x_2, \dots, x_n), (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D\}.$$

为  $\mathbb{R}^{n+1}$  空间中的一张曲面.

特别地, 当  $n=2$  时,  $z=f(x, y)$  的图形一般为  $\mathbb{R}^3$  中的一张曲面.

例如: (1)  $z=x^2+y^2$  为旋转抛物面;

(2)  $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$  为单位球面的上半部分;

(3)  $z=xy$  为定义在整个  $\mathbb{R}^2$  平面上的函数, 其图形为过原点的 马鞍面.

## § 9.2 二元函数的极限与连续

下面讨论多元函数的极限与连续等概念, 虽然其定义与一元函数类似, 但由于在  $\mathbb{R}^n$  空间中, 点的趋向方式比一元函数复杂, 这就使得多元函数的极限比一元函数复杂得多.

### 一、二元函数的极限

**定义 9.2.1** 设二元函数  $z=f(P)$  ( $P \in D \subseteq \mathbb{R}^2$ ) 在  $U^0(P_0, \delta_0)$  ( $\delta_0 > 0$ ) 内有定义, 若存在常数  $A$ , 对  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$  ( $\delta < \delta_0$ ), 当  $0 < |PP_0| < \delta$  时, 有

$$|f(P) - A| < \varepsilon$$

则称常数  $A$  为函数  $f(P)$  当点  $P$  趋向于点  $P_0$  时的 **极限**. 记作

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = A.$$

定义 9.2.1 可以类似地推广到  $n$  元函数的极限定义. 对于二元函数, 我们也可以将极限的定义表述如下:

**定义 9.2.2** 设函数  $z=f(x, y)$  在点  $P_0(x_0, y_0)$  的去心邻域  $U^0(P_0, \delta_0)$  内有定义, 若存在常数  $A$ , 对  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists 0 < \delta < \delta_0$ ,

当  $0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$  时, 有

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon$$



则称常数  $A$  为函数  $f(x, y)$  当点  $(x, y)$  趋向于  $P_0(x_0, y_0)$  时的极限. 记作

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = A \text{ 或 } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A.$$

**例 9.2.3** 证明:  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 1)} \frac{x + 2y - 1}{x^2 + y^2} = 1.$

**解:** 对  $\forall \varepsilon > 0$   $\left(\varepsilon < \frac{1}{2}\right)$ ,  $\exists \delta = \frac{\varepsilon}{12}$ , 当  $|x - 0| < \delta, |y - 1| < \delta$  且  $(x, y) \neq (0, 1)$  时,

$$\begin{aligned} \left| \frac{x + 2y - 1}{x^2 + y^2} - 1 \right| &= \frac{|x^2 - x + (y - 1)^2|}{x^2 + y^2} \leq 4|x^2 - x + (y - 1)^2| \\ &\leq 4|x| \cdot |x - 1| + 4(y - 1)^2 \leq 8|x| + 4|y - 1| < \varepsilon. \end{aligned}$$

因此

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 1)} \frac{x + 2y - 1}{x^2 + y^2} = 1.$$

在例 9.2.3 的证明中, 请注意极限定义中条件 “ $0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$ ” 与条件 “ $|x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \delta$ ” 的等价性.

**例 9.2.4** 证明:  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} = 0.$

**解:** 由于

$$|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

则

$$\left| \frac{xy^2}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{1}{2}|y|.$$

而  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} |y| = 0$ , 因此

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} = 0.$$

在上面的解答中, 运用了与一元函数极限类似的“夹逼定理”. 当然本题也可根据极限定义的“ $\varepsilon - \delta$ ”语言证明.

对  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $\delta = \varepsilon$ , 当  $x^2 + y^2 < \delta^2$  时,

$$\left| \frac{xy^2}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)|y| \cdot \frac{1}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2}|y| \leq \sqrt{x^2 + y^2} < \delta = \varepsilon.$$

**例 9.2.5** 求极限:  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0,0)} \frac{x(x-y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ .

**解:** 令  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  ( $r > 0$ ), 则:  $(x, y) \rightarrow (0,0)$  等价于  $r \rightarrow 0^+$ .

由于

$$0 \leq \left| \frac{x(x-y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| = |r \cos \theta (\cos \theta - \sin \theta)| \leq 2r.$$

因此

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0,0)} \frac{x(x-y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

在一元函数极限中, 点  $x_0$  处极限  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  存在的充要条件为  $f(x)$

在  $x_0$  处的左右极限存在且相等, 即  $f(x_0-0) = f(x_0+0)$ . 但在多元函数中, 由于点的趋向方式有无穷多种, 某函数在点  $P_0$  处极限存在, 要求以任何方式趋向于  $P_0$  的极限均存在且相等. 下面定理是与一元函数“归结原理”类似的多元函数极限的归结原理. 请读者自行完成证明.

**定理 9.2.6** 若  $f(P)$  在  $U^0(P_0, \delta_0)$  内有定义, 则

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = A \Leftrightarrow \text{对于 } U^0(P_0, \delta_0) \text{ 的任何子集 } E, \lim_{\substack{P \rightarrow P_0 \\ (P \in E)}} f(P) = A.$$

由定理 9.2.6 可知, 如果存在  $U^0(P_0, \delta_0)$  的一个子集  $E$ , 有  $\lim_{\substack{P \rightarrow P_0 \\ (P \in E)}} f(P)$

不存在; 或者, 存在  $U^0(P_0, \delta_0)$  的两个子集  $E_1, E_2$ , 有

$$\lim_{\substack{P \rightarrow P_0 \\ (P \in E_1)}} f(P) \neq \lim_{\substack{P \rightarrow P_0 \\ (P \in E_2)}} f(P), \text{ 则函数 } f(P) \text{ 在点 } P_0 \text{ 处的极限不存在. 特别地,}$$

如果在  $U^0(P_0, \delta_0)$  内存在一个点列  $\{P_n\}$ ,  $P_n \rightarrow P_0$ ,  $\lim_{P_n \rightarrow P_0} f(P_n)$  不存在;

或者, 存在两个点列  $\{P_n\}, \{Q_n\}$ , 且  $P_n \rightarrow P_0, Q_n \rightarrow P_0$ , 但是

$$\lim_{P_n \rightarrow P_0} f(P_n) \neq \lim_{Q_n \rightarrow P_0} f(Q_n), \text{ 则函数 } f(P) \text{ 在点 } P_0 \text{ 处的极限不存在.}$$

**例 9.2.7** 讨论极限  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$  的存在性.

**解:** (1) 点  $P$  沿  $x$  轴方向趋向于原点时, 有  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y=0}} \frac{xy}{x^2+y^2} = 0$ .

(2) 点  $P$  沿直线  $y = x$  方向趋向于原点时, 有  $\lim_{\substack{y=x \\ x \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2}$ .

因此, 极限  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$  的不存在.

实际上, 沿直线  $y = kx$  方向趋向于原点, 有  $\lim_{\substack{y=kx \\ x \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{k}{1+k^2}$ . 由于

其极限与趋向方式有关, 所以函数在点  $(0,0)$  处的极限不存在.

**例 9.2.8** 讨论极限  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x + y}$  的存在性.

**解:** 本题似乎分子是分母的高阶无穷小量, 其极限应该为 0. 但在多元函数极限中, 每个变量的变化都是独立的, 要求以任何方式趋向时的极限均存在且相等.

(1) 沿直线  $y = kx (k \neq -1)$  趋向于  $(0,0)$  时,

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x + y} = \lim_{(x, y) \rightarrow (0,0)} \frac{kx^3}{(1+k)x} = 0.$$

(2) 沿曲线  $y = -x + x^3$  趋向于  $(0,0)$  时,

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x + y} = \lim_{\substack{y = -x + x^3 \\ x \rightarrow 0}} \frac{x^2(-x + x^3)}{x^3} = -1.$$

所以, 该函数在点  $(0,0)$  处的极限不存在.

极限  $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y)$  与  $\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$ 、 $\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$  是不一样的, 后两者称为**累次极限**(也称**二次极限**). 前面所讨论的极限  $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y)$  也称为**重极限**(**二重极限**). 重极限与累次极限是两个不同的概念, 他们的存在性之间没有必然的关系.

**例 9.2.9** 设  $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2 + x - y}{x + y}$ , 它关于点  $(0,0)$  的两个累次极限分

别为

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2 + y^2 + x - y}{x + y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{x} = 1;$$

$$(2) \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + y^2 + x - y}{x + y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^2 - y}{y} = -1.$$

沿直线  $y = kx$  ( $k \neq -1$ ) 方向趋向于原点时,

$$\lim_{\substack{y=kx \\ x \rightarrow 0}} \frac{x^2 + y^2 + x - y}{x + y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+k^2)x^2 + (1-k)x}{(1+k)x} = \frac{1-k}{1+k}.$$

所求极限与趋向方式有关, 因此, 在点  $(0,0)$  处函数  $f(x, y)$  的重极限不存在.

**例 9.2.10** 设  $f(x, y) = x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x}$ , 它关于原点的两个累次极限均不存在.

因为, 对任意  $y \neq 0$ , 当  $x \rightarrow 0$  时, 函数  $y \sin \frac{1}{x}$  的极限不存在, 而

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{y} = 0.$$

因此,  $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \left( x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x} \right)$  不存在; 同样, 另一个累次极限也不存在.

$$\text{由于 } \left| x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| + |y|, \text{ 因此, } \lim_{(x, y) \rightarrow (0,0)} \left( x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x} \right) = 0.$$

在例 9.2.9 中, 重极限不存在, 但两个累次极限均存在; 而在例 9.2.10 中, 重极限存在, 但两个累次极限均不存在.

下面定理给出了两种极限在特定条件下的联系.

**定理 9.2.11** 若  $f(x, y)$  在点  $P_0(x_0, y_0)$  处存在重极限  $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y)$  与累次极限  $\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$ , 则

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y).$$

当然, 对另一个累次极限  $\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$  也有相同的结论.

根据定理 9.2.11, 若两个累次极限存在, 但不相等, 则其重极限必不存在.

## 二、二元函数的连续性

与一元函数类似, 我们用二元函数的极限给出二元函数连续的定义.

**定义 9.2.12** 设函数  $z = f(x, y)$  在  $P_0(x_0, y_0)$  的某邻域内有定义, 如果

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

则称  $z = f(x, y)$  在  $P_0(x_0, y_0)$  处连续.

如果记  $\Delta x = x - x_0$ ,  $\Delta y = y - y_0$ , 我们称

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = f(x, y) - f(x_0, y_0)$$

为函数  $z = f(x, y)$  在点  $P_0(x_0, y_0)$  处的全增量. 显然,  $z = f(x, y)$

在点  $P_0(x_0, y_0)$  处连续, 当且仅当  $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \Delta z = 0$ .

另外, 我们称

$$\Delta z_x = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$$

为函数  $z = f(x, y)$  在点  $P_0(x_0, y_0)$  处关于  $x$  的偏增量.

同样, 称

$$\Delta z_y = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

为函数  $z = f(x, y)$  在点  $P_0(x_0, y_0)$  处关于  $y$  的偏增量.

如果  $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \Delta z = 0$ , 则:  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta z_x = 0$  且  $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \Delta z_y = 0$ . 因此, 由函数连续的定义, 若  $z = f(x, y)$  在点  $P_0(x_0, y_0)$  处连续, 则: 一元函数  $f(x, y_0)$

和  $f(x_0, y)$  在  $x = x_0$  和  $y = y_0$  处皆连续.

**例 9.2.13** 讨论函数  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1 - \cos(xy)}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$  在点  $(0, 0)$

处的连续性.

**解:** 由于  $0 \leq \frac{1 - \cos(xy)}{x^2 + y^2} = \frac{2 \sin^2 \frac{xy}{2}}{x^2 + y^2} \leq \frac{(xy)^2}{2(x^2 + y^2)} \leq \frac{1}{8}(x^2 + y^2)$ ,

则  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 0$ .

因此,  $f(x, y)$  在点  $(0, 0)$  处连续.

如果函数  $f(x, y)$  在区域  $D$  内每点均连续, 则称  $f(x, y)$  在区域  $D$  内连续. 与一元函数类似, 有界闭区域  $D$  上的连续函数  $f(x, y)$  有如下性质.

**定理 9.2.14 (有界闭区域上连续函数的性质)**

若  $f(x, y)$  在有界闭区域  $D$  上连续, 则

(1)  $f(x, y)$  在  $D$  上有界, 且存在最大值和最小值.

即存在  $(\xi_1, \eta_1) \in D$  和  $(\xi_2, \eta_2) \in D$  使得

$$\max_{(x, y) \in D} f(x, y) = f(\xi_1, \eta_1), \quad \min_{(x, y) \in D} f(x, y) = f(\xi_2, \eta_2).$$

(2) 若存在  $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2) \in D$  使得  $f(x_1, y_1) \cdot f(x_2, y_2) < 0$ , 则存在  $(\xi, \eta) \in D$  使得  $f(\xi, \eta) = 0$ .

同样, 我们可以定义、讨论三元函数以及一般  $n$  元函数的极限、连续及其性质等, 在这里不再一一介绍.

## § 9.3 偏导数与全微分

一元函数的导数是因变量增量与自变量增量之间比值的极限，在多元函数中，当多个变量同时变化时，考虑函数的相对变化率就会非常复杂，难以获得清晰的含义，所以本章我们考虑当其中某个变量变化时，函数的相对变化率，即函数的偏导数.

### 一、偏导数

**定义 9.3.1** 设函数  $z = f(x, y)$  在点  $P_0(x_0, y_0)$  的某邻域内有定义，如果极限

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

存在，则称  $f(x, y)$  在点  $P_0$  处对变量  $x$  可偏导（或偏导数存在），

此极限为  $f(x, y)$  在点  $P_0$  处对变量  $x$  的偏导数.

记作， $\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)}$ ， $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)}$  或  $f'_x(P_0)$ ， $f'_x(x_0, y_0)$ . 即

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

类似地，可得到函数  $z = f(x, y)$  关于变量  $y$  的偏导数

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} \quad \text{或} \quad \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)}.$$

如果函数  $z = f(x, y)$  在  $D \subseteq R^2$  内每一点都存在偏导数，则称函数在  $D$  上可偏导，且  $D$  上的点和其导数之间的新的对应关系称为函数  $z = f(x, y)$  在  $D$  内的偏导函数，简称为偏导数.

从偏导数的定义可以看出，在多元函数中，对某个变量求偏导数，就是将其余变量看成常数，再对该变量求导.

**例 9.3.2** 设  $f(x, y) = (x-2)\arctan\sqrt{\frac{2y^2+1}{y^2+2}} + (y^2-3y+2)\sin\frac{\pi}{4}x$ .

求:  $f'_x(2,1)$  和  $f'_y(2,1)$

**解:【方法一】**

$$(1) f(x,1) = \frac{\pi}{4}(x-2), \text{ 则: } f'_x(2,1) = \frac{\pi}{4}.$$

$$(2) f(2, y) = y^2 - 3y + 2, \text{ 则: } f'_y(2,1) = (2y-3)\Big|_{y=1} = -1.$$

**【方法二】**

$$(1) f'_x(2,1) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x,1) - f(2,1)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{\pi}{4}(x-2)}{x-2} = \frac{\pi}{4}.$$

$$(2) f'_y(2,1) = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{f(2, y) - f(2,1)}{y-1} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y^2 - 3y + 2}{y-1} = -1.$$

**【方法三】:**

$$(1) f'_x(x, y) = \arctan\sqrt{\frac{2y^2+1}{y^2+2}} + \frac{\pi}{4}(y^2-3y+2)\cos\frac{\pi}{4}x, \text{ 则}$$

$$f'_x(2,1) = f'_x(x, y)\Big|_{(2,1)} = \frac{\pi}{4}.$$

$$(2) f'_y(x, y) = (x-2) \cdot \frac{1}{1 + \frac{2y^2+1}{y^2+2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{2y^2+1}{y^2+2}}} \cdot \frac{6y}{(y^2+2)^2} + (2y-3)\sin\frac{\pi}{4}x,$$

因此

$$f'_y(2,1) = f'_y(x, y)\Big|_{(2,1)} = -1.$$

**例 9.3.3** 设  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & (x, y) = (0,0) \end{cases}$ , 求:  $f'_x(0,0)$ ,  $f'_y(0,0)$ .

**解:** 
$$f'_x(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 0.$$

同样可得,  $f'_y(0,0) = 0$ .



根据上一节例题 9.2.7 可知, 例 9.3.3 中的函数  $f(x, y)$  在点  $(0,0)$  处并不连续, 但在点  $(0,0)$  处的两个偏导数均存在. 也就是说, 对于多元函数, 偏导数存在, 并不能得出函数在该点连续, 这是多元函数与一元函数之间的区别. 其原因可以从以下偏导数的几何意义中找到答案.

与一元函数类似, 二元函数  $f(x, y)$  在点  $P_0(x_0, y_0)$  处的偏导数

$f'_x(P_0)$  的几何意义, 表示曲线  $C_1: \begin{cases} f(x, y) = 0 \\ y = y_0 \end{cases}$  在点  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  处的

切线与  $x$  轴正向夹角  $\alpha$  的正切. 即曲线  $C_1$  关于  $x$  轴的斜率. 同样,  $f'_y(P_0)$

表示曲线  $C_2: \begin{cases} f(x, y) = 0 \\ x = x_0 \end{cases}$  在点

$M_0(x_0, y_0, z_0)$  处的切线与  $y$  轴正向夹角  $\beta$  的正切. 即曲线  $C_2$  关于  $y$  轴的斜率. 如图 9.2 所示.

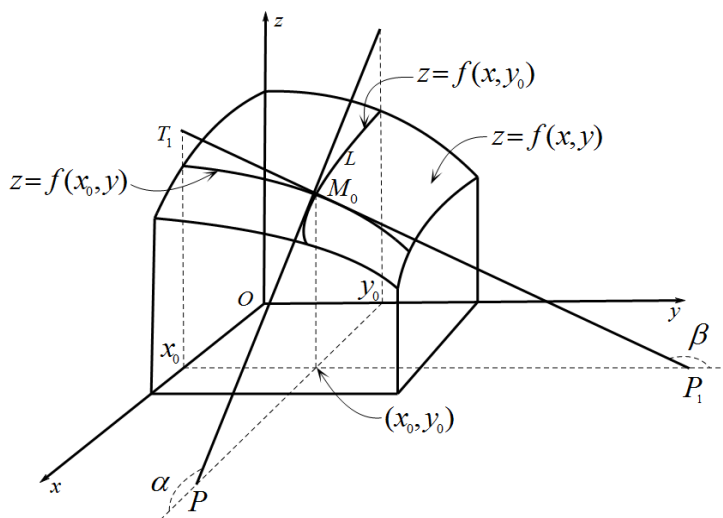


图 9.2

**例 9.3.4** 设  $z = (1 + xy^2)^x$  ( $x \geq 0$ ), 求:  $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ .

**解:** 把  $y$  看成常数, 对  $x$  求导数

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( e^{x \ln(1+xy^2)} \right) = e^{x \ln(1+xy^2)} \left[ \ln(1+xy^2) + \frac{xy^2}{1+xy^2} \right] \\ &= (1+xy^2)^x \left[ \ln(1+xy^2) + \frac{xy^2}{1+xy^2} \right].\end{aligned}$$

再把  $x$  看成常数, 对  $y$  求导数

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x(1+xy^2)^{x-1} \cdot \frac{\partial}{\partial y} (1+xy^2) = 2x^2 y (1+xy^2)^{x-1}.$$

## 二、全微分

对于二元函数  $z = f(x, y)$ , 仅研究一个自变量变化时, 函数的性态是不够的. 经常要讨论两个自变量  $x, y$  分别有增量  $\Delta x, \Delta y$  时, 相应的函数值的改变量(即全增量)

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

的变化情况. 类似于一元函数的微分, 下面以二元函数为例介绍多元函数的全微分.

**定义 9.3.5** 设二元函数  $z = f(x, y)$  在点  $P_0(x_0, y_0)$  的某邻域内有定义, 若存在常数  $A, B$ , 对充分小的  $\Delta x$  和  $\Delta y$  均有

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho), \quad \rho \rightarrow 0,$$

其中:  $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ , 则称函数  $z = f(x, y)$  在点  $P_0(x_0, y_0)$  处可微. 称  $A\Delta x + B\Delta y$  为函数  $f(x, y)$  在点  $P_0$  处的全微分. 记作

$$dz = A\Delta x + B\Delta y.$$

由上面定义可知, 全微分为全增量  $\Delta z$  的主要部分; 因其为  $\Delta x, \Delta y$  的线性函数, 通常又称为线性主部.

多元函数的全微分与偏导数之间有以下关系.

**定理 9.3.6** 若  $z = f(x, y)$  在点  $P$  处可微, 则:  $f(x, y)$  在  $P$  点处可偏导.

**证明:** 函数  $z = f(x, y)$  在点  $P(x, y)$  处可微, 则: 存在常数  $A, B$  使得

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho).$$

当  $\Delta y = 0$  时,

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y) = A\Delta x + o(\Delta x).$$

因此

$$f'_x(x, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{A\Delta x + o(\Delta x)}{\Delta x} = A.$$

同样可得

$$f'_y(x, y) = B.$$

所以,  $f(x, y)$  的两个偏导数皆存在。

根据上面定理, 若函数  $z = f(x, y)$  在  $P(x, y)$  处可微, 则

$$dz = A\Delta x + B\Delta y = f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y.$$

特别地, 对于函数  $z = x$  有

$$dz = dx = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y = \Delta x.$$

类似的,  $dy = \Delta y$ .

根据上面的定理及说明, 若函数  $z = f(x, y)$  在点  $P(x, y)$  处可微, 则

$$dz = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy.$$

或

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

**例 9.3.7** 求函数  $z = \arctan \frac{x+y}{1-xy}$  在点  $P(1,2)$  处的全微分.

解: 
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2} \cdot \frac{(1-xy) - (x+y)(-y)}{(1-xy)^2} = \frac{1}{1+x^2}, \text{ 则: } \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(1,2)} = \frac{1}{2}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + \left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2} \cdot \frac{(1-xy) - (x+y)(-x)}{(1-xy)^2} = \frac{1}{1+y^2}, \quad \text{则: } \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{(1,2)} = \frac{1}{5}.$$

即有

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = \frac{1}{1+x^2} dx + \frac{1}{1+y^2} dy.$$

因此

$$dz \Big|_{(1,2)} = \frac{1}{2} dx + \frac{1}{5} dy.$$

**【注】** 由于函数  $z = \arctan \frac{x+y}{1-xy}$  在点  $P(1,2)$  处的两个偏导数均连续，根

据下面的定理 9.3.11，函数  $z = \arctan \frac{x+y}{1-xy}$  在点  $P(1,2)$  处可微。

**例 9.3.8** 当  $y > 0$  时， $u(x, y)$  可微，且

$$du(x, y) = \left( \frac{y}{x^2 + y^2} + xy^2 \right) dx + \left( -\frac{x}{x^2 + y^2} + x^2 y + 2y \right) dy.$$

求： $u(x, y)$ 。

**解：** 由  $du(x, y) = \left( \frac{y}{x^2 + y^2} + xy^2 \right) dx + \left( -\frac{x}{x^2 + y^2} + x^2 y + 2y \right) dy$  可得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{x^2 + y^2} + xy^2.$$

从而

$$u(x, y) = \int \left( \frac{y}{x^2 + y^2} + xy^2 \right) dx = \arctan \frac{x}{y} + \frac{1}{2} x^2 y^2 + \phi(y).$$

又  $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{x^2 + y^2} + x^2 y + 2y$ ，则

$$\frac{1}{1+(\frac{x}{y})^2} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) + x^2 y + \phi'(y) = -\frac{x}{x^2 + y^2} + x^2 y + 2y.$$

因此

$$\phi'(y) = 2y, \quad \phi(y) = y^2 + C.$$

所以

$$u(x, y) = \arctan \frac{x}{y} + \frac{1}{2} x^2 y^2 + y^2 + C.$$

**例 9.3.9** 设  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{|xy|}}{x^2 + y^2} \sin(x^2 + y^2) & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ , 试讨论

$f(x, y)$  在点  $(0, 0)$  处的连续性, 可偏导性与可微性.

**解:** 由于

$$0 \leq \left| \frac{\sqrt{|xy|}}{x^2 + y^2} \sin(x^2 + y^2) \right| \leq \sqrt{|xy|} \leq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}}$$

而  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}} = 0$ , 因此,  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 0$ . 于是函数  $f(x, y)$  在点  $(0, 0)$

处连续.

由偏导数的定义得

$$f'_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0.$$

同理可得  $f'_y(0, 0) = 0$ .

由全微分的定义及定理 9.3.6, 函数  $z = f(x, y)$  可微的充分必要条件是

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\Delta z - [f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y]}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0.$$

在本题中, 有

$$\begin{aligned} & \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\Delta z - [f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y]}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \\ &= \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{|\Delta x \Delta y|}}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \cdot \frac{\sin[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2]}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{|\Delta x \Delta y|}}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}. \end{aligned}$$

当  $\Delta y = \Delta x$  时, 上式极限  $= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta x|}{\sqrt{2}|\Delta x|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

当  $\Delta y = 2\Delta x$  时, 上式极限  $= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2}|\Delta x|}{\sqrt{5}|\Delta x|} = \frac{\sqrt{10}}{5}$ .

两者不相等, 所以极限不存在; 因此,  $f(x, y)$  在点  $(0,0)$  处不可微.

根据上面的例子, 多元函数存在偏导数, 但不一定可微; 这与一元函数不同. 下面定理与定理 9.3.6 阐述了多元函数可微与连续、可偏导之间的关系.

**定理 9.3.10** 函数  $z = f(x, y)$  在点  $P(x, y)$  处可微, 则:  $f(x, y)$  在点  $P$  处连续.

定理的证明请读者自行完成.

**定理 9.3.11** 如果函数  $z = f(x, y)$  的偏导数  $f'_x, f'_y$  在点  $P(x, y)$  处连续,

则函数  $z = f(x, y)$  在点  $P$  处可微.

**证明:** 由一元函数的微分中值定理

$$\begin{aligned} \Delta z &= f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \\ &= [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] + [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)] \\ &= f'_x(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y)\Delta x + f'_y(x, y + \theta_2 \Delta y)\Delta y \\ &= [f'_x(x, y) + \alpha]\Delta x + [f'_y(x, y) + \beta]\Delta y \\ &= f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y + (\alpha\Delta x + \beta\Delta y) \end{aligned}$$

其中:  $0 < \theta_1 < 1, 0 < \theta_2 < 1$ ; 且  $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \alpha = 0, \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \beta = 0$ .

记  $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ , 有

$$0 \leq \left| \frac{\alpha \Delta x + \beta \Delta y}{\rho} \right| \leq |\alpha| \cdot \frac{|\Delta x|}{\rho} + |\beta| \cdot \frac{|\Delta y|}{\rho} \leq |\alpha| + |\beta|,$$

而

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} (|\alpha| + |\beta|) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} |\alpha| + \lim_{\Delta y \rightarrow 0} |\beta| = 0.$$

所以

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\alpha \Delta x + \beta \Delta y}{\rho} = 0.$$

于是

$$\alpha \Delta x + \beta \Delta y = o(\rho). \quad (\text{当 } \Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0; \text{ 即 } \rho \rightarrow 0 \text{ 时})$$

所以,  $\Delta z$  可表示为

$$\Delta z = f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y + o(\rho).$$

从而, 函数  $z = f(x, y)$  在点  $P$  处可微.

由本章习题 26 可得, 多元函数可微, 其偏导数未必连续; 即偏导数连续是函数可微的充分而非必要条件.

对于  $n$  元函数  $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , 若  $f$  在点  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$  处可

$$\text{微, 则 } du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n} dx_n.$$

**例 9.3.12** 设  $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , 求:  $du|_{(1, -2, 2)}$ .

$$\text{解: } \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \text{ 则: } \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(1, -2, 2)} = \frac{1}{3}.$$

同样可得

$$\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{(1, -2, 2)} = -\frac{2}{3}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{(1, -2, 2)} = \frac{2}{3}.$$

所以

$$du|_{(1, -2, 2)} = \frac{1}{3}(dx - 2dy + 2dz).$$

### 三、高阶偏导数

设函数  $z = f(x, y)$  在区域  $D$  内存在偏导数

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y).$$

由于  $f'_x(x, y)$  和  $f'_y(x, y)$  都是定义在  $D$  内的函数, 依然可以讨论其偏导数问题. 如果偏导函数  $f'_x(x, y)$  和  $f'_y(x, y)$  的偏导数存在, 则称  $f'_x(x, y)$  和  $f'_y(x, y)$  的偏导数为函数  $f(x, y)$  的二阶偏导数. 引进二阶偏导数的记号:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) = f''_{xx}(x, y), & \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) = f''_{xy}(x, y), \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) = f''_{yx}(x, y), & \frac{\partial^2 z}{\partial^2 y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) = f''_{yy}(x, y).\end{aligned}$$

有时也将  $f''_{xy}(x, y)$  简记为  $f''_{xy}(x, y)$ , 其它类似.

其中二阶偏导数  $f''_{xy}(x, y)$  和  $f''_{yx}(x, y)$  称为二阶混合偏导数. 二阶及二阶以上的偏导数统称为高阶偏导数.

**例 9.3.13** 设  $z = x^y$  ( $x > 0$ ), 求:  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ .

**解:** (1)  $\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}, \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x$ .

$$(2) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} (yx^{y-1}) = y(y-1)x^{y-2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) = x^{y-1} + yx^{y-1} \ln x;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) = yx^{y-1} \ln x + x^{y-1}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) = x^y (\ln x)^2.$$

**例 9.3.14** 设  $f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ , 求:  $f''_{xy}(0, 0)$  和  $f''_{yx}(0, 0)$ .

**解:** 当  $(x, y) \neq (0, 0)$  时,

$$f'_x(x, y) = y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + xy \frac{4xy^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$f'_y(x, y) = x \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - xy \frac{4x^2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x(x^4 - 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

根据偏导数的定义

$$f'_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0,$$



$$f'_y(0,0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0,0)}{y} = 0.$$

所以

$$f''_{xy}(0,0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f'_x(0, y) - f'_x(0,0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y}{y} = -1,$$

$$f''_{yx}(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'_y(x,0) - f'_y(0,0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1.$$

由上可得,  $f''_{xy}(0,0) \neq f''_{yx}(0,0)$ . 也就是说, 多元函数的混合偏导数与求偏导数的次序有关, 那么, 在什么情况下, 混合偏导数与求导次序无关呢? 下面定理给出了混合偏导数与求导次序无关的一个充分条件.

**定理 9.3.15** 设二元函数  $f(x, y)$  在点  $P_0(x_0, y_0)$  处有二阶连续偏导数, 则

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0).$$

证明: 令

$$\begin{aligned} F(\Delta x, \Delta y) &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) \\ &\quad - f(x_0, y_0 + \Delta y) + f(x_0, y_0) \end{aligned}$$

$$\varphi(x) = f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0), \quad \psi(y) = f(x_0 + \Delta x, y) - f(x_0, y).$$

于是有

$$F(\Delta x, \Delta y) = \varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0), \quad F(\Delta x, \Delta y) = \psi(y_0 + \Delta y) - \psi(y_0).$$

由

于

$f(x, y)$  在点  $P_0$  处存在二阶连续偏导数, 则:  $\varphi(x)$  在  $x_0$  的某邻域内二阶可导. 根据一元函数的微分中值定理, 有

$$\begin{aligned} F(\Delta x, \Delta y) &= \varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0) = \varphi'(x_0 + \theta_1 \Delta x) \Delta x \\ &= [f'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y) - f'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0)] \Delta x \\ &= f''_{xy}(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \theta_2 \Delta y) \cdot \Delta x \cdot \Delta y. \end{aligned}$$

其中:  $0 < \theta_1 < 1, 0 < \theta_2 < 1$ .

类似地, 有

$$\begin{aligned} F(\Delta x, \Delta y) &= \psi(y_0 + \Delta y) - \psi(y_0) = \psi'(y_0 + \theta_3 \Delta y) \Delta y \\ &= [f'_y(x_0 + \Delta x, y_0 + \theta_3 \Delta y) - f'_y(x_0, y_0 + \theta_3 \Delta y)] \Delta y \\ &= f''_{yx}(x_0 + \theta_4 \Delta x, y_0 + \theta_3 \Delta y) \cdot \Delta x \cdot \Delta y. \end{aligned}$$

其中:  $0 < \theta_3 < 1, 0 < \theta_4 < 1$ .

当  $\Delta x, \Delta y$  不等于零时, 由上面两式可得

$$f''_{xy}(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \theta_2 \Delta y) = f''_{yx}(x_0 + \theta_4 \Delta x, y_0 + \theta_3 \Delta y).$$

由于  $f''_{xy}(x, y)$  与  $f''_{yx}(x, y)$  在点  $P_0(x_0, y_0)$  处连续, 因此, 当  $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$  时, 上式左、右两边的极限存在且相等, 所以

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0).$$

**例 9.3.16** 设函数  $u(x, y)$  具有二阶连续偏导数, 且

$$du = \frac{(x+2y)dx + aydy}{(x+ay)^2}.$$

(1) 求: 常数  $a$  的值; (2) 若  $u(0,1) = 0$ , 求:  $u(x, y)$ .

**解:** (1) 记  $P(x, y) = \frac{x+2y}{(x+ay)^2}, Q(x, y) = \frac{ay}{(x+ay)^2}$ , 则

$$P(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x+2y}{(x+ay)^2}, Q(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{ay}{(x+ay)^2}.$$

因此

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{(2-2a)x - 2ay}{(x+ay)^3}, \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{-2ay}{(x+ay)^3}.$$

又  $u(x, y)$  具有二阶连续偏导数, 则:  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ .

从而有

$$\frac{(2-2a)x - 2ay}{(x+ay)^3} = \frac{-2ay}{(x+ay)^3}.$$

所以,  $a = 1$ .

(2) 当  $a = 1$  时, 由  $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{(x+y)^2}$  可得

$$u(x, y) = \int \frac{y}{(x+y)^2} dy = \ln|x+y| + \frac{x}{x+y} + \varphi(x).$$

又  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x+2y}{(x+y)^2} = \frac{1}{x+y} + \frac{y}{(x+y)^2} + \varphi'(x)$ , 故  $\varphi'(x) = 0$ .

因此,  $u(x, y) = \ln|x+y| + \frac{x}{x+y} + C$ .

而  $u(0,1) = 0$ , 则:  $C = 0$ . 所以

$$u(x, y) = \ln|x+y| + \frac{x}{x+y}.$$

**例 9.3.17** 设函数  $f, g$  有二阶连续导数, 且  $u = f(\frac{y}{x}) + xg(\frac{y}{x})$ . 求证:

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

证明: 因为

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} f' + g - \frac{y}{x} g', \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{x} f' + g';$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{2y}{x^3} f' - \frac{y}{x^2} f'' \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) - \frac{y}{x^2} g' + \frac{y}{x^2} g' - \frac{y}{x} g'' \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) \\ &= \frac{2y}{x^3} f' + \frac{y^2}{x^4} f'' + \frac{y^2}{x^3} g''. \end{aligned}$$

同理可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{x^2} f' - \frac{y}{x^3} f'' - \frac{y}{x^2} g'', \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{x^2} f'' + \frac{1}{x} g''.$$

因此

$$\begin{aligned} &x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ &= \left( \frac{2y}{x} f' + \frac{y^2}{x^2} f'' + \frac{y^2}{x} g'' \right) - \left( \frac{2y}{x} f' + \frac{2y^2}{x^2} f'' + \frac{2y^2}{x} g'' \right) + \left( \frac{y^2}{x^2} f'' + \frac{y^2}{x} g'' \right) = 0. \end{aligned}$$

## § 9.4 多元复合函数的偏导数

本节讨论多元复合函数的偏导数, 由于多元函数含多个自变量, 其“复合”结构要比一元函数复杂. 我们先介绍二元复合函数的偏导数计算方法, 据此可以很容易推广到其它多元复合函数的情况.

设函数

$$u = g(x, y) \quad \text{和} \quad v = h(x, y)$$

定义在  $xy$  平面的区域  $D_{xy}$  上, 函数

$$z = f(u, v)$$

定义在  $uv$  平面的区域  $D_{uv}$  上, 且满足

$$\{(u, v) | u = g(x, y), v = h(x, y), (x, y) \in D_{xy}\} \subseteq D_{uv}.$$

则函数

$$z = f(u, v) = f(g(x, y), h(x, y)) \quad (x, y) \in D_{xy}$$

是以  $f$  为“外函数”,  $g, h$  为“内函数”的复合函数.

其中  $x, y$  为函数  $f$  的自变量,  $u, v$  为函数  $f$  的中间变量.

下面介绍多元复合函数的偏导数, 可微性与一阶微分的形式不变性.

### 一、复合函数的偏导数

**定理 9.4.1** 设函数  $u = g(x, y)$  和  $v = h(x, y)$  在点  $P(x, y)$  处偏导数存在, 函数  $z = f(u, v)$  在对应点  $(u, v)$  处有一阶连续偏导数, 则

$\frac{\partial z}{\partial x}$  和  $\frac{\partial z}{\partial y}$  均存在, 且

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (9.4.1)$$

**证明:** 当  $\Delta y = 0$  时,

$$\Delta_x u = g(x + \Delta x, y) - g(x, y), \quad \Delta_x v = h(x + \Delta x, y) - h(x, y).$$

由于  $z = f(u, v)$  有一阶连续偏导数, 根据定理 9.3.12 的证明, 有

$$\Delta_x z = f'_u(u, v)\Delta_x u + f'_v(u, v)\Delta_x v + (\alpha\Delta_x u + \beta\Delta_x v). \quad (9.4.2)$$

当  $\Delta_x u \rightarrow 0, \Delta_x v \rightarrow 0$  时,  $\alpha \rightarrow 0, \beta \rightarrow 0$ .

而当  $\Delta x \rightarrow 0$  时,  $\Delta_x u \rightarrow 0, \Delta_x v \rightarrow 0$ .

所以

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( f'_u \cdot \frac{\Delta_x u}{\Delta x} + f'_v \cdot \frac{\Delta_x v}{\Delta x} + \alpha \cdot \frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \beta \cdot \frac{\Delta_x v}{\Delta x} \right) \\ &= f'_u \cdot g'_x + f'_v \cdot h'_x = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned}$$

即

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}.$$

同理可得

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}.$$

定理 9.4.1 中所给出的复合函数偏导数的计算方法, 也称为复合函数偏导数计算的链式法则.

**例 9.4.2** 设  $z = (1 + xy^2)^x$  ( $x \geq 0$ ), 求:  $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ .

**解:** 这是上一节的例 9.3.4, 下面根据复合函数偏导数的链式法则计算本题所给函数的一阶偏导数.

令:  $u = 1 + xy^2, v = x$ , 则:  $z = u^v$  ( $u \geq 1$ ).

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = vu^{v-1} \cdot y^2 + u^v \ln u \\ &= (1 + xy^2)^x \left[ \ln(1 + xy^2) + \frac{xy^2}{1 + xy^2} \right]. \end{aligned}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = vu^{v-1} \cdot 2xy = 2x^2 y (1 + xy^2)^{x-1}.$$

**例 9.4.3** 设  $z = f(x^2 - y^2, \frac{y}{x})$ , 且  $f$  具有二阶连续偏导数, 求:  $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ .

**解:** 为书写方便引进下面记号

在复合函数  $z = f(u, v)$  中,  $f$  对第一个变量  $u$  求偏导, 记  $\frac{\partial f}{\partial u} = f'_1$ ,

对第 1、第 2 个变量求混合偏导数, 记  $\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = f''_{12}$ , 其它类似.

(1) 令  $u = x^2 - y^2$ ,  $v = \frac{y}{x}$ , 根据多元复合函数偏导数计算的链式法则,

有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = 2xf'_1 - \frac{y}{x^2} f'_2.$$

$$\begin{aligned} (2) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= 2x \left( \frac{\partial f'_1}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f'_1}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{1}{x^2} f'_2 - \frac{y}{x^2} \left( \frac{\partial f'_2}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f'_2}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ &= 2x \left( -2yf''_{11} + \frac{1}{x} f''_{12} \right) - \frac{1}{x^2} f'_2 - \frac{y}{x^2} \left( -2yf''_{21} + \frac{1}{x} f''_{22} \right) \\ &= -4xyf''_{11} + \frac{2(x^2 + y^2)}{x^2} f''_{12} - \frac{y}{x^3} f''_{22} - \frac{1}{x^2} f'_2. \end{aligned}$$

**例 9.4.4** 设函数  $z = z(x, y)$  存在一阶连续偏导数, 且满足方程

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z. \quad \text{作变换} \begin{cases} u = x \\ v = \frac{y}{x} \end{cases}, \quad \text{求证: } u \frac{\partial z}{\partial u} = z.$$

**证明:**

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{y}{x^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial v}. \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial v}. \end{aligned}$$

因此

$$z = x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = x \left( \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{y}{x^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} \right) + y \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} = x \frac{\partial z}{\partial u} = u \frac{\partial z}{\partial u}.$$

定理 9.4.1 给出了多元复合函数偏导数计算的链式法则, 给出了常见的两个自变量, 两个中间变量的情况, 据此可推广到其它情形. 例如:

(1) 设  $z = f(u, v, x)$ ,  $u = g(x, y)$ ,  $v = h(x, y)$ , 且  $f$ 、 $g$ 、 $h$  具有连续偏导, 则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dx}.$$

上式中, 左右两边的  $\frac{\partial z}{\partial x}$  的含义是不一样的, 左边的  $\frac{\partial z}{\partial x}$  是对自变量  $x$  求偏导数, 右边的  $\frac{\partial z}{\partial x}$  是对中变量  $x$  求偏导数. 为避免混淆, 通常将右边的  $\frac{\partial z}{\partial x}$  记作  $f'_3$ , 或  $\frac{\partial f}{\partial x}$ , 即对第 3 个变量求偏导数. 由此

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_1 \cdot g'_x + f'_2 \cdot h'_x + f'_3.$$

同样可得

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f'_1 \cdot g'_y + f'_2 \cdot h'_y.$$

(2) 设  $u = f(x, y, z)$ ,  $y = g(x)$ ,  $z = h(x)$ , 且  $f$  有将一阶连续偏导,  $g$ 、 $h$  可导, 则

$$\frac{du}{dx} = f'_1 + f'_2 \cdot g' + f'_3 \cdot h'.$$

其他情形读者可参照定理自行给出.

**例 9.4.5** 设  $u = \frac{1}{r}$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , 求证:  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ .

证明: 
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{dr} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{x}{r} = -\frac{x}{r^3}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{r^3 - x \cdot 3r^2 \cdot \frac{x}{r}}{r^6} = \frac{3x^2 - r^2}{r^5}.$$

同理可得  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{3y^2 - r^2}{r^5}$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{3z^2 - r^2}{r^5}$ , 所以

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{3(x^2 + y^2 + z^2) - 3r^2}{r^5} = 0.$$

**例 9.4.6** 设  $z$  是  $x$ 、 $y$  的函数, 且有二阶连续偏导, 若  $x = e^u \cos \theta$ ,  $y = e^u \sin \theta$ .

求证 
$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} = e^{2u} \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right).$$

证明: (1) 
$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} = e^u \left( \cos \theta \frac{\partial z}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial z}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta} = e^u \left( -\sin \theta \frac{\partial z}{\partial x} + \cos \theta \frac{\partial z}{\partial y} \right).$$

$$(2) \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = e^u \left( \cos \theta \frac{\partial z}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial z}{\partial y} \right) + e^{2u} \left( \cos^2 \theta \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} + \sin^2 \theta \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right).$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} = e^u \left( -\cos \theta \frac{\partial z}{\partial x} - \sin \theta \frac{\partial z}{\partial y} \right) + e^{2u} \left( \sin^2 \theta \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} + \cos^2 \theta \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right).$$

所以 
$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} = e^{2u} \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right).$$

**例 9.4.7** 设  $z = z(x, y)$  具有二阶连续偏导, 试确定常数  $a, b$  的值, 使得

利用变换  $u = ax + 3y, v = x + by$ , 可将方程  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 4 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 3 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$

化为  $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$ .

**解:** 根据复合函数的链式法则

$$(1) \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = a \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3 \frac{\partial z}{\partial u} + b \frac{\partial z}{\partial v}.$$

$$(2) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2a \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 9 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 6b \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + b^2 \frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 3a \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + (ab + 3) \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + b \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

因此 
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 4 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 3 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

$$= (a^2 - 12a + 27) \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + [2a - 4(ab + 3) + 18b] \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + (3b^2 - 4b + 1) \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

根据题目条件, 可得

$$\begin{cases} a^2 - 12a + 27 = 0 \\ 3b^2 - 4b + 1 = 0 \\ 2a - 4(ab + 3) + 18b \neq 0 \end{cases}.$$



所以,  $a=3$ ,  $b=\frac{1}{3}$  或  $a=9$ ,  $b=1$ .

## 二、一阶全微分的形式不变性

对于可微的二元复合函数  $z=f(u, v)$ ,  $u=g(x, y)$ ,  $v=h(x, y)$ , 由复合函数偏导数的链式法则和全微分的概念, 其全微分

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} dx + \frac{\partial z}{\partial v} dy = \left( \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx + \left( \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy.$$

整理后可得

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} \left( \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right) + \frac{\partial z}{\partial v} \left( \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right) = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv.$$

由上式可知, 对变量  $u, v$  而言, 无论作为中间变量还是自变量, 其全微分的形式是一样的, 这个性质称为一阶全微分的形式不变性.

**例 9.4.8** 设  $z=f(xy, e^{x-2y})$ , 且  $f$  具有一阶连续偏导, 求:  $\frac{\partial z}{\partial x}$  和  $\frac{\partial z}{\partial y}$ .

**解:** 设  $u=xy$ ,  $v=e^{x-2y}$ , 则

$$\begin{aligned} dz &= \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv = f'_1(ydx + xdy) + f'_2(e^{x-2y}(dx - 2dy)) \\ &= (yf'_1 + e^{x-2y}f'_2)dx + (xf'_1 - 2e^{x-2y})dy. \end{aligned}$$

所以

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yf'_1 + e^{x-2y}f'_2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = xf'_1 - 2e^{x-2y}.$$

## § 9.5 隐函数的偏导数

有些函数, 因变量与自变量之间的函数关系不是直接用自变量的解析式表示, 而是用包含自变量与因变量的一个方程给出的. 例如由方程  $e^{x+z} - 2xz + y = e$  确定  $z$  为  $x, y$  的函数  $z = z(x, y)$ .

我们称由方程  $F(x_1, x_2, \dots, x_n, u) = 0$  所确定的函数  $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  为**隐函数**. 下面我们研究隐函数及其性质, 着重讨论  $n=1, n=2$  的情况.

**定理 9.5.1** 若函数  $F(x, y)$  满足下列条件

- (1) 函数  $F$  在以  $P_0(x_0, y_0)$  为内点的某一区域  $D \subseteq R^2$  上连续;
- (2)  $F(x_0, y_0) = 0$  (通常称为初始条件);
- (3) 在  $D$  内存在连续的偏导数  $F'_x(x, y), F'_y(x, y)$ ;
- (4)  $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$ .

则: 在点  $P_0$  的某一邻域  $U(P_0)$  内唯一确定一个有连续导数的函数

$$y = f(x), \text{ 且满足 } y_0 = f(x_0), F(x, f(x)) = 0; \text{ 并且有 } \frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}.$$

**定理 9.5.2** 若函数  $F(x, y, z)$  满足下列条件:

- (1) 函数  $F$  在以  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  为内点的某一区域  $V \subseteq R^3$  上连续;
- (2)  $F(x_0, y_0, z_0) = 0$  (通常称为初始条件);
- (3) 在  $V$  内存在连续的偏导数  $F'_x(x, y, z), F'_y(x, y, z), F'_z(x, y, z)$ ;
- (4)  $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ .

则在点  $M_0$  的某一邻域内唯一确定一个具有连续偏导的函数  $z = f(x, y)$ ,

且满足  $z_0 = f(x_0, y_0)$ ,  $F(x, y, f(x, y)) = 0$ ; 并且有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}.$$

上面所述的隐函数存在性定理的证明从略, 有兴趣的读者可参考一般数学分析教材.

定理 9.5.2 中隐函数偏导数的计算可理解为通过如下方法得到:

方程  $F(x, y, z) = 0$  确定隐函数  $z = f(x, y)$ , 将其代入原方程, 得到

$$F(x, y, f(x, y)) = 0.$$

上式两边分别对  $x$  (或  $y$ ) 求偏导数, 可得

$$F'_x(x, y, z) + F'_z(x, y, z) \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

和

$$F'_y(x, y, z) + F'_z(x, y, z) \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

由于  $F'_z \neq 0$ , 于是有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}.$$

定理 9.5.1 中的隐函数的导数也可以类似得到.

**例 9.5.3** 设  $z = z(x, y)$  是由方程  $x(y^2 + z) + e^z = 1$  确定的隐函数, 求:  $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ .

**解:** 方程两边分别对  $x, y$  求偏导, 则

$$y^2 + z + x \frac{\partial z}{\partial x} + e^z \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad x(2y + \frac{\partial z}{\partial y}) + e^z \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

所以

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y^2 + z}{x + e^z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2xy}{x + e^z}.$$

**例9.5.4** 设  $z = z(x, y)$  是由  $e^{x+z} - 2xz + y = e$  确定的隐函数, 求:  $\left. \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{\substack{x=0 \\ y=0}}$ .

**解:【方法一】** 方程  $e^{x+z} - 2xz + y = e$  两边分别对  $x, y$  求偏导

$$e^{x+z} \cdot \left(1 + \frac{\partial z}{\partial x}\right) - 2z - 2x \frac{\partial z}{\partial x} = 0. \quad (9.5.1)$$

$$e^{x+z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} - 2x \frac{\partial z}{\partial y} + 1 = 0.$$

因此

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2z - e^{x+z}}{e^{x+z} - 2x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{e^{x+z} - 2x}.$$

当  $x = 0, y = 0$  时,  $z = 1$ . 得

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = 2e^{-1} - 1, \quad \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = -e^{-1}.$$

在式 (9.5.1) 两边再对  $y$  求偏导

$$e^{x+z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \left(1 + \frac{\partial z}{\partial x}\right) + e^{x+z} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial z}{\partial y} - 2x \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0.$$

所以

$$\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = 0.$$

**【方法二】** 设  $F(x, y, z) = e^{x+z} - 2xz + y - e$ , 则

$$F_x = e^{x+z} - 2z, \quad F_y = 1, \quad F_z = e^{x+z} - 2x.$$

而  $F'_z = e^{x+z} - 2x \neq 0$ , 则:  $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{e^{x+z} - 2z}{e^{x+z} - 2x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{e^{x+z} - 2x}$ . 且

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = 2e^{-1} - 1, \quad \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = -e^{-1}.$$

因此

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ -\frac{1}{e^{x+z} - 2x} \right] = \frac{e^{x+z} \cdot (1 + \frac{\partial z}{\partial x}) - 2}{(e^{x+z} - 2x)^2}.$$

所以

$$\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = 0.$$

**例 9.5.5** 证明：方程  $z^5 - xz^4 + yz^3 - 1 = 0$  在点  $M(0,0,1)$  的某邻域内可确定

$z$  为  $x, y$  的函数  $z = z(x, y)$ ，并计算  $\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_M$ 。

**证明：** 设  $F(x, y, z) = z^5 - xz^4 + yz^3 - 1$ ，则

(1)  $F(x, y, z)$  在  $R^3$  上连续，且存在连续偏导数  $F'_x, F'_y, F'_z$ ；

(2)  $F(0,0,1) = 0$ ；

(3) 又  $F'_z(x, y, z) = 5z^4 - 4xz^3 + 3yz^2$ ，故， $F'_z(M) = 5 \neq 0$ 。

根据定理 9.5.2，方程  $F(x, y, z) = 0$  在点  $M$  的某邻域内可确定

$z = z(x, y)$ ，且满足  $F(x, y, z(x, y)) = 0$ 。

方程两边分别对  $x, y$  求偏导，得

$$5z^4 \frac{\partial z}{\partial x} - z^4 - 4xz^3 \frac{\partial z}{\partial x} + 3yz^2 \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad (9.5.2)$$

$$5z^4 \frac{\partial z}{\partial y} - 4xz^3 \frac{\partial z}{\partial y} + z^3 + 3yz^2 \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

所以  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z^2}{5z^2 - 4xz + 3y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{z}{5z^2 - 4xz + 3y}.$

且

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_M = \frac{1}{5}, \quad \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_M = -\frac{1}{5}.$$

化简式 (9.5.2) 可得

$$5z^2 \frac{\partial z}{\partial x} - z^2 - 4xz \frac{\partial z}{\partial x} + 3y \frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

上式两边再对  $y$  求偏导

$$10z \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + 5z^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - 2z \frac{\partial z}{\partial y} - 4x \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - 4xz \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 3 \frac{\partial z}{\partial x} + 3y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0.$$

所以 
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{3}{25}.$$

另外, 由方程组可以确定相应的多个隐函数, 下面我们对方程组

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0 \\ G(x, y, u, v) = 0 \end{cases} \quad (9.5.3)$$

确定的两个隐函数  $u = u(x, y), v = v(x, y)$  给出存在性定理及其偏导数.

**定理 9.5.6** 设函数  $F(x, y, u, v), G(x, y, u, v)$  在点  $P_0(x_0, y_0, u_0, v_0)$

的某邻域内存在一阶连续偏导数  $F'_x, F'_y, F'_u, F'_v, G'_x, G'_y, G'_u, G'_v$ , 且

$F(P_0) = G(P_0) = 0$  (初始条件), 行列式  $J = \begin{vmatrix} F'_u & F'_v \\ G'_u & G'_v \end{vmatrix} \neq 0$ . 则方程组 (9.5.3)

在点  $(x_0, y_0)$  的某邻域内唯一确定两个二元函数  $u = u(x, y)$

和  $v = v(x, y)$  使得

$$(1) u_0 = u(x_0, y_0), v_0 = v(x_0, y_0);$$

$$(2) F(x, y, u(x, y), v(x, y)) = 0, G(x, y, u(x, y), v(x, y)) = 0;$$

$$(3) u = u(x, y), v = v(x, y) \text{ 具有一阶连续偏导数.}$$

此时有

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{1}{J} \cdot \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, v)}, & \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{1}{J} \cdot \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, x)}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{J} \cdot \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, v)}, & \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{J} \cdot \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, y)}. \end{aligned}$$

其中  $J = \begin{vmatrix} F'_u & F'_v \\ G'_u & G'_v \end{vmatrix}$  称为函数  $F, G$  关于  $u, v$  的 Jacobi (雅可比) 行列

式. 也记作  $\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)}$ . 同样  $\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, v)} = \begin{vmatrix} F'_x & F'_v \\ G'_x & G'_v \end{vmatrix}$  等等.

**例 9.5.7** 设方程组  $\begin{cases} u^3 + 3xv = y \\ v^3 + 3yu = x \end{cases}$ , 求:  $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}$ .

**解:** 根据题设, 方程组确定  $u, v$  为  $x, y$  的函数  $u = u(x, y), v = v(x, y)$ .

在方程组两边分别对  $x$  求偏导, 有

$$\begin{cases} 3u^2 \frac{\partial u}{\partial x} + 3v + 3x \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ 3v^2 \frac{\partial v}{\partial x} + 3y \frac{\partial u}{\partial x} = 1 \end{cases}.$$

即

$$\begin{cases} u^2 \frac{\partial u}{\partial x} + x \frac{\partial v}{\partial x} = -v \\ 3y \frac{\partial u}{\partial x} + 3v^2 \frac{\partial v}{\partial x} = 1 \end{cases}.$$

所以

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{3v^3 + x}{3u^2v^2 - 3xy}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{u^2 + 3yv}{3u^2v^2 - 3xy}.$$

## § 9.6 多元函数的极值

多元函数的极值在现实中有着广泛的应用，下面着重以二元函数为例介绍多元函数的无条件极值与条件极值.

### 一、二元函数的极值

**定义 9.6.1** 设函数  $z = f(x, y)$  在点  $P_0(x_0, y_0)$  的某邻域  $U(P_0)$  内有定义，若对  $\forall (x, y) \in U(P_0)$  均有

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0) \text{ 或 } f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$$

则称  $f(x_0, y_0)$  为函数  $f(x, y)$  的极大值或极小值；点  $P_0(x_0, y_0)$  称为函数  $f(x, y)$  的极大值点或极小值点.

**例如** 函数  $z = 2 - (x^2 + y^2)$  的图形为旋转抛物面，其顶点为  $(0, 0, 2)$ ，且开口向下，所以在点  $(0, 0)$  处有极大值 2.

若函数  $z = f(x, y)$  在点  $P_0(x_0, y_0)$  处取极大值，则一元函数  $z = f(x, y_0)$  在  $x = x_0$  处也取极大值；根据一元函数极值存在的必要条件（费马）定理，有

$$\left. \frac{d}{dx} f(x, y_0) \right|_{x=x_0} = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} = f'_x(x_0, y_0) = 0.$$

同样，一元函数  $z = f(x_0, y)$  在  $y = y_0$  处有极大值，故， $f'_y(x_0, y_0) = 0$ .

**定理 9.6.2** 设函数  $z = f(x, y)$  在点  $P_0(x_0, y_0)$  的某邻域内可偏导，若  $P_0$  是函数  $f(x, y)$  的极值点，则必有

$$\begin{cases} f'_x(x_0, y_0) = 0 \\ f'_y(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$

使多元函数所有一阶偏导数都为零的点  $P_0$  称为驻点. 与一元函数类似，多元函数的驻点未必是其极值点. 例如：马鞍面



$z = xy$  的驻点为  $O(0,0)$ , 但  $(0,0)$  并不是极值点. 因为在第一、三象限函数值为正, 在第二、四象限函数值为负.

下面我们引进多元函数极值存在的一个充分条件, 具体证明见本节第三部分二元函数的泰勒展开.

**定理 9.6.3** 设函数  $z = f(x, y)$  在点  $P_0(x_0, y_0)$  有连续的二阶偏导数, 且

$$f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0.$$

记  $A = f''_{xx}(x_0, y_0), B = f''_{xy}(x_0, y_0), C = f''_{yy}(x_0, y_0).$

那么

(1) 若  $B^2 - AC < 0$ , 则  $P_0(x_0, y_0)$  为函数  $f(x, y)$  的极值点. 且

- 当  $A > 0$  时, 函数  $f(x, y)$  在  $P_0$  处取极小值;
- 当  $A < 0$  时, 函数  $f(x, y)$  在  $P_0$  处取极大值.

(2) 若  $B^2 - AC > 0$ , 则  $P_0(x_0, y_0)$  不是函数  $f(x, y)$  的极值点.

**例 9.6.4** 求函数  $f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$  的极值.

**解:**  $f(x, y)$  在  $R^2$  上任意点处均存在偏导数, 令

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 4x^3 - 2x - 2y = 0 \\ f'_y(x, y) = 4y^3 - 2x - 2y = 0 \end{cases}$$

求得驻点  $P_1(-1, -1), P_2(0,0), P_3(1,1).$

又因为  $f''_{xx} = 12x^2 - 2, f''_{xy} = -2, f''_{yy} = 12y^2 - 2.$  则

	$A$	$B$	$C$	$B^2 - AC$
$P_1(-1, -1)$	10	-2	10	-96
$P_2(0,0)$	-2	-2	-2	0
$P_3(1,1)$	10	-2	10	-96

因此, 函数  $f(x, y)$  在点  $P_1(-1, -1)$  和  $P_3(1, 1)$  处均取极小值, 且

$$f_{\min}(-1, -1) = f_{\min}(1, 1) = -2.$$

在点  $P_2(0, 0)$  处,  $B^2 - AC = 0$ , 无法根据定理 9.6.3 判断其是否取极值.

在点  $P_2$  处任取邻域  $U(P_2)$ , 取  $(x, x) \in U(P_2)$ , 当  $0 < |x| < \sqrt{2}$  时, 有

$$f(x, x) = 2x^2(x^2 - 2) < 0.$$

而对  $(x, -x) \in U(P_2)$  ( $x \neq 0$ ) 有  $f(x, -x) = 2x^4 > 0$ . 因此,  $f(0, 0)$  不是函数的极值.

**例 9.6.5** 在平面上求一点  $P(x, y)$  使其到直线  $x + 2y - 4 = 0$  及  $x$  轴、 $y$  轴的距离平方和最小.

**解:** 点  $P(x, y)$  到直线  $x + 2y - 4 = 0$  及  $x$  轴、 $y$  轴的距离平方和为  $f(x, y)$ , 则

$$f(x, y) = \frac{1}{5}(x + 2y - 4)^2 + x^2 + y^2.$$

令

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = \frac{2}{5}(x + 2y - 4) + 2x = 0 \\ f'_y(x, y) = \frac{4}{5}(x + 2y - 4) + 2y = 0 \end{cases}.$$

求得驻点  $P(\frac{2}{5}, \frac{4}{5})$ . 且

$$A = f''_{xx} = \frac{12}{5}, B = f''_{xy} = \frac{4}{5}, C = f''_{yy} = \frac{18}{5}, \text{ 故, } B^2 - AC < 0 \text{ 且 } A > 0.$$

所以, 点  $P(\frac{2}{5}, \frac{4}{5})$  到直线  $x + 2y - 4 = 0$  及  $x$  轴、 $y$  轴的距离平方和最小.

## 二、多元函数的条件极值

二元函数的条件极值是指在约束条件  $g(x, y) = 0$  下, 求目标函数  $f(x, y)$  的极值. 如果能从约束条件  $g(x, y) = 0$  求解出  $y = y(x)$  或  $x = x(y)$ , 将其代入目标函数  $f(x, y)$ , 从而化为一元函数的无条件极值进行求解. 但是, 当约束条件  $g(x, y) = 0$  比较复杂时, 要求解出  $y = y(x)$  或  $x = x(y)$ , 是很困难的. 含约束条件的极值问题称为条件极值, 前面所介绍的极值称为无条件极值. 对于条件极值, 常用的方法为拉格朗日乘数法.

**定理 9.6.6** 设函数  $f(x, y)$ ,  $g(x, y)$  在点  $P_0(x_0, y_0)$  的某邻域内存在连续偏导数, 且  $g(x, y)$  在点  $P_0$  处的偏导数不全为零, 则: 在条件  $g(x, y) = 0$  下,  $f(x, y)$  在点  $P_0$  处有极值的必要条件是存在常数  $\lambda$  使得

$$\begin{cases} f'_x(x_0, y_0) + \lambda g'_x(x_0, y_0) = 0 \\ f'_y(x_0, y_0) + \lambda g'_y(x_0, y_0) = 0. \\ g(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$

**证明:** 不妨假设  $g'_y(x_0, y_0) \neq 0$ , 根据隐函数存在定理, 存在  $x_0$  的某邻域  $U(x_0)$  及函数  $y = \varphi(x)$  使得  $y_0 = \varphi(x_0)$ , 且对  $\forall x \in U(P_0)$  有

$$g(x, \varphi(x)) = 0.$$

因为  $f(x, y)$  在条件  $g(x, y) = 0$  下, 在点  $P_0(x_0, y_0)$  处有极值, 所以一元函数  $h(x) = f(x, \varphi(x))$  在  $x = x_0$  处取极值. 根据极值存在的必要条件, 有  $h'(x_0) = 0$ .

即

$$f'_x(x_0, y_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot \varphi'(x_0) = 0.$$

又  $\varphi'(x_0) = -\frac{g'_x(x_0, y_0)}{g'_y(x_0, y_0)}$ , 将其代入上式可得

$$f'_x(x_0, y_0) - f'_y(x_0, y_0) \cdot \frac{g'_x(x_0, y_0)}{g'_y(x_0, y_0)} = 0.$$

令  $\lambda = -\frac{f'_y(x_0, y_0)}{g'_y(x_0, y_0)}$ , 即  $f'_y(x_0, y_0) + \lambda g'_y(x_0, y_0) = 0$ . 因此

$$\begin{cases} f'_x(x_0, y_0) + \lambda g'_x(x_0, y_0) = 0 \\ f'_y(x_0, y_0) + \lambda g'_y(x_0, y_0) = 0. \\ g(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$

如果我们引进新的函数

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y),$$

那么定理所给的条件极值存在的必要条件可转化为关于三元函数  $L(x, y, \lambda)$  无条件极值的必要条件. 因此, 对于条件极值问题, 只要构造上面函数, 就可将其转化为无条件极值, 这一方法称为**拉格朗日乘数法**;  $\lambda$  称为**拉格朗日乘数**.

但是, 本定理仅给出了条件极值存在的必要条件, 是否取极值需根据具体情况判断, 或作进一步的分析讨论.

**例 9.6.7** 求点  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  到平面  $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$  的距离.

**解:** 点  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  到平面  $\pi$  的距离是点  $M_0$  与平面  $\pi$  上任意一点  $M$  间距离的最小值, 构造如下拉格朗日函数:

$$L(x, y, z, \lambda) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 + 2\lambda(Ax + By + Cz + D).$$

令

$$\begin{cases} L'_x = 2(x - x_0) + 2\lambda A = 0 \\ L'_y = 2(y - y_0) + 2\lambda B = 0 \\ L'_z = 2(z - z_0) + 2\lambda C = 0 \\ L'_\lambda = 2(Ax + By + Cz + D) = 0 \end{cases}.$$

求得驻点  $P(x_0 - \lambda_0 A, y_0 - \lambda_0 B, z_0 - \lambda_0 C)$ , 其中  $\lambda_0 = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A^2 + B^2 + C^2}$ .

根据实际情况, 定点到平面上点之间的最小距离一定存在, 而所求的驻点唯一, 因此, 上面计算所得的驻点  $P$  与点  $M_0$  之间的距离即为点  $M_0$  到平面  $\pi$  的距离. 因此

$$d = |M_0 P| = |\lambda_0| \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

这就是第 8 章中的点到平面的距离公式.

**例 9.6.8** 求曲线  $C: \begin{cases} x^2 + 9y^2 - 2z^2 = 0 \\ x + 3y + 3z = 5 \end{cases}$  上点到  $xoy$  平面的距离的最大值和最小值.

**解:** 曲线  $C$  上的点  $M(x, y, z)$  到  $xoy$  平面的距离为  $|z|$ , 其最值与  $z^2$  一致.

构造拉格朗日函数

$$L(x, y, z, \lambda, \mu) = z^2 + \lambda(x^2 + 9y^2 - 2z^2) + 2\mu(x + 3y + 3z - 5).$$

令

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 2\lambda x + 2\mu = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 18\lambda y + 6\mu = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z} = 2z - 4\lambda z + 6\mu = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = x^2 + 9y^2 - 2z^2 = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \mu} = 2(x + 3y + 3z - 5) = 0 \end{cases}.$$

求得驻点  $M_1(1, \frac{1}{3}, 1)$ ,  $M_2(-5, -\frac{5}{3}, 5)$ .

曲线  $C$  为平面截椭圆锥所得的椭圆, 曲线  $C$  上一定存在到  $xoy$  平面的距离最小与最大的点, 因此, 曲线  $C$  上点到  $xoy$  平面的距离的最大值和最小值分别为

$$d_{\max} = 5, \quad d_{\min} = 1.$$

**例 9.6.9** 求函数  $z = x^2 + y^2 + 2x + y$  在区域  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$  上的最大值和最小值.

**解:** 函数  $z = f(x, y) = x^2 + y^2 + 2x + y$  在有界闭区域  $D$  上连续, 一定存在最大值和最小值; 其最值可能在区域  $D$  的内部  $\text{int } D = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\}$  取得, 也可能在区域  $D$  的边界上取得.

$$(1) \text{ 令 } \begin{cases} f'_x = 2x + 2 = 0 \\ f'_y = 2y + 1 = 0 \end{cases}, \text{ 得到驻点 } P(-1, -\frac{1}{2}).$$

由于驻点  $P$  不在  $\text{int } D$  内, 因此, 函数  $f(x, y)$  在  $\text{int } D$  内没有极值.

(2) 构造拉格朗日函数:  $L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + 2x + y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$ . 令

$$\begin{cases} L'_x = 2x + 2 + 2\lambda x = 0 \\ L'_y = 2y + 1 + 2\lambda y = 0. \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

求得驻点  $P_1(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}), P_2(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}})$ .

计算其函数值分别为  $z_1 = f(P_1) = 1 + \sqrt{5}, z_2 = f(P_2) = 1 - \sqrt{5}$ , 所得函数值分别为函数  $f(x, y)$  在区域  $D$  上的最大值和最小值.

本题求函数  $z = x^2 + y^2 + 2x + y$  在边界曲线  $C: x^2 + y^2 = 1$  上的最大最小值也可用初等数学中的三角函数进行求解. 令  $x = \cos \theta, y = \sin \theta (0 \leq \theta \leq 2\pi)$ . 则

$$z = 1 + 2\cos \theta + \sin \theta = 1 + \sqrt{5} \sin(\theta + \varphi). \text{ 其中: } \tan \varphi = 2.$$

因此

$$1 - \sqrt{5} \leq z \leq 1 + \sqrt{5}.$$

所以函数  $f(x, y)$  在区域  $D$  上的最大值和最小值分别为  $1 + \sqrt{5}$  和  $1 - \sqrt{5}$ .

### 三、二元函数的泰勒展开

在上册第4章一元函数的泰勒展开中, 用一元多项式来近似满足一定条件的函数, 这对函数性态的研究提供了极为方便和有效的工具. 对于多元函数也有类似的泰勒展开.

**定理 9.6.10** 设二元函数  $z = f(x, y)$  在点  $P(x_0, y_0)$  的某邻域  $U(P)$  内具有  $n+1$  阶连续偏导数, 则对任意  $(x, y) \in U(P)$ , 记  $\Delta x = x - x_0, \Delta y = y - y_0$ , 有

$$\begin{aligned} f(x, y) = & f(x_0, y_0) + \left( \Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x_0, y_0) \\ & + \frac{1}{2!} \left( \Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(x_0, y_0) + \cdots + \frac{1}{n!} \left( \Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(x_0, y_0) \\ & + \frac{1}{(n+1)!} \left( \Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} \right)^{n+1} f(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y). \quad (0 < \theta < 1). \end{aligned}$$

其中记号

$$\left( \Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} \right)^k f(x_0, y_0) = \sum_{i=0}^k C_k^i \frac{\partial^k f}{\partial x^i \partial y^{k-i}} (\Delta x)^i (\Delta y)^{k-i} \bigg|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}, k=1,2,3,\dots$$

**证明：**构造函数

$$\varphi(t) = f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)$$

由于  $z = f(x, y)$  在点  $P(x_0, y_0)$  的某邻域  $U(P)$  内具有  $n+1$  阶连续偏导数, 因此,  $\varphi(t)$  对任意  $t \in [0,1]$  存在  $n+1$  阶连续导数. 根据一元函数的泰勒公式, 有

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \varphi'(0)t + \frac{\varphi''(0)}{2!}t^2 + \dots + \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}t^n + \frac{\varphi^{(n+1)}(\theta t)}{(n+1)!}t^{n+1}. \quad (0 < \theta < 1)$$

又

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \Delta x f'_1(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y) + \Delta y f'_y(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y) \\ &= \left( \Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y), \\ \varphi''(t) &= \frac{d}{dt} \left[ \left( \Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y) \right] \\ &= \left( \Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y), \end{aligned}$$

依次求高阶导数, 可得

$$\varphi^{(k)}(t) = \left( \Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} \right)^k f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y),$$

因此

$$\varphi^{(k)}(0) = \left( \Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} \right)^k f(x_0, y_0).$$

将上面各式代入  $\varphi(t)$  的泰勒展开式, 即可得定理所给结论.

**例 9.6.11** 求函数  $f(x, y) = x^2 y$  在点  $P(1, -2)$  处的二阶泰勒展开式.

**解：**因为

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0;$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = 0, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = 2.$$

因此, 在点  $P(1, -2)$  处

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -4, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 1; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

所以

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(1, -2) + \left[ (x-1) \frac{\partial}{\partial x} + (y+2) \frac{\partial}{\partial y} \right] f(1, -2) \\ &\quad + \frac{1}{2!} \left[ (x-1) \frac{\partial}{\partial x} + (y+2) \frac{\partial}{\partial y} \right]^2 f(1, -2) + R_2. \\ &= -2 - 4(x-1) + (y+2) - 2(x-1)^2 + 2(x-1)(y+2) + R_2 \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} R_2 &= \frac{1}{3!} \left[ (x-1) \frac{\partial}{\partial x} + (y+2) \frac{\partial}{\partial y} \right]^3 f(1 + \theta(x-1), -2 + \theta(y+2)) \\ &= \frac{1}{3!} C_3^2 (x-1)^2 (y+2) \cdot 2 = (x-1)^2 (y+2). \quad (0 < \theta < 1) \end{aligned}$$

对于二元函数  $z = f(x, y)$ , 若在点  $P(x_0, y_0)$  处存在  $n$  阶连续偏导数, 则

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \left( \Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} \right)^k f(x_0, y_0) + o(\rho^n).$$

其中:  $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ .

这是皮亚诺余项形式的泰勒展开, 其证明可参照上面定理与一元函数泰勒展开的证明.

假设  $z = f(x, y)$ , 若在点  $P(x_0, y_0)$  处存在一阶连续偏导数, 则

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + o(\rho).$$

即

$$\Delta z = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + o(\rho).$$



这便是函数  $z = f(x, y)$  在点  $P(x_0, y_0)$  处的全微分. 而

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

便是光滑曲面  $z = f(x, y)$  在点  $P(x_0, y_0)$  处的切平面. (见本章第 8 节)

**例 9.6.12** 多元函数极值存在充分条件的证明.

**极值存在的充分条件** 设函数  $z = f(x, y)$  在点  $P_0(x_0, y_0)$  的某邻域内有连续的二阶偏导数, 且  $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$ . 记

$$A = f''_{xx}(x_0, y_0), B = f''_{xy}(x_0, y_0), C = f''_{yy}(x_0, y_0).$$

那么

(1) 若  $B^2 - AC < 0$ , 则  $P_0(x_0, y_0)$  为函数  $f(x, y)$  的极值点. 且

- 当  $A > 0$  时, 函数  $f(x, y)$  在  $P_0$  处取极小值;
- 当  $A < 0$  时, 函数  $f(x, y)$  在  $P_0$  处取极大值.

(2) 若  $B^2 - AC > 0$ , 则  $P_0(x_0, y_0)$  不是函数  $f(x, y)$  的极值点.

**证明:** 将函数  $f(x, y)$  在  $P_0(x_0, y_0)$  处泰勒展开, 有

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x_0, y_0) + [f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y] \\ &\quad + \frac{1}{2}[(\Delta x)^2 f''_{xx}(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y) + 2\Delta x\Delta y f''_{xy}(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y) \\ &\quad + (\Delta y)^2 f''_{yy}(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)], \quad (0 < \theta < 1). \end{aligned}$$

因为  $f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yy}$  在点  $P(x_0, y_0)$  处连续, 则当  $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \rightarrow 0$  时, 有

$$\begin{aligned} f''_{xx}(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y) &= A + \alpha, \\ f''_{xy}(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y) &= B + \beta, \\ f''_{yy}(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y) &= C + \gamma. \end{aligned}$$

其中

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \alpha = \lim_{\rho \rightarrow 0} \beta = \lim_{\rho \rightarrow 0} \gamma = 0.$$

因此

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2} [A(\Delta x)^2 + 2B(\Delta x)(\Delta y) + C(\Delta y)^2]$$

$$+\frac{1}{2}[\alpha(\Delta x)^2+2\beta(\Delta x)(\Delta y)+\gamma(\Delta y)^2]. \quad (9.6.1)$$

由于

$$\frac{|\alpha(\Delta x)^2+2\beta(\Delta x)(\Delta y)+\gamma(\Delta y)^2|}{\rho^2} \leq |\alpha|+|\beta|+|\gamma|,$$

因此

$$\alpha(\Delta x)^2+2\beta(\Delta x)(\Delta y)+\gamma(\Delta y)^2=o(\rho^2).$$

所以, 在式 (9.6.1) 中, 等式左边的符号取决于等式右边第一项的符号. 记

$$p=A(\Delta x)^2+2B(\Delta x)(\Delta y)+C(\Delta y)^2.$$

(1) 若  $AC-B^2>0$  时, 此时  $A, C$  均不为零, 且同号. 从而有

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{A}[(A\Delta x+B\Delta y)^2+(AC-B^2)(\Delta y)^2] \\ &= \frac{1}{C}[(B\Delta x+C\Delta y)^2+(AC-B^2)(\Delta x)^2]. \end{aligned}$$

可见, 对任意不全为零的  $\Delta x, \Delta y$ , 上式括号内恒正; 故

- 当  $A>0$  (即  $C>0$ ) 时,  $f(x, y)$  在  $P_0$  处, 有极小值;
- 当  $A<0$  (即  $C<0$ ) 时,  $f(x, y)$  在  $P_0$  处, 有极大值.

(2) 若  $AC-B^2<0$  时,

- 若  $A, C$  不全为零, 不妨设  $A \neq 0$ , 此时若令  $\Delta y=0$ , 则  $p=A(\Delta x)^2$  与

$A$  同号; 若令  $\Delta x=-\frac{B}{A}\Delta y$ , 则  $p=\frac{AC-B^2}{A}(\Delta y)^2$  与  $A$  异号; 因此,

$f(x, y)-f(x_0, y_0)$  在  $U(P_0)$  内可正可负, 故  $P_0$  不是  $f(x, y)$  的极值点.

- 若  $A=C=0$ , 则  $p=2B\Delta x\Delta y$ ; 显然,  $p$  的取值可正可负. 故  $f(x_0, y_0)$  不是极值.

**【注】** 如果  $B^2-AC=0$ , 则  $f(x_0, y_0)$  可能是极值, 也可能不是极值.

例如:

- 函数  $z=x^3+y^3$ , 有  $B^2-AC=0$ , 点  $(0,0)$  不是极值点;
- 函数  $z=x^4+y^4$ , 有  $B^2-AC=0$ , 点  $(0,0)$  是极值点.

**例 9.6.13** 计算:  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0,0)} \frac{\ln(x^2 + e^{y^2})}{x^2 + y^2}$ .

**解:** 记  $f(x, y) = \ln(x^2 + e^{y^2})$ , 则

$$\begin{aligned}f'_x(x, y) &= \frac{2x}{x^2 + e^{y^2}}, \quad f'_y(x, y) = \frac{2ye^{y^2}}{x^2 + e^{y^2}}; \\f''_{xx}(x, y) &= \frac{2e^{y^2} - 2x^2}{(x^2 + e^{y^2})^2}, \quad f''_{xy}(x, y) = \frac{-4xye^{y^2}}{(x^2 + e^{y^2})^2}, \\f''_{yy}(x, y) &= \frac{(2 + 4y^2)e^{y^2}(x^2 + e^{y^2}) - 4y^2e^{y^2}}{(x^2 + e^{y^2})^2}.\end{aligned}$$

因此

$$f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0, \quad f''_{xx}(0,0) = f''_{yy}(0,0) = 2, \quad f''_{xy}(0,0) = 0.$$

根据泰勒展开, 有

$$\begin{aligned}f(x, y) &= f(0,0) + [xf'_x(0,0) + yf'_y(0,0)] \\&\quad + \frac{1}{2}(x^2 f''_{xx}(0,0) + 2xyf''_{xy}(0,0) + y^2 f''_{yy}(0,0)) + o(\rho^2) = (x^2 + y^2) + o(\rho^2)\end{aligned}$$

其中:  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ . 所以

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0,0)} \frac{\ln(x^2 + e^{y^2})}{x^2 + y^2} = 1.$$

## § 9.7 方向导数与梯度

在很多实际问题的讨论中, 不仅要知道函数沿坐标轴方向的变化率(偏导数), 而且还要设法计算函数沿其它方向的变化率. 这就是下面要讨论的方向导数.

**定义 9.7.1** 设  $f(x, y, z)$  在点  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  的某邻域  $U(M_0) \subseteq R^3$  内有定义,  $l$  为某一确定方向, 以  $M_0$  为起点沿  $l$  方向任取一点  $M(x, y, z)$  且  $M \in U(M_0)$ , 记  $\rho = |M_0M|$ . 如果极限

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(M) - f(M_0)}{\rho} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(x, y, z) - f(x_0, y_0, z_0)}{\rho}.$$

存在, 则称此极限为函数  $f$  在点  $M_0$  处沿方向  $l$  的方向导数. 记作

$$\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{M_0}, \quad f'_l(M_0) \text{ 或 } f'_l(x_0, y_0, z_0).$$

因此

$$\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{M_0} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(x, y, z) - f(x_0, y_0, z_0)}{\rho}.$$

在方向导数定义中, 所取的点  $M$  并不是随意的, 要求向量  $M_0M$  与已知方向  $l$  同向.

容易看出, 当  $f$  在点  $M_0$  处存在关于  $x$  的偏导数, 则  $f$  沿  $x$  轴正方向( $i$ )的方向导数恰好为其偏导数, 即  $\left. \frac{\partial f}{\partial i} \right|_{M_0} = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{M_0}$ . 而沿

$x$  轴负方向( $-i$ )的方向导数为  $\left. \frac{\partial f}{\partial (-i)} \right|_{M_0} = -\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{M_0}$ .

**定理 9.7.2** 若函数  $f$  在点  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  处可微, 则  $f$  在点  $M_0$  处沿任何方向  $l$  的方向导数均存在, 且

$$\frac{\partial f}{\partial l} = f'_x(M_0) \cos \alpha + f'_y(M_0) \cos \beta + f'_z(M_0) \cos \gamma.$$

其中:  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  为  $l$  的方向余弦.

**证明:** 设  $M(x, y, z)$  为以  $M_0$  为起点, 沿  $l$  方向的射线上的任意一点, 于是

$$\begin{cases} x - x_0 = \rho \cos \alpha = \Delta x \\ y - y_0 = \rho \cos \beta = \Delta y \\ z - z_0 = \rho \cos \gamma = \Delta z \end{cases}$$

其中:  $\rho = |M_0 M| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$ . (如图 9.3 所示)

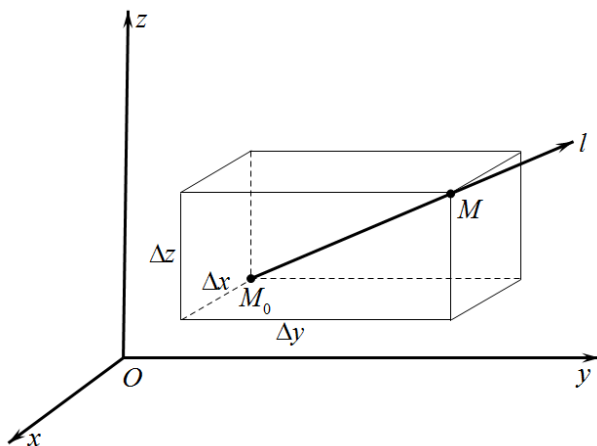


图 9.3

由于  $f$  在点  $M_0$  处可微, 则

$$f(M) - f(M_0) = f'_x(M_0)\Delta x + f'_y(M_0)\Delta y + f'_z(M_0)\Delta z + o(\rho).$$

因此

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{M_0} &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(M) - f(M_0)}{\rho} \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \left[ f'_x(M_0) \cdot \frac{\Delta x}{\rho} + f'_y(M_0) \cdot \frac{\Delta y}{\rho} + f'_z(M_0) \cdot \frac{\Delta z}{\rho} + \frac{o(\rho)}{\rho} \right] \\ &= f'_x(M_0) \cos \alpha + f'_y(M_0) \cos \beta + f'_z(M_0) \cos \gamma. \end{aligned}$$

特别地, 对于平面上的点  $P_0$  处, 可微的二元函数  $f(x, y)$  沿

$l = \{\cos \alpha, \cos \beta\}$  方向的方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial l} = f'_x(P_0)\cos \alpha + f'_y(P_0)\cos \beta.$$

**例 9.7.3** 设  $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ , 求  $f$  在点  $M(1, -2, 2)$  沿方向

$l = \{1, -2, 2\}$  的方向导数.

**解:** 记  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , 则

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{x}{r} = -\frac{x}{r^3}, \text{ 故, } \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_M = f'_x(M) = -\frac{1}{27}.$$

$$\text{同理可得 } f'_y(M) = \frac{2}{27}, \quad f'_z(M) = -\frac{2}{27}.$$

与方向  $l$  同向的单位向量  $l^0 = \{\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\}$ , 因此

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial l} &= f'_x(M)\cos \alpha + f'_y(M)\cos \beta + f'_z(M)\cos \gamma \\ &= -\frac{1}{27} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{27} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{2}{27}\right) \cdot \frac{2}{3} = -\frac{1}{9}. \end{aligned}$$

**例 9.7.4** 设  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{y} & (y \neq 0) \\ 0 & (y = 0) \end{cases}$ , 证明:  $f(x, y)$  在点  $(0, 0)$  处沿任何方

向的方向导数均存在, 但  $f(x, y)$  在点  $(0, 0)$  处不连续.

**证明:** 设方向  $l = \{\cos \alpha, \sin \alpha\}$ ,  $(0 \leq \alpha < 2\pi)$ .

(1) 当  $\alpha \neq 0, \pi$  时,

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(\rho \cos \alpha, \rho \sin \alpha) - f(0, 0)}{\rho} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^3 \cos^3 \alpha}{\rho^2 \sin \alpha} = 0.$$

(2) 当  $\alpha = 0$  或  $\pi$  时,

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(\rho \cos \alpha, 0) - f(0, 0)}{\rho} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{\rho} = 0.$$

因此, 函数  $f(x, y)$  在点  $(0, 0)$  处沿任何方向的方向导数均存在且为 0.

(3) 当点  $P(x, y)$  沿  $x$  轴方向趋向于  $(0,0)$  时,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y=0}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = 0.$$

当点  $P(x, y)$  沿曲线  $y = x^3$  趋向于  $(0,0)$  时,

$$\lim_{\substack{y=x^3 \\ x \rightarrow 0}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^3} = 1.$$

因此, 函数  $f(x, y)$  在点  $(0,0)$  处极限不存在, 从而不连续.

这个例子说明函数在一点可微是方向导数存在的充分而非必要条件; 函数在一点连续同样也不是方向导数存在的必要条件, 当然也不是充分条件(请读者举出反例).

**例 9.7.5** 在椭球  $S: 2x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$  上求一点, 使函数

$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  在该点沿方向  $\boldsymbol{l} = \{1, -2, 2\}$  的方向导数最大.

**解:** 与方向  $\boldsymbol{l}$  同向的单位向量  $\boldsymbol{l}^0 = \frac{1}{3}\{1, -2, 2\}$ ,  $f$  在点  $M(x, y, z)$  处的方向导数为  $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}} = \frac{2}{3}(x - 2y + 2z)$ .

构造拉格朗日函数:  $L(x, y, z, \lambda) = (x - 2y + 2z) + \lambda(2x^2 + 2y^2 + z^2 - 1)$ .

令

$$\begin{cases} L'_x = 1 + 4\lambda x = 0 \\ L'_y = -2 + 4\lambda y = 0 \\ L'_z = 2 + 2\lambda z = 0 \\ 2x^2 + 2y^2 + z^2 = 1 \end{cases}.$$

求得驻点:  $M_1(-\frac{1}{\sqrt{26}}, \frac{2}{\sqrt{26}}, -\frac{4}{\sqrt{26}})$ ,  $M_2(\frac{1}{\sqrt{26}}, -\frac{2}{\sqrt{26}}, \frac{4}{\sqrt{26}})$ .

而  $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}} \Big|_{M_1} = -\frac{\sqrt{26}}{3}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}} \Big|_{M_2} = \frac{\sqrt{26}}{3}$ , 因此, 椭球面  $S$  上点  $(\frac{1}{\sqrt{26}}, -\frac{2}{\sqrt{26}}, \frac{4}{\sqrt{26}})$

处沿方向  $\boldsymbol{l}$  的方向导数最大, 且其最大方向导数为  $\frac{\sqrt{26}}{3}$ .

有了方向导数, 就解决了给定一个函数  $u = f(x, y, z)$  沿某方向的变化率问题, 那么, 函数在某点处沿什么方向的方向导数最大? 最大值是多少? 下面我们引进梯度这个概念.

函数  $f(x, y, z)$  在点  $M$  处可微, 则其沿方向  $\boldsymbol{l} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$  的方向导数为

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial l} &= f'_x(M) \cos \alpha + f'_y(M) \cos \beta + f'_z(M) \cos \gamma \\ &= \{f'_x(M), f'_y(M), f'_z(M)\} \cdot \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\} \triangleq \text{grad} f \cdot \boldsymbol{l}.\end{aligned}$$

其中:  $\text{grad} f = (f'_x(M), f'_y(M), f'_z(M))$ .

由此可得

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \text{grad} f \cdot \boldsymbol{l} = |\text{grad} f| \cdot |\boldsymbol{l}| \cos \theta = |\text{grad} f| \cos \theta.$$

其中:  $\theta$  为向量  $\text{grad} f$  与  $\boldsymbol{l}$  的夹角.

当  $\theta = 0$  时,  $\frac{\partial f}{\partial l}$  取最大值  $|\text{grad} f|$ ; 当  $\theta = \pi$  时,  $\frac{\partial f}{\partial l}$  取最小值  $-|\text{grad} f|$ .

因此, 函数  $f$  在点  $M$  处沿方向  $\text{grad} f$  的方向导数最大, 向量  $\text{grad} f$  有其特殊的含义, 这就是函数  $f$  的梯度.

**定义 9.7.6** 若函数  $f(x, y, z)$  在点  $M$  处存在对所有变量的偏导数, 称向量  $(f'_x(M), f'_y(M), f'_z(M))$  为函数  $f(x, y, z)$  在点  $M$  处的**梯度**. 记作

$$\text{grad} f = (f'_x(M), f'_y(M), f'_z(M)).$$

根据上面的讨论, 方向导数的公式又可写成

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \text{grad} f \cdot \boldsymbol{l}^0 = |\text{grad} f| \cos \theta.$$

其中:  $\boldsymbol{l}^0$  为与方向  $\boldsymbol{l}$  同向的单位向量,  $\theta$  为  $\text{grad} f$  与  $\boldsymbol{l}$  的夹角.



**例 9.7.7** 求  $u = x^3 - 3x^2y + 3y^2z - z^3$  在点  $M(1, -1, 2)$  处的梯度和最大方向导数.

**解:**  $\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 6xy, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -3x^2 + 6yz, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 3y^2 - 3z^2.$

则

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_M = 9, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_M = -15, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_M = -9.$$

所以数量函数  $u$  的梯度

$$\text{gradu}|_M = 9\mathbf{i} - 15\mathbf{j} - 9\mathbf{k}.$$

数量函数  $u$  在点  $M$  处的最大方向导数

$$\left( \left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_M \right)_{\max} = |\text{gradu}|_M| = 3\sqrt{43}.$$

**例 9.7.8** 求地球的万有引力势能  $E = -G \frac{mM}{r}$  的梯度. 其中  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

为矢径  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  的模.

**解:** 因为  $\frac{\partial E}{\partial x} = G \frac{mM}{r^2} \cdot \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial E}{\partial y} = G \frac{mM}{r^2} \cdot \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial E}{\partial z} = G \frac{mM}{r^2} \cdot \frac{z}{r}.$

所以

$$\text{grad}E = \frac{\partial E}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial E}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial E}{\partial z}\mathbf{k} = G \frac{mM}{r^2} \left( \frac{x}{r}\mathbf{i} + \frac{y}{r}\mathbf{j} + \frac{z}{r}\mathbf{k} \right) = G \frac{mM}{r^2} \mathbf{r}^0.$$

其中:  $\mathbf{r}^0$  为与矢径  $\mathbf{r}$  同向的单位向量.

由此可知, 万有引力势能场的梯度场就是万有引力场. 沿地球的万有引力方向其引力势能的变动最快.

## § 9.8 偏导数在几何中的应用

### 一、 向量函数

在第 8 章中, 我们曾用参数方程 
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \ (t \in D \subseteq R) \\ z = z(t) \end{cases}$$
 表示空间曲线,

其实, 若将参数方程写成向量形式  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ , 那么, 曲线上  $t = t_0$  处的点就对应向量  $(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ . 这种用各分量为  $t$  的函数的向量来表示曲线会更加方便, 为此引进向量函数.

**定义 9.8.1** 称向量  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$  ( $t \in D \subseteq R$ ) 为三维向量函数, 其中一元实函数  $x(t), y(t), z(t)$  称为向量函数  $\mathbf{r}(t)$  的分量函数.

例如  $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$  就是三维向量函数, 实际上就是  $R^3$  空间中的螺旋线, 在直角坐标系下亦可表示为

$$\mathbf{r}(t) = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + t \mathbf{k}.$$

与一般函数类似, 向量函数也可定义和讨论其极限、连续和导数等.

**定义 9.8.2** 设向量函数  $\mathbf{r}(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$  在  $U^0(t_0)$  内有定义, 如果存在常数  $a_i$  使得  $\lim_{t \rightarrow t_0} f_i(t) = a_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), 则称  $t \rightarrow t_0$  时,  $\mathbf{r}(t)$  的极限为

$$\mathbf{A} = \{a_1, a_2, a_3\}.$$

记作

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{A}.$$

即向量函数  $\mathbf{r}(t)$ , 当  $t \rightarrow t_0$  时有极限当且仅当每个分量的极限均存在.

**定义 9.8.3** 设向量函数  $\mathbf{r}(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$  在  $U(t_0)$  内有定义, 如果

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f_i(t) - f_i(t_0)}{t - t_0}$$

都存在且为  $b_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), 则称  $\mathbf{r}(t)$  在  $t = t_0$  处可导,  $(b_1, b_2, b_3)$  为  $\mathbf{r}(t)$

在  $t = t_0$  处的导向量, 记作  $\mathbf{r}'(t_0)$  或  $\left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_{t_0}$ .

**例如** 螺旋线  $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$  的导数  $\mathbf{r}'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$ .

结合定义 9.8.2 和 9.8.3, 向量函数的导向量

$$\mathbf{r}'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}.$$

从以上表达式可看出向量函数的导向量的几何意义如下:

设  $P$ 、 $Q$  是可导向量函数  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$  所表示的曲线上的任意两点, 其对应的参数分别为  $t$ 、 $t + \Delta t$ , 有

$$\mathbf{OP} = \mathbf{r}(t), \quad \mathbf{OQ} = \mathbf{r}(t + \Delta t).$$

则

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{PQ} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t).$$

当  $\Delta t \rightarrow 0$ , 即点  $Q$  沿曲线  $C: \mathbf{r}(t)$  趋向于点  $P$  时,  $\mathbf{PQ}$  的极限  $\mathbf{PT}$  就是曲线  $C$  在点  $P$  处的切矢量, 其方向指向参数  $t$  增加的方向.

所以, 向量函数导向量  $\mathbf{r}'(t)$  (或  $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ ) 的几何意义就是曲线  $C$  在参数  $t$  对应点  $P$  处的切矢量, 且其方向指向参数  $t$  增加的方向 (如图 9.8.1 所示).

切矢量  $\mathbf{s} = \mathbf{r}'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k}$ .

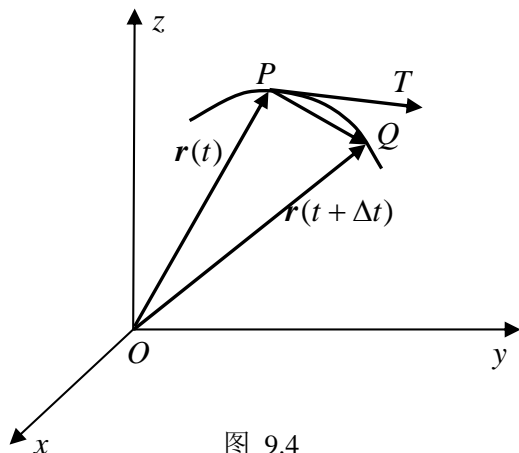


图 9.4

## 二、空间曲线的切线与法平面

设曲线  $C$  的参数方程为 
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases},$$
 其中  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  具有连续

导数, 且其导数不全为零. 将其写成矢量形式  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ , 则曲线上任意一点  $P_0$  处的切矢量 (点  $P_0$  对应的参数为  $t_0$ ) 为

$$\mathbf{s} = \mathbf{r}'(t_0) = x'(t_0)\mathbf{i} + y'(t_0)\mathbf{j} + z'(t_0)\mathbf{k}.$$

因此, 曲线在点  $P_0$  处的切线  $l$  的方程为

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z'(t_0)}.$$

过曲线  $C$  上点  $P_0$  且与该点处的切线垂直的平面称为 **法平面**, 则法平面方程为

$$x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) + z'(t_0)(z - z_0) = 0.$$

**例 9.8.4** 求曲线  $C: \mathbf{r}(t) = (t, t^2, t^3)$  在点  $t=1$  处的切线与法平面.

**解:** 曲线  $C$  的切矢量为  $\mathbf{r}'(t) = (1, 2t, 3t^2)$ , 点  $t=1$  处的切矢量

$$\mathbf{s} = \mathbf{r}'(1) = (1, 2, 3).$$

$P$  点坐标为  $P(1,1,1)$ , 因此, 曲线的切线为

$$l: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}.$$

曲线在点  $P$  处的法平面为

$$\pi: (x-1) + 2(y-1) + 3(z-1) = 0.$$

即

$$\pi: x + 2y + 3z - 6 = 0.$$

当曲线用一般方程

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}.$$

表示时, 若  $F, G$  具有连续偏导数, 且  $J = \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)} \neq 0$  时, 根据隐函数存在定理, 可将曲线表示为参数方程形式. 即  $y, z$  可表示为  $x$  的函数

$$\begin{cases} x = x \\ y = y(x). \\ z = z(x) \end{cases}$$

且

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{J} \cdot \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, z)} = \frac{1}{J} \cdot \frac{\partial(F, G)}{\partial(z, x)}, \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{1}{J} \cdot \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, x)} = \frac{1}{J} \cdot \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)}.$$

因此, 切矢量

$$s = \left\{ 1, \frac{1}{J} \cdot \frac{\partial(F, G)}{\partial(z, x)}, \frac{1}{J} \cdot \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)} \right\} \parallel \left\{ \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)}, \frac{\partial(F, G)}{\partial(z, x)}, \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)} \right\}.$$

所以, 曲线在点  $P(x_0, y_0, z_0)$  处的切线方程

$$\frac{x - x_0}{\left. \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)} \right|_P} = \frac{y - y_0}{\left. \frac{\partial(F, G)}{\partial(z, x)} \right|_P} = \frac{z - z_0}{\left. \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)} \right|_P}.$$

曲线在点  $P(x_0, y_0, z_0)$  处的法平面方程

$$\left. \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)} \right|_P (x - x_0) + \left. \frac{\partial(F, G)}{\partial(z, x)} \right|_P (y - y_0) + \left. \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)} \right|_P (z - z_0) = 0.$$

**例 9.8.5** 求曲线  $C: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 3x \\ 2x - 3y + 5z = 4 \end{cases}$  在点  $M(1,1,1)$  处的切线方程, 并证明

该切线在平面  $x - 2y - 2z + 3 = 0$  上.

**解:** 记  $C: \begin{cases} F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 3x = 0 \\ G(x, y, z) = 2x - 3y + 5z - 4 = 0 \end{cases}$ , 则

$$F'_x = 2x - 3, F'_y = 2y, F'_z = 2z; \quad G'_x = 2, G'_y = -3, G'_z = 5.$$

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)} = \begin{vmatrix} 2y & 2z \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 10y + 6z,$$

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(z, x)} = \begin{vmatrix} 2z & 2x - 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -10x + 4z + 15,$$

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} 2x - 3 & 2y \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -6x - 4y + 9.$$

于是曲线在在点  $M(1,1,1)$  处的切矢量

$$s = \left\{ \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)}, \frac{\partial(F, G)}{\partial(z, x)}, \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)} \right\} \Big|_M = (16, 9, -1).$$

所以, 曲线在点  $M(1,1,1)$  处的切线  $l$  的方程为

$$l: \frac{x-1}{16} = \frac{y-1}{9} = \frac{z-1}{-1}.$$

切线  $l$  的参数方程为

$$\begin{cases} x=1+16t \\ y=1+9t \\ z=1-t \end{cases}.$$

将其代入平面  $x-2y-2z+3=0$  可得

$$(1+16t)-2(1+9t)-2(1-t)+3=0.$$

所以, 切线  $l$  在平面  $x-2y-2z+3=0$  上.

### 三、曲面的切平面与法线

设曲面  $S: F(x, y, z)=0$ ,  $F$  具有一阶连续偏导数, 且偏导数不全为零, 称此曲面为光滑曲面. 在光滑曲面  $S: F(x, y, z)=0$  上任取一点

$$M_0(x_0, y_0, z_0), \text{ 过点 } M_0 \text{ 在曲面 } S \text{ 上任作一条光滑曲线 } C: \begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$$

点  $M_0$  对应的参数为  $t_0$ .

由于曲线  $C$  在曲面  $S$  上, 所以

$$F(x(t), y(t), z(t))=0.$$

上式两边对  $t$  求导, 有

$$F'_x \cdot x'(t) + F'_y \cdot y'(t) + F'_z \cdot z'(t) = 0.$$

将  $t=t_0$  代入, 可得

$$F'_x(x_0, y_0, z_0) \cdot x'(t_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0) \cdot y'(t_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0) \cdot z'(t_0) = 0.$$

即

$$F'_x(M_0) \cdot x'(t_0) + F'_y(M_0) \cdot y'(t_0) + F'_z(M_0) \cdot z'(t_0) = 0.$$

若记  $\mathbf{n} = (F'_x(M_0), F'_y(M_0), F'_z(M_0))$ ,  $\mathbf{s} = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$ , 则  $\mathbf{n}$  为固

定向量, 且  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{s} = 0$ , 所以, 曲线  $C$  上点  $M_0$  处的切向量  $\mathbf{s}$  与向量  $\mathbf{n}$  垂直.

由于曲线  $C$  是任意的, 因此, 过光滑曲面上点  $M_0$  且在曲面上的任意光滑曲线, 在点  $M_0$  处的切线始终垂直于固定方向  $\mathbf{n}$ . 也就是说, 曲线的切线均在过点  $M_0$ , 以  $\mathbf{n}$  为法向量的平面上, 我们称此平面为曲面  $S$  在  $M_0$  点的切平面.

根据上面的讨论, 光滑曲面  $S: F(x, y, z) = 0$  在点  $M_0$  处切平面的法向量为

$$\mathbf{n} = \{F'_x, F'_y, F'_z\} \Big|_{M_0}.$$

所以, 切平面方程为

$$F'_x(M_0) \cdot (x - x_0) + F'_y(M_0) \cdot (y - y_0) + F'_z(M_0) \cdot (z - z_0) = 0.$$

过点  $M_0$  且与切平面垂直的直线称为曲面  $S$  的法线. 法线方程为

$$\frac{x - x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(M_0)}.$$

**例 9.8.6** 求曲面  $S: xy + yz + zx = 11$  上与平面  $5x + 4y + 3z = 0$  平行的切平面方程.

**解:** 设切点  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ , 曲面  $S$  在点  $M_0$  处的法向量

$$\mathbf{n} = \{y_0 + z_0, z_0 + x_0, x_0 + y_0\}.$$

已知平面的法向量  $\mathbf{n}' = \{5, 4, 3\}$ , 所以

$$\frac{y_0 + z_0}{5} = \frac{z_0 + x_0}{4} = \frac{x_0 + y_0}{3}.$$

又点  $M_0$  在曲面  $S$  上, 故,  $x_0 y_0 + y_0 z_0 + z_0 x_0 = 11$ . 求解上述方程可得

$M_0(1, 2, 3)$  或  $M_0(-1, -2, -3)$ . 其对应的切平面分别为

$$\pi_1: 5x + 4y + 3z - 22 = 0; \pi_2: 5x + 4y + 3z + 22 = 0.$$

当曲线以一般方程  $C: \begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$  表示时, 如果  $F, G$  具有一阶

连续偏导数, 曲线  $C$  在点  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  处的切线 实际上就是曲面

$S_1: F(x, y, z) = 0$  和曲面  $S_2: G(x, y, z) = 0$  在点  $M_0$  处切平面的交线.

即曲线  $C$  在点  $M_0$  处的切线

$$l: \begin{cases} F'_x(M_0) \cdot (x - x_0) + F'_y(M_0) \cdot (y - y_0) + F'_z(M_0) \cdot (z - z_0) = 0 \\ G'_x(M_0) \cdot (x - x_0) + G'_y(M_0) \cdot (y - y_0) + G'_z(M_0) \cdot (z - z_0) = 0 \end{cases}.$$

将其化为直线的点向式方程, 直线  $l$  的方向为

$$s = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ F'_x & F'_y & F'_z \\ G'_x & G'_y & G'_z \end{vmatrix} = \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)} \mathbf{i} + \frac{\partial(F, G)}{\partial(z, x)} \mathbf{j} + \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)} \mathbf{k}.$$

所以, 切线方程

$$\frac{x - x_0}{\left. \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)} \right|_P} = \frac{y - y_0}{\left. \frac{\partial(F, G)}{\partial(z, x)} \right|_P} = \frac{z - z_0}{\left. \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)} \right|_P}.$$

这与前面所得到的结果是一致的.

例 9.8.5 中, 曲面  $S_1: x^2 + y^2 + z^2 = 3x$  在点  $M(1,1,1)$  的切平面为

$$x - 2y - 2z + 3 = 0.$$

因此, 曲线的切线可表示为

$$l: \begin{cases} x - 2y - 2z + 3 = 0 \\ 2x - 3y + 5z = 4 \end{cases}.$$

此直线显然在平面  $x - 2y - 2z + 3 = 0$  上.

当光滑曲面以显函数形式  $S: z = f(x, y)$  表示时, 且

$f$  具有一阶连续偏导数, 则曲面在点  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  处的法向量

$$\mathbf{n} = \{f'_x(x_0, y_0, z_0), f'_y(x_0, y_0, z_0), -1\}.$$



切平面方程

$$\pi: f'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0.$$

或

$$z = z_0 + f'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0).$$

**例 9.8.7** 在曲面  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1$  落在第一卦限部分上求一点  $M$ , 使点  $M$  处的切平面与三个坐标平面所围立体的体积最小.

**解:** 在曲面的第一卦限部分上任取一点  $M(x_0, y_0, z_0)$ , 则点  $M$  处的切平面为

$$\pi: \frac{x_0 x}{4} + \frac{y_0 y}{9} + z_0 z = 1.$$

切平面  $\pi$  与三个坐标平面所围成的立体的体积

$$V = \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{x_0} \cdot \frac{9}{y_0} \cdot \frac{1}{z_0} = \frac{6}{x_0 y_0 z_0}.$$

构造拉格朗日函数

$$L(x, y, z, \lambda) = xyz + \lambda\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 - 1\right).$$

$$\text{由 } \begin{cases} L'_x = yz + \frac{\lambda}{2}x = 0 \\ L'_y = zx + \frac{2}{9}\lambda y = 0 \\ L'_z = xy + 2\lambda z = 0 \\ L'_\lambda = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{解得驻点为 } M\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

由于求得的驻点唯一, 且根据实际问题, 在点  $M$  处  $xyz$  取最大值  $\frac{2}{\sqrt{3}}$ . 从

而点  $M_0$  处的切平面与三个坐标平面所围立体的体积最小, 且最小体积

$$V_{\min} = 3\sqrt{3}.$$

实际上, 以上问题即要计算  $x_0 y_0 z_0$  的最大值, 可通过下面方法求解.

$$\text{由于 } \frac{x_0^2}{4} + \frac{y_0^2}{9} + z_0^2 = 1, \text{ 则: } 1 = \frac{x_0^2}{4} + \frac{y_0^2}{9} + z_0^2 \geq 3\sqrt[3]{\frac{x_0^2}{4} \cdot \frac{y_0^2}{9} \cdot z_0^2} = 3\sqrt[3]{\frac{x_0^2 y_0^2 z_0^2}{36}}.$$

因此

$$x_0 y_0 z_0 \leq \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

且等号在  $\frac{x_0^2}{4} = \frac{y_0^2}{9} = z_0^2 = \frac{1}{3}$ , 即  $x_0 = \frac{2}{\sqrt{3}}$ ,  $y_0 = \sqrt{3}$ ,  $z_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$  时成立. 从而,

切平面与三个坐标平面所围立体的最小体积  $V_{\min} = 3\sqrt{3}$ .

**例 9.8.8** 设  $z = f(x, y)$  在  $R^2$  上连续, 且  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - x + 3y - 4}{x^2 + y^2} = 1$ ,

求曲面  $z = f(x, y)$  在点  $(0,0)$  处的切平面方程.

**解:** 由于  $z = f(x, y)$  在点  $(0,0)$  处连续, 且

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - x + 3y - 4}{x^2 + y^2} = 1.$$

则

$$f(0,0) = \lim_{(x, y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 4.$$

且

$$f(x, y) = x - 3y + 4 + x^2 + y^2 + o(\rho^2), \text{ 其中: } \rho = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

即

$$f(x, y) = f(0,0) + x - 3y + o(\rho).$$

因此, 函数  $z = f(x, y)$  在点  $(0,0)$  处可微, 且  $dz|_{(0,0)} = dx - 3dy$ .

所以, 曲面  $z = f(x, y)$  在点  $(0,0)$  处的切平面为:  $z = x - 3y + 4$ .

## 习题 9.1

1. 试问集合  $A = \{(x, y) \mid 0 < |x - a| < \delta, 0 < |y - b| < \delta, \delta > 0\}$  与集合  $B = \{(x, y) \mid |x - a| < \delta, |y - b| < \delta \text{ 且 } (x, y) \neq (a, b), \delta > 0\}$  是否相同?

2. 求下列函数的定义域, 并在  $xOy$  平面内画出其图形.

(1)  $z = \sqrt{4 - x^2} + \sqrt{y}$ ;

(2)  $z = \sqrt{(x^2 + y^2 - 1)(9 - x^2 - y^2)}$ ;

(3)  $z = \ln(x^2 + 2y^2 - 8)$ ;

(4)  $z = \arcsin \sqrt{2 - x - y}$ ;

(5)  $z = \arcsin \frac{x - y}{x^2 + y^2}$ ;

(6)  $z = \ln \frac{y}{x} + \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ .

3. 求下列函数的定义域, 并在三维直角坐标系中画出其图形.

(1)  $u = \sqrt{4 - x^2 - y^2 - z^2} + \ln(z - x^2 - y^2)$ ; (2)  $u = \arccos(2x^2 + y^2 + 3z^2 - 1)$ ;

(3)  $u = \ln((z^2 - x^2 - y^2)(1 - z^2))$ ; (4)  $u = \frac{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}{\ln(x^2 + y^2 + z^2 - 1)}$ .

4. 设  $f(x + \frac{1}{x}, y - 1) = x^2 + y^2 + 2xy + \frac{1}{x^2} + \frac{2y}{x} - 2(x + y) - \frac{2}{x} + 4$ , 求  $f(x, y)$  的表达式.

5. 已知  $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{2xy}$ , 求

(1)  $f(y, x)$ ; (2)  $f(-x, -y)$ ; (3)  $f(-x, y)$ ; (4)  $f(\frac{1}{x}, \frac{1}{y})$ .

## 习题 9.2

6. 利用极限定义证明下列极限.

$$(1) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{|x| + |y|} = 0;$$

$$(2) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2x + y + 2}{2 - x - 2y} = 1.$$

7. 据理说明下列函数在  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  时是否存在极限? 若存在, 求出其极限.

$$(1) f(x, y) = \frac{x + y}{|x| + |y|};$$

$$(2) f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x + y};$$

$$(3) f(x, y) = \frac{\sin(x^2 - y^2)}{e^{-x^2 + y^2} - 1};$$

$$(4) f(x, y) = \frac{1 - \cos(xy)}{x^2 + y^2};$$

$$(5) f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{|x| + |y|};$$

$$(6) f(x, y) = \frac{x - y^2}{x + y};$$

$$(7) f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2};$$

$$(8) f(x, y) = \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}.$$

8. 设  $f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ , 试分析下列极限的存在性.

$$(1) \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y);$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y);$$

$$(3) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y).$$

9. 计算下列极限.

$$(1) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} \frac{1 - \cos(xy)}{\ln(1 - 2x^2)};$$

$$(2) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} \frac{\tan x - x}{\sqrt{1 + yx^3} - 1}.$$

10. 证明函数  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$  在点  $(0, 0)$  处连续.

11. 试举例说明二元函数  $f(x, y)$  在点  $P(x_0, y_0)$  处对每个变量  $x, y$  均连续, 但  $f(x, y)$  在点  $P$  处不连续.

### 习题 9.3

12. 求下列函数在指定点处的偏导数.

(1) 设  $f(x, y) = x + (y-1)\arctan\frac{x}{y}$ , 求:  $f'_x(0,1)$  和  $f'_y(0,1)$ .

(2) 设  $f(x, y) = (x-1)^2 \arctan(1+y^2) + \sin \pi y \cdot \ln \sqrt{1+x^2}$ ,

求:  $f'_x(1,0)$  和  $f'_y(1,0)$ .

13. 计算下列函数对各个变量的一阶偏导数.

(1)  $z = e^x(x \cos y + \sin y)$ ;

(2)  $z = e^{\frac{y}{x}}(x+y)$ ;

(3)  $z = \ln(2x + \sqrt{x^2 + y^2})$ ;

(4)  $z = \left(\frac{y}{x}\right)^{xy} \quad (xy > 0)$ ;

(5)  $u = (x+y+z)^{xyz} \quad (x+y+z > 0)$ ;

(6)  $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ .

14. 设  $f(x, y) = e^{\sqrt{x^2 + y^4}}$ , 求:  $f'_x(0,0)$  和  $f'_y(0,0)$ .

15. 设  $f(x, y) = (x-1)(y-1)(x-2)(y-2)\cdots(x-100)(y-100)$ .

求: (1)  $f'_x(1,0)$ ; (2)  $f''_{xy}(1,1)$ .

16. 设  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ , 求:  $f'_x(x, y)$ .

17. 设  $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & (x, y) = (0,0) \end{cases}$ .

求:  $f'_x(x, y)$  并证明  $f'_x(x, y)$  在点  $(0,0)$  处不连续.

18. 设  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ , 讨论  $f'_x(0, 0)$  与  $f'_y(0, 0)$  是否存在, 若存在, 求出其值.

19. 设  $z = f(x^2 - y^2)$ , 且  $f$  二阶可导, 计算:  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ .

20. 设  $z = xy + xf\left(\frac{y}{x}\right)$ , 且  $f$  可微, 证明:  $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = xy + z$ .

21. 设  $z = xf(x + y) + yg(x + y)$ , 且  $f, g$  二阶可导, 证明:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

22. 验证函数  $z = \frac{1}{2\sqrt{\pi x}} e^{-\frac{(y-1)^2}{4x}}$  满足方程  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ .

23. 设  $z = e^{-\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)}$ , 求证:  $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = 2z$ .

24. 求下列函数的全微分.

(1)  $z = (1 + x + y)^{xy}$  ( $x + y + 1 > 0$ ); (2)  $u = (x + \sin y)^z$  ( $x > 1$ );

(3)  $u = \sqrt{\frac{x}{y}}$ , 求:  $du|_{(1,1)}$ ; (4)  $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , 求:  $du|_{(1,2,-2)}$ .

25. 设  $f(x, y) = |x - y|\varphi(x, y)$ , 其中  $\varphi(x, y)$  在点  $(0, 0)$  的某领域内连续.

证明:  $f(x, y)$  在点  $(0,0)$  处可微  $\Leftrightarrow \varphi(0,0)=0$ .

26. 设  $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & (x, y) = (0,0) \end{cases}$ , 试讨论  $f$  在点  $(0,0)$

处的连续性, 可偏性和可微性; 并说明其一阶偏导数在点  $(0,0)$  处是否连续.

27. 设  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2 + y^4} & (x^2 + y^2 \neq 0) \\ 0 & (x^2 + y^2 = 0) \end{cases}$ , 讨论  $f(x, y)$  在  $(0,0)$  处的连续性,

可偏性和可微性.

28. 设  $z = f(x, y)$  可微, 且  $dz = \frac{3(xdy - ydx)}{(x - y)^2}$ ,  $f(1,0) = 1$ . 求:  $f(x, y)$  的表达式.

29. 设  $u = u(x, y)$  可微, 且满足  $du = (\cos x + 2xy^3)dx + (ye^y + 3x^2y^2)dy$ ,

求:  $u(x, y)$  的表达式

30. 设  $u = u(x, y)$  具有二阶连续偏导数, 且

$$du = \frac{(x + ay)dx + (-x + by)dy}{x^2 + 4y^2}. \quad (x > 0)$$

求: (1) 常数  $a, b$  的值; (2)  $u(x, y)$  的表达式  $(x > 0)$ .



## 习题 9.4

31. 求下列函数的偏导数.

(1)  $z = \sqrt{u^2 + v^2}$ ,  $u = x \sin y$ ,  $v = e^{xy}$ , 求:  $\frac{\partial z}{\partial x}$  和  $\frac{\partial z}{\partial y}$ ;

(2)  $z = e^{uv}$ ,  $u = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $v = \arctan \frac{y}{x}$ , 求:  $\frac{\partial z}{\partial x}$  和  $\frac{\partial z}{\partial y}$ ;

(3)  $z = \ln(x^2 + y^2)$ ,  $x = t \cos t$ ,  $y = -\sin t$ , 求:  $\frac{dz}{dt}$ ;

(4)  $z = uv \arctan \frac{u}{v}$ ,  $u = x + y$ ,  $v = x - y$ , 求:  $\frac{\partial z}{\partial x}$  和  $\frac{\partial z}{\partial y}$ .

32. 设  $z = 2 \ln \frac{x+y}{x-y}$ ,  $x = \sec t$ ,  $y = 2 \sin t$ , 求:  $\left. \frac{dz}{dt} \right|_{t=\frac{\pi}{3}}$ .

33. 设  $z = f(u, x, y)$ ,  $u = xe^y$ , 且  $f$  具有二阶连续偏导数, 求:  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ .

34. 设  $z = f(x^2 - y^2, x \sin y)$ , 且  $f$  具有二阶连续偏导, 计算:  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ .

35. 设  $z = f(x^2 + y^2, \frac{y}{x})$ , 且  $f$  具有二阶连续偏导, 计算:  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ .

36. 设  $z = xf(\frac{y}{x}) + yg(\frac{x}{y})$ , 且  $f, g$  具有二阶连续导数, 证明:

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

37. 设函数  $u = f(u, v)$  具有二阶连续偏导数, 且满足 Laplace 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial v^2} = 0. \quad \text{证明: 函数 } z = f(x^2 - y^2, 2xy) \text{ 也满足 Laplace 方程}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

38. 设  $z = z(x, y)$  有二阶连续偏导数, 且满足  $6\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ , 如

果引进变换  $\begin{cases} u = x - 2y \\ v = x + 3y \end{cases}$ , 试将上面方程变换为关于  $u, v$  的方程.

39. 设  $z = f(x, y)$  具有二阶连续偏导数, 求常数  $a$  的值, 使得变换

$$\begin{cases} u = x + 2y \\ v = x + ay \end{cases} \text{ 把方程 } 2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \text{ 化为 } \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0.$$

40. 设函数  $z = f(x, y)$  在点  $(1, 1)$  处可微, 且  $f(1, 1) = 1, \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(1,1)} = 2, \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(1,1)} = 3$ .

若  $\varphi(x) = f(x, f(x, x))$ , 求:  $\frac{d}{dx}[\varphi(x)]^3 \Big|_{x=1}$ .

41. 利用一阶微分的形式不变性求下列函数的偏导数.

(1) 设  $x^2 + y^2 + 2z^2 - 2x + 6z = 9$ , 求:  $\frac{\partial z}{\partial x}$  和  $\frac{\partial z}{\partial y}$ ;

(2) 设  $z = f(e^{xy}, x^2 - y^2)$ , 且  $f$  具有一阶连续偏导数, 求:  $\frac{\partial z}{\partial x}$  和  $\frac{\partial z}{\partial y}$ .

## 习题 9.5

42. 已知方程  $x + y - z - e^{zx} + e^{-x-y} = 4$  (\*)

(1) 若函数  $z = z(x, y)$  由方程 (\*) 所确定, 求:  $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(1,1,-2)}$ ;

(2) 若函数  $y = y(z, x)$  由方程 (\*) 所确定, 求:  $\left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{(1,1,-2)}$ .

43. 设  $\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \arctan \frac{y}{x}$ , 求:  $\frac{dy}{dx}$  和  $\frac{d^2 y}{dx^2}$ .

44. 设  $z = z(x, y)$  是由方程  $xyz e^{x+y+z} = 1$  所确定的函数, 求:  $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ .

45. 设  $z = z(x, y)$  是由方程  $z^3 - 3xyz = a^3$  ( $a \neq 0$ ) 所确定的函数, 求:  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ .

46. 设  $u = f(x, y, z)$ ,  $g(x^2, e^y, z) = 0$ ,  $y = \sin x$ , 其中  $f, g$  均有一阶连续偏导数, 且  $\frac{\partial g}{\partial z} \neq 0$ , 求:  $\frac{dz}{dx}$ .

47. 设  $u = f(x, y, z)$ ,  $g(x, y) = 0$ ,  $h(x, z) = 0$ , 且  $f, g, h$  有一阶连续偏导数. 若  $g'_y(y) \neq 0$ ,  $h'_z(z) \neq 0$ . 求:  $\frac{du}{dx}$ .

48. 设  $u = u(x, y)$  是由方程  $u = f(u) + \int_y^x g(t) dt$  所确定的隐函数, 且  $f', g$  连续,  $f' \neq 1$ . 若  $z = \varphi(u)$  连续可导, 求:  $g(y) \frac{\partial z}{\partial x} + g(x) \frac{\partial z}{\partial y}$ .

49. 设  $\begin{cases} u^2 - v + x = 0 \\ u + v^2 - y = 0 \end{cases}$ , 求:  $du$  和  $dv$ .

50. 设  $\begin{cases} x = e^r \cos \theta \\ y = e^r \sin \theta \end{cases}$ , 求: (1)  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}$  和  $\frac{\partial(r, \theta)}{\partial(x, y)}$ ; (2)  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \cdot \frac{\partial(r, \theta)}{\partial(x, y)}$ .

51. 设  $\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$  均有连续偏导数, 且  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0$ , 求:  $u, v$  作为  $x, y$  的

反函数时的偏导数  $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}$  和  $\frac{\partial v}{\partial y}$ ; 并验证  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \cdot \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = 1$ .

52. 设  $z = z(x, y)$  是由方程  $F(x + \frac{z}{y}, y + \frac{z}{x}) = 0$  所确定, 且  $f$  具有二阶

连续偏导. 证明:  $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z - xy$ .

53. 设  $z = z(x, y)$  是由方程  $z - x - y + xe^{z-x-y} = 0$  所确定的函数, 求:  $dz$ .

54. 设  $z = z(x, y)$  是由方程  $e^{x+y+z} - zx + y - 2 = 0$  所确定的函数, 求:  $dz|_{\substack{x=0 \\ y=1}}$ .

55. 证明: 方程  $\sin y + \arctan(x^2 + y^2) = x$  在点  $(0,0)$  的某邻域内能唯一确定一个可导函数  $y = y(x)$ , 且满足  $y(0) = 0$ ; 并求  $y'(0)$ .

## 习题 9.6

56. 判断下列函数是否有极值, 若有请判断是极大值还是极小值; 并求极值.

(1)  $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$ ;

(2)  $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + x - y + 2$ ;

(3)  $f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$ ;                      (4)  $f(x, y) = e^{2x}(x + 2y + y^2)$ ;

(5)  $f(x, y) = 3axy - x^3y^3$  ( $a > 0$ );              (6)  $f(x, y) = xy(6 - x - y)$ .

57. 求下列函数在指定区域内的最值.

(1)  $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ ,  $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$ ;

(2)  $z = x^2y(4 - x - y)$ ,  $D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq 6 - x, 0 \leq x \leq 6\}$ ;

(3)  $z = x^2 + 9y^2 + 6$ ,  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ ;

(4)  $z = x^2 + y^2 + 4$ ,  $D = \{(x, y) | (x - 1)^2 + 2y^2 \leq 18\}$ .

58. 求  $f(x, y) = 2x^2 + 12xy + y^2$  在区域  $D = \{(x, y) | x^2 + 4y^2 \leq 25\}$  上的最小值.

59. 设  $A$ 、 $B$ 、 $C$  为  $\triangle ABC$  的内角, 求:  $\sin A + \sin B + \sin C$  的最大值.

60. 已知三角形的周长为  $2s$ , 求其面积的最大值.

61. 某厂家生产的一种产品同时在两个市场销售, 售价分别为  $p_1$  和  $p_2$ ,

销售量分别为  $q_1$  和  $q_2$ , 需求函数分别为

$$q_1 = 24 - 0.2p_1 \text{ 和 } q_2 = 10 - 0.05p_2,$$

总成本函数为

$$C = 35 + 40(q_1 + q_2),$$

试问：厂家如何确定两个市场的售价，能使其获得的总利润最大？其最大利润是多少？

62. 设  $z = z(x, y)$  是由方程  $x^2 - 6xy + 10y^2 - 2yz - z^2 + 18 = 0$  所确定的函数.

求：函数  $z = z(x, y)$  的极值点和极值.

63. 在椭圆  $x^2 + 4y^2 = 4$  上求一点，使其到直线  $2x + 3y - 6 = 0$  的距离最短.

64. 求球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  上与定点  $M(3, 1, -1)$  相距最远和最近点的坐标.

65. 求原点到曲面  $S: z^2 = xy + x - y + 6$  上点的最短距离.

66. 在曲面  $z = x^2 + y^2$  上求一点  $M$ ，使得点  $M$  到平面  $x + y - 2z = 2$  的距离最小.

67. 求过点  $M(1, 2, 3)$  的平面，使其与三个坐标平面所围四面体的体积最小.

68. 求平面  $x + y + z = 0$  截立体  $x^2 + y^2 \leq 1$  所得的截面面积.

69. 求下列函数在指定点处的泰勒展开式.

(1)  $f(x, y) = xy^2$  在点  $P(2, 1)$  处 (二阶);

(2)  $f(x, y) = x^y$  在点  $P(1, 4)$  处 (二阶);

(3)  $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$  在点  $P(0,0)$  处 (二阶);

(4)  $f(x, y) = x^2 - 3xy + y^2 - 2x + 3y + 9$  在点  $P(1, -1)$  处.

70. 设  $f(x)$  具有二阶连续导数, 且  $f(x) > 0$ ,  $f(0) > 1$ ,  $f'(0) = 0$ ,  $f''(0) > 0$ .

试问: 函数  $z = f(x) \ln f(y)$  在  $(0,0)$  处有没有极值? 如果有极值,

试确定是极大值还是极小值, 为什么?

71. 记  $D = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ ,  $u(x, y, z)$  是  $D$  上的连续函数,

且满足

(i) 在  $D$  的内部有连续的二阶偏导数, 而且  $u_{xx}u_{yy} < 0$ ;

(ii) 在球面上  $u(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z^2 - xy$ .

试求  $u(x, y, z)$  在  $D$  上的最大值.

72. 设  $f(x, y)$  有二阶连续偏导数,  $g(x, y) = f(e^{xy}, x^2 + y^2)$ , 且

$$f(x, y) = -x - y + 1 + o\left(\sqrt{(x-1)^2 + y^2}\right).$$

证明:  $g(x, y)$  在点  $(0,0)$  处有极值, 判断此极值是极大值还是

极小值; 并求出此极值.

## 习题 9.7

73. 求下列向量函数的导数.

$$(1) \mathbf{r}(t) = (e^t \cos 2t, e^t \sin 2t, e^{-2t});$$

$$(2) \mathbf{r}(t) = \left( \ln \sqrt{1+t^2}, \arctan t, \frac{t}{1+t^2} \right);$$

$$(3) \mathbf{r}(t) = (t \cos t, t \sin t, t(\cos t - \sin t)); \quad (4) \mathbf{r}(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, 4t).$$

74. 设  $\mathbf{r}(t) = \left( \frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}, 1 \right)$ , 证明  $\mathbf{r}(t)$  与  $\mathbf{r}'(t)$  之间的夹角为定值.

75. 求函数  $u = \ln(x + \sqrt{y^2 + z^2})$  在点  $A(1,0,1)$  处沿点  $A$  指向点  $B(3, -2, 2)$  方向的方向导数.

76. 设  $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \mathbf{l} = \{-1, 2, -2\}$ , 求:  $\left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}} \right|_{(1,2,2)}$  和  $\left. \text{grad} f \right|_{(1,2,2)}$ .

77. 设  $\mathbf{n}$  是曲面  $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 6$  在点  $M(1,1,1)$  处的指向外侧的法向量(外法线),

求: (1) 函数  $u = \frac{\sqrt{6x^2 + 8y^2}}{z}$  在点  $M$  处沿方向  $\mathbf{n}$  的方向导数;

(2) 函数  $u = \frac{\sqrt{6x^2 + 8y^2}}{z}$  在点  $M$  处的最大方向导数.

78. 设  $z = f(x, y)$  有连续偏导数,  $\mathbf{l}_1 = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}, \mathbf{l}_2 = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$ ; 在点  $P(1,2)$  处有

$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}_1} = 11, \frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}_2} = -3$ . 求: 函数  $z = f(x, y)$  在点  $P(1,2)$  处的全微分.



79. 求下列函数在指定点处的梯度.

(1)  $f(x, y, z) = xy(x^2 + y^2 + z - 2)$ , 在点  $M(1, 2, -1)$  处;

(2)  $f(x, y, z) = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$ , 在点  $M(-3, 0, 1)$  处;

(3)  $f(x, y) = \cos x + \cos y - \sin(x + y)$ , 在点  $P(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$  处.

80. 设  $f(x, y, z) = axy^3 + byz + cz^2x^3$  在点  $M(1, 2, -1)$  处沿  $z$  轴正方向的方向导数为点  $M$  处所有方向导数的最大值, 求: 常数  $a, b, c$  的值.

81. 证明: 函数  $f(x, y) = \begin{cases} x + y + \frac{x^3 y}{x^4 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$  在点  $(0, 0)$  处沿

任何方向的方向导数均存在. 试问:  $f$  在点  $(0, 0)$  处是否连续? 为什么?

82. 设  $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ , 证明:  $f(x, y)$  在点  $(0, 0)$  处沿任何方向的方向导数均存在, 但  $f(x, y)$  在点  $(0, 0)$  处不可微.

## 习题 9.8

83. 求下列曲线在指定点处的切线方程.

$$\begin{array}{ll}
 (1) \begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 2 \sin t \quad (t = \frac{\pi}{3}); \\ z = 6t \end{cases} & (2) \begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \quad (t = \frac{\pi}{2}); \\ z = 4 \sin \frac{t}{2} \end{cases} \\
 (3) \begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \quad (t = \frac{\pi}{4}); \\ z = e^t \end{cases} & (4) \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 50 \\ x^2 + y^2 = z^2 \end{cases} \text{ 点 } (3, 4, 5).
 \end{array}$$

84. 在曲线  $C: \mathbf{r}(t) = \left(t, \frac{1}{2}t^2, \frac{1}{3}t^3\right)$  上求一点, 使该点处切线与平面

$x - 2y + z = 4$  平行, 并求该点处的切线方程.

85. 证明: 螺旋线  $\mathbf{r}(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$  上任意一点处的切线与  $z$  轴成定角.

86. 求曲面  $S: x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$  的切平面, 使其平行于平面  $x + 4y + 6z = 6$ .

87. 求曲面  $S: x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 20$  在点  $(3, 2, 1)$  处的法线方程.

88. 求曲面  $S: x^2 + 2y^2 - 3z^2 = 3$  在点  $(2, -1, 1)$  处的切平面方程.

89. 求曲面  $S: 2x^2 + 3y^2 + z^2 = 9$  上与直线  $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z}{2}$  垂直的切平面方程.

90. 证明曲面  $S: \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a} \ (a > 0)$  上任意一点处的切平面 在 三个坐标轴上的截距之和为定值.

91. 设  $F(x, y, z)$  具有连续偏导, 证明: 曲面  $F(\frac{z}{y}, \frac{x}{z}, \frac{y}{x}) = 0$  的切平面过定点.

92. 设  $P_0$  是曲面  $S: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  外一定点,  $P_1 \in S$ , 若  $|P_0 P_1| = \max_{P \in S} |P_0 P|$ .

证明: 直线  $P_0 P_1$  为曲面  $S$  在点  $P_1$  处的法线.

93. 在曲面  $S: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \ (a, b, c > 0)$  第一象限上求一点, 使该点处的切平面与三个坐标平面所围立体的体积最小, 并求此最小体积.

94. 证明: 光滑曲面  $S: F(x, y, z) = 0$  上到平面  $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$  距离最短点处的切平面与平面  $\pi$  平行.

95. 设  $z = f(x, y)$  在  $R^2$  上连续, 且满足

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (1, 2)} \frac{f(x, y) + x - 2y + 6}{(x-1)^2 + (y-2)^2} = 2.$$

(1) 求曲面  $z = f(x, y)$  在点  $(1, 2)$  处的切平面方程;

(2) 点  $(1, 2)$  是否为函数  $z = f(x, y)$  的极值点, 为什么?

## 第10章 重积分

在一元函数定积分的基础上，我们可以引入多元函数的重积分. 多元函数的重积分的思想方法与一元函数的定积分的思想方法是一致的，但多元函数的重积分在理论和计算方面都要比一元函数的定积分复杂.

### § 10.1 二重积分

#### 一、二重积分的定义

设  $D \subset \mathbb{R}^2$  是有界闭区域，函数  $z = f(x, y)$  在  $D$  上连续，且  $\forall (x, y) \in D$ ，有  $f(x, y) \geq 0$ ，于是有这样一个空间立体

$$V = \{(x, y, z) | (x, y) \in D, 0 \leq z \leq f(x, y)\}.$$

通常称形如这样的立体为**曲顶柱体**，如图 10.1，

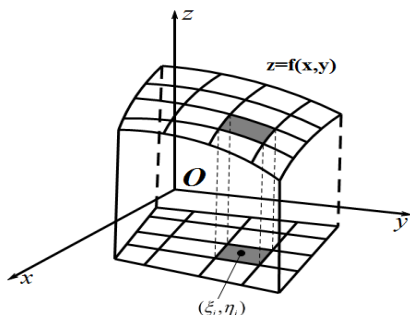


图 10.1

以上曲顶柱体  $V$ ，它的底面是  $xOy$  平面的有界闭区域  $D$ ，它的顶面是二元函数  $z = f(x, y)$ （这里假设  $f(x, y) \geq 0$  并且在  $D$  上是连续的），它的侧面是以  $D$  的边界曲线为准线而母线平行于  $z$  轴的柱面. 当曲顶柱体的顶面是一般的曲面时，其体积的计算非常困难. 下面运用一元函数的黎曼积分类似的思想来求(定义)此曲顶柱体的体积.

(1) **分割**：用一组“网格”线把  $D$  分成  $n$  个小闭区域，每一个小闭

区域记为  $\Delta\sigma_i$ , 其面积也记为  $\Delta\sigma_i (i=1,2,\cdots, n)$ . 记以  $\Delta\sigma_i$  为底构造的小曲顶柱体为  $\Delta V_i$ , 其体积也为  $\Delta V_i$  (如图10.1). 因此, 原来大的曲顶柱体就被分成了  $n$  个小的曲顶柱体.

(2) 近似: 当小闭区域  $\Delta\sigma_i$  的直径 (区域的直径指区域内任意两点间距离的上确界. 即区域  $D$  的直径  $d(D) = \sup_{P, Q \in D} \{ |PQ| \}$ ) 很小时, 由于  $f(x, y)$  是连续的, 因此在  $\Delta\sigma_i$  变化很小时, 小曲顶柱体的体积  $\Delta V_i$  可以用以  $\Delta\sigma_i$  为底, 以  $\Delta\sigma_i$  中任取的一点  $(\xi_i, \eta_i)$  (介点) 的函数值  $f(\xi_i, \eta_i)$  为高的平顶柱体的体积来近似, 即  $\Delta V_i \approx f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$ ;

(3) 作和: 于是整个曲顶柱体就可以由这  $n$  个小的平顶柱体之和来近似, 即  $V \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$ ;

(4) 求极限: 记  $n$  个小闭区域的直径的最大值为  $\lambda$ , 当  $\lambda \rightarrow 0$  时, 取上述和式的极限, 如果极限存在, 则所得极限值就可以很自然地定义为整个曲顶柱体的体积, 即

$$V = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i.$$

**定义10.1.1** 设  $f(x, y)$  是有界闭区域  $D$  上的有界函数, 如果存在  $I \in \mathbb{R}$ , 对于任意的  $\varepsilon > 0$ , 总存在  $\delta > 0$ , 使得对于任何满足  $\lambda \leq \delta$  的分割和任意选取的介点  $(\xi_i, \eta_i)$ , 都成立

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i - I \right| \leq \varepsilon,$$

则称  $f$  在  $D$  上可积, 称  $I$  为  $f$  在  $D$  上的二重积分, 记作

$$\iint_D f(x, y) d\sigma \text{ 或 } \iint_D f(x, y) dx dy,$$

其中  $f(x, y)$  叫做被积函数,  $d\sigma = dx dy$  叫做面积元素,  $x$  和  $y$  叫做积

分变量,  $D$  叫做积分区域,  $\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i$  叫做积分和(或黎曼和).

二重积分的几何意义: 一般的, 如果  $f(x, y) \geq 0$ , 那么二重积分的几何意义就是曲顶柱体的体积; 如果  $f(x, y) \leq 0$ , 此时曲顶柱体位于  $xOy$  平面的下方, 二重积分就等于负的曲顶柱体体积; 如果  $f(x, y)$  有正有负, 那么二重积分的值就等于  $xOy$  上方的那部分曲顶柱体体积与  $xOy$  下方的那部分曲顶柱体体积的代数和.

特别地, 当被积函数  $f(x, y) \equiv 1$  时, 如果常值函数  $f(x, y) \equiv 1$  在  $D$  上可积, 称  $D$  是可求面积的, 且此时二重积分  $\iint_D 1 \, dx dy$  的值就等于积分区域  $D$  的面积.

## 二、二重积分的可积条件\*

二重积分可积性理论, 要比一元函数的定积分更复杂. 二重积分是否存在, 不仅与被积函数的性质有关, 还与积分区域有关, 特别是积分区域的“边界曲线”的性质有关, 在这里不作详细介绍, 下面我们给出一个二重积分可积的充分条件.

**定理10.1.2** 设  $D = \{(x, y) \in R^2 \mid a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$ , 其中

$\varphi_1(x), \varphi_2(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 如果  $f$  在  $D$  上连续, 则  $f$  在  $D$  上可积.

## 三、二重积分的性质

二重积分的性质: 由于在定义上二重积分和一元定积分相似, 不难设想, 二重积分具有和一元定积分相类似的性质.

1. 若  $f$  和  $g$  在  $D$  上都可积,  $\alpha$  和  $\beta$  为实数, 则  $\alpha f + \beta g$  在  $D$  上也可积, 并且

$$\iint_D (\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)) dx dy = \alpha \iint_D f(x, y) dx dy + \beta \iint_D g(x, y) dx dy.$$

2. 若  $D = D_1 \cup D_2$ , 其中  $D_1, D_2$  是两个无公共内点的有界闭区域, 则在  $D$  上的二重积分等于  $D_1$  和  $D_2$  上的二重积分之和, 即

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy.$$

3. 设  $f$  和  $g$  在  $D$  上都可积, 如果在  $D$  成立  $f(x, y) \geq g(x, y)$ , 则

$$\iint_D f(x, y) dx dy \geq \iint_D g(x, y) dx dy.$$

特别地, 若  $f(x, y) \geq 0$ , 则  $\iint_D f(x, y) dx dy \geq 0$ . 读者很容易根据上述单调性得到下述不等式:

$$\left| \iint_D f(x, y) dx dy \right| \leq \iint_D |f(x, y)| dx dy.$$

实际上,  $f$  的可积性隐含着  $|f|$  的可积性.

4. **(中值定理)** 若  $D$  可求面积, 其面积记为  $\sigma$ ,  $f$  在  $D$  上连续, 则存在  $(\xi, \eta) \in D$ , 使得

$$\iint_D f(x, y) dx dy = f(\xi, \eta) \sigma.$$

读者可以采用完全类似于证明定积分相应性质的方法来证明上述二重积分的性质.

**例10.1.3** 试证明  $f(x, y) = xy$  在单位圆盘  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$  上的二重积分为0.

**证明:** 因为积分区域  $D$  是关于  $x$  轴对称的, 而被积函数关于  $y$  是奇函数, 即有

$$f(x, -y) = -f(x, y).$$

对积分区域作关于  $x$  轴对称的分割, 记  $x$  轴上方的区域为  $\Delta\sigma_i$ ,  $x$  轴下方的区域为  $\Delta\sigma'_i (i = 1, 2, \dots, n)$ ; 且  $\Delta\sigma_i$  与  $\Delta\sigma'_i$  关于  $x$  轴对称.

任取点  $P_i(\xi_i, \eta_i) \in \Delta\sigma_i$ , 在区域  $\Delta\sigma'_i$  上取对应点  $P'_i(\xi_i, -\eta_i)$ ; 由于函数  $f(x, y)$  在  $D$  上连续, 从而可积; 对上述分割与取点, 有

$$\begin{aligned}\iint_D f(x, y) dx dy &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [f(P_i) \cdot \Delta\sigma_i + f(P'_i) \cdot \Delta\sigma'_i] \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [f(\xi_i, \eta_i) + f(\xi_i, -\eta_i)] \cdot \Delta\sigma_i = 0.\end{aligned}$$

其中:  $\lambda$  为每个小区域  $\Delta\sigma_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) 直径的最大值.

**【注】** 关于对称性的讨论, 还有如下两种:

(1) 如果积分区域  $D$  是关于原点对称的, 而被积函数满足

$$f(x, y) = -f(-x, -y),$$

此时  $\iint_D f(x, y) dx dy = 0$ .

(2) 如果积分区域  $D$  是关于直线  $y = x$  对称的, 而被积函数满足

$$f(x, y) = -f(y, x).$$

此时  $\iint_D f(x, y) dx dy = 0$ .

**例10.1.4** 设  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续且  $f(x) > 0$ ,  $a, b$  为常数,

$D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ , 试求:

$$\iint_D \frac{af(x) + bf(y)}{f(x) + f(y)} dx dy.$$

**解:** 首先有

$$\iint_D \frac{af(x) + bf(y)}{f(x) + f(y)} dx dy = \iint_D \frac{af(y) + bf(x)}{f(x) + f(y)} dx dy$$

这是因为积分区域  $D$  关于  $y = x$  对称, 而且上面两个二重积分的被积函数

关于  $y = x$  也是对称的, 所以两个积分相等. 记



$$\iint_D \frac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)} dxdy = I ,$$

则

$$2I = \iint_D \frac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)} dxdy + \iint_D \frac{af(y)+bf(x)}{f(x)+f(y)} dxdy = a+b ,$$

所以

$$I = \frac{a+b}{2} .$$

**例10.1.5** 证明：若  $f$  在有界闭区域  $D$  上连续， $g$  在  $D$  上可积且不变号，

则存在一点  $(\xi, \eta) \in D$ ，使得

$$\iint_D f(x, y)g(x, y)dxdy = f(\xi, \eta)\iint_D g(x, y)dxdy .$$

**证：**因为  $g$  在  $D$  上不变号，不妨假设  $g > 0$  在  $D$  恒成立，又因为  $f$  在  $D$  上连续的，因此有最大值  $M$  和最小值  $m$ ，所以由性质知，

$$\iint_D mg(x, y)dxdy \leq \iint_D f(x, y)g(x, y)dxdy \leq \iint_D Mg(x, y)dxdy ,$$

即有

$$m \leq \frac{\iint_D f(x, y)g(x, y)dxdy}{\iint_D g(x, y)dxdy} \leq M ,$$

这就是说，上式中二个二重积分的商是介于函数  $f$  的最小值和最大值之间的一个确定的数。根据闭区域上连续函数的介值定理，在  $D$  上至少存在一点  $(\xi, \eta)$ ，使得

$$\frac{\iint_D f(x, y)g(x, y)dxdy}{\iint_D g(x, y)dxdy} = f(\xi, \eta)$$

成立，这就是所要证明的公式。

**例10.1.6** 证明:  $f(x,y)=\begin{cases} 1, & x,y\text{都是有理数} \\ 0, & x\text{或}y\text{是无理数} \end{cases}$  在任何矩形区域上不可积.

**证:** 对于该矩形区域上的任一分割, 在属于它的每个小区域  $\sigma_i$  上, 由有理点和无理点所具有的稠密性可知, 介点的各坐标分量既可以取到有理数, 也可以取到无理数. 若对所有介点  $(\xi_i, \eta_i)$ , 取  $\xi_i, \eta_i$  皆为有理数,

$i=1,2,\cdots,n$ , 此时, 二重积分黎曼和的值为矩形区域的面积; 若取所有

介点的  $\xi_i, \eta_i$  至少有一个为无理数,  $i=1,2,\cdots,n$ , 此时二重积分黎曼和的

值为零, 对此两种介点的取法, 二重积分黎曼和的值皆为常数且不相等,

从而黎曼和的极限也不相等, 因此  $f(x,y)$  在任何矩形区域上不可积.

## § 10.2 二重积分的计算：累次积分

### 一、 $x$ -型区域和 $y$ -型区域

平面点集

$$D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\},$$

称为 $x$ -型区域.

平面点集

$$D = \{(x, y) | c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\},$$

称为 $y$ -型区域.

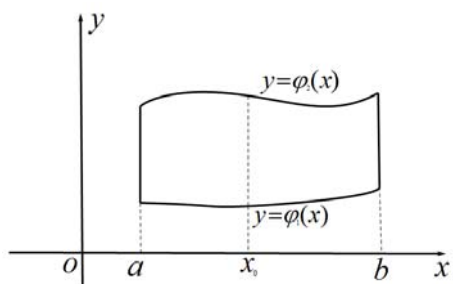


图 10.2

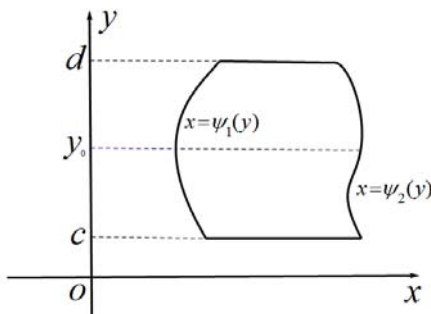


图 10.3

这两种区域的特点是：

当 $D$ 为 $x$ -型区域时(如图10.2)，则垂直于 $x$ 轴的直线 $x = x_0$  ( $a < x_0 < b$ ) 至多与区域 $D$ 的边界交于两点.

当 $D$ 为 $y$ -型区域时(如图10.3)，则垂直于 $y$ 轴的直线 $y = y_0$  ( $c < y_0 < d$ ) 至多与区域 $D$ 的边界交于两点.

有些区域相对复杂，既不是 $x$ -型区域也不是 $y$ -型区域，但可以分割为若干个无公共内点的 $x$ -型区域或 $y$ -型区域.

## 二、直角坐标系的累次积分

设  $f$  为定义在  $x$ -型区域  $D$  上的函数, 若对  $[a, b]$  上每一个固定的  $x$ ,  $f(x, y)$  作为以  $y$  为自变量的函数在区间  $[\varphi_1(x), \varphi_2(x)]$  上可积, 则得到如下用含参量  $x$  积分所表示的函数

$$A(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy, x \in [a, b].$$

如图10.4所示, 这个积分所表示的几何意义正好是图中截面的面积 (这里假定  $f(x, y) \geq 0$ ), 那么, 二重积分所表示的曲顶柱体体积的微元为

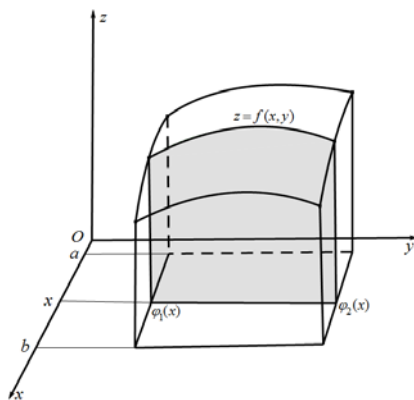


图10.4

$$dV = A(x)dx = \left[ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx,$$

所以整个曲顶柱体的体积就是

$$V = \int_a^b A(x) dx = \int_a^b \left[ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx.$$

因此

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx.$$

上式右端的积分叫做先对  $y$  积分, 后对  $x$  积分的**累次积分**. 也就是说, 先把  $x$  看作常数, 把  $f(x, y)$  看作只含有一个自变量  $y$  的函数, 并对  $y$  计算从  $\varphi_1(x)$  到  $\varphi_2(x)$  的定积分 (注意, 把  $x$  看成常数, 不仅是把  $f(x, y)$  里面的

$x$  看成常数, 还包括  $\varphi_1(x)$  和  $\varphi_2(x)$  里面的  $x$  也看成常数); 接着把算得的结果(通常是含有  $x$  的函数) 作为被积函数再对  $x$  计算在区间  $[a, b]$  上的定积分. 这个先对  $y$  积分, 再对  $x$  积分的累次积分也通常记为

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy.$$

类似地, 对于  $y$ -型积分区域  $D$ , 二重积分可以化为如下累次积分:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx.$$

如果积分区域  $D$  即是  $x$ -型区域, 又是  $y$ -型区域, 则有

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx.$$

在将二重积分化为累次积分进行计算时, 确定累次积分的积分限是一个关键. 积分限是由积分区域  $D$  来确定的, 因此, 应先画出积分区域  $D$  的边界曲线, 接着判断积分区域是  $x$ -型还是  $y$ -型, 然后选择对应的累次积分公式进行计算, 如果积分区域既是  $x$ -型又是  $y$ -型, 那么可任意选择一种进行计算, 但计算定积分的复杂程度可能会有所不同; 如果积分区域既非  $x$ -型也非  $y$ -型, 那么可先把区域分割成若干个  $x$ -型或  $y$ -型区域再进行计算.

**例10.2.1** 设  $D$  是  $\mathbb{R}^2$  上由  $y = \frac{1}{2}x, y = \sqrt{x}, x = 2$  所围成, 求

$$\iint_D xy dx dy.$$

**解:** 根据图10.5所示, 易知  $D = \left\{ (x, y) \left| 2 \leq x \leq 4, \frac{1}{2}x \leq y \leq \sqrt{x} \right. \right\}$ , 所以

$$\iint_D xy dx dy = \int_2^4 dx \int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} xy dy = \int_2^4 x dx \int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} y dy$$

$$= \int_2^4 x \left( \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \right) dx = \frac{11}{6}.$$

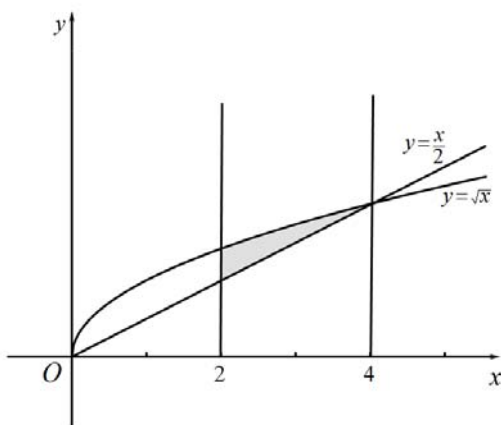


图10.5

**例10.2.2** 设  $D$  是  $\mathbb{R}^2$  上由  $y = -x + 1$ ,  $y = x + 1$  与  $y = 3$  所围成的三角形, 求

$$\iint_D (2x - y^2) dx dy.$$

**解:** 根据图10.6, 易知  $D = \{(x, y) | 1 \leq y \leq 3, 1 - y \leq x \leq y - 1\}$ , 所以

$$\begin{aligned} \iint_D (2x - y^2) dx dy &= \int_1^3 dy \int_{1-y}^{y-1} (2x - y^2) dx = \int_1^3 (x^2 - y^2 x) \Big|_{x=1-y}^{x=y-1} dy \\ &= \int_1^3 (2y^2 - 2y^3) dy = -\frac{68}{3}. \end{aligned}$$

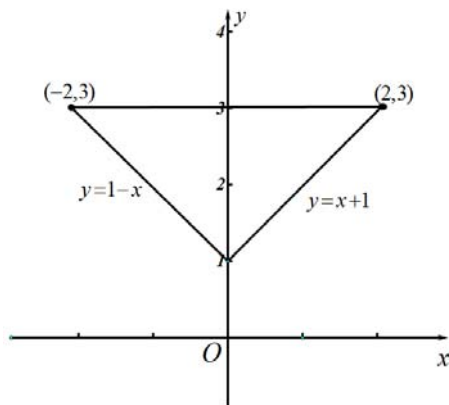


图10.6

**例10.2.3** 设  $D$  是在  $\mathbb{R}^2$  上由  $y = x^2, x = 2$  及  $x$  轴所围成的有界闭区域, 求

$$\iint_D (x^2 + y^2) dx dy.$$

**解:** 可以用两种方式来表示集合  $D$ ,

$$D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x^2\} = \{(x, y) | 0 \leq y \leq 4, \sqrt{y} \leq x \leq 2\}.$$

**方法一:** 把积分区域  $D$  看成  $x^-$  型积分区域, 则

$$\begin{aligned} \iint_D (x^2 + y^2) dx dy &= \int_0^2 dx \int_0^{x^2} (x^2 + y^2) dy = \int_0^2 \left( x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \bigg|_{y=0}^{y=x^2} dx \\ &= \int_0^2 \left( x^4 + \frac{x^6}{3} \right) dx = \frac{1312}{105}. \end{aligned}$$

**方法二:** 把积分区域  $D$  看成  $y^-$  型积分区域, 则

$$\begin{aligned} \iint_D (x^2 + y^2) dx dy &= \int_0^4 dx \int_{\sqrt{y}}^2 (x^2 + y^2) dy = \int_0^4 \left( \frac{x^3}{3} + y^2 x \right) \bigg|_{x=\sqrt{y}}^{x=2} dx \\ &= \int_0^4 \left( \frac{8}{3} - \frac{1}{3} y^{\frac{3}{2}} + 2y^2 - y^{\frac{5}{2}} \right) dy = \frac{1312}{105}. \end{aligned}$$

**例10.2.4** 计算  $\int_0^2 dy \int_{\frac{y}{2}}^1 e^{x^2} dx$ .

**解:** 因为  $e^{x^2}$  原函数不是初等函数, 所以我们无法先对  $x$  求积来计算这个累次积分, 因此有必要确定其积分区域, 把它还原成二重积分, 再转化为另一顺序的累次积分进行求解. 根据题意知积分区域可以写成

$D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2x\}$ , 因此

$$\begin{aligned} \int_0^2 dy \int_{\frac{y}{2}}^1 e^{x^2} dx &= \iint_D e^{x^2} dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{2x} e^{x^2} dy \\ &= \int_0^1 e^{x^2} y \bigg|_{y=0}^{y=2x} dx = \int_0^1 2x e^{x^2} dx \end{aligned}$$

$$= e^{x^2} \Big|_0^1 = e - 1.$$

**例10.2.5** 改变累次积分  $\int_0^3 dy \int_{\frac{4y}{3}}^{\sqrt{25-y^2}} f(x,y) dx$  的积分次序.

**解:** 积分区域  $D = \left\{ (x,y) \mid 0 \leq y \leq 3, \sqrt{25-y^2} \leq x \leq \frac{4y}{3} \right\}$ . 这个区域的边界不能只用一个  $y$  是  $x$  的函数形式表示, 但是将这个区域分成两部分如图

10.7, 则有

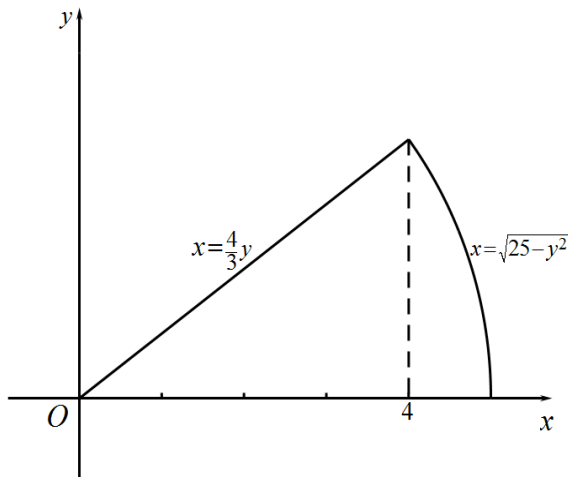


图 10.7

$$D = \left\{ (x,y) \mid 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq \frac{3x}{4} \right\} \cup \left\{ (x,y) \mid 4 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq \sqrt{25-x^2} \right\}.$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } \int_0^3 dy \int_{\frac{4y}{3}}^{\sqrt{25-y^2}} f(x,y) dx &= \iint_D f(x,y) dx dy \\ &= \int_0^4 dx \int_0^{\frac{3x}{4}} f(x,y) dy + \int_4^5 dx \int_0^{\sqrt{25-x^2}} f(x,y) dy. \end{aligned}$$

**例10.2.6** 计算二重积分  $\iint_D y^2 dx dy$ , 其中  $D$  是由  $x$  轴和外摆线

$x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t) (0 \leq t \leq 2\pi)$  所围成的区域, 如图10.8所示.

**分析:** 此积分区域的上边界曲线是通过参数方程表示的, 要想消去参数



转化成直角坐标的显式函数表示并非易事，请注意以下相当于“换元法”的计算方法。

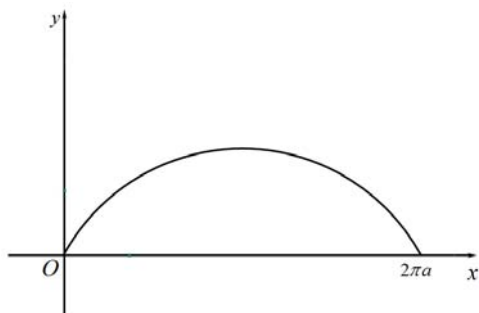


图10.8

解：积分区域  $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2\pi a, 0 \leq y \leq y(x)\}$ . 则有

$$\begin{aligned}
 \iint_D y^2 dx dy &= \int_0^{2\pi a} dx \int_0^{y(x)} y^2 dy = \int_0^{2\pi a} \frac{y^3}{3} \Big|_{y=0}^{y=y(x)} dx = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi a} y^3(x) dx \\
 &= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} a^3 (1 - \cos t)^3 d[a(t - \sin t)] dt \\
 &\quad (\text{令 } x = a(t - \sin t), \text{ 则 } y = a(1 - \cos t)) \\
 &= \frac{a^4}{3} \int_0^{2\pi} 16 \sin^8 \frac{t}{2} dt = \frac{16a^4}{3} \int_0^{\pi} \sin^8 u d2u \quad (\text{令 } u = \frac{t}{2}) \\
 &= \frac{32a^4}{3} \cdot 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^8 u du = \frac{64a^4}{3} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{35}{12} \pi a^4.
 \end{aligned}$$

## § 10.3 二重积分的计算：变量替换

类似于定积分，二重积分也有相应的换元法，通过积分变量替换简化被积区域或被积函数，从而将二重积分较方便地计算出来.

设变换

$$T: \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$$

把  $uv$  坐标空间上某个可求面积的有界闭区域  $D'$  内的点一一映射到  $xy$  坐标空间上某个可求面积的有界闭区域  $D$  内的点. 若变换  $T$  具有连续的偏导数，且对  $\forall (u, v) \in D'$ ，变换的雅可比 (Jacobi) 矩阵的行列式 (简称雅可比行列式)

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$$

在  $D'$  上恒不为零，则我们有以下的二重积分变量替换.

在介绍变量替换定理之前，先从微元法的观点来看会显得较为直观一点. 在  $uv$  坐标系下任意一点  $(u, v) \in D'$  处给一增量  $(du, dv)$ ，则以点

$M_1(u, v), M_2(u + du, v), M_3(u + du, v + dv), M_4(u, v + dv)$  为顶点的小矩形面

积为  $dudv$ ，而这个小矩形在变换  $T$  下近似地被映成了  $xy$  坐标系下的一个小的“平行四边形”，其四个顶点分别是 (如图10.9所示：

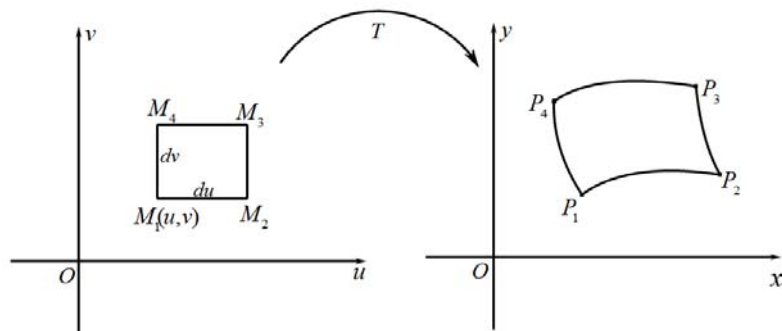


图10.9

$$P_1 = (x(u, v), y(u, v));$$

$$P_2 = (x(u + du, v), y(u + du, v));$$

$$P_3 = (x(u + du, v + dv), y(u + du, v + dv));$$

$$P_4 = (x(u, v + dv), y(u, v + dv)).$$

由于变换  $T$  存在连续的偏导数, 因此利用中值定理可以得

$$|\overline{P_1 P_2}| \approx \left| \frac{\partial x}{\partial u} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u} \mathbf{j} \right| du,$$

$$|\overline{P_1 P_4}| \approx \left| \frac{\partial x}{\partial v} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v} \mathbf{j} \right| dv.$$

所以该近似的平行四边形面积约为

$$|\overline{P_1 P_2} \times \overline{P_1 P_4}| \approx \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv.$$

可以看出, 雅可比行列式  $\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|$  相当于变换前后面积元的放大率. 回顾定积分的换元法, 对变量替换  $x = \varphi(t), t \in [\alpha, \beta]$ , 其中  $[a, b] = \varphi([\alpha, \beta])$ ,  $\varphi$

连续可导且  $\varphi'(t) \neq 0$ , 则

$$\int_b^a f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) |\varphi'(t)| dt.$$

其中  $|\varphi'(t)|$  即为变换前后微元区间长度的放大率. 也就是说  $\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|$  起着

和定积分换元法中  $|\varphi'(t)|$  相同的作用.

下面给出二重积分关于一般变量替换的定理, 由于证明过程十分复杂, 这里从略.

**定理10.3.1** 设  $D' \subset \mathbb{R}^2$  是有界闭区域, 该区域的边界  $\partial D'$  由有限条分段光

滑曲线所组成, 变换  $T(u, v): \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$  是  $D'$  到有界闭区域  $D$  上连续可

导的一一映射, 且满足  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0$ , 如果  $f$  在有界闭区域  $D$  上可积, 则

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv.$$

## 一、极坐标换元法

在二重积分的变量替换中, 极坐标变换

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta (0 \leq r \leq +\infty, 0 \leq \theta \leq 2\pi),$$

是非常重要的变换之一. 当积分区域是圆域或圆域的一部分等, 或者当被积函数的表达式中含有  $x^2 + y^2$  时, 采用极坐标变换来计算二重积分往往简便很多. 设  $f$  在有界可求面积的区域  $D$  上连续. 在直角坐标系中, 一般以平行于两个坐标轴的两族直线来分割区域  $D$ , 而在极坐标系中,  $r = \text{常数}$  为一族同心圆,  $\theta = \text{常数}$  为一族过极点的射线, 因此面积元如图10.10所示. 极坐标变换的雅可比行列式为

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = r.$$

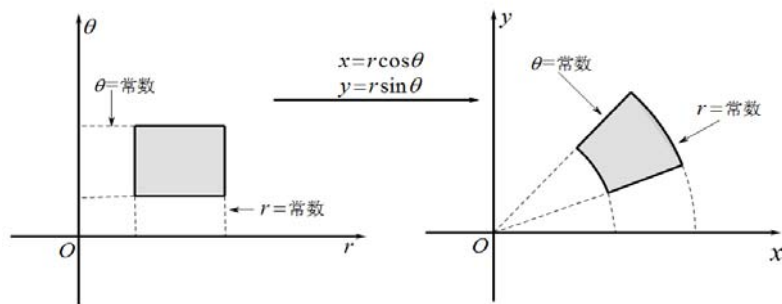


图10.10

由于  $r$  非负, 由定理10.3.1得

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_{D'} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta,$$

这里  $D'$  是区域  $D$  按照极坐标变换后的表达形式, 上述公式称为**二重积分的极坐标换元公式**. 值得注意的是: 极坐标变换在正实轴和原点处不是一一映射, 但是可以证明, 如果一个映射在挖去有限条光滑曲线后区域之间的映射满足前面变量替换定理10.3.1中映射的要求, 仍可以在原来的闭区域(挖去前) 上直接应用定理10.3.1.

**例10.3.2** 计算  $\iint_D e^{-x^2-y^2} dx dy$ , 其中  $D$  是以原点为圆心,  $a$  为半径的圆周

所围成的闭区域. 并利用此结果计算广义积分  $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ .

**解:** 积分区域  $D$  按极坐标变换后可表示为

$$D' = \{(r, \theta) | 0 \leq r \leq a, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

利用极坐标换元公式有

$$\begin{aligned} \iint_D e^{-x^2-y^2} dx dy &= \iint_{D'} e^{-r^2} r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a e^{-r^2} r dr \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (1 - e^{-a^2}) d\theta = \pi(1 - e^{-a^2}). \end{aligned}$$

后面的广义积分, 由于被积函数  $e^{-x^2}$  的原函数不是初等函数, 因此直接计算有困难, 考虑到在正方形区域  $S = [0, a] \times [0, a]$  上  $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$  可积, 并且

$$\iint_S e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_0^a e^{-x^2} dx \int_0^a e^{-y^2} dy = \left( \int_0^a e^{-x^2} dx \right)^2,$$

于是构造区域

$$D_1 = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq a^2, x \geq 0, y \geq 0\},$$

$$D_2 = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 2a^2, x \geq 0, y \geq 0\},$$

如图10.11所示, 由于  $e^{-x^2-y^2} > 0$ , 所以有下面不等式

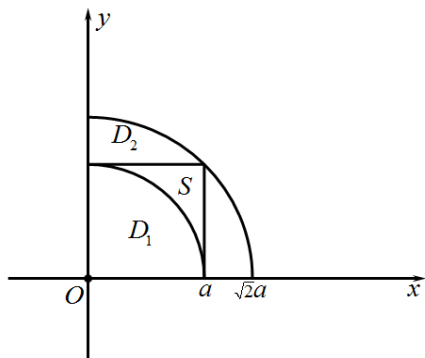


图10.11

$$\iint_{D_1} e^{-x^2-y^2} dx dy < \iint_S e^{-x^2-y^2} dx dy < \iint_{D_2} e^{-x^2-y^2} dx dy ,$$

利用前面的结论得

$$\frac{\pi}{4}(1-e^{-a^2}) < \left(\int_0^a e^{-x^2} dx\right)^2 < \frac{\pi}{4}(1-e^{-2a^2}) ,$$

令  $a \rightarrow +\infty$ ，则上式左右两端都趋向同一极限  $\frac{\pi}{4}$ ，从而

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} .$$

**例10.3.3** 求球面  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  被柱面  $x^2 + y^2 = Rx$  所割下的立体（称为维维安尼（Viviani）体）的体积.

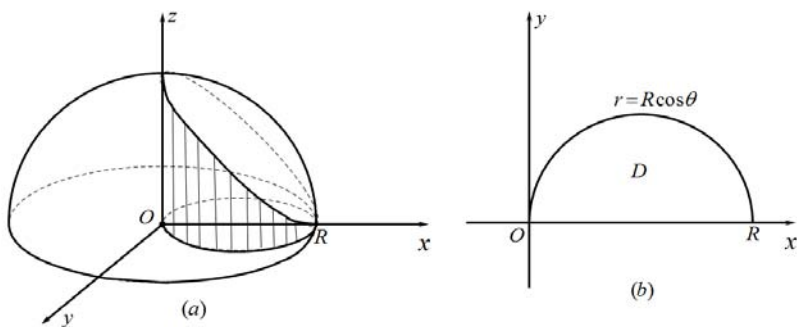


图10.12

**解：**根据所求立体（如图10.12）的对称性，只要求出第一卦限的体积乘以4即得所求立体体积. 在第一卦限的立体是个曲顶柱体，其底为圆心在  $x$  轴上且过原点的半圆  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq Rx, y \geq 0\}$  所确定的区域，顶面

是球面方程  $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ ，所以

$$\begin{aligned} V &= 4 \iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{R \cos \theta} \sqrt{R^2 - r^2} r dr \\ &= \frac{4}{3} R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3 \theta) d\theta \\ &= \frac{4}{3} R^3 \left( \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right). \end{aligned}$$

**例10.3.4** 计算二重积分  $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$ ，其中  $D$  是由双纽线

$(x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2) (x \geq 0)$  所围成的部分，这里  $a > 0$  为常数.

**解：** 利用极坐标变换

$$T: \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

可以把曲线方程  $(x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2)$  化为

$$r^4 = a^2 r^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = a^2 r^2 \cos 2\theta.$$

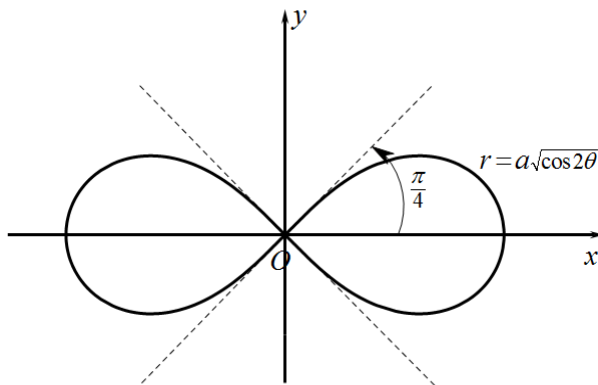


图10.13

注意到当  $x \geq 0$  时有

$$r = a \sqrt{\cos 2\theta}, \quad -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4},$$

于是利用极坐标换元公式可得

$$\begin{aligned}\iint_D (x^2 + y^2) dx dy &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}} r^2 \cdot r dr \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{4} a^4 \cos^2 2\theta d\theta \\ &= \frac{\pi}{8} a^4.\end{aligned}$$

**例10.3.5** 利用极坐标变换下面的二重积分，

$$\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy,$$

并写出关于  $r, \theta$  的两种不同次序的累次积分.

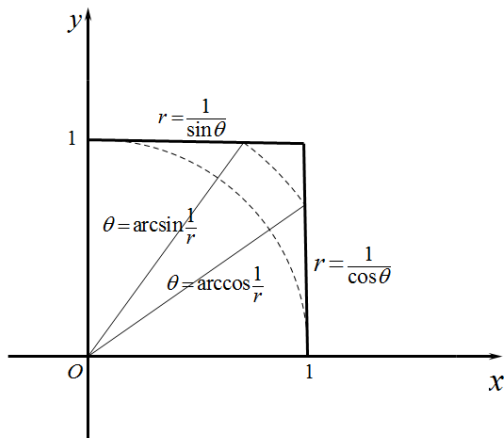


图10.14

**解：**如图，若先对  $r$  积分，则当  $\theta$  从0变到  $\frac{\pi}{4}$  时，对于每一个固定的  $\theta$ ， $r$  从0变到  $\frac{1}{\cos \theta}$ ；当  $\theta$  从  $\frac{\pi}{4}$  变到  $\frac{\pi}{2}$  时，对于每一个固定的  $\theta$ ， $r$  从0变到  $\frac{1}{\sin \theta}$ 。

若先对  $\theta$  积分，则当  $r$  从0 变到1时，对于每一个固定的  $r$ ， $\theta$  从0变到  $\frac{\pi}{2}$ ；当  $r$  从1变到  $\sqrt{2}$  时，对于每一个固定的  $r$ ， $\theta$  从  $\arccos \frac{1}{r}$  变到  $\arcsin \frac{1}{r}$ 。



$$\begin{aligned}
& \int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos \theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\sin \theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr \\
&= \int_0^1 r dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta + \int_1^{\sqrt{2}} r dr \int_{\arccos \frac{1}{r}}^{\arcsin \frac{1}{r}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta.
\end{aligned}$$

**例10.3.6** 求椭球体  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 (a, b, c > 0)$  的体积.

**解:** 取  $D = \left\{ (x, y) \left| \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right. \right\}$ , 则由二重积分的几何意义知, 所求立体为

$$V = 2 \iint_D c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy.$$

作广义极坐标变换  $\begin{cases} x = ar \cos \theta \\ y = br \sin \theta \end{cases}$

则变换的雅可比行列式  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = abr$ , 且新变量的范围为

$D' = \{(r, \theta) | 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ , 从而

$$\begin{aligned}
V &= 2 \iint_D c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy \\
&= 2 \iint_{D'} c \sqrt{1 - r^2} ab r dr d\theta \\
&= 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 c \sqrt{1 - r^2} ab r dr \\
&= 4\pi abc \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} (1 - r^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{4}{3} \pi abc.
\end{aligned}$$

**例10.3.7** 证明: 抛物面  $z = x^2 + y^2 + 1$  上任一点处的切平面与另一椭圆抛物面  $z = x^2 + y^2$  所围的立体体积是一定值.

**证:** 设  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  为椭圆抛物面  $z = x^2 + y^2 + 1$  上任意一点, 则点  $P_0$  处的切平面为

$$z - z_0 = 2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0),$$

$$\text{即 } z = 2x_0x + 2y_0y - x_0^2 - y_0^2 + 1$$

与另一椭圆抛物面方程  $z = x^2 + y^2$  联立得两曲面交线的方程为:

$$\begin{cases} z = 2x_0x + 2y_0y - x_0^2 - y_0^2 + 1 \\ z = x^2 + y^2 \end{cases}$$

消去  $z$  得该交线在  $xOy$  平面的投影曲线方程为圆  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 1$ ,

所以积分区域为

$$D = \{(x, y) | (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq 1\}.$$

于是, 所求立体的体积为

$$\begin{aligned} V &= \iint_D [2x_0x + 2y_0y - x_0^2 - y_0^2 + 1 - (x^2 + y^2)] dx dy \\ &= \iint_D [1 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2] dx dy \end{aligned}$$

作广义极坐标变换

$$\begin{cases} x = x_0 + r \cos \theta \\ y = y_0 + r \sin \theta \end{cases}$$

由于其雅可比行列式为  $r$ , 且新变量范围为  $\{(r, \theta) | 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ ,

所以

$$V = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (1 - r^2) r dr = \frac{\pi}{2},$$

因此得证.

## 二、一般换元法举例

**例10.3.8** 设  $D = \left\{ (x, y) \mid 1 \leq xy \leq 2, 1 \leq \frac{y}{x} \leq 4, x > 0, y > 0 \right\}$ ,  $f(x, y)$  是  $D$  上连

续函数, 证明:

$$\iint_D f(xy) dx dy = \ln 2 \cdot \int_1^2 f(t) dt.$$

**解：**作变换  $u = xy, v = \frac{y}{x}$ ，则有  $1 \leq u \leq 2, 1 \leq v \leq 4$ ，且雅可比行列式为

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix}} = \frac{x}{2y} = \frac{1}{2v},$$

于是

$$\begin{aligned} \iint_D f(xy) dx dy &= \int_1^2 du \int_1^4 f(u) \frac{1}{2v} dv \\ &= \int_1^2 f(u) du \cdot \frac{\ln 4 - \ln 1}{2} = \ln 2 \int_1^2 f(t) dt. \end{aligned}$$

**例10.3.9** 计算二重积分  $\iint_D e^{\frac{y-x}{y+x}} dx dy$ ，其中  $D$  由  $x$ -轴、 $y$ -轴和直线

$x + y = 2$  所围成的闭区域.

**解：**作变换  $u = y - x, v = y + x$ ，则有

$$x = \frac{v-u}{2}, y = \frac{v+u}{2},$$

由于是线性变换，因此该变换把  $xy$ -坐标系中的直线变成  $uv$ -坐标系中的直线.

$$\begin{aligned} x=0 &\rightarrow v=u \\ y=0 &\rightarrow v=-u \\ x+y=2 &\rightarrow v=2 \end{aligned}$$

另外计算雅可比行列式为

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}.$$

于是

$$\begin{aligned} \iint_D e^{\frac{y-x}{y+x}} dx dy &= \int_0^2 dv \int_{-v}^v e^{\frac{u}{v}} \left| -\frac{1}{2} \right| du \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 (e - e^{-1}) v dv = e - e^{-1}. \end{aligned}$$

## § 10.4 三重积分

三重积分是定义在三维有界闭区域上的三元函数（三维数量场）的积分. 与二重积分一样，我们给出三重积分的定义，讨论其意义、性质等，并给出三重积分的计算方法.

**定义10.4.1** 设  $f(x, y, z)$  是有界闭区域  $V$  上的有界函数，将  $V$  分成任意  $n$  个小闭区域  $\Delta V_1, \dots, \Delta V_n$ ，记  $\lambda$  为各小闭区域直径中的最大值. 如果存在  $I \in \mathbb{R}$ ，对于任意的  $\varepsilon > 0$ ，总存在  $\delta > 0$ ，使得对于任何满足  $\lambda \leq \delta$  的分割和任意选取的介点集  $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ ，都成立

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i - I \right| < \varepsilon$$

则称  $f$  在  $V$  上可积，称  $I$  为  $f$  在  $V$  上的三重积分，记作

$$\iiint_V f(x, y, z) dV \text{ 或 } \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz,$$

其中  $f(x, y, z)$  为被积函数， $dV = dx dy dz$  为体积元， $x, y$  和  $z$  为积分变量，

$V$  为积分区域， $\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i$  称为积分和.

三重积分的意义：一般的，如果  $f(x, y, z) \geq 0$ ，可以把这个函数看作是  $V$  上的密度函数，那么这个三重积分就表示  $V$  的质量. 特别地，当被积函数  $f(x, y, z) \equiv 1$  可积时，三重积分的值就等于积分区域的体积.

类似于二重积分，如果用平行于坐标平面的平面来分割三维积分区域，则除了边界部分一些不规则小闭区域外，内部均为长方体，因此三重积分的体积元为  $dV = dx dy dz$ ，从而三重积分就记为

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz.$$

三重积分有与二重积分类似的性质，读者可以自行一一给出.

## § 10.5 三重积分的计算：累次积分

二重积分计算中的累次积分思想是把二重积分转化为两个比二重积分更低维的一重积分（定积分），与二重积分类似，三重积分也可以转化为更低维的二重积分和一重积分来计算.

### 一、投影法

记  $D_{xy}$  为区域  $V$  在  $xOy$  坐标平面上的投影:

$$V = \{(x, y, z) | (x, y) \in D_{xy}, z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\},$$

其中  $z_1(x, y), z_2(x, y)$  是投影  $D_{xy}$  上的二元函数, 即下底和上顶. 如果对每一个固定的点  $(x, y) \in D_{xy}$ ,  $f(x, y, z)$  是一个关于变量  $z$  在区间  $[z_1(x, y), z_2(x, y)]$  上的可积函数, 则可以定义如下参量积分

$$g(x, y) = \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz, (x, y) \in D_{x, y}.$$

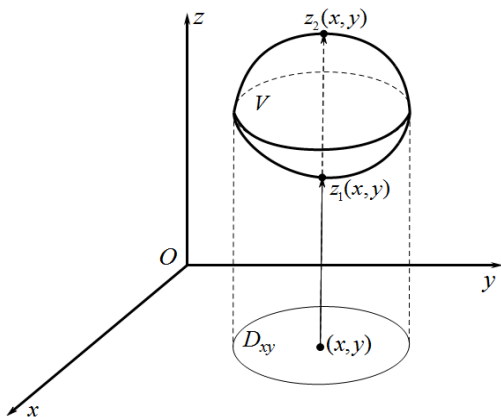


图10.15

如果进一步,  $g(x, y)$  在  $D_{xy}$  上可积, 则可以再考虑二重积分

$$\iint_{D_{xy}} g(x, y) dx dy,$$

将  $g(x, y)$  的表达式代入上式, 则三重积分转化为累次积分:

**定理10.5.1** 设  $V \subset \mathbb{R}^3$  是有界闭集,  $f: V \rightarrow \mathbb{R}$  为连续函数, 如果  $V$  可以

表示为  $V = \{(x, y, z) | (x, y) \in D_{xy}, z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\}$ , 其中

$z_1(x, y), z_2(x, y)$  是投影  $D_{xy}$  上的连续函数, 则

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{D_{xy}} \left( \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy \triangleq \iint_{D_{xy}} dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

上述定理是先对  $z$  进行积分, 对  $z$  积分时把  $x, y$  看成常数, 对  $z$  积分以后的表达式 (一般含有  $x, y$ ) 作为前面二重积分的被积函数, 此时, 再计算二重积分即可.

当然, 使用投影法时也可以投影到其他坐标平面, 有时三维体  $V$  在  $xOy$  平面的投影比较难以刻画, 而在其他坐标平面投影可能比较容易, 例如在  $xOz$  上投影较简单, 此时采取先对  $y$  积分, 再计算在  $xOz$  平面上的投影区域  $D_{xz}$  上的二重积分的方法为好. 等等.

**例10.5.2** 设  $V$  是在第一卦限由圆柱  $y^2 + z^2 = 1$  与平面  $y = x, x = 0, z = 0$  所围成的楔形 (如图10.16), 试计算  $\iiint_V z dx dy dz$ .

**解:** 采用投影法, 考虑到  $V$  在  $xOy$  上的投影  $D_{xy}$  比较简单, 同时

$z_1(x, y), z_2(x, y)$  容易表达, 因此积分顺序可以选择对  $z$  积分, 再对  $x, y$  积分, 这样:

$$V = \{(x, y, z) | (x, y) \in D_{xy}, 0 \leq z \leq \sqrt{1 - y^2}\},$$

$$D_{xy} = \{(x, y) | 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y\}$$

因此, 三重积分可化为如下累次积分:

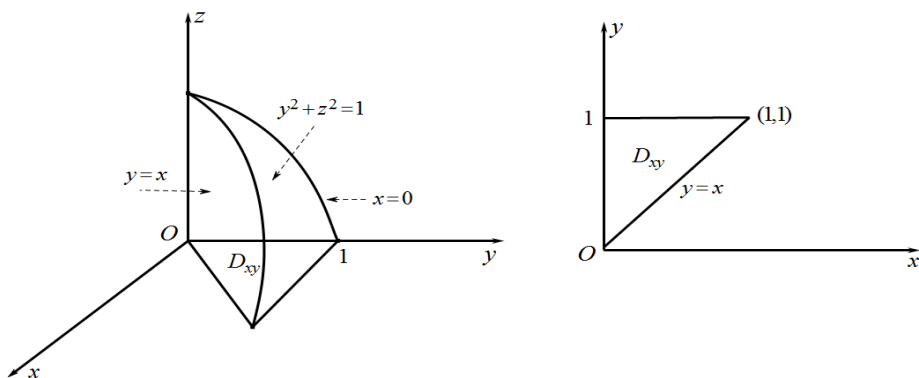


图10.16

$$\begin{aligned}
 \iiint_V z dx dy dz &= \iint_{D_{xy}} dx dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} z dz = \int_0^1 dy \int_0^y dx \int_0^{\sqrt{1-y^2}} z dz \\
 &= \int_0^1 dy \int_0^y \frac{1}{2} z^2 \Big|_{z=0}^{z=\sqrt{1-y^2}} dx = \int_0^1 dy \int_0^y \frac{1}{2} (1-y^2) dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 (1-y^2) x \Big|_{x=0}^{x=y} dy = \frac{1}{2} \int_0^1 (y-y^3) dy = \frac{1}{8}.
 \end{aligned}$$

以下是一些三重积分转化成累次积分的例子：

- 1、如果积分区域  $V$  由  $x=1, x=2, z=0, y=x, z=y$  所围，那么

$$\iiint_V f dV = \int_1^2 dx \int_0^x dy \int_0^y f dz.$$

- 2、如果积分区域  $V$  由  $x^2+y^2=6-z, y=0, x=0, y=4z, x=1, y=2$  所围，那么

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \int_0^1 dx \int_0^2 dy \int_{y/4}^{6-x^2-y^2} f(x, y, z) dz.$$

- 3、如果积分区域  $V$  由  $z=x^2+2y^2, z=2-x^2$  所围，那么

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{x^2+2y^2}^{2-x^2} f(x, y, z) dz.$$

- 4、如果积分区域  $V$  由  $0 \leq z \leq \sqrt{x^2+y^2}, 0 \leq x \leq y, x^2+y^2 \leq 2y$  所围，那么

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \int_0^1 dx \int_x^{1+\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} f(x, y, z) dz.$$

5、如果积分区域  $V$  由  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $2z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $z = 1$  所围, 那么

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \iint_{D_1} dx dy \int_{\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}}^{\sqrt{x^2+y^2}} f(x, y, z) dz + \iint_{D_2} dx dy \int_{\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}}^1 f(x, y, z) dz,$$

其中  $D_1: x^2 + y^2 \leq 1$ ;  $D_2: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$  表示圆内部和圆环区域, 选择极坐标换元比较好.

6、如果积分区域  $V$  由  $z = xy/a$ ,  $x^2 + y^2 = ax$ ,  $z = 0$ ,  $a > 0$  所围, 那么

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \iint_{D_1} dx dy \int_0^{xy/a} f(x, y, z) dz + \iint_{D_2} dx dy \int_{xy/a}^0 f(x, y, z) dz$$

其中  $D_1, D_2$  表示上半圆和下半圆.

**例10.5.3** 试交换三重积分  $\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{x^2+y^2} f(x, y, z) dz$  的积分次序为先对  $y$  积分, 再对  $z$  积分, 最后对  $x$  积分的累次积分.

$$\begin{aligned} \text{解: } \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{x^2+y^2} f(x, y, z) dz &= \int_0^1 dx \int_0^{x^2} dz \int_0^1 f(x, y, z) dy \\ &\quad + \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x^2+1} dz \int_{\sqrt{z-x^2}}^1 f(x, y, z) dy. \end{aligned}$$

**例10.5.4** 计算三重积分

$$\iiint_V z dx dy dz,$$

其中  $V$  是椭球体  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$  的上半部分.

**解:** 考虑上半椭球体在  $xOy$  平面的投影, 然后采用投影法, 得

$$\text{原式} = \int_{-a}^a dx \int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} z dz$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{c^2}{2} \int_{-a}^a dx \int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} (1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}) dy \\
&= c^2 \int_{-a}^a dx \int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} (1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}) dy \\
&= \frac{2bc^2}{3a^2} \int_{-a}^a (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx \\
&= \frac{4bc^2}{3a^2} \int_0^a (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{\pi}{4} abc^2.
\end{aligned}$$

## 二、平面截割法

平面截割法是另一种计算三重积分的方法。设  $V$  在  $z$  轴上的投影是一个区间  $[c_1, c_2]$ ，对每个  $z \in [c_1, c_2]$ ，也就是固定每个  $z$ ，定义  $V$  的“ $z$ -截面”为  $J_z$ ，如果  $f(x, y, z)$  是一个关于变量  $x, y$  在  $z$ -截面  $J_z$  上的可积函数，则可以考虑  $J_z$  上的二重积分

$$h(z) = \iint_{J_z} f(x, y, z) dx dy,$$

进一步，如果  $h(z)$  在  $[c_1, c_2]$  上可积，就有如下的定理。

**定理10.5.5** 设  $V \subset \mathbb{R}^3$  是有界闭集， $f: V \rightarrow \mathbb{R}$  为连续函数，如果  $V$  在  $z$  轴上的投影为区间  $[c_1, c_2]$ ，对于每个固定的  $z \in [c_1, c_2]$ ， $z$ -截面集  $J_z = \{(x, y) | (x, y, z) \in V\}$  可求面积，则

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_{c_1}^{c_2} \left( \iint_{J_z} f(x, y, z) dx dy \right) dz \triangleq \int_{c_1}^{c_2} dz \iint_{J_z} f(x, y, z) dx dy.$$

上述定理中关于截面  $J_z$  的二重积分还可以继续根据积分区域  $J_z$  是  $x$ -型区域还是  $y$ -型区域分别化作不同次序的累次积分，如此，一个三重

积分可以化为由三个定积分构成的累次积分, 共有 6 种次序, 采用哪种次序计算比较简单方便, 根据  $V$  的具体结构和被积函数  $f$  的特点而定.

特别地, 当被积函数仅与  $z$  有关, 不妨设为  $f(z)$ , 同时截面  $J_z$  形状简单且求面积  $A(J_z)$  较容易时, 就有

$$\iiint_V f(z) dx dy dz = \int_{c_1}^{c_2} f(z) dz \iint_{J_z} dx dy = \int_{c_1}^{c_2} f(z) A(J_z) dz,$$

这样, 只需要计算一次定积分即可.

**例10.5.6** 计算  $\iiint_V (\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}) dx dy dz$ , 其中  $V$  是椭球体

$$V: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1.$$

**解:** 采用平面截割法,

$$\iiint_V (\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}) dx dy dz = \iiint_V \frac{x^2}{a^2} dx dy dz + \iiint_V \frac{y^2}{b^2} dx dy dz + \iiint_V \frac{z^2}{c^2} dx dy dz,$$

其中  $\iiint_V \frac{x^2}{a^2} dx dy dz = \int_{-a}^a \frac{x^2}{a^2} dx \iint_{J_x} dy dz$ , 这里  $J_x$  表示固定  $x$  后的椭圆截面:

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 - \frac{x^2}{a^2}, \text{ 其面积为 } A(J_x) = \pi(b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}})(c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}) = \pi bc(1-\frac{x^2}{a^2}).$$

$$\text{于是 } \iiint_V \frac{x^2}{a^2} dx dy dz = \int_{-a}^a \frac{\pi bc}{a^2} x^2 (1 - \frac{x^2}{a^2}) dx = \frac{4}{15} \pi abc.$$

$$\text{同理可得, } \iiint_V \frac{y^2}{b^2} dx dy dz = \frac{4}{15} \pi abc, \quad \iiint_V \frac{z^2}{c^2} dx dy dz = \frac{4}{15} \pi abc.$$

$$\text{所以 } \iiint_V (\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}) dx dy dz = \frac{4}{5} \pi abc.$$

**例10.5.7** 计算  $\iiint_V (x+y+z^2) dV$ , 其中  $V$  由单叶双曲面  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ ,

平面  $z = H$  和  $z = -H (H > 0)$  所围成.

**解:** 由对称性知,  $\iiint_V x dV = 0, \iiint_V y dV = 0$ , 且  $\iiint_V z^2 dV = 2 \iiint_{V_1} z^2 dV$ , 其

中  $V_1$  表示  $V$  在  $z = 0$  以上部分, 即  $V$  的上半部分.

**【方法一】** (截面法):

$$\iiint_{V_1} z^2 dz = \int_0^H dz \iint_{J_z} z^2 dx dy = \int_0^H z^2 \cdot \pi(1+z^2) dz = \frac{\pi H^3}{3} \left(1 + \frac{3H^2}{5}\right).$$

从而

$$\iiint_V (x+y+z^2) dV = 2 \iiint_{V_1} z^2 dV = \frac{2\pi H^3}{3} \left(1 + \frac{3H^2}{5}\right).$$

**【方法二】** (投影法)

$$\iiint_{V_1} z^2 dV = \iint_{D_1} dx dy \int_0^H z^2 dz + \iint_{D_2} dx dy \int_{\sqrt{x^2+y^2-1}}^H z^2 dz.$$

(其中  $D_1$  表示在  $xOy$  平面上投影的内圆  $D_1 = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ ,  $D_2$  表示在  $xOy$  平面上投影的圆环区域  $D_2 = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 1+H^2\}$ .)

$$\begin{aligned} &= \frac{H^3}{3} \iint_{D_1} dx dy + \frac{1}{3} \iint_{D_2} [H^3 - (x^2 + y^2 - 1)^{\frac{3}{2}}] dx dy \\ &= \overset{\text{极坐标}}{\frac{\pi H^3}{3}} \left(1 + \frac{3H^2}{5}\right). \end{aligned}$$

$$\text{所以 } \iiint_V (x+y+z^2) dV = 2 \iiint_{V_1} z^2 dV = \frac{2\pi H^3}{3} \left(1 + \frac{3H^2}{5}\right).$$

**例10.5.8** 计算积分  $\iiint_V (x+y+z)^2 dx dy dz$ , 其中

$$V = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 \leq 2z, x^2 + y^2 + z^2 \leq 3\}.$$

**解:** 首先把被积函数平方展开, 利用对称性知,  $2xy, 2yz, 2xz$  在  $V$  上的积分均为0, 然后采用平面截割法,

$$\begin{aligned}
\iiint_V (x+y+z)^2 dx dy dz &= \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz \\
&= \int_0^1 dz \iint_{x^2+y^2 \leq 2z} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy \\
&\quad + \int_1^{\sqrt{3}} dz \iint_{x^2+y^2 \leq 3-z^2} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy.
\end{aligned}$$

利用极坐标变换先计算后面的二重积分，可得

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 2z} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2z}} (r^2 + z^2) r dr = 2\pi(z^2 + z^3),$$

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 3-z^2} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3-z^2}} (r^2 + z^2) r dr = \frac{\pi}{2}(9 - z^4)$$

于是，

$$\text{原式} = 2\pi \int_0^1 (z^2 + z^3) dz + \frac{\pi}{2} \int_1^{\sqrt{3}} (9 - z^4) dz = \frac{\pi}{5} (18\sqrt{3} - \frac{97}{6}).$$

## § 10.6 三重积分的计算: 变量替换

和二重积分一样, 某些类型的三重积分作适当变量替换后能使计算更简便.

设  $\varphi(u, v, w)$ ,  $\psi(u, v, w)$ ,  $\chi(u, v, w)$  在  $uvw$  空间某个开集上具有连续的一阶偏导数, 设变换

$$T: \begin{cases} x = \varphi(u, v, w) \\ y = \psi(u, v, w) \\ z = \chi(u, v, w) \end{cases}$$

把  $uvw$  空间某开集  $E'$  内的点一一映射到  $xyz$  空间上某开集  $E$  内的点. 又设变换的雅可比矩阵的行列式为

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}$$

在  $E'$  上恒不为零. 现设  $V$  为  $E$  内可求体积的闭区域, 以上变换  $T$  将  $E'$  内可求体积的闭区域  $V'$  一一对应到  $V$ . 于是与二重积分的换元法一样, 可建立三重积分的换元法公式.

**定理10.6.1** 设  $f$  在有界闭区域  $V$  上连续, 则

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V'} f(\varphi(u, v, w), \psi(u, v, w), \chi(u, v, w)) |J| du dv dw.$$

下面介绍几个常用的变换公式.

### 一、柱面坐标换元法

在  $\mathbb{R}^3$  中任意一点  $P(x, y, z)$ , 若前两个分量  $(x, y)$  在  $xOy$  平面内用极坐标  $(r, \theta)$  表示, 则  $P$  可以用  $(r, \theta, z)$  表示, 称其为点  $P$  的柱面坐标.

显然, 直角坐标和柱坐标有如下关系:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

其雅可比行列式为

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r,$$

因此, 三重积分的柱面坐标换元公式为

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V'} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dr d\theta dz.$$

上式转化成累次积分就是

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{D_{r\theta}} r dr d\theta \int_{z_1(r, \theta)}^{z_2(r, \theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) dz,$$

其中  $D_{r\theta}$  表示  $V$  在  $xOy$  平面的投影  $D_{xy}$  的  $(r, \theta)$  表示,  $z_1(r, \theta), z_2(r, \theta)$  表示

上顶曲面  $z_1(x, y)$  和下底曲面  $z_2(x, y)$  的  $(r, \theta)$  表示.

在柱面坐标系中, 也就是  $r\theta z$  空间, 考虑下面三个平面

$$r = r_0, \theta = \theta_0, z = z_0,$$

其中  $r_0, \theta_0, z_0$  是常数, 则这三个  $r\theta z$  坐标系中的平面变换后在  $xyz$  直角坐

标系中,  $r = r_0$  表示以  $z$  轴为中心轴的圆柱面,  $\theta = \theta_0$  表示过  $z$  轴的半平

面,  $z = z_0$  表示垂直于  $z$  的平面. 因此柱面坐标系中的长方体, 在直角坐

标系中是一个由两个以  $z$  轴为中心的圆柱面, 两个过  $z$  轴的半平面, 以及两个垂直于  $z$  轴的平面所围成的楔形区域, 如图10.17所示. 用柱面坐

标变换可计算三重积分如下: 找出  $V$  在  $xOy$  坐标平面上投影区域  $D_{xy}$ , 即

当  $V = \{(x, y, z) \mid z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y), (x, y) \in D_{xy}\}$  时, 有

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{D_{xy}} dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz, \text{ 其中的二重积分部分用极}$$

坐标进行计算.

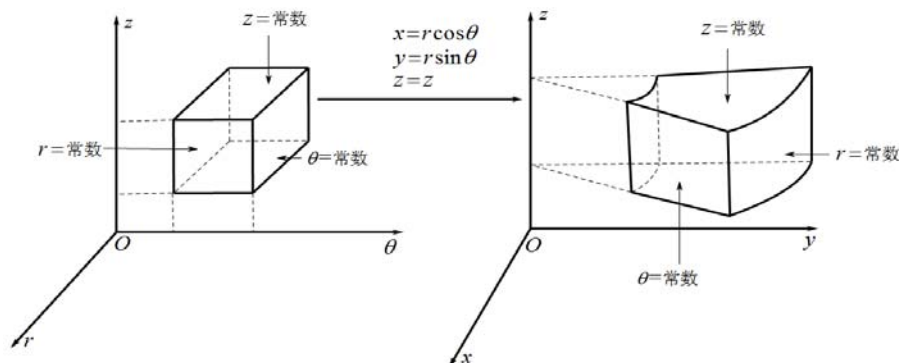


图10.17

**例10.6.2** 计算  $\iiint_V z\sqrt{x^2+y^2}dV$ , 其中  $V$  是由  $x^2+y^2=2x$ ,  $z=0$ ,

$z=a(a>0)$ ,  $y=0$  所围.

解: 
$$\iiint_V z\sqrt{x^2+y^2}dV = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} dr \int_0^a zr^2 dz = \frac{16}{9}a^3.$$

**例10.6.3** 计算  $\iiint_V \frac{1}{1+x^2+y^2}dV$ ,

其中  $V$  是由  $x^2+y^2=4z$ ,  $z=h(h>0)$  所围.

解: 
$$\iiint_V \frac{dV}{1+x^2+y^2} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\sqrt{h}} dr \int_{\frac{r^2}{4}}^h \frac{r}{1+r^2} dz = \frac{\pi}{4}[(1+4h)\ln(1+4h)-4h].$$

**例10.6.4** 计算  $\iiint_V (x^2+y^2)dV$ , 其中  $V$  是由  $25(x^2+y^2)=4z^2$ ,  $z=5$  所围.

解: 
$$\iiint_V (x^2+y^2)dV = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 dr \int_{\frac{5r}{2}}^5 r^3 dz = 8\pi.$$

## 二、球面坐标换元法

在上面的柱坐标变换中, 注意到  $z$  轴和极轴  $r$  总是正交的, 因此可以

对  $zr$ -平面引入极坐标  $(\rho, \varphi)$ ，其中  $\rho$  表示点  $P$  到原点的距离，而  $\varphi$  表示  $z$  轴正方向到新的极径  $\rho$  的夹角，并且限定  $\rho \geq 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \pi$ 。

于是  $z = \rho \cos \varphi$ ， $r = \rho \sin \varphi$ ，这样，可以用三个新变量  $\rho, \theta, \varphi$  来表示  $P$ ，如图10.18所示，我们称  $(\rho, \theta, \varphi)$  为  $P$  的球面坐标。显然，球面坐标到直角坐标的变换公式为

$$\begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases}$$

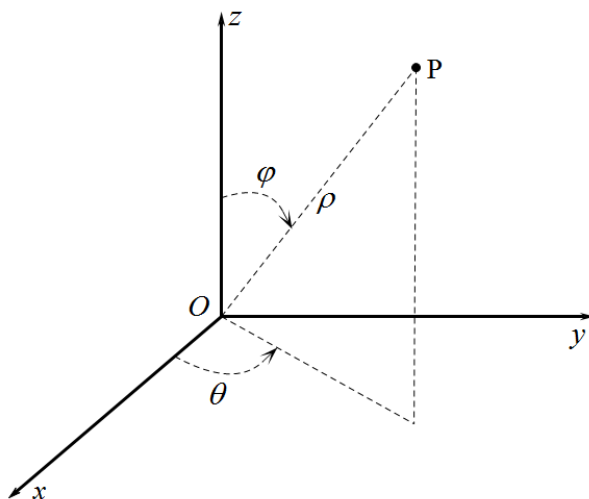


图10.18

其雅可比行列式为

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \varphi)} = \begin{vmatrix} \sin \varphi \cos \theta & -\rho \sin \varphi \sin \theta & \rho \cos \theta \cos \varphi \\ \sin \varphi \sin \theta & \rho \sin \varphi \cos \theta & \rho \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \varphi & 0 & -\rho \sin \varphi \end{vmatrix} = -\rho^2 \sin \varphi,$$

因此，三重积分的球面坐标换元公式为

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V'} f(\rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \varphi) \rho^2 \sin \varphi d\theta d\varphi d\rho.$$

若球面坐标系下积分区域  $V'$  为

$$V' = \{(\rho, \theta, \varphi) \mid \rho_1(\theta, \varphi) \leq \rho \leq \rho_2(\theta, \varphi), \varphi_1(\theta) \leq \varphi \leq \varphi_2(\theta), \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2\},$$

则上述球坐标换元公式转化成累次积分就是



$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$$

$$= \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} d\varphi \int_{\rho_1(\theta, \varphi)}^{\rho_2(\theta, \varphi)} f(\rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \varphi) \rho^2 \sin \varphi d\rho,$$

通过球面坐标变换知,  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , 在球面坐标系中, 由方程

$$\rho = \rho_0, \theta = \theta_0, \varphi = \varphi_0 \quad (\text{其中 } \rho_0, \theta_0, \varphi_0 \text{ 是常数})$$

确定的三个平面, 在  $xyz$ - 直角坐标系中分别是球面、半平面和锥面, (如图10.19所示). 因此, 如果积分区域由这些类型的曲面围成或被积函数含有  $x^2 + y^2 + z^2$  类型的表达式时, 采用球面坐标变换计算三重积分往往比较简单方便.

进一步, 球面坐标系中的长方体, 在直角坐标系中是一个楔形区域, 如图10.20所示.

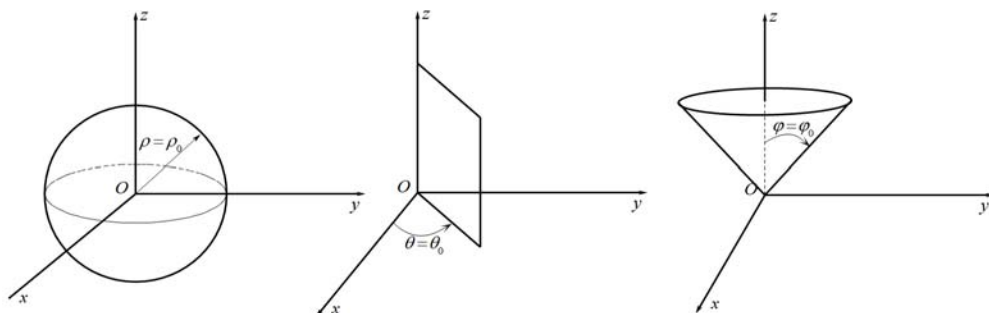


图10.19

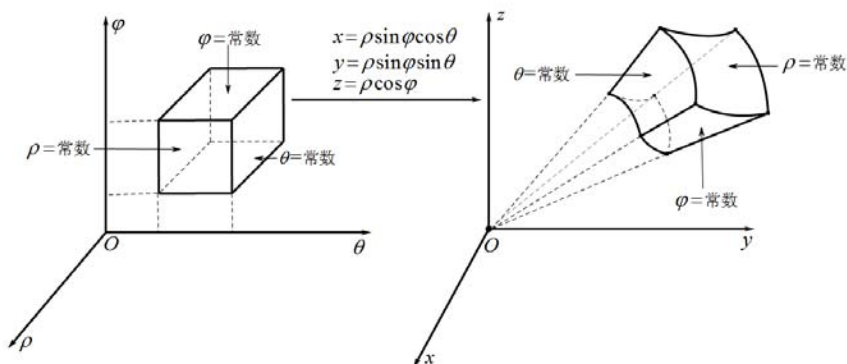


图10.20

**例10.6.5** 试用球面坐标表示  $V$ ，其中  $V$  是由球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ （上顶）和圆锥面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ （下底）所围立体。

**解：**用球面坐标表示，球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 16$  转化为  $\rho = 4$ ，圆锥面的球面坐标表示是  $\rho \cos \varphi = \sqrt{(\rho \sin \varphi \cos \theta)^2 + (\rho \sin \varphi \sin \theta)^2}$ ，化简得  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ 。

所以  $V$  的球坐标表示是  $\left\{(\rho, \theta, \varphi) \mid 0 \leq \rho \leq 4, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}\right\}$ 。

**例10.6.6** 求由锥面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  和球面  $x^2 + y^2 + (z - a)^2 = a^2$  所围上部分立体的体积，其中  $a > 0$  是常数。

**解：**在球坐标变换下，球面方程可表示为  $\rho = 2a \cos \varphi$ ，锥面方程可表示为  $\varphi = \pi/4$ 。因而，所求立体体积为

$$\begin{aligned} \iiint_V dV &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{2a \cos \varphi} \rho^2 \sin \varphi d\rho \\ &= \frac{16}{3} \pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 \varphi \sin \varphi d\varphi \\ &= \pi a^3. \end{aligned}$$

**例10.6.7** 计算  $\iiint_V \left| \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - 1 \right| dV$ ，其中  $V$  由圆锥面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  和平面  $z = 1$  所围。

**解：**本题的三重积分中，由于一部分包围面是锥面，又被积函数含有  $x^2 + y^2 + z^2$  这样的表达式，宜用球面坐标变换，设  $V_1$  表示被积区域  $V$  位于单位球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  内部部分， $V_2$  表示积分区域  $V$  位于单位球面外部部分，于是

$$V_1 : \left\{(\rho, \theta, \varphi) \mid 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}\right\};$$

$$V_2: \left\{ (\rho, \theta, \varphi) \left| 1 \leq \rho \leq \frac{1}{\cos \varphi}, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} \right. \right\}.$$

注意, 平面  $z=1$  在球面坐标系中的表示是  $\rho = \frac{1}{\cos \varphi}$ , 所以

$$\begin{aligned} & \iiint_V \left| \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - 1 \right| dV \\ &= \iiint_{V_1} (1 - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) dV + \iiint_{V_2} (\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - 1) dV \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^1 (1 - \rho) \rho^2 \sin \varphi d\rho + \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_1^{\frac{1}{\cos \varphi}} (\rho - 1) \rho^2 \sin \varphi d\rho \\ &= \frac{\pi}{6} \left( \frac{3\sqrt{2}}{2} - 2 \right) + \frac{\pi}{6} \left( 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\pi}{6} (\sqrt{2} - 1). \end{aligned}$$

**例10.6.8** 计算  $\iiint_V z dx dy dz$ , 其中  $V = \left\{ (x, y, z) \left| \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1, z \geq 0 \right. \right\}$ .

**解:** 作广义球坐标变换

$$\begin{cases} x = a\rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = b\rho \sin \varphi \sin \theta, \\ z = c\rho \cos \varphi \end{cases}$$

因此, 雅可比行列式的绝对值为

$$|J| = abc\rho^2 \sin \varphi.$$

把广义球坐标代入椭球面方程得  $\rho=1$ , 所以球面坐标系中的积分区域是

$$V' = \left\{ (\rho, \theta, \varphi) \left| 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \right. \right\}.$$

于是  $\iiint_V z dx dy dz = \iiint_{V'} abc^2 \rho^3 \sin \varphi \cos \varphi d\rho d\varphi d\theta$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 abc^2 \rho^3 \sin \varphi \cos \varphi d\rho \\ &= \frac{\pi abc^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \\ &= \frac{\pi abc^2}{4}. \end{aligned}$$

**例10.6.9** 求  $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3 z (a > 0)$  所围立体的体积.

**解:** 把曲面方程转化为球面坐标系中的方程:  $\rho^3 = a^3 \cos \varphi$ , 又因为曲面过原点, 因此有  $0 \leq \rho \leq a\sqrt[3]{\cos \varphi}$ ; 因为立体在  $xOy$  平面的投影区域包含原点, 因此有  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ; 由方程  $\rho^3 = a^3 \cos \varphi$  易知,  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ , 因此

$$V = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\sqrt[3]{\cos \varphi}} \rho^2 \sin \varphi d\rho = \frac{1}{3} \pi a^3.$$

注: 此题也可用平面截割法计算:

$$V = \int_0^a dz \cdot \pi(\sqrt{a^3 z - z^2}) = \frac{1}{3} \pi a^3.$$

**例10.6.10** 求曲面  $(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2})^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$  所围立体的体积.

**解:** 根据对称性, 体积为第一卦限体积的8倍, 设  $V_1$  为第一卦限体积, 利用广义球坐标变换, 有

$$\begin{aligned} V &= 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\sin \varphi} abc^2 \rho^2 \sin \varphi d\rho \\ &= \frac{4\pi abc}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \varphi d\varphi = \frac{4\pi abc}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{\pi^2 abc}{4}. \end{aligned}$$

**例10.6.11** 计算  $\iiint_V \frac{xyz}{x^2 + y^2} dx dy dz$ ,

其中  $V$  是上顶面为  $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2 xy$ , 下底面为  $z = 0$  的立体.

**解:** 利用球面坐标, 上顶面的曲面方程就是:  $\rho^2 = a^2 \sin^2 \varphi \sin \theta \cos \theta$ ,

由上顶面方程知  $xy \geq 0$ , 又在  $z = 0$  上方, 立体位于第一、第三卦限, 根据对称性, 积分为第一卦限部分的2倍, 于是

$$\begin{aligned}
\iiint_V \frac{xyz}{x^2+y^2} dx dy dz &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a \sin \varphi \sqrt{\sin \theta \cos \theta}} \rho^3 \sin \varphi \cos \varphi \sin \theta \cos \theta d\rho \\
&= \frac{a^4}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta \cos^3 \theta d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 \varphi \cos \varphi d\varphi \\
&= \frac{a^4}{144}.
\end{aligned}$$

### 三、一般换元法举例\*

**例10.6.12** 计算  $\iiint_V x^2 dx dy dz$ , 其中  $V$  由  $z = ay^2, z = by^2 (y > 0, 0 < a < b)$ ,

$z = \alpha x, z = \beta x (0 < \alpha < \beta), z = h (h > 0)$  所围成的立体区域.

**解:** 作变换  $u = \frac{z}{y^2}, v = \frac{z}{x}, w = z$ , 则

$$V' = \{(u, v, w) | a < u < b, \alpha < v < \beta, 0 < w < h\}.$$

计算雅可比行列式得

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = -\frac{1}{2v^2} \left(\frac{w}{u}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\text{所以 } \iiint_V x^2 dx dy dz = \iiint_{V'} \frac{w^2}{v^2} \cdot \frac{1}{2v^2} \left(\frac{w}{u}\right)^{\frac{3}{2}} du dv dw$$

$$= \int_a^b \frac{1}{2} u^{-\frac{3}{2}} du \int_\alpha^\beta \frac{1}{v^4} dv \int_0^h w^{\frac{7}{2}} dw = \frac{2}{27} \left( \frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{b}} \right) \left( \frac{1}{\alpha^3} - \frac{1}{\beta^3} \right) h^{\frac{9}{2}}.$$

## §10.7 重积分的应用

我们常常利用二重积分解决二维平面上的一些几何问题，利用三重积分解决三维立体的相关问题，当然，重积分在物理上及其他领域也有广泛的应用。下面主要介绍重积分在几何上和物理上的一些应用。

### 一、几何上的应用

若常值函数  $f \equiv 1$  在平面区域  $K$  上可积（即  $K$  为可求面积的），则  $K$  的面积为

$$A(K) = \iint_K 1 dx dy.$$

在直角坐标系中，设平面区域

$$K = \{(x, y) | a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\},$$

其中  $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$  为连续函数，则  $K$  的面积为

$$A(K) = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy = \int_a^b [\varphi_2(x) - \varphi_1(x)] dx.$$

在极坐标系中，设平面区域

$$H = \{(r, \theta) | \alpha \leq \theta \leq \beta, 0 \leq r \leq r(\theta)\},$$

其中  $0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi$ ,  $r(\theta)$  为连续函数，则  $H$  的面积为

$$A(H) = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_0^{r(\theta)} r dr = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\theta) d\theta.$$

以上即为我们熟知的求平面图形面积的计算公式。

设  $z = f(x, y)$ ,  $(x, y) \in D$  连续，若  $\iint_D f(x, y) dx dy$  存在，则以  $D$  为底，

以曲面  $z = f(x, y)$  为顶的曲顶柱体的体积为

$$V = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

设立体区域

$$\Omega = \{(x, y, z) | (x, y) \in D, f_1(x, y) \leq z \leq f_2(x, y)\},$$

其中  $f_1(x, y), f_2(x, y)$  在  $D$  上连续, 则  $\Omega$  的体积为

$$V(\Omega) = \iiint_{\Omega} 1 dx dy dz = \iint_D \left( \int_{f_1(x, y)}^{f_2(x, y)} dz \right) dx dy = \iint_D (f_2(x, y) - f_1(x, y)) dx dy.$$

**例10.7.1** 求由圆柱  $x^2 + y^2 = 9$  与平面  $z = 1, x + z = 5$  所围成的物体  $K$  的体积。

**解:** 物体  $K$  在  $XOY$  平面的投影  $D$  是一个半径为 3 的圆盘:  $x^2 + y^2 \leq 9$ , 由于

$|x| \leq 3, z = 5 - x > 1$ , 所以  $K$  可以表示为

$$K = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 \leq 9, 1 \leq z \leq 5 - x\},$$

于是所求体积为

$$V = \iint_D (5 - x - 1) dx dy = \iint_D (4 - x) dx dy.$$

用极坐标计算此二重积分得

$$V(K) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 (4 - r \cos \theta) r dr = \int_0^{2\pi} (18 - 9 \cos \theta) d\theta = 36\pi.$$

## 二、物理上的应用

**定义10.7.2** 设  $V \subset \mathbb{R}^3$ ,  $f(x, y, z)$  是定义在  $V$  上的密度函数, 如果

$$m(V) = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$$

存在, 则称  $m(V)$  为  $V$  的质量.

如果  $f(x, y, z)$  表示平面薄片  $D$  内  $(x, y)$  点的面密度, 则此平面薄片的质量为

$$m(D) = \iint_D f(x, y) dx dy .$$



**定义10.7.3** 称

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \frac{1}{m(V)} \left( \iiint_V x f(x, y, z) dx dy dz, \iiint_V y f(x, y, z) dx dy dz, \iiint_V z f(x, y, z) dx dy dz \right)$$

为  $V$  的质心. 其中  $f(x, y, z)$  为  $V$  上的密度函数.

**【注】:** 1、质心也称为重心. 当密度函数为常值函数时, 也称质心  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$

为  $V$  的形心. 特别地, 当密度函数  $f(x, y, z) \equiv 1$ , 则  $m(V)$  的值等于  $V$  的体积.

2、类似地, 可以用二重积分来定义平面薄片  $D$  的质心或形心:

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{m(D)} \left( \iint_D x f(x, y) dx dy, \iint_D y f(x, y) dx dy \right),$$

其中  $f(x, y)$  为  $D$  上的面密度函数.

**例10.7.4** 求  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  在第一卦限所围体积  $V$  的形心.

**解:** 引用球坐标变换,  $V$  在  $\theta \varphi \rho$ -空间的原像是.

因此  $V$  的体积为

$$\begin{aligned} \iiint_V dx dy dz &= \iiint_{V'} \rho^2 \sin \varphi d\theta d\varphi d\rho \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi \int_0^1 \rho^2 d\rho = \frac{\pi}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

当然, 以上体积为球体积的八分之一, 可直接利用球体积公式得到.

$$\text{又因为 } \iiint_V x dx dy dz = \iiint_{V'} (\rho \sin \varphi \cos \theta) \rho^2 \sin \varphi d\theta d\varphi d\rho$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi d\varphi \int_0^1 \rho^3 d\rho = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{\pi}{16}.$$

因此,  $\bar{x} = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{6}{\pi} = \frac{3}{8}$ . 利用对称性知,  $\bar{y} = \bar{z} = \frac{3}{8}$ , 所以  $V$  的形心是  $(\frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8})$ .

质点  $A$  对于轴  $l$  的转动惯量  $I$  是质点  $A$  的质量  $m$  和  $A$  到转动轴  $l$  的距离  $r$  的平方的乘积, 即  $I = mr^2$ .

**定义10.7.5** 设  $V \subset \mathbb{R}^3$ ,  $f(x, y, z) \geq 0$  是定义在  $V$  上的密度函数, 如果

$$I_z(V) = \iiint_V (x^2 + y^2) f(x, y, z) dx dy dz$$

存在, 则称  $I_z(V)$  为  $V$  关于  $z$ -轴的转动惯量 (或惯性矩). 类似地可以定

义  $V$  关于  $x$ -轴的转动惯量  $I_x(V)$  和关于  $y$ -轴的转动惯量  $I_y(V)$ :

$$I_x(V) = \iiint_V (y^2 + z^2) f(x, y, z) dx dy dz,$$

$$I_y(V) = \iiint_V (x^2 + z^2) f(x, y, z) dx dy dz.$$

类似地, 请读者用二重积分表示平面薄片的转动惯量.

**例10.7.6** 求图10.21半径为  $R$  高度为  $h$  的圆柱体关于  $z$ -轴的转动惯量.

**解:** 圆柱体  $V$  的柱坐标表示为

$$V' = \{(r, \theta, z) | 0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq h\}$$

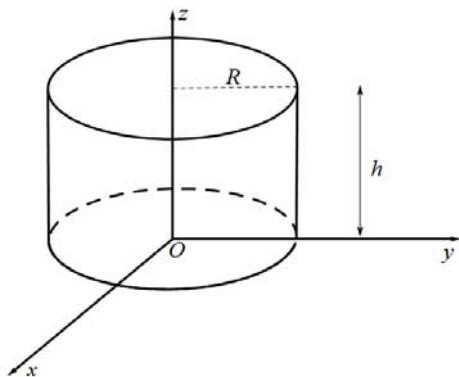


图10.21

因此所求转动惯量为

$$\begin{aligned} I_z(V) &= \iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz \\ &= \iiint_{V'} r^2 \cdot r dr d\theta dz \end{aligned}$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r^3 dr \int_0^h dz = \frac{1}{2} \pi R^4 h.$$

**例10.7.7** 求密度均匀的圆环平面  $D = \{(x, y) | R_1^2 \leq x^2 + y^2 \leq R_2^2\}$  关于圆环平面中心轴  $l$  ( $l$  通过圆环中心且垂直于圆环平面) 的转动惯量.

**解:** 这是求一个平面薄片物体的转动惯量, 设圆环平面的密度为常数  $\mu$ ,

$D$  中任一点  $(x, y)$  到中心轴距离的平方为  $x^2 + y^2$ . 于是

$$\begin{aligned} I_l &= \iint_D (x^2 + y^2) \mu dx dy \\ &= \mu \int_0^{2\pi} d\theta \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr = \frac{\pi\mu}{2} (R_2^4 - R_1^4) = \frac{m}{2} (R_2^2 + R_1^2). \end{aligned}$$

其中  $m$  为圆环面的质量.

质点之间的引力可以通过万有引力公式来计算, 现在使用微元法来考虑立体  $V$  对于质点  $P_0$  的引力. 设  $f(x, y, z)$  为立体  $V$  的密度函数, 则  $V$  中的质量微元是  $dm = f(x, y, z) dV$ , 由于引力是矢量, 因此需要把各质量微元对质点  $P_0$  的引力在坐标轴方向进行分解后才能进行积分 (相加).

**定义10.7.8** 设  $V \subset \mathbb{R}^3$ ,  $f(x, y, z) \geq 0$  是定义在  $V$  上的密度函数, 设质点  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  的质量为  $m$ ,  $G$  为引力常数, 则立体  $V$  对于质点  $P_0$  的引力  $F$  在三个坐标轴方向上的分解分别为

$$\begin{aligned} F_x &= \iiint_V \frac{Gmf(x, y, z)(x - x_0)}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{\frac{3}{2}}} dV, \\ F_y &= \iiint_V \frac{Gmf(x, y, z)(y - y_0)}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{\frac{3}{2}}} dV, \\ F_z &= \iiint_V \frac{Gmf(x, y, z)(z - z_0)}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{\frac{3}{2}}} dV, \end{aligned}$$

于是,  $\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k}$

同理可得平面上质点与平面薄片之间的引力计算公式.

**例10.7.9** 设半径为 $R$ 的球体 $V$ 具有均匀密度 $\mu$ , 求 $V$ 对球外一点 $P_0$  (质量为1, 离球心距离为 $a$ ) 的引力 (引力常数为 $G$ ).

**解:【方法一】**首先建立坐标系, 设球体 $V = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$  (通常把物体的质心放在原点), 设球外一点 $P_0$ 的坐标为 $(0, 0, a)$ , 则根据对称性知 $F_x = F_y = 0$ , 现在计算 $F_z$ , 由上面引力公式, 有

$$\begin{aligned} F_z &= \iiint_V \frac{G\mu(z-a)}{[x^2 + y^2 + (z-a)^2]^{\frac{3}{2}}} dx dy dz \\ &= G\mu \int_{-R}^R (z-a) dz \iint_{x^2+y^2 \leq R^2-z^2} \frac{dx dy}{[x^2 + y^2 + (z-a)^2]^{\frac{3}{2}}} dz \\ &= 2\pi G\mu \int_{-R}^R (z-a) \left( \frac{1}{|z-a|} - \frac{1}{\sqrt{R^2 - 2az + a^2}} \right) dz. \end{aligned}$$

其中

$$\int_{-R}^R \frac{z-a}{|z-a|} dz = \begin{cases} -\int_{-R}^R dz = -2R, & \text{当 } a \geq R; \\ -\int_{-R}^a dz + \int_a^R dz = -2a, & \text{当 } a < R. \end{cases}$$

又因为

$$\begin{aligned} \int_{-R}^R -\frac{z-a}{\sqrt{R^2 - 2az + a^2}} dz &= -\frac{1}{a} \int_{-R}^R (z-a) d\sqrt{R^2 - 2az + a^2} \\ &\stackrel{\text{分部}}{=} -\frac{(z-a)\sqrt{R^2 - 2az + a^2}}{a} \Big|_{-R}^R + \frac{1}{a} \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - 2az + a^2} dz \\ &= \frac{1}{a} \left[ (a-R)|a-R| - (a+R)^2 \right] - \frac{1}{3a^2} [ |a-R|^3 - (a+R)^3 ] \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} \frac{2R^3}{2a^2} - 2R, & \text{当 } a \geq R; \\ -\frac{4}{3}a, & \text{当 } a < R \end{cases}$$

$$\text{所以 } F_z = \begin{cases} -G \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 \mu \cdot \frac{1}{a^2}, & \text{当 } a \geq R; \\ -G \cdot \frac{4}{3} \pi a^3 \mu \cdot \frac{1}{a^2}, & \text{当 } a < R. \end{cases}$$

注意到  $\frac{4\pi R^3}{3} \mu$  为球的质量, 上述结果表明: 均匀球体对质点的引力如同球体的质量集中于球心时两质点间的引力.

**【方法二】** 利用球坐标变换, 则

$$\begin{aligned} F_z &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R \frac{G\mu\rho^2(\rho\cos\varphi - a)\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta}{(\rho^2 + a^2 - 2a\rho\cos\varphi)^{\frac{3}{2}}} \\ &= G\mu \int_0^R \rho^2 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \frac{(\rho\cos\varphi - a)\sin\varphi}{(\rho^2 + a^2 - 2a\rho\cos\varphi)^{\frac{3}{2}}} d\varphi \end{aligned}$$

令  $\rho^2 + a^2 - 2a\rho\cos\varphi = t^2$ , 则

$$\begin{aligned} F_z &= \frac{G\mu}{2a^2} \int_0^R \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_{|\rho-a|}^{\rho+a} \left( \frac{\rho^2 - a^2}{t^2} - 1 \right) dt \\ &= -\frac{G\mu}{2a^2} \int_0^R \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \left( 2\rho - \frac{\rho^2 - a^2}{|\rho-a|} - |\rho-a| \right) \end{aligned}$$

$$\text{所以, 右边括号里} = \begin{cases} 0, & \text{当 } a < \rho; \\ -2\rho, & \text{当 } a = \rho; \\ -4\rho, & \text{当 } a > \rho. \end{cases}$$

$$F_z = \begin{cases} -\frac{4\pi G\mu}{a^2} \int_0^R \rho^2 d\rho = -G \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 \mu \cdot \frac{1}{a^2}, & \text{当 } a \geq R; \\ -\frac{4\pi G\mu}{a^2} \int_0^a \rho^2 d\rho = -G \cdot \frac{4}{3} \pi a^3 \mu \cdot \frac{1}{a^2}, & \text{当 } a < R. \end{cases}$$

【方法三】利用广义球坐标变换,  $x = \rho \sin \varphi \cos \theta$ ,  $y = \rho \sin \varphi \sin \theta$ ,

$z = a + \rho \cos \varphi$ , 则令积分

$$\iiint_V \frac{(z-a)}{[x^2 + y^2 + (z-a)^2]^{\frac{3}{2}}} dx dy dz = I$$

当  $a \geq R$  时,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\pi - \arcsin \frac{R}{a}}^{\pi} d\varphi \int_{-a \cos \varphi - \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi - a^2 + R^2}}^{-a \cos \varphi + \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi - a^2 + R^2}} \frac{\rho \cos \varphi}{\rho^3} \rho^2 \sin \varphi d\rho \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\pi - \arcsin \frac{R}{a}}^{\pi} \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi - a^2 + R^2} \sin 2\varphi d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\pi - \arcsin \frac{R}{a}}^{\pi} -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{a^2}{2} \cos 2\varphi - \frac{a^2}{2} + R^2} d \cos 2\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} -\frac{1}{2} \frac{4}{3a^2} \left( \frac{a^2}{2} \cos 2\varphi - \frac{a^2}{2} + R^2 \right)^{\frac{3}{2}} \Big|_{\pi - \arcsin \frac{R}{a}}^{\pi} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} -\frac{2}{3a^2} R^3 d\theta = -\frac{4}{3} \pi R^3 \cdot \frac{1}{a^2}. \end{aligned}$$

当  $a < R$  时,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{-a \cos \varphi + \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi - a^2 + R^2}} \frac{\rho \cos \varphi}{\rho^3} \rho^2 \sin \varphi d\rho \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \cos \varphi \sin \varphi (-a \cos \varphi + \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi - a^2 + R^2}) d\varphi \\ &= -2\pi a \int_0^{\pi} \cos^2 \varphi \sin \varphi d\varphi + 2\pi \int_0^{\pi} \cos \varphi \sin \varphi \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi - a^2 + R^2} d\varphi \\ &= 2\pi a \cdot \frac{1}{3} \cos^3 \varphi \Big|_0^{\pi} + 2\pi \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{-1}{2a^2} (a^2 \cos^2 \varphi - a^2 + R^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\pi} = -\frac{4\pi a}{3}. \end{aligned}$$

## 习题 10.1

1. 设有一长方形的金属薄片, 已知各点的密度函数为  $\rho(x, y)$ , 用重积分表示其质量.

2. 设  $D$  是  $\mathbb{R}^2$  的矩形, 用定义证明二重积分的下述性质:

(1)  $\iint_D dx dy = A(D)$ , 其中  $A(D)$  表示  $D$  的面积.

(2) 线性性质: 设  $f, g$  在  $D$  上可积,  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ , 则  $c_1 f + c_2 g$  也在  $D$  上可积, 并且

$$\iint_D (c_1 f(x, y) + c_2 g(x, y)) dx dy = c_1 \iint_D f(x, y) dx dy + c_2 \iint_D g(x, y) dx dy.$$

(3) 单调性质: 设  $f, g$  在  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  上可积, 且  $f(x, y) \leq g(x, y)$ , 则

$$\iint_D f(x, y) dx dy \leq \iint_D g(x, y) dx dy.$$

(4) 设  $f$  在  $D$  上连续, 证明  $|f|$  在  $D$  上可积, 且

$$\left| \iint_D f(x, y) dx dy \right| \leq \iint_D |f(x, y)| dx dy.$$

(5) 若  $D = D_1 \cup D_2$ , 其中  $D_1, D_2$  是两个无公共内点的闭区域, 则在

$D$  上的二重积分等于  $D_1$  和  $D_2$  上的二重积分之和, 即

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy.$$

3. 设  $I_1 = \iint_{D_1} (x^2 + y^2) dx dy$ , 其中  $D_1 = \{(x, y) | -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$ , 又设

$I_2 = \iint_{D_2} (x^2 + y^2) dx dy$ , 其中  $D_2 = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ , 试用二重

积分的几何意义说明  $I_1, I_2$  的关系.

4. 根据二重积分的性质, 比较  $\iint_D (x+y)^2 dx dy$  与  $\iint_D (x+y)^3 dx dy$  的大小, 其中积分区域  $D$  由圆周  $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 2$  所围成.

5. 应用中值定理, 估计下面二重积分的值,

$$I = \iint_{|x|+|y|\leq 5} \frac{1}{1+\cos^2 x + \cos^2 y} dx dy.$$

6. 将区域  $D$  上的二重积分  $\iint_D f(x, y)$  化为两个不同次序的累次积分:

(1)  $D: x+y=1, x-y=1, x=0$  所围成;

(2)  $D: x^2 + y^2 \leq 1$  为单位圆盘;

(3)  $D$ : 以  $O(0,0), A(1,0), B(1,2), C(0,1)$  为顶点的梯形;

(4)  $D: x=3, x=5, 3x-2y+4=0, 3x-2y+1=0$  所围成;

(5)  $D: a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2, 0 < a < b$  为圆环;

(6)  $D$ : 由  $y^2 = 4x$  和  $x^2 + y^2 = 2x$  在  $x$ -轴上方部分以及直线  $x=2$  所围成.



## 习题 10.2

7. 画出下列积分区域的图形, 并改变累次积分的顺序:

$$(1) \int_0^1 dy \int_{y^2}^{2-y} f(x, y) dx; \quad (2) \int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x, y) dy;$$

$$(3) \int_{-1}^0 dy \int_{-\sqrt{y+1}}^{\sqrt{y+1}} f(x, y) dx; \quad (4) \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x, y) dy;$$

$$(5) \int_0^\pi dx \int_0^{\sin x} f(x, y) dy; \quad (6) \int_{-6}^2 dx \int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x, y) dy.$$

8. 计算下列累次积分:

$$(1) \int_0^\pi dx \int_0^\pi \sin x \sin y dy; \quad (2) \int_0^2 dx \int_0^3 e^{x-y} dy;$$

$$(3) \int_1^2 dx \int_0^\pi y \sin(x+y) dy; \quad (4) \int_1^2 dx \int_{\sqrt{x}}^x \sin \frac{\pi x}{2y} dy + \int_2^4 dx \int_{\sqrt{x}}^2 \sin \frac{\pi x}{2y} dy;$$

$$(5) \int_\pi^{2\pi} dy \int_{y-\pi}^\pi \frac{\sin x}{x} dx; \quad (6) \int_0^a dx \int_0^x \sqrt{\frac{a-x}{a-y}} \sin y dy;$$

$$(7) \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy.$$

9. 计算下列二重积分:

$$(1) \iint_D x^2 y dx dy, \text{ 其中 } D = [0, 1] \times [-1, 1];$$

$$(2) \iint_D x e^{xy} dx dy, \text{ 其中 } D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 0\};$$

$$(3) \iint_D (x+y) dx dy, \text{ 其中 } D \text{ 是由 } y = e^x, y = 1, x = 0, x = 1 \text{ 所围成的有界闭区域};$$

$$(4) \iint_D (x^2 + x^4 y) dx dy, \text{ 其中 } D \text{ 为闭区域 } 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4;$$

$$(5) \iint_D y dx dy, \text{ 其中 } D \text{ 是由 } x \text{ 轴, } y \text{ 轴以及曲线 } \sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1 \text{ 所围成}$$

的区域;

(6)  $\iint_D \frac{x^2}{y^2} dx dy$ , 其中  $D$  由双纽线  $(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$  所围成;

(7)  $\iint_D \frac{x^2}{y^2} dx dy$ , 其中  $D$  由  $x=2, y=x, xy=1$  所围成;

(8)  $\iint_D \frac{x}{y+1} dx dy$ , 其中  $D$  由  $y=x^2+1, y=2x, x=0$  所围成;

(9)  $\iint_D ye^{xy} dx dy$ , 其中  $D$  由  $x=1, y=2, xy=1$  所围成;

(10)  $\iint_D \frac{1}{\sqrt{2a-x}} dx dy, (a>0)$ , 其中  $D$  是以  $(a,a)$  为圆心,  $a$  为半径

的圆周与坐标轴相切而得的较短圆弧与坐标轴所围成;

(11)  $\iint_D (|x|+|y|) dx dy$ , 其中  $D = \{(x,y) | |x|+|y| \leq 1\}$ .

10. 设  $f(x)$  在闭区间  $[a,b]$  上连续, 试证明

(1)  $\int_a^b dy \int_a^y (y-x)^n f(x) dx = \frac{1}{n+1} \int_a^b f(x)(b-x)^{n+1} dx$ ;

(2)  $\int_a^b f(x) dx \int_a^b \frac{1}{f(x)} dx \geq (b-a)^2$ , 其中  $f(x) > 0$ ;

(3)  $\int_a^b dy \int_y^b f(x)f(y) dx = \frac{1}{2} \left[ \int_a^b f(x) dx \right]^2$ ;

(4)  $\iint_{x^2+y^2 \leq R^2} \frac{af(x)+bf(y)}{f(y)+f(x)} dx dy = \frac{a+b}{2} \pi R^2$ .

11. 设  $f(x,y)$  连续, 证明Dirichlet公式

$$\int_a^b dx \int_a^x f(x,y) dy = \int_a^b dy \int_y^b f(x,y) dx.$$

12. 画出  $D$  的图形, 并将  $\iint_D f(x,y)dxdy$  化为极坐标系下的累次积分:

$$(1) D = \{(x,y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\};$$

$$(2) D = \{(x,y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2x\};$$

$$(3) D = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leq 2x, x^2 + y^2 \leq 2y\};$$

$$(4) D = \{(x,y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x\};$$

$$(5) D = \left\{ (x,y) \left| -a \leq x \leq a, \frac{x^2}{a} \leq y \leq a, (a > 0) \right. \right\}.$$

13. 把下面的二重积分化为极坐标下的累次积分, 并写出两种不同的累次积分顺序:

$$(1) \int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy;$$

$$(2) \int_0^2 dx \int_x^{\sqrt{3}x} f(x,y)dy.$$

14. 作适当的变换, 化二重积分为一元定积分:

$$(1) \iint_D f(\sqrt{x^2 + y^2})dxdy, \text{ 其中 } D: x^2 + y^2 \leq 1;$$

$$(2) \iint_D f\left(\frac{y}{x}\right)dxdy, \text{ 其中 } D: x^2 + y^2 \leq x;$$

$$(3) \iint_D f(x+y)dxdy, \text{ 其中 } D: |x| + |y| \leq 1;$$

$$(4) \iint_D f(xy)dxdy, \text{ 其中 } D \text{ 由曲线 } xy=1, xy=2, y=x, y=4x \text{ 所围成的第一象限部分.}$$

### 习题 10.3

15. 利用适当的变量替换计算下列二重积分:

(1)  $\iint_D y dx dy$ , 其中  $D$  是由心形线  $r = 2(1 + \cos \theta)$  所围且落在  $r = 2$  外部的有界闭区域;

(2)  $\iint_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}} dx dy$ , 其中  $D$  是闭的单位圆盘  $x^2 + y^2 \leq 1$ ;

(3)  $\iint_D (x+y) dx dy$ , 其中  $D$  是闭区域  $x^2 + y^2 \leq x + y + 1$ ;

(4)  $\iint_D (\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}) dx dy$ , 其中  $D$  是单位圆盘  $x^2 + y^2 \leq 1$ ;

(5)  $\iint_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy$ , 其中  $D$  是闭区域  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, (a, b > 0)$ ;

(6)  $\iint_D dx dy$ , 其中  $D$  是由  $\sqrt[4]{\frac{x}{a}} + \sqrt[4]{\frac{y}{b}} = 1, x=0, y=0$  所围成;

(7)  $\iint_D e^{x+y} dx dy$ , 其中  $D$  是正方形  $|x| + |y| \leq 1$ ;

(8)  $\iint_D e^{\frac{y}{x+y}} dx dy$ , 其中  $D$  是由  $x=0, y=0, x+y=1$  所围的有界闭区域;

(9)  $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$ , 其中  $D$  是由

$x^2 - y^2 = 1, x^2 - y^2 = 9, xy = 2, xy = 4$  所围的有界闭区域;

(10)  $\iint_D dx dy$ , 其中  $D$  是

$(a_1x + b_1y + c_1)^2 + (a_2x + b_2y + c_2)^2 = 1, (a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0)$  所围.

## 习题 10.4

16. 利用累次积分计算三重积分:

$$(1) \int_{-1}^1 \int_0^2 \int_0^1 (x^2 + y^2 + z^2) dx dz dy;$$

$$(2) \int_2^3 \int_0^\pi \int_0^1 zx \sin(xy) dz dy dx;$$

$$(3) \iiint_V \frac{dx dy dz}{(x+y+z)^2},$$

其中  $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2, 1 \leq z \leq 2\}$ .

$$(4) \iiint_V x^2 y^4 \sin z dx dy dz, \text{ 其中 } V \text{ 为单位球体 } x^2 + y^2 + z^2 \leq 1;$$

$$(5) \iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz, \text{ 其中 } V \text{ 是由}$$

$z = 16(x^2 + y^2), z = 4(x^2 + y^2), z = 64$  所围成的有界闭区域;

$$(6) \iiint_V \cos x \cos y \cos z dx dy dz, \text{ 其中 } V \text{ 为闭区域 } |x| + |y| + |z| \leq 1.$$

17. 交换下列三重积分的累次顺序, 要求先积  $x$ , 再积  $y$ , 最后积  $z$ :

$$(1) \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{x+y} f(x, y, z) dz;$$

$$(2) \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x, y, z) dz.$$

18. 以一重积分代替下列三重积分:

$$(1) \int_0^x d\xi \int_0^\xi d\eta \int_0^\eta f(\zeta) d\zeta;$$

$$(2) \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{x+y} f(z) dz;$$

$$(3) \iiint_V f(z) dV, \text{ 其中 } V \text{ 为单位球体 } x^2 + y^2 + z^2 \leq 1.$$

19. 化  $\mathbb{R}^3$  中集合  $V$  的直角坐标表示为柱坐标表示:

- (1)  $V$  由柱面  $x^2 + y^2 = 1$  及平面  $z = 1, z = 0, x = 0, y = 0$  所围成的第一卦限部分;
- (2)  $V$  由  $x^2 + y^2 = 2z, z = 2$  所围成;
- (3)  $V$  由柱面  $x^2 + y^2 = 2ax$ , 旋转抛物面  $x^2 + y^2 = az, (a > 0)$  及平面  $z = 0$  所围成;
- (4)  $V$  由  $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$  及  $x^2 + y^2 = z^2, (a > 0)$  所围成的上面的一块.

20. 化  $\mathbb{R}^3$  中集合  $V$  的直角坐标表示为球坐标表示:

- (1)  $V$  由  $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$  及  $x^2 + y^2 = z^2, (a > 0)$  所围成的上面的一块;
- (2)  $V$  由  $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2 - z^2)$  与坐标平面所围成的第一卦限部分;
- (3)  $V$  由  $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$  与  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2az, (a > 0)$  的公共部分;
- (4)  $V$  由  $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3z, (a > 0)$  所围成;
- (5)  $V$  由  $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = 3xyz$  及坐标平面所围成的第一卦限部分.

21. 计算下列变换的雅可比 (Jacobi) 行列式:

- (1)  $\mathbb{R}^2$  中的线性变换:  $x = a_{11}\xi + a_{12}\eta, y = a_{21}\xi + a_{22}\eta$ ;
- (2) 广义极坐标变换  $x = ar \cos \theta, y = br \sin \theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi, r \geq 0$ ;
- (3) 广义柱坐标变换

$$x = ar \cos \theta, y = br \sin \theta, z = cz', 0 \leq \theta \leq 2\pi, r \geq 0, -\infty < z' < \infty;$$

(4) 广义球坐标变换

$$x = ar \sin \varphi \cos \theta, y = br \sin \varphi \sin \theta, z = cr \cos \varphi,$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \pi, r \geq 0;$$

(5) 作适当的变换, 将正方体

$$\{(u, v, \omega) \in \mathbb{R}^3 | 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1, 0 \leq \omega \leq 1\} \text{ 变为由}$$

$x + y + z = 1, x = 0, y = 0, z = 0$  所围成的四面体, 并计算其雅可比行列式;

(6) 作适当的变换, 将椭球体

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} \leq 1, (a, b, c > 0) \text{ 变为单位球体, 并}$$

计算其雅可比行列式.

22. 计算三重积分:

$$(1) \iiint_V \frac{dx dy dz}{(x+y+z+1)^3}, \text{ 其中 } V \text{ 是四面体: } x, y, z \geq 0, x+y+z \leq 1;$$

$$(2) \iiint_V xy^2 z^3 dx dy dz, \text{ 其中 } V \text{ 是由曲面 } z = xy, y = x, x = 1, z = 0 \text{ 所围成};$$

$$(3) \iiint_V y \cos(x+z) dx dy dz, \text{ 其中 } V \text{ 是由曲面 } y = \sqrt{x} \text{ 以及平面}$$

$$y = 0, z = 0, x + z = \frac{\pi}{2} \text{ 所围成};$$

$$(4) \iiint_V \frac{z \ln(x^2 + y^2 + z^2 + 1)}{x^2 + y^2 + z^2 + 1} dx dy dz, \text{ 其中 } V \text{ 是单位球体}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1;$$

$$(5) \iiint_V \frac{1}{x^2 + y^2 + 1} dx dy dz, \text{ 其中 } V \text{ 是由锥面 } x^2 + y^2 = z^2 \text{ 与平面 } z = 1 \text{ 所}$$

围;

(6)  $\iiint_V (2x+3y+6z)^2 dx dy dz$ , 其中  $V$  是椭球体  $4x^2+9y^2+36z^2 \leq 36$ ;

(7)  $\iiint_V (x^2+y^2) dx dy dz$ , 其中  $V$  是由

$z = \sqrt{A^2 - x^2 - y^2}$ ,  $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$  ( $A > a > 0$ ) 及平面  $z=0$  所围;

(8)  $\iiint_V z^2 dx dy dz$ , 其中  $V$  是由  $x^2+y^2+z^2 \leq 1$  与  $x^2+y^2+z^2 \leq 2z$  所围

成;

(9)  $\iiint_V xyz dx dy dz$ , 其中  $V$  是立体  $x^2 + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{3} \leq 1$  在第一卦限的部分;

(10)  $\iiint_V (x+y-z)(y+z-x)(x+z-y) dx dy dz$ , 其中

$$V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x+y-z \leq 1, 0 \leq y+z-x \leq 1, 0 \leq x+z-y \leq 1\}.$$



## 习题 10.5

23. 利用二重积分求出平面区域  $D$  的面积:

(1)  $D$  由曲线  $y^2 = 2px = p^2, y^2 = -2qx + q^2, (p, q > 0)$  所围成;

(2)  $D$  由  $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2), x^2 + y^2 \geq a^2$  所围成;

(3)  $D$  由曲线  $xy = 4, xy = 8, xy^3 = 5, xy^3 = 15$  所围成;

(4)  $D$  由  $(\frac{x}{a} + \frac{y}{b})^3 = xy, (a, b > 0)$  所围成 (第一象限) .

24. 求集合  $V$  的体积:

(1)  $V$  由曲面  $z^2 = x^2 + \frac{y^2}{4}$  与  $2z = x^2 + \frac{y^2}{4}$  所围;

(2)  $V$  由曲面  $z = xy, x + y + z = 1, z = 0$  所围;

(3)  $V$  由旋转抛物面  $x = \sqrt{y - z^2}$  和  $\sqrt{y} = 2x$  及平面  $y = 1$  所围;

(4)  $V$  由曲面  $x^2 + y^2 = az, z = 2a - \sqrt{x^2 + y^2}, (a > 0)$  及平面  $z = 0$  所围.

25. 求所给图形的形心:

(1) 由直线  $y = 0, y = a - x, x = 0$  所围;

(2) 四分之一圆  $x^2 + y^2 \leq a^2, x \geq 0, y \geq 0$ ;

(3) 抛物面  $z = 1 - x^2 - y^2$  与平面  $z = 0$  所围;

(4) 抛物柱面  $x = y^2$  和平面  $x = z, z = 0, x = 1$  所围.

26. 求由摆线  $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$  的一拱和  $x$  轴所围均质薄片关

于  $x$  轴的转动惯量.

27. 在锥面  $z \tan \alpha = \sqrt{x^2 + y^2}$  ( $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ) 之外, 球面

$x^2 + y^2 + z^2 \leq 2Rz$  ( $R > 0$ ) 之内的立体, 其中任一点体密度与该点到  $z$  轴的距离平方成反比 (比例系数为1), 求该立体关于  $z$  轴的转动惯量.

28. 证明等式:  $I_l = I_{l_0} + Md^2$ , 其中  $I_l$  为物体对某轴  $l$  的转动惯量,  $I_{l_0}$  为对平行于  $l$  并通过物体质心的轴  $l_0$  的转动惯量,  $d$  为此两轴之间的距离,  $M$  为物体的质量.

29. 求密度为1的均匀圆柱体  $x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq h$  对单位质量质点

$P(0,0,a)$  的引力.

30. 求密度为  $\rho_0$  的均匀球锥体 (即球面和锥面所围立体) 对位于其顶点的单位质量质点的引力, 其中球半径为  $R$ , 轴截面的扇形的角为  $2\alpha$ .

# 第11章 曲线积分

本章将主要讨论空间  $\mathbb{R}^3$  中一条曲线上的积分，称之为曲线积分，它是一元函数在闭区间上定积分的直接推广.

## 11.1 第一类曲线积分（弧长积分）

空间  $\mathbb{R}^3$  中的一条曲线  $L$ ，一般由两种表达方式，其一是用参数方程表示；其二是将曲线看成两张曲面的交线. 先考虑曲线的参数方程

$$L: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), t \in [a, b]. \\ z = z(t) \end{cases}$$

其中  $x(t), y(t), z(t)$  是区间  $[a, b]$  上的一元函数. 特别地，当  $z(t) \equiv 0$  时， $L$  表示  $xOy$  平面中的一条曲线，该平面曲线在前面定积分的应用部分已有相关的讨论.

曲线是有方向的，点  $(x(a), y(a), z(a))$  和点  $(x(b), y(b), z(b))$  分别叫做曲线  $L$  的**起点**和**终点**，当起点和终点重合时，称  $L$  为**闭曲线**.

**定义11.1.1** 定义在  $[a, b]$  上的曲线  $L = \{(x(t), y(t), z(t)) \mid t \in [a, b]\}$ ，称曲线  $L$

- (1) 是  $\mathbb{R}^3$  中的**连续曲线**，如果函数  $x(t), y(t), z(t)$  在  $[a, b]$  上连续；
- (2) 是  $\mathbb{R}^3$  中的**光滑曲线**，如果函数  $x(t), y(t), z(t)$  在  $[a, b]$  上连续，在  $(a, b)$  内可导；
- (3) 是  $\mathbb{R}^3$  中的**分段光滑曲线**，如果  $L$  是连续曲线并且  $L$  可以分割为有限多条光滑曲线.

**定义11.1.2** 若曲线  $L = \{(x(t), y(t), z(t)) \mid t \in [a, b]\}$  是  $\mathbb{R}^3$  上的光滑曲线，则

此曲线的弧长微分公式为

$$ds = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt.$$

特别地, 如果曲线是  $xOy$  平面内的曲线, 根据曲线的直角坐标表示、极坐标表示和参数方程表示, 其弧长微分公式分别为:

$$ds = \begin{cases} \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx. & \text{其中 } y = y(x), x \in [x_1, x_2]; \\ \sqrt{(r(\theta))^2 + (r'(\theta))^2} d\theta. & \text{其中 } x = r(\theta)\cos\theta, y = r(\theta)\sin\theta, \theta \in [\theta_1, \theta_2]; \\ \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt. & \text{其中 } x = x(t), y = y(t), t \in [t_1, t_2]; \end{cases}$$

类似于二重积分和三重积分, 根据黎曼积分的思想, 可以定义曲线上的弧长积分.

**定义11.1.3** 设  $f(x, y, z)$  是定义在空间曲线  $L$  上的有界函数, 将  $L$  分成任意  $n$  个小段  $\Delta s_1, \dots, \Delta s_n$ , 记  $\lambda$  为各小段曲线  $\Delta s_i$  中的最长值 ( $\Delta s_i$  也表示其长度). 如果存在常数  $I \in \mathbb{R}$ , 对任意的  $\varepsilon > 0$ , 总存在  $\delta > 0$ , 使得对于任何满足  $\lambda \leq \delta$  的分割和任意选取的点集  $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in \Delta s_i$ , 都成立

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta s_i - I \right| \leq \varepsilon$$

则称  $f$  在曲线  $L$  上可积, 称  $I$  为  $f$  在  $L$  上的**弧长积分**, 弧长积分亦称**第一类曲线积分**, 记作

$$\int_L f(x, y, z) ds = I = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta s_i.$$

其中  $f(x, y, z)$  叫做**被积函数**,  $ds$  叫做**弧长微分**,  $s$  叫做**积分变量**.

如果  $f(x, y, z) \geq 0$ , 可以把  $f(x, y, z)$  看作是曲线  $L$  上的密度函数, 那么  $\int_L f(x, y, z) ds$  就表示曲线  $L$  的质量. 特别地, 当被积函数  $f(x, y, z) \equiv 1$  时, 第一类曲线积分的值就等于曲线的长度 (弧长).

第一类曲线积分的计算思路, 是通过换元法把第一类曲线积分化成定积分进行计算. 选择参数进行积分时, 参数的范围必须从小到大进行积

分, 这是因为在弧长微分公式中, 各种参数的微分如  $dt, dx, d\theta$  等都是直接从根号中提出而未加绝对值, 已经默认都是正的了.

由弧长积分的定义容易证明下面一些性质.

**【性质1】:** 如果曲线  $L$  有两个等价的参数表示, 则由这两个参数表示得到的弧长积分是相等的, 也就是说, 弧长积分与参数表示的选取无关.

**【性质2】:** 弧长积分的值与曲线的走向 (从端点  $A$  到端点  $B$ , 还是从端点  $B$  到端点  $A$ ) 无关, 参数范围都是从小到大进行积分.

**【性质3】:** (线性性) 设  $f, g$  为  $L$  上的数量场(函数),  $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ , 则

$$\int_L (k_1 f + k_2 g) ds = k_1 \int_L f ds + k_2 \int_L g ds.$$

**【性质4】:** (有限可加性) 设  $L$  由分段光滑的子曲线  $L_1, \dots, L_n$  首尾相连而成, 则

$$\int_L f ds = \int_{L_1} f ds + \dots + \int_{L_n} f ds.$$

**【性质5】:** (非负性) 若  $f$  在  $L$  上非负, 则  $\int_L f ds \geq 0$ .

由此性质不难得到弧长积分的绝对值不等式, 即

假设  $f(x, y, z)$  在分段光滑曲线  $L$  上可积, 则

$$\left| \int_L f ds \right| \leq \int_L |f| ds.$$

**【性质6】:** 若  $L$  是  $xOy$  平面上的分段光滑曲线, 且对于  $\forall (x, y) \in L$ , 有  $f(x, y) > 0$ , 则  $\int_L f(x, y) ds$  表示空间柱面

$$S = \{(x, y, z) | (x, y) \in L, 0 \leq z \leq f(x, y)\}$$

的面积, 如图11.1.1所示.

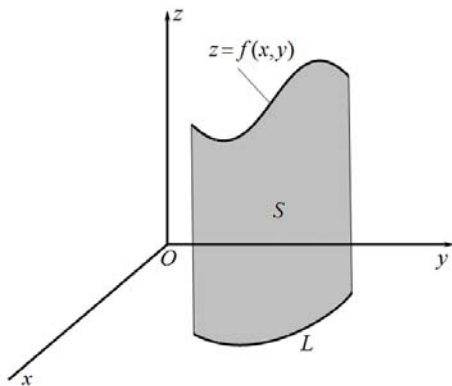


图11.1.1

**例11.1.4** 计算  $\int_L 2x ds$ ,  $L$  是由子曲线  $L_1, L_2, L_3$  组成, 其中  $L_1$  是从  $(0, 0)$  到  $(1, 1)$  的抛物线  $y = x^2$  段,  $L_2$  是从  $(1, 1)$  到  $(1, 2)$  的直线段,  $L_3$  是从  $(1, 2)$  到  $(0, 0)$  的直线段.

**解** 由弧长积分的性质知:  $\int_L 2x ds = \int_{L_1} 2x ds + \int_{L_2} 2x ds + \int_{L_3} 2x ds$ .

曲线  $L_1$  是函数  $y = x^2, x \in [0, 1]$  的图像, 用自然参数  $x$  即可

$$x = x; y = x^2, 0 \leq x \leq 1.$$

此时弧长微分公式为  $ds = \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx = \sqrt{1 + 4x^2} dx$

所以,  $\int_{L_1} 2x ds = \int_0^1 2x \sqrt{1 + 4x^2} dx$

$$= \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2} dx^2$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} (1 + 4x^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{1}{6} (5\sqrt{5} - 1).$$

直线段  $L_2$  平行于  $y$  轴, 因此可以选择  $y$  作为参数, 其参数表示为

$$x = 1, y = y, 1 \leq y \leq 2.$$

所以  $\int_{L_2} 2x ds = \int_1^2 2\sqrt{1 + 0^2} dy = 2$ .

直线段  $L_3$  可以选择  $x$  作为参数, 其参数表示为  $x = x, y = 2x, 0 \leq x \leq 1$ .

所以  $\int_{L_3} 2x ds = \int_1^2 2\sqrt{1+2^2} dx = \sqrt{5}.$

因此  $\int_L 2x ds = \int_{L_1} 2x ds + \int_{L_2} 2x ds + \int_{L_3} 2x ds = \frac{1}{6}(5\sqrt{5}-1) + 2 + \sqrt{5}.$

注：这个例题中有两个值得注意的地方，一是  $L_2$  的参数化表示；二是  $L_3$  虽然是从  $(1, 2)$  到  $(0, 0)$ ，但积分时  $x$  还是从 0 到 1 进行积分而非 1 到 0，这就是前面的性质 2，第一类曲线积分和曲线走向是无关的，参数范围都是从小到大进行积分。

**例 11.1.5** 设弹簧的形状有如下参数表示： $x = a \cos t; y = a \sin t, z = bt.$

其中  $a, b$  都是正的常数，如果弹簧在点  $(x, y, z)$  处的密度为

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

求弹簧在  $0 \leq t \leq 2\pi$  段的质量.

**解** 根据弧长积分的意义，弹簧质量

$$\begin{aligned} m &= \int_L f(x, y, z) ds \\ &= \int_0^{2\pi} (a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t + b^2 t^2) \sqrt{(-a \sin t)^2 + (a \cos t)^2 + b^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} (a^2 + b^2 t^2) \sqrt{a^2 + b^2} dt \\ &= (2\pi a^2 + \frac{8}{3} \pi^3 b^2) \sqrt{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

通过这个例题知，学习了第一类曲线积分后，不仅可以计算曲线的质量，还可以求曲线的质心，形心（均匀密度时），转动惯量和引力等物理量.

**例 11.1.6** 计算  $\int_L (xy + yz + zx) ds$ ，其中  $L$  是球面  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 (a > 0)$  和平面  $x + y + z = 0$  相交而成的圆周.

**解** 因为  $xy + yz + zx = \frac{1}{2}[(x + y + z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2)] = -\frac{1}{2}a^2$ ，所以

$$\int_L (xy + yz + zx) ds = \int_L (-\frac{1}{2}a^2) ds = -\frac{1}{2}a^2 \int_L ds = -\pi a^3.$$

**【注】**：这个例题说明，当空间曲线是以两曲面交线形式给出时，往往

可以通过曲线的方程或者利用对称性等来简化曲线积分的计算.

**例11.1.7** 求圆柱面  $x^2 + y^2 = ax$  含在球面  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  ( $a > 0$ ) 内部的面积.

**解** 首先根据对称性, 所求面积为含在第一卦限内面积的4倍, 所以下面计算第一卦限内面积即可.

此时的积分曲线  $L$  为  $xOy$  平面内  $x^2 + y^2 = ax$  ( $a > 0$ ) 的上半圆周.

**【方法一】:** (参数法) 令  $x = \frac{a}{2}(1 + \cos t)$ ,  $y = \frac{a}{2}\sin t$  ( $0 \leq t \leq \pi$ ), 此时

$ds = \frac{a}{2}dt$ , 则

$$S = \int_L \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} ds = \frac{a^2}{2} \int_0^\pi \sqrt{\frac{1 - \cos t}{2}} dt = \frac{a^2}{2} \int_0^\pi \sin \frac{t}{2} dt = a^2$$

**【方法二】:** (极坐标法) 令  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ , 曲线方程为  $r = a \cos \theta$ ,

$$S = \int_L \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - r^2} \sqrt{(r')^2 + r^2} d\theta = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta = a^2.$$

所以, 最后所求面积为  $4a^2$ .

**【注】:** 该例题表明, 第一类曲线积分, 当被积函数为正, 积分曲线为  $xOy$  上的平面曲线时, 此时第一类曲线积分的几何意义就是空间柱面的面积, 这点和定积分的几何意义类似, 是定积分几何意义的一个推广.

**例11.1.8** 计算摆线  $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ) 绕  $x$  轴旋转一周所得旋

转曲面的表面积.

**解** 根据题意以及第一类曲线积分的定义, 旋转曲面面积应为

$$S = \int_L 2\pi |y| ds.$$

所以

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_L y ds \\ &= 2\pi \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) \cdot \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= 2\pi \cdot 4a^2 \int_0^{2\pi} \sin^3 \frac{t}{2} dt \\
&= 14\pi a^2 \int_{-1}^1 (1-u^2) du = \frac{64}{3} \pi a^2.
\end{aligned}$$

在定积分应用中, 我们曾经研究过旋转曲面的表面积, 但本例题利用第一类曲线积分, 也解决了旋转曲面的面积问题.

**例11.1.9** 计算  $\int_L x^2 ds$ , 其中  $L$  为球面  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  与平面  $x + y + z = 0$  的交线.

**解 【方法一】:** 对曲线上任意一点  $P(x, y, z)$ , 易知  $Q(y, x, z)$  和  $R(z, x, y)$  也都在曲线上, 当  $P$  沿曲线一周时,  $Q, R$  也都沿曲线一周, 因此

$$\int_L x^2 ds = \int_L y^2 ds = \int_L z^2 ds.$$

所以

$$\int_L x^2 ds = \frac{1}{3} \int_L (x^2 + y^2 + z^2) ds = \frac{a^2}{3} \int_L ds = \frac{2}{3} \pi a^3$$

**【方法二】:** 不使用对称性, 通过参数化进行求解.

由两个曲面方程消去  $z$  得,  $x^2 + xy + y^2 = a^2/2$ , 配方得

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2 + \left(\frac{x}{2} + y\right)^2 = \frac{a^2}{2},$$

因此可以进行如下参数化, 令  $\frac{\sqrt{3}}{2}x = \frac{a}{\sqrt{2}}\cos t, \frac{x}{2} + y = \frac{a}{\sqrt{2}}\sin t$ ,

因此, 曲线  $L$  的参数化方程为

$$x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a\cos t, \quad y = \frac{a}{\sqrt{2}}\sin t - \frac{a}{\sqrt{6}}\cos t, \quad z = -\frac{a}{\sqrt{6}}\cos t - \frac{a}{\sqrt{2}}\sin t. \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

故

$$ds = a \sqrt{\frac{2}{3}\sin^2 t + \left(\frac{\cos t}{\sqrt{2}} + \frac{\sin t}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\frac{\sin t}{\sqrt{6}} - \frac{\cos t}{\sqrt{2}}\right)^2} dt = a dt$$

所以

$$\int_L x^2 ds = \int_0^{2\pi} \frac{2}{3} a^2 \cos^2 t \cdot a dt = \frac{2}{3} a^3 \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \frac{2}{3} \pi a^3.$$

**【方法三】：** 也可以选  $x$  作为参数，于是有下列关系式：

由于  $y + z = -x$ ,  $y^2 + z^2 = a^2 - x^2$ , 则  $2yz = 2x^2 - a^2$ .

对上述隐函数组求导有

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-z}{z-y}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{x-y}{y-z}.$$

因此，弧长微分公式为

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} dx = \sqrt{1 + \frac{(x-z)^2}{(z-y)^2} + \frac{(x-y)^2}{(y-z)^2}} dx \\ &= \sqrt{1 + \frac{2x^2 - 2x(y+z) + (y^2 + z^2)}{(y^2 + z^2) - 2yz}} dx \\ &= \sqrt{\frac{3a^2}{2a^2 - 3x^2}} dx \end{aligned}$$

两个曲面方程消去  $z$  得曲线在  $xOy$  平面的投影曲线为： $x^2 + xy + y^2 = \frac{a^2}{2}$ ,

配方得  $(\frac{\sqrt{3}}{2}x)^2 + (\frac{x}{2} + y)^2 = \frac{a^2}{2}$ , 令  $\frac{x}{2} + y = 0$  可以计算出  $x$  的取值范围是

$$-\frac{\sqrt{6}}{3}a \leq x \leq \frac{\sqrt{6}}{3}a, \text{ 因此}$$

$$\begin{aligned} \int_L x^2 dx &= 2 \int_{-\frac{\sqrt{6}}{3}a}^{\frac{\sqrt{6}}{3}a} x^2 \sqrt{\frac{3a^2}{2a^2 - 3x^2}} dx = 4a \int_0^{\frac{\sqrt{6}}{3}a} \frac{x^2}{\sqrt{(\frac{\sqrt{6}}{3}a)^2 - x^2}} dx \\ &= 4a \left( -\frac{x}{2} \sqrt{(\frac{\sqrt{6}}{3}a)^2 - x^2} + \frac{(\frac{\sqrt{6}}{3}a)^2}{2} \arcsin \frac{x}{\frac{\sqrt{6}}{3}a} \right) \Bigg|_0^{\frac{\sqrt{6}}{3}a} \\ &= \frac{2}{3} \pi a^3. \end{aligned}$$

在方法三中, 积分第一个等号的2倍是由于曲线  $L$  是闭曲线, 沿曲线积一圈相当于沿曲线在  $x$  轴的投影上来回积分了两次.

**例11.1.10** 计算  $\oint_L \frac{\partial f}{\partial n} ds$ , 其中  $L$  为  $xOy$  平面上的椭圆  $2x^2 + y^2 = 1$ ,  $n$  为  $L$  的外法线方向,  $f = (x-2)^2 + y^2$ . (注意: 这里  $\oint$  表示封闭曲线积分).

**解** 由椭圆方程直接可以求得法向量  $\mathbf{n} = (F_x, F_y) = (4x, 2y)$ , 其外法向量  $\mathbf{n} = (2x, y)$ , 所以被积函数为

$$\frac{\partial f}{\partial n} = (2(x-2), 2y) \cdot \left( \frac{2x}{\sqrt{4x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{4x^2 + y^2}} \right) = \frac{4x(x-2) + 2y^2}{\sqrt{4x^2 + y^2}},$$

参数化椭圆曲线得:  $x = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t$ ,  $y = \sin t$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ) 则弧长微分公式为,

$$ds = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2 \cos^2 t + \sin^2 t} dt$$

因为  $\sqrt{4x^2 + y^2} = \sqrt{2 \cos^2 t + \sin^2 t}$ , 所以

$$\begin{aligned} \oint_L \frac{\partial f}{\partial n} ds &= \oint_L \frac{4x(x-2) + 2y^2}{\sqrt{4x^2 + y^2}} ds \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \frac{4}{\sqrt{2}} \cos t \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t - 2 \right) + 2 \sin^2 t \right] dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (2 \cos^2 t - 4\sqrt{2} \cos t + 2 \sin^2 t) dt \\ &= 2\sqrt{2}\pi. \end{aligned}$$

## 11.2 第二类曲线积分

假设一质点在力场  $F = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$  的作用下沿着  $\mathbb{R}^3$  中的曲线  $L$  移动, 为了计算变力  $F$  沿着曲线  $L$  从一端  $A$  到另一端  $B$  所做的功, 把曲线  $L$  分割成  $n$  小段, 当分割越来越细时, 每一小段上的力就可以用常力来近似, 又因为每一小段弧的切向量为  $ds = (dx, dy, dz)$ , 注意,  $ds$  表示**有向弧元**, 它不同于弧长微分  $ds$ , 区别是前者是矢量, 后者是标量, 前者的大小为后者. 因此, 变力  $F$  在一小段曲线上做的功为

$$F \cdot ds = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz,$$

所以, 要计算力场沿整条曲线  $L$  做的功只要沿着曲线进行积分即可.

**定义11.2.1** 设  $L$  为光滑或者分段光滑的空间有向连续曲线,

$P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$  为定义在  $L$  上的有界函数, 则称

$$\int_{L_{AB}} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

为函数  $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$  沿曲线  $L$  从  $A$  到  $B$  的**第二类曲线积分**, 也叫**对坐标的曲线积分**, 或称为**关于弧长元素投影的积分**.

注意:

1. 上述定义的第二类曲线积分, 事实上是由三个独立的曲线积分组合而成:  $\int_{L_{AB}} P(x, y, z)dx, \int_{L_{AB}} Q(x, y, z)dy, \int_{L_{AB}} R(x, y, z)dz$ , 这三个曲线积分分别叫做对坐标  $x$  的曲线积分, 对坐标  $y$  的曲线积分, 和对坐标  $z$  的曲线积分, 它们都是第二类曲线积分, 有各自独立的意义, 并非加在一起才叫第二类曲线积分;

2. 弧长投影积分与方向性. 和第一类曲线积分不同的是, 积分变量不再是  $ds$  而是  $dx$  或者  $dy, dz$ , 他们之间的关系为:  $dx$  (或者  $dy, dz$ ) 是

弧长微元  $ds$  在  $x$  (或者  $y, z$ ) 轴上的投影, 所以也叫弧长元素投影的积

分. 弧长微元  $ds$  表示长度是大于零的, 但是其在坐标轴上的投影  $dx$  (或  $dy, dz$ ) 是有正有负的, 这主要依赖于曲线的切线方向, 而切线方向是由曲线走向决定的, 因此如果改变曲线方向, 那么第二类曲线积分会相差一个负号.

3. 对于曲线  $L$  为闭曲线, 可以用

$$\oint_L P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

表示沿闭曲线的第二类曲线积分, 但应注明闭曲线走向, 如逆时针等.

4. 如果曲线  $L$  是坐标平面  $xOy$  上的平面曲线时, 则其第二类曲线积分可表示为:  $\int_{L_{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ .

5. 容易证明, 第二类曲线积分还有和第一类曲线积分类似的性质: 参数选择无关性; 线性性; 分段相加性等.

## 一、第二类曲线积分的计算

第二类曲线积分的计算与第一类曲线积分类似, 也是转化为定积分进行计算. 和第一类曲线积分不同的是, 通常第二类曲线积分的积分变量  $x$  或者  $y, z$  就可以作为最后定积分的积分变量, 这种方法称为**直接法**; 有时直接计算较困难或者想把几个第二类曲线积分放一起同时计算时, 会选择参数  $t$  进行积分计算, 这种方法叫**换元法**. (当然, 还有一些其他计算方法例如转成第一类曲线积分计算、利用格林公式计算、例如斯托克斯公式计算等, 将在后面介绍.)

若  $L$  为  $xOy$  平面曲线  $y = y(x)$  ( $a \leq x \leq b$ ),  $L$  的起点为  $A$ , 终点为  $B$ , 若端点  $A$ 、 $B$  对应的参数  $x$  分别为  $a$ 、 $b$ , 则有

$$\oint_{L_{AB}} f(x, y)dx = \int_a^b f(x, y(x))dx = -\int_{L_{BA}} f(x, y)dx.$$

若  $L$  为  $xOy$  平面曲线  $x = x(y)$  ( $c \leq y \leq d$ ),  $L$  的起点为  $A$ , 终点为  $B$ , 若端点  $A$ 、 $B$  对应的参数  $y$  分别为  $c$ 、 $d$ , 则有

$$\int_{L_{AB}} f(x, y) dy = \int_c^d f(x(y), y) dy = - \int_{L_{BA}} f(x, y) dy.$$

若  $L$  为空间曲线有参数表达  $x = x(t), y = y(t), z = z(t) (\alpha \leq t \leq \beta)$ ,  $L$

的起点为  $A$ , 终点为  $B$ , 若端点  $A$ 、 $B$  对应的参数分别为  $\alpha$ 、 $\beta$ , 则有

$$\int_{L_{AB}} f(x, y, z) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) x'(t) dt = - \int_{L_{BA}} f(x, y, z) dx,$$

$$\int_{L_{AB}} f(x, y, z) dy = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) y'(t) dt = - \int_{L_{BA}} f(x, y, z) dy,$$

$$\int_{L_{AB}} f(x, y, z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) z'(t) dt = - \int_{L_{BA}} f(x, y, z) dz.$$

**例11.2.2** 求  $\oint_L x dy$ , 其中曲线  $L$  是由坐标轴与直线  $x + y = 1$  围成的逆时针方向的三角形闭曲线.

**解** 设  $A(0,0), B(1,0), C(0,1)$ , 因此

$$\oint_{L_{AB}} x dy = \int_0^0 x dy = 0;$$

$$\oint_{L_{BC}} x dy = \int_0^1 (1-y) dy = \frac{1}{2};$$

$$\oint_{L_{CA}} x dy = \int_1^0 0 dy = 0.$$

所以

$$\oint_L x dy = 0 + \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}.$$

**例11.2.3** 计算第二类曲线积分  $\oint_L \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2 + y^2}$ , 其中  $L$  为逆时针

方向的圆周  $x^2 + y^2 = a^2$ .

**解 【方法一】**: 取曲线  $L$  的参数表示  $x = a \cos t, y = a \sin t (0 \leq t \leq 2\pi)$ ,

则所求第二类曲线积分为

$$\text{原式} = \int_0^{2\pi} \frac{(a \cos t + a \sin t)(-a \sin t) dt - (a \cos t - a \sin t)(a \cos t) dt}{(a \cos t)^2 + (a \sin t)^2}$$

$$= - \int_0^{2\pi} dt$$

$$= -2\pi.$$

**【方法二】：** 因为曲线上的点满足  $x^2 + y^2 = a^2$ ，所以

$$\begin{aligned}\oint_L \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2 + y^2} &= \frac{1}{a^2} \oint_L (x+y)dx - (x-y)dy \\&= \frac{1}{a^2} \left[ \int_a^{-a} (x + \sqrt{a^2 - x^2})dx + \int_{-a}^a (x - \sqrt{a^2 - x^2})dx \right] \\&\quad - \frac{1}{a^2} \left[ \int_{-a}^a (\sqrt{a^2 - y^2} - y)dy + \int_a^{-a} (-\sqrt{a^2 - y^2} - y)dy \right] \\&= -\frac{4}{a^2} \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx \\&= -\frac{4}{a^2} \left[ \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} \right] \Big|_{-a}^a \\&= -2\pi.\end{aligned}$$

**例11.2.4** 计算  $\oint_L ydx + zdy + xdz$ ，其中曲线  $L$  是曲面  $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$

( $a > 0$ ) 与曲面  $x + z = a$  的交线，且从  $z$  轴正向看去为逆时针方向。

**解** 把  $z = a - x$  代入球面方程得  $2x^2 + y^2 = a^2$  是一个椭圆，故曲线  $L$  的参

数方程为  $x = \frac{a}{\sqrt{2}} \cos t, y = a \sin t, z = a(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t)$ . ( $0 \leq t \leq 2\pi$ )，于是

$$\begin{aligned}\oint_L ydx + zdy + xdz &= \int_0^{2\pi} \left[ -\frac{a^2}{\sqrt{2}} \sin^2 t + a^2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t\right) \cos t + \frac{a^2}{2} \sin t \cos t \right] dt \\&= \int_0^{2\pi} -\frac{a^2}{\sqrt{2}} dt = -\sqrt{2}\pi a^2.\end{aligned}$$

**【注】：** 本例有一些技巧，例如怎么从定义出发判断  $\oint_{L^+} xdz = 0$ ，而

$\oint_{L^+} ydx \neq 0$ ；还有就是对坐标系进行变换，使得现在空间中曲线所在平

面变成新坐标系的  $x'O'y'$  坐标平面，此时可以线性变换：

$$x' = \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}(z-a), y' = y, z' = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}(z-a),$$

这样, 原来的  $x+z=a$  变成了  $z'=0$ , 原空间曲线变成了  $x'^2+y'^2=a^2$  这个圆周.

关于第二类曲线积分的对称性问题, 尤其要注意的是当积分曲线是闭曲线时, 这时曲线在坐标轴上的投影要来回走两次, 而且两次方向是一正一反的, 因此, 要使积分为零, 函数关于投影轴应为“偶函数”而不是“奇函数”.

**例11.2.5** 例: 计算积分  $\oint_L x(z-y)dx + y(x-z)dy + z(y-x)dz$ , 其中  $L$  为球面  $x^2+y^2+z^2=R^2$  与  $x=0, y=0, z=0 (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$  的交线组成.

**解** 假设  $xOy$  平面上交线为  $L_1$  (设为逆时针方向), 那么根据轮换对称

$$\begin{aligned} \text{性得} \quad & \oint_L x(z-y)dx + y(x-z)dy + z(y-x)dz \\ &= 3 \int_{L_1} x(z-y)dx + y(x-z)dy + z(y-x)dz \\ &= 3 \int_{L_1} -xydx + yxdy \\ &= 3R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 t \cos t + \sin t \cos^2 t) dt \\ &= 2R^3. \end{aligned}$$

## 二、两种曲线积分的关系

虽然第一类曲线积分和第二类曲线积分来自不同的物理模型, 一个是质量问题, 一个是变力做功问题; 但是如果规定了曲线的方向后, 可以建立它们之间的联系.

假设  $L$  是从  $A$  点到  $B$  点的有向光滑曲线, 则有

$$ds = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) ds.$$

其中  $ds$  是有向弧元,  $ds$  是弧长微分,  $\alpha, \beta, \gamma$  是切向量 (切线方向为从  $A$



到  $B$ ) 与  $x, y, z$  三个坐标轴正方向之间的夹角,  $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$  为方向余弦. 因此, 第一类曲线积分和第二类曲线积分有如下的关系式

$$\begin{aligned} \int_{L_{AB}} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz \\ = \int_L (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) ds. \end{aligned}$$

当曲线方向改变时, 即从  $B$  到  $A$  时, 上式左边第二类曲线积分相差一个符号, 上式右边由于切线方向改变, 因此方向余弦全部相差一个符号, 这也导致了上式右边的被积函数改变了符号, 虽然第一类曲线积分和曲线方向无关, 但是如果被积函数改变了符号, 会导致最终结果改变符号, 因此上述等式对有向曲线都是成立的.

事实上, 由于计算第二类曲线相对简单, 所以很少转成第一类去计算, 因为转到第一类之后, 还是要选择参数转成定积分, 与其如此, 不如直接在第二类曲线积分上转成定积分计算即可.

### 11.3 格林定理

接下来要介绍的格林 (Geroge Green, 1793-1841) 定理, 它将建立起  $\mathbb{R}^2$  中平面闭区域  $D$  上的二重积分和  $D$  的边界曲线  $L$  上的第二类曲线积分之间的关系.

设区域  $D$  的边界是由一条或几条光滑曲线所围成. 边界曲线  $L$  的**正方向**规定为: 当沿边界行走时, 区域  $D$  总在左边, 如图11.3.2, 记为  $L^+$ ; 否则就是负方向, 记为  $L^-$ .

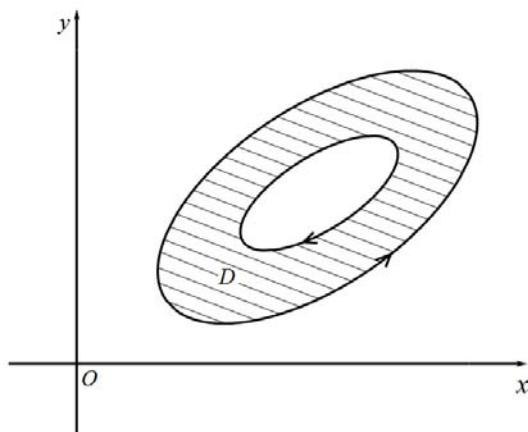


图11.3.2

**定理11.3.1 (格林定理)** 若二元函数  $P(x, y), Q(x, y)$  在有界闭区域  $D \subset \mathbb{R}^2$

上连续, 且有连续的一阶偏导数, 则 
$$\iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{L^+} P dx + Q dy,$$

这里  $L$  为区域  $D$  的边界曲线, 并取正方向.

**证明** 要证明格林定理, 只需要证明

$$\iint_D -\frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \oint_{L^+} P dx$$

和

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \oint_{L^+} Q dy.$$

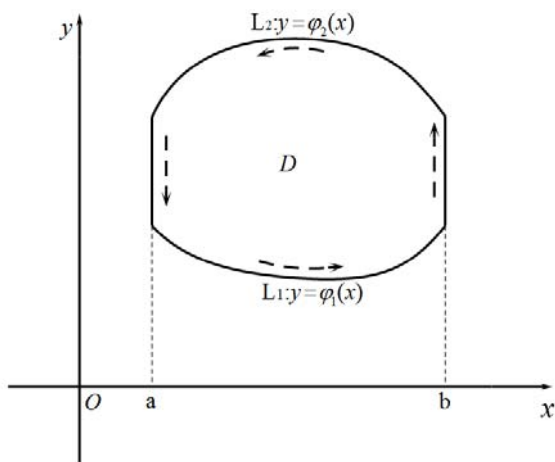


图11.3.3

(1) 首先考虑  $x$ -型区域这一特殊的情形

$$D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\},$$

其中  $\varphi_1, \varphi_2$  在  $[a, b]$  上连续,  $D$  的边界  $L$  一共有四部分:  $L_1$  是  $\varphi_1$  的图形,  $L_2$  是  $\varphi_2$  的图形, 和两条垂直于  $x$  轴的线段, 走向如图11.3.3所示.

用累次积分来计算得

$$\begin{aligned} \iint_D -\frac{\partial P}{\partial y} dx dy &= -\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_2(x)}^{\varphi_1(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy \\ &= \int_a^b (p(x, y) \Big|_{y=\varphi_2(x)}^{y=\varphi_1(x)}) dx \\ &= \int_a^b P(x, \varphi_1(x)) dx - \int_a^b P(x, \varphi_2(x)) dx. \end{aligned}$$

另一方面, 由于垂直于  $x$  轴的两条线段关于  $x$  的第二类曲线积分为零, 所以

$$\int_{L^+} P dx = \int_{L_1^+} P dx + \int_{L_2^+} P dx.$$

而

$$\int_{L_2^+} P dx = \int_a^b P(x, (\varphi_1(x))) dx ,$$

$$\int_{L_2^-} P dx = - \int_{L_2^+} P dx = - \int_a^b P(x, \varphi_2(x)) dx$$

所以

$$\int_{L^+} P dx = \int_a^b P(x, \varphi_1(x)) dx - \int_a^b P(x, \varphi_2(x)) dx = \iint_D - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy .$$

(2) 同样的方法可以证明对  $y$ -型区域

$$D = \{(x, y) | \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y), c \leq y \leq d\} .$$

等式  $\int_{L^+} Q dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dy$  依然成立.

因此, 如果闭区域  $D$  既是  $x$ -型区域, 又是  $y$ -型区域, 那么结合 (1) 和 (2), 两式相加即得

$$\iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{L^+} P dx + Q dy .$$

格林公式成立.

(3) 如果满足定理条件的闭区域  $D$  可以分割成有限多个同时满足 (1) 和 (2) 条件的子区域, 将上面的结果应用到每一个子区域上, 然后相加, 沿着子区域的公共边界的曲线积分相互抵消 (因为路径的走向相反), 所以沿着全部子区域边界的曲线积分和等于沿着区域  $D$  的边界积分, 所以格林定理对于这种情形也成立.

格林公式的给出有如下几点重要意义

- 从用途上, 格林公式的给出, 主要是用于计算第二类曲线积分, 把第二类曲线积分转化成二重积分进行计算; 但是注意, 格林公式的使用范围是  $\mathbb{R}^2$  内, 通常而言, 第二类曲线积分计算相对二重积分要容易得多, 因此没有必要使用格林公式, 当如下情形时, 可以考虑格林公式

- (1) 直接计算第二类曲线积分比较复杂或者求解定积分较困难.
- (2) 曲线是封闭曲线, 用格林公式转化为二重积分后的被积函数较简单; 或是曲线不封闭时, 但很容易补成闭曲线.

(3) 在一些极其特殊的情形, 可以把二重积分, 通过格林公式, 转化成第二类曲线积分进行计算 (详见后面例题).

• 从数学上讲, 格林公式是微积分基本公式在高维情形推广的第一个公式. 我们知道, 一元微积分中的微积分基本定理, 不但道出了被积函数和其原函数的关系, 还指出了积分区域和其边界的关系: “函数”在“区间”上积分等于其“原函数”在区间“边界”上取值 (有个负是因为方向性). 而格林公式正是微积分基本定理的高维推广之一: 此时的区域是二维平面区域, 边界是平面闭曲线.

• 关于格林公式的记忆, 先看被积表达式  $Pdx + Qdy$ , 因为  $dx$  这项没有了  $dy$ , 所以肯定  $P$  应该对  $y$  进行求偏导, 以构成  $\frac{\partial P}{\partial y} dy$ , 但此时的顺序变成了  $dydx$ , 而不是正常的顺序  $dxdy$ , 因此, 要加个“-”, 就成了

$-\frac{\partial P}{\partial y} dxdy$ , 同理,  $Q$  那项就成了  $\frac{\partial Q}{\partial x} dxdy$ , 这样可以帮助记忆格林公式

(这实际上是面元带有了方向性, 具体详情可以参见下一章的外微分概念的介绍).

• 特别的, 当  $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$  时, 此时沿边界闭曲线的积分为0, 将会在下面详细讨论.

**例11.3.2** 设  $L$  是以  $(0,0), (1,0), (1,1), (0,1)$  为顶点的正方形的边界曲线, 方向为逆时针, 求:  $\oint_L (5 - xy - y^2)dx - (2xy - x^2)dy$ .

**解** 令  $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ , 则由格林公式得

$$\begin{aligned} & \oint_L (5 - xy - y^2)dx - (2xy - x^2)dy \\ &= \iint_D \left( \frac{\partial}{\partial x} (x^2 - 2xy) - \frac{\partial}{\partial y} (5 - xy - y^2) \right) dxdy \\ &= 3 \iint_D x dxdy = 3\bar{x}. \end{aligned}$$

其中  $\bar{x}$  表示  $D$  的形心的  $x$ -坐标, 显然有  $\bar{x} = \frac{1}{2}$ , 因此, 所求积分为  $\frac{3}{2}$ .

**例11.3.3** 设  $L$  为沿着上半单位圆周  $x^2 + y^2 = 1$  逆时针方向的闭曲线, 求

$$\oint_L (e^x - y^3)dx + (\cos y + x^3)dy.$$

**解** 记  $L_1$  为  $Ox$ -轴上单位圆的直径线段, 这样添加  $L_1$  后使得可以构成封

闭的半圆形  $L + L_1$ , 于是有  $\int_{L+L_1} = \oint_{L+L_1} - \int_{L_1}$ , 使用格林公式把这个第二类曲线

积分转化为二重积分进行计算将比较容易, 记  $D$  上半单位圆盘, 则有

$$\begin{aligned} \oint_{L+L_1} (e^x - y^3)dx + (\cos y + x^3)dy &= \iint_D \left( \frac{\partial}{\partial x} (\cos y + x^3) - \frac{\partial}{\partial y} (e^x - y^3) \right) dx dy \\ &= \iint_D (3x^2 + 3y^2) dx dy \\ &= 3 \int_0^\pi d\theta \int_0^1 r^2 \cdot r dr \\ &= \frac{3}{4} \int_0^\pi d\theta = \frac{3}{4} \pi. \end{aligned}$$

又因为  $\int_{L_1} = \int_{-1}^1 e^x dx = e - e^{-1}$ , 所以

$$\oint_{L+L_1} (e^x - y^3)dx + (\cos y + x^3)dy = \frac{3}{4} \pi - e + e^{-1}.$$

从上面两个例子中可以看出, 若二重积分比闭曲线上的第二类曲线积分容易计算, 此时可以考虑格林公式. 有些时候, 格林公式也可以反过来应用, 见下面例题.

**例11.3.4** 求星形线  $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t (a > 0)$  在第一象限的弧与  $x, y$  坐标轴围成图形的形心.

**解** 由对称性知, 形心的两个坐标相等, 记为  $(\bar{x}, \bar{x})$ , 记图形区域为  $D$ , 其边界曲线为  $L$  取正向, 其中  $L$  由  $L_1$  ( $y$  轴上一段),  $L_2$  ( $x$  轴上一段)

$L_3$  (曲线一段) 组成, 则  $\bar{x} = \frac{\iint_D x dx dy}{\iint_D dx dy}$

由格林公式, 上式的分子与分母分别为

$$\begin{aligned}\iint_D x dx dy &= \frac{1}{2} \oint_{L^+} x^2 dy \\&= \frac{1}{2} \left( \int_{L_1^+} x^2 dy + \int_{L_2^+} x^2 dy + \int_{L_3^+} x^2 dy \right) \\&= \frac{1}{2} \int_{L_3^+} x^2 dy \\&= \frac{3}{2} a^3 \int_0^{\pi/2} \cos^6 t \sin^2 t \cos t dt \\&= \frac{3}{2} a^3 \int_0^{\pi/2} \cos^7 t \sin^2 t dt = \frac{8}{105} a^3, \\ \iint_D dx dy &= \int_{L^+} x dy = 3a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^4 t \sin^2 t dt = \frac{3}{32} \pi a^2,\end{aligned}$$

所以

$$\bar{x} = \frac{\iint_D x dx dy}{\iint_D dx dy} = \frac{256}{315\pi} a.$$

该例题反方向使用了格林公式, 对于边界曲线是参数方程表示的, 此时二重积分没有曲线积分来得简单, 因此以考虑使用格林公式把二重积分化成曲线积分计算. 利用格林公式将重积分化为曲线积分时, 曲线积分的被积表达式不是唯一的! 例如:

$$\iint_D x d\sigma = \frac{1}{2} \oint_{L^+} x^2 dy = - \oint_{L^+} xy dx = \frac{1}{2} \oint_{L^+} \frac{1}{2} x^2 dy - xy dx.$$

有时也会见到如下写法

$$\oint_{L^+} x^2 dy = \oint_{L^+} x^2 dy + \oint_{L^+} 1 dx + \oint_{L^+} f(x) dx$$

其实后两个积分无论从格林公式或者是定义看, 都是0.

读者可以尝试下直接计算式中的二重积分.

有时, 也可以利用格林公式转成曲线积分来求闭曲线所围区域的面

积, 例如, 令  $P = -y$ ,  $Q = x$ , 可以得到

$$\oint_{L^+} -ydx + xdy = \iint_D (1 - (-1))dxdy = 2S.$$

类似地,  $P$ 、 $Q$  还有多种写法, 例如

$$S = \int_{L^+} xdy = \int_{L^-} ydx.$$

**例11.3.5** 利用格林定理计算例题11.2.4.

**解** 设曲线  $C$  为曲线  $L$  在  $xoy$  平面上的投影曲线, 将  $L$  上的曲线积分转化为曲线  $C$  上的积分, 将  $z = a - x$  代入

$$\oint_L xdz = \oint_C xd(a - x) = -\oint_C xdx.$$

所以

$$\begin{aligned} \oint_{L^+} ydx + zdz + xdz &= \oint_{C^+} (y - x)dx + (a - x)dy \\ &= -2 \iint_{2x^2 + y^2 \leq a^2} dxdy = -\sqrt{2}\pi a^2. \end{aligned}$$

**例11.3.6** 计算平面椭圆  $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1$  ( $A, C > 0$  且  $AC - B^2 > 0$ )

的面积, 并利用此结论计算积分  $\int_L \frac{xdy - ydx}{Ax^2 + 2Bxy + Cy^2}$ , 其中  $L: x^2 + y^2 = 1$ , 方向为逆时针.

**解** 对椭圆方程进行配方得  $A(x + \frac{B}{A}y)^2 + \frac{AC - B^2}{A}y^2 = 1$ , 因此, 该椭圆的参数方程可表示为

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{A}}\cos t - \frac{B}{A} \cdot \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{AC - B^2}}\sin t \\ y = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{AC - B^2}}\sin t \end{cases}, \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

根据格林公式, 椭圆面积为



$$\begin{aligned}
S &= \iint_S 1 dx dy = \oint_{L^+} x dy \\
&= \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{\sqrt{A}} \cos t - \frac{B}{\sqrt{A} \cdot \sqrt{AC - B^2}} \sin t \right) \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{AC - B^2}} \cos t dt \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{AC - B^2}}.
\end{aligned}$$

下面计算本例中的第二类曲线积分，由于曲线为单位圆周，因此作参数化  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$ . ( $0 \leq t \leq 2\pi$ )，由此可得

$$\int_{L^+} \frac{x dy - y dx}{Ax^2 + 2Bxy + Cy^2} = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{A \cos^2 t + 2B \cos t \sin t + C \sin^2 t},$$

回忆定积分应用部分利用极坐标变换求平面图形面积的相关知识可知，上面椭圆面积也可以这样计算：令  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ，则

$$\frac{\pi}{\sqrt{AC - B^2}} = S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{A \cos^2 \theta + 2B \cos \theta \sin \theta + C \sin^2 \theta}.$$

代入上述曲线积分即得

$$\int_{L^+} \frac{x dy - y dx}{Ax^2 + 2Bxy + Cy^2} = \frac{2\pi}{\sqrt{AC - B^2}}.$$

注：本例中的第二类曲线积分，在学习了后面的路径无关性之后，还可以尝试选择椭圆作为积分曲线。

**例11.3.7** 用格林公式证明定积分的牛顿-莱布尼茨公式。

**证明** 在平面上构造长方形区域  $D: a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq 1$ ，取  $Q = f(x)$  并满

足格林公式要求的条件，设  $L^+$  为  $D$  的正向边界，由格林公式知，

$$\iint_D f'(x) dx dy = \oint_{L^+} f(x) dy$$

由于

$$\iint_D f'(x) dx dy = \int_a^b f'(x) dx \int_0^1 dy = \int_a^b f'(x) dx,$$

又

又

$$\oint_{L^+} f(x)dy = \int_0^1 f(b)dy + \int_1^0 f(a)dy = f(b) - f(a)$$

所以, 由格林公式得

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a).$$

这个证明过程, 也说明了微积分基本定理中为何是  $F(b) - F(a)$  而非  $F(b) + F(a)$ , 原因是  $a, b$  两个端点处的方向是不一致的.

根据格林公式, 若取边界曲线的正方向, 则有切向

$$ds = (dx, dy) = ds(\cos \alpha, \cos \beta).$$

其中  $ds$  为弧长微元,  $\alpha, \beta$  为切向的方向角, 设  $n$  为曲线的外法向, 因为外方向是切向逆时针旋转90度所得, 因此有

$$n = (dy, -dx) = ds(\cos \beta, -\cos \alpha),$$

根据这一结论, 可以解决与外法向有关的一类问题.

**例11.3.8** 设  $L$  为平面有界闭区域  $D$  的边界曲线,  $l$  为该平面上任一给定方向, 求证

$$\oint_L \cos(l, n)ds = 0.$$

其中  $n$  为闭曲线  $L$  的外法线向量.

**解** 不妨取  $L$  的正方向, 则  $n = (dy, -dx)$ , 再设  $l = (\cos \alpha_0, \cos \beta_0)$  为单位向量, 则

$$\cos(l, n) = \frac{l \cdot n}{|l||n|} = \frac{\cos \alpha_0 dy - \cos \beta_0 dx}{ds},$$

因此

$$\begin{aligned}\oint_L \cos(l, n)ds &= \oint_{L^+} \cos \alpha_0 dy - \cos \beta_0 dx \\ &= \iint_D 0 dx dy \\ &= 0\end{aligned}$$

**例11.3.9** 设  $L$  为平面闭区域  $D$  的边界,  $u$  在  $D$  上具有二阶连续偏导数, 利用格林公式证明

$$\iint_D \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dx dy = \oint_{L^+} \frac{\partial u}{\partial n} ds.$$

**解**  $L$  取正方向时, 有  $\mathbf{n} = (dy, -dx) = ds(\cos \beta, -\cos \alpha)$ , 因此关于外法向的方向导数

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \left( \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) \cdot (\cos \beta, -\cos \alpha).$$

因此

$$\begin{aligned} \oint_{L^+} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} ds &= \oint_{L^+} \left( \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) \cdot (\cos \beta, -\cos \alpha) ds \\ &= \oint_{L^+} \left( \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) \cdot (dy, -dx) \\ &= \oint_{L^+} \frac{\partial u}{\partial x} dy - \frac{\partial u}{\partial y} dx \\ &= \iint_D \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dx dy. \end{aligned}$$

**【注】**: 通常用  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  表示拉普拉斯算子, 这样上式结论可表示

为

$$\oint_{L^+} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} ds = \iint_D \Delta u dx dy.$$

**例11.3.9** (格林第一定理\*) 设  $u(x, y), v(x, y)$  在有界闭区域  $D$  上都具有二阶连续偏导数, 分段光滑的曲线  $L$  为  $D$  的正向边界曲线,  $\mathbf{n}$  表示曲线外法向,  $\Delta$  表示拉普拉斯算子,  $\nabla$  表示梯度算子, 证明:

$$\iint_D v \Delta u dx dy = - \iint_D (\nabla u \cdot \nabla v) dx dy + \oint_L v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} ds.$$

证 因为曲线走向是正向，法向是外方向，即  $\mathbf{n} = (dy, -dx)$ ，所以

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} ds = (u_x, u_y) \cdot \frac{(dy, -dx)}{\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}} ds = u_x dy - u_y dx,$$

因此

$$\begin{aligned} \oint_L v \frac{\partial u}{\partial n} &= \oint_L v u_x dy - v u_y dx \\ &= \iint_D \left[ \frac{\partial(vu_x)}{\partial x} + \frac{\partial(vu_y)}{\partial y} \right] dxdy \\ &= \iint_D [(u_x v_x + vu_{xx}) + (u_y v_y + vu_{yy})] dxdy \\ &= \iint_D v \Delta u dxdy + \iint_D (\nabla u \cdot \nabla v) dxdy. \end{aligned}$$

得证.

## 11.4 曲线积分与路径无关性

**定义11.4.1** 设  $D$  是平面  $\mathbb{R}^2$  中的一个区域, 如果对于  $D$  内的任何一条 Jordan 曲线  $L$ , 其内部都包含在  $D$  内, 则称  $D$  为**单连通区域**, 否则称为**复连通区域**.

注: Jordan 曲线 (若尔当曲线), 是指不自交的闭曲线, 有时也叫简单闭曲线. 直观的讲, 没有“洞”的区域是单连通的, 复连通区域是有“洞”的区域.

**定理11.4.2** 设  $D \subset \mathbb{R}^2$  是单连通闭区域, 若函数  $P(x, y), Q(x, y)$  在  $D$  内连续, 且有一阶连续的偏导数, 则以下四个命题等价:

1. 沿  $D$  中任一按段光滑的闭曲线  $L$ , 都有  $\oint_L Pdx + Qdy = 0$ ;
2. 对  $D$  中任一按段光滑曲线  $L$ , 曲线积分  $\int_L Pdx + Qdy$  与路径选取无关, 只与  $L$  的起点终点有关;
3.  $Pdx + Qdy$  是  $D$  内某函数  $u$  的全微分, 即在  $D$  内有  $du = Pdx + Qdy$ ;
4. 在  $D$  内每一点处有  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ .

**证明** 我们采用循环论证的方式,  $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1$ .

$1 \Rightarrow 2$ : 设  $AEB, AFB$  为连接  $A, B$  的任意两条光滑曲线, 如图11.4.4, 则由 1 知

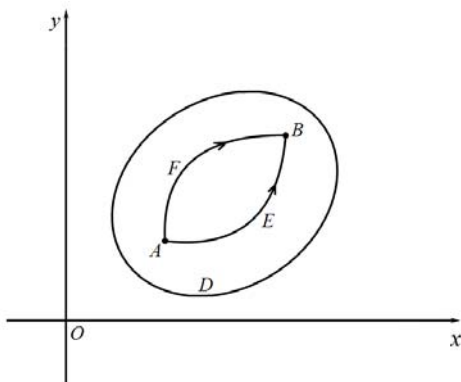


图11.4.4

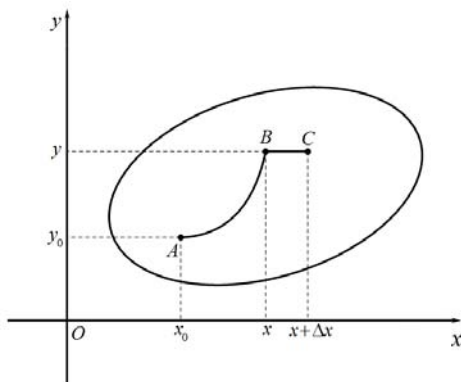


图11.4.5

$$\begin{aligned} \int_{AEB} Pdx + Qdy - \int_{AFB} Pdx + Qdy &= \int_{AEB} Pdx + Qdy + \int_{BFA} Pdx + Qdy \\ &= \int_{AEBFA} Pdx + Qdy \\ &= 0. \end{aligned}$$

2  $\Rightarrow$  3: 设  $A(x_0, y_0)$  为  $D$  内某定点,  $B(x, y)$  为  $D$  内任意一点, 由2知, 曲线积分  $\int_{AB} Pdx + Qdy$  与路径的选择无关, 故当  $B(x, y)$  在  $D$  内变动时, 其积分值是点  $B(x, y)$  的函数, 即有  $u(x, y) = \int_{AB} Pdx + Qdy$ .

所以,  $\int_{AEB} Pdx + Qdy = \int_{AFB} Pdx + Qdy$ .

取  $\Delta x$  充分小, 使  $(x + \Delta x, y) \in D$ , 则函数  $u$  对于  $x$  的偏增量, 如图11.4.5

$$u(x + \Delta x, y) - u(x, y) = \int_{AC} Pdx + Qdy - \int_{AB} Pdx + Qdy.$$

因为在  $D$  曲线积分与路径无关, 所以

$$\int_{AC} Pdx + Qdy = \int_{AB} Pdx + Qdy + \int_{BC} Pdx + Qdy.$$

由于直线段  $BC$  平行于  $x$ -轴, 所以  $BC: x = t, t \in [x, x + \Delta x], y = y_0$  (常数),

所以  $dy = 0$ , 并且有

$$\Delta u = u(x + \Delta x, y) - u(x, y) = \int_{BC} Pdx + Qdy = \int_x^{x+\Delta x} P(t, y) dt.$$

对上式右端应用积分中值定理得,  $\Delta u = P(x + \theta x, y)\Delta x, 0 < \theta < 1$ .

再由  $P$  在  $D$  上的连续性, 推得  $\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} P(x + \theta x, y) = P(x, y)$ .

同理可证

$$\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y). \text{ 又 } P(x, y), Q(x, y) \text{ 在 } D \text{ 上连续, 从而 } \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$$

也在  $D$  上连续, 于是  $u(x, y)$  在  $D$  上可微, 因此

$$du = Pdx + Qdy.$$

$3 \Rightarrow 4$ : 设存在  $u$  使得  $du = Pdx + Qdy$ , 其中  $P = u_x, Q = u_y$ , 则

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}. \text{ 因为 } P, Q \text{ 具有连续的一阶偏导, 所以有}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}. \text{ 从而在 } D \text{ 内的每一点处都有 } \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

$4 \Rightarrow 1$ : 应用格林公式, 由3易得.

根据上述 “ $2 \Rightarrow 3$ ” 的证明过程, 还可以得出以下结论.

**定理11.4.3 (曲线积分第一基本定理)** 设  $D \subset \mathbb{R}^2$  是闭区域, 若函数

$P(x, y), Q(x, y)$  在  $D$  内连续, 假设曲线积分  $\int_L Pdx + Qdy$  与路径无关, 取

固定一点  $A(x_0, y_0) \in D$ , 任对点  $B(x, y) \in D$ , 则称

$$u(x, y) = \int_{A(x_0, y_0)}^{B(x, y)} Pdx + Qdy$$

为  $Pdx + Qdy$  的一个**原函数** (也叫**势函数**), 即函数  $u(x, y)$  可导, 且

$\text{grad} u = (P, Q)$ , 同时称  $\nabla u = (P, Q)$  是**保守场**或者**梯度场**.

该定理有几个注意点:

- 该定理可以直接推广到高维情形.
- $u(x, y)$  只是一个原函数, 如果要写出所有原函数, 与不定积分类似, 还得加上任意常数  $C$ .
- 由于曲线积分和路径无关, 因此可以选择较为简单的路径求原函

数  $u$ ，通常选择平行于坐标轴的线段组成的折线路径，于是有

$$u(x, y) = \int_{A(x_0, y_0)}^{B(x, y)} Pdx + Qdy = \int_{x_0}^x P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^y Q(x, y)dy.$$

特别地，如果取  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ ，则全体原函数可以记为

$$\int_0^x P(x, 0)dx + \int_0^y Q(x, y)dy + C.$$

事实上，可以通过变上限的积分和含参量积分的导数，直接验证，上式确实是原函数

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \int_0^x P(x, 0)dx + \int_0^y Q(x, y)dy + C \right) &= P(x, 0) + \int_0^y \frac{\partial Q}{\partial x} dy \\ &= P(x, 0) + \int_0^y -\frac{\partial P}{\partial y} dy = P(x, y), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \int_0^x P(x, 0)dx + \int_0^y Q(x, y)dy + C \right) = 0 + Q(x, y) = Q(x, y).$$

- 定理中区域  $D$  没有必要是单连通，也就是说，结论在复连通区域也成立，只要满足前提条件：曲线积分与路径无关即可（因为此时可以推出所有的“绕洞积分”都是0）。

- “保守场”是向量场，这个名词来源于物理。古典物理的向量场都是数量场的梯度，而这些向量场都有它们的守恒定律，因此而得名。如重力场、静电场、磁场等，都是保守场。

**定理11.4.4** （曲线积分第二基本定理） 设  $D \subset \mathbb{R}^2$  是闭区域，若函数

$P(x, y), Q(x, y)$  在  $D$  内连续， $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2) \in D$ ，如果  $u(x, y)$  是

$Pdx + Qdy$  的一个原函数，则对于任一连接  $A, B$  的分段光滑路径  $L$ ，有

$$\int_{L_{AB}} Pdx + Qdy = u(x, y) \Big|_A^B = u(x_2, y_2) - u(x_1, y_1),$$

这个公式也称为曲线积分的牛顿-莱布尼茨公式。

对于复连通区域  $D$ ，如果  $P, Q$  满足具有连续的偏导数且  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ ，

考虑  $D$  内闭曲线  $L$ ，如果  $L$  所围区域没有“洞”，则由前面定理知曲线积



分为0, 如果  $L$  “绕洞”, 此时有下面的定理.

**定理11.4.5** 设复连通区域  $D$ , 如果  $P, Q$  满足在  $D$  上具有连续的偏导数

且  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ , 则环绕同一些洞, 如图11.4.6, 的任何两条闭曲线(取同方向) 上的曲线积分都相等.

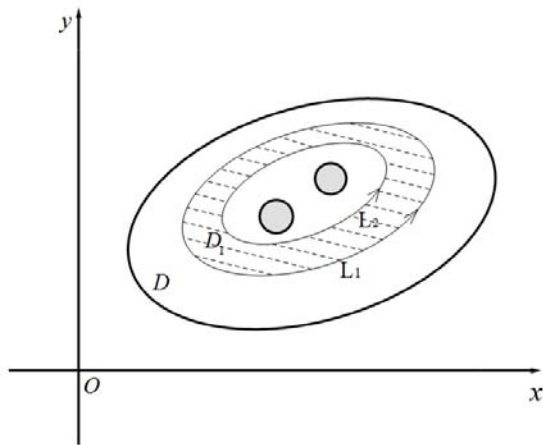


图11.4.6

**证明** 设  $L_1, L_2$  是环绕同一些洞的两条闭曲线, 考虑以  $L_1, L_2$  为内外边界的环形区域  $D_1$ , 则在  $D_1$  上应用格林公式知:

$$\oint_{L_1^+} Pdx + Qdy + \oint_{L_2^-} Pdx + Qdy = \iint_{D_1} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = 0.$$

因为对于区域  $D_1$  来说, 曲线  $L_1^+, L_2^-$  的正方向不是同方向的, 由于它们积分和为0, 因此同方向的积分相等.

这就是说, 环绕同一些洞的闭曲线(取正向)的积分是一个常数, 通常把这个常数叫做环绕那些洞的**循环常数**. 有了这个结论, 可以帮助简化第二类曲线积分的计算, 思路大致是: 题目初始给出的闭曲线路径计算起来相对困难, 如果定理条件满足, 则可以选择适合题目的另一条闭曲线路径进行计算, 有时会简单很多.

**例11.4.6** 求  $\int_{(0,3)}^{(2,0)} 2xydx + (x^2 + y^2)dy$ .

**解 【方法一】:** 该曲线积分没有给出路径而只是给出了起点和终点,

含义是该曲线积分与路径无法无关, 因此可以选择平行于坐标轴的折线路径, 即可以插入点  $(0,0)$ , 使得新积分路径为  $(0,3) \rightarrow (0,0) \rightarrow (2,0)$ , 所以

$$\begin{aligned}\int_{(0,3)}^{(2,0)} 2xydx + (x^2 + y^2)dy &= \int_{(0,3)}^{(0,0)} 2xydx + (x^2 + y^2)dy + \int_{(0,0)}^{(2,0)} 2xydx + (x^2 + y^2)dy \\ &= 0 + \int_3^0 y^2 dy + 0 + 0 \\ &= -9.\end{aligned}$$

**【方法二】:** 通过计算找到被积函数的原函数, 利用曲线积分的牛顿-莱布尼茨公式计算该曲线积分. 令

$$u(x, y) = x^2 y + \frac{1}{3} y^3,$$

则  $\nabla u(x, y) = (2xy, x^2 + y^2)$

因此,  $u(x, y) = x^2 y + \frac{1}{3} y^3$  为  $2xydx + (x^2 + y^2)dy$  的一个原函数. 所以

$$\int_{(0,3)}^{(2,0)} 2xydx + (x^2 + y^2)dy = u(2,0) - u(0,3) = -9.$$

**例11.4.7** 计算  $\oint_{L^+} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$ , 其中曲线  $L: x^2 + y^2 = 1$ , 方向为逆时针.

**解** 参数化曲线得:  $x = \cos t, y = \sin t$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ). 所以

$$\oint_{L^+} \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = 2\pi.$$

注: 该题不能用格林公式计算 (原点是奇点), 虽然满足条件  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ ,

但  $(P, Q)$  却不是保守场, 不存在势函数, 原因就是单位圆所围区域是一个复连通区域而不是一个单连通区域, 因为被积函数在原点处没有意义.

**例11.4.8** 证明  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$f(x, y) = 2xy^3 i + (1 + 3x^2 y^2) j$$

是保守场, 并求其原 (势) 函数  $u(x, y)$ .

**解 【方法一】:** 令  $P(x, y) = 2xy^3, Q(x, y) = 1 + 3x^2y^2$ , 则有  $\frac{\partial P}{\partial y} = 6xy^2 = \frac{\partial Q}{\partial x}$ .

而  $\mathbb{R}^2$  显然是单连通的, 所以  $f$  在  $\mathbb{R}^2$  上有原函数.

下面利用曲线积分来求原函数, 取原点  $(0, 0)$  为积分起点, 则

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_0^x P(x, 0)dx + \int_0^y Q(x, y)dy \\ &= \int_0^x 0dx + \int_0^y (1 + 3x^2y^2)dy \\ &= \int_0^x 0dx + \int_0^y (1 + 3x^2t^2)dt \\ &= y + x^2y^3. \end{aligned}$$

像不定积分一样, 可以在上面  $u$  后面加上一个积分常数  $C$  表示全体原函数的集合, 即

$$u(x, y) = y + x^2y^3 + C.$$

注: 上面的求解过程, 为了避免积分变量  $x, y$  和积分上限  $x, y$  之间的混淆, 把积分变量统一换成了  $t$ .

**【方法二】:** 分项组合, 再用凑微分法求原函数.

$$\begin{aligned} 2xy^3dx + (1 + 3x^2y^2)dy &= [2xy^3dx + 3x^2y^2dy] + [0dx + 1dy] \\ &= d(x^2y^3) + d(y) \\ &= d(x^2y^3 + y + C). \end{aligned}$$

因此

$$u(x, y) = y + x^2y^3 + C.$$

**【方法三】:** 用不定积分来计算原函数  $u(x, y)$ , 因为  $\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy^3$ , 两边关于  $x$  求积分 (此时把  $y$  看出常数), 有  $u(x, y) = x^2y^3 + g(y)$ , 其中  $g(y)$

是关于  $x$  积分的积分常数, 又因为  $\frac{\partial u}{\partial y} = 1 + 3x^2y^2 = 3x^2y^2 + g'(y)$ , 所以

$g'(y)=1$ ，因此  $g(y)=y+C$ ，于是就得到了

$$u(x, y) = x^2 y^3 + y + C.$$

**例11.4.9** 一质点在力场  $F(e^y, xe^y)$  的作用下，沿单位圆周  $L: x^2 + y^2 = 1$  的上半圆周逆时针移动，求力场所做的功.

**解 【方法一】** 根据变力沿曲线做功，直接利用第二类曲线积分有

$$\begin{aligned} W &= \int_{L^+} e^y dx + xe^y dy \\ &= \int_0^\pi e^{\sin t} d \cos t + \cos t e^{\sin t} d \sin t \\ &= \int_0^\pi ((-\sin t)e^{\sin t} + (\cos^2 t)e^{\sin t}) dt \\ &= (\cos t)e^{\sin t} \Big|_0^\pi = -2. \end{aligned}$$

**【方法二】** 因为  $\frac{\partial}{\partial y}(e^y) = e^y = \frac{\partial}{\partial x}(xe^y)$ ，而定义域  $\mathbb{R}^2$  是单连通区域，因此，曲线积分与路径无关，可以自由选取从  $(1,0)$  到  $(-1,0)$  的直线路径.

$$\begin{aligned} W &= \int_{L^+} e^y dx + xe^y dy \\ &= \int_{(1,0)}^{(-1,0)} e^y dx + xe^y dy \\ &= \int_1^{-1} e^0 dx = -2. \end{aligned}$$

**【方法三】：**先求原函数，再用曲线的牛顿-莱布尼茨公式，选取坐标原点  $(0,0)$  作为积分起点，则一个原函数为

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_{(0,0)}^{(x,y)} e^y dx + xe^y dy \\ &= \int_0^x e^0 dx + \int_0^y xe^y dy \\ &= \int_0^x e^0 dt + \int_0^y xe^t dt \\ &= x + xe^y - x = xe^y. \end{aligned}$$

所以

$$W = u(-1, 0) - u(1, 0) = -2.$$

**例11.4.10** 求  $\oint_{L^+} (y^2 + y)dx + (2xy - e^y)dy$ , 其中曲线  $L$  为单位圆周, 并且逆时针正方向.

**解** 容易验证  $(y^2 + y, 2xy - e^y)$  不是保守场, 但是易知  $(y^2, 2xy - e^y)$  是保守场, 所以

$$\begin{aligned}\oint_{L^+} (y^2 + y)dx + (2xy - e^y)dy &= \oint_{L^+} y^2 dx + (2xy - e^y)dy + \oint_{L^+} y dx \\ &= 0 + \int_0^{2\pi} \sin t dt \cos t \\ &= -\pi.\end{aligned}$$

**例11.4.11** 计算积分  $\int_L \frac{(x - \frac{1}{2} - y)dx + (x - \frac{1}{2} + y)dy}{(x - \frac{1}{2})^2 + y^2}$ , 其中  $L$  为由点  $(0, -1)$

经过单位圆到点  $(0, 1)$  的右半圆弧路径.

**解** 设  $P = \frac{x - \frac{1}{2} - y}{(x - \frac{1}{2})^2 + y^2}$ ,  $Q = \frac{x - \frac{1}{2} + y}{(x - \frac{1}{2})^2 + y^2}$ , 易证  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ , 所以在不含

奇点  $(\frac{1}{2}, 0)$  的单连通区域内, 曲线积分与路径无关. 构造平行于坐标轴的

直角边路径, 设  $A(0, -1), B(1, -1), C(1, 1), D(0, 1)$ , 则得

$$\begin{aligned}\int_L Pdx + Qdy &= \int_{AB} Pdx + Qdy + \int_{BC} Pdx + Qdy + \int_{CD} Pdx + Qdy \\ &= \int_0^1 \frac{x + \frac{1}{2}}{(x - \frac{1}{2})^2 + 1} dx + \int_{-1}^1 \frac{\frac{1}{2} + y}{\frac{1}{4} + y^2} dy + \int_1^0 \frac{x - \frac{3}{2}}{(x - \frac{1}{2})^2 + 1} dx \\ &= \int_0^1 \frac{2}{(x - \frac{1}{2})^2 + 1} dx + \int_{-1}^1 \frac{2}{1 + (2y)^2} dy + \int_{-1}^1 \frac{y}{\frac{1}{4} + y^2} dy \\ &= 4 \arctan \frac{1}{2} + 2 \arctan 2.\end{aligned}$$

**【注意】**：该题不能选择沿 $y$ 轴从 $(0,1)$ 到 $(0,1)$ ，原因是这条路径和原路径所围区域不再是单连通区域（包含有奇点了），不是单连通区域，就没有路径无关的结论了。

**例11.4.12** 计算  $I = \oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$ ，其中  $L$  是依正方向进行而不过坐标原点的简单闭曲线。

**解** 令  $P = \frac{y}{x^2 + y^2}$ ,  $Q = \frac{x}{x^2 + y^2}$ ，易知，当  $(x, y) \neq (0, 0)$  时，恒有

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

下面分两种情况讨论：

(1) 闭曲线  $L$  不含坐标原点，此时，在由  $L$  围成的有界闭区域  $D$  上， $P, Q$  以及它们的偏导数都连续，故可用格林公式，得

$$I = \oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = 0.$$

(2) 闭曲线  $L$  包含坐标原点，这时，由于  $P, Q$  在原点无定义，所以不能直接对  $L$  围成区域使用格林公式，现取常数  $\varepsilon > 0$  充分小，使得中心为原点，半径为  $\varepsilon$  的圆周  $L_1: x^2 + y^2 = \varepsilon^2$  全位于闭曲线  $L$  之内，把  $L$  与  $L_1$  之间的环形区域记为  $D$ ，显然， $P, Q$  及其偏导数在  $D$  上均连续，可用格林公式得，

$$\oint_{L^+} Pdx + Qdy = \oint_{L_1^+} Pdx + Qdy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = 0,$$

其中  $L^+$  表示逆时针方向， $L_1^+$  表示顺时针方向，于是

$$I = \oint_{L^+} Pdx + Qdy = \oint_{L_1^+} Pdx + Qdy.$$

参数化小圆周得

$$x = \varepsilon \cos t, y = \varepsilon \sin t. (0 \leq t \leq 2\pi).$$

所以

$$\begin{aligned}
 I &= \oint_{L_\varepsilon} Pdx + Qdy \\
 &= \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon \cos t d(\varepsilon \sin t) - \varepsilon \sin t d(\varepsilon \cos t)}{\varepsilon^2} \\
 &= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.
 \end{aligned}$$

注：(1) 有时计算闭曲线积分时，在满足格林公式的条件下，可以自行选择合适的闭曲线，使得积分较为简单，但应注意曲线的方向会和原曲线相反；(2) 该题中， $\varepsilon$  也可以取得大一点使得  $L$  在以  $\varepsilon$  为半径的圆内，又因为  $\varepsilon$  是任意选取的，因此计算结果和  $\varepsilon$  是无关的；(3) 当想使用格林公式时，应注意区域内是否有奇点，有的话要挖去再用。

**例11.4.13** 设曲线  $L$  为椭圆  $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$  并取正向，计算

$$\oint_{L^+} \frac{xdy - 4ydx}{x^2 + y^2}.$$

**解** 如果此题用单位圆圈奇点的做法就会出错，原因是  $\partial Q / \partial x \neq \partial P / \partial y$ ，

正确的做法是用参数法，设  $x = \cos t, y = 2 \sin t (0 \leq t \leq 2\pi)$ ，所以

$$\oint_{L^+} \frac{xdy - 4ydx}{x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{2\cos^2 t + 8\sin^2 t}{\cos^2 t + 4\sin^2 t} dt = 4\pi.$$

注：有些时候，虽然闭曲线内含奇点，但是由于  $\frac{\partial Q}{\partial x} \neq \frac{\partial P}{\partial y}$ ，所以还是不能

用特殊闭线圈奇点的做法，还得按以前的方法直接计算。

**例11.4.14** 设  $f(u)$  为连续函数， $L$  为平面上分段光滑的闭曲线，求证

$$\oint_L f(x^2 + y^2)(xdx + ydy) = 0.$$

**证明** 令  $u = x^2 + y^2$ ，则  $du = 2(xdx + ydy)$ ，因为  $f(u)$  为连续函数，故

$$F(u) = \int_0^u f(t)dt$$

存在，且有  $dF(u) = f(u)du = f(x^2 + y^2)2(xdx + ydy)$ ，即

$$f(x^2 + y^2)(xdx + ydy) = d \frac{F(u)}{2}.$$

所以，存在原函数. 因此，

$$\oint_L f(x^2 + y^2)(xdx + ydy) = 0.$$

注：该题如果通过验证  $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2xyf'(x^2 + y^2) = \frac{\partial P}{\partial y}$ ，然后证明

$\oint_L f(x^2 + y^2)(xdx + ydy) = 0$  是错误的，因为题中没有  $f(u)$  可导的条件.



## 习 题 11.1

1. 计算下面第一类（对弧长）曲线积分：

(1)  $\int_L (x+y)^2 ds$ ，其中  $L$  为连接点  $A(1,1), B(2,2), C(1,3)$  的三角形围线；

(2)  $\int_L x ds$ ，其中  $L$  是双曲线  $xy=1$  从  $(\frac{1}{2}, 2)$  到  $(1,1)$  的一段；

(3)  $\int_L y ds$ ，其中  $L$  是抛物线  $y^2 = 2px$  从  $(0,0)$  到  $(x_0, y_0)$  的一段；

(4)  $\int_L (x^2 + y^2) ds$ ，其中  $L$  为参数曲线  $x = a(\cos t + t \sin t), y = a(\sin t - t \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi$ ；

(5)  $\int_L z ds$ ，其中  $L$  是有界螺旋线  $x = t \cos t, y = t \sin t, z = t, 0 \leq t \leq t_0$ ；

(6)  $\int_L \frac{z^2}{x^2 + y^2} ds$ ，其中  $L$  为螺旋线  $x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt, 0 \leq t \leq 2\pi$ ；

(7)  $\int_L \sqrt{y} ds$ ，其中  $L$  为摆线  $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$  的第一拱，即对应于  $0 \leq t \leq 2\pi$  的一段；

(8)  $\int_L |y| ds$ ，其中  $L$  为双纽线  $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$  的弧；

(9)  $\int_L \sqrt{2y^2 + z^2} ds$ ，其中  $L$  为球面  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  与平面  $x = y$  的交线；

(10)  $\int_L (x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}}) ds$ ，其中  $L$  为曲线  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ 。

2. 设曲线  $L$  为球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  与平面  $x + y + z = 0$  的交线，求下列第一类曲线积分：

(1)  $\int_L x ds$ ； (2)  $\int_L xy ds$ 。

3. 设  $L$  为平面质线（有质量的曲线），给出其转动惯量、质心和形心的表达式。

4. 利用第一类曲线积分求下列质线的质心坐标：

(1)  $x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt, 0 \leq t \leq 2\pi$ ，其上任一点  $(x, y, z)$  处的线密

度与该点到  $xOy$  平面的距离成正比, 已知点  $(a, 0, 2\pi b)$  处的线密度为2;

(2)  $x^2 + y^2 + ax = a\sqrt{x^2 + y^2}, (a > 0)$ , 其上任一点  $(x, y)$  处的线密度与该点到原点的距离成正比, 已知点  $(-2a, 0)$  处的线密度为2.

5. 利用第一类曲线积分求下列匀质 (设线密度为1) 质线对指定轴的转动惯量:

(1)  $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi$ , 对  $y$  轴;

(2)  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x + y + z = 0$ , 对  $z$  轴.

6. 利用第一类曲线积分计算质线对质点  $m$  的引力:

(1) 质线方程为  $y = \sqrt{a^2 - x^2}, |x| \leq a$ , 质点  $m$  在点  $(0, 0)$  处, 线密度为常数  $c$ ;

(2) 质线方程为  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ , 质点  $m$  在点  $(0, 0)$  处, 线密度

$\mu = \sqrt{\frac{xy}{x+y}}, (x, y)$  为质线上任一点的坐标.

7. 利用第一类曲线积分, 求下列柱面 (指定部分) 面积:

(1)  $x^2 + y^2 = y$  含于球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  内的部分;

(2)  $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$  被圆锥面  $z^2 = x^2 + y^2$  所截取的部分;

(3)  $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi$  被双曲抛物面  $z = xy$  及平面  $z = 0$  所截取的部分.

## 习 题 11.2

8. 计算下列第二类曲线积分:

(1)  $\int_L \sin y dx + \sin x dy$ ,  $L$  为从  $(0, \pi)$  到  $(\pi, 0)$  的直线段;

(2)  $\int_L -x \cos y dx + y \sin x dy$ ,  $L$  为从  $(0, 0)$  到  $(\pi, 2\pi)$  的直线段;

(3)  $\int_L (2a - y) dx - (a - y) dy$ ,  $L$  为摆线  $x = a(t - \sin t)$ ,  $y = a(1 - \cos t)$  对应于  $t_1 = 0$  到  $t_2 = 2\pi$  的一段;

(4)  $\int_L (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy$ ,  $L$  为曲线  $y = 1 - |1 - x|$ ,  $(0 \leq x \leq 2)$  沿参数增加的方向;

(5)  $\int_L (3x^2 - 6yz) dx + (2y - 3xz) dy + (1 - 4xyz^2) dz$ ,  $L$  为从  $(0, 0, 0)$  到  $(1, 1, 1)$  的直线段;

(6)  $\int_L y dx + z dy + x dz$ ,  $L$  由参数方程

$x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt, t \in [0, 2\pi]$  沿参数增加方向;

(7)  $\int_L yz dx - xz dy + xy dz$ ,  $L$  由参数方程  $x = e^t, y = e^{3t}, z = e^{-t}, t \in [0, 1]$  沿参数增加方向;

(8)  $\int_L e^x (y + z) dx + dy + dz$ ,  $L$  是曲线  $y = x^2, z = x$  从点  $(0, 0, 0)$  到点  $(1, 1, 1)$  的部分.

9. 计算闭曲线上的第二类曲线积分:

(1)  $\oint_L (x + y) dx + (x - y) dy$ ,  $L$  为逆时针方向的椭圆周  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ;

(2)  $\oint_L (\cos x - y \sin x) dx + \cos x dy$ ,  $L$  是以  $(0, 2), (2, 3), (1, 4)$  为顶点的逆时针方向的三角形闭道路;

(3)  $\oint_L y dx$ ,  $L$  是由直线  $x = 0, y = 0, x = 2, y = 4$  围成的逆时针方向的矩

形闭道路;

(4)  $\oint_L ydx - xdy$ ,  $L$  是上半圆周  $x^2 + y^2 = 5$  和直线  $y = 0$  围成的逆时针方向的闭道路;

(5)  $\oint_L \frac{dx + dy}{|x| + |y|}$ ,  $L$  为以  $(1,0), (0,1), (-1,0)$  和  $(0,-1)$  为顶点的逆时针方向的正方形闭道路;

(6)  $\oint_L x^2 z dx - yx^2 dy + 3xz dz$ ,  $L$  为以  $(0,0,0)$  到  $(1,1,0)$  到  $(1,1,1)$  再回到  $(0,0,0)$  三角形闭道路;

(7)  $\oint_L (y+z)dx + (x+z)dy + (x+y)dz$ ,  $L$  为曲线  $x^2 + y^2 = 1, z = 0$ , 从  $z$  轴正向看去取逆时针方向;

(8)  $\oint_L y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz$ ,  $L$  为曲线  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x^2 + y^2 = ax$ ,  $(z > 0, z > 0)$ , 从  $x$  轴的正向看去, 此曲线的方向为逆时针;

(9)  $\oint_L (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz$ ,  $L$  为球面一部分  $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x, y, z \geq 0$  的边界线, 若从  $z$  轴的正向看去, 此曲线的方向为逆时针;

(10)  $\oint_L ydx + zdy + xdz$ ,  $L$  为曲线  $x^2 + y^2 + z^2 = 2z, x + z = 1$ , 从  $z$  轴正向看去, 曲线取逆时针方向.

10. 设  $F$  是平面上的力场, 其大小等于点到原点的距离, 方向为该点的矢径方向逆时针旋转  $\frac{\pi}{2}$ , 试求力场  $F$  将质点沿下面曲线在上半平面从

$(a,0)$  移动到  $(0,a)$  所做的功:

(1)  $L_1$ : 圆周  $x^2 + y^2 = a^2$ ;

(2)  $L_2$ : 星形线  $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$ ;

(3)  $L_3$ : 抛物线  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ .

11. 证明下列第二类曲线积分为0:

(1) 设  $F(x, y) = P(x, y)\mathbf{i}$  是连续的向量场,  $L$  是平面  $\mathbb{R}^2$  上平行于  $y$  轴的直线段;

(2) 设  $F(x, y) = Q(x, y)\mathbf{j}$  是连续的向量场,  $L$  是平面  $\mathbb{R}^2$  上平行于  $x$  轴的直线段;

(3) 设向量场  $F(x, y) = g(x, y)(x\mathbf{i} + y\mathbf{j})$ , 其中  $g$  是二元函数,  $L$  是以原点为圆心的圆周上的一段圆弧.

### 习 题 11.3

12. 利用格林公式计算下列各题:

(1)  $\oint_L xy^2 dy - x^2 y dx$ ,  $L$  为圆周  $x^2 + y^2 = a^2$  的逆时针方向;

(2)  $\oint_L (x+y) dy - (x-y) dx$ ,  $L$  为椭圆周  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  的逆时针方向;

(3)  $\oint_L (e^x \sin y - my) dx + (e^x \cos y - mx) dy$ ,  $L$  是从  $(a, 0)$  到  $(0, 0)$  的上半圆周  $x^2 + y^2 = ax, (y \geq 0)$ ;

(4)  $\oint_L (x+y)^2 dx + (x^2 - y^2) dy$ ,  $L$  是以  $(1, 1), (3, 2)$  和  $(3, 5)$  为顶点的顺时针方向的三角形闭曲线;

(5)  $\oint_L (y - e^x) dx + (3x + e^y) dy$ ,  $L$  是曲线  $x^2 + y^2 = \sqrt{x^2 + y^2} - x$  的逆时针方向;

(6)  $\oint_L e^x (1 - \cos y) dx - e^x (y - \sin y) dy$ ,  $L$  为区域  $0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \sin x$  边界的逆时针;

(7)  $\oint_L (x^2 + xy) dx + (x^2 + y^2) dy$ ,  $L$  为由直线  $x = \pm 1, y = \pm 1$  围成的逆时针方向的正方形;

(8)  $\oint_{L_1} (x^3 - y^3) dx + (x^3 + y^3) dy + \oint_{L_2} (x^3 - y^3) dx + (x^3 + y^3) dy$ , 其中  $L_1$  为圆周  $x^2 + y^2 = 9$  的逆时针方向,  $L_2$  为圆周  $x^2 + y^2 = 1$  的顺时针方向;

(9)  $\oint_L (1 + xe^{2y}) dx + (x^2 e^{2y} - y) dy$ ,  $L$  为  $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$  的正方向;

(10)  $\oint_L [\varphi(y)e^x - my] dx + [\varphi'(y)e^x - m] dy$ ,  $L$  为连接  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$  的任意路径, 已知该路径与线段  $AB$  所围的区域面积为  $S$ ; 函数  $\varphi$  均有连续导数.

13. 计算下列曲线积分:

$$(1) \int_{(0,1)}^{(2,3)} (x+y)dx + (x-y)dy ;$$

$$(2) \int_{(1,1,3)}^{(0,1,1)} yzdx + zxdy + xydz ;$$

14. 求原函数  $u$  :

$$(1) du = (ye^x + 2x)dx + e^x dy ;$$

$$(2) du = (2x \cos y + y^2 \cos x)dx + (2y \sin x - x^2 \sin y)dy ;$$

15. 设  $F(x, y) = yi + xj$ , 按下列情形计算  $\int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_L ydx + xdy$ , 并比较结果, 找出势函数  $\varphi$ , 满足  $\nabla\varphi = \mathbf{F}$ :

(1)  $L$  是从  $(0,0)$  到  $(1,1)$  的直线段;

(2)  $L$  是从  $(0,0)$  到  $(1,1)$  的抛物线  $y = x^2$ ;

(3)  $L$  是从  $(0,0)$  到  $(1,1)$  的曲线  $y = x^3$ .

16. 设  $\mathbf{F}(x, y) = 2xy\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$ , 按下列情形计算  $\int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_L 2xydx + x^2dy$ , 并比较结果, 找出势函数  $\varphi$ , 满足  $\nabla\varphi = \mathbf{F}$ :

(1)  $L$  是从  $(0,0)$  到  $(2,1)$  的直线段;

(2)  $L$  是从  $(0,0)$  到  $(2,1)$  的抛物线  $x = 2y^2$ ;

(3)  $L$  是从  $(0,0)$  到  $(2,1)$  的抛物线  $y = \frac{1}{4}x^2$ ;

(4)  $L$  是从  $(0,0)$  到  $(2,0)$  到  $(2,1)$  的折线;

(5)  $L$  是从  $(0,0)$  到  $(1,0)$  到  $(2,1)$  的折线.

17. 证明下列向量场  $\mathbf{F}$  不是保守场, 并找出一闭线  $L$ , 使得  $\oint_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \neq 0$ :

$$(1) \mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} ;$$

$$(2) \mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} + (xy - x)\mathbf{j} ;$$

(3)  $\mathbf{F}(x, y) = 3x^2y\mathbf{i} + x^3y\mathbf{j}$ ;

(4)  $\mathbf{F}(x, y) = x\ln y\mathbf{i} + y\ln x\mathbf{j}$ ;

(5)  $\mathbf{F}(x, y, z) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + x\mathbf{k}$ ;

(6)  $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\mathbf{i} + (x^2 + 1)\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ .

18. 力场  $\mathbf{F}(x, y, z) = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$ ,

(1) 说明  $\mathbf{F}$  是否为保守场;

(2) 计算沿参数曲线  $x = \cos t, y = \sin t, z = e^t, 0 \leq t \leq \pi$  移动质点时  $\mathbf{F}$  所做的功;

(3) 计算沿从  $(1, 0, 1)$  到  $(-1, 0, e^\pi)$  的直线段移动质点时  $\mathbf{F}$  所做的功.

19. 力场  $\mathbf{F}(x, y) = (x + y)\mathbf{i} + (x - y)\mathbf{j}$ ,

(1) 证明沿曲线  $x = f(t), y = g(t)$  从  $t = a$  到  $t = b$  移动质点时  $\mathbf{F}$  所做的功仅与  $f(a), f(b), g(a), g(b)$  有关;

(2) 计算  $f(a) = 1, f(b) = 2, g(a) = 3, g(b) = 4$  时  $\mathbf{F}$  所做的功.

20. 证明平面径向力场  $\mathbf{F}(x, y) = g(r)\mathbf{r}$  是保守场, 其中  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}, r = |\mathbf{r}|, g$  是  $\mathbf{R}$  上连续可导函数.

21. 计算力场  $\mathbf{F}(x, y) = (3y^2 + 1)\mathbf{i} + 16xy\mathbf{j}$  沿上半椭圆  $b^2x^2 + y^2 = b^2$  从  $(-1, 0)$  到  $(1, 0)$  移动质点所做的功. 当  $b > 0$  为何值时, 所做的功最小.

22. 判断下面的向量场是否为保守场, 如果是, 给出相应的势函数:

(1)  $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ ;

(2)  $\mathbf{F}(x, y) = (2xe^y + 1)\mathbf{i} + (x^2e^y + x - 2y)\mathbf{j}$ ;

(3)  $\mathbf{F}(x, y) = (\sin y - y\sin x + x)\mathbf{i} + (\cos x + x\cos y + y)\mathbf{j}$ ;



$$(4) \quad \mathbf{F}(x, y) = (\sin(xy) + xy \cos(xy), x^2 \cos(xy));$$

$$(5) \quad \mathbf{F}(x, y) = (e^{x-y}(1+x+y), e^{x-y}(1-x-y));$$

$$(6) \quad \mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k};$$

$$(7) \quad \mathbf{F}(x, y, z) = 2xy^3\mathbf{i} + x^2z^3\mathbf{j} + 3x^2yz^2\mathbf{k};$$

$$(8) \quad \mathbf{F}(x, y, z) = (y^2 \cos x + z^3, -4 + 2y \sin x, 3xz^2 + 2);$$

$$(9) \quad \mathbf{F}(x, y, z) = (4xy - 3x^2z^2 + 1, 2(1+x^2), -(2x^3z + 3z^2));$$

$$(10) \quad \mathbf{F}(x, y, z) = (y \cos(xy), x \cos(xy), \sin z).$$

23. 说明下列各积分与路径无关, 并计算:

$$(1) \quad \int_{(2,1)}^{(1,2)} \frac{ydx - xdy}{x^2}, \text{ 其中积分路径不经过 } y \text{ 轴};$$

$$(2) \quad \int_{(1,0)}^{(6,8)} \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \text{ 其中积分路径在右半平面内};$$

$$(3) \quad \int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} \frac{xdx + ydy + zdz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \text{ 其中积分路径不经过原点}.$$

24. 计算下列各题:

$$(1) \quad \oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}, \text{ 其中 } L \text{ 为闭路径且不经过原点};$$

$$(2) \quad \oint_L \frac{xdy - ydx}{4x^2 + y^2}, \text{ 其中 } L \text{ 圆周 } (x-1)^2 + y^2 = 4 \text{ 取逆时针方向};$$

$$(3) \quad \oint_L \frac{ydx + (1-x)dx}{(x-1)^2 + y^2}, \text{ 其中 } L \text{ 是曲线 } |x| + |y| = 2 \text{ 并取逆时针方向};$$

$$(4) \quad \oint_L \frac{ydx - xdy}{3x^2 - 2xy + 3y^2}, \text{ 其中 } L \text{ 为闭路径且不经过原点}.$$

25. 设面积为  $A$  的平面区域  $D \subset \mathbb{R}^2$  的边界  $L$  是反时针方向的分段光滑 *Jordan* 曲线. 证明:

- (1)  $D$  的形心  $(\bar{x}, \bar{y})$  是  $\bar{x} = \frac{1}{2A} \oint_L x^2 dy$ ,  $\bar{y} = \frac{-1}{2A} \oint_L y^2 dx$ ;
- (2) 利用上述结论, 计算以  $(0,0), (1,0), (0,1)$  为顶点的三角形形心;
- (3) 利用上述结论, 计算上半圆盘  $x^2 + y^2 \leq a^2, y \geq 0$  的形心.

## 第12章 曲面积分

在很多方面, 曲面积分类似于曲线积分, 只是积分域由曲线变成了曲面.

### 12.1 第一类曲面积分

设  $S$  为  $\mathbb{R}^3$  中一张光滑或分片光滑的金属曲面, 其上的质量密度函数为  $\rho(x, y, z)$ . 与求金属曲线的质量类似, 可以采取如下方法求金属曲面  $S$  的质量.

取曲面  $S$  的一个分割  $\{S_1, \dots, S_n\}$ , 其中每个  $S_i$  是  $S$  的分片光滑子曲面,  $\sigma(S_i)$  表示小块曲面  $S_i$  的面积. 当分割越来越细时, 即  $S_i$  的直径  $\lambda(S_i)$  都很小时,  $S_i$  可以近似看作密度均匀分布的金属片, 其质量可以近似表示为  $\rho(x_i, y_i, z_i)\sigma(S_i)$ , 其中:  $(x_i, y_i, z_i) \in S_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ), 因此, 金属曲面  $S$  的质量可近似为如下黎曼和的形式

$$\sum_{i=1}^n \rho(x_i, y_i, z_i) \sigma(S_i)$$

当  $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\lambda(S_i)\} \rightarrow 0$  时, 上述黎曼和的极限就是金属片  $S$  的质量.

**定义12.1.1** 设  $S$  为  $\mathbb{R}^3$  中的光滑或分片光滑曲面,  $f(x, y, z)$  是定义曲面  $S$  上的有界函数, 将  $S$  分成任意  $n$  小块  $\Delta S_1, \dots, \Delta S_n$ , 记  $\lambda$  为各小块曲面中直径的最大值. 如果存在常数  $I \in \mathbb{R}$ , 对于任意的  $\varepsilon > 0$ , 总存在  $\delta > 0$ , 使得对于任何满足  $\lambda \leq \delta$  的分割和任意选取的点集  $(\xi_i, \eta_i, \varsigma_i)$ , 均有

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \varsigma_i) \Delta S_i - I \right| \leq \varepsilon$$

则称  $I$  为  $f$  在  $S$  上的**第一类曲面积分**或**对面积的曲面积分**, 记作

$$\iint_S f(x, y, z) dS.$$

对应于第一类曲线积分, 读者可以自行写出关于第一类曲面积分的基本性质.

对于第一类曲面积分, 通常是转化成二重积分计算的, 因此, 问题的关键在于如何把  $dS$  投影到坐标平面上; 通常是投影到  $xOy$  平面上, 这个投影过程可以用面积射影定理来描述

$$dS \cdot |\cos \gamma| = d\sigma.$$

其中  $\gamma$  表示  $dS$  所在切平面与坐标平面  $xOy$  的二面角, 如图12.1.1和

12.1.2,  $d\sigma$  表示  $dS$  在坐标平面上的投影面积. 上述两平面的二面角实际上可以通过计算两法向的夹角 (或其补角) 给出, 设曲面的方程为

$z = f(x, y)$ , 其法向为  $\pm(f'_x, f'_y, -1)$ , 而坐标平面  $xOy$  的法向为  $(0, 0, 1)$ ,

因此

$$|\cos \gamma| = \frac{1}{\sqrt{(f'_x)^2 + (f'_y)^2 + 1}}.$$

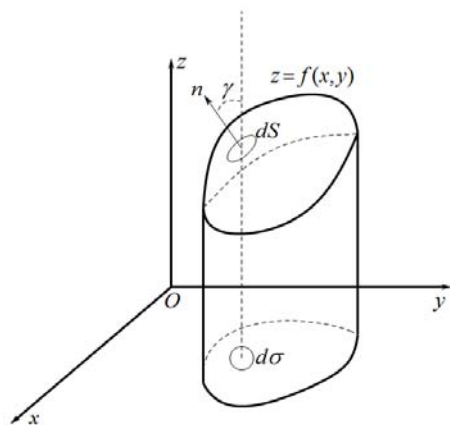


图12.1.1

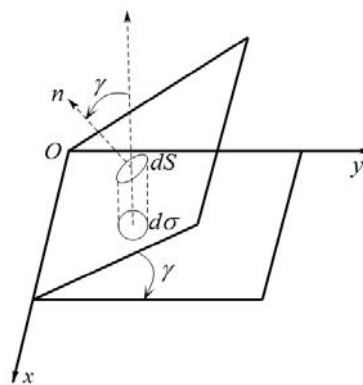


图12.1.2

所以, 对于显式曲面  $S: z = z(x, y)$ , 其中  $z(x, y)$  具有一阶连续偏导数,

其第一类曲面积分的计算公式为

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y)) \sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 1} dx dy.$$

其中  $D_{xy}$  为  $S$  在坐标平面  $xOy$  上的投影区域.

有时为了计算方便, 也可以把  $S$  投影到另外两个坐标平面, 同样有

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_{D_{yz}} f(x(y, z), y, z) \sqrt{(x'_y)^2 + (x'_z)^2 + 1} dy dz.$$

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_{D_{zx}} f(x, y(x, z), z) \sqrt{(y'_z)^2 + (y'_x)^2 + 1} dz dx.$$

若曲面  $S$  是由隐式

$$F(x, y, z) = 0$$

给出的, 其中  $F$  的各偏导数连续, 且  $F'_z \neq 0$ , 根据隐函数偏导数的计算, 有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}$$

则

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y)) \frac{1}{|F'_z|} \sqrt{(F'_x)^2 + (F'_y)^2 + (F'_z)^2} dx dy.$$

**例12.1.2** 计算球面  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2 (R > 0)$  的表面积.

**解: 【方法一】** 在第一类曲面积分中, 如果被积函数为常数 1, 其第一类曲面积分就是曲面  $S$  的面积. 根据对称性, 球面的面积等于第一卦限内面积的8倍.

在第一卦限内, 曲面  $S: z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} (x \geq 0, y \geq 0)$ , 则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}.$$

因此, 球的表面积

$$\begin{aligned}
S &= \iint_S dS = 8 \iint_{D_{xy}} \sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1} dx dy \\
&= 8 \iint_{D_{xy}} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy \\
&= 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^R \frac{R}{\sqrt{R^2 - r^2}} r dr = 4\pi R^2.
\end{aligned}$$

**【方法二】** 类似于球坐标，可以定义球面的参数方程

$$x = R \sin \varphi \cos \theta, \quad y = R \sin \varphi \sin \theta, \quad z = R \cos \varphi.$$

则球面的面积元素为

$$dS = \sqrt{\left(\frac{\partial(y, z)}{\partial(\varphi, \theta)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(z, x)}{\partial(\varphi, \theta)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(\varphi, \theta)}\right)^2} d\varphi d\theta = R^2 \sin \varphi d\varphi d\theta.$$

因此，球的表面积

$$S = \iint_S dS = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi R^2 \sin \varphi d\varphi = 4\pi R^2.$$

**【注意】**：这里的面积形变因子  $R^2 \sin \varphi$  和球面坐标变换的雅可比行列式

$\rho^2 \sin \varphi$  是一致的。这是因为本来雅可比行列式表示了  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  的体积变形，当立体退化到曲面时，雅可比行列式就表示了曲面到曲面（对于本例来说就是  $x, y, z$  坐标系中的球面到  $\rho, \theta, \varphi$  坐标系中的平面）的变形，因此从退化的角度来看，把  $R^2 \sin \varphi$  看成是球面参数方程的形变因子也是合理的。

**例12.1.3** 计算球面  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2 (R > 0)$  含于柱面  $x^2 + y^2 = Rx$  内部分的面积。

**解** 由对称性知，所求曲面的面积等于位于  $xOy$  平面上部在第一卦限内面积的4倍。球面在第一卦限部分的方程为

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \quad (x \geq 0, \quad y \geq 0).$$

从而有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}.$$

因此, 球面含在柱面  $x^2 + y^2 = Rx$  内部的面积

$$\begin{aligned} S &= \iint_S dS = 2 \iint_{D_{xy}} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{R \cos \theta} \frac{R}{\sqrt{R^2 - r^2}} r dr \\ &= 4R^2 \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right). \end{aligned}$$

**例12.1.4** 计算  $\iint_S \left(x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3}\right) dS$ , 其中  $S$  是  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  ( $a > 0$ ) 的上半球面.

解

由  $S$  的对称性和被积函数的奇偶性知,  $\iint_S x dS = \iint_S y dS = 0$ .

所以

$$\begin{aligned} \iint_S \left(x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3}\right) dS &= \frac{1}{3} \iint_S z dS \\ &= \frac{1}{3} \iint_{D_{xy}} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy \\ &= \frac{1}{3} \pi a^3. \end{aligned}$$

**例12.1.5** 计算  $\iint_S \left(x^2 + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{3}\right) dS$ , 其中  $S$  是球面  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ .

**解 【方法一】** 由对称性知

$$\iint_S x^2 dS = \iint_S y^2 dS = \iint_S z^2 dS,$$

又因为

$$\iint_S (x^2 + y^2 + z^2) dS = 4\pi a^4.$$

所以

$$\iint_S x^2 dS = \iint_S y^2 dS = \iint_S z^2 dS = \frac{4}{3} \pi a^4.$$

因此

$$\iint_S \left(x^2 + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{3}\right) dS = \frac{11}{6} \cdot \frac{4}{3} \pi a^4 = \frac{22}{9} \pi a^4.$$

**【方法二】** 本题也可以通过极坐标换元直接计算.

$$\begin{aligned} \iint_S \left(x^2 + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{3}\right) dS &= 2 \iint_{D_{xy}} \left(x^2 + \frac{y^2}{2} + \frac{a^2 - x^2 - y^2}{3}\right) \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy \\ &= \frac{2a}{6} \iint_D \frac{3r^2 \cos^2 \theta + r^2 + 2a^2}{\sqrt{a^2 - r^2}} dr \\ &= \frac{a}{3} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \frac{(1 + 3\cos^2 \theta)r^3 + 2a^2 r}{\sqrt{a^2 - r^2}} dr \\ &= \frac{a}{3} \int_0^{2\pi} (1 + 3\cos^2 \theta) \int_0^a \frac{r^3}{\sqrt{a^2 - r^2}} dr \\ &\quad + \frac{2a^3}{3} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}} dr \\ &= \frac{a}{3} \int_0^{2\pi} (1 + 3\cos^2 \theta) \left[ \frac{1}{3} (\sqrt{a^2 - r^2})^3 - a^2 \sqrt{a^2 - r^2} \right] \Big|_0^a d\theta \\ &\quad + \frac{2a^3}{3} \int_0^{2\pi} \left[ -\sqrt{a^2 - r^2} \right] \Big|_0^a d\theta \\ &= \frac{a}{3} \cdot \frac{2a^3}{3} \cdot 5\pi + \frac{2a^3}{3} \cdot a \cdot 2\pi = \frac{22}{9} \pi a^4. \end{aligned}$$

**例12.1.6** 计算  $\iint_S \frac{dS}{x^2 + y^2 + z^2}$ , 其中  $S: x^2 + y^2 = a^2$  ( $0 \leq z \leq h$ ,  $h > 0$ ) 为介于平面  $z=0$  与平面  $z=h$  之间的圆柱面.



**解 【方法一】** 将曲面  $S$  投影到  $yOz$  坐标平面（注意，本题不适合投影到  $xOy$  平面. 为什么？），由于积分区域关于平面对称，而被积函数在此对称区域上是偶函数，所以原积分等于位于  $yOz$  前半部分曲面积分的2倍. 曲面  $S: x = \sqrt{a^2 - y^2}$ ，在  $yOz$  平面上的投影为

$$D_{yz} = \{(y, z) \mid -a \leq y \leq a, 0 \leq z \leq h\}.$$

因此

$$dS = \frac{a}{\sqrt{a^2 - y^2}} dy dz.$$

所以

$$\begin{aligned} \iint_S \frac{dS}{x^2 + y^2 + z^2} &= 2 \iint_{D_{yz}} \frac{a}{(a^2 + z^2)(\sqrt{a^2 - y^2})} dy dz \\ &= 2a \int_0^h \frac{dz}{a^2 + z^2} \int_{-a}^a \frac{dy}{\sqrt{a^2 - y^2}} \\ &= 2\pi \arctan \frac{h}{a}. \end{aligned}$$

**【方法二】** 类似于三重积分的截面法，有

$$\begin{aligned} \iint_S \frac{dS}{x^2 + y^2 + z^2} &= \iint_S \frac{dS}{a^2 + z^2} \\ &= \int_0^h \frac{1}{a^2 + z^2} dz \int_{C_z} ds \\ &= \int_0^h \frac{1}{a^2 + z^2} \cdot 2\pi a \cdot dz \\ &= 2\pi \arctan \frac{h}{a}. \end{aligned}$$

## 12.2 参数表示的曲面\*

我们已经知道两种表示曲面的方式：显式表示，如  $z = f(x, y)$ ；隐式表示，如  $F(x, y, z) = 0$ 。然而，使用更为广泛并且最方便的是用参数形式来表示的**参数曲面**

$$S: \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v), (u, v) \in D. \\ z = z(u, v) \end{cases}$$

其中  $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$  都是  $u, v$  的可微函数，设这些函数的定义域是  $uv$ -平面中的一个区域  $D$ ，那么上述参数表示就是给出一个从  $D$  到  $\mathbb{R}^3$  的一个映射

$$(u, v) \rightarrow (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

在这个映射下， $D$  的像集就构成了  $\mathbb{R}^3$  中的一个曲面  $S$ 。 $(u, v)$  称为曲面  $S$  的**曲线坐标**或**参数**，如图12.2.3. 参数曲面也经常表示成如下向量形式

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)).$$

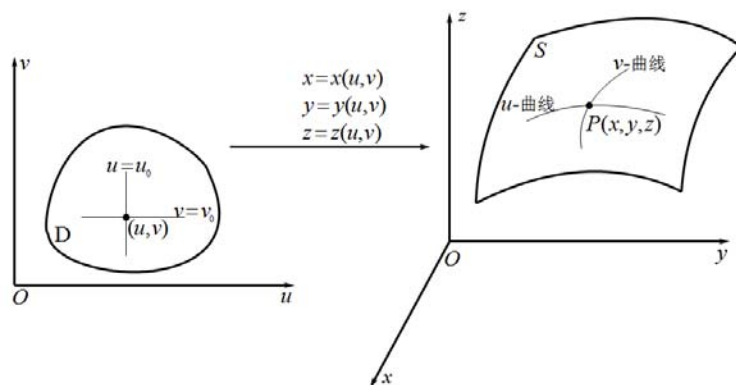


图12.2.3

设  $P_0$  是曲面  $S$  上的任一点, 其坐标是  $(u_0, v_0)$ , 若令  $v = v_0$  为常数而让  $u$  变动, 就得到曲面  $S$  上一条过  $P_0$  的曲线  $\mathbf{r}(u, v_0)$ , 称它是过  $P_0$  点的  $u$  坐标曲线, 简称  **$u$  曲线**. 而令  $u = u_0$  为常数而让  $v$  变动就可以得到曲面  $S$  上一条过  $P_0$  点的  $v$  坐标曲线  $\mathbf{r}(u_0, v)$ , 简称  **$v$  曲线**. 因此, 通过曲面  $S$  上的每一点都有一条  $u$  曲线和一条  $v$  曲线, 它们构成曲面  $S$  上的一个参数曲线网. 这两条参数曲线在  $P_0$  点的切向量分别是

$$\left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right|_{\substack{u=u_0 \\ v=v_0}} \quad \text{和} \quad \left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right|_{\substack{u=u_0 \\ v=v_0}}$$

或简记为

$$\mathbf{r}_u \Big|_{\substack{u=u_0 \\ v=v_0}} \quad \text{和} \quad \mathbf{r}_v \Big|_{\substack{u=u_0 \\ v=v_0}}.$$

如果这两个切向量彼此独立, 即它们的向量积  $\mathbf{r}_u \Big|_{\substack{u=u_0 \\ v=v_0}} \times \mathbf{r}_v \Big|_{\substack{u=u_0 \\ v=v_0}} \neq 0$ , 则称  $P_0$

为曲面  $S$  上的一个**正则点**, 否则就称它为**奇点**. 由正则点构成的曲面称为**正则曲面**, 在正则曲面上的每一点  $P(u, v)$ , 均有  $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \neq 0$ . 一般而言, 下面讨论的都是正则曲面.

下面举一些参数曲面的例子.

**例12.2.1** 圆柱面  $x^2 + y^2 = R^2 (R > 0)$  的参数表示为

$$x = R \cos u, \quad y = R \sin u, \quad z = v.$$

其中参数  $(u, v)$  的取值范围  $D = [0, 2\pi] \times [-\infty, +\infty]$  是一个带状区域. 这种参数表示是利用了柱面坐标,  $D$  中平行于  $u$ -轴的一条线段(就是  $v$  为定值), 对应于柱面上的  $u$  线为一个空间圆周;  $D$  中平行于  $v$ -轴的直线(就是  $u$  为定值), 对应于柱面上的  $v$  线为一条母线.

**例12.2.2** 球面  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2 (R > 0)$  可以用参数表示为

$$x = R \cos \varphi \cos \theta, \quad y = R \sin \varphi \cos \theta, \quad z = R \sin \theta,$$

其中参数  $(\theta, \varphi)$  的取值范围  $D = [0, 2\pi] \times [0, \pi]$  也是一个矩形. 这种参数表示是仿照了球坐标.  $D$  中平行于  $\theta$ -轴的一条线段(就是  $\varphi$  为定值), 对应于球面上的  $\theta$  线是一条纬线;  $D$  中平行于  $\varphi$ -轴的一条线段(就是  $\theta$  为定值), 对应于球面上的  $\varphi$  线是一条经线.

**例12.2.3** 圆锥面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  ( $0 \leq z \leq h$ ,  $h > 0$  为常数) 的参数表示为

$$x = v \sin \alpha \cos u, y = v \sin \alpha \sin u, z = v \cos \alpha,$$

其中  $\alpha$  为常数, 表示圆锥的张角  $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ , 参数  $(u, v)$  的取值范围

$D = [0, 2\pi] \times [0, h \sec \alpha]$  是一个矩形, 这个参数表示一个高度为  $h$ , 张角为  $2\alpha$  的圆锥面.

**定义12.2.4** 设  $S$  为参数曲面  $\mathbf{r}(u, v)$ , 则其在任一点  $P(u, v)$  处的**法向量**为沿参数曲线的两个切向量的向量积, 即  $\mathbf{n} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ , 称  $\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v$  确定的平面为曲面  $S$  在  $P(u, v)$  处的**切平面**.

下面考虑参数曲面  $S$  上的面元  $dS$  与  $uv$ -坐标系面元  $du dv$  之间的关系. 假设  $uv$ -坐标系内  $u$  的改变量为  $\Delta u$  时, 曲面  $S$  上沿  $u$  线移动的距离大约是  $|\mathbf{r}_u| \Delta u$ . 同理, 设  $uv$ -坐标系内  $v$  的改变量为  $\Delta v$  时, 曲面  $S$  上沿  $v$  线移动的距离大约是  $|\mathbf{r}_v| \Delta v$ , 因此, 由向量  $\mathbf{r}_u \Delta u, \mathbf{r}_v \Delta v$  所确定的平行四边形的面积就是  $dS$ , 所以有如下计算公式

$$dS = |\mathbf{r}_u du \times \mathbf{r}_v dv| = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv.$$

因为

$$\mathbf{r}_u = \left( \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right), \mathbf{r}_v = \left( \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial z} \right).$$

所以,  $P(u, v)$  点处的法向量为

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right) \times \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right) = \left(\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right).$$

若记  $E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2$ ,  $F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v$ ,  $G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2$  (一般称为曲面的 Gauss 系数), 那么面元之间的形变公式为

$$dS = \sqrt{EG - F^2} du dv.$$

因此, 关于参数曲面的第一类曲面积分公式为:

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG - F^2} du dv.$$

特别地, 对于一般的显式曲面  $z = z(x, y)$ , 也可看作参数曲面:

$$x = x, y = y, z = z(x, y), (x, y) \in D_{xy}.$$

计算  $E, F, G$  可得:

$$E = 1 + 0 + (z'_x)^2; F = 0 + 0 + (z'_x)(z'_y); G = 0 + 1 + (z'_y)^2;$$

因此有  $\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 1}$ , 这和前面的结论是一致的.

**例12.2.5** 计算  $\iint_S z dS$ , 其中  $S$  为螺旋面的一部分:  $x = u \cos v, y = u \sin v$ ,

$$z = v, 0 \leq u \leq a, 0 \leq v \leq 2\pi.$$

**解** 由于

$$E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 = \cos^2 v + \sin^2 v = 1,$$

$$F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v = -u \sin v \cos v + u \sin v \cos v = 0,$$

$$G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 = u^2 \sin^2 v + u^2 \cos^2 v + 1 = 1 + u^2.$$

所以

$$\begin{aligned} \iint_S z dS &= \iint_D v \sqrt{1 + u^2} du dv \\ &= \int_0^{2\pi} v dv \int_0^a \sqrt{1 + u^2} du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2\pi^2 \left[ \frac{u}{2} \sqrt{1+u^2} + \frac{1}{2} \ln(u + \sqrt{1+u^2}) \right] \Big|_0^a \\
&= \pi^2 \left[ a\sqrt{1+a^2} + \ln(a + \sqrt{1+a^2}) \right].
\end{aligned}$$

## 12.3 第二类曲面积分

第二类曲线积分考虑的是向量场在有向曲线上的积分，其值与曲线的方向选取有关. 本节将讨论向量场在曲面上的积分，它与曲面的“方向”选取也有关，这个“方向”就是曲面的法方向. 为此，需要说明曲面的定向问题.

考虑某光滑曲面 $S$ ，并在其上任取一点 $M$ ，过点 $M$ 作曲面 $S$ 的法向量 $\boldsymbol{n}$ ，当动点 $M$ 从 $M_0$ 出发，沿曲面 $S$ 上不越过其边界的任一封闭曲线连续地移动并回到点 $M_0$ 时，相应的法向量 $\boldsymbol{n}$ 也随之连续移动且回到原位置，如果其指向也不变，这种曲面称为**双侧曲面**或**可定向曲面**. 反之称为**单侧曲面**或**不可定向曲面**.

经典的单侧曲面例子就是**Möbius带**（麦比乌斯带），它是这样构造的：取一张矩形长纸带 $ABCD$ ，将一端 $CD$ 扭转 $180^\circ$ 与另一端 $AB$ 粘贴在一起，即 $A$ 与 $C$ 粘贴， $B$ 与 $D$ 粘贴，这样得到一个曲面 $S$ ，如图12.3.4，次曲面 $S$ 称之为麦比乌斯带.

考虑连接 $AB$ 中点和 $CD$ 中点的直线段，对应曲面 $S$ 上一条封闭曲线 $L$ ，取 $L$ 上一点 $M_0$ 和一个单位法向量 $\boldsymbol{n}_0$ ，当沿着 $L$ 绕一圈回到 $M_0$ 后，法向也变成了 $-\boldsymbol{n}_0$ ，因此，这是单侧曲面，不可定向的，它是由德国几何学家August Mobius（1790—1868）发现的，因此以他名字命名.

以后讨论中总是假设曲面 $S$ 是可定向的.

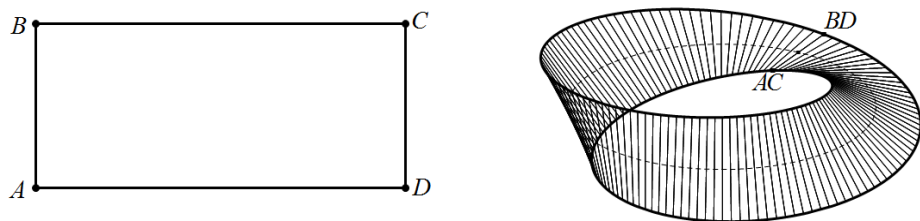


图12.3.4

当曲面  $S$  由显式函数  $z = f(x, y)$  表示时, 法向

$\mathbf{n} = (f'_x, f'_y, -1)$  与  $z$ -轴正向的夹角为锐角, 该法向称为曲面  $S$  的**上侧** (或**上方**), 因此,  $-\mathbf{n}$  确定的方向称为  $S$  的**下侧** (或**下方**).

如果  $S$  是一个闭曲面, 即  $S$  是  $\mathbb{R}^3$  中一个有界区域的边界, 规定从区域指向外部的法方向为  $S$  的**外侧** (或**正向**), 指向区域内部的法方向为  $S$  的**内侧** (或**负向**).

下面利用物理背景引出第二类曲面积分的概念. 考虑一个计算流量的问题, 设  $S$  是一个分片光滑的曲面, 取定一法方向  $\mathbf{n} = (x, y, z)$  设为正向, 流体以速度  $\mathbf{v}(x, y, z)$  从  $S$  的负侧流向正侧, 求单位时间内流过曲面  $S$  的流体的质量. 这里流速只与位置  $(x, y, z)$  有关而与时间无关.

设流体的密度为  $\rho(x, y, z)$ ,  $\mathbf{n}^\circ = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$  为  $\mathbf{n}(x, y, z)$  的单位向量, 其中  $\alpha, \beta, \gamma$  为  $\mathbf{n}(x, y, z)$  与  $x, y, z$  轴正向的夹角, 则时间  $t$  流体流过曲面的质量为

$$m = \iint_S \rho(x, y, z) \mathbf{v}(x, y, z) \cdot \mathbf{n}^\circ(x, y, z) t dS.$$

令  $\rho(x, y, z) \mathbf{v} = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ , 则在单位时间内 ( $t = 1$ ), 流过曲面  $S$  的质量为  $\iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS$ , 也称为向量场

$(P, Q, R)$  沿单位法向,  $\mathbf{n}^\circ$  通过曲面  $S$  的**通量**.

根据面积射影定理 (这里是带方向的), 有

$$\iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS = \iint_S P dydz + Q dzdx + R dxdy,$$

这里  $dydz = dS \cos \alpha$ ,  $dzdx = dS \cos \beta$ ,  $dxdy = dS \cos \gamma$  表示面元  $dS$  在三个坐

标平面  $yOz$  平面,  $xOz$  平面和  $xOy$  平面上的投影 (注意: 这里投影是带有方向的, 也即有正有负, 这和第一类曲面积分时的投影不同, 第一类的投影一定是正的, 所以, 当时  $\cos \alpha$  等方向余弦外面都加了绝对值). 另外,



请注意保持  $dydz, dzdx, dxdy$  的写法, 即不要把  $dzdx$  写成  $dxdz$ , 这里认为  $dzdx = -dxdy$ .

具体细节可以参考数学分析教材中有关外微分的内容.

**定义12.3.1** 设  $S$  是分片光滑曲面,  $\mathbf{n}^\circ$  为  $S$  的单位法向,  $\mathbf{f} = (P, Q, R)$  为  $S$  上的有界连续向量场, 称积分

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}^\circ dS &= \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS \\ &= \iint_S P dydz + Q dzdx + R dxdy\end{aligned}$$

为**第二类曲面积分**.

注意:

1. 上述定义的第二类曲面积分, 事实上是由三个独立的曲面积分组合而成

$$\iint_S P(x, y, z) dydz, \iint_S Q(x, y, z) dzdx, \iint_S R(x, y, z) dxdy$$

这三个曲面积分有各自独立的意义, 是面元在坐标平面  $yOz, xOz, xOy$  上投影的积分, 也称之为关于  $yz, zx, xy$  的第二类曲面积分, 不是说非要把它们加在一起才叫第二类曲面积分;

2. 称  $dS = \mathbf{n}^\circ dS = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = (dydz, dzdx, dxdy)$  为**有向面元**, 因此, 第二类曲面积分也可以写成  $\iint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S}$

3. 初学者应注意区分第二类曲面积分和二重积分. 以关于  $dxdy$  的积分为例(其他两个积分情况类似), 一方面两者积分区域有所不同, 一个积分区域是曲面  $S$ , 一个积分区域是平面区域  $D$ ; 另一方面要特别注意的是: 第二类曲面积分的  $dxdy$  是带有符号的(取正还是取负, 由曲面“取定的法向”和坐标平面  $xOy$  的法向即“ $z$ 轴正向”的夹角来确定, 如果夹角是锐角, 则取正, 如果夹角是钝角, 则取负), 而二重积分中的  $dxdy$

肯定是恒正的, 所以, 在把第二类曲面积分转成二重积分进行计算时, 一点要注意这个符号.

4. 在上述第二类曲面积分的定义中, 实际上也指明了两类曲面积分之间的关系:

$$\iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdx dy = \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) f = dS.$$

由此可见, 只要知道了指定法向的单位向量, 把第二类曲面积分转化成第一类曲面积分进行计算是很常见的, 这点不同于曲线积分, 原因是第二类曲面积分往往要计算三个投影积分, 而转成第一类之后, 只要计算一个投影积分即可.

设显式曲面  $z = f(x, y)$ , 并取该曲面的**上方**(如果取下方, 法向差个负号), 此时法向为  $(-f'_x, -f'_y, 1)$ , 所以单位法向为

$$(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = \left( \frac{-f'_x}{\sqrt{(f'_x)^2 + (f'_y)^2 + 1}}, \frac{-f'_y}{\sqrt{(f'_x)^2 + (f'_y)^2 + 1}}, \frac{1}{\sqrt{(f'_x)^2 + (f'_y)^2 + 1}} \right)$$

下面假设转换后的第一类曲面积分在  $xOy$  平面投影  $D_{xy}$  上计算, 得

$$\begin{aligned} \iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdx dy &= \iint_S (P, Q, R) \cdot (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) dS & (1) \\ &= \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS \\ &= \iint_{D_{xy}} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) \frac{dxdy}{|\cos \gamma|} \\ &= \iint_{D_{xy}} \left( P \frac{\cos \alpha}{|\cos \gamma|} + Q \frac{\cos \beta}{|\cos \gamma|} + R \frac{\cos \gamma}{|\cos \gamma|} \right) dxdy \\ &= \iint_{D_{xy}} (P, Q, R) \cdot (-f'_x, -f'_y, 1) dxdy. & (1') \end{aligned}$$

注意(1) 和(1')两式的区别, 前者是第一类曲面积分, 内积的是单位法向; 后者是二重积分, 内积的是法向而不是单位法向(这里和法向直接作内积的主要原因是, 该法向的第三个分量是1); 如果曲面是有隐式

$F(x, y, z) = 0$  给出, 法向为  $(F'_x, F'_y, F'_z)$ , 则上面的(1')式将变为

$$\iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdx dy = \iint_{D_{xy}} (P, Q, R) \cdot (F'_x, F'_y, F'_z) \frac{1}{|F'_z|} dxdy$$

上述公式不仅好记，而且使用非常方便，因此常用于计算第二类曲面积分。

5. 还可以把三个第二类曲面积分转换成一个第二类曲面积分，过程如下：设显式曲面  $z = f(x, y)$ ，法向为  $\pm(f'_x, f'_y, -1)$ （因为没有指定侧，所以不知取正还是取负），则有

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{\pm f'_x}{\sqrt{(f'_x)^2 + (f'_y)^2 + 1}}, \cos \beta = \frac{\pm f'_y}{\sqrt{(f'_x)^2 + (f'_y)^2 + 1}}, \cos \gamma = \frac{\mp 1}{\sqrt{(f'_x)^2 + (f'_y)^2 + 1}} \\ \iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdx dy &= \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS \\ &= \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) \frac{dxdy}{\cos \gamma} \\ &= \iint_S \left( P \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma} + \frac{Q \cos \beta}{\cos \gamma} + R \frac{\cos \gamma}{\cos \gamma} \right) dxdy \\ &= \iint_S (P, Q, R) \cdot (-f'_x, -f'_y, 1) dxdy. \quad (2) \end{aligned}$$

注意，上面 (2) 式与 (1') 的区别：前者是曲面积分，法向尚未指定；后者是二重积分（法向已指明为曲面上侧）。

6. 综上所述分析，第二类曲面积分  $\iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdx dy$  的计算方法有如下几种：

- 利用定义，三个第二类曲面积分分别投影到三个坐标平面进行各自的计算；
- 利用 (1) 式或者 (1')，把三个第二类曲面积分转成一个第一类曲面积分再计算；
- 利用 (2) 式，把三个第二类曲面积分都转成一个第二类曲面积分再计算；
- 以后学了高斯公式，对于封闭曲面，也常用高斯公式计算。

**例12.3.2** 计算  $\iint_S (x+z)dS$  和  $\iint_S (x+z)dxdy$ , 其中  $S$  为平面  $x+z=a$  在柱面  $x^2+y^2=a^2$  内那一部分的上侧.

**解** 设  $D_{xy}$  为曲面  $S$  在  $xOy$  坐标平面的投影, 则

$$\begin{aligned}\iint_S (x+z)dS &= a \iint_S dS = a \iint_{D_{xy}} \sqrt{2}dxdy = \sqrt{2}\pi a^3. \\ \iint_S (x+z)dxdy &= a \iint_S dxdy = a \iint_{D_{xy}} dxdy = \pi a^3.\end{aligned}$$

**例12.3.3** 计算积分  $\iint_S xydydz - x^2dzdx + (x+z)dxdy$ , 其中  $S$  是平面

$2x+2y+z=6$  在第一卦限的部分, 取  $S$  的上侧.

**解 【方法一】** 利用定义, 也即投影上的积分, 分别计算三个第二类曲面积分, 因为上侧故法向为  $(2,2,1)$ , 先算  $\iint_S xydydz$ , 易知  $S$  在  $yOz$  平面上的投影为

$$D_{yz} = \{(y, z) | 0 \leq y \leq 3, 0 \leq z \leq 6-2y\}.$$

又由于法向  $(2,2,1)$  与  $yOz$  平面的法向  $x$  轴的夹角为锐角, 故转成二重积分时取正, 所以

$$\begin{aligned}\iint_S xydydz &= \iint_{D_{yz}} xydydz \\ &= \int_0^3 dy \int_0^{6-2y} \left(\frac{6-z-2y}{2}\right) ydz \\ &= \frac{27}{4}.\end{aligned}$$

再算  $\iint_S -x^2dzdx$ , 易知  $S$  在  $xOz$  平面上的投影为

$$D_{xz} = \{(x, z) | 0 \leq x \leq 3, 0 \leq z \leq 6-2x\}.$$

又由于法向  $(2,2,1)$  与  $xOz$  平面的法向  $y$  轴的夹角为锐角, 故转成二重积分时取正, 所以

$$\iint_S -x^2dzdx = \iint_{D_{xz}} -x^2dxdz$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^3 dx \int_0^{6-2x} -x^2 dz \\
&= -\frac{27}{2}.
\end{aligned}$$

最后算  $\iint_S (x+z)dxdy$ , 易知  $S$  在  $xOy$  平面上的投影为

$$D_{xy} = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 3-x\}.$$

又由于法向  $(2, 2, 1)$  与  $xOy$  平面的法向  $z$  轴的夹角为锐角, 故转成二重积分时取正, 所以

$$\begin{aligned}
\iint_S (x+z)dxdy &= \iint_{D_{xy}} (x+(6-2x))dxdy \\
&= \int_0^3 dx \int_0^{3-x} (x+(6-2x-2y))dy \\
&= \frac{27}{2}.
\end{aligned}$$

所以, 所求的第二类曲面积分为:

$$\iint_S xydydz - x^2 dzdx + (x+z)dxdy = \frac{27}{4} - \frac{27}{2} + \frac{27}{2} = \frac{27}{4}.$$

**【方法二】**把三个第二类曲面积分转成一个第一类曲面积分, 再转成二重积分进行计算, 由于取面的上侧, 因此直接由有上面公式 (1') 知

$$\begin{aligned}
\iint_S xydydz - x^2 dzdx + (x+z)dxdy &= \iint_{D_{xy}} (xy, -x^2, x+(6-2x-2y)) \cdot (2, 2, 1) dxdy \\
&= \int_0^3 dx \int_0^{3-x} (2xy - 2x^2 - x - 2y + 6) dy \\
&= \frac{27}{4}.
\end{aligned}$$

**【方法三】**把三个第二类曲面积分转成一个第二类曲面积分, 直接由有上面公式 (2) 知:

$$\begin{aligned}
\iint_S xydydz - x^2 dzdx + (x+z)dxdy &= \iint_S (xy, -x^2, x+(6-2x-2y)) \cdot (2, 2, 1) dxdy \\
&= \iint_S (2xy - 2x^2 - x - 2y + 6) dxdy
\end{aligned}$$

因为取上侧, 上侧法向与  $xOy$  平面法向  $z$  轴正向夹角为锐角, 因此这个

第二类曲面积分由定义化为二重积分时应取正, 所以

$$\begin{aligned}\iint_S (2xy - 2x^2 - x - 2y + 6) dx dy &= \iint_{D_{xy}} (2xy - 2x^2 - x - 2y + 6) dx dy \\ &= \int_0^3 dx \int_0^{3-x} (2xy - 2x^2 - x - 2y + 6) dy \\ &= \frac{27}{4}.\end{aligned}$$

【注】: 三种解法都比较常用, 请注意熟悉和区分.

**例12.3.4** 设  $S$  是球面  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 (a > 0)$ , 法方向指向外侧, 计算

$$\oiint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy.$$

**解** 因为  $S$  的单位法向为  $(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}, \frac{z}{a})$ , 因此

$$\begin{aligned}\oiint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy &= \oiint_S (x, y, z) \cdot \left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}, \frac{z}{a}\right) dS \\ &= \oiint_S \frac{x^2 + y^2 + z^2}{a} dS \\ &= a \oiint_S dS = 4\pi a^3.\end{aligned}$$

**例12.3.5** 计算  $\iint_S z dy dz + x dz dx + y dx dy$ , 其中  $S$  是柱面  $x^2 + y^2 = 1$  被平面

$z = 0$  和  $z = 1$  所截部分, 法方向指向外侧.

**解** 先计算  $\iint_S z dy dz$ , 要计算  $S$  在  $yOz$  平面的投影, 需要把曲面  $S$  用  $yOz$

平面切成两块, 不妨设为左侧曲面  $S_1$  (在  $x$  轴负向一侧) 和右侧曲面  $S_2$  (在  $x$  轴正向一侧), 则由于法向指向曲面外侧, 因此左侧法向与  $x$  轴正向的夹角为钝角(取负), 而右侧法向与  $x$  轴正向的夹角为锐角(取正), 设  $D_{yz}$  为

曲面  $S_1$  或者  $S_2$  在  $yOz$  平面的投影, 因此

$$\begin{aligned}\iint_S z dy dz &= \iint_{S_1} z dy dz + \iint_{S_2} z dy dz \\ &= -\iint_{D_{yz}} z dy dz + \iint_{D_{yz}} z dy dz\end{aligned}$$

$$= 0.$$

同理,  $\iint_S xdzdx = 0$

因为  $S$  在  $xOy$  平面上的投影为 0, 所以  $\iint_S ydxdy = 0$ . 因此,

$$\iint_S zdydz + xdzdx + ydxdy = 0 + 0 + 0 = 0.$$

**例12.3.6** 计算  $\iint_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$ , 其中  $S$  为锥面

$z = \sqrt{x^2 + y^2}$  ( $0 \leq z \leq a$ ), 其法向量指向下方.

**解** 按定义逐个计算, 先算  $\iint_S x^2 dydz$ .

设平面  $x = 0$  将  $S$  对称地分为两部分  $S_1$  和  $S_2$ , 其中

$$S_1 = \{(x, y, z) \in S \mid x \leq 0\}, \quad S_2 = \{(x, y, z) \in S \mid x \geq 0\}.$$

由于法向指向下方, 因此  $S_1$  法向与  $x$  轴正向夹角为钝角 (取负),  $S_2$  法向与  $x$  轴正向夹角为锐角 (取正), 则  $D_{yz}$  为曲面  $S_1$  或者  $S_2$  在  $yOz$  平面的投影, 因此

$$\begin{aligned} \iint_S x^2 dydz &= \iint_{S_1} x^2 dydz + \iint_{S_2} x^2 dydz \\ &= -\iint_{D_{yz}} x^2 dydz + \iint_{D_{yz}} x^2 dydz \\ &= 0. \end{aligned}$$

同理可得,  $\iint_S y^2 dzdx = 0$ .

下面计算  $\iint_S z^2 dxdy$ . 因为法向指向下方, 所以  $S$  法向与  $z$  轴正向夹角为钝角 (取负), 又锥面在  $xOy$  平面的投影为  $D_{xy} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq a^2\}$ , 则

$$\begin{aligned} \iint_S z^2 dxdy &= -\iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) dxdy \\ &= -\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r^2 \cdot r dr \\ &= -\frac{\pi}{2} a^4. \end{aligned}$$

所以

$$\iint_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy = 0 + 0 - \frac{\pi}{2} a^4 = -\frac{\pi}{2} a^4$$

**例12.3.7** 计算  $\iint_S \frac{dydz}{x} + \frac{dzdx}{y} + \frac{dxdy}{z}$ , 其中  $S$  为椭球面  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  的外侧.

**解** 根据轮换对称性知, 只要计算一个积分, 例如, 计算  $\iint_S \frac{dxdy}{z}$ , 利用

广义极坐标  $x = ar \cos \theta, y = br \sin \theta$ , 即得

$$\begin{aligned} \iint_S \frac{dxdy}{z} &= \iint_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1} \frac{1}{c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} dxdy - \iint_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1} \frac{-1}{c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} dxdy \\ &= \frac{2}{c} \iint_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1} \frac{1}{c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} dxdy = \frac{2ab}{c} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{rdr}{\sqrt{1-r^2}} \\ &= \frac{4\pi ab}{c} (-\sqrt{1-r^2}) \Big|_0^1 = 4\pi \frac{ab}{c}. \end{aligned}$$

所以

$$\iint_S \frac{dydz}{x} + \frac{dzdx}{y} + \frac{dxdy}{z} = 4\pi \left( \frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \right).$$



## 12.4 Gauss 定理和 Stokes 定理

本节要讨论的 Gauss (高斯) 公式和 Stokes (斯托克斯) 公式是微积分基本定理在空间的推广.

从运算角度看, 这些定理都是把一种积分变成另一种积分, 因此, 在计算时, 通常可以比较, 然后选择较为简单的一种积分进行计算.

下面介绍高斯定理, 这里只在特殊条件下给出了证明.

**定理12.4.1 (高斯公式)** 设  $V$  是  $\mathbb{R}^3$  中的有界闭区域, 其边界  $S = \partial V$  是片光滑的闭曲面,  $S$  的法向量指向  $V$  的外部, 即取  $S$  的正向 (或外侧). 如果  $P, Q, R$  是定义在  $V$  上具有连续偏导的三元函数, 则

$$\iiint_V \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \oint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy.$$

**【注】:** 本定理一般叫高斯公式, 有时也叫奥高公式, 奥指奥斯特罗格拉茨基 (俄国数学家, 1801-1862), 高指高斯 (德国数学家, 1777-1855).

**证明** 只需分别证明下面三个公式

$$\iiint_V \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz = \iint_S P dy dz,$$

$$\iiint_V \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy dz = \iint_S Q dz dx,$$

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_S R dx dy.$$

由于三者的证明是类似的, 下面只证明第三式. 与格林公式的证明类似, 先考虑  $V$  是特殊区域的情形, 假设有界闭区域, 如图12.4.5,

$$V = \left\{ (x, y, z) \mid (x, y) \in D_{xy}, z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y) \right\},$$

其边界由下面三部分构成:

$$S_1: z = z_1(x, y), (x, y) \in D_{xy},$$

$$S_2: z = z_2(x, y), (x, y) \in D_{xy},$$

$S_3$ : 垂直于平面区域  $D_{xy}$  边界的柱面:

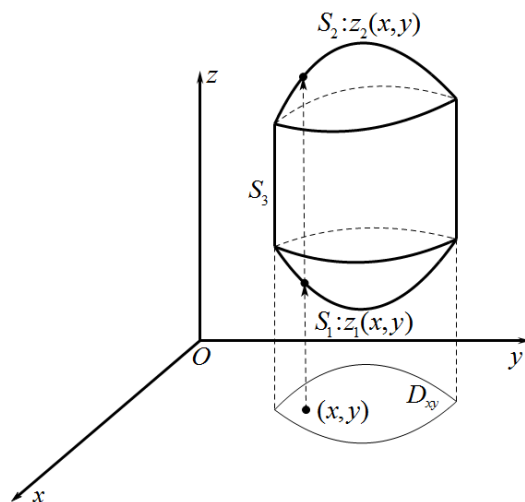


图 12.4.5

其中  $S_1$  的法向朝下,  $S_2$  的法向朝上,  $S_3$  的法向朝外, 这种区域称之为  $xy^-$  型区域, 则由三重积分的计算方法,

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz &= \iint_{D_{xy}} dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz \\ &= \iint_{D_{xy}} R(x, y, z_2(x, y)) dx dy - \iint_{D_{xy}} R(x, y, z_1(x, y)) dx dy \\ &= \iint_{S_2} R(x, y, z) dx dy + \iint_{S_1} R(x, y, z) dx dy \end{aligned}$$

由于  $S_3$  垂直于  $xOy$  平面, 因此  $\iint_{S_3} R(x, y, z) dx dy = 0$ .

所以

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_S R(x, y, z) dx dy.$$

对于  $xy^-$  区域  $V$  成立.

如果  $V$  可以分割为有限个  $xy^-$  型区域之并, 在每一个  $xy^-$  区域上使用

上述等式并相加，在公共边界曲面上，由于相邻的两个  $xy^-$  区域法向相反，因此曲面积分正负抵消，余下部分即为曲面积分  $\iint_S R dx dy$  . 一般情况下，

用分割为有限个  $xy^-$  区域之并的区域逼近  $V$ ，仍然可以证明

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_S R dx dy .$$

类似的，首先对  $yz^-$  型区域和  $xz^-$  型区域证明

$$\iiint_V \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz = \iint_S P dy dz ,$$

$$\iiint_V \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy dz = \iint_S Q dz dx ,$$

成立，再采用上面一样的讨论过程证明一般结论.

注：

1. 高斯公式适用于封闭曲面的第二类曲面积分，当  $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$  较为简单（例如是常数）时，使用高斯公式一般可以简化计算.

2. 如果曲面不封闭，可以适当添加一些简单曲面，如平行于坐标平面的平面片等使之封闭，然后利用高斯公式后，减去添加的简单曲面积分即可.

3. 对于封闭曲面  $S$  包围奇点的情形，当  $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0$  时，类似于曲线，

也可以选择合适的简单曲面  $S'$  把奇点挖去，把原曲面  $S$  上的积分转到新选曲面  $S'$  上的积分以简化计算.

**例12.4.2** 计算曲面积分  $\oiint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy$ ，其中  $S$  为球面

$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 (a > 0)$  的外侧.

**解** 设  $S$  围成的球体为  $V$ ，则由高斯公式知

$$\begin{aligned}
\iint_S xdydz + ydzdx + zdxdy &= \iiint_V (1+1+1)dxdydz \\
&= 3\iiint_V dxdydz \\
&= 3 \cdot \frac{4}{3}\pi a^3 = 4\pi a^3.
\end{aligned}$$

**例12.4.3** 计算积分  $\oiint_S x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy$ , 其中  $S$  为球面

$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  ( $a > 0$ ) 的外侧.

**解** 设  $V$  为球面所围成的球体, 则由高斯公式, 得

$$\begin{aligned}
\oiint_S x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy &= 3\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2)dxdydz \\
&= 3\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi d\varphi \int_0^R \rho^4 \sin \varphi d\rho \\
&= \frac{12}{5}\pi a^5.
\end{aligned}$$

**【注】**: 高斯公式中三重积分的被积函数  $x^2 + y^2 + z^2$  不能用  $a^2$  代入, 因为三重积分的积分区域是球体, 而不是球面.

**例12.4.4** 计算  $\iint_S z dS$  和  $\iint_S z dxdy$ , 其中  $S$  为半球面

$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  ( $y \geq 0$ ) 的外侧.

**解 【方法一】** 根据对称性, 知

$$\iint_S z dS = 0.$$

为计算第二类曲面积分, 用  $xOy$  坐标平面把  $S$  切成  $S_1$  ( $z \geq 0$ ) 和  $S_2$  ( $z \leq 0$ ) 两部分.

$$\begin{aligned}
\iint_S z dxdy &= \iint_{S_1} z dxdy + \iint_{S_2} z dxdy \\
&= \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dxdy - \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dxdy \\
&= 2 \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dxdy = 2 \int_0^\pi \int_0^a \sqrt{a^2 - r^2} r dr
\end{aligned}$$

$$= \frac{2}{3} \pi a^3.$$

**【方法二】** 添加圆面  $D_{xz} = \{(x, y, z) | y = 0, x^2 + z^2 \leq a^2\}$ , 使得  $S \cup D_{xz}$  围成一个半球体  $V$ , 因为  $\iint_{D_{xz}} z dx dy = 0$ , 所以由高斯公式得

$$\iint_S z dx dy = \oiint_{S \cup D_{xz}} z dx dy = \iiint_V dx dy dz = \frac{2}{3} \pi a^3.$$

**例12.4.5** 计算曲面积分  $\iint_S x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy$ , 其中  $S$  是锥面

$z^2 = x^2 + y^2$  介于平面  $z = 0$  和  $z = a (a > 0)$  之间的部分, 法向朝下.

**解** 由于  $S$  不是闭曲面, 所以得添加简单曲面使之封闭. 设  $S_1$  是平面  $z = a$  被椎体  $z^2 \geq x^2 + y^2$  所截部分, 法向朝上, 则  $S \cup S_1$  是闭曲面. 记  $V$  是由闭曲面  $S \cup S_1$  所围的有界闭区域, 由高斯公式知,

$$\iint_{S \cup S_1} x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy = \iiint_V 2(x + y + z) dx dy dz.$$

根据对称性, 有

$$\iiint_V x dx dy dz = \iiint_V y dx dy dz = 0.$$

而

$$\begin{aligned} \iiint_V z dx dy dz &= \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} dx dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^a z dz \\ &= \frac{1}{2} \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} (a^2 - x^2 - y^2) dx dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a (a^2 - r^2) r dr \\ &= \frac{\pi}{4} a^4. \end{aligned}$$

在  $S_1$  上, 有  $z = a$  是常数, 所以

$$\iint_{S_1} x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy = 0 + 0 + \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} a^2 dx dy = \pi a^4.$$

因此

$$\iint_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy = -\frac{3\pi}{4} a^4.$$

**例12.4.6** 计算曲面积分  $\iint_S (2x+z)dydz + zdxdy$ , 其中  $S$  是有向曲面

$z = x^2 + y^2 (0 \leq z \leq 1)$  的上侧.

**解** 本题可用四种方法求解.

**【方法一】** 首先利用定义, 分别计算二个第二类曲面积分, 先计算  $\iint_S (2x+z)dydz$ . 为此, 把曲面  $S$  分成  $S_1 (x \geq 0)$  和  $S_2 (x \leq 0)$ , 设  $D_{xy}$  表示  $S$  在

$yOz$  平面的投影, 则

$$\begin{aligned}\iint_S (2x+z)dydz &= \iint_{S_1} (2x+z)dydz + \iint_{S_2} (2x+z)dydz \\&= -\iint_{D_{yz}} (2\sqrt{z-y^2} + z)dydz + \iint_{D_{yz}} (-2\sqrt{z-y^2} + z)dydz \\&= -4\iint_{D_{yz}} \sqrt{z-y^2} dydz = -4\int_{-1}^1 dy \int_{y^2}^1 \sqrt{z-y^2} dz \\&= -\frac{8}{3} \int_{-1}^1 (1-y^2)^{\frac{3}{2}} dy \quad (\text{令 } y = \sin t) \\&= -\frac{16}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt = -\pi,\end{aligned}$$

再计算  $\iint_S zdxdy$ .

$$\iint_S zdxdy = \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^3 d\rho = \frac{\pi}{2},$$

因此

$$\iint_S (2x+z)dydz + zdxdy = -\pi + \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$$

**【方法二】** 把第二类曲面积分转化成第一类曲面积分, 再进行计算第一

类曲面积分.

$$\begin{aligned} n^\circ &= (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = \frac{-1}{\sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 1}} (z'_x, z'_y, -1) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}} (-2x, -2y, 1) \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \iint_S (2x + z) dydz + z dx dy &= \iint_S [(2x + z) \cos \alpha + z \cos \gamma] dS \\ &= \iint_S \frac{(2x + z)(-2x) + z}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}} dS \\ &= \iint_{D_{xy}} \frac{(2x + x^2 + y^2)(-2x) + (x^2 + y^2)}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx dy \\ &= \iint_{D_{xy}} [-4x^2 - 2x(x^2 + y^2) + (x^2 + y^2)] dx dy \\ &= -\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

当然, 本解法也可以用前面12.3的公式(1'), 直接得到

$$\iint_S (2x + z) dydz + z dx dy = \iint_{D_{xy}} [(2x + x^2 + y^2)(-2x) + (x^2 + y^2)] dx dy$$

后再进行计算.

**【方法三】**把题中二个第二类曲面积分都转成一个关于  $xOy$  平面投影的第二类曲面积分,

$$\begin{aligned} \iint_S (2x + z) dydz + z dx dy &= \iint_S \left[ (2x + z) \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma} + z \frac{\cos \gamma}{\cos \gamma} \right] dx dy \\ &= \iint_S [(2x + z)(-z'_x) + z] dx dy \\ &= \iint_{D_{xy}} [-4x^2 - 2x(x^2 + y^2) + (x^2 + y^2)] dx dy, \end{aligned}$$

由对称性知

$$\iint_{D_{xy}} x(x^2 + y^2) dx dy = 0; \quad \iint_{D_{xy}} 4x^2 dx dy = \iint_{D_{xy}} 2(x^2 + y^2) dx dy,$$

所以

$$\iint_S (2x+z)dydz + zdx dy = -\iint_{D_{xy}} (x^2+y^2)dx dy = -\frac{\pi}{2}.$$

**【方法四】**补成封闭曲面，再用高斯公式. 补顶上的圆盘盖子  $S'$ ，并取下侧，设封闭曲面所围有界闭区域为  $V$ ，则由高斯公式知，

$$\oiint_{S+S'} (2x+z)dydz + zdx dy = -\iiint_V \left[ \frac{\partial(2x+z)}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial z} \right] dx dy dz = -3 \iiint_V dx dy dz$$

(注意，上式中  $x, y, z$  均为独立的变量，因此  $\partial z / \partial x = 0$ ，接下来的三重积分用截面法得)  $= -3 \int_0^1 dz \iint_{x^2+y^2 \leq z} dx dy = -3 \int_0^1 \pi z dz = -\frac{3\pi}{2}$ ，下面计算“补面”的积分.

$$\iint_{S'} (2x+z)dydz + zdx dy = \iint_{S'} zdx dy = -\iint_{D_{xy}} 1dx dy = -\pi,$$

所以

$$\iint_S (2x+z)dydz + zdx dy = -\frac{3\pi}{2} - (-\pi) = -\frac{\pi}{2}.$$

**例12.4.7** 计算高斯积分  $\iint_S \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r^2} dS$ ，其中  $S$  为简单封闭光滑曲面， $\mathbf{n}$  为

曲面上任意一点  $(x, y, z) \in S$  处的外法向量， $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3 - S$  为三维空间一固定点， $\mathbf{r}$  为连接点  $(x_0, y_0, z_0)$  和点  $(x, y, z)$  径向量，其模

$$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}.$$

**解** 设外法向量的方向余弦为  $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ ，而径向量  $\mathbf{r}$  的单位向量为

$$\left( \frac{x-x_0}{r}, \frac{y-y_0}{r}, \frac{z-z_0}{r} \right).$$

因此

$$\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = \frac{x-x_0}{r} \cos \alpha + \frac{y-y_0}{r} \cos \beta + \frac{z-z_0}{r} \cos \gamma.$$



所以, 高斯积分

$$\iint_S \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r^2} dS = \iint_S \frac{x-x_0}{r^3} dydz + \frac{y-y_0}{r^3} dzdx + \frac{z-z_0}{r^3} dxdy.$$

令  $P = \frac{x-x_0}{r^3}, Q = \frac{y-y_0}{r^3}, R = \frac{z-z_0}{r^3}$ , 于是

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{r^3} - \frac{3(x-x_0)^2}{r^5}, \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{1}{r^3} - \frac{3(y-y_0)^2}{r^5}, \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{1}{r^3} - \frac{3(z-z_0)^2}{r^5},$$

它们仅在点  $(x_0, y_0, z_0)$  无定义, 且显然有

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0.$$

(1) 当曲面  $S$  不包围点  $(x_0, y_0, z_0)$  时, 有高斯公式知,

$$\iint_S \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r^2} dS = 0.$$

(2) 当曲面  $S$  包围  $(x_0, y_0, z_0)$  时, 以  $(x_0, y_0, z_0)$  为中心,  $\varepsilon$  为半径作一球  $V_\varepsilon$  包含在  $S$  内, 此球面记为  $S_\varepsilon$ , 取内侧, 将高斯公式用在体  $V - V_\varepsilon$  上, 即得

$$\iint_{S+S_\varepsilon} \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r^2} dS = 0.$$

但是因为在球面上径向量和内法向量大小相同方向相反, 有

$$\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = -1$$

所以

$$\iint_{S_\varepsilon} \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r^2} dS = \iint_{S_\varepsilon} \left(-\frac{1}{\varepsilon^2}\right) dS = -4\pi.$$

因此

$$\iint_S \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r^2} dS = 4\pi.$$

**例12.4.8** 设  $r = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2}$ , 计算

$$I = \iint_S \frac{x-1}{r^3} dydz + \frac{y-1}{r^3} dzdx + \frac{z-3}{r^3} dxdy.$$

其中曲面  $S$  分别是:

(1)  $S$  为立体  $\{(x, y, z) | |x| \leq 2, |y| \leq 2, |z| \leq 2\}$  的表面, 取外侧;

(2)  $S$  为立体  $\{(x, y, z) | |x| \leq 4, |y| \leq 4, |z| \leq 4\}$  的表面, 取外侧.

**解** 记  $P = \frac{x-1}{r^3}, Q = \frac{y-1}{r^3}, R = \frac{z-3}{r^3}, A = (P, Q, R)$ , 所以

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{r^3} - \frac{3(x-1)^2}{r^5}, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{1}{r^3} - \frac{3(y-1)^2}{r^5}, \quad \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{1}{r^3} - \frac{3(z-3)^2}{r^5}.$$

得

$$\operatorname{div} A = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0.$$

所以

(1) 设  $V$  为  $S$  所围立体, 由于  $V$  中不包含奇点  $(1, 1, 3)$ , 则由高斯公式知,

$$I = \iiint_V \operatorname{div} A dV = 0.$$

(2) 设  $V$  为  $S$  所围立体, 由于  $V$  中包含奇点  $(1, 1, 3)$ , 因此不能直接应

用高斯公式; 添加闭曲面  $S_1: (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 1$ , 再设  $V_1$  为曲面

$S_1$  所围成的立体, 则有

$$I = \oint_{S_1} (x-1) dydz + (y-1) dzdx + (z-1) dxdy = \iiint_{V_1} (1+1+1) dV = 4\pi.$$

**【注】:** 本题 (2) 最后能够应用高斯公式, 是因为添加曲面  $S_1$  之后, 分母是 1, 因此, 之前的奇点  $(1, 1, 3)$  也不再是新曲面积分的奇点了, 所以可以直接使用高斯公式了.

下面介绍另一个重要的公式：斯托克斯公式，这个公式建立了沿空间定向曲面  $S$  的积分与沿曲面  $S$  边界曲线  $L$  的积分之间的关系。在介绍斯托克斯公式之前，先规定  $L$  的正向是与曲面取定的法方向满足右手法则的走向，其反方向为负向。

**定理12.4.9（斯托克斯公式）** 设  $S$  是分片光滑的定向曲面，取定法方向，其边界  $L$  是按段光滑的连续曲线，如果  $(P, Q, R)$  是  $S$ （含  $L$ ）上连续可导的向量场，则

$$\iint_S \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \oint_L Pdx + Qdy + Rdz.$$

其中  $S$  的侧与  $L$  的方向按右手法则确定。

上述定理也称为斯托克斯公式。

**证明** 先证

$$\iint_S \frac{\partial P}{\partial z} dzdx - \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \oint_L Pdx,$$

利用前面把三种第二类曲面积分都转成一种第二类曲面积分的方法，设曲面  $S$  的方程为  $z = z(x, y)$ ，方向为上侧，曲面  $S$  在  $xOy$  平面的投影为  $D_{xy}$ ，再设  $D_{xy}$  的边界曲线为  $L'$ ，显然  $L'$  即为空间曲线  $L$  在  $xOy$  平面上的投影，于是上式左边：

$$\begin{aligned} \iint_S \frac{\partial P}{\partial z} dzdx - \frac{\partial P}{\partial y} dxdy &= \iint_S \frac{\partial P}{\partial z} \left( -\frac{\partial z}{\partial y} \right) dxdy - \frac{\partial P}{\partial y} dxdy \quad (\text{由12.3中(2)式}) \\ &= -\iint_S \left( \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \right) dxdy \quad (\text{由第二类曲面积分定义}) \\ &= -\iint_{D_{xy}} \frac{\partial}{\partial y} P(x, y, z(x, y)) dxdy \quad (\text{由格林公式}) \\ &= \oint_{L'} P(x, y, z(x, y)) dx \quad (\text{由第二类曲线定义}) \\ &= \oint_L P(x, y, z) dx. \end{aligned}$$

同理可以对其他两式进行证明, 最后三式相加即得斯托克斯公式.

注:

1. 为了方便记忆, 可以借助行列式的记号将斯托克斯公式写为

$$\iint_S \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \oint_L Pdx + Qdy + Rdz.$$

2. 斯托克斯公式是格林公式的推广, 格林公式可以看作是斯托克斯公式中曲面  $S$  位于  $xOy$  平面时的特殊情形, 此时  $S$  在  $xOz$  平面和  $yOz$  平面的

投影均为0, 即得  $\iint_S (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) dxdy = \oint_L Pdx + Qdy$ .

3. 通常用于计算两曲面交线的第二类曲线积分, 由于两曲面交线往往难以参数化, 所以利用斯托克斯公式先转成第二类曲面积分, 再转成第一类曲面积分然后计算, 这种计算过程比较常见.

4. 以  $L$  为边界的曲面  $S$  是可以任取的, 这由斯托克斯公式的证明过程即可看出. 另, 也可以利用高斯公式来说明, 假设  $S_1$  和  $S_2$  都是以空间曲线  $L$  为边界的光滑曲面, 则  $S_1 \cup S_2$  构成一个封闭曲面, 设其所围区域为  $V$ ,

假设  $(P, Q, R)$  具有连续的二阶导数, 则由高斯公式知

$$\begin{aligned} & \iint_{S_1 \cup S_2} (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}) dydz + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}) dzdx + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) dxdy \\ &= \iiint_V (\frac{\partial(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})}{\partial x} + \frac{\partial(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})}{\partial y} + \frac{\partial(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})}{\partial z}) dxdydz \\ &= \iiint_V ((\frac{\partial^2 R}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y}) + (\frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z}) + (\frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z})) dxdydz \\ &= 0. \end{aligned}$$

因此, 取定相同侧之后,  $S_1$  和  $S_2$  上的积分相同.

【注】：证明过程给出了下一节一个重要的结论，即旋度场的散度为0.

**例12.4.10** 计算曲线积分  $\oint_L ydx + zdy + xdz$ ，其中  $L$  为圆周

$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  与平面  $x + y + z = 0$  的交线，并且从  $x$  轴的正向看，方向是逆时针.

**解 【方法一】**从  $x$  轴的正向来看，是指眼睛位于  $x$  轴的正向的无穷远处，而不是朝着  $x$  轴的正向看去，这点要注意. 设  $S$  为以  $L$  为边界曲线的平面  $x + y + z = 0$  上的区域，根据斯托克斯公式中的右手法则， $S$  的法向应取

$(1, 1, 1)$ ，因此该法向的方向余弦为  $\cos \alpha = \cos \beta = \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$ .

于是，由斯托克斯公式得

$$\begin{aligned}\oint_L ydx + zdy + xdz &= -\iint_S dydz + dzdx + dxdy \\ &= -\iint_S (\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma) dS \\ &= -\sqrt{3} \iint_S dS = -\sqrt{3} \pi a^2.\end{aligned}$$

**【方法二】**直接参数化后计算. 由方程  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  与  $x + y + z = 0$  消去

$z$  得曲线  $L$  在平面  $xOy$  上的投影曲线方程  $x^2 + y^2 + xy = \frac{a^2}{2}$ ，作旋转变换

$x = \frac{x' - y'}{\sqrt{2}}, y = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}}$ ，则方程化为  $3x'^2 + y'^2 = a^2$ . 因而，曲线  $L$  的参数方程可以取为

$$x = \frac{a}{\sqrt{2}} \left( \frac{\cos t}{\sqrt{3}} - \sin t \right), y = \frac{a}{\sqrt{2}} \left( \frac{\cos t}{\sqrt{3}} + \sin t \right), z = \frac{a}{\sqrt{2}} \left( -\frac{2}{\sqrt{3}} \cos t \right) (0 \leq t \leq 2\pi).$$

于是，所求的曲线积分为

$$\int_L ydx + zdy + xdz = \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} \left[ -\left( \frac{\cos t}{\sqrt{3}} + \sin t \right) \left( \frac{\sin t}{\sqrt{3}} + \cos t \right) \right] dt$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{2}{\sqrt{3}}\cos t\left(\frac{-\sin t}{\sqrt{3}}+\cos t\right)+\frac{2}{\sqrt{3}}\sin t\left(\frac{\cos t}{\sqrt{3}}-\sin t\right)\Bigg]dt \\
& =\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)dt \\
& =\frac{a^2}{2}(-\sqrt{3})2\pi=-\sqrt{3}\pi a^2.
\end{aligned}$$

**例12.4.11** 利用斯托克斯公式证明例11.2.4.

**解** 设曲线  $L$  在平面上所围的区域为  $S$ , 方向向上; 曲面  $S$  的法向量  $\boldsymbol{n}=\{1,0,1\}$ . 根据斯托克斯公式, 有

$$\begin{aligned}
\oint_{L^+} ydx+zdy+xdz &= -\iint_S dydz+dzdx+dx dy \\
&= -\iint_{y^2+2(z-a)^2\leq a^2} dydz-\iint_{2x^2+y^2\leq a^2} dx dy \\
&= -\frac{\pi a^2}{\sqrt{2}}-\frac{\pi a^2}{\sqrt{2}}=-\sqrt{2}\pi a^2.
\end{aligned}$$

**例12.4.12** 计算  $\oint_L (y^2+z^2)dx+(x^2+z^2)dy+(x^2+y^2)dz$ , 其中  $L$  是两曲面

$x^2+y^2+z^2=2Rx, x^2+y^2=2rx (0<r<R, z>0)$  的交线, 从  $x$  轴正向看为逆时针.

**解** 因为取球面的外侧, 所以球面法向的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{x-R}{R}, \cos\beta=\frac{y}{R}, \cos\gamma=\frac{z}{R}.$$

所以, 由斯托克斯公式得

$$\begin{aligned}
& \oint_L (y^2+z^2)dx+(x^2+z^2)dy+(x^2+y^2)dz \\
&= \iint_S 2(y-z)dydz+2(z-x)dzdx+2(x-y)dx dy \\
&= 2\iint_S [(y-z)\cos\alpha+(z-x)\cos\beta+(x-y)\cos\gamma]dS \\
&= 2\iint_S \left[(y-z)\frac{x-R}{R}+(z-x)\frac{y}{R}+(x-y)\frac{z}{R}\right]dS
\end{aligned}$$

$$= 2 \iint_S (z - y) dS.$$

由于曲面  $S$  关于  $xOz$  平面对称, 被积函数  $y$  关于  $xOz$  平面是奇函数, 故

$$\iint_S y dS = 0.$$

所以

$$\begin{aligned} \oint_L (y^2 + z^2) dx + (x^2 + z^2) dy + (x^2 + y^2) dz &= 2 \iint_S z dS \\ &= 2 \iint_S R \cos \gamma dS \\ &= R \iint_S dx dy = 2\pi R r^2. \end{aligned}$$

所谓**空间线单连通区域** $V$ , 是指 $V$ 内任一封闭曲线都可以不经过 $V$ 以外的点而连续收缩于属于 $V$ 的一点, 如球体是空间线单连通区域, 球体内挖去一点也是空间线单连通区域, 环状区域(像汽车轮胎, 救生圈等)就不是空间线单连通区域. 空间线单连通区域的概念主要用于空间曲线积分与路径无关性.

与平面曲线积分类似, 空间曲线积分也路径无关性也有下述相应的定理.

**定理12.4.13** 设 $V \subset \mathbb{R}^3$ 为空间线单连通区域, 若函数 $P, Q, R$ 在 $V$ 上连续且有一阶连续偏导数, 则下面是个条件是等价的:

1. 对 $V$ 内任一按段光滑的封闭曲线 $L$ 都有 $\oint_L P dx + Q dy + R dz = 0$ ;
2. 对 $V$ 内任一按段光滑的曲线 $L$ , 曲线积分 $\oint_L P dx + Q dy + R dz$ 与路径无关;
3.  $P dx + Q dy + R dz$ 是 $V$ 内某一函数 $u$ 的全微分, 即

$$du = P dx + Q dy + R dz;$$

4.  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}$ 在 $V$ 内处处成立.

**【注】:** (1) 由于该定理与定理11.4.2的证明相似, 这里就不再重复了;

(2) 如果上述定理中条件4成立, 则称 $(P, Q, R)$ 为 $\mathbb{R}^3$ 中的保守场.

**例12.4.14** 计算  $\int_L (x^2 - yz)dx + (y^2 - xz)dy + (z^2 - xy)dz$  , 其中  $L$  是沿着螺旋线  $x = a \cos \theta, y = a \sin \theta, z = \frac{h}{2\pi} \theta$  从点  $A(a, 0, 0)$  到点  $B(a, 0, h)$  的曲线.

**解 【方法一】** 记  $P = x^2 - yz, Q = y^2 - xz, R = z^2 - xy$  , 容易验证

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}$$

又整个空间无奇点, 因此曲线积分与路径无关, 所以取  $L_1$  为连接  $A, B$  的直线段, 方向为从  $A$  到  $B$ , 则

$$\begin{aligned} & \int_L (x^2 - yz)dx + (y^2 - xz)dy + (z^2 - xy)dz \\ &= \int_{L_1} (x^2 - yz)dx + (y^2 - xz)dy + (z^2 - xy)dz \\ &= \int_0^h z^2 dz \\ &= \frac{1}{3} h^3. \end{aligned}$$

**【方法二】** 容易验证  $(x^2 - yz, y^2 - xz, z^2 - xy)$  是保守场, 因此有原 (势) 函数, 利用类似定理11.4.2计算原函数的方法得

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} (x^2 - yz)dx + (y^2 - xz)dy + (z^2 - xy)dz \\ &= \int_0^x x^2 dx + \int_0^y y^2 dy + \int_0^z (z^2 - xy)dz \\ &= \frac{1}{3}(x^2 + y^2 + z^2) - xyz \end{aligned}$$

为  $(x^2 - yz, y^2 - xz, z^2 - xy)$  的一个原函数, 所以

$$\int_L (x^2 - yz)dx + (y^2 - xz)dy + (z^2 - xy)dz = u(B) - u(A) = \frac{1}{3} h^3.$$

注: 本题也可以根据参数方程直接进行第二类曲线积分的计算.



## 12.5 场论初步

多元微积分在物理学和力学的应用中, 采用场的概念表述更为方便.

### 一、场的概念

若对全空间或者其中某一区域 $V$ 中的每一点, 都有一个数量(或向量)与之对应, 则称在 $V$ 上给定了一个**数量场**(或**向量场**). 数量场也叫标量场, 向量场也叫矢量场.

例如, 温度场和密度场就是数量场, 重力场(万有引力场)和速度场都是向量场.

在空间引入直角坐标系之后, 空间的点就可以由坐标来表示, 因此给定了某个数量场就等于给定了一个数量函数  $u(x, y, z)$ ; 给定了一个向量场就是给定了一个向量函数  $A(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ ,

这里  $P, Q, R$  是  $V$  上的数量函数, 并假设它们有连续的偏导数.

需要注意的是, 场的性质是它自己的属性, 和坐标系的引入无关. 引入某个坐标系是为了便于通过数学方法来研究它的性质, 下面讨论的场的一些概念虽然是在所选的坐标系下建立的, 但都可以证明它和坐标系的选取是无关的.

### 二、梯度场

由数量函数  $u(x, y, z)$  的梯度  $\text{grad} u = (\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z})$  定义的向量场, 称为**梯度场**(保守场或势量场).  $u$  称为梯度场的**势函数**(原函数).

因为满足方程  $u(x, y, z) = C$  ( $C$  为常数) 的所有的点  $(x, y, z)$  通常是一个曲面, 在这个曲面上函数  $u$  都取相同的函数值, 因此常称它为**等值面**.

由等值面方程知其法向为  $(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z})$ , 即梯度方向与等值面是正交的.

引进符号向量  $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ ,  $\nabla$  常称为哈密顿 (**Hamilton**) 算子,

读作 “Nabla”, 利用这个算子, 梯度可以写为  $\text{grad}u = \nabla u$ .

### 三、散度场

设  $A(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$  为空间区域  $V$  上的向量

函数, 对  $V$  上每一点  $(x, y, z)$  定义的数量函数  $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}$

称为向量函数  $A$  在点  $(x, y, z)$  处的**散度** (*divergence*), 记作  $\text{div}A$ . 因此,

向量场  $A$  的散度, 构成了一个数量场, 称为**散度场**.

有了散度的定义后, 前面的高斯公式就可以写成

$$\iiint_V \text{div}A dV = \oiint_S A \cdot dS.$$

在物理上, 等号右侧通常理解为流速为  $A$  的不可压缩流体经过封闭曲面  $S$  的**通量** (或流量).  $\text{div}A > 0$  的点称为**源**,  $\text{div}A < 0$  的点称为**汇**; 称散度处处为零的向量场为**无源场**.

由前面引进的算子  $\nabla$ , 向量场  $A$  的散度可记为

$$\text{div}A = \nabla \cdot A.$$

### 四、旋度场

设  $A(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$  为空间区域  $V$  上的向量

函数, 对  $V$  上每一点  $(x, y, z)$  定义的向量函数

$$(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})$$

称为向量函数  $A$  在点  $(x, y, z)$  处的**旋度** (*rotation*), 记作  $\text{rot}A$ . 注意, 旋

度只对三维空间有定义. 由向量函数  $A(x, y, z)$  的旋度  $\text{rot}A$  定义的向量

场, 称为**旋度场**.

利用旋度，斯托克斯公式可以写为

$$\iint_S \text{rot} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}.$$

在物理上，等号右侧通常理解为沿闭曲线  $L$  的**环流量**。

旋度意义：假设一块小平板丢在水流中，发现小平板在水流中会旋转，这是因为在小平板的边界曲线上每一点处，水流速度  $\mathbf{A}$ （包括大小和方向）是不一样的，这就导致了小平板旋转起来，但是这个旋转的程度怎么度量呢？根据上面改写的斯托克斯公式知，水流速度  $\mathbf{A}$  沿着小平板边界曲线积分是环流，显然环流越大，小平板旋转越厉害（？），根据改写的斯托克斯公式的左侧被积表达式可知，当流速的旋度场  $\text{rot} \mathbf{A}$  和有向面元  $d\mathbf{S}$  方向重合时，积分达到最大。此时环流最大，旋转最厉害。

类似的，由前面引进的算子  $\nabla$ ，向量场  $\mathbf{A}$  的旋度可记为

$$\text{rot} \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A}.$$

称旋度为零的向量场为**无旋场**。

对于之前微积分中遇到的几个定理，可以用物理中场论的概念进行“翻译”：

1. 一维情形：标量场  $u$  两点间差值  $u(B) - u(A)$  等于其梯度场的环流量

$$\int_{L_{AB}} \nabla u \cdot d\mathbf{s}$$

而与两点间路径选择无关；

2. 二维情形：向量场  $\mathbf{A}$  的（闭）环流量  $\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}$  等于其旋度场的流量

$$\iint_S \text{rot} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}.$$

3. 三维情形：向量场  $\mathbf{A}$  的（闭）流量  $\oiint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$  等于其散度在体内的三重积分

$$\iiint_V \text{div} \mathbf{A} dV.$$

容易验证：

- a)  $\text{rot}(\text{grad} u) = 0$ ，即梯度场是无旋场。如果区域是单连通的，这个命题的逆命题也成立，只要利用前面定理12.4.12即可。

$\text{rot} \mathbf{A} = 0 \Leftrightarrow$  环量为0 (闭线积分0)  $\Leftrightarrow$  有势场 (有原函数)  $\Leftrightarrow$  保守场 (路径无关); 因此, 这个命题也就是说: 无旋场必有数量势 (函数).

b)  $\text{div}(\text{rot} \mathbf{A}) = 0$ , 即旋度场是无源场. 这个命题的逆命题在一定条件也是成立的, 由于涉及到偏微分方程解的存在性, 这里就不具体叙述了. 这个命题也就是说: 一个向量场  $\mathbf{A}$  如果正好是“另一个向量场  $\mathbf{B}$  的旋度场”, 当且仅当  $\mathbf{A}$  是无源场;

**定义12.5.1** 若一个向量场  $\mathbf{A}$  既是无源场, 又是无旋场, 则  $\mathbf{A}$  称为**调和场**.

若  $\mathbf{A}$  是一个调和场, 必有

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \nabla u = \mathbf{A};$$

因此有

$$\nabla \cdot \nabla u = \nabla^2 u = \Delta u = 0,$$

其中

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

称为拉普拉斯算子, 即势函数  $u$  满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

这时称  $u$  满足拉普拉斯方程 (调和方程),  $u$  称为**调和函数**.

物理中常提到的“三场”是指无旋场、无源场和调和场; 经常提到的“三度”是指梯度、散度、旋度, 其中梯度表示了数量场方向导数最大的方向; 散度是向量场流量 (通量) 的密度; 旋度是向量场环量 (环流量) 的密度.

**例12.5.2** 调和函数  $u$  的特征就是对含在空间区域  $V$  中的任一闭曲面  $S$ ,

其中  $n$  为闭曲面的外法向, 都满足  $\oint_S \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0$ .

**证明** 设  $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$  为闭曲面外法向的方向余弦, 则

$$\begin{aligned}
\oint_S \frac{\partial u}{\partial n} dS &= \oint_S (u_x \cos \alpha + u_y \cos \beta + u_z \cos \gamma) dS \\
&= \oint_S u_x dydz + u_y dzdx + u_z dxdy \\
&= \iiint_V (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) dxdydz = 0
\end{aligned}$$

**例12.5.3** 调和函数  $u$  的特征就是对含在平面区域  $D$  中的任一闭曲线  $L$ ,

其中  $n$  为曲线的外法向, 都满足  $\oint_L \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0$ .

**解** 设  $(\cos \alpha, \cos \beta)$  为闭曲线沿着正方向切向的方向余弦, 则

$$\begin{aligned}
\oint_L \frac{\partial u}{\partial n} ds &= \oint_L (u_x \cos \alpha + u_y \cos \beta) ds \\
&= \oint_L u_x dy - u_y dx \\
&= \iint_D (u_{xx} + u_{yy}) dxdy = 0.
\end{aligned}$$

## 习 题 12.1

1. 计算下面第一类曲面积分:

(1)  $\iint_S y ds$ , 其中  $S$  是平面  $3x + 2y + z = 6$  在第一卦限部分;

(2)  $\iint_S \frac{1}{(1+x+y)^2} dS$ , 其中  $S$  是平面  $x + y + z = 1$  与三个坐标平面围成的四面体的表面;

(3)  $\iint_S (x^2 z + y^2 z) dS$ , 其中  $S$  是上半球面  $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ ;

(4)  $\iint_S xyz dS$ , 其中  $S$  是球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  被锥面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  所截上面部分;

(5)  $\iint_S (x^2 y + z^2) dS$ , 其中  $S$  是柱面  $x^2 + y^2 = 9$  在平面  $z = 0$  和  $z = 2$  之间的部分;

(6)  $\iint_S \sqrt{1 + x^2 + y^2} dS$ , 其中  $S$  是抛物面  $z = x^2 + y^2$  在平面  $z = 0$  和  $z = 2$  之间的部分;

(7)  $\iint_S (x^2 + y^2 + z^2) dS$ , 其中  $S$  是锥面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  被圆柱面

$x^2 + y^2 = 2ax$  ( $a > 0$ ) 截下的部分;

(8)  $\iint_S (x^2 + y^2 + z^2) dS$ , 其中  $S$  为八面体  $|x| + |y| + |z| = a$ , ( $a > 0$ ) 的表面;

(9)  $\iint_S yz dS$ , 其中  $S$  是由参数  $x = u \cos v$ ,  $y = u \sin v$ ,  $z = v$ ,

( $0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 2\pi$ ) 表示的曲面;

(10)  $\iint_S z^2 dS$ , 其中  $S$  是螺旋面  $x = u \cos v$ ,  $y = u \sin v$ ,  $z = v$ ,

( $0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 2\pi$ ).

2. 设圆锥面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}, 1 \leq z \leq 4$  在点  $(x, y, z)$  的密度函数

$\rho(x, y, z) = 10 - z$ ，求锥面的质量.

3. 求密度均匀分布的球面对球面外某一质点的引力.

4. 圆锥面  $z^2 = x^2 + y^2, 0 \leq z \leq a$  有均匀密度  $\rho > 0$ ，求

(1) 圆锥面的质心坐标；

(2) 圆锥面关于  $z$  轴的转动惯量.

## 习 题 12.2

5. 将下列曲面的参数表示化为隐式表示并指出是何种曲面:

$$(1) \quad (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = (x_0 + a_1 u + b_1 v, y_0 + a_2 u + b_2 v, z_0 + a_3 u + b_3 v);$$

$$(2) \quad (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = (au \cos v, bu \sin v, u^2);$$

$$(3) \quad (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = (a \sin u \cos v, b \sin u \sin v, c \cos u);$$

$$(4) \quad (x(x, v), y(u, v), z(u, v)) = (u, u \sin v, u \cos v).$$



### 习 题 12.3

6. 求下面第二类曲面积分:

(1)  $\iint_S (y-z)dydz + (x+y+z)dxdy$ ,  $S$  是三个坐标平面与平面

$x=1, y=1, z=1$  所围成的正方体的表面, 法方向指向外部;

(2)  $\iint_S xdydz + ydzdx + zdxdy$ ,  $S$  是柱面  $x^2 + y^2 = 1$  在平面  $z=0$  和  $z=3$  之

间的部分, 法方向指外部;

(3)  $\iint_S (y-z)dydz + (z-x)dzdx + (x-y)dxdy$ ,  $S$  是锥面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  及平

面  $z=a(a>0)$  所围成立体的表面, 法方向指向外部;

(4)  $\iint_S (-y)dydz + xdzdx$ ,  $S$  在平面  $z=8x-4y-5$  上, 且它在  $xOy$  平面

上的投影是以  $(0,0), (0,1), (1,0)$  为顶点的三角形, 取上侧;

(5)  $\iint_S x^3 dydz$ ,  $S$  是椭球面  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  的下半部分, 法方向指向下

侧;

(6)  $\iint_S \frac{1}{x} dydz + \frac{1}{y} dzdx + \frac{1}{z} dxdy$ ,  $S$  是球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , 法方向指向

外部;

(7)  $\iint_S \frac{xdydz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$ ,  $S$  是球面  $x^2+y^2+z^2=1$ , 法方向指向外部;

(8)  $\iint_S (x-a)^2 dydz + (y-b)^2 dzdx + (z-c)^2 dxdy$ ,  $S$  是球面  $x^2+y^2+z^2=1$ ,

法方向指向外部;

(9)  $\iint_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$ ,  $S$  是球面  $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$

的外侧.

7. 利用第二类曲面积分计算下列物理量:

(1) 设流速场  $\mathbf{v} = (c, y, 0)$ ,  $c$  是常数, 求单位时间内从球面  $x^2+y^2+z^2=1$  内部流出球面的流量;

(2) 设流速场  $\mathbf{v} = (yz, zx, xy)$ , 求单位时间流出圆柱  $x^2+y^2 \leq a^2, 0 \leq z \leq h$  的侧表面的流量;

(3) 设磁场强度为  $\mathbf{E}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ , 求从球内出发通过上半球面  $x^2+y^2+z^2=a^2 (a>0)$  的磁通量.

### 习 题 12.3

8. 利用高斯 (Guass) 定理计算下列积分:

(1)  $\iint_S xz^2 dydz + (x^2y - z^2)dzdx + (2xy + y^2z)dxdy$ ,  $S$  是上半球面

$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ , 法方向朝上;

(2)  $\iint_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$ ,  $S$  是正方体  $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a, 0 \leq z \leq a$

的表面取外侧;

(3)  $\iint_S (y-z)dydz + (z-x)dzdx + (x-y)dxdy$ ,  $S$  为柱面  $x^2 + y^2 = 1$  在平面

$z=0$  和  $z=3$  所围区域的表面取外侧;

(4)  $\iint_S x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy$ ,  $S$  是球面  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ , 法方向指向

外部;

(5)  $\iint_S 2xz dydz + ydzdx - z^2 dxdy$ ,  $S$  是椭圆柱面  $x^2 + 4y^2 = 16$  与平面  $z=0$ ,

$z=y$  所围区域的表面, 法方向指向外部;

(6)  $\iint_S (x^2 \cos \alpha + y^2 \cos \beta + z^2 \cos \gamma) dS$ ,  $S$  为部分圆锥面  $x^2 + y^2 = z^2$

$(0 \leq z \leq h)$ ,  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  为此曲面外法向的方向余弦;

(7)  $\iint_S (x-y+z)dydz + (y-z+x)dzdx + (z-x+y)dxdy$ ,  $S$  为曲面

$|x-y+z| + |y-z+x| + |z-x+y| = 1$  的外侧;

(8)  $\oiint_S \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r^2} dS$ ,  $S$  为任一不过原点的闭曲面, 其中  $\mathbf{n}$  为  $S$  上点  $(x, y, z)$

处的外法向矢量,  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ,  $r = |\mathbf{r}|$ .

9. 证明: 以光滑曲面  $S$  为边界的立体的体积

$$V = \frac{1}{3} \oiint_S (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS,$$

其中  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  为曲面  $S$  外法线的方向余弦.

10. 证明: 若  $S$  为封闭的简单曲面, 而  $\mathbf{l}$  为任意的固定方向, 则

$$\oiint_S \cos(\mathbf{n}, \mathbf{l}) dS$$

其中  $\mathbf{n}$  为曲面  $S$  外法矢量.

11. 利用斯托克斯 (Stokes) 公式计算下列积分:

(1)  $\oint_L y^2 dx + xy dy + xz dz$ ,  $L$  是上半球面  $S: x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$  的边界,  $S$  的法方向向上;

(2)  $\oint_L y dx + z dy + x dz$ ,  $L$  是曲面  $S = \{(x, y, z) | z = 1 - x^2 - y^2, z \geq 0\}$  的边界,  $S$  的法方向向上;

(3)  $\oint_L xz dx - y dy + x^2 y dz$ ,  $S$  是平面  $3x + y + 3z = 6$  在第一卦限部分, 法方向向上,  $L$  是其边界;

(4)  $\oint_L (y - z) dx + (z - x) dy + (x - y) dz$ ,  $L$  是柱面  $x^2 + y^2 = 1$  与平面  $x + z = 1$  的交线, 从  $x$  轴正向看,  $L$  是逆时针方向;

(5)  $\oint_L y dx + z dy + x dz$ ,  $L$  是球面  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  与平面  $x + y + z = 0$  的交线, 从  $x$  轴正向看,  $L$  是逆时针方向;

(6)  $\oint_L (y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz$ ,  $L$  是柱面  $x^2 + y^2 = 2y$  与平面

$y=z$  的交线, 从  $y$  轴正向看,  $L$  是逆时针方向;

(7)  $\oint_L ydx + zdy + xdz$ ,  $L$  为曲线  $x^2 + y^2 + z^2 = 2z, x+z=1$ , 从  $z$  轴正向看去, 曲线取逆时针方向.

## 习 题 12.4

12. 计算下列向量场的旋度和散度:

$$(1) \mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 - yz)\mathbf{i} + (y^2 + xz)\mathbf{j} + (z^2 + xy)\mathbf{k}$$

$$(2) \mathbf{F}(x, y, z) = x^2 \sin y \mathbf{i} + y^2 \sin(xz) \mathbf{j} + xy \sin(\cos z) \mathbf{k}$$

13. 证明下列性质 (设  $f, g, \varphi$  有足够的可导性) :

$$(1) \operatorname{div}(\mathbf{f} + \mathbf{g}) = \operatorname{div} \mathbf{f} + \operatorname{div} \mathbf{g}$$

$$(2) \operatorname{rot}(\mathbf{f} + \mathbf{g}) = \operatorname{rot} \mathbf{f} + \operatorname{rot} \mathbf{g}$$

$$(3) \operatorname{div}(\varphi \mathbf{f}) = \varphi \operatorname{div} \mathbf{f} + \nabla \varphi \cdot \mathbf{f}$$

$$(4) \operatorname{rot}(\varphi \mathbf{f}) = \varphi \operatorname{rot} \mathbf{f} + \nabla \varphi \times \mathbf{f};$$

$$(5) \operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{f}) = 0, \text{ 即旋度场是无源场.}$$

14. 设力场  $\mathbf{F}(x, y, z) = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$ .

(1) 说明  $\mathbf{F}$  是否为保守场;

(2) 计算沿参数曲线  $x = \cos t, y = \sin t, z = e^t$  ( $0 \leq t \leq \pi$ ) 移动质点时,  $\mathbf{F}$  所做的功;

(3) 计算沿从点  $(1, 0, 1)$  到点  $(-1, 0, e^\pi)$  的直线段移动质点时,  $\mathbf{F}$  所做的功.

14. 证明任何形如  $\mathbf{f}(x, y, z) = g(x)\mathbf{i} + h(y)\mathbf{j} + s(z)\mathbf{k}$  的向量场是无旋场, 其中  $g, h, s$  是可导函数.

15. 证明任何形如  $\mathbf{f}(x, y, z) = g(y, z)\mathbf{i} + h(x, z)\mathbf{j} + s(x, y)\mathbf{k}$  的向量场是无源

场, 其中  $g, h, s$  是可导数量场.

16. 判断下面的向量场是否为保守场, 如果是, 给出相应的势函数:

(1)  $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  ;

(2)  $\mathbf{F}(x, y, z) = 2xy^3\mathbf{i} + x^2z^3\mathbf{j} + 3x^2yz^2\mathbf{k}$  ;

(3)  $\mathbf{F}(x, y, z) = (y^2 \cos x + z^3, -4 + 2y \sin x, 3xz^2 + 2)$  ;

(4)  $\mathbf{F}(x, y, z) = (4xy - 3x^2z^2 + 1, 2(1 + x^2), -(2x^3z + 3z^2))$  ;

(5)  $\mathbf{F}(x, y, z) = (y \cos(xy), x \cos(xy), \sin z)$

17. 计算第二类曲线积分

$$\int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} \frac{x dx + y dy + z dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \quad (x_1 > 0, x_2 > 0, x > 0)$$

其中积分路径不经过原点.