(伪)小测答案

1. $\int_0^1 dx\int_0^x dy\int_0^y \frac{\sin z}{1-z}dz$

$=\int_0^1 dx\int_0^x dz\int_z^x \frac{\sin z}{1-z}dy$ （y,z先换）

$=\int_0^1 dx\int_0^x \frac{\sin z}{1-z}(x-z)dz$

$=\int_0^1 dz\int_z^1 \frac{\sin z}{1-z}x-\frac{z\sin z}{1-z}dx$ （x,z再换）

$=\int_0^1 \left(\frac{1}{2}\frac{\sin z}{1-z}x^2-\frac{z\sin z}{1-z}x\right)\Big|_z^1 dz$

$=\int_0^1 \frac{\sin z}{2(1-z)}(1-z^2)-\frac{z\sin z}{1-z}(1-z)dz$

$=\int_0^1 \frac{(1+z)\sin z}{2}-z\sin z\,dz$

$=\frac{1}{2}\int_0^1 \sin z(1-z)dz$

$=\frac{1}{2}\left((-\cos z\big|_0^1)+\int_0^1 z\,d\cos z\right)$

$=\frac{1}{2}\left(1-\cos 1+z\cos z\big|_0^1-\int_0^1\cos z\,dz\right)$

$=\frac{1}{2}\left(1-\cos 1+\cos 1-\sin z\big|_0^1\right) = \frac{1}{2}(1-\sin 1)$

2. $\iint_D |xy|\,dxdy$ $D: x^2+y^2=R^2$ 所围

$=4\iint_{D_1} xy\,dxdy = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^R r^2\cos\theta\sin\theta\, r\,dr$ （D_1为D在一象限部分）

$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta\, d\theta\cdot\int_0^R r^3dr$

$=-\cos 2\theta\big|_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{1}{4}R^4=\frac{1}{2}R^4$

3. $\iiint_{x^2+y^2+z^2\le 2z}(ax+by+cz)\,dxdydz$

$=\iiint_{x^2+y^2+z^2\le 2z} cz\,dxdydz$ （对称性）

$=I$

① 球坐标 $\begin{cases} x=\rho\sin\varphi\cos\theta \\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta \\ z=\rho\cos\varphi+1 \end{cases}$

$$I = C\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^1(\rho\cos\varphi+1)\rho^2\sin\varphi\,d\rho$$

$$=2\pi C\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^1\rho^3\cos\varphi\sin\varphi+\rho^2\sin\varphi\,d\rho$$

$$=2\pi C\int_0^{\pi}\frac{1}{4}\cos\varphi\sin\varphi+\frac{1}{3}\sin\varphi\,d\varphi$$

$$=2\pi C\cdot\left(\frac{1}{4}\times0+\frac{1}{3}\times2\right)=\frac{4}{3}\pi C$$

② 平面截割 $I=\int_0^2 Cz\,dz\iint_{x^2+y^2\le 2z-z^2}dxdy$

$$=\int_0^2 Cz\pi(2z-z^2)dz$$

$$=C\pi\int_0^2 2z^2-z^3\,dz$$

$$=C\pi\left(\frac{2}{3}z^3-\frac{1}{4}z^4\Big|_0^2\right)=C\pi\left(\frac{16}{3}-4\right)=\frac{4}{3}\pi C$$

4. 设 $\iint_D f(xy)dxdy=A$（常数）

则 $f(x)=x^2+x\int_0^{x^2}f(x^2-t)dt+A$

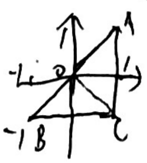
$=x^2+x\int_0^{x^2}f(u)du+A$ （$x^2-t=u$ 变化中间积分）

用xy替换x 有 $f(xy)=x^2y^2+xy\int_0^{x^2y^2}f(u)du+A$

对两边在D上积分

$$A=\iint_D f(xy)dxdy=\iint_D x^2y^2dxdy+\iint_D xy\int_0^{x^2y^2}f(u)du+\iint_D A\,dxdy$$

又观察D，沿OC分为两部分，分别关于x轴与y轴对称，



则 $\iint_D xy\int_0^{x^2y^2}f(u)du=0$ （关于x，y奇函数）

且D的面积为 $\frac{1}{2}\times2\times2=2$ $\therefore\iint_D A\,dxdy=2A$

$-2\int_0^1\frac{1}{3}x^2dx$

$\therefore A=\iint_D x^2y^2dxdy+2A$

$\therefore A=-\iint_D x^2y^2dxdy=-\int_{-1}^1dx\int_{-1}^x x^2y^2dy=-\int_{-1}^1x^2\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{3}\right)dx=-\frac{2}{9}$

$\therefore f(x)=x^2+x\int_0^{x^2}f(u)du-\frac{2}{9}$

令 $x=1$

$f(1)=1+\int_0^1f(u)du-\frac{2}{9}=0$ $\therefore\int_0^1f(x)dx=-\frac{7}{9}$

已知$f(x)$连续，$F(t)=\iiint\limits_{\Omega}(z^2+f(x^2+y^2))dV$

$\Omega: 0\le z\le h,\ x^2+y^2\le t^2$ 求 $\lim\limits_{t\to0^+}\frac{F(t)}{t^2}$

$I=\oint_L \frac{ds}{\sqrt{5-4xy+4y^2}}$， $L: x^2-4xy+5y^2=1$

$(x-2y)^2+y^2=1$ $\begin{cases} x=\cos t+2\sin t \\ y=\sin t \end{cases}$ $0\le t\le 2\pi$

$\underline{ds}$ $x'=-\sin t+2\cos t$

$y'=\cos t$

$ds=\sqrt{\sin^2+4\cos^2-4\sin\cos+\cos^2}\,dt$

$=\sqrt{1+4\cos^2 t-4\sin t\cos t}\ dt$

$=\sqrt{3+2\cos 2t-2\sin 2t}\,dt$

$\frac{1}{\sqrt{5-4(\cos t+2\sin t)\sin t+4\sin^2 t}}=\frac{1}{\sqrt{5-4\cos\sin-8\sin^2+4\sin^2}}$

$\frac{1}{\sqrt{3+2\cos 2t-2\sin 2t}}$

$I=\int_0^{2\pi}dt=2\pi$

$\frac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}=a\sqrt{f(y)}$