

信息与电子工程导论

Introduction to Information Science and Electronic Engineering

4.1 数字逻辑和电路

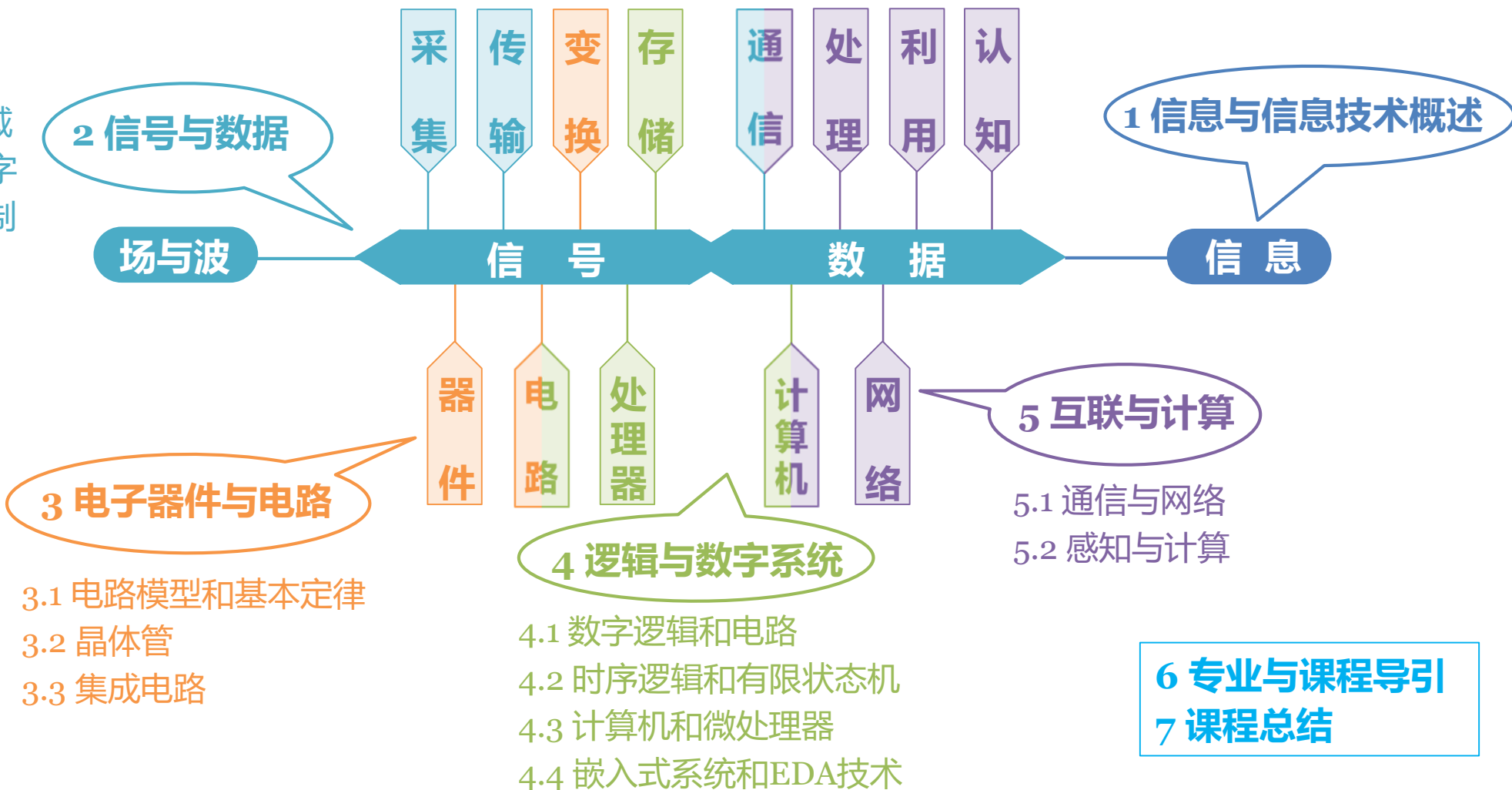
主讲：周成伟

《信息与电子工程导论》课程组

2022年3月22日星期二

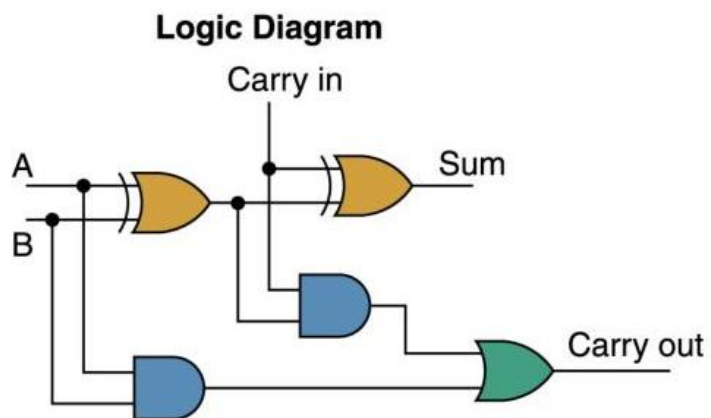
知识图谱

2.1 时域和频域
2.2 模拟和数字
2.3 编码和调制
2.4 场与波



内容提要

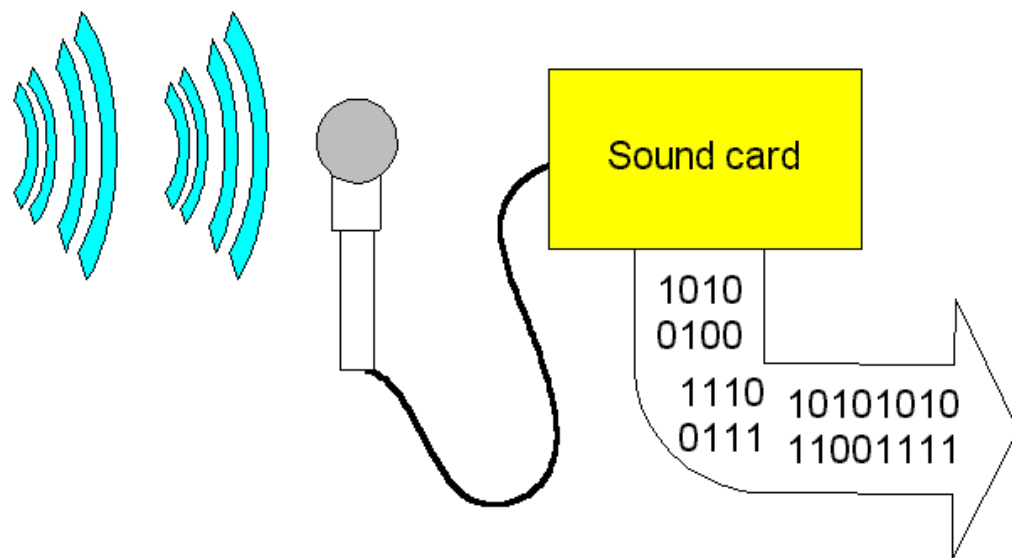
- ❖ 二进制和布尔代数
- ❖ 逻辑门电路
- ❖ 组合逻辑电路
- ❖ 时序逻辑电路



Truth Table

A	B	Carry-in	Sum	Carry-out
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

模拟与数字



- ❖ 我们可对我们的模拟世界进行数字抽象，只使用两个值 0 和 1 而不是使用无限连续的模拟值来表征我们的世界。
- ❖ 因为只有两个值，我们称为二进制值。0 或 1，是一个二进制数字(binary digit)，简称比特(bit)。

二进制计数系统

- ❖ 中国古代的阴阳学说可以认为是最早二进制的雏形。
- ❖ 二进制作为一个计数系统，是公元前2—5世纪时由印度学者完成的，但是他们没有使用0和1计数。



Gottfried Wilhelm Leibniz
Jul 1, 1646—Nov 14, 1716

- ❖ 17世纪，德国哲学家、数学家**戈特弗里德·威廉·莱布尼兹**（被誉为十七世纪的亚里士多德）进一步完善了二进制，并且用0和1来表示它的两个数字，成为我们今天使用的二进制。
- ❖ 二进制除了是一种计数和方式外，还可以表示逻辑“是”与“非”。

二进制数

n	2^n	n	2^n	n	2^n
0	1	8	256	16	65,536
1	2	9	512	17	131,072
2	4	10	1,024 (1K)	18	262,144
3	8	11	2,048	19	524,288
4	16	12	4,096 (4K)	20	1,048,576 (1M)
5	32	13	8,192	21	2,097,152
6	64	14	16,384	22	4,194,304
7	128	15	32,768	23	8,388,608

❖ 一串 n 比特的字符串可以表示 2^n 种不同的信息。

❖ 例如，一个2比特的字符串可以有四种不同的组合：00、01、10和11。

二进制数

$$\begin{array}{r}
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \hline
 1
 \end{array}$$

1011 + 0111 = 1110

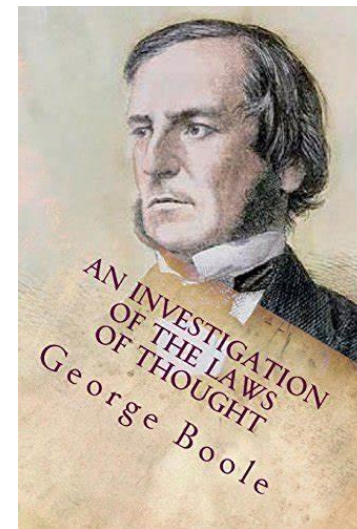
$$\begin{array}{r}
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

1011 - 0111 = 0100

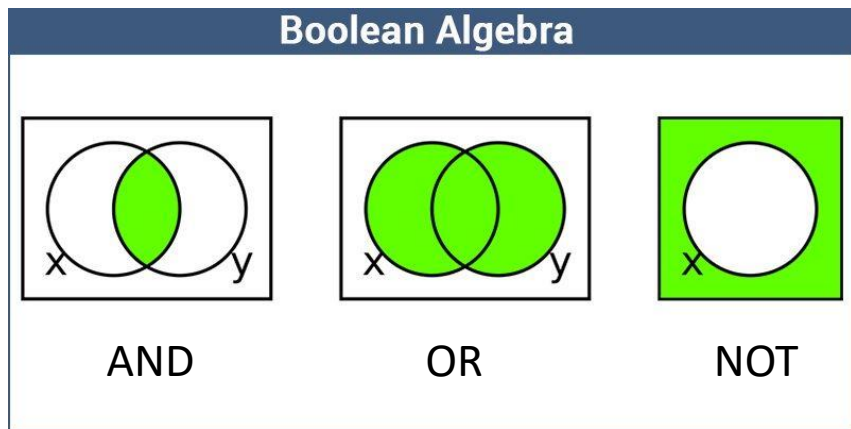
十进制	二进制
0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111
8	1000
9	1001
10	1010
11	1011
12	1100
13	1101
14	1110
15	1111

布尔代数：二进制数的数学运算

- ❖ 1854年，英国数学家**乔治·布尔**的《思维规律的研究》(*An Investigation of the Laws of Thought, on which are founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities*)一书出版，第一次向人们展示了如何用数学的方法解决逻辑问题。
- ❖ 布尔证明，逻辑不仅是哲学，**逻辑就是数学**，逻辑运算可以完成任意的复杂计算任务。



George Boole
Nov 2, 1815—Dec 8, 1864



- ❖ 布尔代数对于数学的意义等同于量子力学对于物理学的意义，它们将我们对世界的认识**从连续扩展到离散状态**。
- ❖ 万物都是可以量化的，从连续的变成一个个分离的，它们的运算“**与、或、非**”也就和传统的代数运算完全不同了。

布尔代数：二进制数的数学运算

公理

$0 \bullet 0 = 0$	$1 + 1 = 1$
$1 \bullet 1 = 1$	$0 + 0 = 0$
$0 \bullet 1 = 1 \bullet 0 = 0$	$1 + 0 = 0 + 1 = 1$
$0' = 1$	$1' = 0$

单变量定理

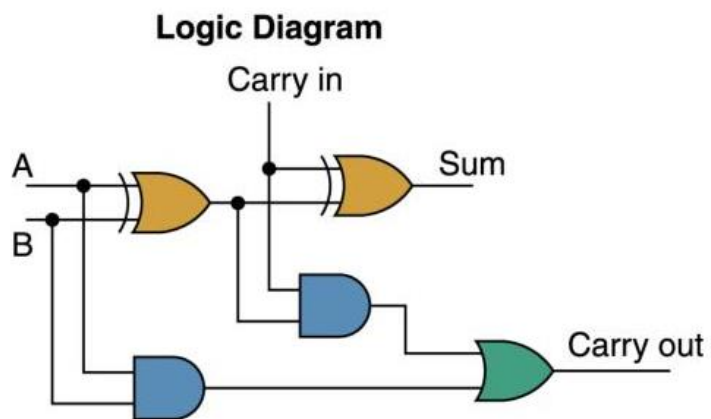
$x \bullet 0 = 0$	$x + 1 = 1$
$x \bullet 1 = 1 \bullet x = x$	$x + 0 = 0 + x = x$
$x \bullet x = x$	$x + x = x$
$(x')' = x$	
$x \bullet x' = 0$	$x + x' = 1$

两变量或三变量定理

$x \bullet y = y \bullet x$	$x + y = y + x$
$(x \bullet y) \bullet z = x \bullet (y \bullet z)$	$(x + y) + z = x + (y + z)$
$(x \bullet y) + (x \bullet z) = x \bullet (y + z)$	$(x + y) \bullet (x + z) = x + (y \bullet z)$
$(x \bullet y)' = x' + y'$	$(x + y)' = x' \bullet y'$

内容提要

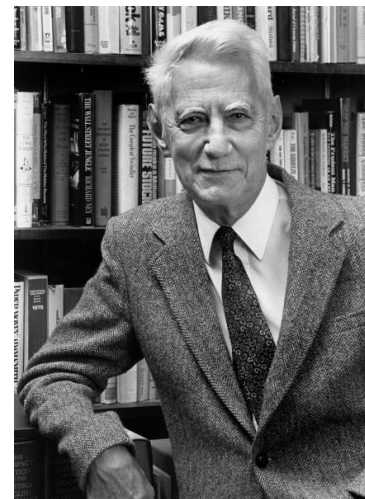
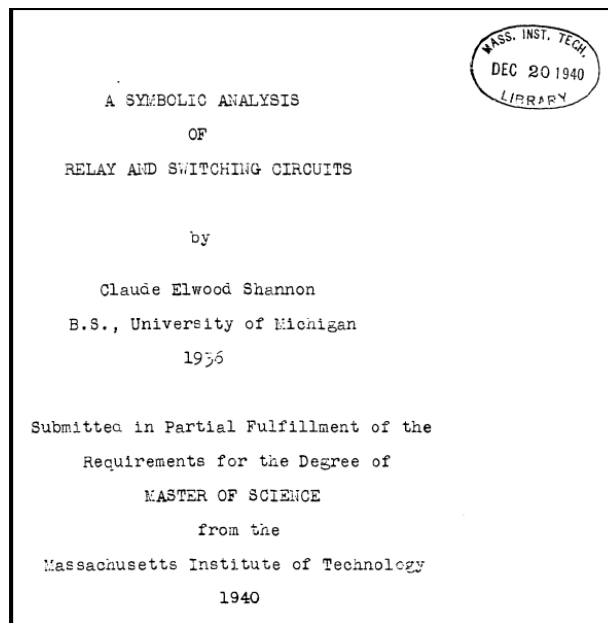
- ❖ 二进制和布尔代数
- ❖ 逻辑门电路
- ❖ 组合逻辑电路
- ❖ 时序逻辑电路



Truth Table

A	B	Carry-in	Sum	Carry-out
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

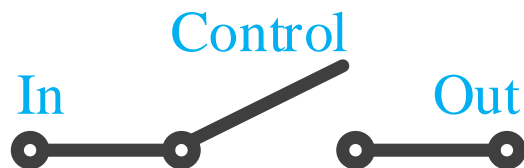
香农和数字电路设计理论



Claude Elwood Shannon
April 30, 1916 ~ Feb 26, 2001

- ❖ 1938年，香农完成了他的硕士论文 *A Symbolic Analysis of Relay and Switching Circuits*，首次提出可以用布尔代数来描述电路。
- ❖ 香农将布尔代数的“真”和“假”和电路系统的“开”和“关”对应起来，并用了数学中最简单的两个数字——“1”和“0”来表示。
- ❖ 香农用布尔代数分析并优化了开关电路，奠定了数字电路的理论基础。

从开关到逻辑



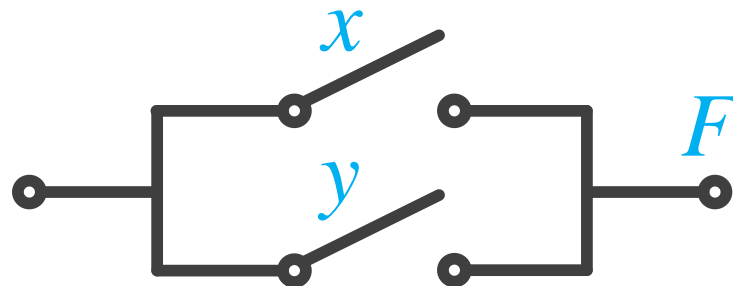
❖ 与门 (AND) , 开关串联

- $F=x \text{ and } y$ $F=x \cdot y$ $F=xy$, 当两个开关同时闭合时, 输出可以等于输入。



❖ 或门 (OR) , 开关并联

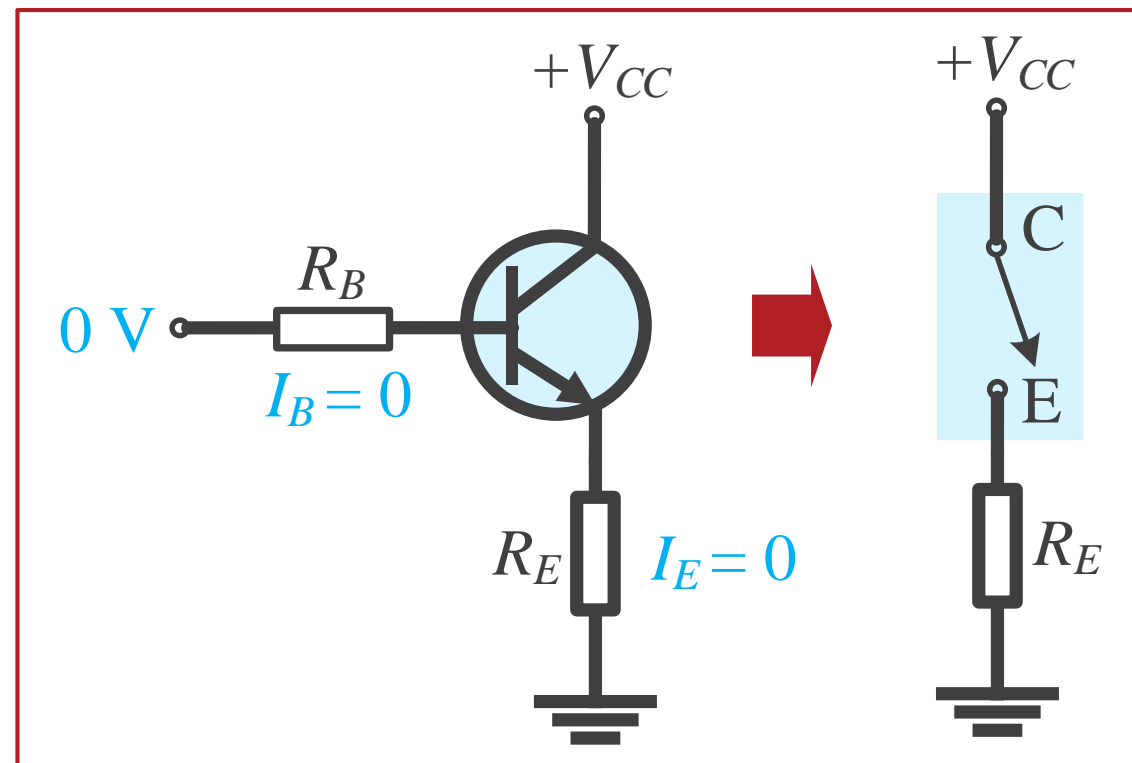
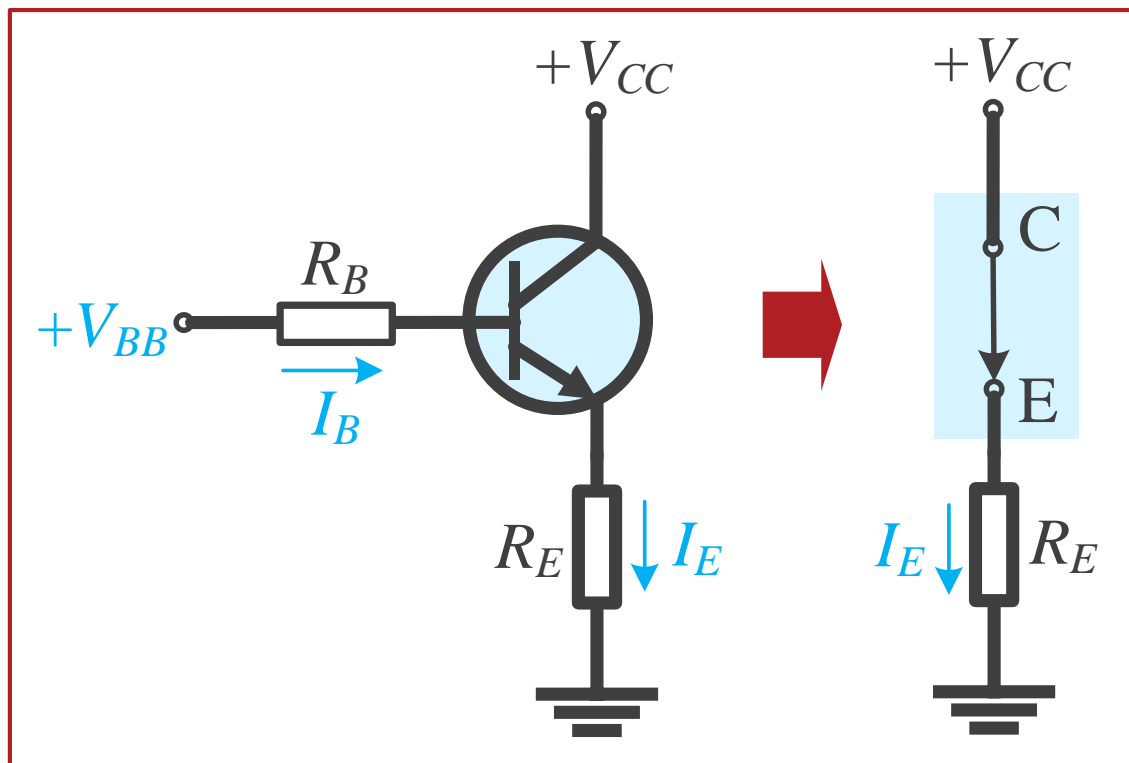
- $F=x \text{ or } y$ $F=x+y$, 当两个开关只要有一个闭合, 输入即可等于输出。



❖ 非门 (NOT) :

- $F=x'$ $F=\bar{x}$, 对输入进行取反, 0输入产生一个1输出, 输入1则输出会变成0。

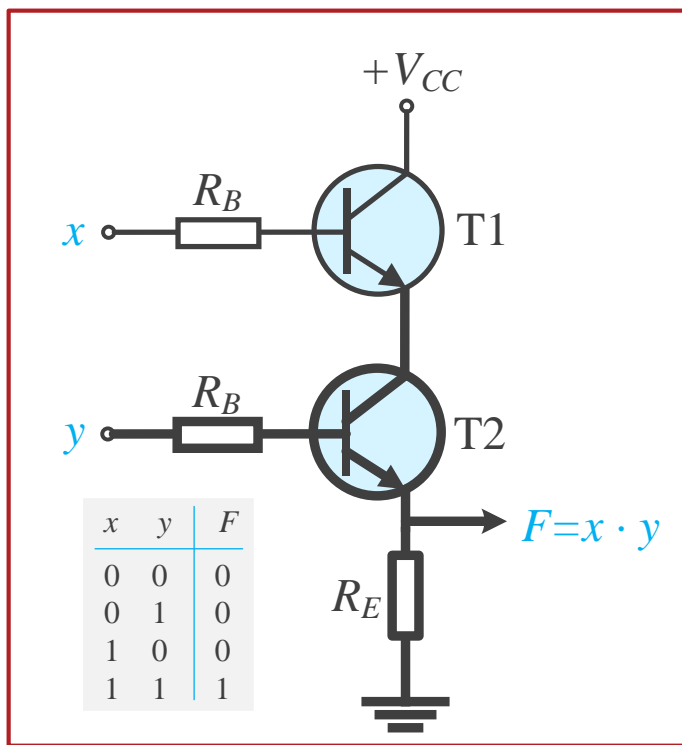
晶体管可以等效成开关



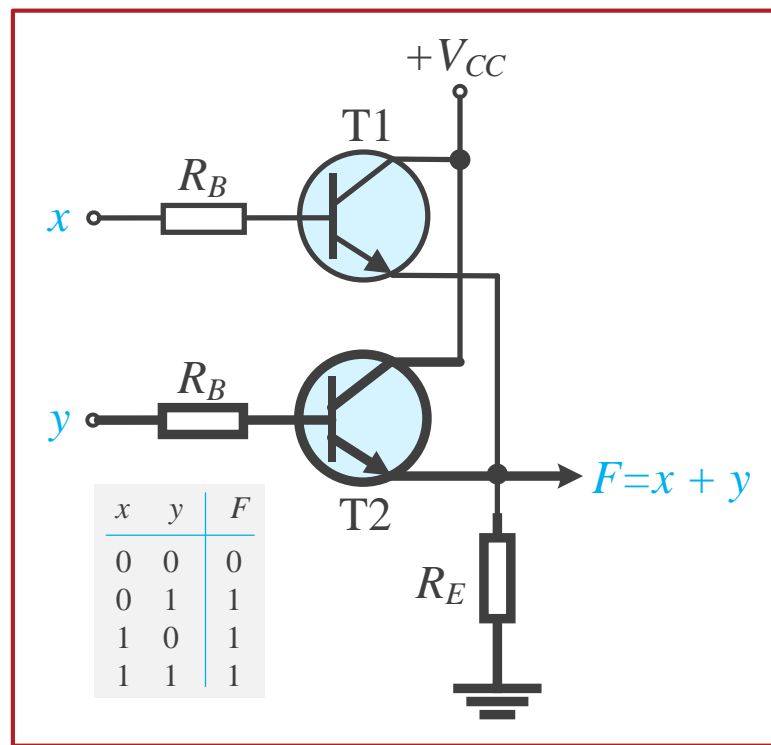
- ❖ 晶体管是数字系统最基本的组成单元，数字逻辑门可以由晶体管连接而成。
- ❖ 对于数字系统，晶体管可以被看成一个开关，对应有关和开两个状态，即 1 和 0 两个状态。

晶体管逻辑门

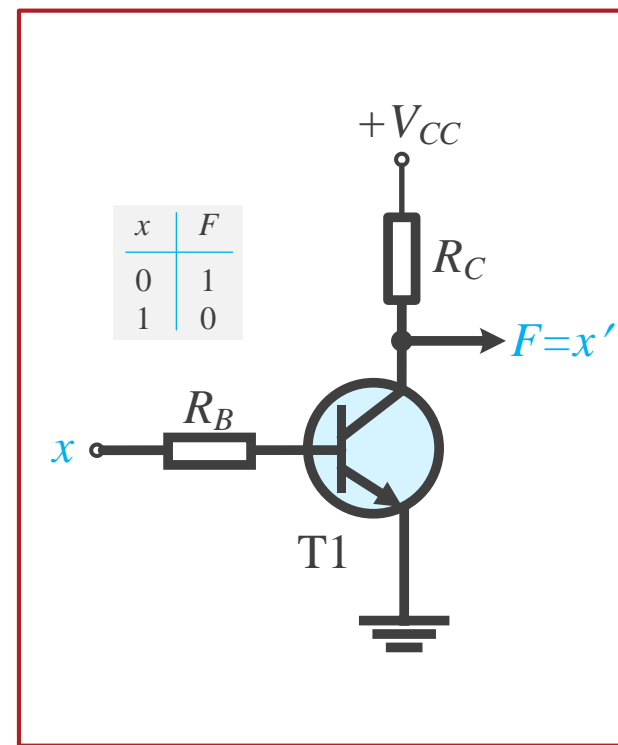
与门



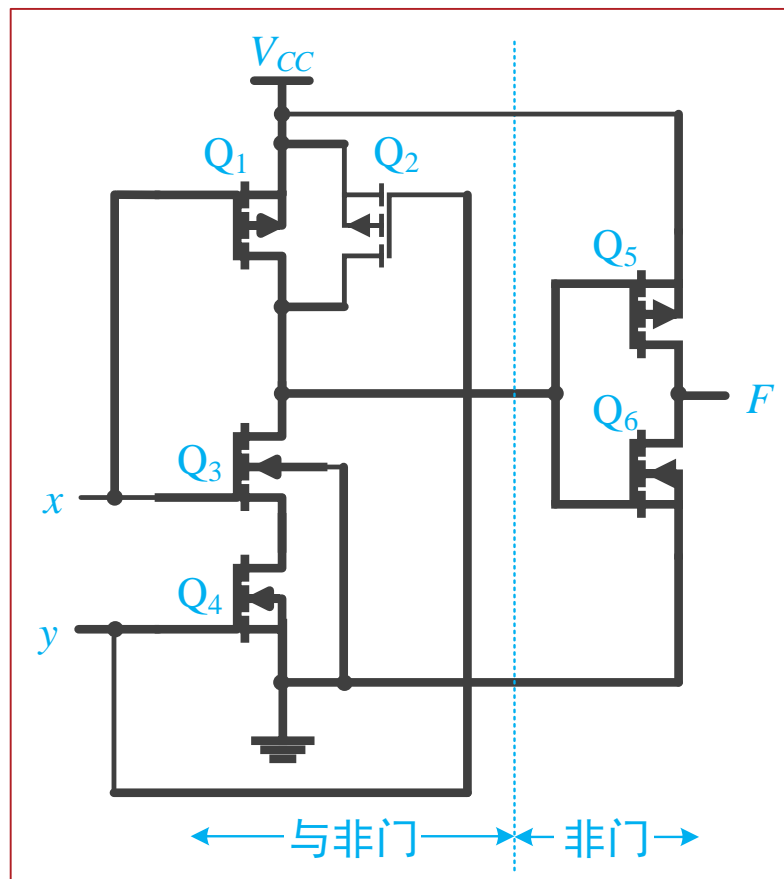
或门



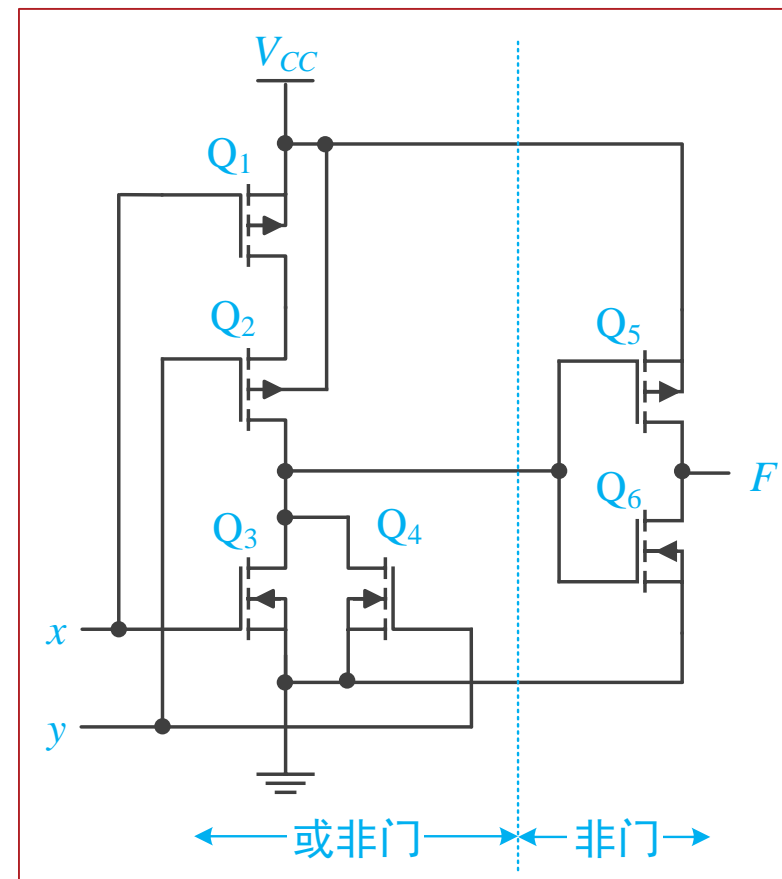
非门



MOSFET构成的逻辑门



与门

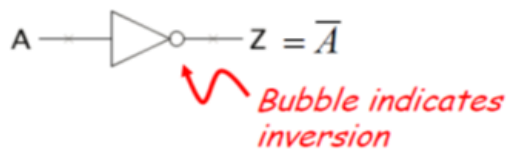


或门

逻辑门

❖ 所有数字系统中，均可以看成由最基本的三种逻辑门组成：

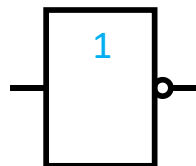
非门 (NOT)



真值表

A	Z
0	1
1	0

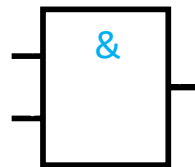
国标符号



与门 (AND)



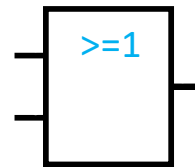
A	B	Z
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



或门 (OR)



A	B	Z
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



Input		Output
A	B	C
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

And (A and B) Gate $C = A \cdot B$

A	B	C
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Or (A or B or both) Gate $C = A + B$

B	C
0	1
1	0

Not (not C) Gate $C = \bar{B}$

A	B	C
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Nand (not A and B) Gate $C = \overline{A \cdot B}$

A	B	C
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Nor (not A or B or both) Gate $C = \overline{A + B}$

A	B	C
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Exclusive Or (A or B but not both) Gate $C = A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B$

数字电路

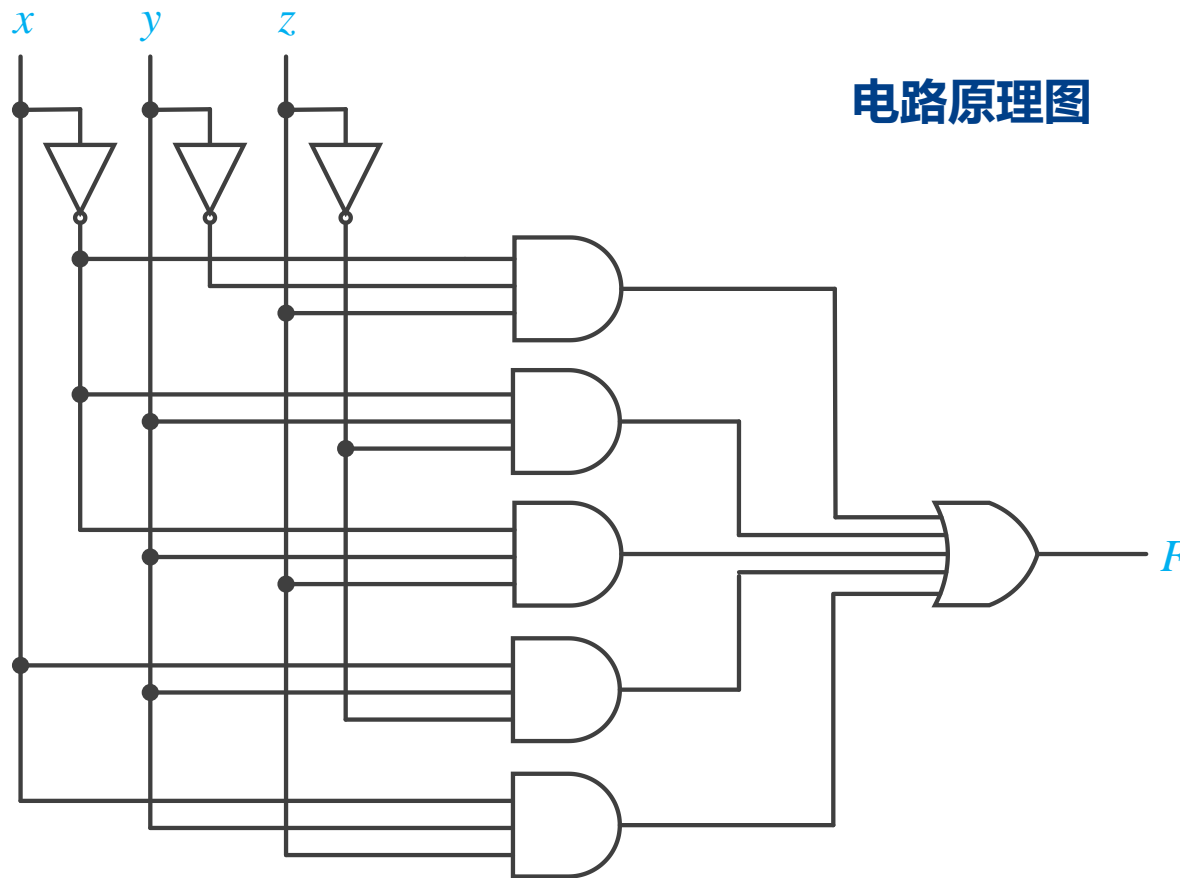
真值表

x	y	z	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

布尔方程、逻辑表达式

$$F(x, y, z) = x'y'z + x'yz' + x'yz + xyz' + xyz$$

电路原理图

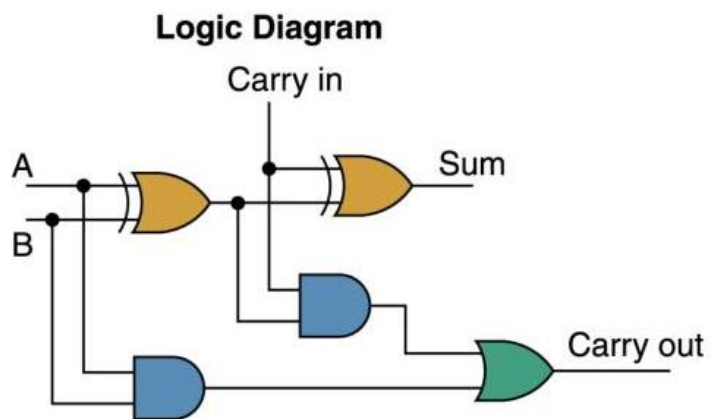


从晶体管到处理器

- ❖ 晶体管是数字系统最基本的组成单元
- ❖ 晶体管的通断可以表达数字逻辑的0或者1
- ❖ 数字逻辑门可以由晶体管连接而成
- ❖ **组合逻辑**：由多个逻辑门连接而成
 - 输出只和当前的输入有关，即没有记忆功能。
- ❖ **时序逻辑**：由多个逻辑门连接而成
 - 与组合逻辑的连接方式不同，输出不仅和当前的输入有关，还和以前的输入有关，即具有记忆功能。
- ❖ **微处理器**：由组合逻辑电路和时序逻辑电路组成
- ❖ 无论是组合逻辑电路，还是时序逻辑电路，都可以由最基本的与门，或门和非门组成。

内容提要

- ❖ 二进制和布尔代数
- ❖ 逻辑门电路
- ❖ 组合逻辑电路
- ❖ 时序逻辑电路



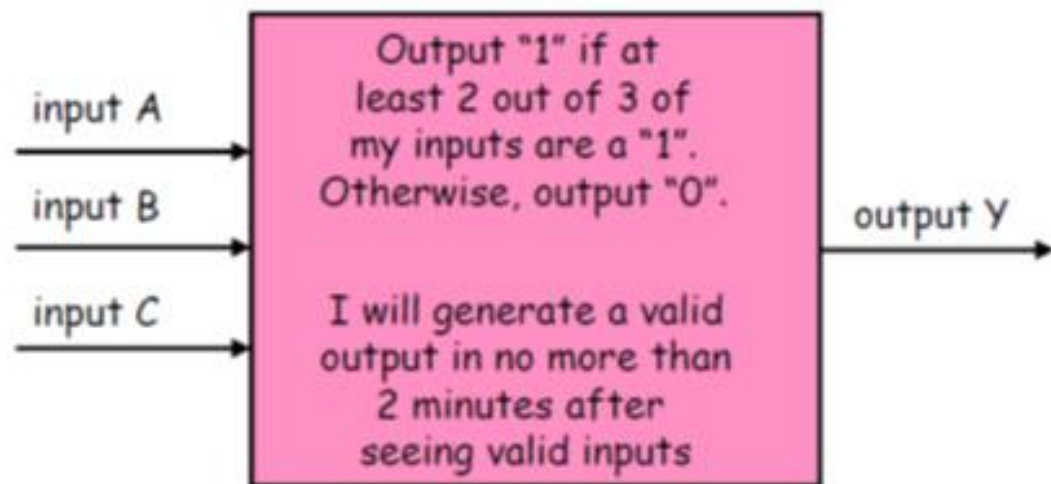
Truth Table

A	B	Carry-in	Sum	Carry-out
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

组合逻辑电路的“综合”和“分析”

- ❖ 组合逻辑电路的“综合”和“分析”是互逆的过程。
- ❖ 在组合电路的“综合”中，首先对电路的功能进行描述，然后得到精确描述电路的真值表或布尔方程，并进而得到电路图。
- ❖ 组合逻辑电路的“分析”是“综合”的反向过程，其步骤是：写出逻辑表达式，画出真值表，进而分析其功能。

组合逻辑电路的功能描述方法：真值表



A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

- ❖ 真值表列出输入所有的组合情况下对应的输出值
可用于描述组合逻辑电路的功能。
- ❖ 例如上图，当输入三个变量中任意两个或以上变量为1，则输出为1。
- ❖ 真值表的行数等于2的 n 次方，其中 n 为输入变量数目。
- ❖ 真值表描述和组合电路功能描述是等效的，是电路功能描述的严格形式。

从真值表可以得到逻辑表达式

A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

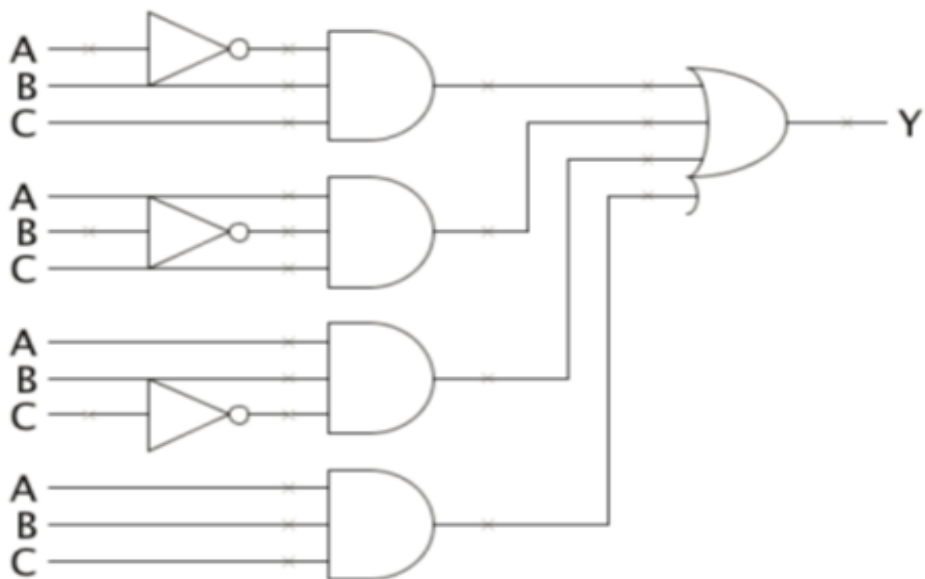
1. Write out our functional spec as a truth table
2. Write down a Boolean expression with terms covering each '1' in the output:

$$Y = \bar{A} \cdot B \cdot C + A \cdot \bar{B} \cdot C + A \cdot B \cdot \bar{C} + A \cdot B \cdot C$$

This approach creates equations of a particular form called

- ❖ 根据真值表，可写出逻辑表达式的“与-或 (Sum of Product, SOP)”形式。
- ❖ 对于真值表每一行，如果输出为1，则在逻辑表达式中出现为一“与”项，否则不出现。
- ❖ 对每一个“与”项，根据每个输入变量为0或者为1，对应输入变量取“非”或不取“非”。

从逻辑表达式即可综合 (Synthesize) 出电路



$$Y = \bar{A} \cdot B \cdot C + A \cdot \bar{B} \cdot C + A \cdot B \cdot \bar{C} + A \cdot B \cdot C$$

“综合”是指由电路功能得到电路（与或非门）连接图；

“分析”是指给出与或非门的连接图，分析出电路的功能。

- ❖ 任意的组合逻辑，都可以用 SOP 形式表示。
- ❖ SOP的表达式，只需要用与门，或门和非门即可综合出来。
- ❖ 由上图所示，最后一级表示四个“与”项的或，用一个“或”门；中间一级是表示每一个“与”项，一共有4个与项，所以用4个与门，对于每一个与门，其输入根据是否取非，来确定是否需要加入一个非门。
- ❖ 至此，可以看出怎么由组合逻辑功能综合出组合逻辑电路。

例 1：汽车报警器

❖ 输入：三个变量 M, D, V

- M：报警器开关
- D：门上的传感器检测到门被打开了
- V：震动传感器检测到车辆的震动

❖ 输出：报警信号S

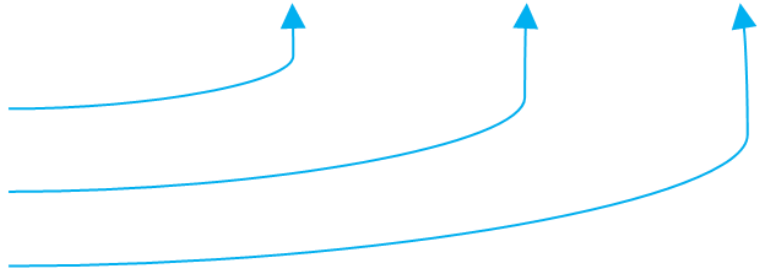
❖ 罗列出输出和输入的关系

- 报警器开关关闭，报警信号S一直为0
- 报警器开关打开，当检测到震动，或者检测到门打开，或者同时检测到震动和门打开，报警信号S为1

M	D	V	S
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

从真值表可以得到逻辑表达式

主开关	车门	震动	警报信号
M	D	V	S
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$$S = MD'V + MDV' + MDV$$


- ❖ 对于真值表中输出为1的行，在逻辑表达式中出现为一“与”项。
- ❖ 对每一个“与”项，根据每个输入变量为0或者为1，对应输入变量取“非”或不取“非”。

从逻辑表达式即可综合出逻辑电路图

- ❖ 由逻辑符号及相应连线构成的电路图。
- ❖ 根据逻辑式画逻辑图的方法：将各级逻辑运算用相应逻辑门去实现。

$$S = MD'V + MDV' + MDV$$

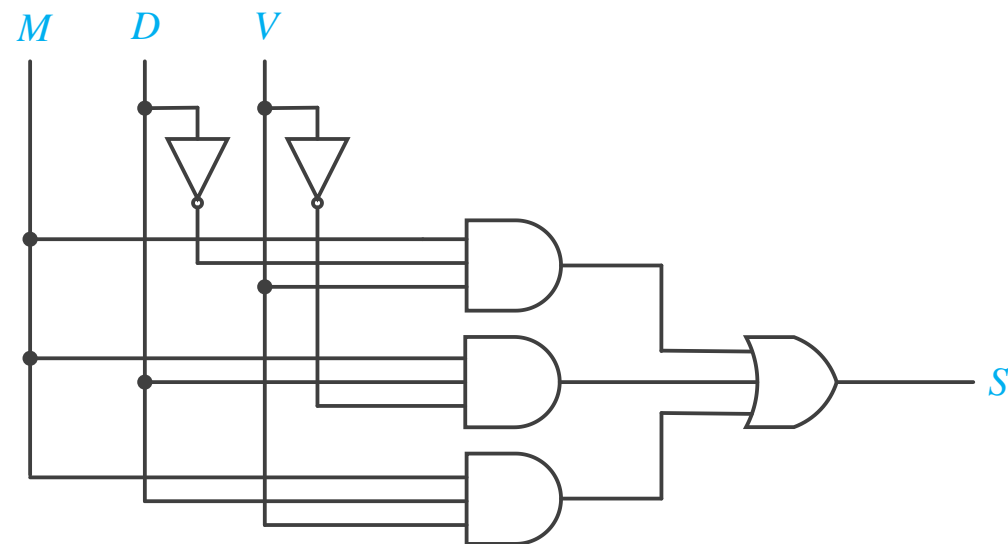
反变量用非门实现

相加项用或门实现

与项用与门实现

- ❖ 运算次序为**先非 后与 再或**。

- ❖ 因此用三级电路实现。



电路简化

$$\begin{aligned} S &= MD'V + MDV' + MDV \\ &= MD'V + MD(V' + V) \end{aligned}$$

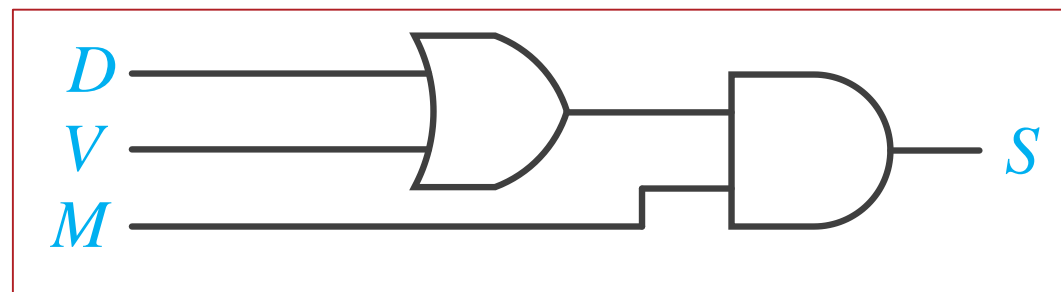
应用 $x' + x = 1$

$$\begin{aligned} S &= MD'V + MD \\ &= M(D'V + D) \end{aligned}$$

应用 $x + yz = (x + y)(x + z)$

$$\begin{aligned} S &= M(D + D')(D + V) \\ &= M(D + V) \end{aligned}$$

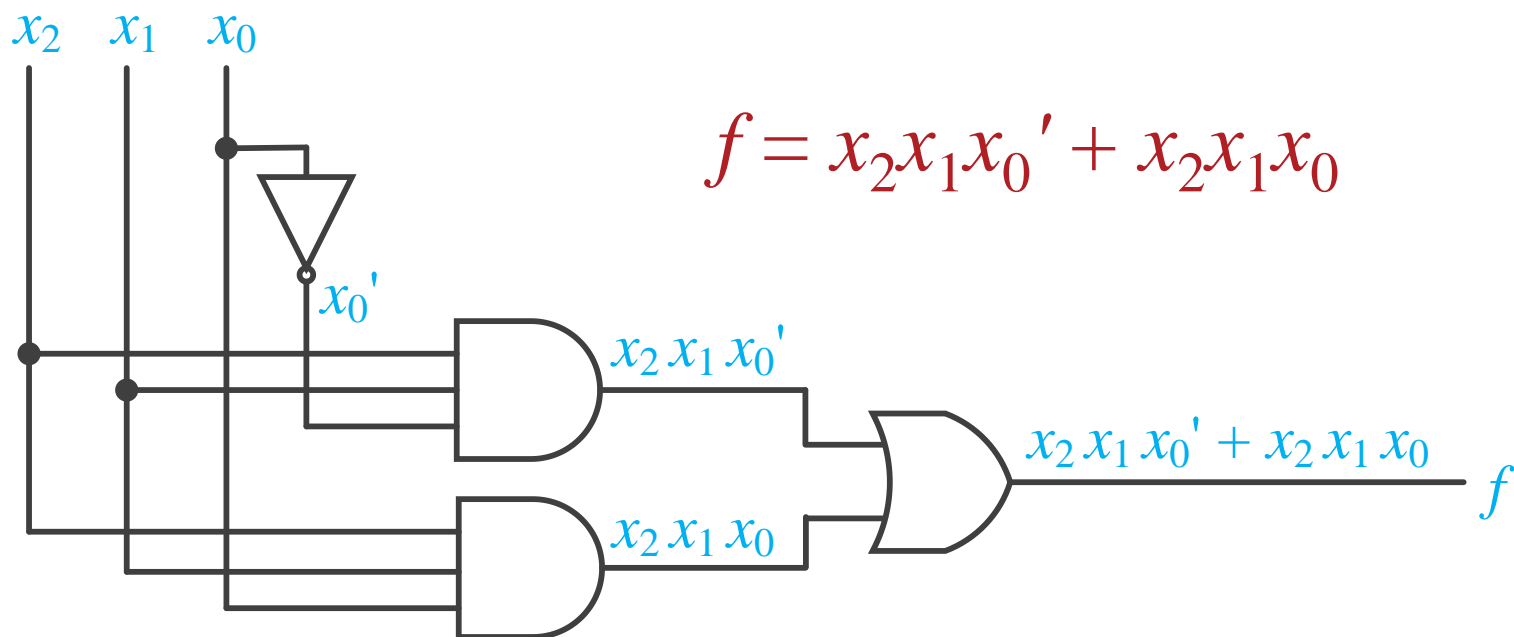
$$S = M(D + V)$$



例2：三比特无符号比较器

❖ 功能要求：判断一个三比特的二进制数是否大于等于6，
若是则输出1，不是则输出0

❖ 第一步：真值表，第二步：表达式；第三步，电路图



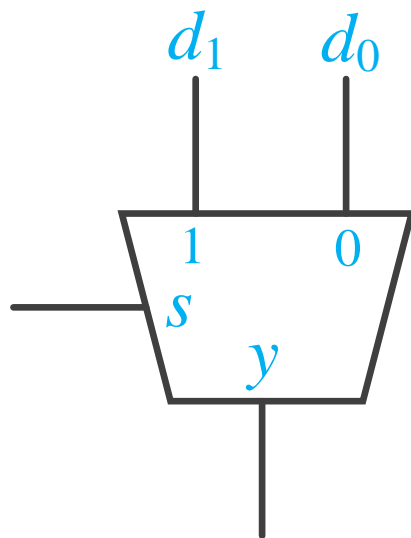
$$f = x_2 x_1 x_0' + x_2 x_1 x_0$$

十进制数	二进制数			输出
	x_2	x_1	x_0	f
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	0
4	1	0	0	0
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

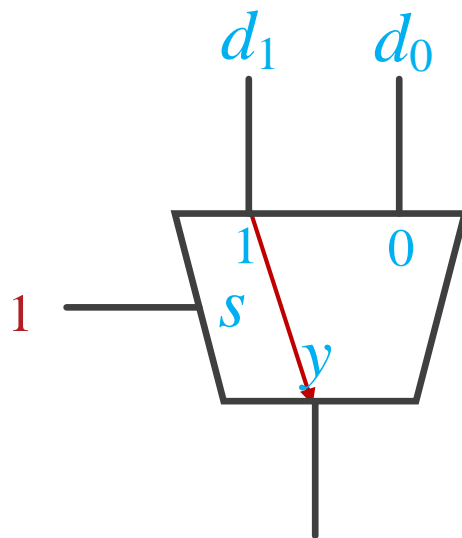
例3：二选一多路选择器

❖ 功能要求：

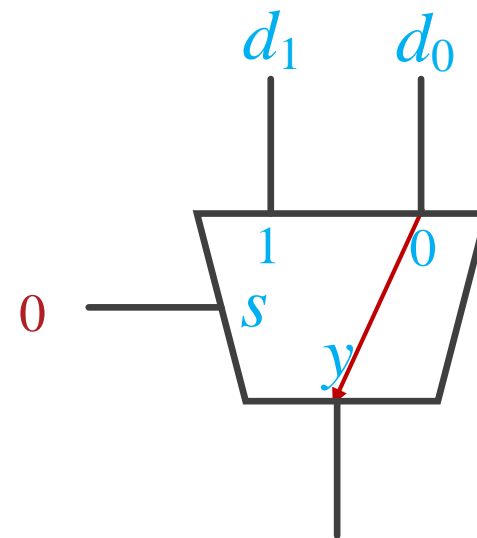
- 设计一个选择器，其中2个数据输入为 d_0 和 d_1 ，一个选择输入为 s ，当 $s=0$ 是输出等于 d_0 ，当 $s=1$ 时，输出等于 d_1



2-1选择器



$s=1, y=d_1$



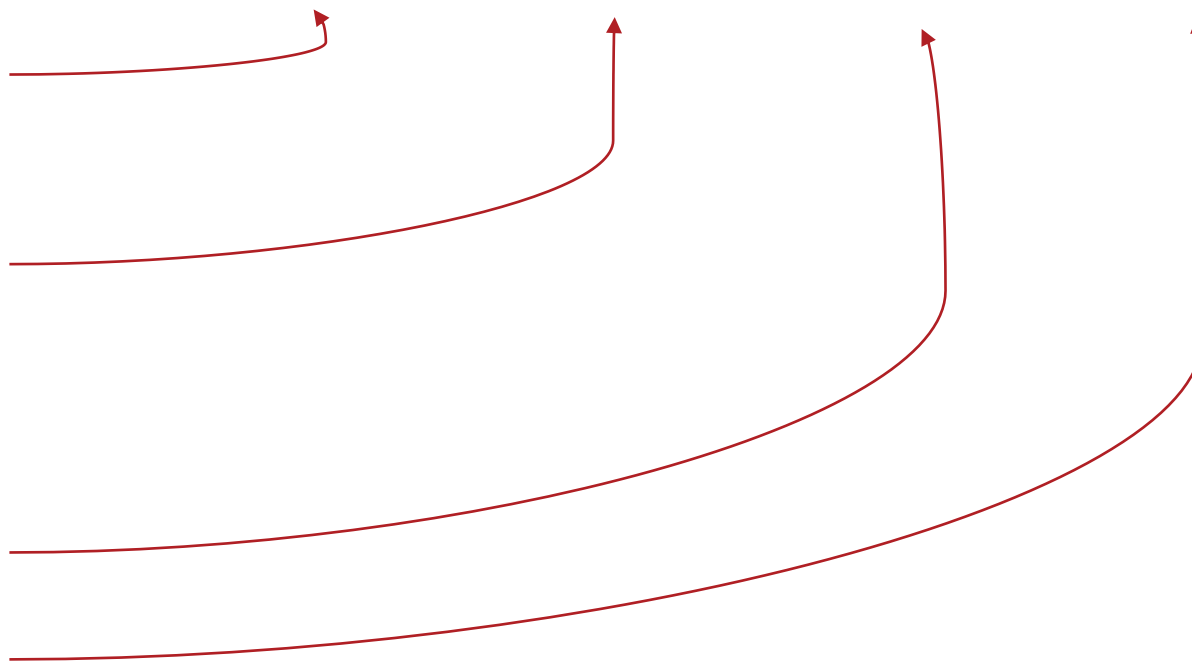
$s=0, y=d_0$

选择器设计

❖ 第一步：真值表，第二步：表达式；第三步，电路图

s	d ₁	d ₀	y
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

$$y = s'd_1'd_0 + s'd_1d_0 + sd_1d'_0 + sd_1d_0$$



选择器设计

s	d ₁	d ₀	y
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

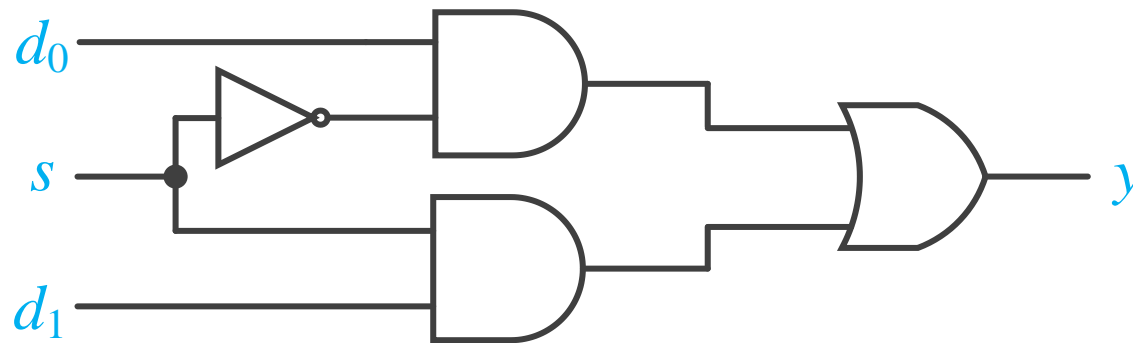
$$y = s'd_1'd_0 + s'd_1d_0 + sd_1d'_0 + sd_1d_0$$

$$\begin{aligned} & s'd_1'd_0 + s'd_1d_0 \\ &= s'd_0(d'_1 + d_1) \\ &= s'd_0 \end{aligned}$$

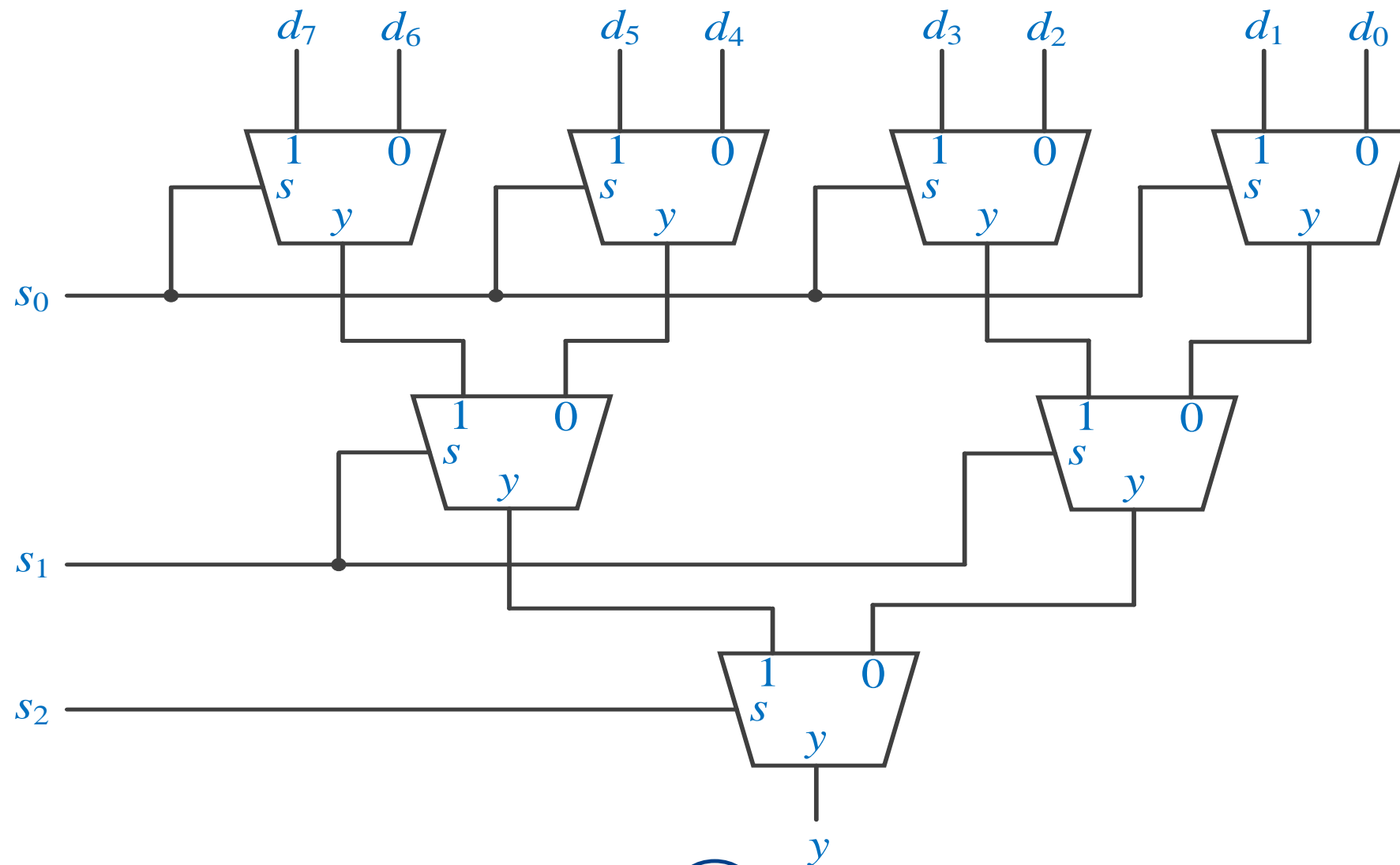
逻辑化简

$$\begin{aligned} & sd_1d'_0 + sd_1d_0 \\ &= sd_1(d'_0 + d_0) \\ &= sd_1 \end{aligned}$$

$$y = s'd_0 + sd_1$$

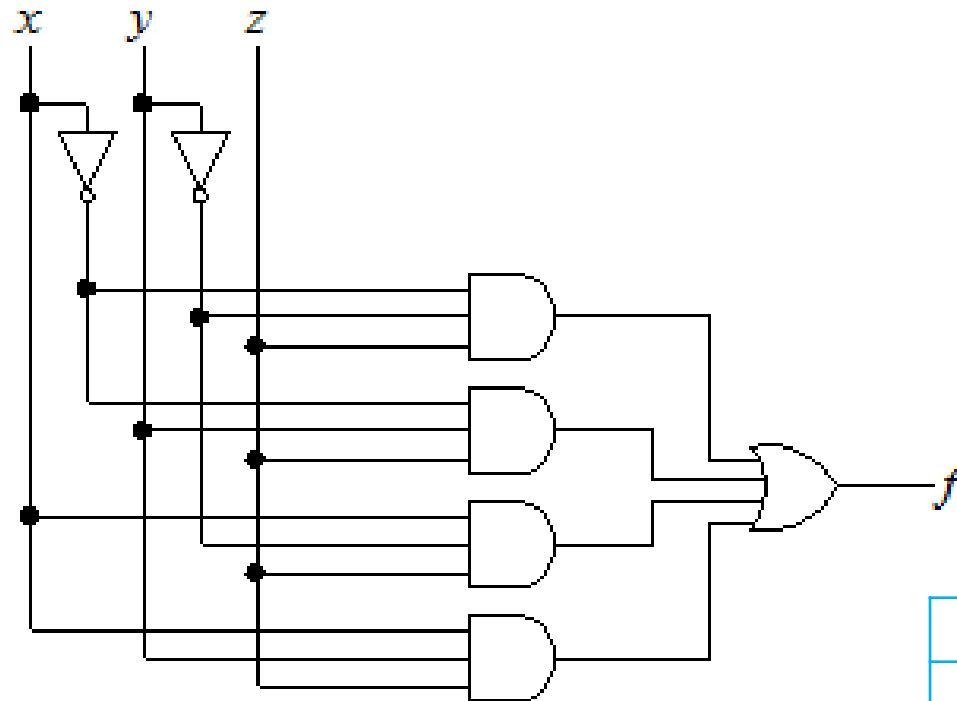


使用多个2-1选择器扩展8-1选择器

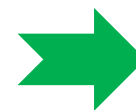


组合逻辑电路分析

- ❖ 给定一个电路，给出它的真值表或者功能描述。
- ❖ 与组合逻辑电路综合是反向过程。
- ❖ 步骤：
 - 写出逻辑表达式
 - 画出真值表，进而分析功能



$$f = x'y'z + x'yz + xy'z + xyz$$



x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

- ❖ 逻辑函数的三种表示方法可以相互转换。

汽车报警器

❖ 输入：三个变量D, V, M

- M: 报警器开关
- D: 门上的传感器检测到门被打开了
- V: 震动传感器检测到车辆的震动

❖ 输出：报警信号S

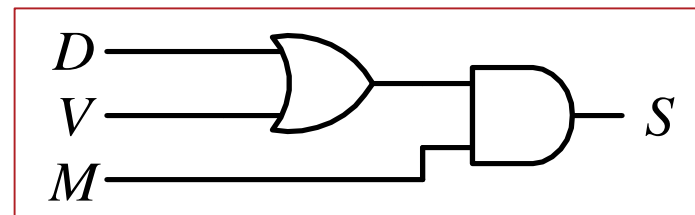
❖ 问题:

- 当一个小偷打开门后，报警信号被触发
- 小偷迅速关上门，报警信号又被关闭了
- 于是小偷可以毫无压力的在车内偷东西

❖ 为什么会这样?

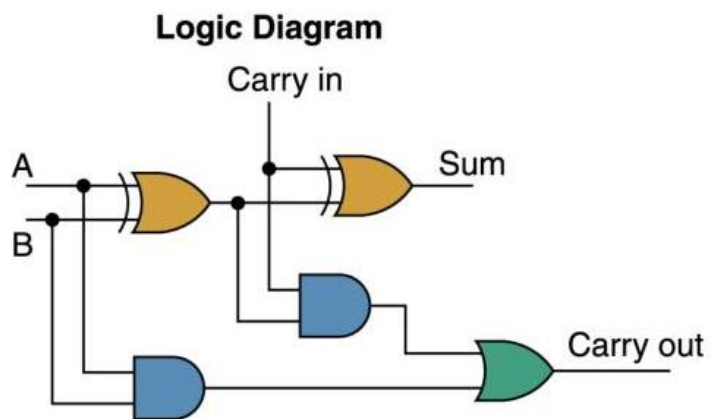
- 因为这个报警器电路没有记忆功能

M	D	V	S
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1



内容提要

- ❖ 二进制和布尔代数
- ❖ 逻辑门电路
- ❖ 组合逻辑电路
- ❖ 时序逻辑电路



Truth Table

A	B	Carry-in	Sum	Carry-out
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

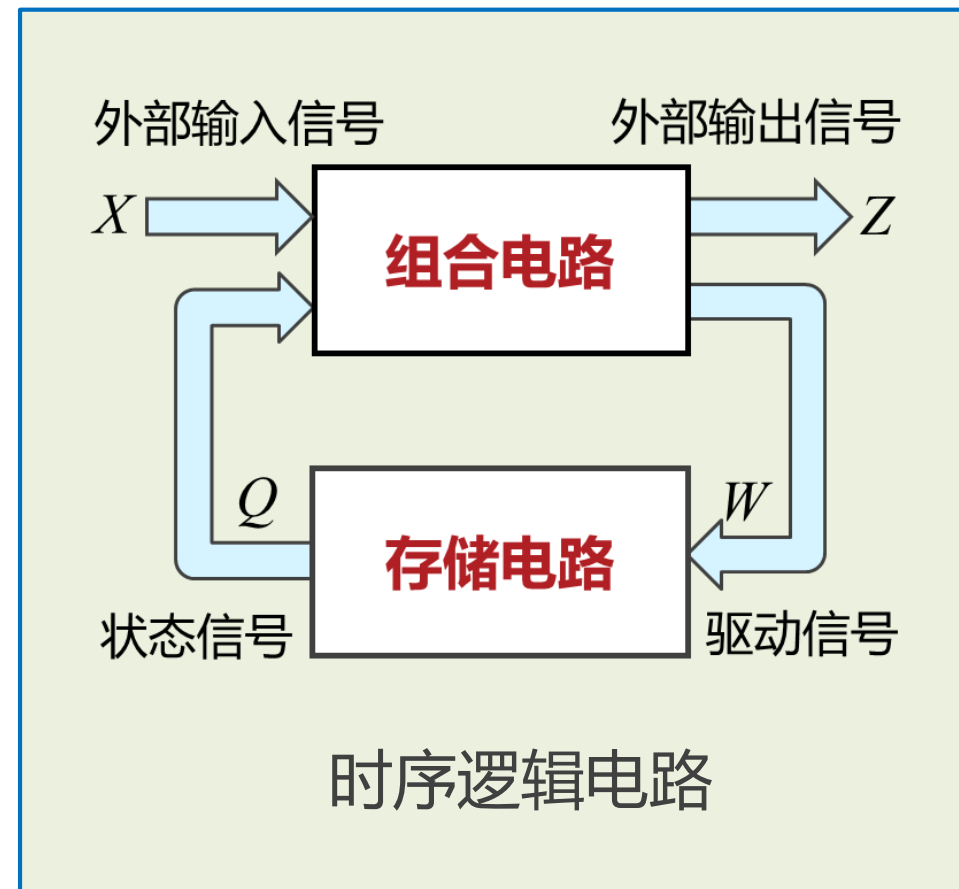
数字逻辑电路

❖ 所有数字逻辑电路都可以被分成两类：

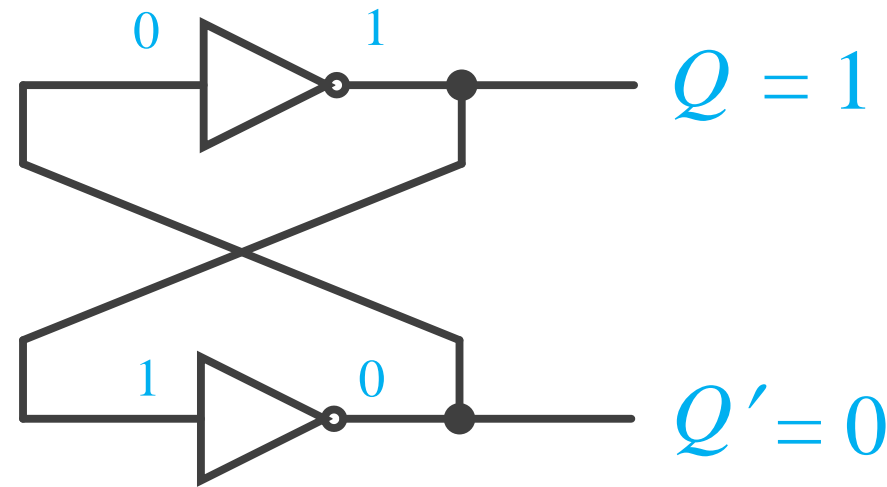
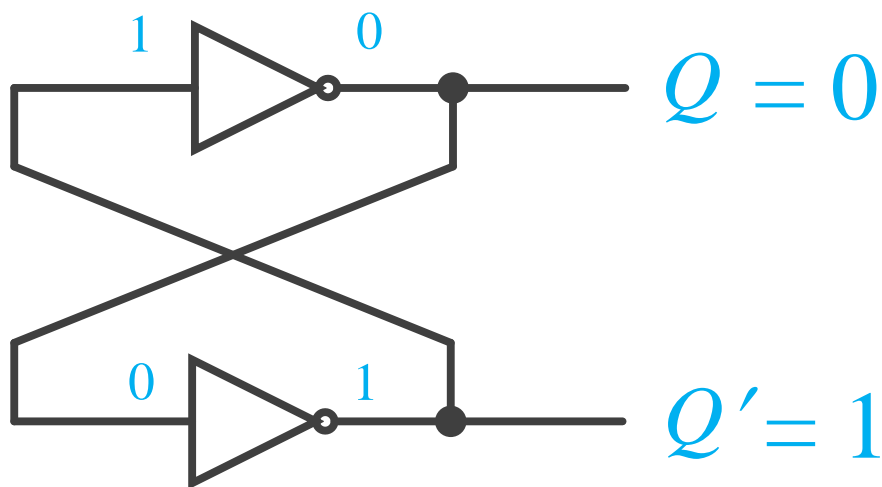
- **组合逻辑电路**：输出只和当前的输入有关，即没有记忆功能。
- **时序逻辑电路**：输出不仅和当前的输入有关，还和以前的输入有关，即具有记忆功能。

❖ 无论是组合逻辑电路，还是时序逻辑电路，都可以由最基本的与门，或门和非门组成。

❖ 所不同的是连接方式不一样，时序逻辑电路的基本门电路连接中，带有**反馈回路**。



如何使电路具有记忆功能：引入反馈



❖ Q and Q' 是对称的两个信号

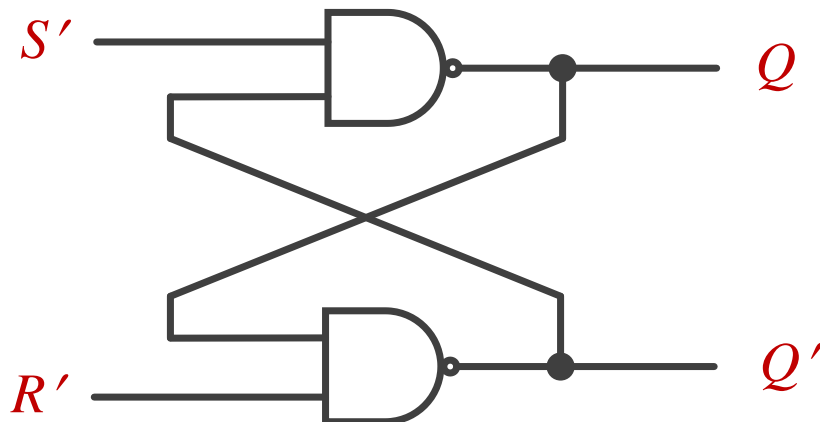
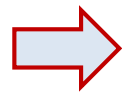
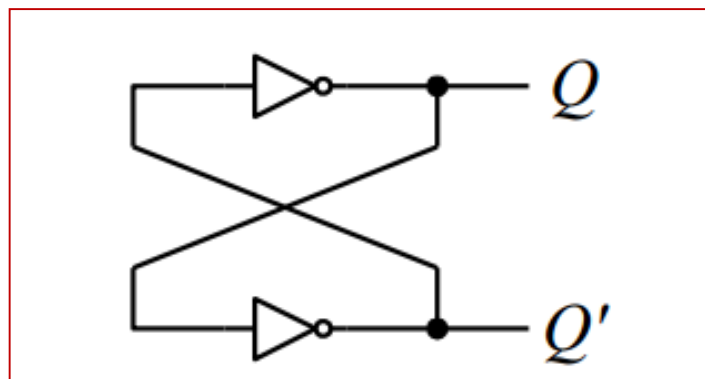
- 假设 $Q=0$ ，则下面的反相器输出 $Q'=1$ ，作为上面反相器输入后 $Q=0$ ；是一个稳定状态
- 假设 $Q=1$ ，则下面的反相器输出 $Q'=0$ ，作为上面反相器输入后 $Q=1$ ；也是一个稳定状态

双稳态电路

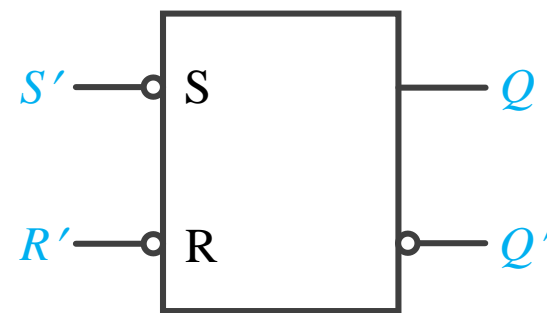
❖ 这一电路就具有了记忆功能，能够记住电路的状态

❖ 双稳态电路的缺点：虽然能够记住电路状态，但是不能改变电路状态

SR锁存器



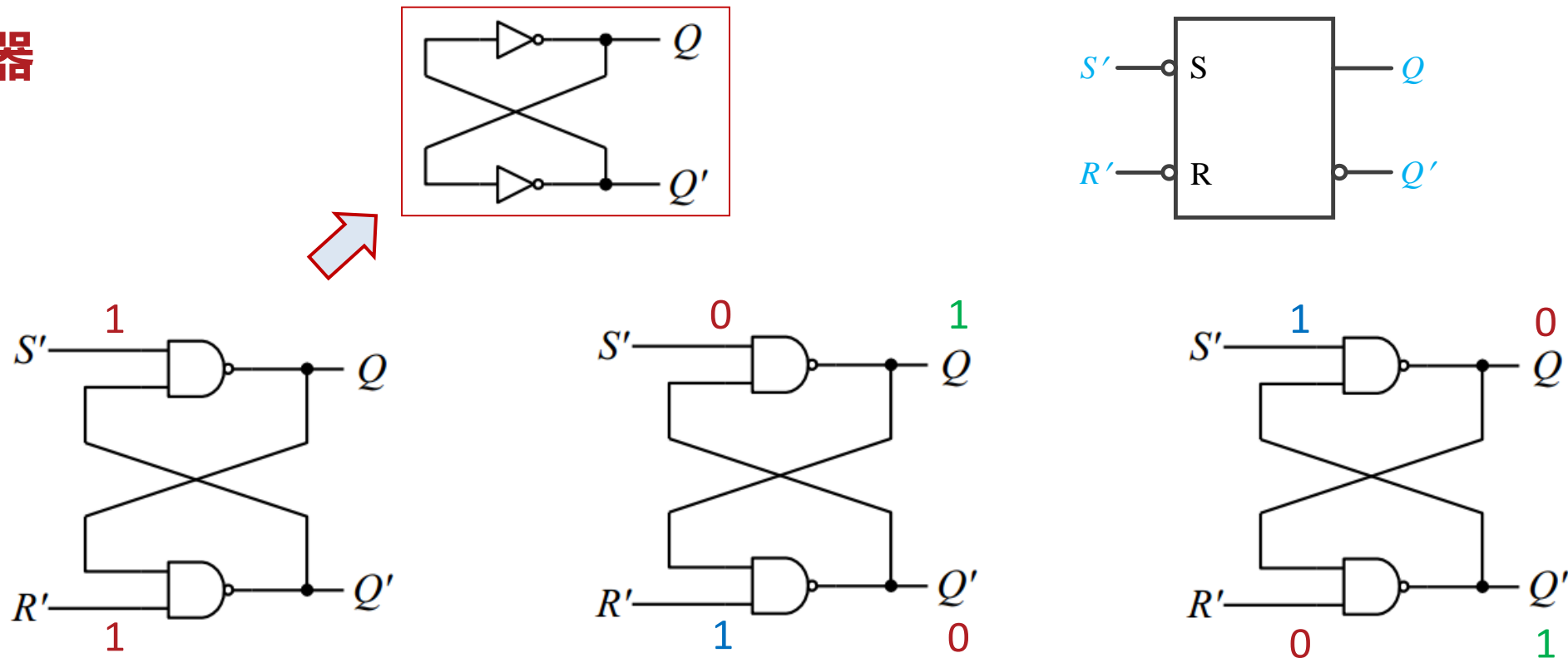
电路图



符号

❖ SR锁存器把双稳态电路中的**非门**换成了**与非门**，使得与非门的输入可以作为外部输入，用于改变电路状态。

SR锁存器

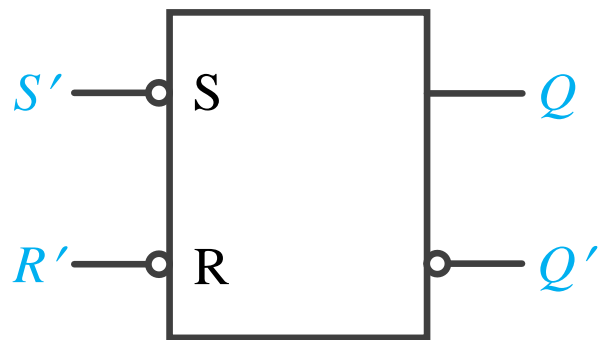
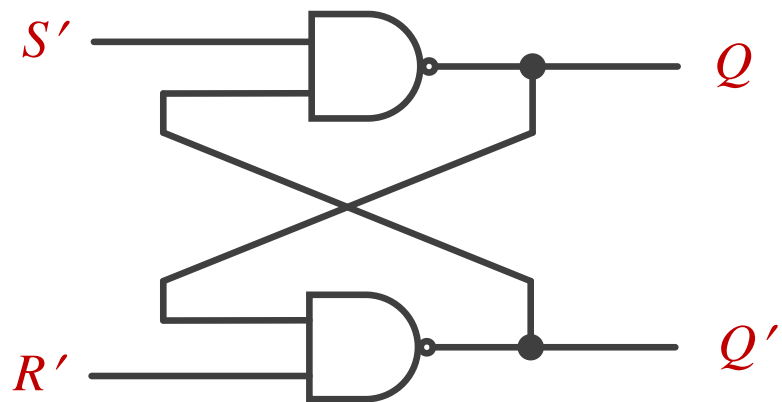


❖ 若 $S'=1$ 且 $R'=1$, 则退化为双稳态电路。

❖ 若两者中间有一个为0, 如 $S'=0$, 则 Q 被置为1; 如 $R'=0$, 则 $Q'=1$

❖ 若两者均为0, 则系统状态可能会进入不稳定或不确定, 应予以避免。

SR锁存器状态表

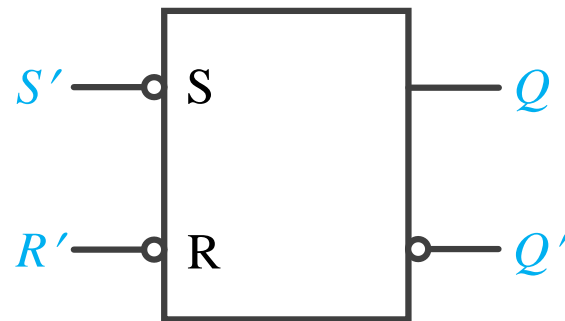


S'	R'	Q	Q_{next}	功能
0	0	0	×	不定
0	0	1	×	
0	1	0	1	$Q_{next} = 1$ 置 1
0	1	1	1	
1	0	0	0	$Q_{next} = 0$ 置 0
1	0	1	0	
1	1	0	0	$Q_{next} = Q$ 保持
1	1	1	1	

现态和次态的概念

❖ 现态 Q 锁存器接收输入信号之前的状态。

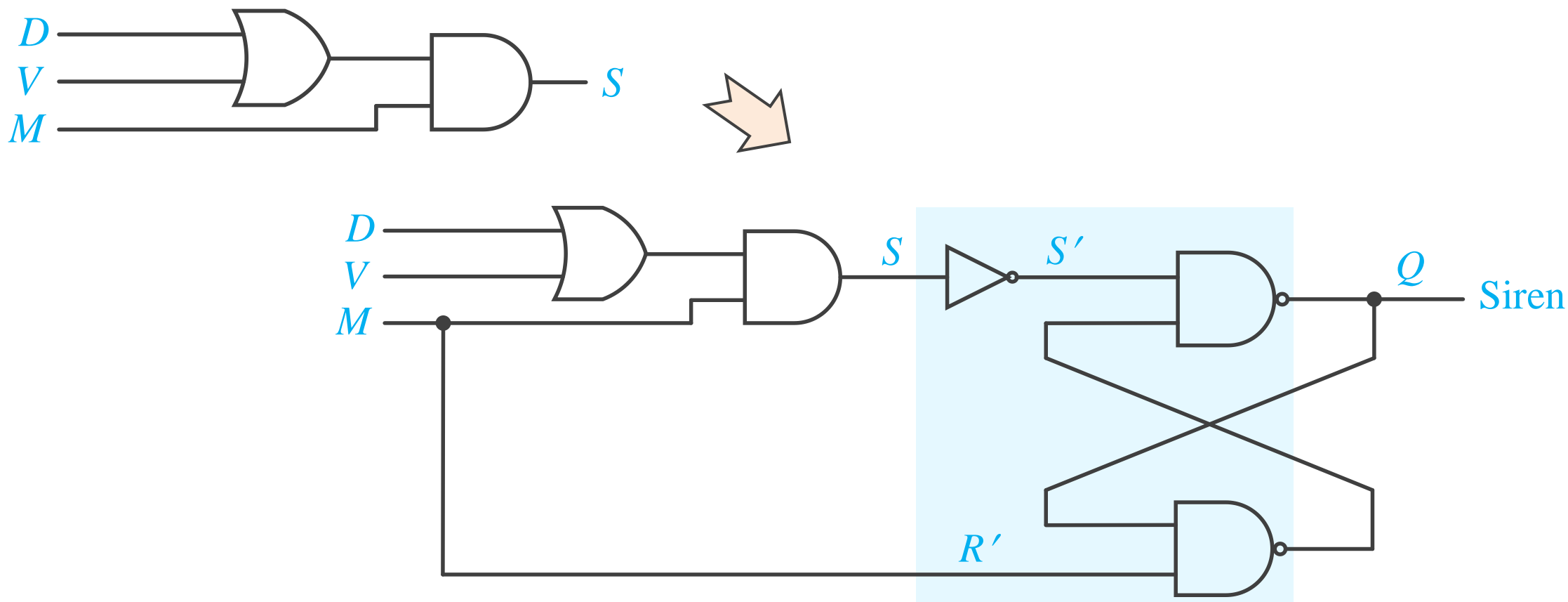
❖ 次态 Q_{next} 锁存器接收输入信号之后的状态。



S'	R'	Q	Q_{next}	功能
0	0	0	×	不定
0	0	1	×	
0	1	0	1	$Q_{next} = 1$ 置1
0	1	1	1	
1	0	0	0	$Q_{next} = 0$ 置0
1	0	1	0	
1	1	0	0	$Q_{next} = Q$ 保持
1	1	1	1	

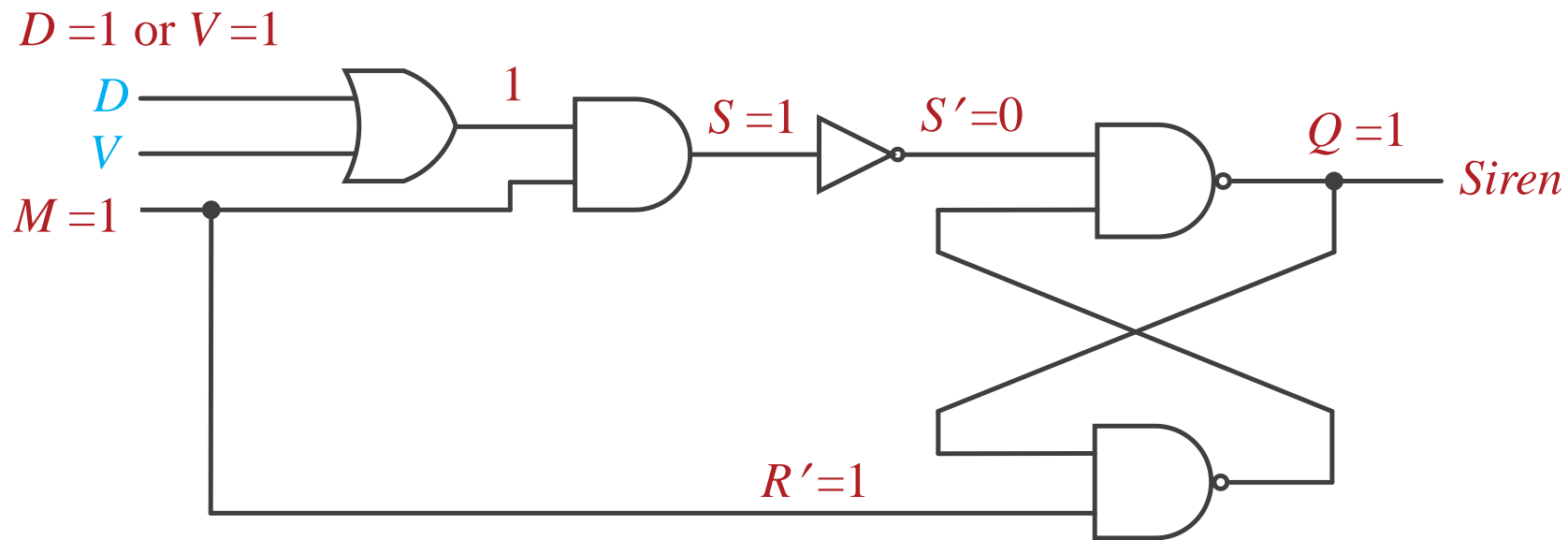
具有记忆功能的汽车报警器

❖ 在原先用组合逻辑电路实现的汽车报警器的基础上，加入SR锁存器，可以设计出新的汽车报警器。

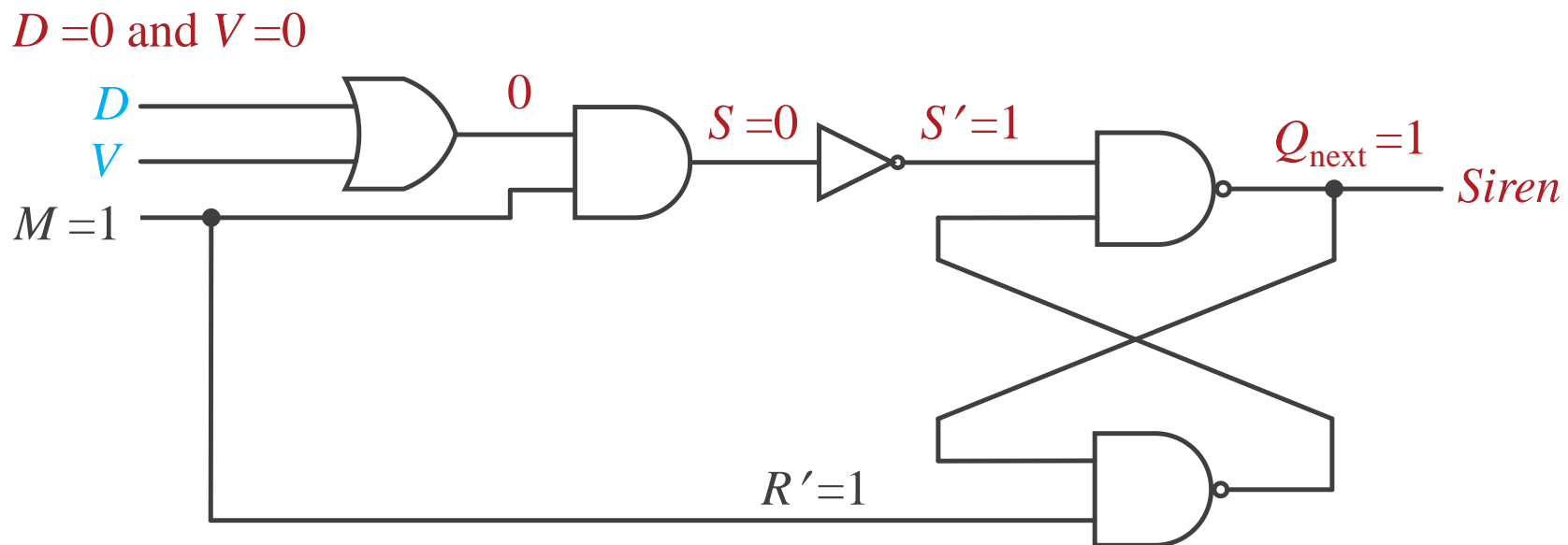


汽车警报器v2.0

车门开关传感器或
震动传感器被触发



此后，车门开关传
感器和震动传感器
被关闭



4.1 知识点

4.1.1 二进制及基本逻辑运算

- 二进制数
- 开、关和0、1

4.1.2 逻辑门电路

- 晶体管 and 开关
- 与门、或门、非门

4.1.3 真值表和布尔方程

- 逻辑电路图、逻辑表达式、真值表

4.2.1 组合逻辑电路

- 综合
 - 3个步骤：1) 写出真值表；2) 根据真值表写出逻辑表达式；3) 画出电路图
- 分析
 - 真值表

4.2.2 时序逻辑电路

- 双稳态存储单元
 - 两个反相器串接
 - 不能改变电路状态
- SR锁存器
 - 与非门代替反相器
 - SR同时为零，系统不稳定

The End.



中国大学MOOC

周成伟
zhouchw@zju.edu.cn