

科技创新类通识课程

运筹与决策

浙江大学数学科学学院 谈之奕



数学规划

线性规划

- 标准型
 - 要求
 - 目标为极小化函数
 - 所有约束均为等式约束
 - 约束等式右端均为非负常数
 - 决策变量取非负值
 - 任意形式的线性规划可以变形为标准型

- 线性规划最优解的类型

- 唯一最优解
- 无穷多最优解 ~~有限个最优解~~
- 最优值无下界
- 无可行解

$$\min \mathbf{c}\mathbf{x}$$

$$s.t. \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{b}$$

$$x_j \text{ 无约束} \Leftrightarrow x_j = x'_j - x''_j$$

$$\min -2x_1 + x_2$$

$$s.t. -x_1 + x_2 \leq 2$$

$$x_1 - 4x_2 \leq 2$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$x_1 = 2M, x_2 = M$$



浙江大学

Zhejiang University

运筹与决策

基本可行解

- 基与基本可行解

- 设系数矩阵 \mathbf{A} 为 $m \times n$ 行满秩矩阵

- 将 \mathbf{A} 分块为 (\mathbf{B}, \mathbf{N}) (必要时调整列的次序), 其中 \mathbf{B} 为 m 阶可逆方阵, 称为基 (basis)

- 决策变量 \mathbf{x} 相应地分块为 $\begin{pmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{pmatrix}$, \mathbf{x}_B 和 \mathbf{x}_N 中的分量分别称为基变量和非基变量

- 令 $\mathbf{x}_N = \mathbf{0}$, 则 $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$, 称 $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$ 为相应于基 \mathbf{B} 的基本解

- 当 $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ 时, 称 \mathbf{x} 为一基本可行解

$$\min \mathbf{c}\mathbf{x}$$

$$s.t. \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

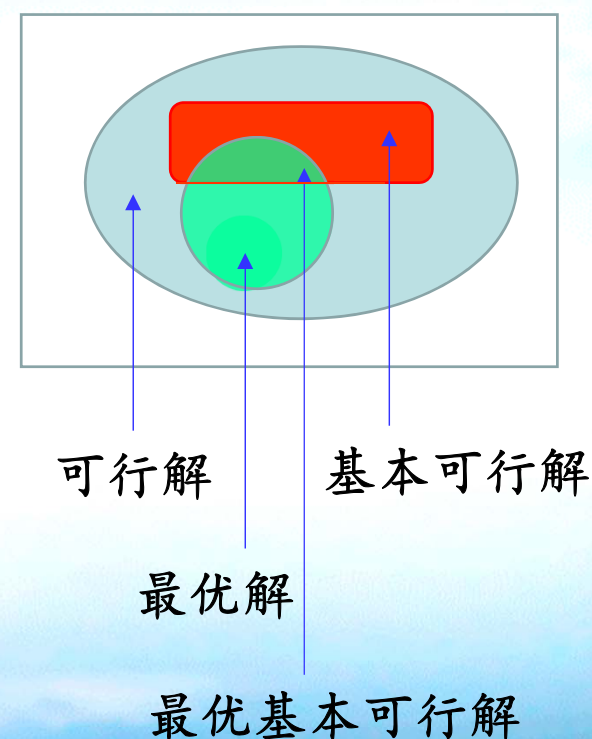
$$(\mathbf{B}, \mathbf{N}) \begin{pmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{pmatrix} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{B}\mathbf{x}_B + \mathbf{N}\mathbf{x}_N = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x}_B \geq \mathbf{0}, \mathbf{x}_N \geq \mathbf{0}$$

线性规划基本定理

- 线性规划基本定理
 - 若线性规划有可行解，必有基本可行解
 - 若线性规划有有界最优解，则必有最优基本可行解
- 寻求线性规划的最优解，只需在所有基本可行解中寻找
 - 基本可行解的数目不超过系数矩阵所有可能的不同的基的数目 $\binom{n}{m}$





浙江大学

Zhejiang University

运筹与决策

单纯形法

- 单纯形法 (Simplex Method) 的基本思想
 - 寻找到一个初始基本可行解, 判断是否是最优解
 - 若不是最优解, 则转换到另一个基本可行解 (它们对应的基只有一列不同), 并使目标值下降 (或不上升)
 - 重复有限次, 可找到最优解或判断解无界
- 单纯形法的几何意义
 - 线性规划的可行域是一个凸多面体 (有界或无界), 每个基本可行解对应于凸多面体的一个顶点
 - 单纯形法每次迭代过程对应于从凸多面体的一个顶点转到相邻的另一个顶点, 直至找到最优解



浙江大学

Zhejiang University

运筹与决策

时间复杂度

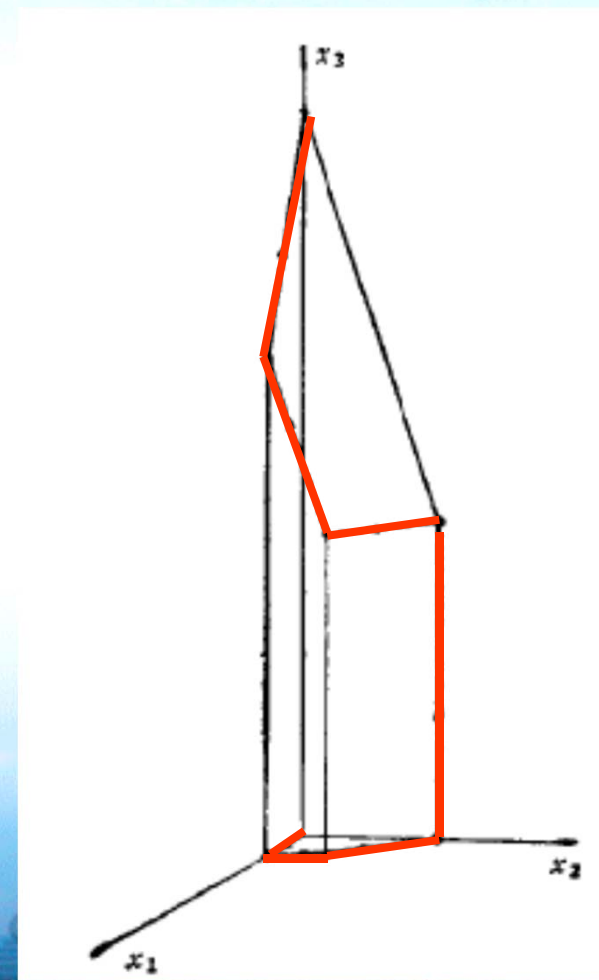
- 大量实践表明，对多数线性规划问题，单纯形法迭代次数为 m 和 n 的多项式
- 存在含 m 个变量的线性规划，单纯形法需要进行 $2^m - 1$ 次迭代

$$\max \sum_{i=1}^m 10^{m-i} x_i$$

$$s.t. \quad 2 \sum_{i=1}^{j-1} 10^{j-i} x_i + x_j \leq 100^{j-1}, \quad j = 1, \dots, m$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m$$

Klee V, Minty GJ, How good is the simplex algorithm? In *Inequalities – III* (Shisha O, Eds.), Academic Press, 159–175, 1972



多项式时间算法



浙江大学

Zhejiang University

运筹与决策

- 1979年，Khachiyan 给出了求解线性规划的第一个多项式时间算法——**椭球算法**（Ellipsoid algorithm），解决了关于线性规划问题复杂性的open问题
- 1984年，Karmarkar 给出了实际效果更好的多项式时间算法——**内点法**（Interior Point Method），在数学规划领域产生了深远的影响



**Narendra
Karmarkar**
(1957-)
印度数学家



**Leonid Genrikhovich
Khachiyan**
(1952-2005)
苏联数学家

松弛

- 设有整数线性规划（IP），去除决策变量取整数约束后所得线性规划记为（LP），称（LP）为（IP）的**松弛**（relaxation）
 - （IP）的可行域包含于（LP）的可行域中
 - （IP）的可行解也是（LP）的可行解，但反之不然
 - （IP）的最优值不优于（LP）的最优值
 - 若（LP）的最优解为整数解，则它也是（IP）的最优解

$$\begin{aligned} & \min \mathbf{c}\mathbf{x} \\ (\text{IP}) \quad & s.t. \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \in \mathbb{Z}_+^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \min \mathbf{c}\mathbf{x} \\ (\text{LP}) \quad & s.t. \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n \end{aligned}$$



浙江大学

Zhejiang University

运筹与决策

松弛线性规划

$$\min -30x_1 - 36x_2$$

$$(\text{IP}) \text{ s.t. } x_1 + x_2 \leq 6$$

$$5x_1 + 9x_2 \leq 45$$

$x_1, x_2 \geq 0$ 且为整数

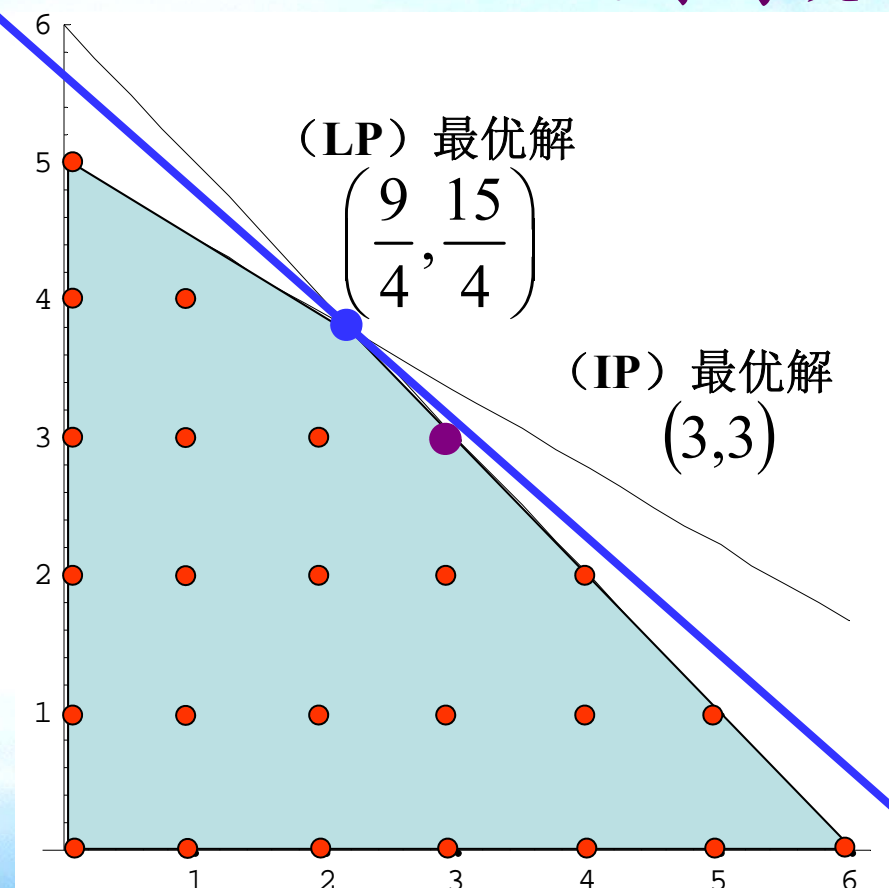
$$\min -30x_1 - 36x_2$$

$$(\text{LP}) \text{ s.t. } x_1 + x_2 \leq 6$$

$$5x_1 + 9x_2 \leq 45$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

不存在简单的取整策略将 (LP) 的最优解变为 (IP) 的最优解



分枝定界法



浙江大学

Zhejiang University

运筹与决策

- (BP) had ambitions to extend the model to deal also with the planning of world movement of oil from source to refinery, but knew that the capacity restrictions on the ships and storage tanks introduced discrete variables into their models
- the solution of this type of problem required electronic computation, but unfortunately LSE at that time did not have any access to such a facility. However, we had no doubt that using the same approach to computing could be achieved, if rather painfully, on desk computers, which were plentifully available. We became quite skillful at doing vector operations by multiplying with the left hand, and adding and subtracting with the right hand on another machine



Ailsa Land Alison Doig

An automatic method of solving discrete programming problems, *Econometrica* 28, 497–520, 1960.

ECONOMETRICA
JOURNAL OF THE ECONOMETRIC SOCIETY



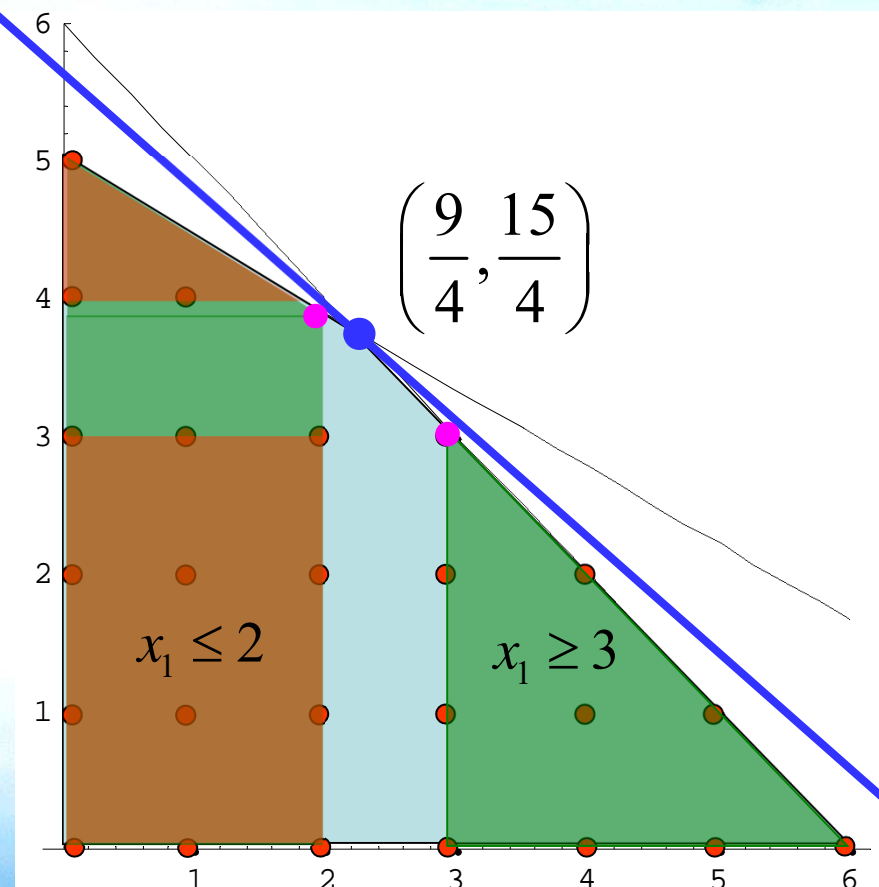
浙江大学

Zhejiang University

运筹与决策

分枝定界法

- **Branch and Bound (B-B)**
 - (分枝) 求解整数线性规划 (IP) 的松弛 (LP)，若其最优解不为整数解，选择最优解中任一不取整数值的变量，在 (IP) 中分别加入一对互斥的约束，形成两个分枝整数线性规划。原 (IP) 的任一可行解分属两个分枝的可行域之一





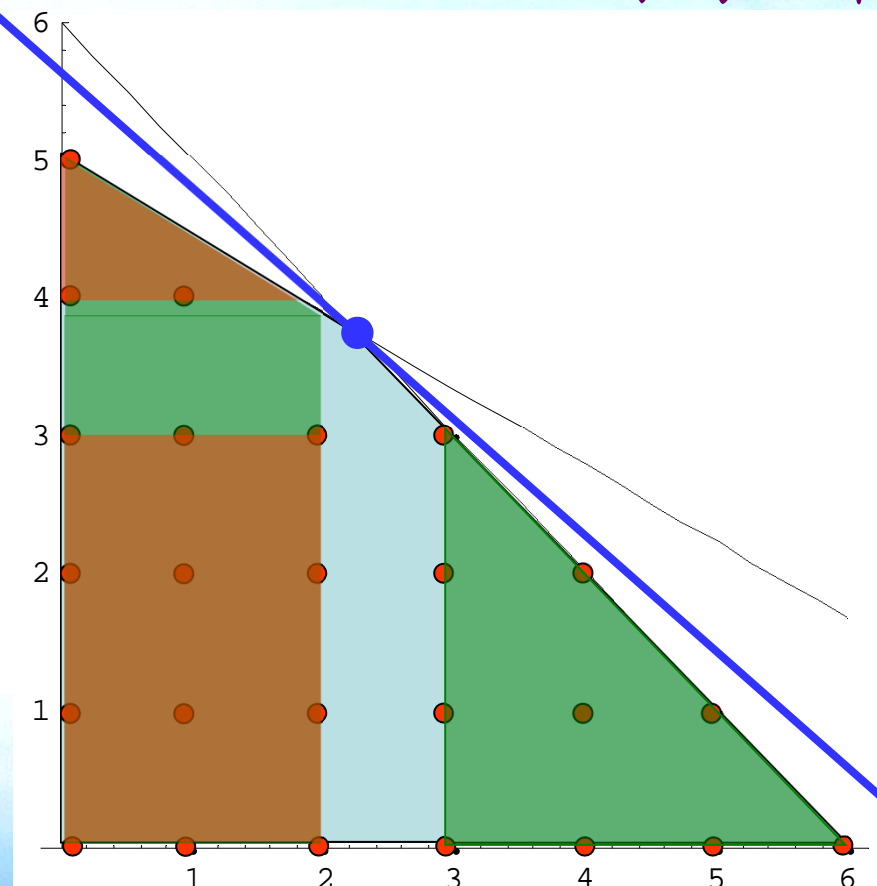
浙江大学

Zhejiang University

运筹与决策

分枝定界法

- **Branch and Bound (B-B)**
 - (定界) 求解分枝整数线性规划的松弛，确定每个分枝最优值的上界或下界，删去松弛线性规划最优解为整数解或不包含 (IP) 最优解的分枝。至所有分枝均已删去时，(IP) 的最优解必包含在历次求得的整数解中





浙江大学

Zhejiang University

运筹与决策

分枝定界法

- 分枝定界法是求解整数规划最常用的算法之一，但仍是指数时间算法。采用更为复杂的定界方法或选择适宜的分枝策略可在一定程度上减少运算时间
- 用于求解0-1规划等特殊整数规划的分枝定界法有更为简单的表现形式和更好的实际效果
- 分枝定界法的思想可用于其它离散优化问题的求解，分枝、定界的策略与方法和问题特征密切相关

设施选址



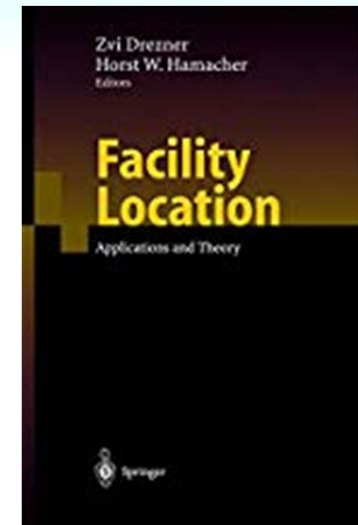
浙江大学

Zhejiang University

运筹与决策

- 设施选址 (facility location)

- 现有 n 个居民小区需提供某项服务, 有 m 处地点可用于开设服务点。在地点 i 开设服务点所需开设费用为 $f_i, i=1, \dots, m$ 。设置在地点 i 的服务点为小区 j 提供服务所需的运营费用为 $c_{ij}, i=1, \dots, m, j=1, \dots, n$ 。现需选择若干地点开设服务点, 并确定每个服务点的服务对象, 使每个小区至少有一个服务点为其提供服务, 并且总费用最小



- 问题分析

- 决策变量: y_i 是否开设、 x_{ij} 服务对象
- 约束条件: 小区全覆盖、先开设再服务
用对、用好、用活0-1变量

Zvi, D, Hamacher, HW (eds.), *Facility Location: Applications and Theory*. Springer, 2001.



浙江大学

Zhejiang University

运筹与决策

$$\min \sum_{i=1}^m (f_i + \sum_{j=1}^n C_{ij})$$

$$\text{s.t. } \sum_{j=1}^n C_{ij} > 0, \quad i=1, 2, \dots, m,$$

$$C_{ij} \geq 0, \quad i=1, 2, \dots, m, \quad j=1, 2, \dots, n.$$

$C_{ij} = 0$ 即为不提供服务.

$f_i = 0$ 即为在 i 处不提供服务.

无决策变量 (输入=变量)

由题意得 $m > n$.

定义决策变量 $x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{在地点 } i \text{ 的服务点为 } j \text{ 提供服务.} \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad \begin{matrix} i=1, \dots, m. \\ j=1, \dots, n. \end{matrix}$

则可得数学规划模型为 $\min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} x_{ij}. \quad \min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (f_i + C_{ij}) x_{ij}$

$$\text{s.t. } \sum_{j=1}^n x_{ij} \geq 1, \quad i=1, \dots, m.$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = 1, \quad j=1, \dots, n.$$

$$x_{ij} = 0 \text{ 或 } 1, \quad i=1, \dots, m, \quad j=1, \dots, n.$$

一组决策变量
所有地点都需设

决策变量 $x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{地点 } i \text{ 的服务点为小区 } j \text{ 提供服务} \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$

$a_i = \begin{cases} 1 & i \text{ 处有服务点} \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$

数学规划

$$\min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} c_{ij} + \sum_{i=1}^m a_i f_i$$

$$s.t. \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i=1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \geq 1, \quad j=1, 2, \dots, n$$

其中 $x_{ij} = 0 \text{ 或 } 1, \quad i, j = 1, 2, \dots, m, n$

两组变量无联系

某处无服务点
仍可为某小区
提供服务

引入决策变量 $a_x = \begin{cases} 1 & \text{在 } x \text{ 开服务点} \\ 0 & \text{在 } x \text{ 不开服务点} \end{cases}$, 定义 $\frac{1}{0} = \infty$

对小区 j , 最小服务费 $\min_{1 \leq i \leq m} \left(\frac{c_{ij}}{a_i} \right)$

$$\min a_1 f_1 + a_2 f_2 + \dots + a_m f_m + \sum_{1 \leq j \leq n} \min_{1 \leq i \leq m} \left(\frac{c_{ij}}{a_i} \right)$$

$$s.t. \quad a_1, a_2, \dots, a_m = 1 \text{ 或 } 0.$$

一组决策变量
目标函数复杂



令 X_{ij} 为 0 或 1, 0 表示 ~~该~~ 地点不为 j 小区提供服务, 反之 1 表示提供服务.

$$X_i = 1 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n X_{ij} > 0. \quad X_j = 1 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^m X_{ij} = 0.$$

条件型约束

策

$$\min \sum_{i=1}^m (f_i X_i + \sum_{j=1}^n C_{ij} X_{ij})$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^m C_{ij} \geq 0 \quad j=1, \dots, n$$

文字型约束

$$X_{ij} = 0 \text{ 或 } 1 \quad i=1, \dots, m \quad j=1, \dots, n$$

设地点 i 开设服务点则 $X_i = 1$, 否则 $X_i = 0$. 若地点 i 的服务点为小区 j 提供服务则 $X_{ij} = 1$.

$$\min \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m X_{ij} C_{ij} + \sum_{i=1}^m f_i X_i$$

$$\text{s.t.} \quad \text{对 } \forall j=1, 2, \dots, n.$$

$$\sum_{i=1}^m X_{ij} \geq 1.$$

当 $X_{ij} = 1$ 时 $X_i = 1$.
存在 必然

$$j=1, 2, \dots, n.$$

解: 定义 $X_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{地点 } i \text{ 的服务点为小区 } j \text{ 提供服务} \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$

$$\text{与 } y_i = \begin{cases} 1 & \text{存在 } X_{ij} = 1 \\ 0 & \text{任意 } X_{ij} = 0 \end{cases}$$

$$\text{则有 } \min \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m X_{ij} C_{ij} + \sum_{i=1}^m f_i y_i$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^m X_{ij} \geq 1, \quad j=1, 2, \dots, n$$

谢 谢