

科技创新类通识课程

运筹与决策

浙江大学数学科学学院 谈之奕





浙江大学

Zhejiang University

运筹与决策

组合优化

组合优化

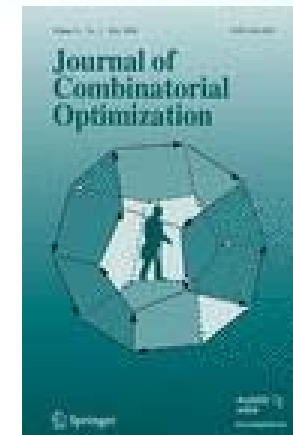


浙江大学

Zhejiang University

运筹与决策

- **组合优化 (Combinatorial Optimization)** : 从有限个可行解中找出使某个目标函数达到最优的解的优化问题
- 连续优化与离散优化
 - **连续优化 (Continuous Optimization)** : 决策变量在实数空间内取值的优化问题
 - **离散优化 (Discrete Optimization)** : 涉及离散对象的优化问题
- 组合优化与**组合学 (Combinatorics)**
 - 两者均为研究离散对象的数学分支。组合学着重研究满足特定性质对象的**存在性**、**计数**、**构造**等问题，组合优化要求在众多可行解中按一定标准选出**最优解**



**Journal of Combinatorial
Optimization**

Discrete Optimization

离散优化=组合优化+整数规划
(+.....)

离散与连续

- $$\max \left\{ \sum_{j=1}^n p_j x_j \mid \sum_{j=1}^n w_j x_j \leq C, 0 \leq x_j \leq 1, j = 1, \dots, n \right\}$$
 - 不妨设 $\frac{p_1}{w_1} \geq \frac{p_2}{w_2} \geq \dots \geq \frac{p_n}{w_n}$
 - 令 $j = \min \left\{ k \mid \sum_{i=1}^k w_i > C \right\}$
 - 最优解

$$x_i^* = 1, i = 1, 2, \dots, j-1,$$

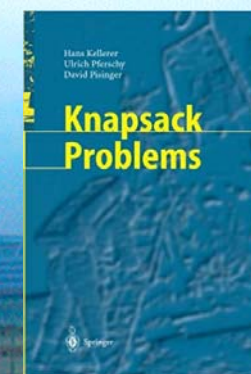
$$x_j^* = \frac{1}{w_j} \left(C - \sum_{i=1}^{j-1} w_i \right),$$

$$x_i^* = 0, i = j+1, \dots, n$$
- $$\max \left\{ \sum_{j=1}^n p_j x_j \mid \sum_{j=1}^n w_j x_j \leq C, x_j = 0, 1, j = 1, \dots, n \right\}$$
 - 背包问题 (Knapsack) :**
现有 n 件物品, 物品 j 的价值为 p_j , 大小为 w_j , 背包容量为 C 。要求选择若干物品放入背包, 在放入背包物品大小之和不超过背包容量前提下, 使放入背包物品价值之和尽可能大



Martello S, Toth P. *Knapsack Problems: Algorithms and Computer Implementations*, Wiley, 1990.

Kellerer H, Pferschy U, Pisinger D. *Knapsack Problems*. Springer, 2004



旅行售货商问题

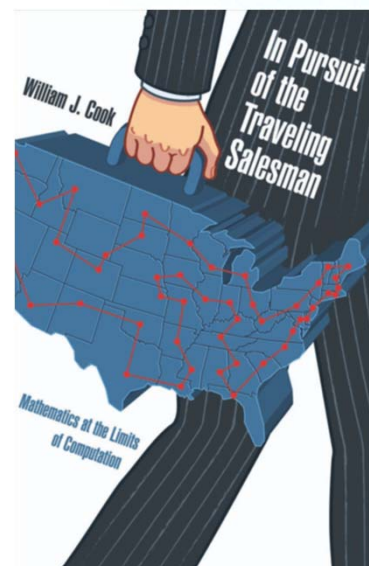


浙江大学

Zhejiang University

运筹与决策

- 一推销商想在若干个城市中推销自己的产品。计划从某个城市出发，经过每个城市恰好一次，最后回到出发的城市。假设城市之间距离已知，推销商应如何选择环游路线，使他走的路程最短。该问题称为**旅行售货商问题**（Traveling Salesman Problem, TSP）



William Cook

(1957-)

加拿大滑铁卢大学
组合与优化系教授

Cook, WJ, *In Pursuit of the Traveling Salesman: Mathematics at the Limits of Computation*, Princeton University Press, 2012.

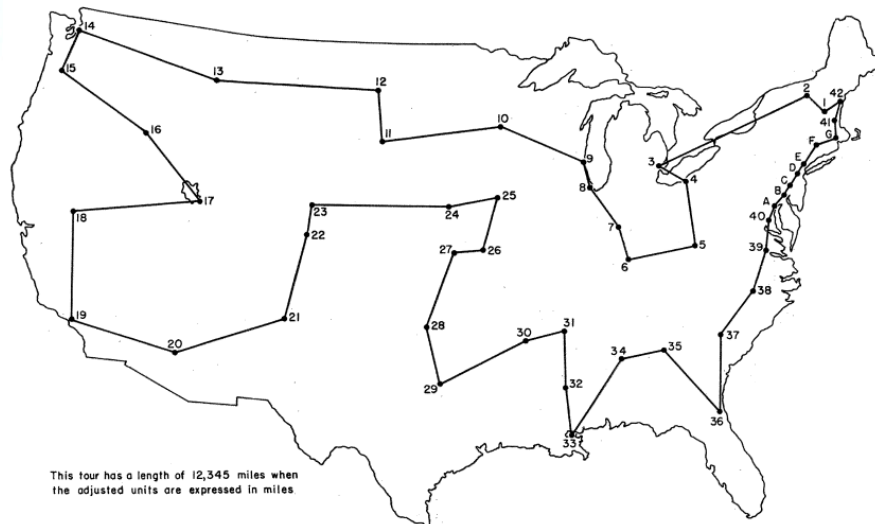
环游美国的TSP



浙江大学

Zhejiang University

运筹与决策

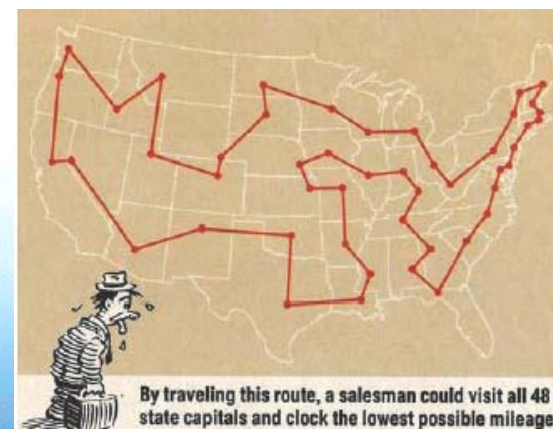


美国49个城市的最优TSP环游

Dantzig, G., Fulkerson, R., Johnson, S.,
Solution of a Large-Scale Traveling-Salesman
Problem, *Journal of the Operations Research
Society of America*, 2, 393-410, 1954.



美国48个
州首府的
TSP环游
(上图载自
Discover
的环游经
过各州的
顺序与原
论文相
同, 但不
再是最优
环游, 下
图为新实
例的最优
环游)



VLSI设计中的TSP

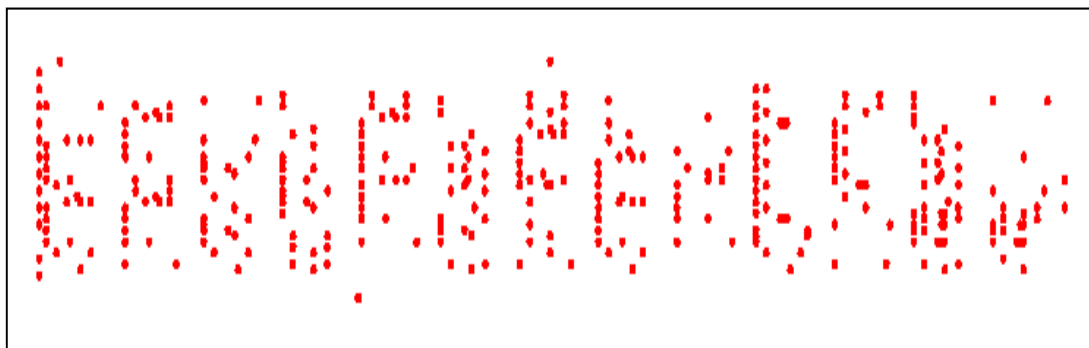


浙江大学

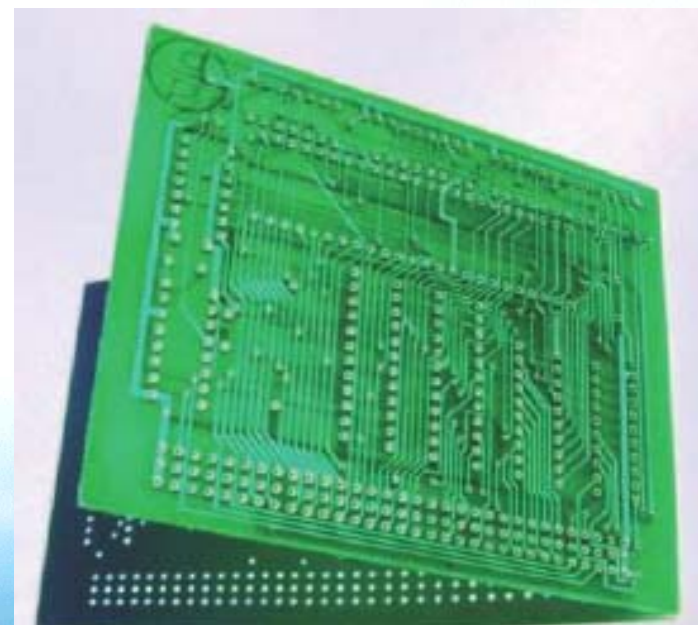
Zhejiang University

运筹与决策

- PMA343



- 441个焊点的印刷电路板



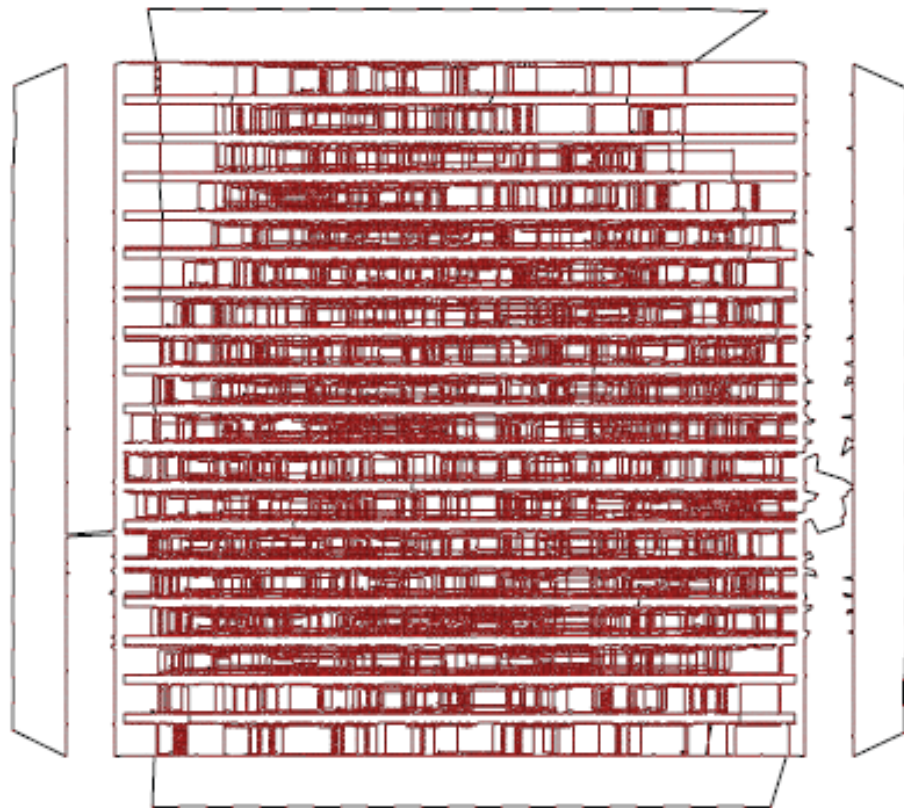
大规模TSP实例



浙江大学

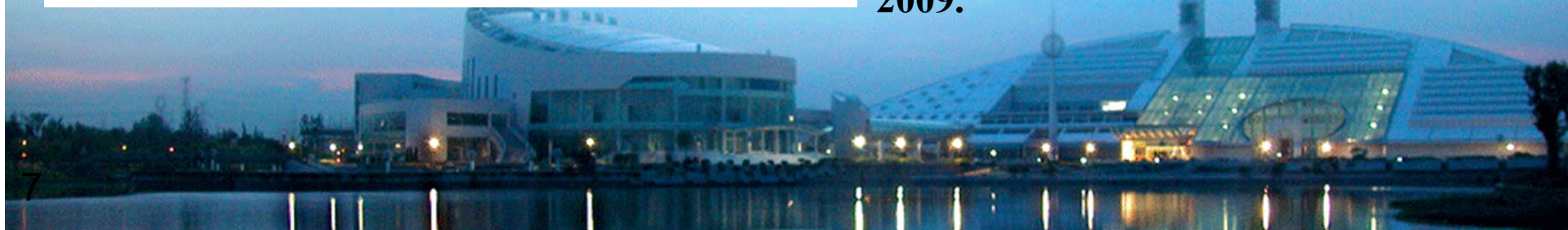
Zhejiang University

运筹与决策



全球666个城市的最优环游（1991）

Applegate DL, Bixby RE, Chvátal V, Cook W, Espinoza DG, Goycoolea M, Helsgaun K, Certification of an optimal TSP tour through 85,900 cities, *Operations Research Letters*, 37, 11-15, 2009.

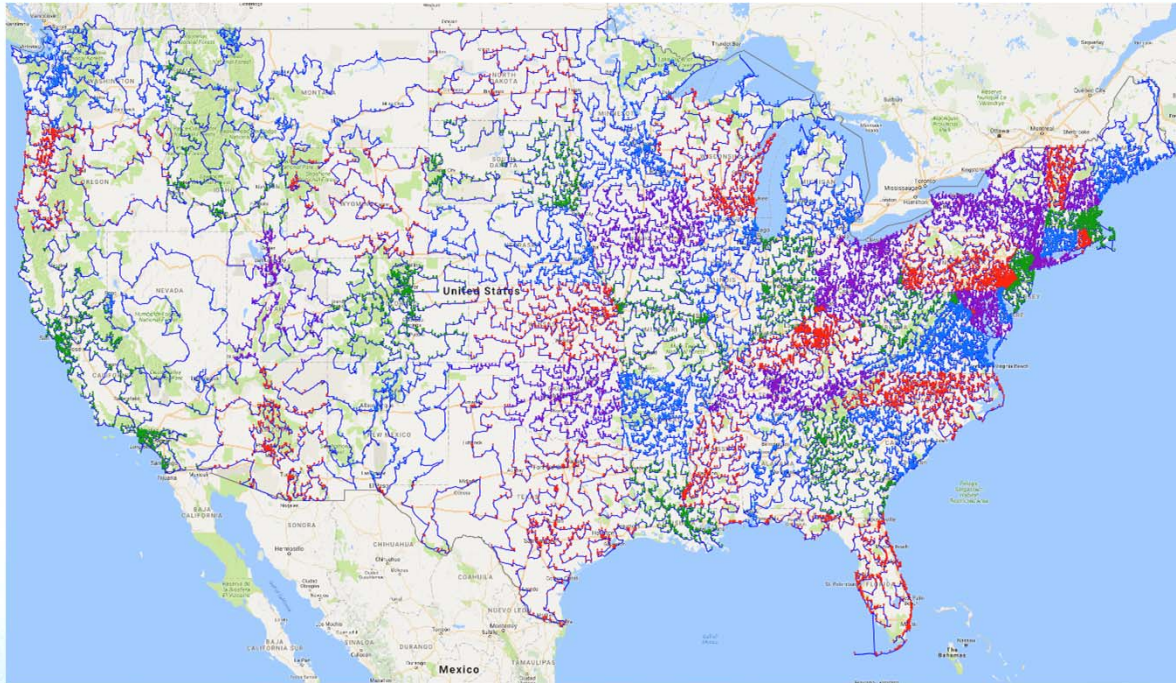


US Historic Places

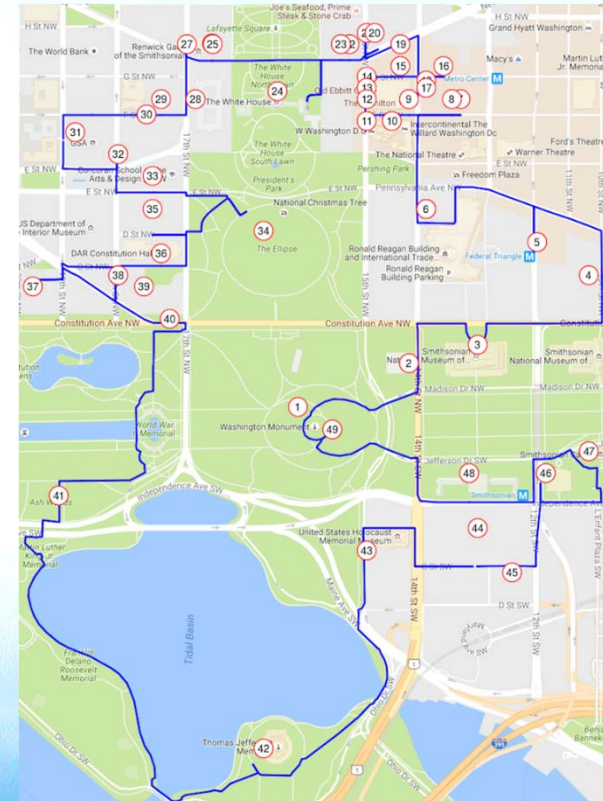


浙江大学
Zhejiang University

运筹与决策



US National Register of Historic Places, 49,603-city TSP
Optimal tour has length 350,201,525 meters



Washington, 50-city

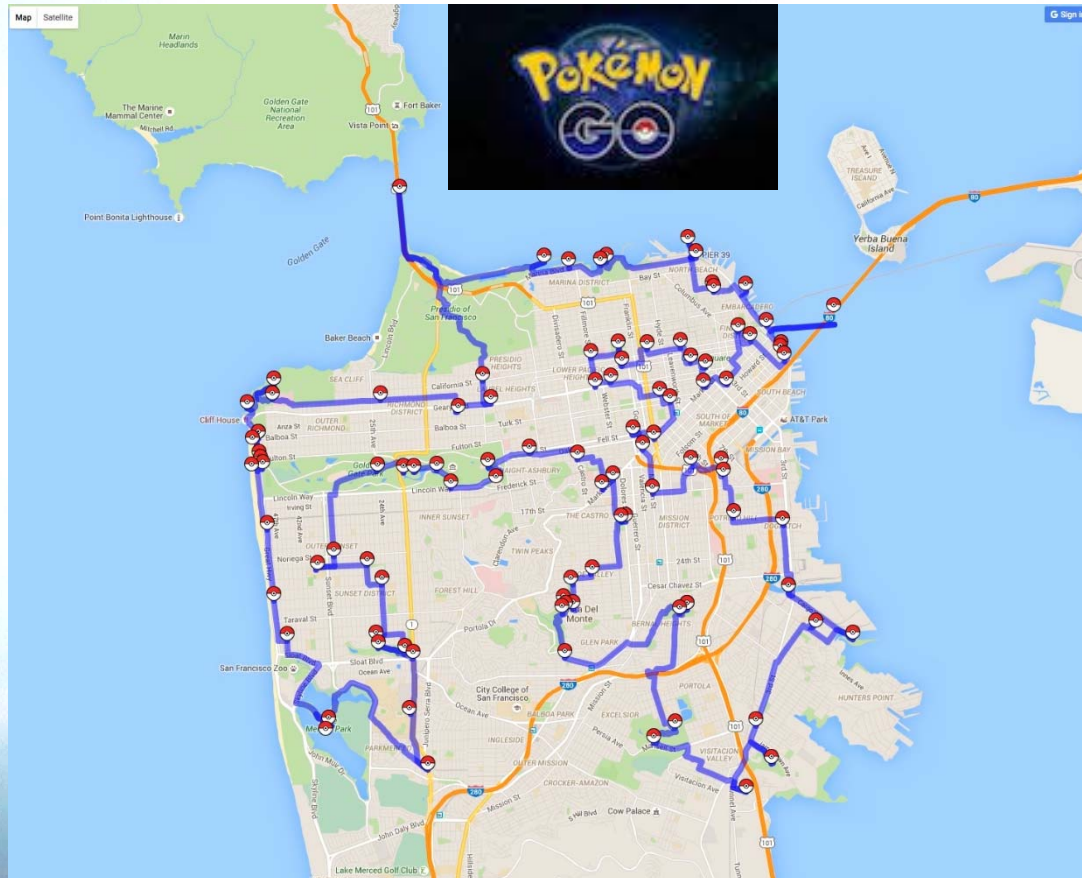
Pokemon Go



浙江大学

Zhejiang University

运筹与决策



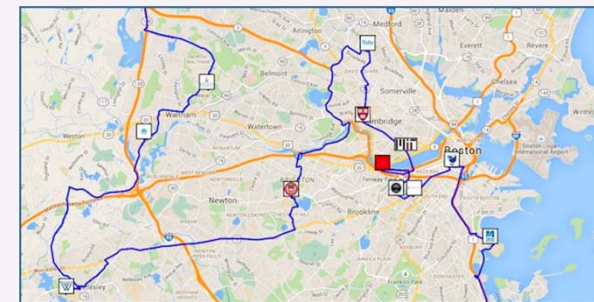
99 Pokemon Go stops in San Francisco. The full walking tour would be a long day at 104,503 meters (or 65 miles). It took 0.1 seconds to compute on a Mac Mini.

<http://www.math.uwaterloo.ca/tsp/>

The Traveling Salesman Problem

The Traveling Salesman Problem is one of the most intensively studied problems in computational mathematics. These pages are devoted to the history, applications, and current research of this challenge of finding the shortest route visiting each member of a collection of locations and returning to your starting point.

Hey Siri, how can I solve the TSP? YouTube, mov, or mp4



Optimal road trip to visit all 647 colleges on Forbes' list.

Concorde TSP

- The Concorde App computes exact optimal solutions for TSP. Instances of 1,000 or more cities can often be solved exactly, with all computations carried out locally on your iPhone or iPad



[View in iTunes](#)

+ This app is designed for both iPhone and iPad

Free

Category: [Education](#)

Updated: May 09, 2016

Version: 1.6

Size: 7.4 MB

Language: English

Seller: William Cook

© William Cook, Monika

Mevenkamp

Rated 4+





浙江大学

Zhejiang University

运筹与决策

最小生成树

- 在某地区内修建连接若干城镇的公路系统，假设公路造价与长度成正比，如何设计造价最低的建造方案
- **最小生成树**（**minimum spanning tree, MST**）
 - 连通的无圈图称为**树**（**tree**）
 - 树 T 称为图 G 的**生成树**（**spanning tree**），若 T 是 G 的子图、且和 G 有相同的顶点集
 - 赋权图 G 的所有生成树中总权和最少的生成树称为**最小生成树**



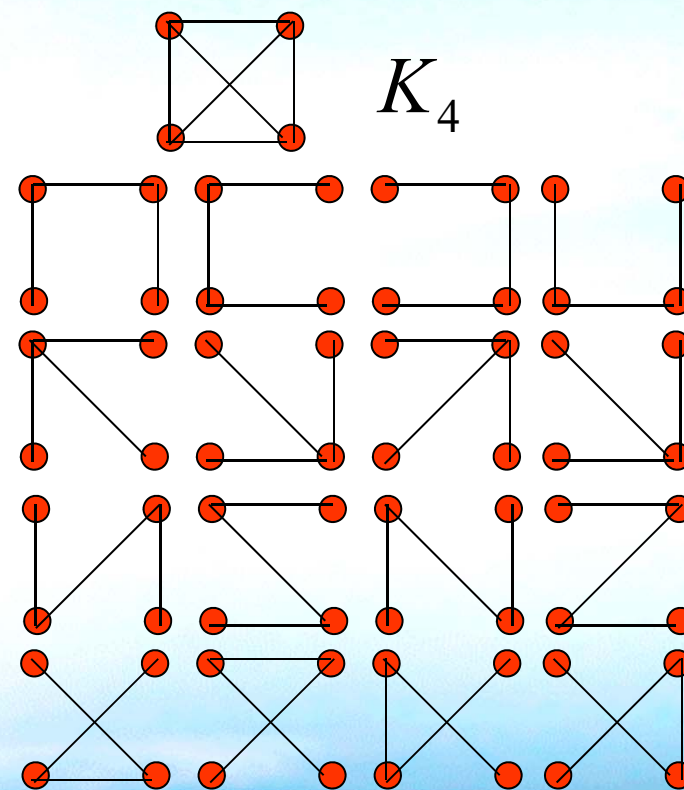
浙江大学

Zhejiang University

运筹与决策

最小生成树

- 将城镇视作图的顶点，城镇之间的距离视作连接两个顶点的边的长度。生成树可以把所有城镇都连接起来；最小生成树具有最小的总长度
- 完全图 K_n 有 n^{n-2} 颗不同的生成树



最小生成树



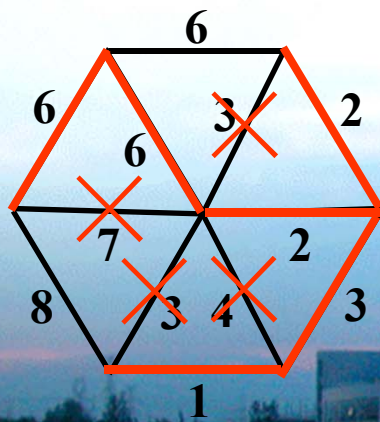
浙江大学

Zhejiang University

运筹与决策

- **Kruskal 算法**

- 将连通图 $G = (V, E)$ 的所有边按权非降顺序排列
- $F = \emptyset$, $j = 1$
- 若图 $T = (V, F \cup \{e_j\})$ 不含圈, 则令 $F = F \cup \{e_j\}$
- 若 $|F| = |V| - 1$, 终止, $T = (V, F)$ 即为最小生成树。否则, 返回上一步



Otakar Borůvka
(1899—1995)

捷克数学家

Borůvka O, O jistém problému minimálním
(About a certain minimal problem), *Práce mor.
Přírodově d. spol. v Brně III*, 3, 37-58, 1926

Kruskal JB. On the shortest spanning subtree of a graph and
the traveling salesman problem. *Proceedings of the American
Mathematical Society*, 7, 48-50, 1956



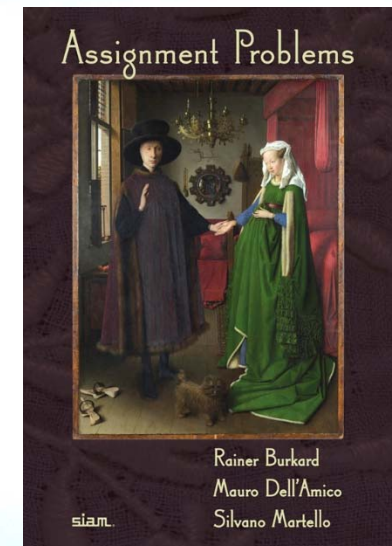
Kruskal

(1928 –2010)

美国数学家、
计算机科学家

指派问题

- 指派问题 (Assignment Problem)
 - 设有 n 项任务需分配给 n 位员工，每人完成其中一项，员工 i 完成任务 j 所需时间为 c_{ij} ，如何分配可使完成所有任务所用总时间最少
 - 不同的分配方案共有 $n!$ 种



Burkard, RE, Dell'Amico, M., Martello, S., *Assignment Problems*, SIAM, 2009.

封面题图：Jan van Eyck, *Portrait of Giovanni Arnolfini and his Wife*, 1434, 现藏英国伦敦国家美术馆

穷举



浙江大学

Zhejiang University

运筹与决策

- 组合优化问题通常不能通过穷举所有可能的解加以比较来求解，其原因是可行解的数目可能是一很大的数，以致于当前或相当长的一段时间内人力或计算机不能承受



FIGURE 2

Grand Vizier Sissa Ben Dahir, a skilled mathematician, asks his reward from King Shirham of India.

《One Two Three . . . Infinity: Facts and Speculations of Science》插图

穷举

$$2^0 = 1$$



King Shirham vs. Sissa Ben Dahir

按一千克小麦含25000粒计算，棋盘上的小麦总计约为7400亿吨，按目前的平均产量计算，是全世界一千多年生产的全部小麦

$$2^{63} = 9223372036854775808 \\ = 9.22 \times 10^{18}$$



函数量阶

函数	10	20	40	100
$\lg n$	1秒	1.30秒	1.60秒	2秒
n	4.34秒	8.69秒	17.37秒	43.4秒
n^5	12小时	16天	514天	138年
2^n	444秒	5.27天	151世纪	1.7×10^{20} 世纪
$n!$	18.2天	3.3×10^8 世纪	1.1×10^{38} 世纪	1.2×10^{148} 世纪
n^n	138年	1.4×10^{16} 世纪	1.6×10^{54} 世纪	1.4×10^{190} 世纪



函数量阶

	现在的计算机	快100倍	快10000倍	快1000000倍
$\lg n$	N	N^{100}	N^{10000}	$N^{1000000}$
n	N	$100N$	$10000N$	$1000000N$
n^5	N	$2.51N$	$6.31N$	$15.85N$
2^n	N	$N + 6.64$	$N + 13.28$	$N + 19.93$



全球Top500超级计算机

<http://www.top500.org/>



浙江大学
Zhejiang University

运筹与决策

时间	公司	计算机	浮点数运算次数	提高 倍数
1993.6(首届)	TMC	CM5	59.70GFlops	/
1998.6(11届)	Intel	ASCI-Red	1338.00GFlops	22.4
2003.6(21届)	NEC	NEC Vector	35860.00GFlops	600.7
2008.6(31届)	IBM	Roadrunner	1026.0TFlops	17185.9
2013.6(41届)	国防科大	天河二号	33862.7TFlops	567214
2018.6(51届)	IBM	Summit	122300.6TFlops	2048576
2019.11(54届)	IBM	Summit	148600.0TFlops	2493288

kiloFLOPS= 10^3 , megaFLOPS= 10^6 , gigaFLOPS= 10^9 , teraFLOPS= 10^{12} ,
petaFLOPS= 10^{15} , exaFLOPS= 10^{18} , zettaFLOPS= 10^{21} , yottaFLOPS= 10^{24}



浙江大学

Zhejiang University

运筹与决策

穷举

- 也有一些问题，如最小生成树、指派问题等，可以不通过穷举或类似于穷举的方法找到最优解，从而使求解时间大幅下降。而对有些问题，如背包问题、TSP等，目前还没有找到这样的方法
- 组合优化研究的一个重要方面是区分哪些问题是容易求解，哪些问题是难求解的；对不同类型的问题采用何种方法求解

谢 谢