微积分甲（II）练习题之二

一、填空题

1．已知$\oint_l \dfrac{x\mathrm{d}x-ay\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=0$，其中 l 为上半平面$(y>0)$上任一分段光滑的封闭曲线，则常数 $a=$______.

2．若三重积分在直角坐标系下的计算公式为$\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_1^{1+\sqrt{1-x^2-y^2}} f(x,y,z)\mathrm{d}z$，则此三重积分在球面坐标系下的计算公式为______________________________.

3．设 l 为椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，$(a>b>0)$，其周长为 p，则

$\oint_l (b^2x^2+a^2y^2+abxy)\mathrm{d}l=$_________.

4．设 S 为球面 $x^2+y^2+z^2=4$，法向向外，则$\iint\limits_S x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$___________.

5．矢量场 $\vec{A}=2xy\vec{i}-yz\vec{j}+zx\vec{k}$ 在平面 $x+2y-z+3=0$ 上某点 P 的散度为_____________.

6．已知 $\dfrac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x+\dfrac{e^y}{1+x^2}\mathrm{d}y$ 为二元函数 $u(x,y)$ 的全微分，且 $u(0,0)=1$，则 $u(x,y)=$______.

二、求曲面 $x^2+y^2=3z$，$z=6-\sqrt{x^2+y^2}$ 所围立体的全表面积.

三、设曲线段 l 为从 $A(1,0,0$ 沿曲线$\begin{cases}x=\cos t\\ y=\sin t\\ z=2\sqrt{2}t\end{cases}$,到 $B(0,1,\sqrt{2}\pi)$，再从 B 沿直线方向 $\vec{V}=\{-3,-4,0\}$ 到 C. 设 l 的线密度为 1，问直线段 BC 多长时，曲线段 l 的重心落在 yOz 平面上？

四、计算 $I=\int_L \dfrac{x\mathrm{d}y+(1-y)\mathrm{d}x}{x^2+(y-1)^2}$，其中 L 为从点 $M(1,0)$ 沿曲线 $y=k\cos\dfrac{\pi x}{2}\,(k\neq 1)$ 到点 $N(-1,0)$.

五、求矢量场 $\vec{A}=yz\vec{j}+3\vec{k}$ 沿 z 轴正向通过上半球面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 的流量.

六、设 $\Omega=\left\{(x,y,z)\,\middle|\,x^2+y^2+z^2\le 1\right\}$, $f(x)$ 连续.

①证明 $\iiint\limits_\Omega f(z)\mathrm{d}V=\pi\int_{-1}^{1} f(z)(1-z^2)\mathrm{d}z$；

②球体 $x^2+y^2+z^2\le 1$ 的密度 $\mu(x,y,z)=z^4$，求此球体的质量 M .

七、证明：若 S 为光滑封闭曲面，$\vec{l}$ 为任一固定方向，

则 $\oiint\limits_S \cos(\vec{n},\vec{l})\mathrm{d}S=0$，其中 $\vec{n}$ 为曲面 S 的外法线方向.