微积分甲（II）练习题之一

一、　填空题

1. 幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n\,(3^n+2^n)}x^n$ 的收敛域为________________________________.

2. 设$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=5$，且$\vec{a}\perp\vec{b}$，则$\left|(\vec{a}+2\vec{b})\times(3\vec{a}-\vec{b})\right|=$______________.

3. 点$(1,-4,5)$在直线$\frac{x}{-2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{1}$上的投影点的坐标为____________.

4. 设函数f,g均可微，$z=f(xy,g(xy)+\ln x)$，则$x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=$____________.

5. 设$u=\sqrt{x^2+2y^2+3z^2}$，则u在$(1,1,-1)$的梯度为________________.

6. 若$D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 9\right\}$，则$\iint\limits_D(\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$______________________.

7. 设$z=f(x^3,e^{xy})$，则$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$____.

二、已知直线 L_1：$\frac{x-1}{-1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+2}{1}$ 和 L_2：$\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{2}$，求与 L_1，L_2 垂直相交的直线 L 的方程.

三、设抛物面 $x^2+y^2=4z$ 上某点 M 处的切平面为π，若曲线

$x=t^2,y=t,z=3(t-1)$ 对应于$t=1$的点处的切线 L 在平面π上，试求平面π的方程.

四、设一球面与两平面$x-2y+2z=3$和$2x+y-2z=8$皆相切，且球心在直线

L_1：$\begin{cases}2x-y=0\\3x-z=0\end{cases}$ 上，求该球面方程.

五、求直线$\frac{x}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z}{2}$绕 z 轴旋转一周所得的旋转曲面 S 的方程，并求 S 与柱面

$(x-1)^2+y^2=1$围成的有限立体的体积.

六、设函数$u=x+y+z$及球面$x^2+y^2+z^2=1$，求球面上一点$M(x_0,y_0,z_0)$，使u在M沿球面的外法线方向的方向导数最大，并求最大值.

七、设 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3}{y},y\ne 0\\0,y=0\end{cases}$，证明 $f(x,y)$在点$(0,0)$处沿任何方向的方向导数存在，但

$f(x,y)$在$(0,0)$处不连续.

八、设 $f(x)$是区间$[0,1]$上的连续函数，并且$|f(x)|\le 1,x\in[0,1]$，

证明：$0 \le \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x f(x) f(y) \mathrm{d}y \le \frac{1}{2}$.

九．求级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\left(n^2-1\right) \cdot 2^{n+1}}$ 之和。

十．设两个正数数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，满足 $\mathrm{e}^{a_n} = a_n + \mathrm{e}^{b_n}, n = 1, 2, 3, \cdots$，已知$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，证明 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{a_n}$ 收敛。