

第二次上机题目

2024.03.22

考虑非线性常微分方程初值问题

$$\begin{cases} u' = 4tu^{\frac{1}{2}}, & 0 \leq t \leq 2, \\ u(0) = 1. \end{cases}$$

其精确解为

$$u(t) = (1 + t^2)^2.$$

使用不同算法对其进行数值求解，取终止时刻为 $T = 2$ ，分别取步长 $h = \frac{1}{10}, \frac{1}{20}, \frac{1}{40}, \frac{1}{80}, \frac{1}{160}$ 。画出 $t \in [0, 2]$ 区间上真解和数值解的对比图。输出在终止时刻 $T = 2$ 处的数值误差大小，并测试格式的阶数。

1. 三阶 Adams 内插法和三阶 Adams 外插法。

- 对比两者使用的已知节点个数（初值个数）。对于 k 步法，初始 k 个节点值尝试使用不同单步法进行求解，观察对后续数值解的影响。
- 对于隐式方法，测试不同迭代初值的选取和迭代次数对结果的影响。
- 对比两者在终止时刻 $T = 2$ 处的误差大小，并对观察到的现象进行合理解释。

2. 经典的四级四阶 Runge-Kutta 方法。适当放大计算步长 h （例如 $h = 0.5, h = 1$ ），观察数值结果。