统计物理

Harichane

2024 年 1 月 13 日

目录

第六章 统计物理的基本概念

6.2 微观状态的经典描写与量子描写

6.2.1 子系:

组成系统的基本单元，可以是气体中的分子等, 也可以代表某一个自由度等. 目前可以简单地理解成粒子。

6.2.2 相空间:

若系统由 N 个子系构成，每个子系的自由度为 r，整个系统的自由度为 $s = Nr$, 则需要 $2s$ 个广义坐标和广义动量 $q_1, \cdots, q_s, p_1, \cdots, p_s$, 用这 $2s$ 个坐标和动量构成的空间称为**相空间**（或 Γ 空间），相空间中的一个点就代表系统的一个微观状态。

6.2.3 相体元:

相空间中的小体积元 $d\Omega$。

$$d\Omega = dq_1 \cdots dq_s dp_1 \cdots dp_s$$

6.2.4 Free Particle

自由粒子的能量：

$$\varepsilon = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) = \frac{p^2}{2m} \tag{6.2.1}$$

6.2.5 One-dimensional harmonic oscillator

一维谐振子的能量：

$$\varepsilon = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \tag{6.2.2}$$

6.2.6 边长为 L 的正方形容器中的自由粒子的能量 (量子描写):

$$\varepsilon = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) = \frac{2\pi^2\hbar^2}{mL^2}\left(n_1^2 + n_2^2 + n_3^3\right) \tag{6.2.3}$$

6.2.7 量子态:

例如 $n_1 = 1, n_2 = 1, n_3 = -1$ 的态（简记为（1,1,-1））的能量为 $\varepsilon_{1,1,-1} = \frac{2\pi^2\hbar^2}{mL^2} \times 3 = \varepsilon_0$, 为最低能级。

6.2.8 简并度 g:

属于统一能级不同量子态数称为该能级的简并度。例如, 上例中的 ε_0 有 $2^3 = 8$ 个不同的量子态, 记为 $g_0 = 8$.

6.2.9 一维谐振子的能量 (量子描写):

$$\varepsilon_0 = \left(n + \frac{1}{2}\right) h\upsilon, n = 0, 1, 2, \cdots \tag{6.2.4}$$

一维谐振子每一能级只有一个量子态, 即简并度 $g_n = 1$.

6.2.10 子相体积:

在经典极限条件下, 对量子态的求和可以代替为对子相空间的积分.

子系的一个量子态 $\longleftrightarrow$ 大小为 h^r 的子相体积

6.2.11 全同性原理:

全同粒子是指他们的内禀性质 (如质量、电荷、自旋等) 完全相同;

全同性原理: **全同粒子的交换不引起新的系统的量子态**, 或者说**全同粒子是不可分割的.**

6.2.12 全同粒子系统波函数的对称性:

当交换任何两个粒子的全部坐标 (位置, 自旋) 时, 全同粒子系统的波函数只允许两种情况: 或者波函数不变 (波函数对称), 或者波函数变号 (波函数反对称)

6.2.13 费米子和玻色子:

玻色子: 自旋为 $s\hbar(s=0,1,2,\cdot)$ 的粒子, 如光子 $(s=1)$,π 介子 $(s=0)$ 等. 其波函数是**交换对称**的, 遵从**玻色-爱因斯坦统计**;

费米子: 自旋为 $\hbar$ 的半奇整数倍 $(s=1/2,3/2,\cdot)$ 的粒子, 如所有的轻子 (电子,τ 子,μ 子), 质子, 中子 (以上均为 $s=1/2$) 等, 波函数是**交换反对称的**, 遵从**费米-狄拉克统计**;

复合粒子: 如果是由偶数个费米子或玻色子构成, 则为玻色子; 由奇数个费米子组成, 则为费米子.

6.2.14 泡利不相容原理:

全同费米子系统, 不允许有两个全同的费米子处于同一个单粒子量子态;

全同玻色子系统热一个单粒子态上占据的粒子数是不受限制的.

6.2.15 定域子系:

对于全同多粒子系统, 若各个粒子的波函数被局限在空间不同的范围内没有重叠, 则可以从粒子所处的不同的位置区分它们, 这种子系称为**定域子系**; 与此相反的子系则称为**非定域子系**.

6.2.16 子系的量子态与 (全同多粒子) 系统的量子态:

设子系有 3 个不同的量子态, 系统有 2 个粒子.

对于定域子系: 每一个粒子有 3 个量子态可选择, 则 2 个粒子的量子态的组合有 $3^2=9$ 个不同的量子态.

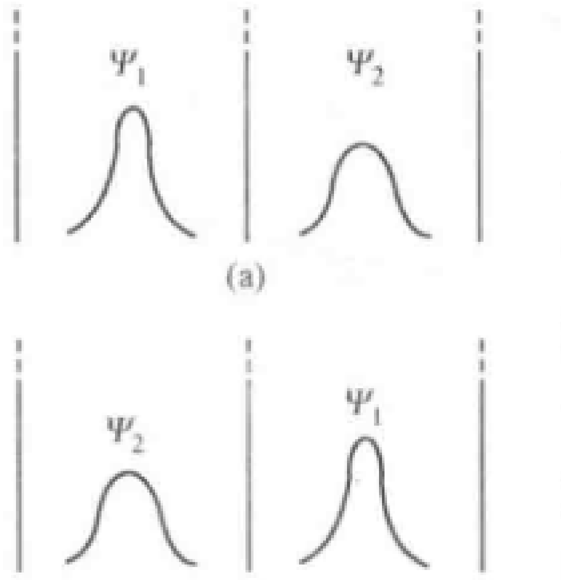

图 1: 定域子系

对于非定域玻色子, 由于粒子不可分辨, 则组合数为 $\mathrm{C}_3^1 + \mathrm{C}_3^1 = 6$;

对于非定域费米子, 由于不能有两个费米子处于同一量子态, 则组合数为 $\mathrm{C}_3^1 = 3$;

6.2.17 等几率原理:

处于平衡态下的孤立系, 系统各个可能的微观状态出现的几率相等. 可能的微观状态指的是给定 (E, V, N) 的系统的可能的微观状态.

第七章　近独立子系组成的系统

7.1　分布与系统的微观态 最可几分布

7.1.1　近独立子系:

组成系统的粒子之间的相互作用可以忽略不计, 即系统的总能量 E 等于各个粒子能量之和. 由于粒子之间完全没有相互作用, 粒子之间不可能交换能量, 系统就不可能达到平衡态并保持平衡.

7.1.2　粒子按能级的分布 a_λ:

粒子的能级从低到高排序:$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_\lambda, \cdots$, 相应的各个能级的**简并度**为 $g_1, g_2, \cdots, g_\lambda, \cdots$, 令 $a_1, a_2, \cdots, a_\lambda, \cdots$ 代表这些能级上占据的粒子数, 称为粒子按能级的**微观分布**, 简记为a_λ, 不同的a_λ 代表不同的微观分布.

在固定的 (E, V, N) 的宏观状态下, 允许出现的微观分布必须满足:

$$\sum_\lambda a_\lambda = N \tag{7.1.1}$$

$$\sum_\lambda \varepsilon_\lambda a_\lambda = E \tag{7.1.2}$$

7.2　定域子系 麦克斯韦-玻尔兹曼分布

7.2.1　分布 a_λ 对应的系统微观状态数$W(\{a_\lambda\})$:

7.2.2　最可几分布 平均分布:

最可几分布即一定宏观状态下所有可能出现的微观分布中, 出现几率最大的分布;

若最可几分布出现的几率远大于其他分布, 那么最可几分布等于平均分布.

7.2.3 麦克斯韦-玻尔兹曼分布 (MB 分布):

全同定域子系的最可几分布 $\{a_\lambda\}$ 所对应的系统量子态数 $W(\{a_\lambda\})$ 为:

$$W\left(\{a_\lambda\}\right)=\frac{N!}{\prod\limits_{\lambda}a_\lambda!}\prod_{\lambda}g_\lambda^{a_\lambda} \tag{7.2.1}$$

最可几分布为:

$$\tilde{a}_\lambda=g_\lambda e^{-\alpha-\beta\varepsilon_\lambda} \tag{7.2.2}$$

即为**麦克斯韦-玻尔兹曼分布**.

可以证明最可几分布是尖锐成峰的极大, 故满足$\tilde{a}_\lambda=\bar{a}_\lambda$

7.2.4 MB 分布中参数 α 与 β 的确定:

引入**子系配分函数** Z:

$$Z\equiv\sum_{\lambda}g_\lambda e^{-\beta\varepsilon_\lambda} \tag{7.2.3}$$

将 (7.2.2) 和 (7.1.1) 分别代入 (7.1.1) 和 (7.1.2), 得:

$$\alpha=\ln\frac{Z}{N} \tag{7.2.4}$$

$$E=-N\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z \tag{7.2.5}$$