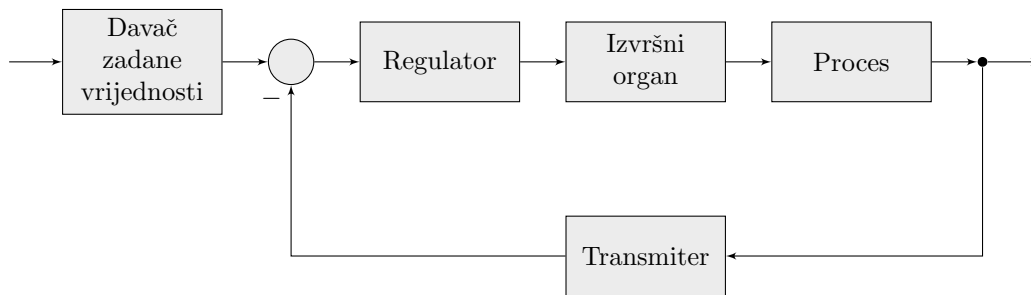


# Predavanje 1

## Osnovna struktura upravljanja



Na LSAU smo radili *linearne kontinualne stacionarne sisteme sa skoncentrisanim parametrima*. Vremenske funkcije se označavaju sa  $f(t)$  i na njima namećemo određene uslove. Na LSAU sve funkcije se prenose u cijelosti, tj. u kontinuitetu.

Funkcije koje se prenose u kontinuitetu su podložne dejstvu smetnji i šumova. Svaki šum i svaka smetnja se superponira na funkciju. Dejstva smetnji i šumova se povećavaju sa povećanjem spojnog puta kojim prenosimo signale. To je prvi razlog zašto se prešlo na digitalne sisteme upravljanja.

Na LSAU, regulator je bio kontinualni, klase PID. Na DSU imamo digitalni regulator. Samo se taj element mijenja u odnosu na LSAU. Zato je uvedeno digitalno upravljanje. Ovdje se prenose pojedine vrijednosti signala. *Kod DSU, obrada i prenos signala daju osnovnu prednost zašto se koristi digitalno upravljanje.*

Prednosti DSU:

1. Manji uticaj smetnji i šumova,
2. Isti element upravljanja se može koristiti za upravljanje sa više tehnoloških veličina,
3. Isti spojni put možemo koristiti za više tehnoloških veličina.

### Diskretizacija po nivou

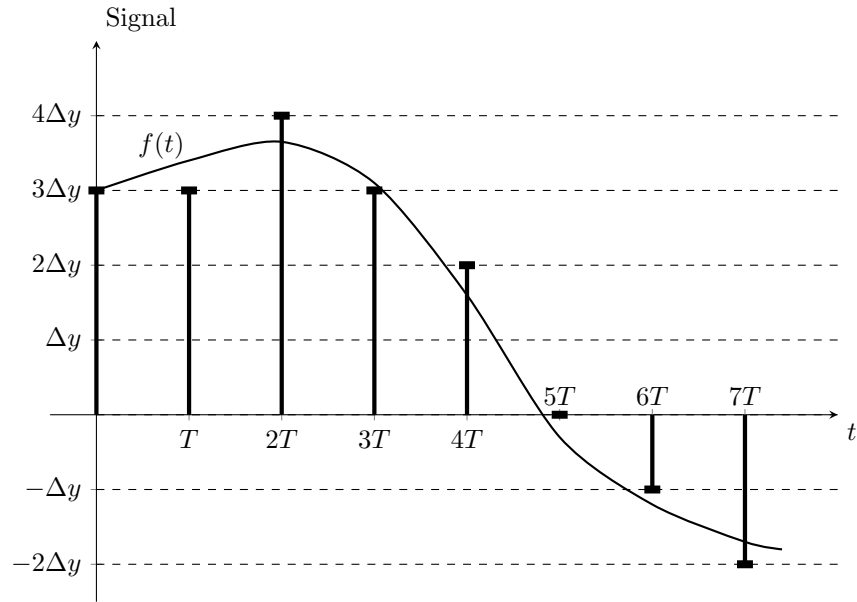
Zadani su unaprijed nivoi koje signal treba da postigne. Pojava te vrijednosti generiše određeni izlaz. Od oblika signala zavisi trenutak kada će biti postignut koji nivo. Ovakvi sistemi se nazivaju relejni - dobro su proučeni, masovno se koriste.

### Diskretizacija po vremenu

Unaprijed se fiksiraju trenuci uzimanja odabiraka. Najbolje je uzeti fiksne vremenske intervale između dva susjedna odabirka. Uzima se vrijednost signala u trenutku odabiranja. Ovakvi sistemi se zovu impulsni sistemi.

### Diskretizacija i po nivou i po vremenu

Zadaju se konstantne vrijednosti nivoa i konstantni trenuci odabiranja (ovo mi ne zvuči dobro, možda je mislio reći konstantno vrijeme ili intervali odabiranja).



Slika 1: Diskretizacija i po nivou i po vremenu

$\Delta y$  se naziva kvantom. Kvant je konstantan i predstavlja razliku između dva susjedna kvantna nivoa.  $T$  je perioda uzorkovanja po vremenu i ona je konstantna, a predstavlja vremenski interval između dva susjedna odabirka.

Vrijednost signala u trenutku odabiranja  $t = kT$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  je  $f(kT)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  i naziva se odabirak i ima konstantnu vrijednost. U DSU se uzima bliža vrijednost cijelom broju kvantnih nivoa.

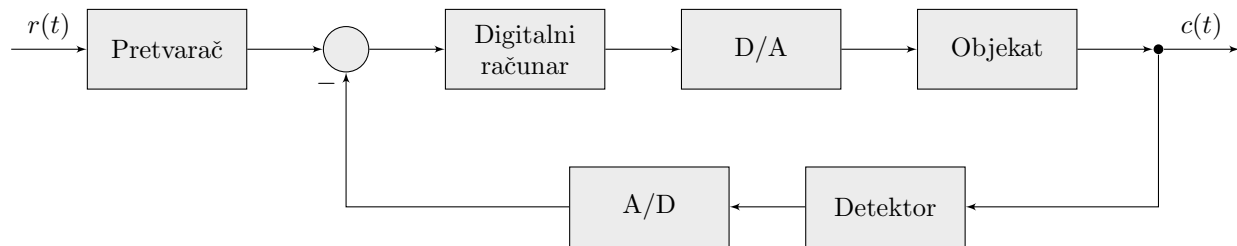
Na izlazu uređaja koji odabira vrijednosti signala se javljaju odabirci sa cijelim brojem kvantnih nivoa. To je razlog zašto je eliminisan uticaj smetnji i šumova.

Digitalni računar mora raditi u realnom vremenu - odabirak upravljačke instrukcije se mora generisati prije pristizanja narednog odabirka na ulaz. Izračunavanje odabirka upravljačke instrukcije mora se završiti prije isticanja te periode uzorkovanja i taj odabirak vrijedi na toj periodi. Određivanje odabirka upravljačke instrukcije mora biti kraće od periode uzorkovanja.

Uređaji koji vrše odabiranje signala nazivaju se modulatori ili analogno-digitalni konvertori. Pretvaraju analogni signal u povorku odabiraka. Odabirak je jedna vrijednost. Cijeli broj kvanata se predstavlja binarnim kodom. Prilikom pretvaranja kontinualnog signala u povorku odabiraka moramo sačuvati informaciju. Čuvamo je tako što biramo kvant što manji i periodu uzorkovanja što manju. Odabirak je napisan u binarnom kodu. Kada bismo pustili da  $T \rightarrow 0$  onda bismo ponovo dobili kontinualan signal.

Na digitalni regulator (digitalni računar, program, procesor, kontroler) dolaze digitalne riječi, po zadatom algoritmu upravljanja će generisati odabirak upravljačke instrukcije koja će upravljati procesom. Na istoj periodi uzorkovanja je i odabirak na ulazu i odabirak na izlazu.

## Elementarna struktura upravljanja u digitalnim sistemima



Digitalni računar (element kojim upravljamo sistemom) generiše odabirak upravljačke instrukcije. Te odabirke (digitalne signale) pretvaramo u digitalno-analognom konvertoru (DAC). U povratnoj grani u LSAU je bio transmitter, ovdje je detektor (uobičajeno ime), koji mjeri stanje objekta kojim upravljamo i to je po pravilu kontinualni signal, neki od standardnih mjernih signala.

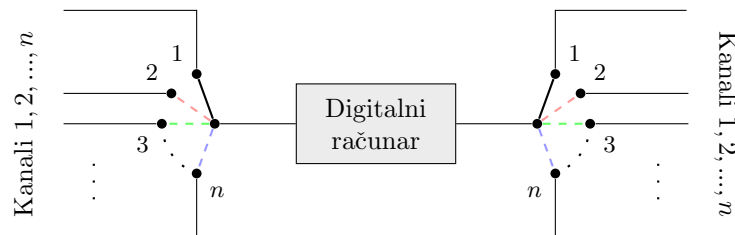
Detektor (transmitter) mjeri stanje objekta kojim upravljamo i to je po pravilu kontinualni signal, neki od standardnih mjernih signala.

A/D konvertor pretvara kontinualni signal u digitalni koji se dovodi na komparator i upoređuje sa onim što smo zadali.

Može biti direktno doveden signal koji je predstavljen digitalnim riječima. Pretvarač pretvara kontinualni signal u digitalni zapis, dobiju se digitalne riječi.

Kada računar izračuna odabirak upravljačke instrukcije možemo ga pustiti da miruje i obično se daju neke druge zadaće da obavlja do isteka periode upravljanja:

1. Obrada mjernih signala,
2. Procjena upravljačkih instrukcija (to znači narednog odabirka),
3. Identifikacija procesa,
4. Izračunavamo podatke za naredni odabirak u kojima učestvuju do sada poznati podaci,
5. Adaptacija parametara.



Slika 2: Digitalni računar sa komutatorima

**Komutator na ulazu i komutator na izlazu digitalnog računara moraju biti sinhronizovani.** Oni imaju svoja napojna kola i imaju kola za sinhronizaciju. Ako procesor upravlja sa više kanala, procesiranje se mora izvršiti unutar periode odabiranja. Proces je spori ako je inerciona vremenska konstanta veća od inercionih vremenskih konstanti ostalih elemenata u sistemu.

Za kontinualni signal definišemo periodu uzorkovanja i kvantni nivo. Broj kvantnih nivoa treba biti što veći, a perioda uzorkovanja što manja, da sačuvamo informaciju. Ako je kvantni nivo dovoljno mali, onda možemo smatrati da je cijeli broj kvantnih nivoa u svakom trenutku uzorkovanja jednak vrijednosti signala u trenutku uzorkovanja. U tom slučaju je  $f(kT) = f(t)$  za  $t = kT$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Na ulaz A/D konvertora se dovodi signal - ako je brzina promjene signala mala što znači da promjena na narednoj periodi uzorkovanja je manja od jednog kvantnog nivoa, signal se može dovesti direktno na A/D konvertor. Ako je promjena na narednoj periodi uzorkovanja manja od jednog kvantnog nivoa to znači da se binarna riječ neće promijeniti na najmlađoj cifri (ona koja je zadnja). Ako je promjena kontinualnog signala na narednoj periodi veća od jednog kvantnog nivoa onda se vrijednost odabirka u tom trenutku uzorkovanja zadržava konstantnom na narednoj periodi uzorkovanja. Uzima se odabirak  $f(kT)$ , zadržava konstantnim za  $kT \leq t < (k+1)T$  i to rade kola zadržke. Smanjivanjem periode uzorkovanja bolje aproksimiramo kontinualni signal.

## Predavanje 2

Kod A/D konvertora biramo između cijene i brzine konverzije.

Zahtjevi koji se postavljaju na A/D konvertore:

1. Brzina uzimanja odabiraka
2. Rezolucija
3. Vrijeme konverzije
4. Greška uslijed očitavanja
5. Memorijski moduli

*Brzina uzimanja odabiraka:* Ako se signal mijenja na narednoj periodi uzorkovanja manje od jednog kvantnog nivoa, na ADC taj signal možemo direktno dovesti. Ako je ova promjena veća od jednog kvantnog nivoa potrebno ga je dovesti na kolo zadržke nultog reda. Vrijednost  $f(kT)$  se zadržava za  $kT \leq t < (k+1)T$ .  $f(kT)$  je odabirak u  $k$ -tom trenutku uzimanja uzorka. Ako je kvantni nivo dovoljno mali onda možemo smatrati da vrijednost signala  $f(t)$  je upravo  $f(kT)$ .

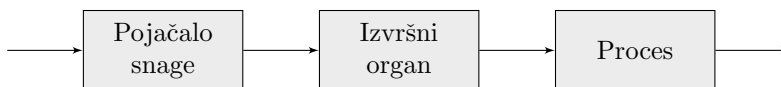
Brzina uzimanja odabiraka je gustina uzimanja odabiraka i što su odabirci gušći kvantovanje po vremenu je češće, perioda uzorkovanja je manja i bolja je aproksimacija kontinualnog signala  $f(t)$  stepenastim signalom.

*Rezolucija* je podatak koji predstavlja preciznost predstavljanja kontinualnog signala povorkom odabiraka. Mora biti što veći broj kvantnih nivoa. Na ulazu ADC je stepenasti signal a na izlazu je povorka odabiraka izražena u binarnom kodu što predstavlja digitalne riječi, pa je preciznost bolja što je veća dužina digitalne riječi.

*Vrijeme konverzije* je vrijeme koje protekne od trenutka dovođenja odabirka  $f(kT)$  na ulaz ADC pa do trenutka kad se na njegovom izlazu pojavi binarni zapis tog odabirka. To vrijeme je konačno. Pa imamo uzimanje odabirka  $f(kT)$ , zadržavanje te vrijednosti na narednoj periodi uzorkovanja, jer ne smije biti promjena signala na toj periodi uzorkovanja dok traje proces konverzije tj. prevođenja u binarni kod. Vrijeme kodiranja ne smije biti duže od jedne periode uzorkovanja jer procesor mora raditi u realnom vremenu. Vrijeme konverzije predstavlja čisto transportno kašnjenje ili vrijeme kašnjenja. Ono negativno utiče na stabilnost sistema, koji mora biti stabilan.

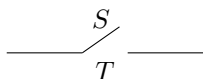
*Memorijski moduli:* Zadržavanje vrijednosti odabirka na narednoj periodi uzorkovanja je memorisanje. Kad se izračuna odabirak upravljačke instrukcije po zadatom algoritmu, on mora vrijediti na narednoj periodi uzorkovanja dok se ne izračuna sljedeći.

Izlaz sa ADC je signal niskog energetskog nivoa i takav signal se ne može direktno dovesti na tehnološko postrojenje odnosno objekat upravljanja. Takvi signali se dovode na pojačavač snage ili naponsko-strujni konvertor. Dalje se vode na izvršni organ sa ili bez servo motora pa onda na proces. Sam objekat upravljanja ima strukturu kao na sljedećoj slici:



Slika 3: Objekt upravljanja

Dalje poopštenje da se jednostavnije crtaju strukture u digitalnim sistemima upravljanja jeste da ne crtamo komutatore. Napojne jedinice i kola sinhronizacije nisu nacrtani, nego se to samo simbolički naznači. Simbolička oznaka jeste da imamo signal  $f(t)$  koji je kontinualan, ma šta on bio, diskretizaciju vršimo preklupkom, damo joj ime  $S$  i obrće se konstantnom ugaonom brzinom što simbolički označavamo konstantnom periodom uzorkovanja.

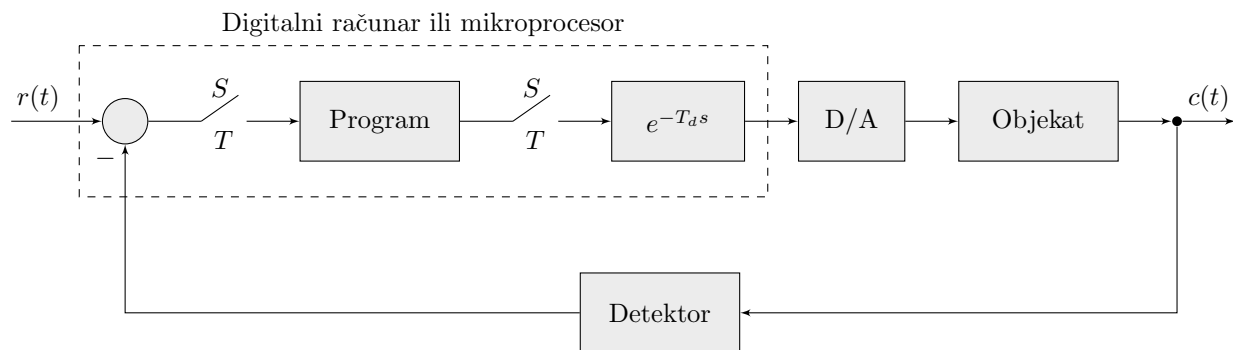


Slika 4: Simbolička oznaka idealnog odabirača sa periodom  $T$

Na izlazu je povorka odabiraka, obilježava se sa  $f^*(t)$  ili  $f(kT)$ . Tada je:

$$f^*(t) = \begin{cases} f(kT), & t = kT, k = 0, 1, \dots \\ 0, & t \neq kT \end{cases}$$

Ako je  $t = kT$  i ako je kvantni nivo dovoljno mali onda kontinualni signal  $f(t)$  aproksimiramo povorkom odabiraka i svaki odabirak možemo smatrati da predstavlja upravo vrijednost kontinualnog signala u trenutku odabiranja. Ako simboličku oznaku uvedemo u osnovnu strukturu upravljanja, onda dobijamo sljedeću sliku:



$T_d$  je vrijeme kašnjenja i u njemu je sadržano: vrijeme uzimanja odabirka, zadržavanje tog odabirka na narednoj periodi uzorkovanja (tj. memorisanje), vrijeme kodiranja (prevođenje u digitalnu riječ) i vrijeme izračunavanja odabirka upravljačke instrukcije po zadatom algoritmu upravljanja.

Objekat, DAC, detektor i pretvarač su kontinualni dijelovi sistema. Ostali su digitalni.

Digitalni dio sistema sa procesorom u glavnoj ulozi dobija odabirke i generiše odabirke - dobija odabirke regulacione greške ili ih formira. Uzimanje odabirka, zadržavanje, kodiranje i izvršenje traju neko transportno kašnjenje  $T_d$  koje negativno utiče na sve sisteme.

## Proces odabiranja i zadržke

Uzmimo neki kontinualan signal. Horizontalna osa je vremenska. Nacrtajmo bilo gdje vremensku osu. Ona nam služi da nanesimo vrijednost signala. Neka sistem počinjemo analizirati u nekom trenutku  $kT$ .  $f(t)$  je signal čiju diskretizaciju vršimo.

$f_h(t)$  možemo predstaviti kao zbir pravougaonih četvorki.

$$f_h(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) \{h(t-kT) - h[t-(k+1)T]\} \Bigg/ \circ \mathcal{L}$$

$$F_h(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) \frac{1-e^{-Ts}}{s} e^{-kTs} = \frac{1-e^{-Ts}}{s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) e^{-kTs} = G_h(s) F^*(s)$$

$$G_h(s) = \frac{1-e^{-Ts}}{s}, \quad F^*(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) e^{-kTs}$$

$G_h(s)$  je prenosna funkcija koja nosi podatak o zadržavanju odabiraka na narednoj periodu uzorkovanja.  $F^*(s)$  je kompleksni lik (Laplaceova transformacija) povorke odabiraka. Inverzna Laplaceova transformacija je:

$$f^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) \delta(t-kT)$$

Ova relacija kaže da se odabirak uzima trenutačno (samo u jednom trenutku) pa se to odabiranje naziva idealno matematičko odabiranje.

Uzimanje odabiraka i kodiranje traje neko vrijeme - ne može se vršiti trenutačno, nego to mora trajati neko vrijeme  $\varepsilon$ . Na narednoj periodu uzorkovanja ne smije biti promjena signala veća od jednog kvantnog nivoa. Onda je sigurno manja od jednog kvantnog nivoa na jednom  $\varepsilon$ .

$$f_\varepsilon(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) \{h(t-kT) - h(t-kT-\varepsilon)\} \Bigg/ \cdot \frac{\varepsilon}{\varepsilon}$$

$$= \varepsilon \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) \frac{h(t-kT) - h(t-kT-\varepsilon)}{\varepsilon}$$

$$f_\varepsilon^*(t) = \varepsilon \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) \delta(t-kT)$$

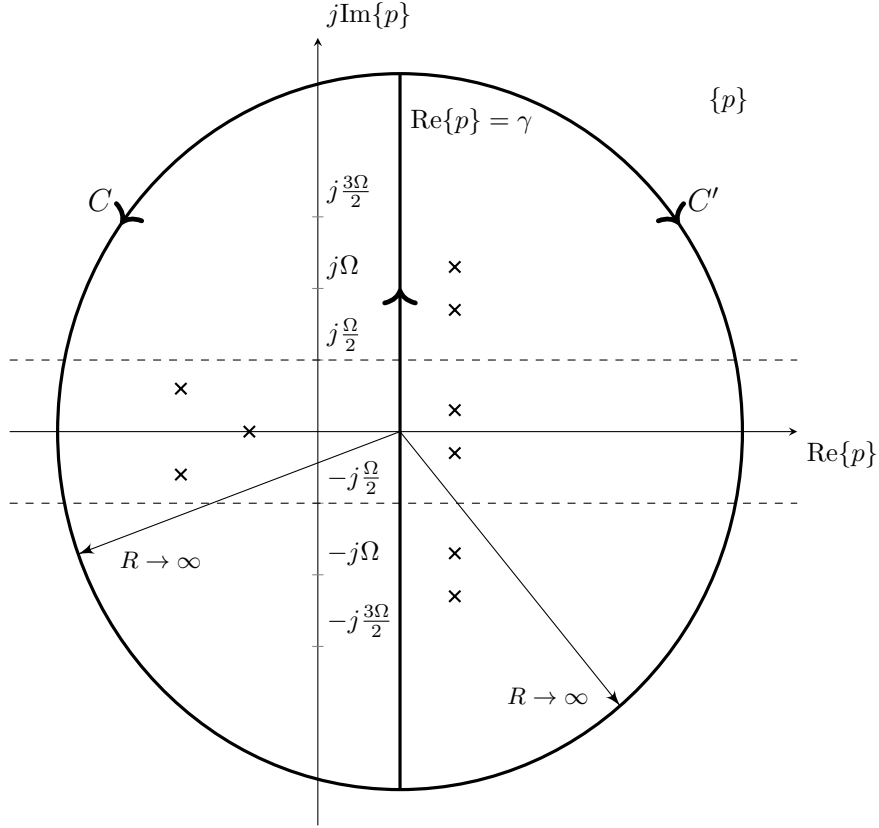
Ovakvo odabiranje se naziva idealno fizičko odabiranje. Kod idealnog fizičkog odabiranja trebamo dobiti isti rezultat.

$$F_h(s) = \frac{1-e^{-Ts}}{\varepsilon s} \left[ \varepsilon \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) e^{-kTs} \right] = G_{h\varepsilon}(s) F_\varepsilon^*(s)$$

$$G_{h\varepsilon}(s) = \frac{1-e^{-Ts}}{\varepsilon s}, \quad F_\varepsilon^*(s) = \varepsilon \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) e^{-kTs}$$

## Kompleksni lik i frekventne karakteristike povorke odabiraka

Impulsna modulacija:



Svi tehnički sistemi su kauzalni što znači da je  $f(t) \equiv 0$  za svako  $t < 0$ . Nailazak delta funkcije uzima vrijednost funkcije u tom trenutku.

$$i(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT)$$

jer su svi signali koji nose informaciju kauzalni.

$$f^*(t) = f(t)i(t)$$

**Prvi oblik kompleksnog lika  $F^*(s)$ :**

$$\mathcal{L}\{f(t)i(t)\} = F^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)e^{-kTs}$$

Povorka odabiraka mora sačuvati informaciju. Ponekad moramo moći odrediti kompleksni lik povorke odabiraka ako poznajemo kompleksni lik  $F(p)$ . Ako imamo takav slučaj onda je to definisala konvolucija u kompleksnom domenu pa je:

$$F^*(s) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\mu-j\infty}^{\mu+j\infty} F(p)I(s-p)dp$$

$F(p)$  je Laplaceova transformacija originala koji nosi informaciju. Da bi se ovaj integral mogao odrediti onda mora postojati prava  $\text{Re}(p) = \gamma$  koja će razdvajati singularitete tipa polova podintegralnih funkcija.

$$I(s) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kTs}$$

Ovu sumu možemo odrediti ako je to geometrijska progresija i onda je jednaka

$$\frac{1}{1 - e^{-Ts}}, |e^{-Ts}| < 1$$

Egzistiraće prava  $\text{Re}(p) = \gamma$  koja će razdvojiti singularitete tipa polova podintegralnih funkcija ako je  $\text{Re}(s) > 0$ .  $F(p)$  je Laplaceova transformacija naše informacije - ona mora biti sastavljena od komponenti koje moraju imati prigušenje ili eksponencijalno opadajuće funkcije.  $F(p)$  će imati polove u lijevoj poluravni kompleksne ravni  $\{p\}$ , a druge podintegralne funkcije će imati polove u desnoj poluravni kompleksne ravni.

$$F^*(s) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma-j\infty}^{\gamma+j\infty} F(p) \frac{1}{1 - e^{-T(s-p)}} dp$$

Karakteristična jednačina kompleksnog lika povorke delta funkcija je:

$$1 - e^{-T(s-p)} = 0$$

$$e^{-T(s-p)} = 1$$

$$p_n = s + jn \frac{2\pi}{T} = s + jn\Omega, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$\Omega = \frac{2\pi}{T}$  se naziva perioda uzorkovanja u frekventnom domenu ili kružna učestanost odabiranja. Kompleksni lik  $F^*(s)$  možemo određivati polovima, preko rezidijuma, na dva načina. Možemo zatvoriti konturu na lijevu stranu ili na desnu stranu. Kada idemo po konturi  $C$  stepen polinoma u nazivniku kompleksnog lika  $F(p)$  mora biti barem za 2 veći od stepena polinoma u brojniku:  $n \geq m + 2$ .

$$F^*(s) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\mu-j\infty}^{\mu+j\infty} \frac{P(p)}{\prod_{i=1}^n (p - p_i)} \cdot \frac{1}{1 - e^{-T(s-p)}} dp$$

**Drugi oblik kompleksnog lika  $F^*(s)$ :**

$$F^*(s) = \sum_{i=1}^n \frac{P(p_i)}{Q'(p_i)} \cdot \frac{1}{1 - e^{-T(s-p_i)}}$$

Kada idemo po konturi  $C'$  mora biti  $n \geq m + 1$ . U ovom slučaju dobijamo da je kompleksni lik:

**Treći oblik kompleksnog lika  $F^*(s)$ :**

$$F^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(s + jn\Omega) + \frac{1}{2}f(0^+)$$

Ovaj oblik se koristi u obradi i prenosu digitalnih signala.

## Predavanje 3

### Osobine kompleksnog lika povorke odabiraka

Kompleksni lik  $F^*(s)$  je kompleksni lik povorke odabiraka originala i ima dvije osobine:

1. Kompleksni lik je periodična funkcija sa periodom ponavljanja  $j\Omega$ .

Polazi se od prvog oblika:

$$F^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)e^{-kTs}$$



Ako kompleksnu promjenljivu  $s$  zamijenimo sa  $s + jm\Omega$ , gdje je  $m$  cijeli broj, onda dobijamo

$$\sum_{k=0}^{\infty} f(kT)e^{-kT(s+jm\Omega)} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)e^{-kTs}e^{-jkTm\Omega}$$

Pošto je kružna učestanost odabiranja jednaka  $\Omega = \frac{2\pi}{T}$ , onda je  $kTm\frac{2\pi}{T} = 2km\pi$  pa je

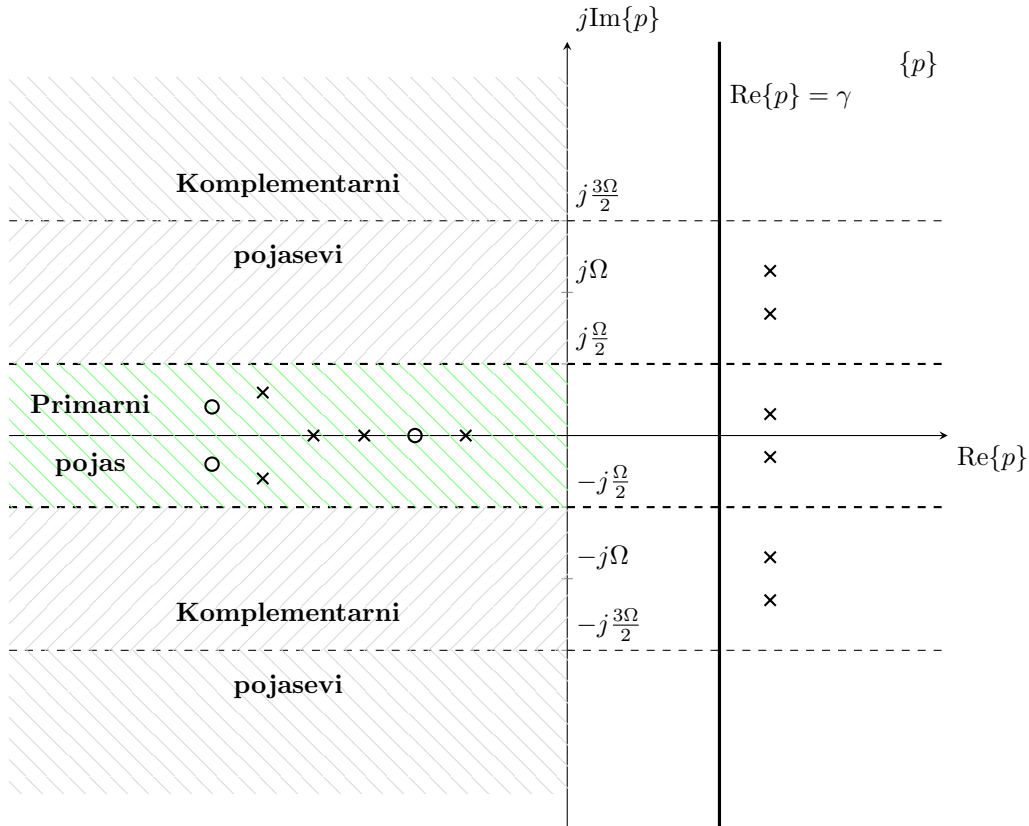
$$e^{-j2km\pi} = 1$$

$$F^*(s) = F^*(s + jm\Omega)$$

To znači da je  $F^*(s)$  periodična funkcija sa periodom ponavljanja  $j\Omega$  i ide i na jednu i na drugu stranu do beskonačnosti.

2. Ako poznajemo funkciju  $F^*(s)$  u  $s_1$  onda istu vrijednost funkcija  $F^*(s)$  ima i u svim tačkama  $s_1 + jm\Omega$ . Pošto karakteristične tačke (polovi i nule) moraju ležati u lijevoj poluravni kompleksne ravni, onda znamo da polovi i nule mogu biti realni negativni jednostruki ili višestruki, i mogu biti u obliku konjugovano kompleksnih parova ali njihov položaj mora biti unutar  $j\Omega$  pa konjugovano kompleksni par može biti sa pozitivnim imaginarnim dijelom ili sa negativnim imaginarnim dijelom i najviše  $\Omega/2$ .

Pa se lijeva poluravan kompleksne ravni  $\{p\}$  dijeli na primarni pojas i komplementarne pojaseve koji se multipliciraju iznad i ispod primarnog pojasa do beskonačnosti.



Unutar primarnog pojasa moraju biti sve karakteristične tačke kompleksnog lika  $F^*(s)$ , od  $-j\Omega/2$  do  $j\Omega/2$ . Pitanje Područje  $-\frac{\Omega}{2} \leq \omega \leq \frac{\Omega}{2}$  naziva se **Nyquistovo područje učestanosti**.

## Karakteristike frekventnog spektra povorke odabiraka

Poći ćemo od 3. oblika kompleksnog lika  $F^*(s)$

$$F^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(s + jn\Omega) + \frac{1}{2}f(0^+)$$

Prilikom diskretizacije kontinualnog signala moramo sačuvati informaciju bez obzira kojim matematskim aparatom radili. Ako pođemo od ovog oblika onda ga koristimo za projektovanje digitalnih filtera i za digitalnu obradu i prenos signala. Ništa nećemo izgubiti na opštosti ako kažemo da je  $f(0^+) = 0$ . To je neka istosmjerna komponenta. Frekventne karakteristike dobijamo ako kompleksnu promjenljivu zamijenimo njenim imaginarnim dijelom i to smo nazvali Fourierovom transformacijom. Tada dobijamo

$$F^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(j\omega + jn\Omega)$$

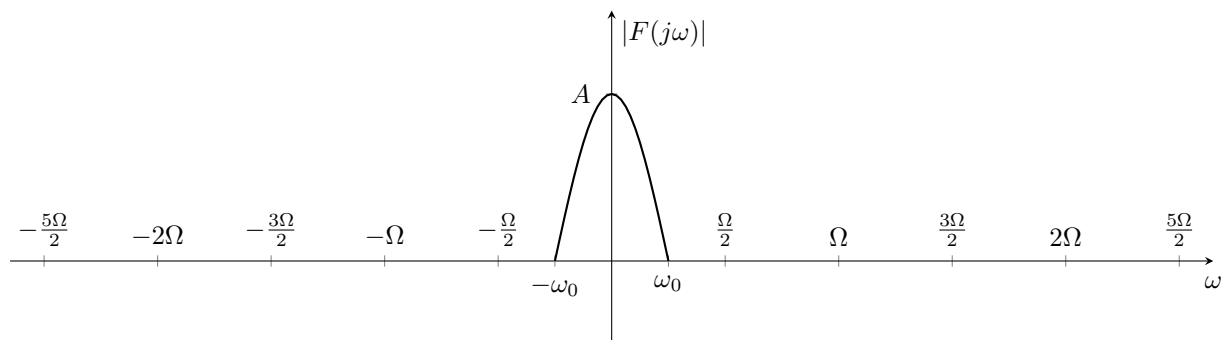
Primarni pojas je za  $n = 0$ :

$$F^*(j\omega)|_{n=0} = F_0^*(j\omega) = \frac{1}{T}F(j\omega)$$

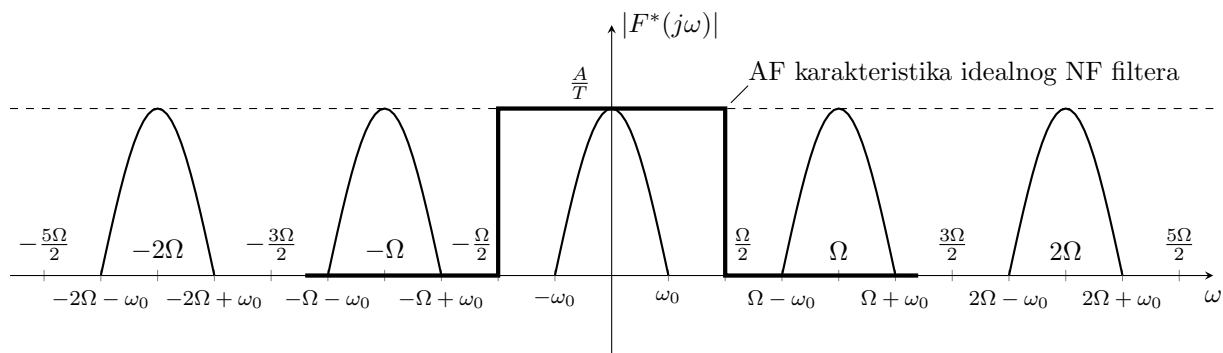
Naš signal je  $f(t)$ . Izvršili smo diskretizaciju periodom uzorkovanja  $f(t)$  i onda je  $F(j\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$ . Pa sada vidimo da unutar Nyquistovog područja učestanosti mi imamo sve frekventne komponente signala koji nosi informaciju, jer je  $F(j\omega)$  Fourierova transformacija naše informacije, a  $T$  smo odabrali na osnovu brzine promjene signala. U Nyquistovom području imamo sve frekventne komponente, odnosno diskretizacijom smo sačuvali informaciju. Amplitudno-frekventne karakteristike su

$$|F^*(j\omega)| = \frac{1}{T} \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(j\omega + jn\Omega) \right| \leq \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F(j\omega + jn\Omega)|$$

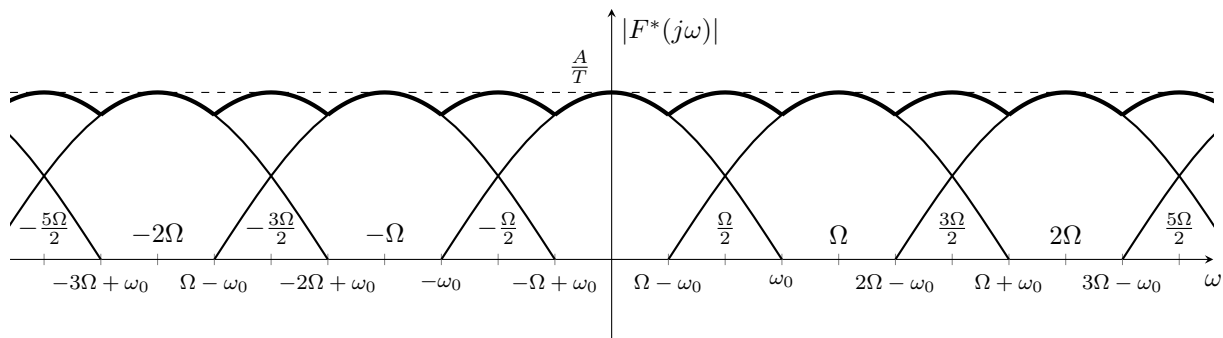
Vidimo da je informacija koju nosi signal  $f(t)$  (original) cjelovito sačuvana unutar Nyquistovog područja učestanosti i u beskonačno drugih komplementarnih pojaseva pri čemu je svaki naredni komplementarni pojas po učestanosti pomjeren u područje viših frekvencija za  $n\Omega$ . Pošto se radi o idealnom matematičkom odabiranju onda impulsni modulator se može shvatiti kao generator koji na svom ulazu ima prosto-periodični signal amplitude  $A$  i kružne učestanosti  $\omega$ , on na svome izlazu generiše signal u Nyquistovom području učestanosti amplitude  $A/T$  i kružne učestanosti  $\omega$  i u beskonačno mnogo komplementarnih pojaseva iste amplitude  $A/T$  i učestanosti pomjerene za  $n\Omega$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Neka imamo na ulazu:



Slika 5: Amplitudno-frekventni spektar ulaznog signala

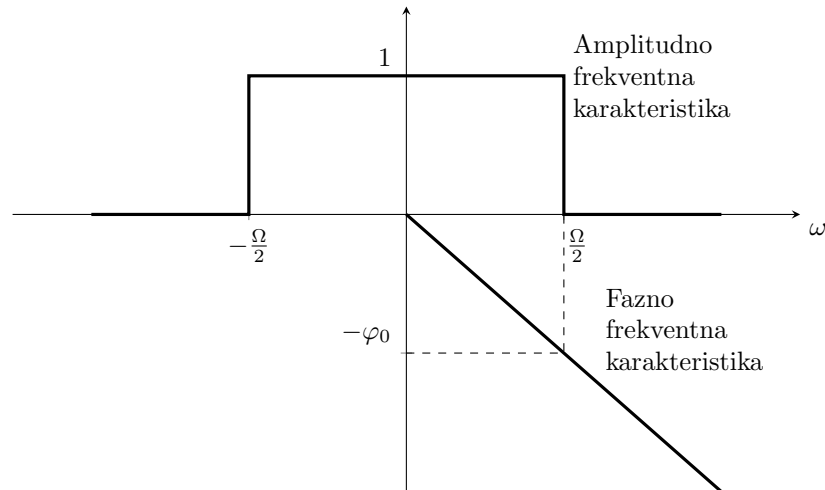


Slika 6: Slučaj kada smo ispravno odabrali  $T$



Slika 7: Slučaj kada smo pogrešno odabrali  $T$

Granična kružna učestanost je  $\omega_0$  i  $-\omega_0$ . To je frekvencija najvišeg harmonika u našoj informaciji. Kada je  $|\omega_0| \leq \frac{\Omega}{2}$ , ne dolazi do preklapanja frekventnih spektara. Ako se vratimo u kompleksnu ravan  $\{p\}$ , polovi kompleksnog lika  $F^*(s)$  leže unutar primarnog pojasa. Ako je  $\omega_0 > \frac{\Omega}{2}$ , onda dolazi do preklapanja frekventnih spektara povorke odabiraka pa se oni zbroje. Ovo je slučaj kada smo pogrešno odabrali periodu uzorkovanja u vremenskom domenu. [Pitanje](#) Ako je došlo do preklapanja gubimo informaciju.



Slika 8: Frekventne karakteristike idealnog NF filtera

Ako na ovakvo kolo dovedemo povorku odabiraka na ulaz, na izlazu se dobije  $f(t - T_d)$ .  $T_d$  se naziva grupno kašnjenje i jednako je koeficijentu nagiba pravca fazno frekventne karakteristike, tj.  $T_d = \frac{2\varphi_0}{\Omega}$ . Ovaj niskopropusni filter je hipotetički, on praktično ne postoji.

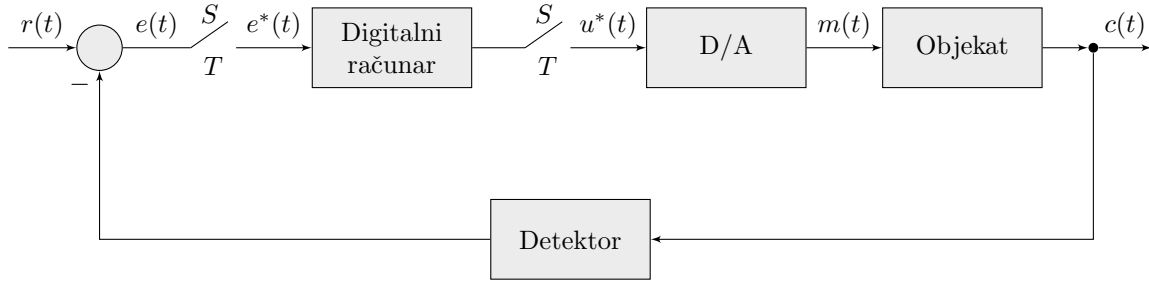
### Teorema odabiranja

1. Uzorkovanjem u vremenskom domenu mi dobijamo povorku odabiraka koja mora sačuvati informaciju. Perioda uzorkovanja u vremenskom domenu ne može imati veliku vrijednost, ali ne može biti ni previše mala. Unutar periode uzorkovanja mora se uzeti odabirak i prevesti u digitalnu riječ, po zadanom algoritmu upravljanja izračunati odabirak upravljačke instrukcije i taj odabirak vrijedi na toj periodi uzorkovanja. Ako je brzina promjene signala velika, moramo zadržati tu vrijednost. Perioda uzorkovanja ne može biti previše mala zato što ne postoje kola koja će trenutačno uzimati odabirak i kodirati. To traje neko vrijeme, odnosno ne postoji idealno matematičko odabiranje.
2. Odabirak mora trajati barem neko  $\varepsilon \ll T$  ali je konačno, nije nulto, jer se unutar tog  $\varepsilon$  uzima odabirak i zadržava vrijednost dok se ne izvrši prevođenje u binarni zapis.
3. Sa smanjivanjem periode uzorkovanja širi se Nyquistovo područje učestanosti i povećava uticaj smetnji i šumova pa sa povećanjem udaljenosti na koju se prenosi signal ovi uticaji su veći. To znači da perioda uzorkovanja mora biti ograničena i sa donje strane. Moramo imati slučaj kada ne dolazi do preklapanja frekventnih spektara.

**Teorem.** Ako unutar kružne učestanosti  $\omega_0$  [rad/s] nema komplementarnih kružnih učestanosti, onda se izlaz sa niskopropusnog filtera može u potpunosti aproksimirati ako je uzeta perioda uzorkovanja  $T = \frac{1}{2} \frac{2\pi}{\omega_0}$ , gdje je  $\omega_0$  granična kružna učestanost signala  $f(t)$ . Ovo je teorijski maksimum i  $T$  se bira manjom zato što je

1. Odabir velike periode  $T$  u DSU u odnosu na realnu dinamiku sistema negativan uticaj na pitanje stabilnosti sistema. Pitanje
2. Teško je u praksi odrediti graničnu učestanost u frekventnom spektru,
3. U praksi ne postoje idealni niskopropusni filteri.

## Kola zadržke



Njihova osnovna zadaća je da digitalni signal (povorku odabiraka koja dolazi sa digitalnog računara) pretvore u kontinualni. Druga zadaća je da ukloni ili barem u potrebnoj mjeri priguši komplementarne harmonike. Na ulaz kola zadržke dolazi signal  $u(0), u(T), u(2T), \dots, u(kT)$  u trenucima  $0, T, 2T, \dots, kT$ . Na izlazu treba da se pojavi kontinualni signal - taj kontinualni signal mora trajati na narednoj periodi uzorkovanja  $kT \leq t < (k+1)T$ .  $m(t)$  (ulaz na objekat) je kontinualna funkcija, a kolo zadržke treba dati kontinualni signal a ima na raspolaganju povorku odabiraka. Pa da bismo matematski to napisali razvićemo tu funkciju u Taylorov red. Pošto signal treba biti kontinualan na narednoj periodi uzorkovanja, onda ćemo kazati

$$m_k(t) = m(kT) + m^{(1)}(kT)(t - kT) + \frac{1}{2!}m^{(2)}(kT)(t - kT)^2 + \dots$$

Ovo je Taylorov red signala  $m(t)$ , pa je  $m_k(t)$  jednako  $m(t)$ , na periodu uzorkovanja  $kT \leq t < (k+1)T$ .

$$m^{(1)}(kT) = \left. \frac{dm(t)}{dt} \right|_{t=kT}, \quad m^{(2)}(kT) = \left. \frac{d^2m(t)}{dt^2} \right|_{t=kT}, \dots$$

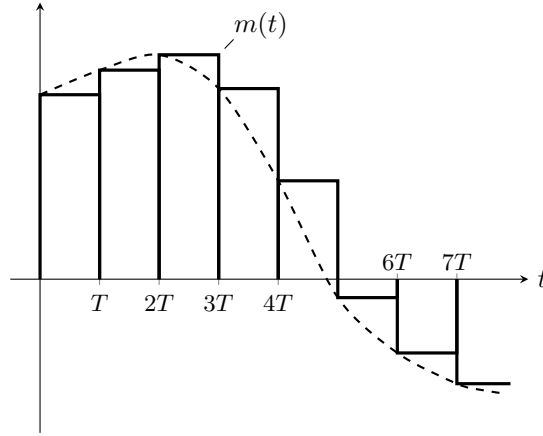
Problem je što  $m(t)$  ne znamo - znamo samo povorku odabiraka - pa ćemo na osnovu povorke odabiraka koristiti definiciju izvoda:

$$\begin{aligned} m^{(1)}(kT) &= \frac{1}{T} \{m(kT) - m[(k-1)T]\} \\ m^{(2)}(kT) &= \frac{1}{T^2} \{m^{(1)}(kT) - m^{(1)}[(k-1)T]\} \\ m^{(2)}(kT) &= \frac{1}{T^2} \{m(kT) - 2m[(k-1)T] + m[(k-2)T]\} \end{aligned}$$

Pa vidimo da sve što više koristimo izvoda u Taylorovom razvoju za procjenu, to ćemo imati više odabiraka na ulazu koje ćemo koristiti. Za  $n$ -ti izvod koristimo  $n+1$  odabirak za procjenu, odnosno povećava se zahtjev za memorijskim mjestima. Svaki od ovih odabiraka treba umemorirati i kad zatreba treba ga povući iz memorije i učitati, što traje određeno vrijeme. Kolo zadržke nultog reda koristi u Taylorovom razvoju samo prvi član, a kolo zadržke prvog reda koristi i prvi izvod i samo na narednoj periodu uzorkovanja je duž koja je dio tog pravca.

### Kolo zadržke nultog reda

Imamo da je  $m_k(t) = u(kT)$  za  $kT \leq t < (k+1)T$ ,  $k = 0, 1, \dots$



Uzet ćemo da imamo jedinični odabirak (jedinični impuls). On je amplitude 1 pa odziv kola zadržke nultog reda na pobudu koja je jedinični odabirak ili jedinični impuls će biti:

$$g_{h0}(t) = h(t) - h(t - T) \text{ / } \circ \mathcal{L}$$

$$G_{h0}(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}$$

U ovoj prenosnoj funkciji imamo dva problema:

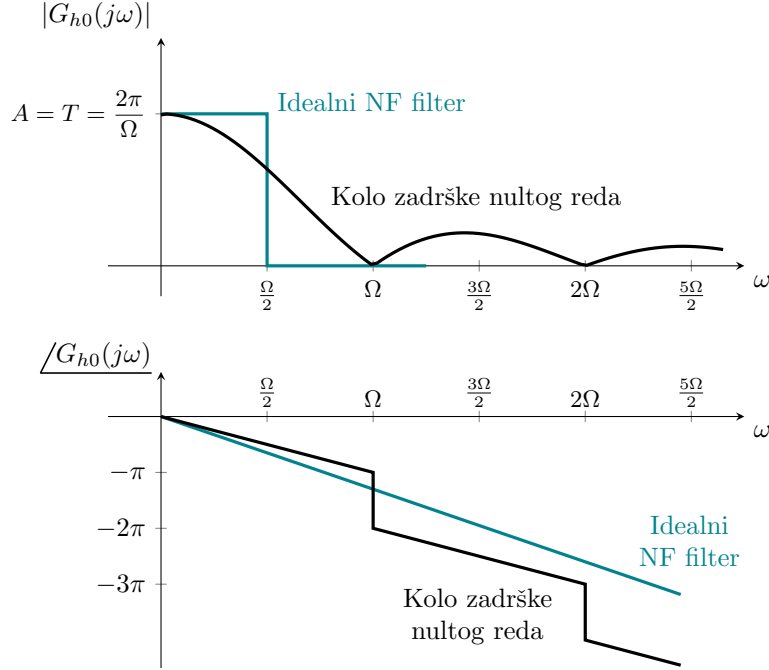
1. U nazivniku imamo astatizam prvog reda - to je uvođenje I komponente koja zakreće amplitudno-faznu karakteristiku za  $-\pi/2$  u smjeru kazaljke na satu, a to nam ugrožava stabilnost sistema.
2. U brojniku imamo blok kašnjenja  $e^{-Ts}$ , i taj blok nam modifikuje AF karakteristiku pa također dolazi do ugrožavanja rezervi stabilnosti sistema.

Ako uvedemo smjenu  $s = j\omega$ , matematički preslikamo imaginarnu osu iz kompleksne ravni  $\{s\}$  prenosnom funkcijom u ravan  $G(j\omega)$  onda dobijamo da je

$$G_{h0}(j\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega} = T \cdot \frac{e^{j\frac{\omega T}{2}} - e^{-j\frac{\omega T}{2}}}{j2 \cdot \frac{\omega T}{2}} \cdot e^{-j\frac{\omega T}{2}} = T \cdot \left| \frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}} \right| \cdot e^{-j\frac{\omega T}{2}} \operatorname{sgn} \left( \sin \frac{\omega T}{2} \right)$$

$$|G_{h0}(j\omega)| = \left| \frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}} \right| = \frac{2\pi}{\Omega} \cdot \left| \frac{\sin \frac{\pi\omega}{\Omega}}{\frac{\pi\omega}{\Omega}} \right|$$

$$\varphi(t) = \angle G_{h0}(j\omega) = -\frac{\omega T}{2} - \pi \sum_{k=0}^{\infty} k \{h(\omega - k\Omega) - h[\omega - (k+1)\Omega]\}$$



Niskopropusni filter ima ravnu karakteristiku, a kolo zadržke nultog reda ima nagibnu karakteristiku i sve što se više približavamo granici još će više slabiti. Imat ćemo da kolo zadržke propušta i visokofrekventne komponente ali te komponente opadaju sa porastom frekvencije. Nova prednost je što u praksi svi objekti kojim upravljamo se ponašaju kao niskopropusni filteri, odnosno propuštaju spektar unutar Nyquistovog područja učestanosti, a komplementarne prigušuju - oni su manje amplitude i još su dodatno prigušeni, pa se zanemaruju.

## Predavanje 4

### Kolo zadržke prvog reda

Ovo kolo na svom izlazu aproksimira signal na osnovu upravo pristiglog odabirka na ulaz  $f(kT)$  i prethodno pristiglog odabirka na ulaz  $f((k-1)T)$ .

$$m_k(t) = u(kT) + u^{(1)}(kT)(t - kT), \quad kT \leq t < (k+1)T$$

$$u^{(1)}(kT) = \frac{1}{T} \{u(kT) - u[(k-1)T]\}$$

$$m_k(t) = u(kT) + \frac{1}{T} \{u(kT) - u[(k-1)T]\}(t - kT)$$

Pa dovedemo jedinični odabirak na ulaz - odabirak koji se javlja u trenutku  $t = 0$ , a amplituda mu je 1. To je naše  $u^*(t)$ . Na prvoj periodi od  $kT$  do  $(k+1)T$ , kada stavimo  $k = 0$ , imamo da je

$$m_0(t) = u(0) + \frac{1}{T} \{u(0) - u(-T)\}t$$

$$u(0) = 1, \quad u(-T) = 0$$

$$m_0(t) = 1 + \frac{t}{T}, \quad 0 \leq t < T$$

Zatim, ako stavimo da je  $k = 1$ , onda ćemo imati da je

$$m_1(t) = u(T) + \frac{1}{T} \{u(T) - u(0)\}(t - T)$$

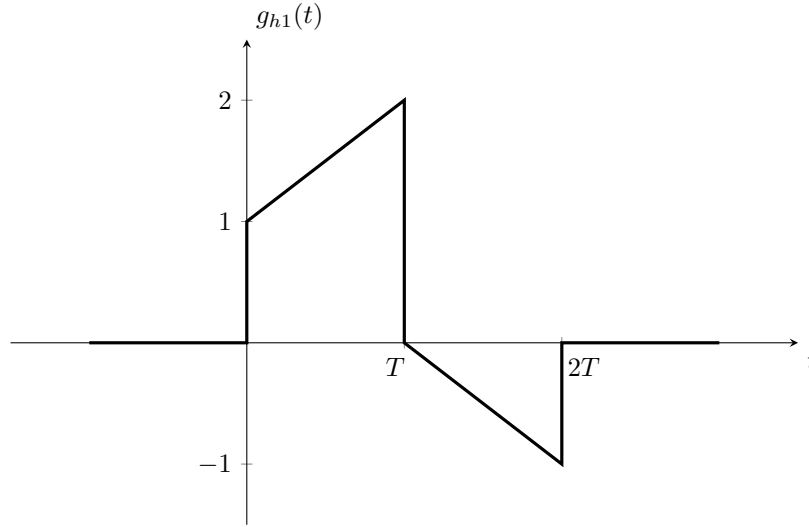
$$u(T) = 0, \quad u(0) = 1$$

$$m_1(t) = 1 - \frac{t}{T}$$

Pošto je na ulazu jedinični odabirak, uobičajilo se da je to jedinična impulsna funkcija (nije delta), onda se kaže da je odziv

$$g_{h1}(t) = 1 + \frac{t}{T}, \quad 0 \leq t < T$$

$$g_{h1}(t) = 1 - \frac{t}{T}, \quad T \leq t < 2T$$



Slika 9: Odziv kola zadržke prvog reda na jedinični odabirak

$$g_{h1}(t) = \left(1 + \frac{t}{T}\right) h(t) - 2 \left(1 + \frac{t-T}{T}\right) h(t-T) + \left(1 + \frac{t-2T}{T}\right) h(t-2T)$$

$$G_{h1}(s) = \mathcal{L}\{g_{h1}(t)\} = \frac{Ts+1}{Ts^2} (1 - e^{-Ts})^2$$

Problemi:

1. U nazivniku imamo  $s^2$ , to je zakretanje amplitudno fazne karakteristike za  $-180^\circ$  čime je ugrožena stabilnost,
2. U brojniku imamo blok transportnog kašnjenja, koji također ugrožava stabilnost.

Dodatno, realizacija kola zadržke prvog reda je daleko teža, složenija i skuplja od kola zadržke nultog reda.

## **Z-transformacija i diskretna prenosna funkcija (funkcija diskretnog prenosa)**

Z-transformacija je ono što je Laplaceova transformacija u kontinualnim sistemima. Ako se radi o sistemima sa jednim ulazom i jednim izlazom sa konstantnom periodom odabiranja i ako su ovi sistemi linearni, onda ova metoda ima u potpunosti primjenu i može dati na sve odgovore prilikom analize i prilikom sinteze. Ako se radi o nelinearnim sistemima, multivarijabilnim sistemima, ako proces odabiranja nije uniforman i ako se radi o nestacionarnim sistemima onda je vrlo teško primjenjivati ovaj matematski aparat. Ideja za uvođenje z-transformacije je došla zbog našeg prvog i drugog oblika  $F^*(s)$ .

**Pitanje** Pretpostavićemo da je  $n \geq m + 2$ . U ovim oblicima nemamo razlomljenu racionalnu formu koju smo koristili prilikom određivanja inverzna Laplaceove transformacije.



Ovdje se javlja kompleksna promjenljiva  $s$  (promjenljiva Laplaceove transformacije) u eksponentu eksponencijalne funkcije. Znači nisu razlomljene racionalne forme, nego su transcendentne funkcije.

Drugi problem je što je  $e^{Ts}$  funkcija koja je periodična sa periodom  $j\Omega$  pa sve vrijednosti funkcije koje ima u nekoj tački  $s_1$ , imaće i u  $s_1 + jm\Omega$ ,  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  pa se multipliciraju vrijednosti sa desne strane prave  $\text{Re}\{p\} = \gamma$  i sa lijeve strane gdje su ležali polovi kompleksne funkcije  $F(p)$ . Zato se došlo na ideju da se uvede nova kompleksna promjenljiva  $z = e^{sT}$ . Ako nađemo logaritam, onda je

$$s = \frac{1}{T} \ln z$$

pa je dobijen kompleksni lik

$$F(z) = \mathcal{Z}\{f^*(t)\} = \mathcal{Z}\{f(t)\} = F^*(s)|_{s=\frac{1}{T} \ln z} = F^*\left(\frac{1}{T} \ln z\right)$$

Inverzna transformacija se primjenjuje na kompleksni lik  $F(z)$  i dobija se povorka odabiraka pa je

$$\mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\} = f^*(t)$$

Ako novu kompleksnu promjenljivu  $z$  uvrstimo u prvi i drugi oblik, a primjenjujemo ih prilikom analize i sinteze DSU, dobićemo kompleksne likove:

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) (e^{sT})^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) z^{-k}$$

Ako to isto uradimo i u drugom obliku, onda dobijemo:

$$F(z) = \mathcal{Z}\{f^*(t)\} = \mathcal{Z}\{f(t)\} = \sum_{i=1}^n \frac{P(p_i)}{Q'(p_i)} \cdot \frac{z}{z - e^{p_i T}}, \quad |z^{-1}| < 1$$

Ako odemo na konturni integral:

$$F^*(s) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{P(p)}{\prod_{i=1}^n (p - p_i)} \cdot \frac{1}{1 - e^{-T(s-p)}} dp$$

$$F(z) \mathcal{Z}\{f^*(t)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{F(p)z}{z - e^{pT}} dp$$

### Jedinična step funkcija

Ako izvršimo diskretizaciju ove funkcije u vremenu sa periodom uzorkovanja  $T$ , onda su to odabirci amplitude 1:

$$h^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} 1(t) \delta(t - kT) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT)$$

$$H^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) e^{-kTs} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kTs} = \frac{1}{1 - e^{-Ts}}, \quad |e^{-Ts}| < 1$$

$$\text{Smjena: } e^{Ts} = z$$

$$H(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}, \quad |z^{-1}| < 1$$

## Eksponencijalna funkcija

$$f(t) = e^{-at}, \quad a \in \mathbb{R}$$

$$f^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-akT} \delta(t - kT)$$

$$F^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-akT} e^{-kTs} = \frac{1}{1 - e^{-(s+a)T}}, \quad |e^{-(s+a)T}| < 1$$

$$F(z) = \frac{1}{1 - e^{-aT} z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-aT}}, \quad |z^{-1}| < e^{aT}$$

## Sinusna funkcija

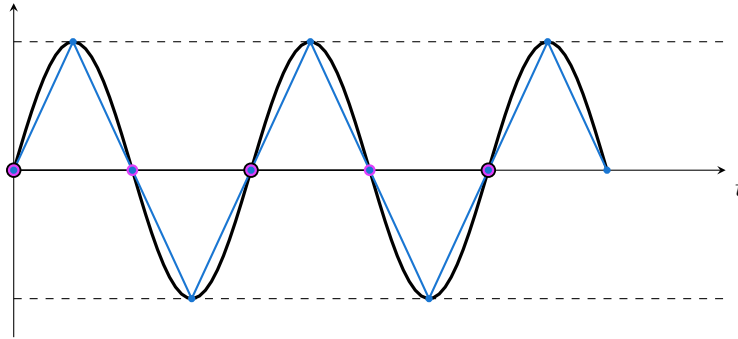
$$f(t) = \sin(\omega t)$$

$$f^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sin(\omega kT) \delta(t - kT) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{j\omega kT} - e^{-j\omega kT}}{2j} \delta(t - kT)$$

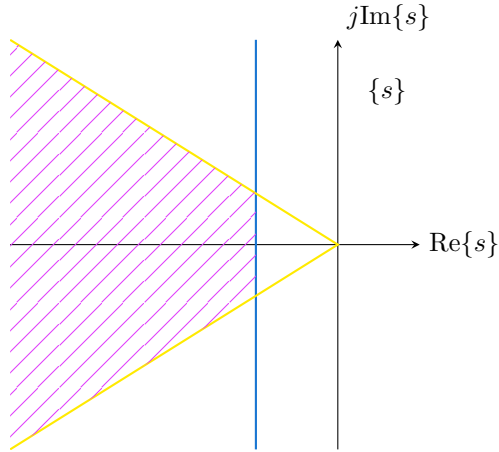
$$F^*(s) = \frac{e^{-Ts} \sin(\omega T)}{e^{-2Ts} - 2e^{-Ts} \cos(\omega T) + 1}$$

$$F(z) = \frac{z^{-1} \sin(\omega T)}{z^{-2} - 2z^{-1} \cos(\omega T) + 1} = \frac{z \sin(\omega T)}{z^2 - 2z \cos(\omega T) + 1}$$

Ako uzmemo sinusnu funkciju, trajno oscilovanje konstantne periode uzorkovanja. Jedna puna oscilacija nam definiše jednu punu promjenu. Ako uzmemo periodu uzorkovanja  $T = 1$  oscilacija, dobili smo sumu nula i izgubili informaciju. Ako uzmemo  $T = \frac{1}{2}$  oscilacije, ponovo imamo sumu nula. Ako je perioda uzorkovanja  $\frac{1}{2} \frac{2\pi}{\omega_0}$  onda smo sačuvali informaciju. Ako je  $T = \frac{1}{4}$  oscilacije, onda smo sačuvali informaciju, ali istu povorku odabiraka bi dali trouglasti signali.

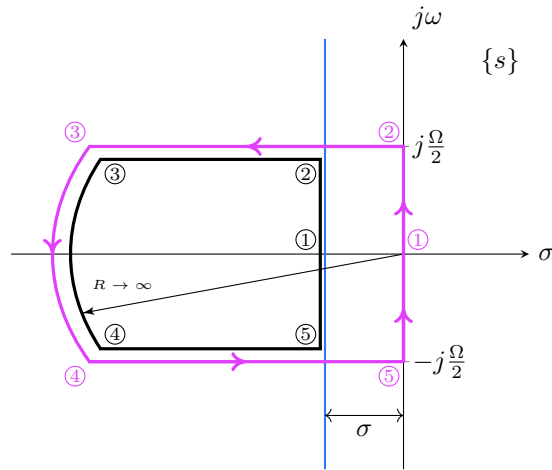


Kada imamo original  $f(t)$ , ako nađemo kompleksni lik  $F(s)$ , ako ovo pripada klasi funkcija tipa početnih uslova, onda su jednoznačno određeni original i kompleksni lik  $F(s)$ . Taj  $f(t)$  uvijek će dati  $F(s)$ , inverzna Laplaceova transformacija dati će original  $f(t)$  - jednoznačno su jedno drugim određeni. Ako primijenimo z-transformaciju, kompleksni lik  $F(z)$  je jednoznačno određen originalom  $f(t)$ , ali inverzna z-transformacija nam daje povorku odabiraka  $f^*(t)$ . Mi gubimo informaciju između trenutaka odabiranja.  $F(z)$  i  $f^*(t)$  su jednoznačno određeni jedno drugim, ali nije  $f(t)$  i  $F(z)$ . Znači, perioda uzorkovanja mora biti što manja, odabirci moraju biti što gušći. Kada imamo kompleksni lik  $F^*(s)$  i kompleksni lik  $F(z)$ , očigledno ova dva kompleksna lika moraju imati vezu, jer  $f(t)$  i  $F(s)$  su jednoznačno određeni jedno drugim. Signal možemo predstaviti u kompleksnoj  $\{s\}$ -ravni karakterističnim tačkama - polovima i nulama. Sve o signalu  $f(t)$  možemo očitati iz rasporeda karakterističnih tačaka (polova i nula) kompleksnog lika  $F(s)$ . Karakteristične tačke kompleksnog lika moraju ležati lijevo od imaginarne ose i nametnuli dozvoljeno vrijeme smirivanja, nametnuli stepen stabilnosti, stepen oscilabilnosti. Poželjna oblast rasporeda polova i nula je prikazana na sljedećoj slici.



Slika 10: Poželjna oblast rasporeda polova i nula kompleksnog lika  $F(s)$

**Pitanje** Pošto je  $z = e^{sT}$ , onda moramo čitati sve i iz kompleksne ravni  $\{z\}$ , pa ćemo preslikati iz kompleksne  $\{s\}$ -ravni u kompleksnu  $\{z\}$ -ravan. Poželjnu oblast smo nazvali primarni pojas.



Slika 11:

Preslikavanja po oblastima:

(1) – (2)

$$\begin{aligned}
 z &= e^{j\omega T} \\
 0 \leq \omega &\leq \frac{\Omega}{2} = \frac{\pi}{T} \\
 |e^{j\omega T}| &= 1 \\
 \omega = 0 &\implies z = e^0 = 1 \\
 \omega = \frac{\pi}{T} &\implies z = e^{j\pi} = -1
 \end{aligned}$$

(2) – (3)

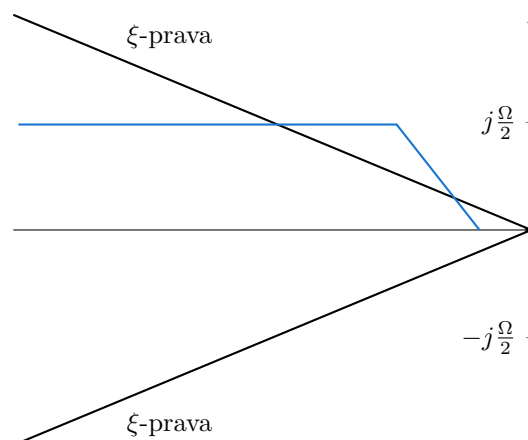
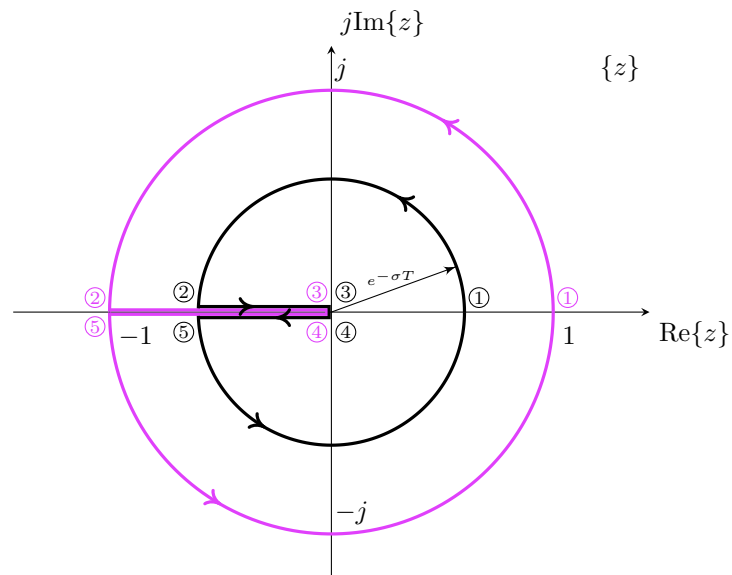
$$\begin{aligned}
 s &= -\sigma + j\frac{\Omega}{2}, \quad 0 \leq \sigma < \infty \\
 e^{sT} &= e^{-\sigma T} e^{j\frac{\Omega T}{2}} = -e^{-\sigma T}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma = 0 &\implies e^{sT} = -1 \\ \sigma \rightarrow \infty &\implies e^{sT} \rightarrow 0\end{aligned}$$

(3) – (4)

$$\begin{aligned}s &= -\sigma + j\frac{\Omega}{2}, \quad 0 \leq \sigma < \infty \\ e^{sT} &= e^{-\sigma T} e^{j\pi} = -e^{-\sigma T}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma = 0 &\implies e^{sT} = -1 \\ \sigma \rightarrow \infty &\implies e^{sT} \rightarrow 0\end{aligned}$$



Slika 12: Nepotpuna slika

## Predavanje 5 Napomena

### Osobine $\mathcal{Z}$ -transformacije

#### Linearnost

Pretpostavimo da imamo

$$\mathcal{Z}\{f_1(t)\} = F_1(z)$$

$$\mathcal{Z}\{f_2(t)\} = F_2(z)$$

Tada po osobini aditivnosti:

$$\mathcal{Z}\{f_1(t) + f_2(t)\} = F_1(z) + F_2(z)$$

Ako imamo da je

$$\mathcal{Z}\{f(t)\} = F(z)$$

i ako imamo konstantu  $a$  koja je vremenski nezavisna, onda je

$$\mathcal{Z}\{af(t)\} = aF(z)$$

#### Pomak (u vremenskom domenu) i prigušenje (u z-domenu)

##### Pitanje

Ako je

$$\mathcal{Z}\{f(t)\} = F(z)$$

i ako je  $f(t) \equiv 0$  za  $t < 0$ , onda je

$$\mathcal{Z}\{f(t - nT)\} = z^{-n}F(z), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\mathcal{Z}\{f(t + nT)\} = z^n \left[ F(z) - \sum_{i=0}^{n-1} f(iT)z^{-i} \right], \quad n = 0, 1, \dots$$

#### Prigušenje (u vremenskom domenu) i pomjeranje kompleksnog lika

Neka imamo da je

$$\mathcal{Z}\{f(t)\} = F(z), \quad f(t) \equiv 0 \text{ za } t < 0$$

i neka original  $f(t)$  prigušimo funkcijom  $e^{\mp at}$ , pri čemu je  $a$  konstanta koja ne zavisi od vremena. U tom slučaju je:

$$\mathcal{Z}\{e^{\mp at}f(t)\} = F(s \pm a)|_{s=\frac{1}{T}\ln z} = F(ze^{\mp at})$$

#### Početna vrijednost

$$f(0) = \lim_{k \rightarrow 0} f(kT) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$$

#### Krajnja vrijednost

Neka je

$$\mathcal{Z}\{f(t)\} = F(z),$$

neka je  $f(t) \equiv 0$  za  $t < 0$  i neka funkcija  $(1 - z^{-1})F(z)$  nema polova na jediničnoj kružnici niti polova van jedinične kružnice u  $\{z\}$ -ravni, a kružnica ima centar u koordinatnom početku. Tada je

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} [(z - 1)F(z)]$$

## Parcijalni izvod

Neka je

$$\mathcal{Z}\{f(t, a)\} = F(z, a)$$

gdje je  $a$  vremenski nezavisno. Tada je

$$\mathcal{Z}\left\{\frac{\partial}{\partial a}[f(t, a)]\right\} = \frac{\partial}{\partial a}F(z, a)$$

Ova osobina se koristi za ispitivanje osjetljivosti diskretnih sistema.

## Konvolucija Napomena

Neka je

$$\mathcal{Z}\{f_1(t)\} = F_1(z), \quad f_1(t) \equiv 0 \text{ za } t < 0$$

$$\mathcal{Z}\{f_2(t)\} = F_2(z), \quad f_2(t) \equiv 0 \text{ za } t < 0$$

Tada proizvod kompleksnih likova  $F_1(z)$  i  $F_2(z)$  dobijamo na sljedeći način:

$$F_1(z) \cdot F_2(z) = \mathcal{Z}\left\{\sum_{m=0}^n f_1(mT)f_2(nT - mT)\right\}$$

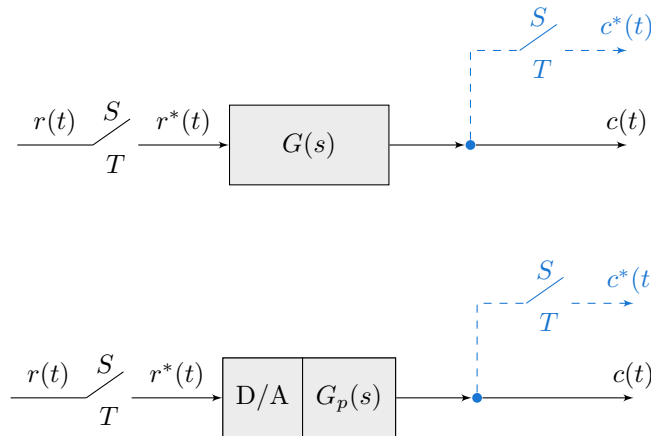
Ova relacija se koristi za realizaciju diskretne prenosne funkcije.

Specifičnosti z-transformacije i inverzne z-transformacije: (amandman profesora)

1. U ovim metodama analize i sinteze koristimo idealno matematičko odabiranje. Signal koji nosi informaciju se mijenja povorkom odabiraka pri čemu je svaki odabirak ravan vrijednosti signala u trenutku odabiranja. Odabirak se ne može uzeti trenutno. Realizujemo ga sa nekom četvorkom, četvorka ima svoju površinu. Svaki odabirak ima površinu koja je jednaka vrijednosti signala u trenutku odabiranja.
2. Signal mijenjamo povorkom odabiraka koja mora sačuvati informaciju, a između trenutaka odabiranja gubimo podatak o informaciji.
3. Kada imamo kompleksne likove u obliku razlomljene racionalne forme, onda je poželjno da stepen polinoma u brojniku bude bar za jedan red manji od stepena polinoma u nazivniku.

## Diskretna prenosna funkcija

To je ono što opisuje diskretni dio sistema sa procesorom u glavnoj ulozi.



Pretpostavimo da imamo neku prenosnu funkciju u  $s$  domenu  $G(s)$  i da neki sistem koji smo opisali tom funkcijom pobuđujemo povorkom odabiraka (digitalnim riječima)  $r^*(t)$ . U općem slučaju ova povorka odabiraka se može dobiti diskretizacijom kontinualnog signala. Tu povorku odabiraka dovodimo na kontinualni dio sistema. Mora postojati elemenat koji će digitalni signal pretvoriti u kontinualni. To je D/A konvertor ili kolo zadržke nultog reda. Prenosna funkcija D/A konvertora je

$$G_{h0}(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}$$

pa je naše ukupno  $G(s)$  sa prve strukture jednako

$$G(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} G_p(s)$$

Kompleksni lik od kontinualnog signala  $c(t)$  je

$$C(s) = G(s)R^*(s)$$

**Pitanje** Komplementarni spektri također imaju komponentu u odzivu, pa određivanje kompleksnog izlaza postaje vrlo komplikovana zadaća. Pojednostavljenje: izvršimo diskretizaciju odziva istom periodom uzorkovanja i odabiračem koji je sinhronizovan sa odabiračem na ulazu (plava boja). Ako smo izvršili diskretizaciju kontinualnog izlaza, onda dobijamo  $c^*(t)$ . Ako smo to uradili, onda smo dobili da je

$$C^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C(s + jn\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(s + jn\Omega)R^*(s + jn\Omega)$$

pa vidimo da je kompleksni lik diskretnog izlaza periodična funkcija po kružnoj učestanosti čija je perioda upravo kružna učestanost odabiranja  $\Omega = \frac{2\pi}{T}$ . Dobijamo da je

$$R^*(s + jn\Omega) = R^*(s), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

i to vrijedi za svaku od komponenti. Svaka od komponenti je kompleksna funkcija pa vrijedi zakon komutacije i možemo pisati:

$$C^*(s) = R^*(s) \left[ \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(s + jn\Omega) \right]$$

Možemo napisati da je

$$G^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(s + jn\Omega)$$

$$C^*(s) = R^*(s)G^*(s) = G^*(s)R^*(s)$$

Formalno smo izvršili diskretizaciju kontinualnog izlaza i formalno izgubili informaciju između trenutaka odabiranja i zato nam je potrebno da poštujemo uvjete teoreme uzorkovanja. **Pitanje**  $G^*(s)$  je diskretna prenosna funkcija. Umjesto kompleksnog lika po Laplaceovoj promjenljivoj, možemo pisati i kompleksne likove po  $z$  promjenljivoj i tada je

$$C(z) = G(z)R(z)$$

pa imamo odnos  $\frac{C^*(s)}{R^*(s)}$  ili  $\frac{C(z)}{R(z)}$ . Odnos kompleksnog lika izlaza i kompleksnog lika ulaza pri nultim početnim uslovima se naziva diskretna prenosna funkcija:

$$G(z) = \frac{C(z)}{R(z)}$$

Pošto je težinska funkcija  $g(t) = \mathcal{L}\{G(s)\}$ , onda se diskretna prenosna funkcija može dobiti diskretizacijom težinske funkcije, pa je

$$G(z) = \mathcal{Z}\{g(t)\} = \mathcal{Z}\{g^*(t)\}$$

Vidimo da je ono što je razlika između Laplaceove i z-transformacije da su original u vremenskom domenu i kompleksni lik u  $s$  domenu jednoznačno određeni jedno drugim, a original u vremenskom domenu je jednoznačno odredio diskretnu prenosnu funkciju ali diskretna prenosna funkcija ne daje original u vremenskom domenu. Pa se može napisati da je  $g^*(t) = \mathcal{Z}^{-1}\{G(z)\}$  i gubimo podatak o težinskoj funkciji između trenutaka odabiranja.

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g(kT)z^{-k}$$

Ako poznamo prenosnu funkciju  $G(s)$ , onda moramo primijeniti inverznu Laplaceovu transformaciju i dobiti težinsku funkciju

$$\mathcal{Z}\{\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}\} = G(z)$$

$$G(z) = \mathcal{Z}\{G(s)\}$$

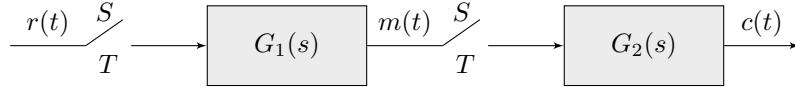
Operaciju  $*$  možemo primijeniti na proizvod dva kompleksna lika od kojih je jedan u zvijezda-formi.

$$C(s) = G(s)R^*(s) / *$$

$$C^*(s) = G^*(s)R^*(s)$$

U kontinualnim sistemima uvijek se može naći kompleksni lik izlaza kroz kompleksni lik ulaza, a u diskretnim funkcijama postoje strukture kod kojih je to moguće i postoje strukture kod kojih je nemoguće.

## Primjeri struktura



$$M(s) = G_1(s)R^*(s) \quad / *$$

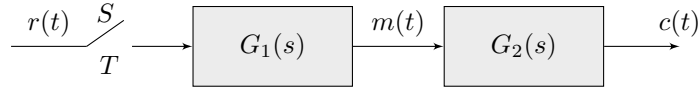
$$C(s) = G_2(s)M^*(s) \quad / *$$

$$M^*(s) = G_1^*(s)R^*(s)$$

$$C^*(s) = G_2^*(s)M^*(s)$$

$$C^*(s) = G_1^*(s)G_2^*(s)R^*(s)$$

$$C(z) = G_1(z)G_2(z)R(z)$$



$$M(s) = G_1(s)R^*(s)$$

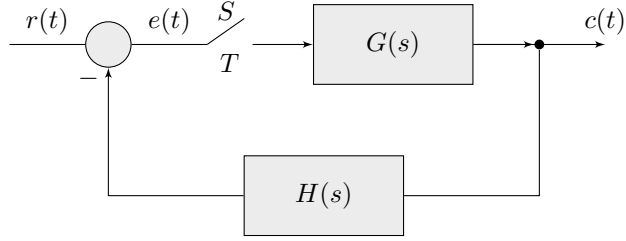
$$C(s) = G_2(s)M(s)$$

$$C(s) = G_1(s)G_2(s)R^*(s) \quad / *$$

$$C^*(s) = [G_1(s)G_2(s)]^* R^*(s)$$

$$C(z) = G_1G_2(z)R(z)$$





$$E(s) = R(s) - H(s)C(s)$$

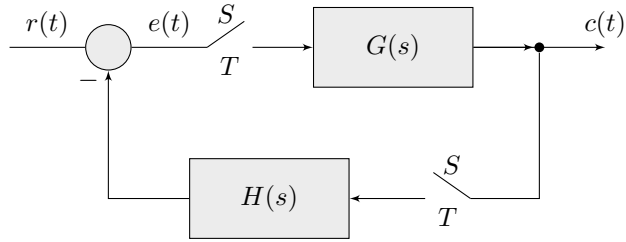
$$C(s) = G(s)E^*(s)$$

$$E(s) = R(s) - G(s)H(s)E^*(s) \quad / \quad *$$

$$E^*(s) = R^*(s) - [GH]^*(s)E^*(s)$$

$$E^*(s) = \frac{R^*(s)}{1 + GH^*(s)}$$

$$C^*(s) = \frac{G^*(s)R^*(s)}{1 + GH^*(s)}$$



$$E(s) = R(s) - H(s)C^*(s) \quad / \quad *$$

$$C(s) = G(s)E^*(s) \quad / \quad *$$

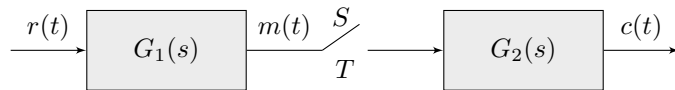
$$E^*(s) = R^*(s) - H^*(s)C^*(s)$$

$$C^*(s) = G^*(s)E^*(s)$$

$$E^*(s) = R^*(s) - G^*(s)H^*(s)R^*(s)$$

$$E^*(s) = \frac{R^*(s)}{1 + G^*(s)H^*(s)}$$

$$C^*(s) = \frac{G^*(s)R^*(s)}{1 + G^*(s)H^*(s)}$$



$$\begin{aligned}
M(s) &= R(s)G_1(s) & / * \\
C(s) &= G_2(s)M^*(s) & / * \\
M^*(s) &= [R(s)G_1(s)]^* \\
C^*(s) &= G_2^*(s)M^*(s) = G_2^*(s)[R(s)G_1(s)]^*
\end{aligned}$$

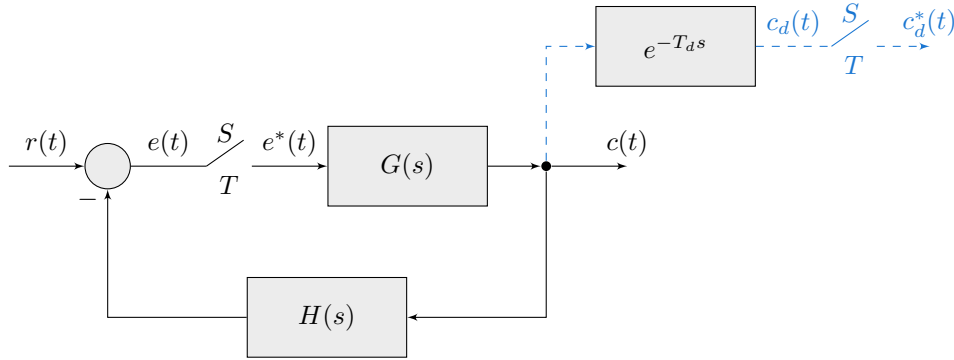
Napomena

## Predavanje 6

Kada izvršimo diskretizaciju težinske funkcije to se zove povorka težinske funkcije sistema. Kada vršimo diskretizaciju odziva sistema, ma kakav on bio, perioda odabiranja mora biti takva da sačuva informaciju o funkciji čiju diskretizaciju vršimo i po pravilu mora biti manja od najmanje inercione vremenske konstante sistema čiji odziv diskretizujemo. **To je još jedan uslov koji dodajemo na periodu odabiranja.**

### Modifikovana $\mathcal{Z}$ -transformacija

Osnovni nedostatak inverzne z-transformacija je da ne možemo dobiti original  $f(t)$ . Dobijamo samo povorku odabiraka  $f^*(t)$ . Gubimo informaciju o signalu između trenutaka odabiranja. Smanjivanjem periode odabiranja mi raširujemo Nyquistovo područje i to nam povećava uticaj smetnji i šumova. Zato se uvodi modifikovana z-transformacija. Ona nam omogućava da izračunamo vrijednosti signala koji nosi informaciju između trenutaka odabiranja.



Ako pretpostavimo da je vrijeme čistog transportnog kašnjenja  $T_d$  najviše jedna perioda uzorkovanja, onda je

$$T_d = \alpha T, \quad 0 < \alpha \leq 1$$

Tada je naš signal poslije bloka kašnjenja

$$c_d(t) = c(t - \alpha T)$$

Diskretizacijom ovog zakašnjelog signala mi možemo z-transformacijom i inverznom z-transformacijom izračunati odabirak između trenutaka odabiranja. Umjesto  $\alpha$  je uveden koeficijent modifikovane z-transformacije:  $m = 1 - \alpha$ ,  $0 \leq m < 1$ . Modifikovana z-transformacija signala  $c(t)$  je z-transformacija zakašnjelog signala. On je

$$c_d(t) = c(t - \alpha T) = c[t - (1 - m)T]$$

Piše se

$$\mathcal{Z}\{c_d(t)\} = \mathcal{Z}_m\{c(t)\}, \quad m = 1 - \alpha, \quad 0 \leq m < 1$$

U kompleksnom domenu ovo se piše kao

$$C(z, m) = \mathcal{Z}_m\{c(t)\} = \mathcal{Z}\{c[t - (1 - m)T]\}, \quad 0 \leq m < 1$$

Inverzna modifikovana z-transformacija se piše kao:

$$c[(n + m - 1)T] = \mathcal{Z}^{-1} \{C_d(z)\} = \mathcal{Z}_m^{-1} \{C(z, m)\}$$

Ako odemo na kompleksne oblike onda imamo:

$$F(z) = \mathcal{Z} \{f^*(t)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{F(p)z}{z - e^{pT}} dp$$

$$f(kT) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C F(z) z^{k-1} dz$$

$$f_d(t) = f[t - (1 - m)T]$$

Ako  $f(t)$  ima kompleksni lik u  $s$  domenu  $F(p)$ , onda je

$$F_d(p) = F(p) \cdot e^{-(1-m)pT}$$

$$F(z, m) = \mathcal{Z}_m \{f(t)\} = \mathcal{Z} \{f[t - (1 - m)T]\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{e^{-(1-m)pT} F(p)z}{z - e^{pT}} dp$$

Pošto je  $e^{-pT} = z^{-1}$ , imamo

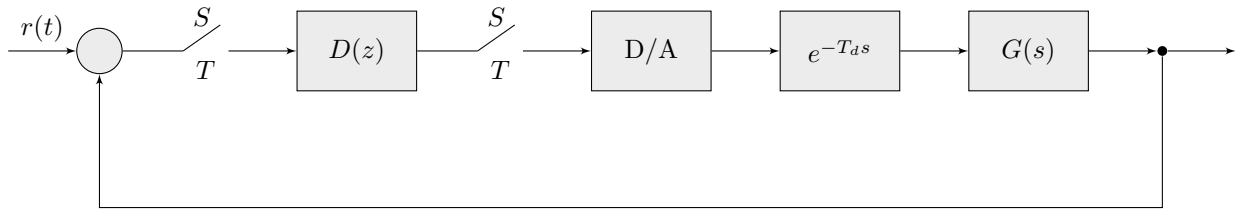
$$F(z, m) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{e^{mpT} F(p)}{z - e^{pT}} dp$$

Zatvorena kontura  $C$  mora obuhvatati polove podintegralne funkcije  $F(p)$  i stepen polinoma u nazivniku kompleksnog lika  $F(p)$  mora biti barem za 1 veći od stepena polinoma u brojniku. Inverzna modifikovana z-transformacija nam kaže da ćemo dobiti vrijednosti originala funkcije

$$f[(n + m - 1)T] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C z^{n-1} F(z, m) dz, \quad 0 \leq m < 1$$

## Digitalni sistemi sa transportnim kašnjenjem

Svi tehnološki procesi imaju u sebi inherentno sadržano kašnjenje. Ako se radi o digitalnim sistemima, procesor mora raditi u realnom vremenu. Kada u sistemu imamo kašnjenje a radi se o linearnim kontinualnim sistemima, onda transportno kašnjenje nam uvijek otežava analizu i sintezu, zatim zakreće amplitudno fazne karakteristike i ugrožava stabilnost. Sistemi moraju biti stabilni. I treće, svaka pojava kašnjenja usporava brzinu odziva. Svi ovi problemi u digitalnim sistemima su daleko manje izraženi. Transportno kašnjenje možemo zanemariti ako je manje od periode uzorkovanja.



Diskretna prenosna funkcija prenosne grane je:

$$W(z) = D(z) \cdot \mathcal{Z} \left\{ \frac{1 - e^{-sT}}{s} \cdot e^{-T_d s} \cdot G(s) \right\}$$

Pretpostavit ćemo da je vrijeme ukupnog kašnjenja  $T_d < T$ . U ovim sistemima se isključivo primjenjuje modifikovana z-transformacija. Ako je  $T_d < T$  i uvedemo oznaku  $\frac{G(s)}{s} = G_s(s)$  onda je:

$$W(z) = D(z) \cdot (1 - z^{-1}) \cdot G_s(z, m)|_{m=1-\frac{T_d}{T}} = D(z) \cdot (1 - z^{-1}) \cdot G_s \left( s, 1 - \frac{T_d}{T} \right)$$

Karakteristična jednačina glasi:

$$1 + W(z) = 0$$

$$z + D(z) \cdot (z - 1) \cdot G_s \left( z, 1 - \frac{T_d}{T} \right) = 0$$

Pomoću ove karakteristične jednačine se vrši analiza u  $z$  domenu. Ako je  $T_d > T$  možemo napisati da je  $T_d = nT + \lambda T$ ,  $0 \leq \lambda < 1$ . Prenosna funkcija sada glasi:

$$W(z) = D(z) \cdot (1 - z^{-1}) \cdot \mathcal{Z} \{ e^{-nTs} G_s(s) e^{-\lambda Ts} \} = D(z)(1 - z^{-1})z^{-n} G_s(z, 1 - \lambda)$$

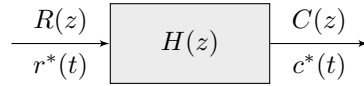
-----

## Realizacija i osobine funkcije diskretnog prenosa

Zadatak funkcije diskretnog prenosa jeste da pri zadatoj povorki ulaza generišemo povorku dijela sistema kojim upravljamo i to takvu da na izlazu dobijemo povorku odabiraka upravljačkih instrukcija koja će sistem prevesti u tehnologijom definisano stanje. Ovaj zadatak se realizuje jednim od tri algoritma:

- Konvolucionim,
- Rekurzivnim,
- DFT algoritmom.

### Konvolucionni algoritam na primjeru digitalnog filtera



Imamo osobinu konvolucije

$$c(nT) = \sum_{m=0}^n h(mT)r(nT - mT), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Ta povorka treba sistem da dovede u tehnologijom definisano stanje. Za svaki odabirak izlaza u trenutku  $t = nT$  nama su potrebni odabirci ulaza  $r(0), r(T), \dots, r[(n-1)T]$ . Izlaz je određen u trenutku  $t = nT$  i ta povorka se množi koeficijentima koji su određeni diskretnom prenosnom funkcijom digitalnog filtera. Kada bi ulaz bio jedinični odabirak, onda bi izlaz bio  $h(0), h(T), h(2T), \dots$ . Ove programe možemo primijeniti na slučajeve kada je impulsna povorka sistema ograničena. To znači da odabirci egzistiraju za  $N_1 \leq k \leq N_2$ . Ako amplituda u impulsnoj povorki odabiraka opada, npr.  $h(kT) = k^n$ ,  $|k| < 1$ . Strogo gledano ovaj slučaj nije moguće realizirati zato što se u konvoluciji javlja jako mnogo članova. Sve ovo ima smisla kada se radi o stabilnim procesorima. Stabilan procesor je onaj kod kojeg za sve konačne vrijednosti odabiraka na ulazu dobijamo konačne vrijednosti odabiraka na izlazu. Tada je

$$\sum_{k=0}^{\infty} |h(kT)| < \infty$$

# Pitanja i odgovori

## Prva parcijala

### - Predavanje 1 -

1. Šta je kvantni nivo  $\Delta y$ , šta mora zadovoljavati i šta su ograničenja? **Završni**

Kvant  $\Delta y$  predstavlja razliku između dva susjedna kvantna nivoa i konstantan je. Mora postojati dovoljan broj kvantnih nivoa tj. kvant  $\Delta y$  mora biti dovoljno mali kako bi vrijednost kvantnih odabiraka bila približno jednaka kontinualnom signalu. Zbog konačne veličine ...

2. Šta je kvantni nivo, kako ga odabiramo i šta mora biti zadovoljeno pri odabiru? **Završni**

Kvantni nivo je unaprijed zadana vrijednost koju kontinualni signal treba da dostigne. Kako bismo sačuvali informaciju broj kvantnih nivoa treba biti što veći. Ako je broj kvantnih nivoa dovoljno velik može se reći da je  $f(t) = f(kT)$  za  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Prilikom dovođenja kontinualnog signala na ulaz AD konvertora vrijednost ulaznog signala na jednoj periodi uzorkovanja ne smije se mijenjati više od jednog kvantnog nivoa. U slučaju da se mijenja moramo ga prvo dovesti na kolo zadržke kako bi se vrijednost signala zadržala na narednoj periodi uzorkovanja  $kT \leq t < (k+1)T$ . U slučaju da se mijenja manje od jednog kvantnog nivoa, možemo kontinualni signal direktno dovesti na ulaz AD konvertora.

3. Kada procesor radi u realnom vremenu? **Završni**

Digitalni računar mora raditi u realnom vremenu - odabirak upravljačke instrukcije se mora generisati prije pristizanja narednog odabirka na ulaz. Izračunavanje odabirka upravljačke instrukcije mora se završiti prije isticanja te periode uzorkovanja i taj odabirak vrijedi na toj periodi. Određivanje odabirka upravljačke instrukcije mora biti kraće od periode uzorkovanja. Ukoliko upravljamo sa više tehnoloških veličina, određivanje odabirka upravljačke instrukcije za svaku od veličina se mora završiti unutar iste periode uzorkovanja.

4. Šta je perioda uzorkovanja, šta mora zadovoljavati i šta su ograničenja? **Završni**

Perioda uzorkovanja  $T$  je vremenski interval između dva susjedna trenutka odabiranja i obično radimo sa konstantnom periodom uzorkovanja. Uslovi koje mora zadovoljavati:

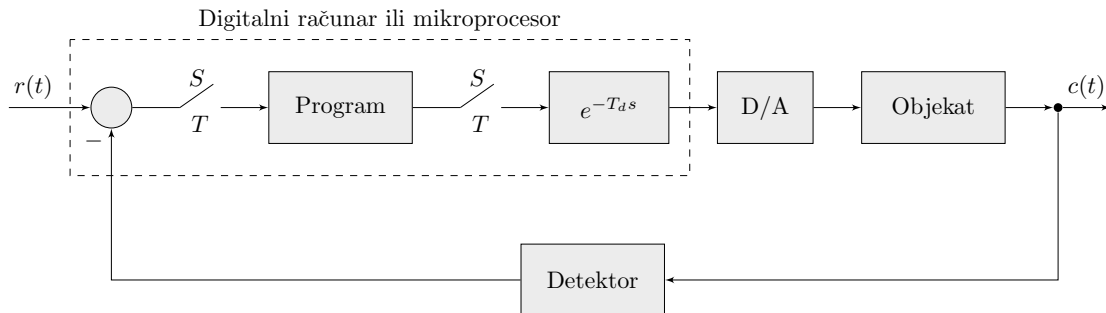
1. Mora biti takva da sačuva informaciju o originalu,
2. Mora biti manja od najmanje inercione vremenske konstante sistema na čijem se izlazu vrši diskretizacija,
3. Mora biti takva da promjena signala nije veća od jednog kvantnog nivoa,
4. Mora biti takva da zadovoljava Nyquistovu teoremu učestanosti (smanjenjem periode uzorkovanja širimo Nyquistovo područje učestanosti pa se povećava uticaj smetnji i šumova),
5. Veliko  $T$  negativno utiče na pitanje stabilnosti sistema.

Periodu uzorkovanja biramo u odnosu na kvant tako da promjena signala na narednoj periodi uzorkovanja ne bude veća od jednog kvantnog nivoa. Periodu uzorkovanja biramo u odnosu na realnu dinamiku sistema tako da ona bude manja od najmanje inercione vremenske konstante sistema.

5. Kako biramo periodu uzorkovanja u odnosu na kvant  $\Delta y$ , a kako u odnosu na dinamiku sistema kojim upravljamo? **Završni**

Periodu uzorkovanja biramo u odnosu na kvant  $\Delta y$  tako da promjena signala na narednoj periodi uzorkovanja nije veća od jednog kvantnog nivoa. Periodu uzorkovanja biramo u odnosu na realnu dinamiku sistema tako da ona bude manja od najmanje inercione vremenske konstante sistema. Odabir velike periode uzorkovanja  $T$  u odnosu na realnu dinamiku sistema ima negativan uticaj na stabilnost sistema.

6. **Nacrtajte elementarnu strukturu upravljanja u DSU, objasnite šta su pojedini elementi i razdvojite kontinualni i diskretni dio.** **Završni**



7. **Koje se diskretizacije vrše u digitalnim sistemima i koje su prednosti digitalnih sistema?** **Ispitivanje**

Vrše se sljedeće diskretizacije:

- Diskretizacija po nivou. Zadaju se unaprijed fiksirani nivoi koje signal treba da dostigne.
- Diskretizacija po vremenu. Biraju se fiksni trenuci uzimanja odabiraka.
- Diskretizacija i po nivou i po vremenu se koristi u DSU.

8. **Šta je  $\Delta y$ , zašto je bitno?** **Ispitivanje**

$\Delta y$  predstavlja kvant, u diskretizaciji i po nivou i po vremenu pojedini diskretni nivoi posjeduju cjelobrojne vrijednosti kvanta  $\Delta y$ . Vrijednost signala se uzima u trenutku odabiranja i ona iznosi cijeli broj kvanata, uzima se onaj kvantni nivo koji je bliži nivou odabirka.

9. **Koje uslove mora zadovoljavati odabirak?** **Ispitivanje**

Odabirak mora imati konstantnu vrijednost.

10. **Šta još procesor može da radi u međuvremenu?** **Ispitivanje**

Kada računar izračuna odabirak upravljačke instrukcije možemo ga pustiti da miruje i obično se daju neke druge zadaće da obavlja do isteka periode upravljanja:

1. Obrada mjernih signala, **Pitanje**
2. Procjena upravljačkih instrukcija (to znači narednog odabirka), **Pitanje**
3. Identifikacija procesa,
4. Izračunavanje podataka za naredni odabirak u kojima učestvuju do tada poznati podaci,
5. Adaptacija parametara.

11. **Šta je odabirak?** **Ispitivanje**

Odabirak je vrijednost signala u trenutku odabiranja  $t = kT$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  i ima konstantnu vrijednost. Odabirak se dovodi na A/D konvertor.

12. **Koji je prvi uvjet koji se nameće na obradu signala?** **Ispitivanje**

Kada smo uzeli kontinualnu funkciju i izvršili njenu diskretizaciju i po nivou i po vremenu, tom diskretizacijom moramo sačuvati informaciju koju ona nosi. To ocjenjujemo iz njenog kompleksnog lika ili frekventnih karakteristika.

13. **Koje su prednosti digitalnih sistema upravljanja?** **Ispitivanje**

Prednosti DSU:

- Manji uticaj smetnji i šumova,
- Isti element upravljanja se može koristiti za upravljanje sa više tehnoloških veličina,
- Isti spojni put možemo koristiti za više tehnoloških veličina.

14. **Zašto radimo ovaj kurs?** Ispitivanje

Postoje 3 razloga zašto se radi ovaj kurs:

- *Smanjenje uticaja šuma i smetnji na sistem.* Smetnje i šumovi utiču na sistem negativno. Cilj je da umanjimo njihov uticaj zbog boljeg upravljanja, zato što aw kontinualne funkcije prenose u cijelosti, pa se šumovi i smetnje superponiraju i povećavaju sa rastojanjem.
- Možemo istovremeno upravljati sa više različitih tehnoloških veličina jer upravljamo digitalnim računarom, pa koristimo komutator tako da u jednoj periodi uzorkovanja možemo obraditi  $n$  različitih tehnoloških veličina koje dovodimo na ulaz komutatora (npr. pritisak, nivo, temperatura). Obilježili smo ih sa  $f(t)$  i one se u LSAU prenose u cijelosti.

15. Koje veličine imamo u osnovnoj strukturi automatskog upravljanja?

Imamo ulaz (zadanu vrijednost  $r(t)$ ), izlaz  $c(t)$  i regulacionu grešku  $e(t)$  i sve su vremenske funkcije.

16. Kada upravljamo sa više tehnoloških parametara, koji uslov se nameće?

Unutar jedne periode uzorkovanja se mora obaviti svih  $n$  komutacija. Komutator na ulazu i komutator na izlazu moraju biti sinhronizovani.

17. **Zašto kvant mora biti konstantan?** Ispitivanje

Da bismo imali cijeli broj kvantnih nivoa i time se oklanjaaju smetnje i šumove. Prilikom diskretizacije po nivou se uzima cijeli broj kvantnih nivoa koji je najbliži vrijednosti signala.

18. Kako se vrši procjena narednog odabirka upravljačke instrukcije? Ispitivanje

Procjena se vrši na osnovu prethodnih odabiraka. Matematski aparat koji koristimo su diferentne jednačine.

19. Šta je komparator? Ispitivanje

Komparator upoređuje (oduzima) zadanu vrijednost i vrijednost koju nam daje detektor.

20. Zašto se zovu digitalni sistemi upravljanja? Ispitivanje

Zato što tehnološkim postrojenjem upravljamo digitalnim upravljačkim dijelom, tj. digitalnim računarom (programom, procesorom).

21. **Gdje se u sistemu pojavljuje digitalna riječ?** Ispitivanje

Digitalna riječ se može pojaviti na izlazu pretvarača, na izlazu detektora, na ulazu i izlazu digitalnog računara, te na ulazima i izlazu komparatora. **Pitati prof. šta fali**

22. Šta je analiza? Ispitivanje

Analiza je određivanje matematskog opisa nekog sistema.

23. Šta je sinteza? Ispitivanje

Sinteza je određivanje strukture i parametara regulatora.

## - Predavanje 2 -

1. **Šta je brzina uzimanja odabiraka i čime je određujemo?** Završni

Brzina uzimanja odabiraka je gustina uzimanja odabiraka i što su odabirci gušći kvantovanje po vremenu je češće, perioda uzorkovanja je manja i bolja je aproksimacija kontinualnog signala  $f(t)$  stepenastim signalom. Određujemo je periodom uzorkovanja.

2. **Šta je kružna učestanost odabiranja  $\Omega = \frac{2\pi}{T}$ , šta mora zadovoljavati i šta su ograničenja?** **Završni**

3. **Šta je  $F(p)$  i šta mora zadovoljavati?** **Završni**

$F(p)$  predstavlja kompleksni lik originala  $f(t)$  koji nosi informaciju. Mora zadovoljiti uslov da njeni polovi leže u lijevoj poluravni kompleksne ravni  $\{p\}$ . Ti polovi mogu biti realni, različiti, jednostruki, višestruki i u obliku konjugovano kompleksnih parova.

4. **Objasnite relaciju, šta su pojedine veličine i šta treba biti zadovoljeno:** **Završni**

$$F^*(s) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma-j\infty}^{\gamma+j\infty} F(p)I(s-p) dp$$

Nedostatak prvog oblika kompleksnog lika povorke odabiraka je što moramo znati original  $f(t)$  u vremenskom domenu ili vrijednosti signala u trenucima odabiranja  $f(kT)$ , a nama često treba samo  $F^*(s)$  na osnovu poznavanja  $F(s)$ . Zbog toga koristimo ovu relaciju koja nam omogućava da sračunamo vrijednost kompleksnog lika povorke odabiraka na osnovu kompleksnog lika originala.

Data relacija predstavlja konvolucionni integral u domenu Laplaceove transformacije.  $F^*(s)$  predstavlja kompleksni lik povorke odabiraka  $f^*(t)$ ,  $F(p)$  je kompleksni lik originala  $f(t)$ ,  $I(s-p)$  je kompleksni lik povorke idealnih delta funkcija. Da bi se ovaj integral mogao odrediti mora postojati prava  $\text{Re}(p) = \gamma$  koja razdvaja singularitete tipa polova podintegralnih funkcija. Polovi funkcije  $F(p)$  moraju ležati u lijevoj poluravni kompleksne ravni  $\{p\}$ . Ti polovi mogu biti realni, različiti, jednostruki, višestruki i u obliku konjugovano kompleksnih parova. Polovi funkcije  $I(s-p)$  moraju ležati u dijelu kompleksne ravni  $\{p\}$  desno od prave  $\text{Re}(p) = \gamma$ . Da bismo odredili polove, moramo riješiti karakterističnu jednačinu:

$$1 - e^{-T(s-p)} = 0$$

Rješenja ove jednačine određuju polove kompleksnog lika  $I(s-p)$  koji se multipliciraju sa periodom  $j\Omega$  do beskonačnosti.

5. **Dato je:**

$$F^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)e^{-kTs}$$

$$F^*(s) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma-j\infty}^{\gamma+j\infty} F(p)I(s-p) dp$$

**Šta su pojedine veličine? Nacrtajte raspored polova u ravni  $\{p\}$ .** **Završni**

Prva relacija predstavlja prvi oblik kompleksnog lika povorke odabiraka.

Pojedine veličine:

- $f(kT)$  – vrijednosti originala u trenucima odabiranja  $t = kT$ ,  $k = 0, 1, \dots$
- $F^*(s)$  – kompleksni lik povorke odabiraka  $f^*(t)$
- $T$  – povorka odabiraka u vremenskom domenu
- $s$  – Laplaceova kompleksna promjenljiva

Nedostatak prvog oblika kompleksnog lika povorke odabiraka je što moramo znati original  $f(t)$  u vremenskom domenu ili vrijednosti signala u trenucima odabiranja  $f(kT)$ , a nama često treba samo  $F^*(s)$  na osnovu poznavanja  $F(s)$ . Zbog toga koristimo ovu relaciju koja nam omogućava da sračunamo vrijednost kompleksnog lika povorke odabiraka na osnovu kompleksnog lika originala.



Druga relacija predstavlja konvolucioni integral u domenu Laplaceove transformacije.  $F^*(s)$  predstavlja kompleksni lik povorke odabiraka  $f^*(t)$ ,  $F(p)$  je kompleksni lik originala  $f(t)$ ,  $I(s-p)$  je kompleksni lik povorke idealnih delta funkcija. Da bi se ovaj integral mogao odrediti mora postojati prava  $\text{Re}(p) = \gamma$  koja razdvaja singularitete tipa polova podintegralnih funkcija. Polovi funkcije  $F(p)$  moraju ležati u lijevoj poluravni kompleksne ravni  $\{p\}$ . Ti polovi mogu biti realni, različiti, jednostruki, višestruki i u obliku konjugovano kompleksnih parova. Polovi funkcije  $I(s-p)$  moraju ležati u dijelu kompleksne ravni  $\{p\}$  desno od prave  $\text{Re}(p) = \gamma$ . Da bismo odredili polove, moramo riješiti karakterističnu jednačinu:

$$1 - e^{-T(s-p)} = 0$$

Rješenja ove jednačine određuju polove kompleksnog lika  $I(s-p)$  koji se multipliciraju sa periodom  $j\Omega$  do beskonačnosti.

6. **Navedite sve operacije koje su inherentno sadržane u diskretizaciji kontinualnog signala. Objasnite ih.** *Završni*

7. **Vrijeme kašnjenja  $T_d$ ?** *Ispitivanje*

$T_d$  je vrijeme kašnjenja i u njemu je sadržano: vrijeme uzimanja odabirka, zadržavanje tog odabirka na narednoj periodu uzorkovanja (tj. memorisanje), vrijeme kodiranja (prevođenje u digitalnu riječ) i vrijeme izračunavanja odabirka upravljačke instrukcije po zadatom algoritmu upravljanja.

8. Šta je glavni nedostatak prvog oblika kompleksnog lika povorke odabiraka? *Ispitivanje*

Moramo poznavati čitavu funkciju  $f(t)$  ili njene odabirke  $f(kT)$ .

9. Šta je  $f(t)$ ?

$f(t)$  je kontinualni signal koji nosi informaciju.

10. Zašto smo izvršili odabiranje? *Ispitivanje*

Odabiranje smo izvršili da kontinualni signal koji nosi informaciju zamijenimo povorkom odabiraka. Time smo smanjili uticaj smetnji i šumova, isti element upravljanja možemo koristiti da istovremeno upravljamo s više tehnoloških veličina i isti spojni put možemo koristiti za više tehnoloških veličina.

11. Zašto koristimo prvi i drugi oblik kompleksnog lika povorke odabiraka? *Ispitivanje*

Prvi i drugi oblik kompleksnog lika povorke odabiraka koristimo pri analizi i sintezi digitalnih sistema upravljanja, dok treći oblik koristimo pri digitalnoj obradi signala i sintezi digitalnih filtera.

### - Predavanje 3 -

1. **Navedite osobine  $F^*(s)$ .** *Završni*

Kompleksni lik povorke odabiraka ima dvije osobine:

1. Kompleksni lik je periodična funkcija sa periodom ponavljanja  $j\Omega$ .

$$F^*(s) = F^*(s + jm\Omega), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

To znači da je  $F^*(s)$  periodična funkcija sa periodom ponavljanja  $j\Omega$  i ide i na jednu i na drugu stranu do beskonačnosti.

2. Ako poznamo funkciju  $F^*(s)$ , onda istu vrijednost funkcija  $F^*(s)$  ima i u svim tačkama  $s_1 + jm\Omega$ . Pošto karakteristične tačke moraju ležati u lijevoj poluravni kompleksne ravni, onda znamo da polovi i nule mogu biti realni, negativni jednostruki ili višestruki, i mogu biti u obliku konjugovano kompleksnih parova, ali njihov položaj mora biti unutar  $j\Omega$  pa konjugovano kompleksni par može biti sa pozitivnim imaginarnim dijelom ili sa negativnim imaginarnim dijelom i najviše  $\Omega/2$

2. **Zašto je primarni pojas ograničen sa  $-j\Omega/2$  i  $+j\Omega/2$ ?** *Završni*

Budući da se singulariteti tipa polova kompleksnog lika originala  $f(t)$  moraju biti u lijevoj poluravni kompleksne ravni  $\{p\}$ , oni mogu biti realni, jednostruki, višestruki i kompleksni u obliku konjugovano-kompleksnih parova.

3. **Zašto gubimo informaciju ako je perioda uzorkovanja prevelika?** *Završni*

Povećanjem periode uzorkovanja smanjujemo Nyquistovo područje učestanosti. Može se desiti da sve karakteristične tačke (polovi i nule) kompleksnog lika povorke odabiraka ne budu unutar primarnog pojasa, čime smo trajno izgubili informaciju. Dalje, ne smije biti promjena signala na periodi uzorkovanja veća od jednog kvantnog nivoa. Ukoliko je perioda uzorkovanja prevelika onda ovaj zahtjev neće biti ispunjen. Odabirom periode uzorkovanja mi biramo kružnu učestanost odabiranja  $\Omega$ , a periodu uzorkovanja biramo u skladu sa brzinom promjene signala.

4. **Šta je kolo zadržke nultog reda i šta mora zadovoljiti?** *Završni*

Kolo zadržke nultog reda ima kao osnovnu zadaću da povorku odabiraka  $u^*(t)$  koja dolazi sa digitalnog računara pretvori u kontinualni signal  $m(t)$ . Druga zadaća je da ukloni ili barem u potrebnoj mjeri priguši komplementarne harmonike. Ovo kolo na svom izlazu daje stepenasti signal i koristimo ga jer su u praksi svi sistemi kontinualni i samo takav signal možemo dovesti na objekat upravljanja. Ovo kolo pri aproksimaciji funkcije koristi samo prvi član Taylorovog razvoja funkcije  $u(t)$ . Vrijednost signala  $m(t)$  unutar jedne periode odabiranja je konstantna i paralelna sa vremenskom osom. Pošto je njegoa prenosna funkcija

$$G_{h0}(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}$$

imamo sljedeće probleme:

- U nazivniku imamo astatizam prvog reda. Time uvodimo komponentu integratora koja zakreće amplitudno faznu karakteristiku za  $-\pi/2$ , a to nam ugrožava stabilnost sistema,
- U brojniku imamo blok čistog transportnog kašnjenja pa također dolazi do ugrožavanja rezervi stabilnosti sistema.

5. **Koje su osnovne zadaće kola zadržke nultog reda, a koje su razlike u odnosu na idealni niskopropusni filter?** *Završni*

Njegova osnovna zadaća je da povorku odabiraka koja dolazi sa digitalnog računara pretvori u kontinualni signal. Druga zadaća je da ukloni ili barem u potrebnoj mjeri priguši komplementarne harmonike.

6. **Šta je primarni pojas, šta mora zadovoljiti i čime je omeđen? Prikažite ga.** *Završni*

Primarni pojas je pojas u kompleksnoj ravni  $\{p\}$  koji je omeđen sa  $-j\Omega/2$  i  $j\Omega/2$ . Unutar primarnog pojasa moraju ležati karakteristične tačke, polovi i nule, kompleksnog lika  $F(p)$  signala koji nosi informaciju. Polovi i nule kompleksnog lika povorke odabiraka se multipliciraju iznad i ispod primarnog pojasa do beskonačnosti u susjedne pojaseve koje nazivamo komplementarnim pojasevima i međusobno su udaljeni za  $j\Omega$ . **NEPOTPUN.**

7. **Objasnite relaciju:** *Završni*

$$F^*(j\omega)|_{n=0} = F_0^*(j\omega) = \frac{1}{T}F(j\omega)$$

*Odgovor:*

$F(j\omega)$  je Fourierova transformacija funkcije  $f(t)$  koja nosi informaciju,  $T$  je perioda uzorkovanja u vremenskom domenu i mi je biramo na osnovu brzine promjene kontinualnog signala.  $F^*(j\omega)$  je Fourierova transformacija povorke odabiraka  $f^*(t)$ . Indeks  $n = 0$  nam govori da se radi o primarnom pojasu. **NEPOTPUN**

8. **Objasniti relaciju:** *Ispitivanje*

$$F^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum F(j\omega + jn\Omega)$$

9. **Kako odabiramo periodu uzorkovanja  $T$ ? Šta su ograničenja?** **Završni**

-----

10. **Zašto imamo zadržavanje na narednoj periodi uzorkovanja i kada?** **Ispitivanje**

Moramo zadržati ulazni signal ako je na sljedećoj periodi uzorkovanja promjena ulaznog signala veća od jednog kvantnog nivoa, a u slučaju da nije promjena veća od jednog kvantnog nivoa signal možemo dovesti direktno na A/D konvertor.

11. **Šta je bitno prilikom kodiranja?** **Ispitivanje**

Bitno je da je kvant dovoljno mali tako da vrijedi da je  $f(t) = f(kT)$  za  $t = kT$ , nema greške odsijecanja jer u digitalnim sistemima upravljanja se vrši odabiranje po nivou i po vremenu. Po nivou se uzima cijeli broj kvantnih nivoa koji je najbliži vrijednosti signala i mora se pojaviti cijeli broj kvantnih nivoa. To izražavamo rezolucijom i što je veća rezolucija to je bolje odabiranje. Rezolucija predstavlja preciznost predstavljanja kontinualnog signala povorkom odabiraka.

12. **Šta je ovo?** **Ispitivanje**

$$T \cdot \left| \frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}} \right| \cdot e^{-j \frac{\omega T}{2}} \operatorname{sgn} \left( \sin \frac{\omega T}{2} \right)$$

Ovo je frekventna karakteristika kola zadržke nultog reda. Ona nosi podatke o promjeni amplitude i početne faze signala na izlazu u odnosu na signal na ulazu, a te promjene je uzrokovala promjena kružne učestanosti na ulazu.

13. **Kakva je razlika između ove karakteristike i idealnog niskopropusnog filtera?** **Ispitivanje**

Razlika je što ova amplitudno frekventna karakteristika samo prigušuje više harmonike dok idealni niskopropusni filter u potpunosti uklanja više harmonike, ima ravnu amplitudno frekventnu karakteristiku i ona je u granicama od  $-\Omega/2$  do  $\Omega/2$  (Nyquistovo područje učestanosti).

14. **Fazno frekventna karakteristika niskopropusnog filtera?** **Ispitivanje**

Ova karakteristika je pravac čiji je nagib  $T_d = \frac{\varphi_0}{\Omega}$  i to je vrijeme grupnog kašnjenja i ono je bitno jer kad propustimo povorku odabiraka moramo da dobijemo signal koji je isti kao  $f(t)$ , ali je zakašnjen za to vrijeme  $T_d$ .

**- Predavanje 4 -**

1. **Koje su osnovne zadaće D/A konvertora?** **Završni**

2. **Šta je to diskretna prenosna funkcija?** **Završni**

To je ono što opisuje diskretni dio sistema sa procesorom u glavnoj ulozi. Predstavlja odnos kompleksnog lika povorke odabiraka izlaza i kompleksnog lika povorke odabiraka ulaza,  $G^*(s) = \frac{C^*(s)}{R^*(s)}$  ili  $G(z) = \frac{C(z)}{R(z)}$

3. **Objasnite razlike između  $\mathcal{Z}$  i  $\mathcal{Z}^{-1}$  u odnosu na  $\mathcal{L}$  i  $\mathcal{L}^{-1}$  transformacije.** **Završni**

Kod Laplaceove transformacije je kompleksni lik jednoznačno određen originalom i obratno. Kod z-transformacije je kompleksni lik povorke odabiraka jednoznačno određen povorkom odabiraka i obratno, dok original jednoznačno određuje z-transformaciju, a z-transformacija nije jednoznačno odredila original.

4. **Šta je kontura stabilnosti u  $z$  domenu?** **Završni**

5. **Šta je kontura dozvoljenog vremena smirenja u  $z$  domenu?** **Završni**

6. **Odredite konturu stabilnosti. Podite od ravni  $\{s\}$  i odredite je u ravni  $\{z\}$ .** **Završni**

7. **Odredite konturu dozvoljenog vremena smirenja (iz ravni  $\{s\}$  u ravan  $\{z\}$ ).** **Završni**
- 

8. **Zašto uvodimo z-transformaciju?** **Ispitivanje**

Z-transformaciju uvodimo zato što u prvom i drugom obliku kompleksnog lika povorke odabiraka imamo transcendentne funkcije odnosno eksponencijalne funkcije. Primjenom z-transformacije dobijamo razlomljene racionalne forme.

### - Predavanje 5 -

1. **Razlike između  $z$  domena i domena Laplaceove transformacije?** **Ispitivanje**

Razlika između Laplaceove i z-transformacije je u tome da us original u vremenskom domenu i kompleksni lik u  $s$  domenu jednoznačno određeni jedno drugim, ...**DOVRSITI**

### - Predavanje 6 -

1. Zašto se zove dominantni pol? **Ispitivanje**

Zato što ima najveći uticaj na odziv jer ima najduže vrijeme smirivanja tj. on ima najveću inercionu vremensku konstantu. On određuje karakter odziva, ponašanje oko novog stacionarnog stanja i vrijeme smirivanja.

---

### Ostala (ne znam gdje da ih smjestim)

1. **Objasnite relaciju  $n \geq m$  sa ciljem objašnjenja realizacije funkcije diskretnog prenosa.** **Završni**
  2. **Objasnite konvolucionu algoritam realizacije funkcije diskretnog prenosa.** **Završni**
  3. **Preslikajte jedan od komplementarnih pojaseva u  $\{z\}$ -ravan.** **Završni**
  4. **Šta su konture: stabilnosti, dozvoljenog vremena smirenja  $t_s = T_s = \frac{1}{\sigma}$ , dozvoljenog stepena oscilabilnosti?** **Završni**
- 

### Staging area

1. **Koji je modulišući, a koji noseći signal?** **Ispitivanje**
2. **Kako glasi prvi oblik kompleksnog lika  $F^*(s)$ ?** **Ispitivanje**
3. **Prava  $\gamma$ ?** **Ispitivanje**
4. **Gdje moraju ležati polovi podintegralne funkcije  $f(t)$ ?** **Ispitivanje**
5. **Zašto je  $\Omega$  važno, šta je perioda odabiranja?** **Ispitivanje**
6. **Koje su dvije zadaće D/A konvertora?** **Ispitivanje**
7. **Zašto je potrebno da D/A konvertor priguši više harmonike?** **Ispitivanje**
8. **Šta u praksi možemo uraditi i koje kolo za to koristimo?** **Ispitivanje**
9. **Zašto nam nije problem što ZOH propušta više harmonike?** **Ispitivanje**
10. **Koju smo pretpostavku napravili u drugom obliku kompleksnog lika  $F^*(s)$  i zašto?** **Ispitivanje**

11. Čime određujemo primarni pojas? **Ispitivanje**
12. Kad smo koristili teoremu uzorkovanja, odakle smo pročitali informaciju tako da je ne izgubimo?
13. Koja su praktična ograničenja na smanjenje vremena odabiranja? **Ispitivanje**
14. Šta se može zaključiti poređenjem frekventnih karakteristika NF filtera i kola zadržke nultog reda, koje su razlike? **Ispitivanje**

## Od prošlih generacija

1. Šta je perioda uzorkovanja i kako je određujemo za primarni pojas?
2. Kada je procesor moguće fizički realizovati? **Druga parcijala**
3. Šta je diskretna prenosna funkcija multivarijabilnog sistema, šta su joj članovi?
4. Upravlјivost sistema.
5. Upravlјivost multivarijabilnog sistema.
6. Kada za sistem kažemo da je stabilan?
7. Kako glasi DPF direktne grane u Nyquistovom kriteriju, koje uslove mora zadovoljavati?
8. Kojom funkcijom preslikavamo u Nyquistovom kriteriju i kako određujemo prirast argumenta?
9. Kada je procesor fizički ostvariv (pokazati na diferentnoj jednačini)? **Druga parcijala**
10. Kako se bira perioda uzorkovanja obzirom na primarni pojas?