Proyek Akhir

Aljabar Linear Elementer

Haris Herdiansyah - 140810240074

Tanggal Dikumpulkan: 19 Desember 2025

UNIVERSITAS PADJADJARAN
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
Program Studi S-1 Teknik Informatika

2025

Pertemuan 1

Diketahui matriks A, B, C, D, dan E memiliki ukuran sebagai berikut:

$$A : (3 \times 6), B : (6 \times 3), C : (3 \times 5), D : (5 \times 6), E : (3 \times 2)$$

Tentukan apakah ekspresi matriks berikut terdefinisi. Untuk yang terdefinisi berikan ukuran matriksnya hasilnya.

1. $tr(DE^T)$
2. $tr(BC)$

Jawaban:

1. Matriks DE^T adalah perkalian dua matriks antara matriks D dan E^T. Ordo matriks E adalah 3×2 dan setelah ditranspos (E^T) menjadi 2×3. Matriks DE^T **tidak terdefinisi** karena syarat perkalian dua matriks adalah kolom matriks pertama harus sama dengan baris matriks kedua. Ekspresi ordo matriks D dan E tidak memenuhi syarat tersebut.
2. Matriks BC terdefinsi karena syarat perkalian dua matriks terpenuhi, di mana kolom matriks B adalah 3 dan baris matriks C adalah 3 sehingga operasi perkalian dapat dikerjakan.

Pertemuan 2

Diketahui matriks A, B, C, D, dan E sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 6 & 9 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 8 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Tentukan hasil dari ekspresi berikut jika matriks terdefinsi:

1. $B^T CC^T - A^T A$
2. $D^T E^T - (ED)^T$

Jawaban:

Untuk memudahkan perhitungan selanjutnya, cari terlebih dahulu transpose dari setiap matriks. **Transpose matriks** adalah bentuk matriks di mana posisi baris ditukar posisi ke bawah menjadi kolom, begitu juga untuk posisi kolom ditukar posisi ke samping menjadi baris, hal ini juga akan mengubah ordo matriks jika bukan matriks persegi.

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad B^T = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}, \quad C^T = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 7 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$D^T = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 9 \end{bmatrix}, \quad E^T = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 4 \\ 8 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

1. Hitung $A^T A$:

$$A^T A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (4+16+25) & (2-12+0) \\ (2-12+0) & (1+9+0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45 & -10 \\ -10 & 10 \end{bmatrix}$$

Hitung CC^T:

$$CC^T = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 7 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 7 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (16+4+0) & (4-14+0) \\ (4-14+0) & (1+49+9) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & -10 \\ -10 & 59 \end{bmatrix}$$

Hitung $B(CC^T)$:

$$B^T(CC^T) = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 & -10 \\ -10 & 59 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-20-20) & (10+118) \\ (100-40) & (-50+236) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40 & 128 \\ 60 & 186 \end{bmatrix}$$

Hitung hasil akhir:

$$\begin{bmatrix} -40 & 128 \\ 60 & 186 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 45 & -10 \\ -10 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -85 & 138 \\ 70 & 176 \end{bmatrix}$$

Dapat dilihat bahwa perkalian matriks menghasil ordo baru yang bernilai baris matriks pertama $\times$ kolom matriks kedua.

2. Hitung dulu $D^T E^T$:

$$D^T E^T = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 4 \\ 8 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$D^T E^T = \begin{bmatrix} (7)(-3)+(-2)(0)+(1)(8) & (7)(2)+(-2)(5)+(1)(1) & (7)(-1)+(-2)(4)+(1)(6) \\ (1)(-3)+(0)(0)+(6)(8) & (1)(2)+(0)(5)+(6)(1) & (1)(-1)+(0)(4)+(6)(6) \\ (3)(-3)+(4)(0)+(9)(8) & (3)(2)+(4)(5)+(9)(1) & (3)(-1)+(4)(4)+(9)(6) \end{bmatrix}$$

$$D^T E^T = \begin{bmatrix} -13 & 5 & -9 \\ 45 & 8 & 35 \\ 63 & 35 & 67 \end{bmatrix}$$

Hitung ED:

$$ED = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 8 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & 4 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

$$ED = \begin{bmatrix} (-3)(7)+(0)(-2)+(8)(1) & (-3)(1)+(0)(0)+(8)(6) & (-3)(3)+(0)(4)+(8)(9) \\ (2)(7)+(5)(-2)+(1)(1) & (2)(1)+(5)(0)+(1)(6) & (2)(3)+(5)(4)+(1)(9) \\ (-1)(7)+(4)(-2)+(6)(1) & (-1)(1)+(4)(0)+(6)(6) & (-1)(3)+(4)(4)+(6)(9) \end{bmatrix}$$

$$ED = \begin{bmatrix} -13 & 45 & 63 \\ 5 & 8 & 35 \\ -9 & 35 & 67 \end{bmatrix}$$

Hitung hasil akhir:

$$D^T E^T - (ED)^T = \begin{bmatrix} -13 & 5 & -9 \\ 45 & 8 & 35 \\ 63 & 35 & 67 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -13 & 5 & -9 \\ 45 & 8 & 35 \\ 63 & 35 & 67 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pertemuan 3

Tentukan apakah matriks-matriks berikut adalah:

- Matriks Eselon Baris
- Matriks Eselon Baris Tereduksi
- Keduanya
- atau Bukan Keduanya

1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Jawaban:

Matriks eselon baris dan matriks eselon baris tereduksi adalah bentuk matris yang telah dimodifikasi dengan operasi baris elementer (perkalian skalar, penjumlahan terhadap kelipatan, dan penukaran baris). Matriks eselon baris adalah matriks yang menghasilkan matriks segitiga atas dengan nilai di titik diagonal adalah 1 yang selanjut disebut 1 utama. Matriks eselon baris tereduksi adalah matriks diagonal yang setiap nilai diagonalnya adalah 1.

1. Matriks eselon baris tereduksi karena terbentuk matriks diagonal dengan nilai setiap diagonalnya adalah 1

2. Keduanya karena matriks nol tidak melanggar syarat matriks eselon baris maupun matriks eselon baris tereduksi. Pada matriks eselon baris, baris nol harus ditempatkan paling bawah dan semua baris nol sudah pada tempat yang sesuai dan tidak ada 1 utama yang harus ditukar baris.

3. Matriks eselon baris karena nilai di atas 1 utama baris kedua tidak sama dengan nol, untuk menjadi matriks eselon baris tereduksi, nilai di atas dan di bawah 1 utama haruslah nol.

Pertemuan 4

1. Tentukan minor dan kofaktor dari matriks A

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 3 & 0 \\ -4 & -9 & 1 \\ -7 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Hitung determinan dari matriks B

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 8 & -7 \\ -6 & 3 & 4 \\ 8 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

3. Tentukan semua nilai λ sehingga $det(A) = 0$

$$A = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{bmatrix}$$

4. Tentukan determinan dengan kofaktor

$$R = \begin{bmatrix} 2 & -7 & -3 \\ 1 & -8 & 0 \\ 6 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

Jawaban:

1. Minor adalah nilai determinan dari submatriks setelah mengeliminasi baris dan kolom tertentu, misalnya dicari minor di baris-i dan kolom-j (M_{ij}), maka kita "eliminasi" baris-i dan kolom-j lalu hitung determinan submatriksnya. Kofaktor sendiri adalah nilai yang melibatkan hasil perhitungan minor yang didapat melalui persamaan: $C_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$.

$$M_{11} = \begin{vmatrix} -9 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = (-9)(0) - (1)(5) = -5; \qquad C_{11} = (-1)^{1+1}(-5) = -5$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -7 & 0 \end{vmatrix} = (-4)(0) - (1)(-7) = 7; \qquad C_{12} = (-1)^{1+2}(7) = -7$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} -4 & -9 \\ -7 & 5 \end{vmatrix} = (-4)(5) - (-9)(-7) = -20 - 63 = -83; \qquad C_{13} = (-1)^{1+3}(-83) = -83$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = (3)(0) - (0)(5) = 0; \qquad C_{21} = (-1)^{2+1}(0) = 0$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ -7 & 0 \end{vmatrix} = (8)(0) - (0)(-7) = 0; \qquad C_{22} = (-1)^{2+2}(0) = 0$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ -7 & 5 \end{vmatrix} = (8)(5) - (3)(-7) = 40 - (-21) = 61; \qquad C_{23} = (-1)^{2+3}(61) = -61$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -9 & 1 \end{vmatrix} = (3)(1) - (0)(-9) = 3; \qquad C_{31} = (-1)^{3+1}(3) = 3$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = (8)(1) - (0)(-4) = 8; \qquad C_{32} = (-1)^{3+2}(8) = -8$$

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ -4 & -9 \end{vmatrix} = (8)(-9) - (3)(-4) = -72 - (-12) = -60; \qquad C_{33} = (-1)^{3+3}(-60) = -60$$

2. Untuk mencari determinan matriks 3×3, masih memungkinkan untuk menggunakan metode sarrus, di mana perhitungan dilakukan dengan mengalikan diagonal ke arah kanan bawah untuk tiga kolom pertama dari sebelah kiri dan mengalikan diagonal ke arah kiri bawah untuk tiga kolom terakhir dari sebelah kanan.

$$det(B) = \left|\begin{array}{ccc|cc} 5 & 8 & -7 & 5 & 8 \\ -6 & 3 & 4 & -6 & 3 \\ 8 & 1 & 3 & 8 & 1 \end{array}\right|$$

$$det(B) = [(5)(3)(3) + (8)(4)(8) + (-7)(-6)(1)] - [(-7)(3)(8) + (5)(4)(1) + (8)(-6)(3)]$$

$$det(B) = (45 + 256 + 42) - (-168 + 20 - 144)$$

$$det(B) = 343 - (-292)$$

$$det(B) = 635$$

3. Soal ini dihitung menggunakan metode ekspansi kofaktor, di mana determinan dihitung dengan melibatkan konsep minor dan kofaktor, pertama dipilh satu baris dan satu kolom yang akan dieliminasi, lalu cari nilai kofaktornya dan hasil akrhinya adalah determinan dari matriks terkait.

   Metode ekspansi kofaktor juga digunakan untuk mencari nilai eigen, misal diambil baris 1 dan kolom 1.

$$(1-\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 4-\lambda \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

   Bagian 1:

$$(1-\lambda)[(4-\lambda)(3-\lambda) - (2)(-1)]$$

$$= (1-\lambda)[(12 - 4\lambda - 3\lambda + \lambda^2) + 2]$$

$$= (1-\lambda)[\lambda^2 - 7\lambda + 14]$$

   Bagian 2:

$$-2[(2)(3-\lambda) - (2)(1)]$$

$$= -2[6 - 2\lambda - 2]$$

$$= -2[4 - 2\lambda]$$

$$= -8 + 4\lambda$$

   Bagian 3:

$$1[(2)(-1) - (4-\lambda)(1)]$$

$$= 1[-2 - 4 + \lambda]$$

$$= \lambda - 6$$

   Gabungkan ketiganya:

$$(1-\lambda)(\lambda^2 - 7\lambda + 14) + (4\lambda - 8) + (\lambda - 6) = 0$$

$$(1-\lambda)(\lambda^2 - 7\lambda + 14) + (5\lambda - 14) = 0$$

$$(-\lambda^3 + 8\lambda^2 - 21\lambda + 14) + (5\lambda - 14) = 0$$

$$-\lambda^3 + 8\lambda^2 - 16\lambda = 0$$

Kalikan dengan -1:

$$\lambda^3 - 8\lambda^2 + 16\lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda^2 - 8\lambda + 16) = 0$$

$$\lambda(\lambda - 4)(\lambda - 4) = 0$$

$$\lambda(\lambda - 4)^2 = 0$$

$\therefore$ Sehingga didapat nilai-nilai eigennya adalah $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 4$

4. Implementasi metode ekspansi kofaktor pada matriks biasa di baris 1 dan kolom 1.

$$det(R) = 2\begin{vmatrix} -8 & 0 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & -8 \\ 6 & 8 \end{vmatrix}$$

$$det(R) = (2)(0) + (7)(0) - (3)(56)$$

$$det(R) = -168$$

Pertemuan 5

1. Selesaikan sistem persamaan linear berikut

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 7x_4 = 10 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 = -6 \end{cases}$$

2. Tentukan nilai konstanta k agar sistem persamaan berikut:

$$\begin{cases} x + y + kz = 1 \\ x + ky + z = 1 \\ kx + y + z = 1 \end{cases}$$

   (a) Memiliki tepat satu solusi.

   (b) Tidak memiliki solusi.

   (c) Memiliki solusi tak hingga.

Jawab:

1. Sistem persamaan linear, dapat diselesaikan dengan membentuk matriks lalu melakukan operasi baris elementer, untuk menyelesaikan SPL dengan matriks, susun terlebih dahulu augmented matrix atau matriks yang diperluas dengan melibatkan nilai konstantanya.

Bentuk augmented matrix dari SPL yang diketahui:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & -2 & 7 & 10 \\ -1 & -2 & 1 & -4 & -6 \end{array}\right]$$

Lakukan operasi baris elementer sampai ke bentuk matriks eselon baris tereduksi:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & -2 & 7 & 10 \\ -1 & -2 & 1 & -4 & -6 \end{array}\right] \xrightarrow{-2B1+B2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & -4 & -6 \end{array}\right] \xrightarrow{B1+B3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-3B2+B1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{B2+B3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Interpretasi solusi:

$$x_4 = 2$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = -2$$

$$x_1 = -2 - 2x_2 + x_3$$

Dapat dilihat kolom kedua (representasi x_2) dan kolom ketiga representasi (x_3) tidak memiliki pivot (1 utama) sehingga dikatan sebagai variabel bebas. Variabel bebas ini misalkan dengan solusi parametrik, misal $x_2 = s$ dan $x_3 = t$, maka:

$$x_1 = -2 - 2s + t$$

Solusi persamaan:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 - 2s - +t \\ s \\ t \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. Penyelesaian dilakukan dengan analisis determinan. Jika $det(A) \neq 0$, maka didapat solusi tunggal. Jika $det(A) = 0$, maka perlu diperiksa lebih lanjut apakah terdapat tak hingga solusi atau tidak ada solusi.

Bentuk matriks koefisien:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Hitung determinan dengan metode ekspansi kofaktor:

$$det(A) = 1(k-1) - 1(1-k) + k(1-k^2)$$

$$= k - 1 - 1 + k + k + k^3$$

$$= -k^3 + 3k - 2$$

Kalikan dengan -1

$$k^3 - 3k + 2$$

Cari pembuat 0 dengan mencari akar persamaan, pencarian akar menggunakan Metode Horner dan perlu diketahui salah satu bilangan pembuat nol dengan mengambil asumsi dari faktor konstanta (pada kasus ini adalah 2), yaitu $\{1, 2\}$.
Ambil 1 terlebih dahulu.

$$(1)^3 - 3(1) + 2 = 1 - 3 + 2 = 0 \qquad \textit{1 adalah akar}$$

Ambil koefisien persamaan, yaitu $\{1, 0, -3, 2\}$:

$$\begin{array}{c|ccccc} 1 & 1 & 0 & -3 & 2 & \\ & & 1 & 1 & -2 & + \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 & \end{array}$$

Didapatkan koefiesien baru $\{1, 1, -2\}$, buat persamaan baru:

$$k^2 + k - 2 = 0$$

Lanjutkan pencarian pembuat nol determinan:

$$(k-1)(k^2 + k - 2) = 0$$

$$(k-1)(k+2)(k-1) = 0$$

Maka didapat akar-akar persamaan (pembuat nol), yaitu $k = 1$ atau $k = -2$.

Analisis kasus

(a) Persamaan memiliki solusi tunggal/unik jika $det(A) \neq 0$ maka nilai k yang salah adalah $k \neq 1$ dan $k \neq -2$

(b) Uji salah satu akar, misal $k = 1$

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

Semua persamaan identik dan terdapat dua variabel bebas, maka SPL memiliki tak hingga solusi untuk $k = 1$

(c) Uji $k = -2$ Buat augmented matrix

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Lakukan operasi baris elementer hingga didapat bentuk matriks eselon baris tereduksi:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

Terdapat inkonsisten pada persamaan, sehingga SPL tidak memiliki solusi ketika $k = -2$

Pertemuan 6

1. Cari solusi non-trivial dari sistem persamaana linear homogen berikut

$$\begin{cases} 2x - y + 3z - w = 0 \\ x + 3y - 2z + 4w = 0 \\ 3x + 2y + z + 3w = 0 \end{cases}$$

2. Selesaikan sistem persamaan non-linear berikut:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ 2x^2 - y^2 + z^2 = 0 \\ x^2 + 2y^2 - 3z^2 = 19 \end{cases}$$

Gunakan $X = x^2$, $Y = y^2$, dan $Z = z^2$.

Jawaban:

1. Sistem persamaan linear homogen adalah sistem persamaan yang semua nilai konstantanya adalah nol. SPL homogen memiliki dua sifat pada solusi persamaannya, solusi trivial

dan solusi non-trivial. Solusi trivial adalah solusi di mana solusi bernilai nol ketika semua variabel juga bernilai nol yang berarti dapat dikatakan SPL konsisten (nilai masukkan nol akan menghasilkan keluaran nol). Solusi non-trivial adalah kondisi ketika SPL tidak konsisten, di mana ketika terdapat nilai selain nol menghasilkan keluaran nilai nol sehingga dikatakan SPL memilika tak hingga solusi.

Bentuk augmented matrix, pada SPL homogen, konstanta tidak perlu diikutsertakan menjadi kolom matriks paling kanan:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Lakukan operasi baris elementer hingga didapat bentuk matriks eselon baris tereduksi:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}B1} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{-B1+B2} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{7}{2} & -\frac{7}{2} & \frac{9}{2} \\ 3 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-3B1+B3} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{7}{2} & -\frac{7}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & \frac{7}{2} & -\frac{7}{2} & \frac{9}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{2}{7}B2} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{9}{7} \\ 0 & \frac{7}{2} & -\frac{7}{2} & \frac{9}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}B2+B1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{9}{7} \\ 0 & \frac{7}{2} & -\frac{7}{2} & \frac{9}{2} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{7}{2}B2+B3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{9}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Bentuk persamaan dari hasil operasi baris elementer:

$$x + z + \frac{1}{7}w = 0$$

$$x = -z - \frac{1}{7}w$$

$$y - z + \frac{9}{7}w = 0$$

$$y = z - \frac{9}{7}w$$

Dapat dilihat kolom ketiga dan keempat tidak memiliki pivot sehingga z dan w tidak memiliki solusi unik, variabel inilah yang kemudian sebagai variabel bebas karena bisa mengandung tak hingga solusi. Misal $z = s$ dan $w = t$:

$$x = -s - \frac{1}{7}t$$

$$y = s - \frac{9}{7}t$$

Bentuk solusi persamaan:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s - \frac{1}{7}t \\ s - \frac{9}{7}t \\ s \\ t \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -\frac{1}{7} \\ -\frac{9}{7} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. Bentuk augmented matrix:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 14 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 19 \end{array}\right]$$

Lakukan operasi baris elementer:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 14 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 19 \end{array}\right] \xrightarrow[-B1+B3]{-2B1+B2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 14 \\ 0 & -3 & -1 & -28 \\ 0 & 1 & -4 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{B2}\leftrightarrow\text{B3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 14 \\ 0 & 1 & -4 & 5 \\ 0 & -3 & -1 & -28 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{3B2+B3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 14 \\ 0 & 1 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & -13 & -13 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{1}{13}B3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 14 \\ 0 & 1 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[4B3+B2]{-B3+B1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 13 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-B2+B1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$X = 4; Y = 9; Z = 1$$

$$x^2 = 4; y^2 = 9; z^2 = 1$$

$$x = \pm 4; y = \pm 9; z = \pm 1$$

Pertemuan 7

1. Diketahui vektor di $\mathbb{R}^3$: $a = (-2, 4, 1), b = (3, 0, -5), c = (1, -2, 3)$
   Hitung vektor hasil dari:

   (a) $2a - 5a$

   (b) $2c - 3(b + 2a)$

2. Diketahui vektor di $\mathbb{R}^5$: $p = (4, 1, -2, 3, 0), q = (-1, 0, 5, 2, -3), r = (2, -3, 1, 0, 4)$
   Tentukan hasil dari operasi berikut:

(a) $(4p - 2q) - (3p + r)$

(b) $2(q - 3r + p) - q$

Jawaban:
Operasi dasar vektor (penjumlahan, perngurangan, dan perkalian dengan skalar) konsepnya mirip seperti matriks, di mana entri-entri yang dioperasikan adalah entri yang posisinya bersesuaian. Misal diketahui **u** dan **v**:

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$$

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$$

1. (a)

$$\begin{aligned} 2a - 5a &= 2(-2, 4, 1) - 5(-2, 4, 1) \\ &= (-4, 8, 2) - (-10, 20, 5) \\ &= (-4 - (-10), 8 - 20, 2 - 5) \\ &= (6, -12, -3) \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} b + 2a &= (3, 0, -5) + 2(-2, 4, 1) \\ &= (3, 0, -5) + (-4, 8, 2) \\ &= (3 - 4, 0 + 8, -5 + 2) \\ &= (-1, 8, -3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2c - 3(b + 2a) &= 2(1, -2, 3) - 3(-1, 8, -3) \\ &= (2, -4, 6) - (-3, 24, -9) \\ &= (2 - (-3), -4 - 24, 6 - (-9)) \\ &= (2 + 3, -28, 6 + 9) \\ &= (5, -28, 15) \end{aligned}$$

2. (a)

$$\begin{aligned} (4p - 2q) - (3p + r) &= 4p - 2q - 3p - r \\ &= (4p - 3p) - 2q - r \\ &= p - 2q - r \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
p-2q-r &= (4,1,-2,3,0)-2(-1,0,5,2,-3)-(2,-3,1,0,4)\\
&= (4,1,-2,3,0)+(2,0,-10,-4,6)+(-2,3,-1,0,-4)\\
&= (4+2-2, 1+0+3, -2-10-1, 3-4+0, 0+6-4)\\
&= (4,4,-13,-1,2)
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
2(q-3r+p)-q &= 2q-6r+2p-q\\
&= (2q-q)+2p-6r\\
&= q+2p-6r
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q+2p-6r &= (-1,0,5,2,-3)+2(4,1,-2,3,0)-6(2,-3,1,0,4)\\
&= (-1,0,5,2,-3)+(8,2,-4,6,0)+(-12,18,-6,0,-24)\\
&= (-1+8-12, 0+2+18, 5-4-6, 2+6+0, -3+0-24)\\
&= (-5,20,-5,8,-27)
\end{aligned}
$$

Pertemuan 8

1. Tentukan apakah pasangan vektor di $\mathbb{R}^4$ berikut saling ortogonal

$$\mathbf{u} = (2,-3,1,4) \text{ dan } \mathbf{v} = (3,2,0,-1)$$

2. Tentukan persamaan bidang yang melalui titik $P(2,-1,4)$ dan memiliki vektor normal $\mathbf{n} = (-3,5,2)$ dan tuliskan hasilnya dalam bentuk umum $ax+by+cz=d$

3. Tunjukkan bahwa kedua bidang berikut saling sejajar.

   - $2x-3y+4z=5$
   - $-4x+6y-8z=10$

4. Tunjukkan bahwa kedua bidang berikut saling tegak lurus.

   - $x+2y-3z=4$
   - $4x+y+2z=7$

5. Hitung panjang proyeksi vektor $\mathbf{u}$ ke arah vektor $\mathbf{v}$ jika diketahui:

$$\mathbf{u} = (4,-1,3) \text{ dan } \mathbf{v} = (2,2,1)$$

6. Diketahui vektor $\mathbf{u} = (2,5)$ dan vektor $\mathbf{a} = (4,3)$. Tentukan:

- Komponen vektor $\mathbf{u}$ yang sejajar dengan $\mathbf{a}$ (proyeksi vektor $\text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{u}$)
- Komponen vektor dari $\mathbf{u}$ yang ortogonal terhadap $\mathbf{a}$ (vektor sisa).

7. Hitung jarak tegak lurus dari titik $R(3, -4)$ ke garis $3x + 4y - 10 = 0$
8. Hitung jarak tegak lurus dari titik $Q(1, -2, 3)$ ke bidang $2x - y + 2z - 6 = 0$

Jawaban:

1. Dua vektor dikatakan saling ortogonal jika hasil kali titik (*dot product*) keduanya bernilai 0.

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (2)(3) + (-3)(2) + (1)(0) + (4)(-1)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 6 + (-6) + 0 + (-4)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 6 - 6 + 0 - 4$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -4$$

$\therefore$ Karena $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \neq 0$ maka vektor tidak saling ortogonal.

2. Persamaan bidang dicari menggunakan rumus bentuk titik-normal:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Di mana:

- (a, b, c) adalah vektor normal $\mathbf{n} = (-3, 5, 2)$
- (x_0, y_0, z_0) adalah koordinat titik yang dilalui $P(2, -1, 4)$
- Vektor normal sendiri adalah vektor yang posisinya tegak lurus terhadap suatu objek, objeknya dapat berupa bidang atau garis.

Substitusi nilai ke persamaan:

$$-3(x - 2) + 5(y - (-1)) + 2(z - 4) = 0$$

$$-3(x - 2) + 5(y + 1) + 2(z - 4) = 0$$

Distribusi perkalian:

$$-3x + 6 + 5y + 5 + 2z - 8 = 0$$

$$-3x + 5y + 2z + (6 + 5 - 8) = 0$$

$$-3x + 5y + 2z + 3 = 0$$

Dalam bentuk umum menjadi:

$$-3x + 5y + 2z = -3 \text{ atau } 3x - 5y - 2z = 3$$

3. Dua bidang dikatakan sejajar jika salah satu vektor normal tersebut adalah kelipatan skalar dari vektor normal yang lain.

   Vektor normal:

   $$\mathbf{n}_1 = (2, -3, 4) \text{ dan } \mathbf{n}_2(-4, 6, -8)$$

   Periksa hubungan kelipatan skalar:

   - Komponen x: $\frac{-4}{2} = -2$
   - Komponen y: $\frac{6}{-3} = -2$
   - Komponen z: $\frac{-8}{4} = -2$

   Didapat nilai skalar $k = -2$:

   $$(-4, 6, -8) = -2(2, -3, 4)$$

   $$\mathbf{n}_2 = -2\mathbf{n}_1$$

   $\therefore$ Karena $\mathbf{n}_2$ merupakan kelipatan skalar dari $\mathbf{n}_1$ maka kedua bidang sejajar.

4. Dua bidang dikatakan tegak lurus (ortogonal) hasil kali titik (*dot product*) dari kedua vektor normal bidang hasilnya 0.

   Identifikasi vektor normal:

   $$x + 2y - 3z = 4 \longrightarrow \mathbf{n}_1 = (1, 2, -3)$$

   $$4x + y + 2z = 7 \longrightarrow \mathbf{n}_2 = (4, 1, 2)$$

   Hitung hasil kali titik:

   $$\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = (1)(4) + (2)(1) + (-3)(2)$$

   $$\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 4 + 2 - 6$$

   $$\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0$$

   $\therefore$ Karena hasil kali titik bernilai 0, maka kedua bidang saling tegak lurus.

5. Panjang proyeksi adalah nilai skalar yang menunjukkan besaran panjang bayangan tegak lurus suatu vektor pada garis yang searah dengan vektor lainnya. Persamaan untuk mencari panjang proyeksi:

   $$||\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}|| = \frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|}{||\mathbf{v}||}$$

   Hitung hasil kali titik $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$:

   $$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (4)(2) + (-1)(2) + (3)(1)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 8 - 2 + 3$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 9$$

Hitung panjang vektor $\mathbf{v}$:

$$||\mathbf{v}|| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

$$||\mathbf{v}|| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}$$

$$||\mathbf{v}|| = \sqrt{4 + 4 + 1}$$

$$||\mathbf{v}|| = \sqrt{9}$$

$$||\mathbf{v}|| = 3$$

Hitung panjang proyeksi:

$$||\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}|| = \frac{|9|}{3}$$

$$||\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}|| = \frac{9}{3}$$

$$||\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}|| = 3$$

6. Proyeksi vektor adalah bayangan suatu vektor terhadap vektor lain yang searah, misal $\text{proj}_v u$ berarti ingin dicari proyeksi (bayangan) vektor $\mathbf{u}$ yang searah dengan vektor $\mathbf{v}$.

   - Persamaan untuk mencari proyeksi vektor:

     $$\text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}}{||\mathbf{a}||^2}\mathbf{a}$$

     Hitung hasil kali titik $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{a})$:

     $$\mathbf{u} \cdot \mathbf{a} = (2)(4) + (5)(3) = 23$$

     Hitung kuadrat panjang vektor $\mathbf{a}$:

     $$||a||^2 = (\sqrt{4^2 + 3^2})^2$$

     $$||a||^2 = 4^2 + 3^2$$

     $$||a||^2 = 16 + 9 = 25$$

     Hitung proyeksi vektor:

     $$\text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{u} = \frac{23}{25}(4, 3) = \left(\frac{92}{25}, \frac{69}{25}\right)$$

   - Komponen ortogonal adalah vektor asal dikurangi vektor proyeksi:

     $$\mathbf{w} = \mathbf{u} - \text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{w} = (2, 5) - \left(\frac{92}{25}, \frac{69}{25}\right)$$

$$\mathbf{w} = \left(2 - \frac{92}{25}, 5 - \frac{69}{25}\right)$$

$$\mathbf{w} = \left(\frac{50}{25} - \frac{92}{25}, \frac{125}{25} - \frac{69}{25}\right)$$

$$\mathbf{w} = \left(-\frac{42}{25}, \frac{56}{25}\right)$$

7. Persamaan jarak dari titik (x_1, y_1) ke garis $Ax + By + C = 0$ adalah:

$$D = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Identifikasi nilai:

$$x_1 = 3, y_1 = -4, A = 3, B = 4, C = -10$$

Substitusi ke persamaan:

$$D = \frac{|3(3) + 4(-4) - 10|}{\sqrt{3^2 + 4^2}}$$

$$D = \frac{|17|}{\sqrt{25}}$$

$$D = \frac{17}{5} = 3.4$$

8. Persamaan jarak dari titik (x_1, y_1, z_1) ke bidang $2x - y + 2z - 6 = 0$ adalah:

$$D = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Identifikasi nilai:

- Titik (x_1, y_1, z_1): $x_1 = 1, y_1 = -2, z_1 = 3$
- Koefisien bidang: $a = 2, b = -1, c = 2, d = -6$

Substitusi ke persamaan:

$$D = \frac{|2(1) + (-1)(-2) + 2(3) - 6|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 4^2}}$$

$$D = \frac{|4|}{\sqrt{9}} = \frac{4}{3}$$

Pertemuan 9

1. Tentukan basis ruang null dan basis ruang baris dari matriks A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & 3 & 7 \\ -1 & 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

2. Tentukan basis ruang baris dan basis ruang kolom melalui inspeksi

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Tentukan rank dan nullity dari matriks B

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & -2 & 8 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & -8 \end{bmatrix}$$

Jawaban:

1. **Ruang null** adalah basis-basis yang membuat masukkan nilai vektor bernilai nol. Secara prosedur, basis ruang null mirip seperti menyelesaikan SPL homogen, di mana diekspresikan dengan nol dan diidentifikasi variabel bebasnya.
   Ruang Baris sendiri adalah himpunan kombinasi linear dari baris-baris matriks. Basis ini adalah solusi unik yang bebas linear dan dapat membangun keseluruhan ruang baris. Secara prosedur, basis ruang baris mengambil baris tidak nol pada matriks.
   Lakukan operasi baris elementer hingga didapat bentuk matriks eselon baris:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & 3 & 7 \\ -1 & 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[B1+B3]{-2B1+B2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-B2+B3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   Ambil baris tidak nol sebagai basis ruang baris:

$$Row(A) = \{(1, -2, 1, 3), (0, 0, 1, 1)\}$$

   Menentukan basis ruang null:

$$x_3 + x_4 = 0 \longrightarrow x_3 = -x_4$$

$$x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0$$

$$x_1 = 2x_2 - x_3 - 3x_4$$

Misal $x_2 = s$ dan $x_4 = t$:

$$x_3 = -t$$

$$x_1 = 2s - (-t) - 3t$$

$$x_1 = 2s - 2t$$

Vektor solusi:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2s - 2t \\ s \\ -t \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Null(A) = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

2. **Ruang Kolom** mirip seperti ruang baris, di mana setiap nilai menjadi kombinasi linear yang dapat membangun keseluruhan ruang kolom. Ruang kolom juga menunjukkan semua keluaran nilai yang mungkin dihasilkan. Secara prosedur, dilihat terlebih dahulu kolom-kolom mana yang memuat pivot (1 utama), lalu nilainya diambil dari matriks asal berdasarkan kolom yang mempunya pivot.

$$Row(B) = \{(1, 5, 0, 2, -1), (0, 0, 1, -3, 4), (0, 0, 0, 1, 7)\}$$

$$Col(B) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

3. **Rank** adalah jumlah vektor baris tidak nol pada sebuah matriks. Adapun, **nullity** adalah kebalikan dari rank yang mencari vektor nol. Nilai rank dan nullity sama-sama membangun dimensi vektor sehingga Rank + Nullity = Dimensi Ruang.
Lakukan operasi baris elementer

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & -2 & 8 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & -8 \end{bmatrix} \xrightarrow[B1+B4]{\substack{-2B1+B2 \\ -B1+B3}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{B2}\leftrightarrow\text{B3}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-B2+B4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Jumlah baris tidak nol:

$$Rank(B) = 2$$

Menentukan nullity:

$$\text{Total kolom } (n) = 4$$

$$Nullity = Rank(B) - n = 4 - 2 = 2$$

Pertemuan 10

1. Diketahui matriks A

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   Tentukan:

   (a) Persamaan karakteristik dari matriks A.

   (b) Nilai-nilai eigen dari matriks A.

   (c) Basis ruang eigen yang bersesuaian dengan setiap nilai eigen.

2. Diketahui matriks B

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

   Tentukan:

   (a) Tentukan matriks P yang mendiagonalisasi B.

   (b) Tentukan matriks diagonal D.

Jawaban:

1. Ruang eigen adalah ruang vektor hasil transformasi yang melibatkan nilai-nilai eigen, di mana hasil transformasi hanya berubah secara skalar. Persamaan karakteristik adalah persamaan muncul melalui persamaan transformasi linear:

$$Av = \lambda v$$

$$Av - \lambda v = 0$$

$$A(v - I\lambda) = 0$$

Dapat dilihat, nilai λ dikalikan dengan I atau matriks identitas karena pada dasarnya lambda adalah skalar. Persamaan karakteristik adalah determinan dari $A(v-I\lambda)$ di mana determinan harus bernilai nol.
Nilai eigen adalah nilai-nilai yang memenuhi persamaan untuk membangun basis eigen. Basis ruang eigen adalah vektor yang bersesuaian dengan setiap nilai eigen untuk membangun ruang eigen.

(a) Mencari persamaan karakteristik:

$$det\left(\begin{bmatrix}\lambda-4 & 0 & -1\\ 2 & \lambda-1 & 0\\ 2 & 0 & \lambda-1\end{bmatrix}\right)=0$$

Lakukan ekspansi kofaktor sepanjang kolom ke-2:

$$(\lambda-1)\cdot\det\begin{bmatrix}\lambda-4 & -1\\ 2 & \lambda-1\end{bmatrix}=0$$

$$(\lambda-1)[(\lambda-4)(\lambda-1)-(-1)(2)]=0$$

$$(\lambda-1)[\lambda^2-5\lambda+4+2]=0$$

$$(\lambda-1)[\lambda^2-5\lambda+6]=0$$

$$(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)=0$$

(b) Berdasarkan hasil pemfaktoran, nilai-nilai eigennya adalah:

$$\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=3$$

(c) Basis ruang eigen

2. Dalam konteks ruang eigen, matriks P adalah matriks yang dibangun dari basis-basis ruang eigen sehingga memenuhi $A=PDP^{-1}$. Adapun matriks D sendiri adalah matriks diagonal yang setiap nilai diagonalnya diambil dari nilai-nilai eigen.

(a) Matriks P dibangun dari vektor-vektor eigen sehingga cari terlebih dahulu vektor-vektor eigennya.

$$I\lambda-B=\begin{bmatrix}\lambda-2 & 0 & 0\\ 0 & \lambda-3 & -1\\ 0 & -1 & \lambda-3\end{bmatrix}$$

Cari determinan $det(I\lambda-B)$:

$$det(I\lambda-B)=(\lambda-2)\cdot\begin{vmatrix}\lambda-3 & 1\\ 1 & \lambda-3\end{vmatrix}$$

$$det(I\lambda - B) = (\lambda - 2)((\lambda - 3)(\lambda - 3) - 1)$$

$$det(I\lambda - B) = (\lambda - 2)(\lambda^2 - 6\lambda + 9 - 1)$$

$$det(I\lambda - B) = (\lambda - 2)(\lambda^2 - 6\lambda + 8)$$

$$det(I\lambda - B) = (\lambda - 2)(\lambda - 2)(\lambda - 4)$$

Didapat nilai eigennya adalah $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 4$. Tentukan vektor-vektor eigennya:

- $\lambda = 2$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -y - z \\ -y - z \end{bmatrix}$$

  Misal $x = s, z = t$:

$$-y - t = 0$$

$$y = -t$$

  Vektor eigen untuk $\lambda = 2$:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ -t \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- $\lambda = 4$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ y - z \\ -y + z \end{bmatrix}$$

$$2x = 0 \longrightarrow x = 0$$

$$y - z = 0 \longrightarrow y = z$$

  Misal $z = t$, maka $y = t$. Vektor eigen untuk $\lambda = 4$:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

  Sehinggga matriks P adalah:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) Matriks diagonal D adalah matriks yang entri diagonalnya diambil dari nilai-nilai eigen ($\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 4$):

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Pertemuan 11

1. Misalkan $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ adalah suatu pemetaan yang didefinisikan oleh rumus:

$$T(x, y, z) = (x - 2y, 2y + z)$$

   (a) Tunjukkan bahwa T adalah transformasi linear

   (b) Tentukan basis dari Kernel T

2. Misalkan $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ adalah transformasi linear yang didefinisikan oleh perkalian matriks $T(x) = A(x)$, di mana:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

   (a) Tentukan Rank dari transformasi T

   (b) Tentukan Nullity dari transformasi T

Jawaban:

1. (a) Sebuah transformasi linear harus memenuhi dua syarat, yaitu aditivitas ($T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$) dan homogenitas ($T(k\mathbf{u}) = kT(\mathbf{u})$)

   - Aditivitas:
     Misalkan $\mathbf{u} = (x_1, y_1, z_1)$ dan $\mathbf{v} = (x_2, y_2, z_2)$

$$T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

$$= ((x_1 + x_2) - 2(y_1 + y_2), 2(y_1 + y_2) + (z_1 + z_2))$$

$$= ((x_1 - 2y_1) + (x_2 - 2y_2), (2y_1 + z_1) + (2y_2 + z_2))$$

$$= T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$$

   - Homogenitas:

$$T(kx, ky, kz) = (kx - 2ky, 2ky + kz)$$

$$= k(x - 2y, 2y + z)$$

$$= kT(x, y, z)$$

   $\therefore T$ adalah transformasi linear.

(b) Kernel adalah himpunan vektor di mana hasil transformasi adalah nol ($T(x, y, z) = (0, 0)$)

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \longrightarrow x = 2y \\ 2y + z = 0 \longrightarrow z = -2y \end{cases}$$

Misal $y = s$:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2s \\ s \\ -2s \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$\therefore Ker(T) = \{(2, 1, -2)\}$

2. Ubah matriks A ke bentuk matriks eselon baris sebelum mencari rank dan nullity.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{2B1+B2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{B2}\leftrightarrow\text{B3}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) $Rank(T)$ diambil dari jumlah baris tidak nol $\{(1, -1, 2), (0, 1, 3)\}$ sehingga $Rank(T) = 2$.

(b) $Nullity(T)$ diambil dari jumlah kolom yang tidak memenuhi pivot $\{[2\ 3\ 0]^T\}$ sehingga $Nullity(T) = 1$

Adapun teorema dimensi, di mana $dim(T) = Rank(T) + Nullity(T)$ dan $dim(T) = 3$ (karena domainnya $\mathbb{R}^3$), maka:

$$dim(T) = Rank(T) + Nullity(T)$$

$$3 = 2 + 1$$

$\therefore$ Teorema dimensi terpenuhi.

Pertemuan 12

1. Misalkan V adalah himpunan semua pasangan bilangan real (x, y) di $\mathbb{R}^2$. Operasi penjumlahan didefinisikan secara standar, yaitu:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2)$$

Namun, operasi perkalian skalar didefinsikan sebagai berikut:

$$k(x, y) = (kx, 0)$$

Tentukan apakah V merupakan ruang vektor atau bukan

2. Misalkan W adalah himpunan semua matriks 2×2 di mana $tr(M) = 1$.

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2\times 2} \;\middle|\; a + d = 1 \right\}$$

Dengan operasi penjumlahan dan perkalian skalar standar matriks, apakah himpunan W merupakan ruang vektor atau bukan

Jawaban:

Sebuah ruang vektor harus memenuhi sepuluh aksioma ruang vektor yang diantaranya:

- Tertutup pada penjumlahan

$$u, v \in V : u + v \in V$$

- Komutatif pada penjumlahan

$$u, v \in V : u + v = v + u$$

- Asosiatif pada penjumlahan

$$u, v, w \in V : (u + v) + w = u + (v + w)$$

- Elemen identitas, penjumlahan dengan vektor nol tidak akan mengubah nilai

$$0, v \in V : 0 + v = v + 0 = v$$

- Tertutup pada perkalian skalar

$$k \in \mathbb{R}, v \in V : kv \in V$$

- Distributif terhadap penjumlahan vektor

$$k \in \mathbb{R}, u, v \in V : k(u + v) = ku + kv$$

- Distributif terhadap penjumlahan skalar

$$k, l \in \mathbb{R}, u \in V : (k + l)u = ku + lu$$

- Asosiatif terhadap perkalian skalar

$$k, l \in \mathbb{R}, u \in V : k(lv) = (kl)v$$

- Identitas skalar

$$v \in V : 1v = v$$

- Invers penjumlahan
$$v, -v \in V : v + (-v) = 0$$

Jika ada salah satu aksioma yang tidak terpenuhi, maka himpunan yang diketahui bukan lagi ruang vektor.

1. Himpunan V bukanlah ruang vektor. Himpunan V tidak memenuhi aksioma $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$. Misalkan $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$:
$$1\mathbf{u} = \mathbf{u}$$
$$1(u_1, u_2) = (u_1, u_2)$$
$$(u_1, u_2) \neq (u_1, 0)$$

2. Himpunan W bukanlah ruang vektor. Himpunan W tidak memenuhi aksioma $kV \in \mathbb{R}$. Ambil sembarang V dan k dengan $k \neq 1$
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, k = 2$$
$$kA = 2 \cdot \begin{bmatrix} 2(1) & 2(0) \\ 2(0) & 2(0) \end{bmatrix}$$
$$kA = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$tr(kA) = 2 + 0 = 2$$
Himpunan W hanya akan memiliki $tr(M) = 1$ jika dan hanya jika $k = 1$ sedangkan hal tersebut tidak memenuhi untuk $k \in \mathbb{R}$

Pertemuan 13

1. Diketahui W adalah himpunan semua vektor di $\mathbb{R}^3$ yang memenuhi persamaan linear homogen $x - 2y + 3z = 0$.
$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 0\}$$
Buktikan bahwa W adalah subruang dari $\mathbf{R}^3$.

2. Diketahui D adalah himpunan semua matriks diagonal berukuran 2×2. Matriks diagonal adalah matriks di mana entri di luar diagonal utama bernilai nol.
$$D = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \middle| \ a, b \in \mathbb{R} \right\}$$
Buktikan bahwa D adalah subruang dari ruang vektor $M_{2\times 2}$.

3. Diketahui S adalah himpunan semua P_2 yang bernilai nol ketika $x = 1$.

$$S = \{p(x) = ax^2 + bx + c \mid p(1) = 0\}$$

Buktikan bahwa S adalah subruang dari P_2.

Jawaban: Subruang vektor tidak jauh berbeda dengan ruang vektor sebelumnya, hanya saja subruang vektor hanya perlu memenuhi empat aksioma saja.

1. $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 0\}$

   - Akan dibuktikan jika $W \neq \{\}$ Misal diambil vektor nol: $0 = (0, 0, 0)$. Substitusi ke persamaan

     $$x - 2y + 3z = 0$$
     $$0 - 2(0) + 3(0) = 0$$
     $$0 = 0$$

     $\therefore W$ bukan himpunan kosong.
   - $\therefore W \in \mathbb{R}^3$
   - Akan dibuktikan jika W tertutup pada penjumlahan $(\mathbf{u} + \mathbf{v} \in W)$. Misal $\mathbf{u} = (x_1, y_1, z_1)$ dan $\mathbf{v} = (x_2, y_2, z_2)$.

     $$\mathbf{u} + \mathbf{v} = 0$$
     $$(x_1 + x_2) - 2(y_1 + y_2) + 3(z_1 + z_2) = 0$$
     $$(x_1 - 2y_1 + 3z_1) + (x_2 - 2y_2 + 3z_2) = 0$$
     $$0 = 0$$

     $\therefore W$ tertutup pada penjumlahan.
   - Akan dibuktikan jika W tertutup pada perkalian skalar.

     $$k\mathbf{u} = 0$$
     $$k(x_1 - 2y_1 + 3z_1) = 0$$
     $$k(0) = 0$$
     $$0 = 0$$

     $\therefore W$ tertutup pada perkalian skalar.
     Sehingga W adalah subruang di $\mathbb{R}^3$.

2. $D = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\}$

- Akan dibuktikan jika $D \neq \{\}$ Misal diambil matriks nol, di mana $a = 0$ dan $b = 0$, maka:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

  $\therefore D$ bukan himpunan kosong dan nilai di luar diagonal tetap nol.

- $\therefore D \in M_{2\times 2}$

- Akan dibuktikan jika D tertutup pada penjumlahan. Misal diambil matriks A dan B:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & 0 + 0 \\ 0 + 0 & b_1 + b_2 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & 0 \\ 0 & b_1 + b_2 \end{bmatrix}$$

  $\therefore D$ tertutup pada penjumlahan.

- Akan dibuktikan jika D tertutup pada perkalian skalar.

$$kA = k \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_1 & 0 \\ 0 & kb_1 \end{bmatrix}$$

  $\therefore D$ tertutup pada perkalian skalar.
  Sehingga D adalah subruang di $M_{2\times 2}$

3. $S = \{p(x) = ax^2 + bx + c \mid p(1) = 0\}$

   - Uji dengan polinomial nol.

$$0(x) = 0x^2 + 0x + 0 = 0$$

     $\therefore$ Dengan nilai $x = 1$, polinomial akan tetap bernilai nol sehingga S bukan himpunan kosong.

   - S adalah ruang vektor dengan derajat terbesar 2 sehingga $S \in P_2$.

   - Akan dibuktikan jika D tertutup pada penjumlahan. Misal diambil $p(x)$ dan $q(x)$ di mana $p(1) = 0$ dan $q(1) = 0$.

$$r(x) = (p + q)(x) = p(x) + q(x)$$

     . Periksa nilai di $x = 1$:

$$r(1) = p(1) + q(1) = 0 + 0 = 0$$

$\therefore S$ tertutup pada penjumlahan.

- Akan dibuktikan jika S tertutp pada perkalian skalar. Misal $p(x) \in S$ dan $k \in \mathbb{R}$.

$$m(x) = (kp)(x) = k \cdot (x)$$

Periksa nilai di $x = 1$:

$$m(1) = k \cdot (1) = k \cdot 0 = 0$$

$\therefore S$ tertutup pada perkalian skalar.
Sehingga S adalah subruang P_2.

Pertemuan 14

1. Diketahui himpunan vektor $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ di ruang $\mathbb{R}^3$ dengan:

$$v_1 = (1, 0, 1),\ v_2 = (0, 1, 1)\ v_3 = (1, 1, 0)$$

   (a) Tunjukkan bahwa himpunan B adalah basis untuk $\mathbb{R}^3$.

   (b) Tentukan koordinat vektor $\mathbf{u} = (3, 5, 2)$ relatif terhadap basis B atau $(\mathbf{u})_B$.

2. Diketahui himpunan vektor $S = \{u_1, u_2, u_3\}$ sebagai berikut:

$$u_1 = (1, -2, 3),\ v_2 = (2, 1, -1)\ v_3 = (3, -1, 2)$$

   Periksa apakah himpunan S bebas linear atau bergantung linear

Jawaban:

1. Basis adalah kondisi di mana sebuah vektor dalam sebuah himpunan memenuhi dua syarat, yaitu membangun dan bebas linear. Adapun secara teorema, matriks-matriks yang bebas linear, memiliki determinan $\neq 0$ sehingga dapat dikatakan ketika $det(A) \neq 0$ merupakan sebuah basis.

   (a) B adalah basis di $\mathbb{R}^3$ jika determinan $\neq 0$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$det(A) = 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 0 + 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1(0 - 1) + 1(0 - 1)$$

$$= -1 - 1 = -2$$

$\therefore B$ merupakan basis untuk $\mathbb{R}^3$ dengan $det(A) = -2 \neq 0$.

(b) Koordinat $(\mathbf{u}_B)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_3 \\ k_2 + k_3 \\ k_1 + k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Didapat sistem persamaan linear sebagai berikut:

$$k_1 + k_3 = 3$$

$$k_2 + k_3 = 5$$

$$k_1 + k_2 = 2$$

Lakukan manipulasi aljabar:

$$k_2 + k_3 = 5 \Rightarrow k_3 = 5 - k_2$$

$$k_1 + 5 - k_2 = 3 \Rightarrow k_1 - k_2 = -2 \Rightarrow k_1 = k_2 - 2$$

$$k_2 - 2 + k_2 = 2 \Rightarrow 2k_2 = 4 \Rightarrow k_2 = 2$$

Substitusi $k_2 = 2$:

$$k_3 = 5 - 2 \Rightarrow k_3 = 3$$

$$k_1 = 2 - 2 \Rightarrow k_1 = 0$$

$\therefore$ Sehingga koordinat $(\mathbf{u}_B) = (0, 2, 3)$

2. Suatu matriks dikatakan bebas linear jika memuat solusi trivial atau solusi unik. Adapun, matriks yang bergantung linear adalah ketika matriks memuat solusi non-trivial di mana pivotnya adalah 0 sehingga nilai determinan menjadi 0. Maka dari itu, dapat dikatakan jika $det(A) = 0$ matriks tersebut bergantung linear.
Susun matriks M lalu uji determinan:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(M) &= 1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 1(2-1) - 2(-4-(-3)) + 3(2-3) \end{aligned}$$

$$= 1(1) - 2(-1) + 3(-1)$$

$$= 1 + 2 - 3 = 0$$

$\therefore$ Karena $det(M) = 0$ maka vektor-vektor yang diketahui bergantung linear.

Pertemuan 15

1. Misalkan $u = (u_1, u_2)$ dan $v = (v_1, v_2)$ adalah vektor di $\mathbb{R}^2$ dan diketahui:

$$\langle u, v \rangle = 3u_1v_1 + 2u_2v_2$$

   Jika diketahui vektor $\mathbf{a} = (2, -3)$ dan $\mathbf{b} = (1, 4)$, hitunglah nilai $\langle a, b \rangle$ dengan definisi di atas.

2. Pada ruang vektor $M_{2\times 2}$ hasil kali dalam standar didefinisikan sebagai berikut:

$$\langle A, B \rangle = tr(A^T B)$$

   Hitung $\langle A, B \rangle$ jika diketahui:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

3. Diketahui basis $S = \{u_1, u_2\}$ untuk ruang vektor $\mathbb{R}^2$ dengan vektor:

$$u_1 = (1, 1) \text{ dan } u_2 = (0, 2)$$

   Gunakan proses Gram-Schmidt untuk mengubhas basis S menjadi basis ortogonal.

Jawaban:

1. $\langle a, b \rangle$ adalah notasi untuk ruang hasil kali dalam, di mana persamaan tersebut mendefinisikan operasi kali titik (*dot product*) dengan perluasan aturan tertentu.

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 3(2)(1) + 2(-3)(4) = 6 + (-24) = -18$$

2. Cari dahulu A^T

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^T B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2+0) & (0+0) \\ (4+1) & (0-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{tr}(A^T B) = 2 + (-1) = 1$$

3. Basis ortogonal adalah basis di mana setiap vektornya saling tegak lurus. Vektor yang saling tegak lurus ini akan bernilai nol ketika dioperasikan dengan kali titik (*dot product*). Adapun, basis ortonormal di mana setiap basisnya saling ortogonal dan panjang vektornya adalah 1.
   Gram-schmidt adalah metode yang melibatkan konsep vektor proyeksi untuk membuat sekumpulan vektor yang bebas linear menjaid basis ortogonal.

   (a) Tetapkan u_1 sebagai v_1

   $$v_1 = u_1$$

   (b) Hitung v_2

   $$\begin{aligned} v_2 &= u_2 - proj_{v_1} u_2 \\ &= u_2 - \frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{||v_1||^2} v_1 \end{aligned}$$

   Hitung $\langle u_2, v_1 \rangle$:

   $$u_2 \cdot v_1 = (0)(1) + (2)(1) = 2$$

   Hitung $||v_1||^2$:

   $$||v_1||^2 = (\sqrt{1^2 + 1^2})^2 = (\sqrt{2})^2 = 2$$

   Hitung $proj_{v_1} u_2$:

   $$\begin{aligned} proj_{v_1} u_2 &= \frac{2}{2} \cdot (1, 2) \\ &= (1, 1) \end{aligned}$$

   Hitung persamaan akhir untuk mendapatkan v_2:

   $$\begin{aligned} v_2 &= u_2 - (1, 1) \\ &= (0, 2) - (1, 1) \\ &= (0 - 1, 2 - 1) \\ &= (-1, 1) \end{aligned}$$

   (c) Didapat $v_1 = (1, 1)$ dan $v_2 = (-1, 1)$

   Verifikasi ortogonalitas (ketika hasil kali titik bernilai nol):

   $$\begin{aligned} \langle v_1, v_2 \rangle &= (1)(-1) + (1)(1) \\ &= -1 + 1 = 0 \end{aligned}$$