Proyek Akhir Aljabar Linear

Haris Herdiansyah

14 Desember 2025

Pertemuan 1

Diketahui matriks A, B, C, D, dan E memiliki ukuran sebagai berikut:

$$A : (3 \times 6), B : (6 \times 3), C : (3 \times 5), D : (5 \times 6), E : (3 \times 2)$$

Tentukan apakah ekspresi matriks berikut terdefinisi. Untuk yang terdefinisi berikan ukuran matriksnya hasilnya.

1. $tr(DE^T)$
2. $tr(BC)$

Jawab:

1. Matriks DE tidak terdefinsi karena syarat perkalian matriks adalah kolom matriks pertama **harus sama** dengan baris matriks kedua.
2. Matriks BC terdefinsi karena syarat kolom matriks pertama sama dengan baris matriks kedua terpenuhi. Ukuran matriks BC adalah baris matriks pertama dengan kolom matriks kedua, yaitu (6×5).

Pertemuan 2

Diketahui matriks A, B, C, D, dan E sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 6 & 9 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 8 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Tentukan hasil dari ekspresi berikut jika matriks terdefinsi:

1. $B^T CC^T - A^T A$
2. $D^T E^T - (ED)^T$

Jawab:

Untuk memudah perhitungan selanjutnya, cari terlebih dahulu transpose dari setiap matriks.

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad B^T = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}, \quad C^T = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 7 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$D^T = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 9 \end{bmatrix}, \quad E^T = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 4 \\ 8 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

1. Karena perkalian matriks tidak berlaku sifat komutatif, matriks B dan C tidak dapat dioperasikan sehingga tidak terdefinisi.

2.
$$D^T E^T = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 4 \\ 8 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$D^T E^T = \begin{bmatrix} (7)(-3)+(-2)(0)+(1)(8) & (7)(2)+(-2)(5)+(1)(1) & (7)(-1)+(-2)(4)+(1)(6) \\ (1)(-3)+(0)(0)+(6)(8) & (1)(2)+(0)(5)+(6)(1) & (1)(-1)+(0)(4)+(6)(6) \\ (3)(-3)+(4)(0)+(9)(8) & (3)(2)+(4)(5)+(9)(1) & (3)(-1)+(4)(4)+(9)(6) \end{bmatrix}$$

$$D^T E^T = \begin{bmatrix} -13 & 5 & -9 \\ 45 & 8 & 35 \\ 63 & 35 & 67 \end{bmatrix}$$

$$ED = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 8 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & 4 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

$$ED = \begin{bmatrix} (-3)(7)+(0)(-2)+(8)(1) & (-3)(1)+(0)(0)+(8)(6) & (-3)(3)+(0)(4)+(8)(9) \\ (2)(7)+(5)(-2)+(1)(1) & (2)(1)+(5)(0)+(1)(6) & (2)(3)+(5)(4)+(1)(9) \\ (-1)(7)+(4)(-2)+(6)(1) & (-1)(1)+(4)(0)+(6)(6) & (-1)(3)+(4)(4)+(6)(9) \end{bmatrix}$$

$$ED = \begin{bmatrix} -13 & 45 & 63 \\ 5 & 8 & 35 \\ -9 & 35 & 67 \end{bmatrix}$$

$$D^T E^T - (ED)^T = \begin{bmatrix} -13 & 5 & -9 \\ 45 & 8 & 35 \\ 63 & 35 & 67 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -13 & 5 & -9 \\ 45 & 8 & 35 \\ 63 & 35 & 67 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pertemuan 3

Tentukan apakah matriks-matriks berikut adalah:

- Matriks Eselon Baris
- Matriks Eselon Baris Tereduksi
- Keduanya
- atau Bukan Keduanya

1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Jawab:

1. Matriks Eselon Baris Tereduksi
2. Matriks Eselon Baris Tereduksi
3. Bukan Keduanya

Pertemuan 4

1. Tentukan minor dan kofaktor dari matriks A

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 3 & 0 \\ -4 & -9 & 1 \\ -7 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Hitung determinan dari matriks B

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 8 & -7 \\ -6 & 3 & 4 \\ 8 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

3. Tentukan semua nilai λ sehingga $det(A) = 0$

$$A = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{bmatrix}$$

4. Tentukan determinan dengan kofaktor

$$R = \begin{bmatrix} 2 & -7 & -3 \\ 1 & -8 & 0 \\ 6 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

Jawab:

1.

$$M_{11} = \begin{vmatrix} -9 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = (-9)(0) - (1)(5) = -5; \qquad C_{11} = (-1)^{1+1}(-5) = -5$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -7 & 0 \end{vmatrix} = (-4)(0) - (1)(-7) = 7; \qquad C_{12} = (-1)^{1+2}(7) = -7$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} -4 & -9 \\ -7 & 5 \end{vmatrix} = (-4)(5) - (-9)(-7) = -20 - 63 = -83; \qquad C_{13} = (-1)^{1+3}(-83) = -83$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = (3)(0) - (0)(5) = 0; \qquad C_{21} = (-1)^{2+1}(0) = 0$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ -7 & 0 \end{vmatrix} = (8)(0) - (0)(-7) = 0; \qquad C_{22} = (-1)^{2+2}(0) = 0$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ -7 & 5 \end{vmatrix} = (8)(5) - (3)(-7) = 40 - (-21) = 61; \qquad C_{23} = (-1)^{2+3}(61) = -61$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -9 & 1 \end{vmatrix} = (3)(1) - (0)(-9) = 3; \qquad C_{31} = (-1)^{3+1}(3) = 3$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = (8)(1) - (0)(-4) = 8; \qquad C_{32} = (-1)^{3+2}(8) = -8$$

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ -4 & -9 \end{vmatrix} = (8)(-9) - (3)(-4) = -72 - (-12) = -60; \qquad C_{33} = (-1)^{3+3}(-60) = -60$$

2. Metode Sarrus

$$det(B) = \left|\begin{array}{ccc|cc} 5 & 8 & -7 & 5 & 8 \\ -6 & 3 & 4 & -6 & 3 \\ 8 & 1 & 3 & 8 & 1 \end{array}\right|$$

$$det(B) = [(5)(3)(3) + (8)(4)(8) + (-7)(-6)(1)] - [(-7)(3)(8) + (5)(4)(1) + (8)(-6)(3)]$$

$$det(B) = (45 + 256 + 42) - (-168 + 20 - 144)$$

$$det(B) = 343 - (-292)$$

$$det(B) = 635$$

3. Metode Ekspansi Kofaktor

$$(1-\lambda)\begin{vmatrix}4-\lambda & 2\\ -1 & 3-\lambda\end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix}2 & 2\\ 1 & 3-\lambda\end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix}2 & 4-\lambda\\ 1 & -1\end{vmatrix}$$

Bagian 1:

$$(1-\lambda)[(4-\lambda)(3-\lambda)-(2)(-1)]$$

$$= (1-\lambda)[(12-4\lambda-3\lambda+\lambda^2)+2]$$

$$= (1-\lambda)[\lambda^2-7\lambda+14]$$

Bagian 2:

$$-2[(2)(3-\lambda)-(2)(1)]$$

$$= -2[6-2\lambda-2]$$

$$= -2[4-2\lambda]$$

$$= -8+4\lambda$$

Bagian 3:

$$1[(2)(-1)-(4-\lambda)(1)]$$

$$= 1[-2-4+\lambda]$$

$$= \lambda-6$$

Gabungkan ketiganya:

$$(1-\lambda)(\lambda^2-7\lambda+14)+(4\lambda-8)+(\lambda-6)=0$$

$$(1-\lambda)(\lambda^2-7\lambda+14)+(5\lambda-14)=0$$

$$(-\lambda^3+8\lambda^2-21\lambda+14)+(5\lambda-14)=0$$

$$-\lambda^3+8\lambda^2-16\lambda=0$$

Kalikan dengan -1:

$$\lambda^3-8\lambda^2+16\lambda=0$$

$$\lambda(\lambda^2-8\lambda+16)=0$$

$$\lambda(\lambda-4)(\lambda-4)=0$$

$$\lambda(\lambda-4)^2=0$$

$\therefore$ Sehingga didapat nilai-nilai eigennya adalah $\lambda_1=0, \lambda_2=4, \lambda_3=4$

4. Metode Ekspansi Kofaktor terhadap Baris 1

$$det(R) = 2\begin{vmatrix} -8 & 0 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & -8 \\ 6 & 8 \end{vmatrix}$$

$$det(R) = (2)(0) + (7)(0) - (3)(56)$$

$$det(R) = -168$$

Pertemuan 5

1. Selesaikan sistem persamaan linear berikut

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 7x_4 = 10 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 = -6 \end{cases}$$

2. Tentukan nilai konstanta k agar sistem persamaan berikut:

$$\begin{cases} x + y + kz = 1 \\ x + ky + z = 1 \\ kx + y + z = 1 \end{cases}$$

   (a) Memiliki tepat satu solusi.

   (b) Tidak memiliki solusi.

   (c) Memiliki solusi tak hingga.

Jawab:

1. Bentuk augmented matrix:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & -2 & 7 & 10 \\ -1 & -2 & 1 & -4 & -6 \end{array}\right]$$

Lakukan operasi baris elementer:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & -2 & 7 & 10 \\ -1 & -2 & 1 & -4 & -6 \end{array}\right] \xrightarrow{-2B1+B2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & -4 & -6 \end{array}\right] \xrightarrow{B1+B3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-3B2+B1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{B2+B3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Interpretasi solusi:

$$x_4 = 2$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = -2$$

$$x_1 = -2 - 2x_2 + x_3$$

Misal $x_2 = s$ dan $x_3 = t$, maka:

$$x_1 = -2 - 2s + t$$

Solusi persamaan:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 - 2s - +t \\ s \\ t \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. Penyelesaian dilakukan dengan analisis determinan. Jika $det(A) \neq 0$, maka didapat solusi tunggal. Jika $det(A) = 0$, maka perlu diperiksa lebih lanjut apakah terdapat tak hingga solusi atau tidak ada solusi.

   Bentuk matriks koefisien:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

   Hitung determinan:

$$det(A) = 1(k-1) - 1(1-k) + k(1-k^2)$$

$$= k - 1 - 1 + k + k + k^3$$

$$= -k^3 + 3k - 2$$

   Kalikan dengan -1

$$k^3 - 3k + 2$$

   Cari pembuat 0 dengan mencari akar persamaan, pencarian akar menggunakan Metode Horner dan perlu diketahui salah satu bilangan pembuat nol dengan mengambil asumsi dari faktor konstanta (pada kasus ini adalah 2), yaitu $\{1, 2\}$.

Ambil 1 terlebih dahulu.

$$(1)^3 - 3(1) + 2 = 1 - 3 + 2 = 0 \qquad \textit{1 adalah akar}$$

Ambil koefisien persamaan, yaitu $\{1, 0, -3, 2\}$:

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ & & 1 & 1 & -2 & + \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

Didapatkan koefiesien baru $\{1, 1, -2\}$, buat persamaan baru:

$$k^2 + k - 2 = 0$$

Lanjutkan pencarian pembuat nol determinan:

$$(k-1)(k^2 + k - 2) = 0$$

$$(k-1)(k+2)(k-1) = 0$$

Maka didapat akar-akar persamaan (pembuat nol), yaitu $k = 1$ atau $k = -2$.

Analisis kasus

(a) Persamaan memiliki solusi tunggal/unik jika $det(A) \neq 0$ maka nilai k yang salah adalah $k \neq 1$ dan $k \neq -2$

(b) Uji salah satu akar, misal $k = 1$

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

Semua persamaan identik dan terdapat dua variabel bebas, maka SPL memiliki tak hingga solusi untuk $k = 1$

(c) Uji $k = -2$ Buat augmented matrix

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Lakukan operasi baris elementer hingga didapat bentuk matriks eselon baris tereduksi:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

Terdapat inkonsisten pada persamaan, sehingga SPL tidak memiliki solusi ketika $k = -2$

Pertemuan 6

1. Cari solusi non-trivial dari sistem homogen berikut

$$\begin{cases} 2x - y + 3z - w = 0 \\ x + 3y - 2z + 4w = 0 \\ 3x + 2y + z + 3w = 0 \end{cases}$$

2. Selesaikan sistem persamaan non-linear berikut:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ 2x^2 - y^2 + z^2 = 0 \\ x^2 + 2y^2 - 3z^2 = 19 \end{cases}$$

Gunakan $X = x^2$, $Y = y^2$, dan $Z = z^2$.

Jawaban:

1. Bentuk matriks koefisien

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Lakukan operasi baris elementer hingga didapat bentuk matriks eselon baris tereduksi:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}B1} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{-B1+B2} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{7}{2} & -\frac{7}{2} & \frac{9}{2} \\ 3 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-3B1+B3} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{7}{2} & -\frac{7}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & \frac{7}{2} & -\frac{7}{2} & \frac{9}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{2}{7}B2} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{9}{7} \\ 0 & \frac{7}{2} & -\frac{7}{2} & \frac{9}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}B2+B1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{9}{7} \\ 0 & \frac{7}{2} & -\frac{7}{2} & \frac{9}{2} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{7}{2}B2+B3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{9}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Bentuk persamaan dari hasil OBE:

$$x + z + \frac{1}{7}w = 0$$

$$x = -z - \frac{1}{7}w$$

$$y - z + \frac{9}{7}w = 0$$

$$y = z - \frac{9}{7}w$$

Misal $z = s$ dan $w = t$:

$$x = -s - \frac{1}{7}t$$

$$y = s - \frac{9}{7}t$$

Bentuk solusi persamaan:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s - \frac{1}{7}t \\ s - \frac{9}{7}t \\ s \\ t \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -\frac{1}{7} \\ -\frac{9}{7} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. Bentuk augmented matrix:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 14 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 19 \end{array}\right]$$

Lakukan operasi baris elementer:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 14 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 19 \end{array}\right] \xrightarrow[-B1+B3]{-2B1+B2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 14 \\ 0 & -3 & -1 & -28 \\ 0 & 1 & -4 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{B2 \overset{B}{\longleftrightarrow} 3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 14 \\ 0 & 1 & -4 & 5 \\ 0 & -3 & -1 & -28 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{3B2+B3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 14 \\ 0 & 1 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & -13 & -13 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{1}{13}B3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 14 \\ 0 & 1 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[4B3+B2]{-B3+B1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 13 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-B2+B1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$X = 4; Y = 9; Z = 1$$

$$x^2 = 4; y^2 = 9; z^2 = 1$$

$$x = \pm 4; y = \pm 9; z = \pm 1$$

Pertemuan 7

1. Diketahui vektor di $\mathbb{R}^3$: $a = (-2, 4, 1), b = (3, 0, -5), c = (1, -2, 3)$
   Hitung vektor hasil dari:
   (a) $2a - 5a$
   (b) $2c - 3(b + 2a)$
2. Diketahui vektor di $\mathbb{R}^5$: $p = (4, 1, -2, 3, 0), q = (-1, 0, 5, 2, -3), r = (2, -3, 1, 0, 4)$
   Tentukan hasil dari operasi berikut:
   (a) $(4p - 2q) - (3p + r)$
   (b) $2(q - 3r + p) - q$

Jawaban:

1. (a)

$$\begin{aligned} 2a - 5a &= 2(-2, 4, 1) - 5(-2, 4, 1) \\ &= (-4, 8, 2) - (-10, 20, 5) \\ &= (-4 - (-10), 8 - 20, 2 - 5) \\ &= (6, -12, -3) \end{aligned}$$

   (b)

$$\begin{aligned} b + 2a &= (3, 0, -5) + 2(-2, 4, 1) \\ &= (3, 0, -5) + (-4, 8, 2) \\ &= (3 - 4, 0 + 8, -5 + 2) \\ &= (-1, 8, -3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2c - 3(b + 2a) &= 2(1, -2, 3) - 3(-1, 8, -3) \\ &= (2, -4, 6) - (-3, 24, -9) \\ &= (2 - (-3), -4 - 24, 6 - (-9)) \\ &= (2 + 3, -28, 6 + 9) \\ &= (5, -28, 15) \end{aligned}$$

2. (a)

$$\begin{aligned}(4p-2q)-(3p+r) &= 4p-2q-3p-r\\ &= (4p-3p)-2q-r\\ &= p-2q-r\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p-2q-r &= (4,1,-2,3,0)-2(-1,0,5,2,-3)-(2,-3,1,0,4)\\ &= (4,1,-2,3,0)+(2,0,-10,-4,6)+(-2,3,-1,0,-4)\\ &= (4+2-2,1+0+3,-2-10-1,3-4+0,0+6-4)\\ &= (4,4,-13,-1,2)\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}2(q-3r+p)-q &= 2q-6r+2p-q\\ &= (2q-q)+2p-6r\\ &= q+2p-6r\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}q+2p-6r &= (-1,0,5,2,-3)+2(4,1,-2,3,0)-6(2,-3,1,0,4)\\ &= (-1,0,5,2,-3)+(8,2,-4,6,0)+(-12,18,-6,0,-24)\\ &= (-1+8-12,0+2+18,5-4-6,2+6+0,-3+0-24)\\ &= (-5,20,-5,8,-27)\end{aligned}$$

Pertemuan 8

1. Tentukan apakah pasangan vektor di $\mathbb{R}^4$ berikut saling ortogonal

$$\mathbf{u} = (2,-3,1,4) \text{ dan } \mathbf{v} = (3,2,0,-1)$$

2. Tentukan persamaan bidang yang melalui titik $P(2,-1,4)$ dan memiliki vektor normal $\mathbf{n} = (-3,5,2)$ dan tuliskan hasilnya dalam bentuk umum $ax+by+cz=d$

3. Tunjukkan bahwa kedua bidang berikut saling sejajar.

   - $2x-3y+4z=5$
   - $-4x+6y-8z=10$

4. Tunjukkan bahwa kedua bidang berikut saling tegak lurus.

   - $x+2y-3z=4$

- $4x + y + 2z = 7$

5. Hitung panjang proyeksi vektor $\mathbf{u}$ ke arah vektor $\mathbf{v}$ jika diketahui:

$$\mathbf{u} = (4, -1, 3) \text{ dan } \mathbf{v} = (2, 2, 1)$$

6. Diketahui vektor $\mathbf{u} = (2, 5)$ dan vektor $\mathbf{a} = (4, 3)$. Tentukan:
   - Komponen vektor $\mathbf{u}$ yang sejajar dengan $\mathbf{a}$ (proyeksi vektor $\text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{u}$)
   - Komponen vektor dari $\mathbf{u}$ yang ortogonal terhadap $\mathbf{a}$ (vektor sisa).

7. Hitung jarak tegak lurus dari titik $R(3, -4)$ ke garis $3x + 4y - 10 = 0$

8. Hitung jarak tegak lurus dari titik $Q(1, -2, 3)$ ke bidang $2x - y + 2z - 6 = 0$

Jawaban:

1. Dua vektor dikatakan saling ortogonal jika hasil kali titik (*dot product*) keduanya bernilai 0.

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (2)(3) + (-3)(2) + (1)(0) + (4)(-1)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 6 + (-6) + 0 + (-4)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 6 - 6 + 0 - 4$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -4$$

$\therefore$ Karena $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \neq 0$ maka vektor tidak saling ortogonal.

2. Persamaan bidnag dicari menggunakan rumus bentuk titik-normal:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Di mana:

- (a, b, c) adalah vektor normal $\mathbf{n} = (-3, 5, 2)$
- (x_0, y_0, z_0) adalah koordinat titik yang dilalui $P(2, -1, 4)$

Substitusi nilai:per

$$-3(x - 2) + 5(y - (-1)) + 2(z - 4) = 0$$

$$-3(x - 2) + 5(y + 1) + 2(z - 4) = 0$$

Distribusi perkalian:

$$-3x + 6 + 5y + 5 + 2z - 8 = 0$$

$$-3x + 5y + 2z + (6 + 5 - 8) = 0$$

$$-3x + 5y + 2z + 3 = 0$$

Dalam bentuk umum menjadi:

$$-3x + 5y + 2z = -3 \text{ atau } 3x - 5y - 2z = 3$$

3. Dua bidang dikatakan sejajar jika salah satu vektor normal tersebut adalah kelipatan skalar dari vektor normal yang lain.

   Vektor normal:

   $$\mathbf{n}_1 = (2, -3, 4) \text{ dan } \mathbf{n}_2(-4, 6, -8)$$

   Periksa hubungan kelipatan skalar:

   - Komponen x: $\frac{-4}{2} = -2$
   - Komponen y: $\frac{6}{-3} = -2$
   - Komponen z: $\frac{-8}{4} = -2$

   Didapat nilai skalar $k = -2$:

   $$(-4, 6, -8) = -2(2, -3, 4)$$

   $$\mathbf{n}_2 = -2\mathbf{n}_1$$

   $\therefore$ Karena $\mathbf{n}_2$ merupakan kelipatan skalar dari $\mathbf{n}_1$ maka kedua bidang sejajar.

4. Dua bidang dikatakan tegak lurus (ortogonal) hasil kali titik (*dot product*) dari kedua vektor normal bidang hasilnya 0.

   Identifikasi vektor normal:

   $$x + 2y - 3z = 4 \longrightarrow \mathbf{n}_1 = (1, 2, -3)$$

   $$4x + y + 2z = 7 \longrightarrow \mathbf{n}_2 = (4, 1, 2)$$

   Hitung hasil kali titik:

   $$\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = (1)(4) + (2)(1) + (-3)(2)$$

   $$\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 4 + 2 - 6$$

   $$\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0$$

   $\therefore$ Karena hasil kali titik bernilai 0, maka kedua bidang saling tegak lurus.

5. Persamaan untuk mencari panjang proyeksi:

   $$||\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}|| = \frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|}{||\mathbf{v}||}$$

Hitung hasil kali titik $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (4)(2) + (-1)(2) + (3)(1)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 8 - 2 + 3$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 9$$

Hitung panjang vektor $\mathbf{v}$:

$$||\mathbf{v}|| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

$$||\mathbf{v}|| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}$$

$$||\mathbf{v}|| = \sqrt{4 + 4 + 1}$$

$$||\mathbf{v}|| = \sqrt{9}$$

$$||\mathbf{v}|| = 3$$

Hitung panjang proyeksi:

$$||\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}|| = \frac{|9|}{3}$$

$$||\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}|| = \frac{9}{3}$$

$$||\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}|| = 3$$

6. - Persamaan untuk mencari proyeksi vektor:

$$\text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}}{||\mathbf{a}||^2}\mathbf{a}$$

Hitung hasil kali titik $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{a})$:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{a} = (2)(4) + (5)(3) = 23$$

Hitung kuadrat panjang vektor $\mathbf{a}$:

$$||a||^2 = (\sqrt{4^2 + 3^2})^2$$

$$||a||^2 = 4^2 + 3^2$$

$$||a||^2 = 16 + 9 = 25$$

Hitung proyeksi vektor:

$$\text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{u} = \frac{23}{25}(4, 3) = \left(\frac{92}{25}, \frac{69}{25}\right)$$

- Komponen ortogonal adalah vektor asal dikurangi vektor proyeksi:

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} - \text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{w} = (2, 5) - \left(\frac{92}{25}, \frac{69}{25}\right)$$

$$\mathbf{w} = \left(2 - \frac{92}{25}, 5 - \frac{69}{25}\right)$$

$$\mathbf{w} = \left(\frac{50}{25} - \frac{92}{25}, \frac{125}{25} - \frac{69}{25}\right)$$

$$\mathbf{w} = \left(-\frac{42}{25}, \frac{56}{25}\right)$$

7. Persamaan jarak dari titik (x_1, y_1) ke garis $Ax + By + C = 0$ adalah:

$$D = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Identifikasi nilai:

$$x_1 = 3, y_1 = -4, A = 3, B = 4, C = -10$$

Substitusi ke persamaan:

$$D = \frac{|3(3) + 4(-4) - 10|}{\sqrt{3^2 + 4^2}}$$

$$D = \frac{|17|}{\sqrt{25}}$$

$$D = \frac{17}{5} = 3.4$$

8. Persamaan jarak dari titik (x_1, y_1, z_1) ke bidang $2x - y + 2z - 6 = 0$ adalah:

$$D = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Identifikasi nilai:

- Titik (x_1, y_1, z_1): $x_1 = 1, y_1 = -2, z_1 = 3$
- Koefisien bidang: $a = 2, b = -1, c = 2, d = -6$

Substitusi ke persamaan:

$$D = \frac{|2(1) + (-1)(-2) + 2(3) - 6|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 4^2}}$$

$$D = \frac{|4|}{\sqrt{9}} = \frac{4}{3}$$

Pertemuan 9

1. Tentukan basis ruang null dan basis ruang baris dari matriks A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & 3 & 7 \\ -1 & 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

2. Tentukan basis ruang baris dan basis ruang kolom melalui inspeksi

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Tentukan rank dan nullity dari matriks B

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & -2 & 8 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & -8 \end{bmatrix}$$

Jawaban:

1. Lakukan operasi baris elementer hingga didapat bentuk matriks eselon baris:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & 3 & 7 \\ -1 & 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[B1+B3]{-2B1+B2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-B2+B3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ambil baris tidak nol sebagai basis ruang baris:

$$Row(A) = \{(1, -2, 1, 3), (0, 0, 1, 1)\}$$

Menentukan basis ruang null:

$$x_3 + x_4 = 0 \longrightarrow x_3 = -x_4$$

$$x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0$$

$$x_1 = 2x_2 - x_3 - 3x_4$$

Misal $x_2 = s$ dan $x_4 = t$:

$$x_3 = -t$$

$$x_1 = 2s - (-t) - 3t$$

$$x_1 = 2s - 2t$$

Vektor solusi:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2s - 2t \\ s \\ -t \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Null(A) = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

2. Basis ruang baris diambil dari baris yang membuat pivot dan basis ruang kolom diambil dari kolom yang memuat pivot.

$$Row(B) = \{(1, 5, 0, 2, -1), (0, 0, 1, -3, 4), (0, 0, 0, 1, 7)\}$$

$$Col(B) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

3. Lakukan operasi baris elementer

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & -2 & 8 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & -8 \end{bmatrix} \xrightarrow[B1+B4]{\substack{-2B1+B2 \\ -B1+B3}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{B2}\leftrightarrow\text{B3}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-B2+B4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Jumlah baris tidak nol:

$$Rank(B) = 2$$

Menentukan nullity:

$$\text{Total kolom } (n) = 4$$

$$Nullity = Rank(B) - n = 4 - 2 = 2$$

Pertemuan 10

1. Diketahui matriks A

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   Tentukan:

   (a) Persamaan karakteristik dari matriks A.

   (b) Nilai-nilai eigen dari matriks A.

   (c) Basis ruang eigen yang bersesuaian dengan setiap nilai eigen.

2. Diketahui matriks B

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

   Tentukan:

   (a) Tentukan matriks P yang mendiagonalisasi B.

   (b) Tentukan matriks diagonal D.

Jawaban:

1. (a) Persamaan karakteristik didapat dari

$$det\left(\begin{bmatrix} \lambda-4 & 0 & -1 \\ 2 & \lambda-1 & 0 \\ 2 & 0 & \lambda-1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

   Lakukan ekspansi kofaktor sepanjang kolom ke-2:

$$(\lambda-1)\cdot\det\begin{bmatrix} \lambda-4 & -1 \\ 2 & \lambda-1 \end{bmatrix} = 0$$

$$(\lambda-1)[(\lambda-4)(\lambda-1)-(-1)(2)] = 0$$

$$(\lambda-1)[\lambda^2-5\lambda+4+2] = 0$$

$$(\lambda-1)[\lambda^2-5\lambda+6] = 0$$

$$(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3) = 0$$

   (b) Berdasarkan hasil pemfaktoran, nilai-nilai eigennya adalah:

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$$

(c) Basis ruang eigen

2. (a) Matriks P dibangun dari vektor-vektor eigen sehingga cari terlebih dahulu vektor-vektor eigennya.

$$I\lambda - B = \begin{bmatrix} \lambda-2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-3 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda-3 \end{bmatrix}$$

Cari determinan $det(I\lambda - B)$:

$$det(I\lambda - B) = (\lambda-2)\cdot\begin{vmatrix} \lambda-3 & 1 \\ 1 & \lambda-3 \end{vmatrix}$$

$$det(I\lambda - B) = (\lambda-2)((\lambda-3)(\lambda-3)-1)$$

$$det(I\lambda - B) = (\lambda-2)(\lambda^2-6\lambda+9-1)$$

$$det(I\lambda - B) = (\lambda-2)(\lambda^2-6\lambda+8)$$

$$det(I\lambda - B) = (\lambda-2)(\lambda-2)(\lambda-4)$$

Didapat nilai eigennya adalah $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 4$. Tentukan vektor-vektor eigennya:

- $\lambda = 2$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -y-z \\ -y-z \end{bmatrix}$$

Misal $x = s, z = t$:

$$-y-t=0$$

$$y=-t$$

Vektor eigen untuk $\lambda = 2$:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ -t \\ t \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- $\lambda = 4$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ y-z \\ -y+z \end{bmatrix}$$

$$2x = 0 \longrightarrow x = 0$$

$$y - z = 0 \longrightarrow y = z$$

Misal $z = t$, maka $y = t$. Vektor eigen untuk $\lambda = 4$:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sehinggga matriks P adalah:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) Matriks diagonal D adalah matriks yang entri diagonalnya diambil dari nilai-nilai eigen ($\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 4$):

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Pertemuan 11

1. Misalkan $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ adalah suatu pemetaan yang didefinisikan oleh rumus:

$$T(x, y, z) = (x - 2y, 2y + z)$$

   (a) Tunjukkan bahwa T adalah transformasi linear

   (b) Tentukan basis dari Kernel T

2. Misalkan $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ adalah transformasi linear yang didefinisikan oleh perkalian matriks $T(x) = A(x)$, di mana:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

   (a) Tentukan Rank dari transformasi T

   (b) Tentukan Nullity dari transformasi T

Jawaban:

1. (a) Sebuah transformasi linear harus memenuhi dua syarat, yaitu aditivitas ($T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$) dan homogenitas ($T(k\mathbf{u}) = kT(\mathbf{u})$)

   - Aditivitas:
     Misalkan $\mathbf{u} = (x_1, y_1, z_1)$ dan $\mathbf{v} = (x_2, y_2, z_2)$

$$T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

$$= ((x_1 + x_2) - 2(y_1 + y_2), 2(y_1 + y_2) + (z_1 + z_2))$$
$$= ((x_1 - 2y_1) + (x_2 - 2y_2), (2y_1 + z_1) + (2y_2 + z_2))$$
$$= T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$$

- Homogenitas:

$$T(kx, ky, kz) = (kx - 2ky, 2ky + kz)$$
$$= k(x - 2y, 2y + z)$$
$$= kT(x, y, z)$$

$\therefore T$ adalah transformasi linear.

(b) Kernel adalah himpunan vektor di mana hasil transformasi adalah nol ($T(x, y, z) = (0, 0)$)

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \longrightarrow x = 2y \\ 2y + z = 0 \longrightarrow z = -2y \end{cases}$$

Misal $y = s$:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2s \\ s \\ -2s \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$\therefore Ker(T) = \{(2, 1, -2)\}$

2. Ubah matriks A ke bentuk matriks eselon baris sebelum mencari rank dan nullity.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{2B1+B2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{B2}\leftrightarrow\text{B3}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) $Rank(T)$ diambil dari jumlah baris tidak nol $\{(1, -1, 2), (0, 1, 3)\}$ sehingga $Rank(T) = 2$.

(b) $Nullity(T)$ diambil dari jumlah kolom yang tidak memenuhi pivot $\{[2\ 3\ 0]^T\}$ sehingga $Nullity(T) = 1$

Adapun teorema dimensi, di mana $dim(T) = Rank(T) + Nullity(T)$ dan $dim(T) = 3$ (karena domainnya $\mathbb{R}^3$), maka:

$$dim(T) = Rank(T) + Nullity(T)$$

$$3 = 2 + 1$$

$\therefore$ Teorema dimensi terpenuhi.

Pertemuan 12

1. Misalkan V adalah himpunan semua pasangan bilangan real (x, y) di $\mathbb{R}^2$. Operasi penjumlahan didefinisikan secara standar, yaitu:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2)$$

   Namun, operasi perkalian skalar didefensikan sebagai berikut:

$$k(x, y) = (kx, 0)$$

   Tentukan apakah V merupakan ruang vektor atau bukan

2. Misalkan W adalah himpunan semua matriks 2×2 di mana $tr(M) = 1$.

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2\times 2} \,\middle|\, a + d = 1 \right\}$$

   Dengan operasi penjumlahan dan perkalian skalar standar matriks, apakah himpunan W merupakan ruang vektor atau bukan

Jawaban:

1. Himpunan V bukanlah ruang vektor. Himpunan V tidak memenuhi aksioma $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$. Misalkan $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$:

$$1\mathbf{u} = \mathbf{u}$$

$$1(u_1, u_2) = (u_1, u_2)$$

$$(u_1, u_2) \neq (u_1, 0)$$

2. Himpunan W bukanlah ruang vektor. Himpunan W tidak memenuhi aksioma $kV \in \mathbb{R}$. Ambil sembarang V dan k dengan $k \neq 1$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, k = 2$$

$$kA = 2 \cdot \begin{bmatrix} 2(1) & 2(0) \\ 2(0) & 2(0) \end{bmatrix}$$

$$kA = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$tr(kA) = 2 + 0 = 2$$

   Himpunan W hanya akan memiliki $tr(M) = 1$ jika dan hanya jika $k = 1$ sedangkan hal tersebut tidak memenuhi untuk $k \in \mathbb{R}$

Pertemuan 13

1. Diketahui W adalah himpunan semua vektor di $\mathbb{R}^3$ yang memenuhi persamaan linear homogen $x - 2y + 3z = 0$.

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 0\}$$

   Buktikan bahwa W adalah subruang dari $\mathbf{R}^3$.

2. Diketahui D adalah himpunan semua matriks diagonal berukuran 2×2. Matriks diagonal adalah matriks di mana entri di luar diagonal utama bernilai nol.

$$D = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

   Buktikan bahwa D adalah subruang dari ruang vektor $M_{2\times 2}$.

3. Diketahui S adalah himpunan semua P_2 yang bernilai nol ketika $x = 1$.

$$S = \{p(x) = ax^2 + bx + c \mid p(1) = 0\}$$

   Buktikan bahwa S adalah subruang dari P_2.

Jawaban:

1. $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 0\}$

   - Akan dibuktikan jika $W \neq \{\}$ Misal diambil vektor nol: $0 = (0, 0, 0)$. Substitusi ke persamaan

$$x - 2y + 3z = 0$$

$$0 - 2(0) + 3(0) = 0$$

$$0 = 0$$

     $\therefore W$ bukan himpunan kosong.

   - Akan dibuktikan jika $W \in \mathbb{R}^3$??

   - Akan dibuktikan jika W tertutup pada penjumlahan ($\mathbf{u} + \mathbf{v} \in W$). Misal $\mathbf{u} = (x_1, y_1, z_1)$ dan $\mathbf{v} = (x_2, y_2, z_2)$.

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = 0$$

$$(x_1 + x_2) - 2(y_1 + y_2) + 3(z_1 + z_2) = 0$$

$$(x_1 - 2y_1 + 3z_1) + (x_2 - 2y_2 + 3z_2) = 0$$

$$0 = 0$$

     $\therefore W$ tertutup pada penjumlahan.

- Akan dibuktikan jika W tertutup pada perkalian skalar.

$$k\mathbf{u} = 0$$

$$k(x_1 - 2y_1 + 3z_1) = 0$$

$$k(0) = 0$$

$$0 = 0$$

$\therefore W$ tertutup pada perkalian skalar.
Sehingga W adalah subruang di $\mathbb{R}^3$.

2. $D = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R} \right\}$

   - Akan dibuktikan jika $D \neq \{\}$ Misal diambil matriks nol, di mana $a = 0$ dan $b = 0$, maka:

   $$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   $\therefore D$ bukan himpunan kosong dan nilai di luar diagonal tetap nol.

   - $\therefore D \in M_{2\times 2}$
   - Akan dibuktikan jika D tertutup pada penjumlahan. Misal diambil matriks A dan B:

   $$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}$$

   $$A + B = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & 0 + 0 \\ 0 + 0 & b_1 + b_2 \end{bmatrix}$$

   $$A + B = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & 0 \\ 0 & b_1 + b_2 \end{bmatrix}$$

   $\therefore D$ tertutup pada penjumlahan.

   - Akan dibuktikan jika D tertutup pada perkalian skalar.

   $$kA = k \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_1 & 0 \\ 0 & kb_1 \end{bmatrix}$$

   $\therefore D$ tertutup pada perkalian skalar.
   Sehingga D adalah subruang di $M_{2\times 2}$

3. $S = \{p(x) = ax^2 + bx + c \mid p(1) = 0\}$

   - Uji dengan polinomial nol.

   $$0(x) = 0x^2 + 0x + 0 = 0$$

$\therefore$ Dengan nilai $x = 1$, polinomial akan tetap bernilai nol sehingga S bukan himpunan kosong.

- S adalah ruang vektor dengan derajat terbesar 2 sehingga $S \in P_2$.
- Akan dibuktikan jika D tertutup pada penjumlahan. Misal diambil $p(x)$ dan $q(x)$ di mana $p(1) = 0$ dan $q(1) = 0$.

$$r(x) = (p + q)(x) = p(x) + q(x)$$

. Periksa nilai di $x = 1$:

$$r(1) = p(1) + q(1) = 0 + 0 = 0$$

$\therefore S$ tertutup pada penjumlahan.

- Akan dibuktikan jika S tertutp pada perkalian skalar. Misal $p(x) \in S$ dan $k \in \mathbb{R}$.

$$m(x) = (kp)(x) = k\cdot(x)$$

Periksa nilai di $x = 1$:

$$m(1) = k\cdot(1) = k \cdot 0 = 0$$

$\therefore S$ tertutup pada perkalian skalar.
Sehingga S adalah subruang P_2.

Pertemuan 14

1. Diketahui himpunan vektor $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ di ruang $\mathbb{R}^3$ dengan:

$$v_1 = (1, 0, 1),\ v_2 = (0, 1, 1)\ v_3 = (1, 1, 0)$$

   (a) Tunjukkan bahwa himpunan B adalah basis untuk $\mathbb{R}^3$.

   (b) Tentukan koordinat vektor $\mathbf{u} = (3, 5, 2)$ relatif terhadap basis B atau $(\mathbf{u})_B$.

2. Diketahui himpunan vektor $S = \{u_1, u_2, u_3\}$ sebagai berikut:

$$u_1 = (1, -2, 3),\ v_2 = (2, 1, -1)\ v_3 = (3, -1, 2)$$

   Periksa apakah himpunan S bebas linear atau bergantung linear

Jawaban:

1. (a) B adalah basis di $\mathbb{R}^3$ jika determinan $\neq 0$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} det(A) &= 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 0 + 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1(0-1) + 1(0-1) \\ &= -1 - 1 = -2 \end{aligned}$$

$\therefore B$ merupakan basis untuk $\mathbb{R}^3$ dengan $det(A) = -2 \neq 0$.

(b) Koordinat $(\mathbf{u}_B)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_3 \\ k_2 + k_3 \\ k_1 + k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Didapat sistem persamaan linear sebagai berikut:

$$k_1 + k_3 = 3$$

$$k_2 + k_3 = 5$$

$$k_1 + k_2 = 2$$

Lakukan manipulasi aljabar:

$$k_2 + k_3 = 5 \Rightarrow k_3 = 5 - k_2$$

$$k_1 + 5 - k_2 = 3 \Rightarrow k_1 - k_2 = -2 \Rightarrow k_1 = k_2 - 2$$

$$k_2 - 2 + k_2 = 2 \Rightarrow 2k_2 = 4 \Rightarrow k_2 = 2$$

Substitusi $k_2 = 2$:

$$k_3 = 5 - 2 \Rightarrow k_3 = 3$$

$$k_1 = 2 - 2 \Rightarrow k_1 = 0$$

$\therefore$ Sehingga koordinat $(\mathbf{u}_B) = (0, 2, 3)$

2. Susun matriks M lalu uji determinan:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(M) &= 1\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 1(2-1) - 2(-4-(-3)) + 3(2-3) \\ &= 1(1) - 2(-1) + 3(-1) \\ &= 1 + 2 - 3 = 0 \end{aligned}$$

$\therefore$ Karena $det(M) = 0$ maka vektor-vektor yang diketahui bergantung linear.

1. Misalkan $u = (u_1, u_2)$ dan $v = (v_1, v_2)$ adalah vektor di $\mathbb{R}^2$ dan diketahui:

$$\langle u, v \rangle = 3u_1v_1 + 2u_2v_2$$

Jika diketahui vektor $\mathbf{a} = (2, -3)$ dan $\mathbf{b} = (1, 4)$, hitunglah nilai $\langle a, b \rangle$ dengan definisi di atas.

2. Pada ruang vektor $M_{2\times 2}$ hasil kali dalam standar didefinisikan sebagai berikut:

$$\langle A, B \rangle = tr(A^T B)$$

Hitung $\langle A, B \rangle$ jika diketahui:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

3. Diketahui basis $S = \{u_1, u_2\}$ untuk ruang vektor $\mathbb{R}^2$ dengan vektor:

$$u_1 = (1, 1) \text{ dan } u_2 = (0, 2)$$

Gunakan proses Gram-Schmidt untuk mengubhas basis S menjadi basis ortogonal.

Jawaban:

1. $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 3(2)(1) + 2(-3)(4) = 6 + (-24) = -18$

2. Cari dahulu A^T

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^T B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2+0) & (0+0) \\ (4+1) & (0-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{tr}(A^T B) = 2 + (-1) = 1$$

3. (a) Tetapkan u_1 sebagai v_1

$$v_1 = u_1$$

(b) Hitung v_2

$$v_2 = u_2 - proj_{v_1} u_2$$

$$= u_2 - \frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{||v_1||^2} v_1$$

Hitung $\langle u_2, v_1 \rangle$:

$$u_2 \cdot v_1 = (0)(1) + (2)(1) = 2$$

Hitung $||v_1||^2$:

$$||v_1||^2 = (\sqrt{1^2 + 1^2})^2 = (\sqrt{2})^2 = 2$$

Hitung $proj_{v_1} u_2$:

$$proj_{v_1} u_2 = \frac{2}{2} \cdot (1, 2)$$

$$= (1, 1)$$

Hitung persamaan akhir untuk mendapatkan v_2:

$$v_2 = u_2 - (1, 1)$$

$$= (0, 2) - (1, 1)$$

$$= (0 - 1, 2 - 1)$$

$$= (-1, 1)$$

(c) Didapat $v_1 = (1, 1)$ dan $v_2 = (-1, 1)$

Verifikasi ortogonalitas (ketika hasil kali titik bernilai nol):

$$\langle v_1, v_2 \rangle = (1)(-1) + (1)(1)$$

$$= -1 + 1 = 0$$