

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: <https://www.researchgate.net/publication/281005862>

İki Boyutlu Benzerlik ve Afin Dönüşümleri (Two Dimensional Similarity and Affine Transformations)

Conference Paper · April 2002

DOI: 10.13140/RG.2.1.2503.3446

CITATION

1

READS

8,114

1 author:



Orhan Kurt

Kocaeli University

64 PUBLICATIONS 20 CITATIONS

SEE PROFILE

Some of the authors of this publication are also working on these related projects:



Monitoring The Deformations of Namazgah and Yuvacik Dams [View project](#)



Yuvacık ve Namazgah Baraj Deformasyonlarının İzlenmesi [View project](#)



MÜHENDİSLİK FAKÜLTESİ
JEODEZİ VE FOTOGRAMETRİ MÜHENDİSLİĞİ BÖLÜMÜ

Bölüm İçi Seminer Çalışması

İKİ BOYUTLU BEZERLİK VE AFİN DÖNÜŞÜMLERİ

Hazırlayan : Öğr.Gör.Orhan KURT

Zonguldak
10 Nisan 2002

İçindekiler

1. İki Boyutlu Benzerlik (Helmert) Dönüşümü	3
1.1. Dönüşüm Parametrelerinin Kestirilmesi.....	4
2. Afın Dönüşümü	5
2.1. Dönüşüm Parametrelerinin Kestirilmesi.....	5
3. Duyarlık Hesapları	6
4. Sonuçların Test Edilmesi.....	7
4.1. Parametre Testi	7
4.2. Uyuşumsuz Ölçü Testi.....	7
4.2.1. Koordinat çiftleri için uyuşumsuz ölçüler testi	7
4.2.2. Tek Tek Koordinat Uyuşum Testi.....	8
5. Sayısal Uygulama.....	8
6. Sonuçlar.....	9
7. Kaynaklar	9
8. Kullanılan programlar	10
9. Ekler	10
Ek-1. Benzerlik dönüşümü parametrelerinin, düzeltmelerinin ve dönüştürülmüş koordinatların ters ağırlıklarının bulunması.....	10
Ek-2. Afın dönüşümü parametrelerinin, düzeltmelerinin ve dönüştürülmüş koordinatların ters ağırlıklarının bulunması.....	11
Ek-3. Benzerlik dönüşümü sonuçları.....	13
Ek-4. Afın dönüşümü sonuçları.....	14

İKİ BOYUTLU BENZERLİK VE AFİN DÖNÜŞÜMLER

0. Giriş

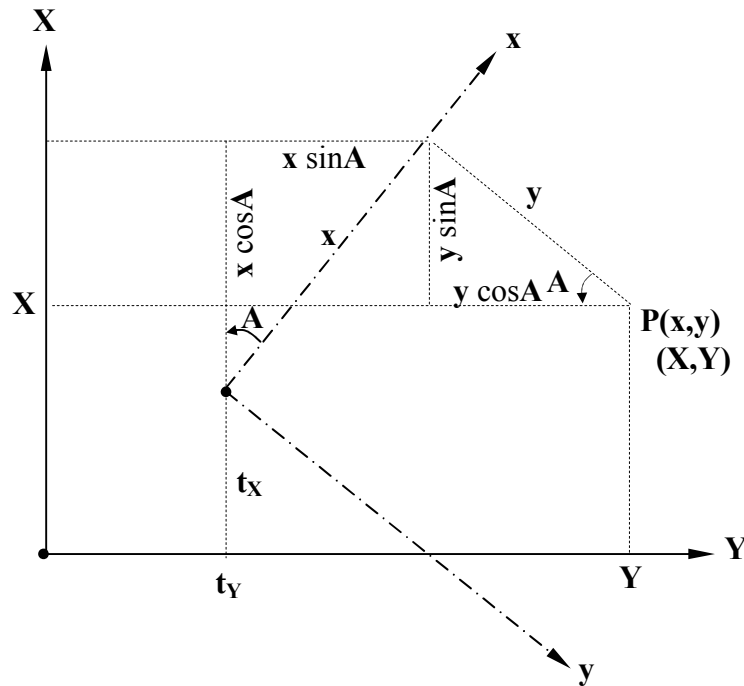
İki boyutlu benzerlik ve afin dönüşümleri mesleğimizin bir çok alanında yaygın olarak kullanılmaktadır. Bunlardan en çok kullanılanı, benzerliği koruyan ve adını da buradan alan benzerlik (Helmert) dönüşümüdür. Diğeri ise, paralelliği koruyan afin dönüşümüdür. Bu dönüşümlerden hangisinin kullanılacağı, kişinin ön bilgileri ile ilintilidir ve bunu genellikle sezgisel yapılmaktadır.

Dönüşüm bağıntıları doğrudan ağırlık merkezine ötelenmiş koordinatlarla gerçekleştirilmiştir. Bilindiği gibi ağırlık merkezine ötelenmiş koordinatlarla oluşturulan normal denklemler daha sade yapıda olmakta, kolayca tersi alınabilmekte ve genellemelere gidilebilmektedir. Böylece bulunan bağıntılarla oluşturulan yazılım bellekte az yer kaplamakta ve oldukça etkin çalışmaktadır.

Çalışmada; iki dönüşümün geometrik bağıntıları çıkarılmış, duyarlık hesapları ve test işlemleri her iki dönüşüm sonuçlarını kapsayacak şekilde verilmiştir. Anlatılan işlem adımlarına göre oluşturulan yazılım, gerçek bir uygulama üzerinde kullanılarak irdelemeler yapılmıştır.

1. İki Boyutlu Benzerlik (Helmert) Dönüşümü

İki dik koordinat sistemi arasında gerçekleştirilen ve benzerliği koruyan doğrusal dönüşüm türüdür. Bir P noktasının her iki sistemdeki koordinatları (x,y) ve (X,Y) 'dir (Şekil-1). Benzerlik dönüşümü, bir koordinattan diğerine öteleme, döndürme ve ölçek yardımı gerçekleştirilir.



Şekil-1. İki boyutlu benzerlik dönüşümü.

Şekil-1'de (x,y) sisteminin başlangıcının koordinatları olan ötelemeler (t_x, t_y) , iki sistem arasındaki dönüklük A , iki sistem arasındaki ölçek katsayısı k olmak üzere ağırlık merkezine ötelenmiş koordinatlarla benzerlik dönüşüm (1) bağıntıları ile gerçekleştirilir.

$$\bar{X}_i = t_x + k \cos A \bar{x}_i - k \sin A \bar{y}_i \quad (1a)$$

$$\bar{Y}_i = t_y + k \sin A \bar{x}_i + k \cos A \bar{y}_i \quad (1b)$$

$$x_S=[x]/n, y_S=[y]/n, X_S=[X]/n, Y_S=[Y]/n \quad \text{Ağırlık merkezi koordinatları} \quad (2)$$

$$\bar{x}_i=x_i-x_S, \bar{y}_i=y_i-y_S, \bar{X}_i=X_i-X_S, \bar{Y}_i=Y_i-Y_S \quad \text{Ağırlık merkezine ötelenmiş koordinatlar} \quad (3)$$

$$[\bar{X}]=[\bar{Y}]=[\bar{x}]=[\bar{y}]=0 \quad (4)$$

(1) eşitliklerini sade bir yapıya dönüştürmek için $a = k \cos A$ ve $o = k \sin A$ yardımcı büyüklükleri kullanılır.

$$\bar{X}_i = t_X + a \bar{x}_i - o \bar{y}_i \quad (5a)$$

$$\bar{Y}_i = t_Y + o \bar{x}_i + a \bar{y}_i \quad (5b)$$

t_X, t_Y, A ve k benzerlik dönüşümünün dönüşüm parametreleridir. Bunlar biliniyorsa (x,y) sisteminden (X,Y) sistemine dönüşüm gerçekleştirilir. Ya da her iki sistemde koordinatı bilinen en az iki nokta (eşlenik noktalar) yardımı ile dönüşüm parametreleri hesaplanır. Eşlenik noktaların sayısı ikiden büyükse dönüşüm parametreleri dengeleme hesabıyla elde edilir.

1.1. Dönüşüm Parametrelerinin Kestirilmesi

İkinci sistem koordinatları ölçüler olarak ele alınıp ve (5) bağıntıları kullanılarak dolaylı ölçüler yönteminin matematik modeli aşağıdaki gibi kurulur.

$$\begin{bmatrix} v_{Xi} \\ v_{Yi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \bar{x}_i & -\bar{y}_i \\ 0 & 1 & \bar{y}_i & \bar{x}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_X \\ t_Y \\ a \\ o \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{X}_i \\ \bar{Y}_i \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_i \quad (i=1,2, \dots, n) \quad (6)$$

(6) düzeltme denklemleri ve $d = [\bar{x}^2 + \bar{y}^2]$ büyüklüğü yardımı ile normal denklemler oluşturulur.

$$\begin{bmatrix} n & 0 & 0 & 0 \\ & n & 0 & 0 \\ & & d & 0 \\ \text{sim.} & & & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_X \\ t_Y \\ a \\ o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ [\bar{x}\bar{X} + \bar{y}\bar{Y}] \\ [\bar{x}\bar{Y} - \bar{y}\bar{X}] \end{bmatrix} \quad (7)$$

Normal denklemlerin katsayılar matrisi köşegen matristir. Bu matrisin tersi köşegen elemanların tersi alınarak kolayca hesaplanabilir.

$$\begin{bmatrix} t_X \\ t_Y \\ a \\ o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/n & 0 & 0 & 0 \\ & 1/n & 0 & 0 \\ & & 1/d & 0 \\ \text{sim.} & & & 1/d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ [\bar{x}\bar{X} + \bar{y}\bar{Y}] \\ [\bar{x}\bar{Y} - \bar{y}\bar{X}] \end{bmatrix} \quad (8)$$

Normal denklemlerin çözümü (9) eşitliklerinden a, o yardımcı büyüklükleri hesaplanır.

$$a = [\bar{x} \bar{X} + \bar{y} \bar{Y}] / d \quad (9a)$$

$$o = [\bar{x} \bar{Y} - \bar{y} \bar{X}] / d \quad (9b)$$

a, o yardımcı büyüklüklerinden yararlanarak dönüşüm parametreleri ve (6) eşitliklerinden düzeltmeler hesaplanır.

$$t_X = X_S - a x_S + o y_S \quad (10a)$$

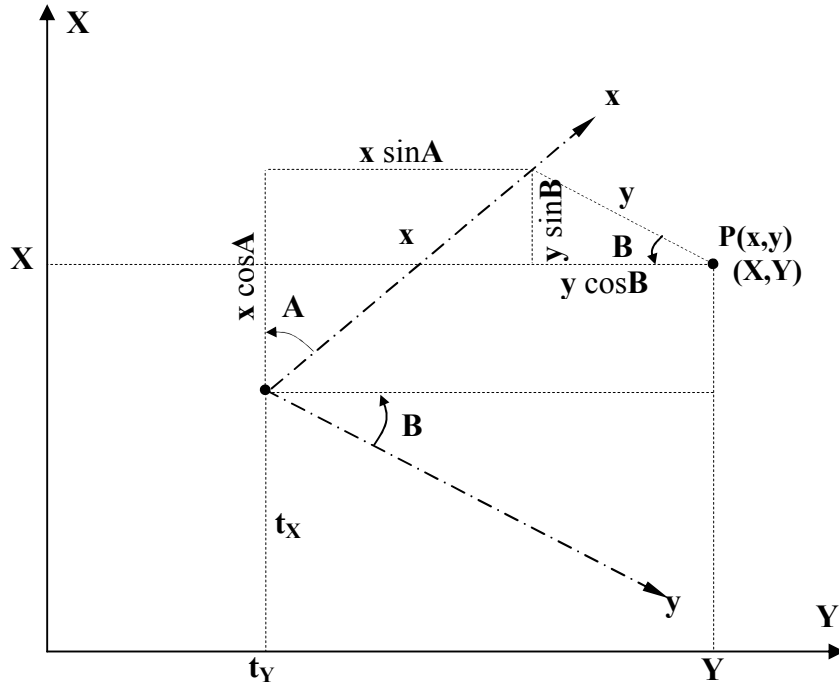
$$t_Y = Y_S - o x_S - a y_S \quad (10b)$$

$$k = (a^2 + o^2)^{(0.5)} \quad (10c)$$

$$A = \arctg(o/a) \quad (10d)$$

2. Afin Dönüşümü

Genellikle fotogrametri anabilim dalı uygulamalarda kullanılan doğrusal bir dönüşümdür. İki koordinat sisteminin eksenleri arasında farklı ölçek ve farklı dönüklük öngörülür. Bu parametrelere iki öteleme de eklendiğinde bilinmeyen sayısı altıya çıkar.



Şekil-2 İki boyutlu afin dönüşümü.

Bu dönüşümün en temel özelliği paralelliği korumasıdır ve benzerlik dönüşümünün üst modelidir (Şekil-2). X-x (k_X) ve Y-y (k_Y) koordinatları arasındaki farklı ölçek ve Şekil-2 göz önünde bulundurularak afin dönüşümü ötelenmiş koordinatlarla (11) eşitlikleri ile gerçekleştirilir.

$$\bar{X}_i = t_X + k_X \cos A \bar{x}_i - k_Y \sin B \bar{y}_i \quad (11a)$$

$$\bar{Y}_i = t_Y + k_X \sin A \bar{x}_i + k_Y \cos B \bar{y}_i \quad (11b)$$

Benzerlik dönüşümünde olduğu gibi $a_X = k_X \cos A$, $a_Y = k_X \sin A$ ve $o_X = k_Y \cos B$, $o_Y = k_Y \sin B$ kısaltmaları yapılarak dönüşüm bağıntıları elde edilir.

$$\bar{X}_i = t_X + a_X \bar{x}_i - o_Y \bar{y}_i \quad (12a)$$

$$\bar{Y}_i = t_Y + a_Y \bar{x}_i + o_X \bar{y}_i \quad (12b)$$

2.1. Dönüşüm Parametrelerinin Kestirilmesi

İkinci sistem koordinatları ölçüler olarak ele alınıp ve (12) bağıntıları kullanılarak dolaylı ölçüler yönteminin matematik modeli ve normal denklemleri oluşturulmuştur.

$$\begin{bmatrix} v_{Xi} \\ v_{Yi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \bar{x}_i & -\bar{y}_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \bar{x}_i & \bar{y}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_X \\ a_X \\ o_Y \\ t_Y \\ a_Y \\ o_X \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{X}_i \\ \bar{Y}_i \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_i \quad (i=1,2, \dots, n) \quad (13)$$

$$\begin{bmatrix} n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & [\bar{x}^2] & -[\bar{x}\bar{y}] & 0 & 0 & 0 \\ & & [\bar{y}^2] & 0 & 0 & 0 \\ & & & n & 0 & 0 \\ & & & & [\bar{x}^2] & [\bar{x}\bar{y}] \\ & & & & & [\bar{y}^2] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_X \\ a_X \\ o_Y \\ t_X \\ a_Y \\ o_X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ [\bar{x}\bar{X}] \\ -[\bar{y}\bar{X}] \\ 0 \\ [\bar{x}\bar{Y}] \\ [\bar{y}\bar{Y}] \end{bmatrix} \quad (14)$$

sim.

Burada n eşlenik nokta sayısıdır. Normal denklemlerin katsayılar matrisinin tersi alt matrislere ayrılarak kolayca bulunur.

$$\begin{bmatrix} t_X \\ a_X \\ o_Y \\ t_X \\ a_Y \\ o_X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & [\bar{y}^2]/d & [\bar{x}\bar{y}]/d & 0 & 0 & 0 \\ & & [\bar{x}^2]/d & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1/n & 0 & 0 \\ & & & & [\bar{y}^2]/d & -[\bar{x}\bar{y}]/d \\ & & & & & [\bar{x}^2]/d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ [\bar{x}\bar{X}] \\ -[\bar{y}\bar{X}] \\ 0 \\ [\bar{x}\bar{Y}] \\ [\bar{y}\bar{Y}] \end{bmatrix} \quad d = [\bar{x}^2][\bar{y}^2] - [\bar{x}\bar{y}]^2 \quad (15)$$

sim.

(15)'den yararlanarak yardımcı parametreler hesaplanır.

$$a_X = ([\bar{y}^2][\bar{x}\bar{X}] - [\bar{x}\bar{y}][\bar{y}\bar{X}]) / d \quad o_Y = ([\bar{x}\bar{y}][\bar{x}\bar{X}] - [\bar{x}^2][\bar{y}\bar{X}]) / d \quad (16a)$$

$$a_Y = ([\bar{y}^2][\bar{x}\bar{Y}] - [\bar{x}\bar{y}][\bar{y}\bar{Y}]) / d \quad o_X = ([\bar{x}^2][\bar{y}\bar{Y}] - [\bar{x}\bar{y}][\bar{x}\bar{Y}]) / d \quad (16b)$$

Yardımcı parametrelerle dönüklükler ve ölçekler hesaplanır. Ağırlık merkezi koordinatlarından yararlanarak öteleme elemanları hesaplanır.

$$k_X = \{ a_X^2 + a_Y^2 \}^{(0.5)} \quad A_X = \arctg(a_Y / a_X) \quad t_X = X_S - a_X x_S + o_Y y_S \quad (17a)$$

$$k_Y = \{ o_X^2 + o_Y^2 \}^{(0.5)} \quad B_Y = \arctg(o_Y / o_X) \quad t_Y = Y_S - a_Y x_S - o_X y_S \quad (17b)$$

3. Duyarlık Hesapları

Benzerlik ve afin dönüşümünü sonucunda bulunan parametrelerin, düzeltmelerin ve kestirilen koordinatların karesel ortalama hataları Ek-1 ve Ek-2'de hesaplanmış olan ters ağırlıklardan yararlanarak bulunur.

$$f = 2n-4 \quad \text{Benzerli dönüşümünün serbestlik derecesi} \quad (18)$$

$$f = 2n-6 \quad \text{Afin dönüşümünün serbestlik derecesi} \quad (19)$$

$$m_0 = \pm \{ [v_X^2 + v_Y^2] / f \}^{(0.5)} \quad \text{Herhangi bir } X_i \text{ ya da } Y_i \text{ koordinatının karesel ortalama hatası} \quad (20)$$

$$m_p = \pm m_0 \{ 2 \}^{(0.5)} \quad \text{Herhangi bir } P_i \text{ noktasının konumunun karesel ortalama hatası} \quad (21)$$

Kestirilen parametrelerin, dengeli koordinatların ve düzeltmelerin karesel ortalama hataları Ek-1 ve Ek-2'den yararlanarak aşağıdaki genel bağıntı ile elde edilir.

$$m_N = \pm m_0 \{ q_{NN} \}^{(0.5)} \quad N \text{ değişkeninin karesel ortalama hatası} \quad (22)$$

$$N = tx, ty, a, o, k, A, a_x, a_y, o_x, o_y, k_x, k_y, B, i, v_i, \Delta k, \Delta A$$

4. Sonuçların Test Edilmesi

4.1. Parametre Testi

Benzerlik ve afin dönüşümü sonucunda elde edilen dönüşüm parametreleri, birbirinin eşdeğeri olan Student Dağılımı (t-dağılımı) ya da Fisher Dağılımı ile test edilirler.

$$T_N = N^2 / m_N^2 \sim F_{\{1, f, (1-2\alpha)\}} \quad (23a)$$

$$T_N = |N| / m_N \sim t_{\{f, (1-\alpha)\}} \quad (23b)$$

N Test edilecek olan parametre ($N = t_x, t_y, 1-k, A, B, 1-k_x, 1-k_y, \Delta A, \Delta k$)

α Yanılma olasılığı (genellikle $\alpha=0.05-0.025$ alınır)

f İlgili dönüşümün serbestlik derecesi

$F_{\{1, f, (1-2\alpha)\}}$ Fisher Dağılımı tablosundan alınmış sınır değer.

$t_{\{f, (1-\alpha)\}}$ t-Dağılımı tablosundan alınmış sınır değer.

Test değeri T_N sınır değeri aşarsa, ilgili parametre $1-\alpha$ güvenle istatistiksel olarak anlamlıdır denir. Anlamlı olan parametre dönüşümde yer almalıdır.

4.2. Uyuşumsuz Ölçü Testi

Uyuşumsuz ölçü testi iki türlü gerçekleştirilir. Bunlardan bir tanesi her iki koordinat çiftini aynı anda test ederken, diğeri her bir koordinatı ayrı olarak test eder. Koordinat çiftleri için uyum testi ya da tek tek koordinat uyum testleri genellikle aynı sonucu verir. Fakat bir noktaya ait koordinatlar için hesaplanan düzeltmelerden biri çok büyük diğeri çok küçük olduğunda, koordinat çifti testi bu noktayı yakalayamaz. Bu nedenle tek tek koordinatlar test edilmelidir. Ters bir durumda ise; yani bir noktaya ait koordinatlar için bulunan düzeltmeler sınır değere yakın olduğunda tek tek koordinat testini geçerken, koordinat çiftleri için olan testi geçemeyecektir. Bu nedenle hem koordinat çifti testi hem de tek tek koordinat uyum testi yapılması, bir noktanın uyumlu ya da uyumsuz olması konusundaki kararımızı sağlamlaştıracaktır.

4.2.1. Koordinat çiftleri için uyumsuz ölçüler testi

Benzerlik ve afin dönüşümü için koordinat çiftleri uyum testi (24)'deki test büyüklüğü ile gerçekleştirilir (BÖHY, İstanbul Şubesi) (Ek-1, Ek-2).

$$T_i = \{ (v_{X_i}^2 + v_{Y_i}^2) / (2m_{vi}^2) \}^{(0.5)} \sim c = \{ [n-2] [1-(\alpha/n)^{1/(n-3)}] \}^{(0.5)} \quad (24)$$

Test büyüklüğünü sınır değer c 'yi geçen test büyüklüklerinden en büyük olanının $1-\alpha$ güvenle uyumsuz olduğuna karar verilir ve eşlenik nokta kümesinden çıkarılır. Bu işlem uyumsuz ölçü kalmayınca kadar iteratif olarak tekrarlanır.

4.2.2. Tek Tek Koordinat Uyuşum Testi

Soncul standart sapma kullanılarak tek tek koordinat uyuşum testi iki şekilde gerçekleştirilir.

4.2.2..a. t-Dağılımına Göre Tek Tek Koordinat Uyuşum Testi

Bu testin en büyük özelliği uyuşumsuz olduğu düşünülen düzeltmenin etkisinin soncul standart sapmadan çıkarılmasıdır. Aşağıdaki gibi gerçekleştirilir.

$$m_{vXi} = \pm S_{0Xi} \{q_{vivi}\}^{(0.5)} \quad S_{0Xi} = \pm \{ ([v_X^2 + v_Y^2] - v_{Xi}^2 / q_{vivi}) / (f-1) \}^{(0.5)} \quad (25a)$$

$$m_{vYi} = \pm S_{0Yi} \{q_{vivi}\}^{(0.5)} \quad S_{0Yi} = \pm \{ ([v_X^2 + v_Y^2] - v_{Yi}^2 / q_{vivi}) / (f-1) \}^{(0.5)} \quad (25b)$$

Pi noktasının düzeltmelerinin karesel ortalama hataları hesaplanır. Düzeltmelerin mutlak değerleri ve karesel ortalama hatalarından yararlanarak test büyüklükleri,

$$T_{vXi} = |v_{Xi}| / m_{vXi} \sim t_{\{ (f-1), (1-\alpha_0) \}} \quad (26a)$$

$$T_{vYi} = |v_{Yi}| / m_{vYi} \sim t_{\{ (f-1), (1-\alpha_0) \}} \quad (26b)$$

hesaplanır. $\alpha_0 = \alpha / (2n)$ 'den bulunur. $\alpha_0 < 0.001$ ise $\alpha_0 = 0.001$ alınır. Sınır değeri aşan test büyüklüğünün en büyüğü eşlenik nokta kümesinden çıkarılır. Bütün işlem adımları uyuşumsuz koordinat kalmayıncaya kadar tekrarlanır.

4.2.2.b. Tau Dağılımına Göre Tek Tek Koordinat Uyuşum Testi

Pi noktasının herhangi bir koordinatının düzeltmesinin karesel ortalama hatası $m_{vi} = \pm m_0 \{q_{vvi}\}^{(0.5)}$ 'den yararlanarak Tau Dağılımı test büyüklüğü hesaplanır.

$$T_{vXi} = |v_{Xi}| / m_{vi} \sim \tau_{\{ f, (1-\alpha_0) \}} \quad (27a)$$

$$T_{vYi} = |v_{Yi}| / m_{vi} \sim \tau_{\{ f, (1-\alpha_0) \}} \quad (27b)$$

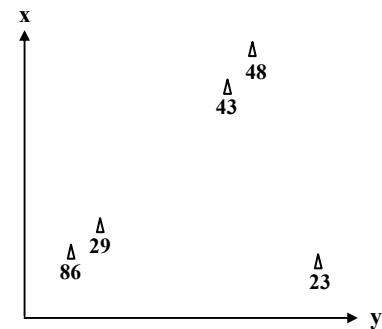
$$\tau_{\{ f, 1-\alpha_0 \}} = \{ f t_{\{ (f-1), (1-\alpha_0) \}} / (f-1 + t_{\{ (f-1), (1-\alpha_0) \}}^2) \}^{(0.5)} \quad (28)$$

5. Sayısal Uygulama

Sayısal uygulama olarak beş eşlenik noktadan oluşan ve koordinat değerleri Tablo-1'de verilen örnek seçilmiştir (Şekil-3). Verilen koordinatlar geliştirilen programla iki dönüşüm türü de kullanılarak dönüşüm parametreleri hesaplanmış ve dönüşüm sonuçları test edilmiştir (Ek-3, Ek-4).

Tablo-1. Eşlenik nokta koordinatları.

i	NN	x (m)	y (m)	X (m)	Y (m)
1	23	88671.77	9026.47	88671.27	9026.26
2	29	89687.78	3741.75	89687.35	3741.87
3	43	91914.64	7703.51	91913.74	7703.24
4	48	92418.73	8063.96	92417.74	8063.66
5	86	89159.88	3295.03	89159.59	3295.21



Şekil-3. Noktaların birbirlerine göre yaklaşık

Benzerlik dönüşümü sonucunda dönüşümünün karesel ortalama hatası $m_0 = \pm 0.125m$ bulunmuş, 23 numaralı nokta uyuşumsuz çıkmıştır. 23 numaralı nokta eşlenik nokta kümesinden çıkarılmış,

dönüşüm işlemi tekrarlanmış ve ikinci dönüşümde dönüşümün ortalama hatası $m_0=\pm 0.020m$ bulunmuş ve uyuşumsuz ölçü kalmamıştır (Ek-3).

Afin dönüşümü sonucunda; iki sistem arasında farklı dönüklük ve farklı ölçek anlamlı çıkmış, dönüşümün ortalama hatası $m_0=\pm 0.001m$ olarak hesaplanmış ve uyuşumsuz ölçü bulunmamıştır. (Ek-4). Bunun nedeni eşlenik nokta sayısının az olması ve uyuşumsuz olan 23 numaralı noktanın dönüşümü yapılacak alanda kenarda kalmasıdır. Afin dönüşümü de bu uyuşumsuzluğu kendi yapısına uydurmuştur. Dönüşümün serbestlik derecesi büyük olsaydı ve 23 numaralı noktanın geometrik yeri daha uygun olsaydı (dönüşümü yapılacak alanda ortalara düşseydi) afin dönüşümünde de uyuşumsuz çıkacaktı. 23 numaralı nokta çıkarılarak gerçekleştirilen afin dönüşümü sonuçlarının benzerlik dönüşümü ile uyduğu görülmekte, aynı zamanda farklı ölçek ve dönüklüğün anlamsızlığı ortaya çıkmaktadır (Ek-4). Buradaki dönüşüm iki jeodezik (imar ve kadastro) sistem arasında olduğu düşünülürse, bu sonuçlar daha çok anlam kazanmaktadır.

Eşlenik nokta sayısı 4 alınarak gerçekleştirilen benzerlik dönüşümünde $m_0=\pm 0.020m$ ve afin dönüşümde de $m_0=\pm 0.018m$ olarak bulunmuştur. Her iki dönüşümün sonuçlarının da eşdeğer olduğu farklı dönüklük ve ölçek öngörmenin anlamsızlığı ortaya çıkmıştır.

6. Sonuçlar

Dönüşüm işlemi gerçekleştirilirken, eşlenik nokta sayısı mümkün olduğunca çok seçilmeli ve noktalar dönüşüm yapılacak alana iyi dağılmalıdır.

Dönüşümü yapılacak koordinatların fiziksel özelliklerine göre dönüşüm türü belirlenmelidir. Örneğin, jeodezik koordinatlar arasındaki dönüşümlerde benzerlik dönüşümü öncelikli düşünülmeli, benzerlik dönüşümünde uyuşumsuz ölçü bulunamıyorsa afin dönüşümü sonuçları iyileştirmek ve eski nokta bozulmalarını azaltmak için yapılmalıdır. Fotogrametrik çalışmalarda kamera bozulmalarından kaynaklanan hataların elimine edilmesinde afin dönüşümü kullanılabilir. Burada da benzerlik dönüşümü ile sonuçlar denetlenmelidir.

Sonuç olarak, benzerlik-afin dönüşümleri aynı anda uygulanmalı sonuçlar istatistiksel olarak test edilmelidir. Böylece çalışılan alanın ya da problemin fiziksel özellikleri daha iyi anlaşılmakta ve daha sonra yapılacak olan çalışmalar için öngörü ve deneyimizi artırmaktadır.

Yukarıda geometrik bağıntıları çıkarılan ve işlem aşamaları genelleştirilen iki boyutlu doğrusal dönüşümler için oluşturulacak bir yazılım, jeodezik ve fotogrametrik bir çok çalışmada etkin olarak kullanılabilecektir.

7. Kaynaklar

BÖHYY, (1997), “Büyük Ölçekli haritaları yapım yönetmeliği–İstanbul Şubesi”, 4. Baskı, Ankara.

Demirel, H., (1997), “Jeodezik Verilerin İrdelenmesi” dersi notları. YTÜ, FBE, İstanbul.

Hacısalıhoğlu, H.H., (1990), “2 ve 3 Boyutlu Uzaylarda Analitik Geometri”, Gazi Üniversitesi Yayın No:147, FEF Yayın No:18, Ankara.

Kurt, O., (2000a), “Dengeleme Hesabı II Ders Notları”, ZKÜ, MF, Zonguldak.

Kurt, O., (2000b), “Dengeleme Hesabı III Ders Notları”, ZKÜ, MF, Zonguldak.

Öztürk, E., Şerbetçi, M., (1992), “Dengeleme hesabı”, Cilt III, KTÜ, MMF, Gen. Yay. No : 144.

8. Kullanılan programlar

HA_xy.exe (1998) : Fortran 77 dilinde yazar tarafından yazılmış benzerlik ve afin dönüşümü parametrelerini hesaplayan, uyuşumsuz ölçü ve parametre testlerini yapan programdır. İstatistik testlerde dönüşüm sonucunda bulduğu karesel ortalama hatayı kullanır. Dönüşümü Tablo-1’de verilen formata göre okuyarak gerçekleştirir.

HA_ts.exe (1999) : Yazar tarafında yazılmış program HA_xy.exe programının yaptıklarını aynen gerçekleştirir. Bu programın özelliği Topcon yazılım çıktı formatını doğrudan okur.

HA_ts1.exe (2000) : HA_ts.exe programının bütün özellikleri taşır. İstatistik testleri, uygulamada istenen öncül standart sapma $\sigma_0=0.05m$ göre gerçekleştirir.

Statis.for (1996) : Yukarıdaki programlarda kullanılan alt programdır. Prof. Dr. Ergün ÖZTÜRK (KOÜ, MF, Kocaeli)) tarafından yapılmış olan program dört temel dağılımın tablo değerlerini hesaplar.

9. Ekler

Ek-1. Benzerlik dönüşümü parametrelerinin, düzeltmelerinin ve dönüştürülmüş koordinatların ters ağırlıklarının bulunması.

*Normal denklemlerin ters ağırlık matrisinden yardımcı büyüklüklerin ters ağırlıkları bulunur.

$$q_{aa} = q_{oo} = 1/d$$

$$d = [\bar{x}^2 + \bar{y}^2]$$

* Dönüşüm parametrelerinin ters ağırlıkları.

$$k^2 = a^2 + o^2$$

$$\delta k = (a/k) \delta a + (o/k) \delta o$$

$$q_{aa} = q_{oo} \text{ ve } q_{ao} = 0 \text{ olduğundan}$$

$$q_{kk} = \{(a^2 + o^2) / k^2\} q_{aa}$$

$$q_{kk} = q_{aa}$$

$$A = \arctg(o/a)$$

$$\delta A = (o/a)' / \{1 + (o/a)^2\} = a/k^2 \delta o - o/k^2 \delta a$$

$$q_{AA} = \{(a^2 + o^2) / k^4\} q_{aa} = \{1 / k^2\} q_{aa}$$

jeodezik problemlerin çoğunda $k \approx 1$ olduğundan

$$q_{AA} = q_{aa} \text{ alınabilir.}$$

$$q_{tt} = q_{txtx} = q_{tyty} = 1/n$$

*Dönüştürülmüş koordinatların ve düzeltmelerin ters ağırlıkları.

$$\delta \hat{X} = \delta t_x + \bar{x}_i \delta a - \bar{y}_i \delta o$$

$$q_{XiXi} = q_{tt} + (\bar{x}_i)^2 q_{aa} + (\bar{y}_i)^2 q_{oo}$$

$$q_{XiXi} = 1/n + (\bar{x}_i^2 + \bar{y}_i^2) / d$$

$$\delta \hat{Y} = \delta t_y + \bar{x}_i \delta o + \bar{y}_i \delta a$$

$$q_{YiYi} = q_{tt} + (\bar{x}_i)^2 q_{oo} + (\bar{y}_i)^2 q_{aa}$$

$$q_{YiYi} = 1/n + (\bar{x}_i^2 + \bar{y}_i^2) / d$$

$$q_{ii} = q_{XiXi} = q_{YiYi} = 1/n + (\bar{x}_i^2 + \bar{y}_i^2) / d$$

$$q_{vivi} = q_{vxixixi} = q_{vyiviyi} = 1 - q_{ii}$$

Ek-2. Afin dönüşümü parametrelerinin, düzeltmelerinin ve dönüştürülmüş koordinatların ters ağırlıklarının bulunması.

* Yardımcı büyüklüklerin ters ağırlıkları

$$q_{axax} = q_{ayay} = [\bar{y}^2] / d$$

$$q_{oxox} = q_{oyoy} = [\bar{x}^2] / d$$

$$q_{axoy} = -q_{ayox} = [\bar{x} \bar{y}] / d$$

$$d = [\bar{x}^2] [\bar{y}^2] - [\bar{x} \bar{y}]^2$$

* Dönüşüm parametrelerinin ters ağırlıkları.

$$q_{txtx} = q_{tyty} = 1/n$$

$$\delta k_x = (a_x/k_x) \delta a_x + (a_y/k_x) \delta a_y$$

$$q_{kxkx} = (a_x/k_x)^2 q_{axax} + (a_y/k_x)^2 q_{ayay} = \{ (a_x^2 + a_y^2) / k_x^2 \} q_{axax} = q_{axax} = [\bar{y}^2] / d$$

$$q_{kxkx} = [\bar{y}^2] / d$$

$$\delta k_y = (o_x/k_y) \delta o_x + (o_y/k_y) \delta o_y$$

$$q_{kyky} = (o_x/k_y)^2 q_{oxox} + (o_y/k_y)^2 q_{oyoy} = \{ (o_x^2 + o_y^2) / k_y^2 \} q_{oxox} = q_{oxox} = [\bar{x}^2] / d$$

$$q_{kyky} = [\bar{x}^2] / d$$

$$\delta A = (a_y/a_x)' / \{ 1 + (a_y/a_x)^2 \} = -(a_y/k_x^2) \delta a_x + (a_x/k_x^2) \delta a_y$$

$$q_{AA} = (a_y/k_x^2)^2 q_{axax} + (a_x/k_x^2)^2 q_{ayay} = \{ (a_x^2 + a_y^2) / k_x^4 \} q_{axax} = \{ 1 / k_x^2 \} [\bar{y}^2] / d$$

$$q_{AA} = [\bar{y}^2] / (k_x^2 d)$$

$$\delta B = (o_y/o_x)' / \{ 1 + (o_y/o_x)^2 \} = -(o_y/k_y^2) \delta o_x + (o_x/k_y^2) \delta o_y$$

$$q_{BB} = (o_y/k_y^2)^2 q_{oxox} + (o_x/k_y^2)^2 q_{oyoy} = \{ (o_x^2 + o_y^2) / k_y^4 \} q_{oxox} = \{ 1 / k_y^2 \} [\bar{x}^2] / d$$

$$q_{BB} = [\bar{x}^2] / (k_y^2 d)$$

* Ölçek ve dönüklük farklılıklarının ters ağırlıkları.

$$\Delta k = k_x - k_y$$

$$\delta \Delta k = \delta k_x - \delta k_y = (a_x/k_x) \delta a_x + (a_y/k_x) \delta a_y - (o_x/k_y) \delta o_x - (o_y/k_y) \delta o_y$$

$$q_{\Delta k \Delta k} = \{ (a_x^2 + a_y^2) / k_x^2 \} q_{axax} + \{ (o_x^2 + o_y^2) / k_y^2 \} q_{oxox} - 2(a_x/k_x) (o_y/k_y) q_{axoy} - 2(a_y/k_x) (o_x/k_y) q_{ayox}$$

$$q_{\Delta k \Delta k} = q_{kxkx} + q_{kyky} - 2(a_x/k_x) (o_y/k_y) q_{axoy} + 2(a_y/k_x) (o_x/k_y) q_{ayox}$$

$$q_{\Delta k \Delta k} = q_{kxkx} + q_{kyky} + 2 \{ (-a_x o_y + a_y o_x) / (k_x k_y) \} q_{axoy}$$

$$q_{\Delta k \Delta k} = q_{kxkx} + q_{kyky} + 2 \{ (k_x k_y \cos A \sin B + k_x k_y \sin A \cos B) / (k_x k_y) \} q_{axoy}$$

$$q_{\Delta k \Delta k} = q_{kxkx} + q_{kyky} + 2 \sin(A+B) q_{axoy}$$

$$q_{\Delta k \Delta k} = [\bar{y}^2] / d + [\bar{x}^2] / d + 2 \sin(A+B) [\bar{x} \bar{y}] / d$$

$$\Delta A = A - B$$

$$\delta \Delta A = \delta A - \delta B = -(a_y/k_x^2) \delta a_x + (a_x/k_x^2) \delta a_y + (o_y/k_y^2) \delta o_x - (o_x/k_y^2) \delta o_y$$

$$q_{\Delta \Delta \Delta \Delta} = q_{AA} + q_{BB} + 2(a_y/k_x^2) (o_x/k_y^2) q_{axoy} + 2(a_x/k_x^2) (o_y/k_y^2) q_{ayox}$$

$$q_{\Delta \Delta \Delta \Delta} = q_{AA} + q_{BB} + 2 \{ (a_y o_x - a_x o_y) / (k_x^2 k_y^2) \} q_{axoy}$$

$$q_{\Delta \Delta \Delta \Delta} = q_{AA} + q_{BB} + 2 \sin(A+B) / (k_x k_y) q_{axoy}$$

$$q_{\Delta \Delta \Delta \Delta} = [\bar{y}^2] / (k_x^2 d) + [\bar{x}^2] / (k_y^2 d) + 2 \sin(A+B) [\bar{x} \bar{y}] / (k_x k_y d)$$

Ek-2'nin devamı.

* Kestirilen \hat{X}_i ve \hat{Y}_i koordinatlarının ve düzeltmelerinin ters ağırlıkları;

$$\delta \hat{X}_i = \delta t_x + \bar{x}_i \delta a_x - \bar{y}_i \delta o_y$$

$$q_{xixi} = 1/n + \bar{x}_i^2 q_{axax} - 2 \bar{x}_i \bar{y}_i q_{axoy} + \bar{y}_i^2 q_{oyoy}$$

$$q_{xixi} = 1/n + \bar{x}_i^2 [\bar{y}^2] / d - 2 \bar{x}_i \bar{y}_i [\bar{x} \bar{y}] / d + \bar{y}_i^2 [\bar{x}^2] / d$$

$$\delta \hat{Y}_i = \delta t_y + \bar{x}_i \delta a_y + \bar{y}_i \delta o_x$$

$$q_{yiyi} = 1/n + \bar{x}_i^2 q_{ayay} + 2 \bar{x}_i \bar{y}_i q_{ayox} + \bar{y}_i^2 q_{oxox}$$

$$q_{yiyi} = 1/n + \bar{x}_i^2 [\bar{y}^2] / d - 2 \bar{x}_i \bar{y}_i [\bar{x} \bar{y}] / d + \bar{y}_i^2 [\bar{x}^2] / d$$

$$q_{ii} = q_{xixi} = q_{yiyi} = 1/n + \bar{x}_i^2 [\bar{y}^2] / d - 2 \bar{x}_i \bar{y}_i [\bar{x} \bar{y}] / d + \bar{y}_i^2 [\bar{x}^2] / d$$

$$q_{vxixi} = q_{vyiyi} = 1 - q_{ii}$$

Ek-3. Benzerlik dönüşümü sonuçları.

```

=====
Helmert Donusum Paremetreleri
=====

      X = a*x - o*y + tx
      Y = o*x + a*y + ty
      a = k * cos(A)      o = k * sin(A)
      a = .99989307      o = .00003094
      k = .99989307      A = .001970 g
      tx = 9.2386 m      ty = -2.2114 m

=====
Verilen Koor.      Hesaplanan Koor.      Duzeltmeler
=====
i  N.N.      x (m)      y (m)      X (m)      Y (m)      vx=X-x  vy=Y-y
=====
1  29      89687.350      3741.870      89687.312      3741.914      -.0378  .0435
2  43      91913.740      7703.240      91913.812      7703.319      .0715  .0788
3  48      92417.740      8063.660      92417.836      8063.746      .0965  .0858
4  86      89159.590      3295.210      89159.482      3295.225      -.1075  .0149
5  23      88671.270      9026.260      88671.247      9026.037      -.0227  -.2230
=====
[vx2+vy2] = .0933 m2      f = 6      mo = .1247 m

=====
Olcek Parametresinin Testi
=====
1 / 9352. > 1 / 50000. --> -106.93ppm

F - Dagilimine gore olcek testi
Tolc= 29.0053 > F(1, 6,.950) = 5.3643 --> Olcek parametresi anlamlidir

t - Dagilimine gore olcek testi
Tolc= 5.3857 > t( 6,.975) = 2.4475 --> Olcek parametresi anlamlidir

=====
Koordinatlarin Tek Tek Uyusum Testi
=====

i  N.N.  vx(m)  qvx  svx0  mvx  Tvix  vy(m)  qvy  svy0  mvv  Tvy
=====
1  29  -.038  .614  .135  .106  .358  .044  .614  .134  .105  .413
2  43  .072  .694  .131  .109  .654  .079  .694  .130  .108  .728
3  48  .096  .621  .125  .099  .978  .086  .621  .128  .101  .853
4  86  -.108  .524  .119  .086  1.244  .015  .524  .136  .099  .151
* 5  23  -.023  .548  .136  .101  .225  -.223  .548  .022  .017  13.497*
=====

*** Olan nokta uyusumsuzdur.
t(2*n-4-1,1-.050/2n) = t( 5 , .99500) = 4.0302

=====
Koordinat Ciftleri icin Uyusumsuz Olculer Testi
=====

1.inci nok. ; T = .4170  <=  c = 1.6432
2.inci nok. ; T = .7238  <=  c = 1.6432
3.inci nok. ; T = .9290  <=  c = 1.6432
4.inci nok. ; T = .8502  <=  c = 1.6432
5.inci nok. ; T = 1.7176  >   c = 1.6432  <----- Uyusumsuz

```

Ek-3'ün devamı. 23 numaralı nokta uyuşumsuz olduğu için eşlenik nokta kümesinde çıkarılarak kalan 4 nokta ile benzerlik dönüşümü tekrarlanmıştır.

Helmert Donusum Paremetreleri							
=====							
X = a*x - o*y + tx							
Y = o*x + a*y + ty							
a = k * cos(A) o = k * sin(A)							
a = .99986739 o = .00005126							
k = .99986739 A = .003264 g							
tx = 11.6803 m ty = -3.9660 m							
=====							
		Verilen Koor.		Hesaplanan Koor.		Duzeltmeler	
		=====		=====		=====	
i	N.N.	x (m)	y (m)	X (m)	Y (m)	vx=X-x	vy=Y-y
=====							
1	29	89687.350	3741.870	89687.375	3741.886	.0248	.0156
2	43	91913.740	7703.240	91913.736	7703.234	-.0036	-.0057
3	48	92417.740	8063.660	92417.741	8063.662	.0011	.0024
4	86	89159.590	3295.210	89159.568	3295.198	-.0223	-.0123
=====							
[vx2+vy2] =		.0016 m2		f = 4		mo = .0197 m	

=====

Olcek Parametresinin Testi

=====

1 / 7541. > 1 / 50000. --> -132.61ppm

F - Dagilimine gore olcek testi
Tolc=1220.8128 > F(1, 4,.950) = 6.3681 --> Olcek parametresi anlamlidir

t - Dagilimine gore olcek testi
Tolc= 34.9401 > t(4,.975) = 2.7766 --> Olcek parametresi anlamlidir

=====

Koordinatlarin Tek Tek Uyusum Testi

=====

i	N.N.	vx(m)	qvx	svx0	mvx	Tvx	vy(m)	qvy	svy0	mvv	Tvv
=====											
1	29	.025	.562	.012	.009	2.665	.016	.562	.019	.015	1.070
2	43	-.004	.555	.023	.017	.214	-.006	.555	.022	.017	.340
3	48	.001	.446	.023	.015	.071	.002	.446	.023	.015	.157
4	86	-.022	.437	.012	.008	2.854	-.012	.437	.020	.013	.924
=====											

"*" Olan nokta uyusumsuzdur.
t(2*n-4-1,1-.050/2n) = t(3 , .99375) = 5.3600

=====

Koordinat Ciftleri icin Uyusumsuz Olculer Testi

=====

1.inci nok. ; T = 1.3996 <= c = 1.4053
2.inci nok. ; T = .3229 <= c = 1.4053
3.inci nok. ; T = .1401 <= c = 1.4053
4.inci nok. ; T = 1.3800 <= c = 1.4053

i	N.N.	x (m)	y (m)	X (m)	Y (m)	dx	dy	ds
=====								
1	23	88671.27	9026.26	88671.23	9025.85	0.04	0.40	0.40
=====								

Ek-4. Afin dönüşümü sonuçları.

```

=====
Afin Donusum Paremetreleri
=====
X2 = ax*X1 - oy*Y1 + tx
Y2 = ay*X1 + ox*Y1 + ty

ax = kx * cos(Ax)      ay = kx * sin(Ax)
ox = ky * cos(By)      oy = ky * sin(By)

ax = .99985701          ay = -.00004454
ox = .99992853          oy = .00004494

kx = .99985701          ky = .99992854
Ax = -.002836 g         By = .002861 g
tx = 12.5864 m          ty = 4.3836 m

=====
Verilen Koor.          Hesaplanan Koor.      Duzeltmeler
=====
i  N.N.      x (m)      y (m)      X (m)      Y (m)      vx=X-x  vy=Y-y
=====
1  29      89687.350    3741.870    89687.374    3741.872    .0236    .0020
2  43      91913.740    7703.240    91913.737    7703.250   -.0029    .0097
3  48      92417.740    8063.660    92417.739    8063.651   -.0012   -.0086
4  86      89159.590    3295.210    89159.569    3295.207   -.0209   -.0026
5  23      88671.270    9026.260    88671.271    9026.260    .0014   -.0005
=====
[vx] = .0000 [vy] = .0000 [vxvx+vyvy] = .0012 m2
f = 4      mo = .0172 m

```

Taci=(Ax-By)/MAB = 13.8086 > t(4,0.950)= 2.1323 --> Farkli Donukluk anlamlidir
Tolc=(kx-ky)/Mkxy = 11.0376 > t(4,0.950)= 2.1323 --> Farkli Olcek anlamlidir

```

=====
i  N.N.  vx(m)  qvx  svx0  mvx  Tvx  vy(m)  qvy  svy0  mvv  Tvy
=====
1  29    .024   .554  .008  .006  4.119  .002   .554  .020  .015  .133
2  43   -.003   .582  .020  .015  .192   .010   .582  .018  .014  .686
3  48   -.001   .421  .020  .013  .091  -.009   .421  .018  .012  .720
4  86   -.021   .439  .008  .005  3.979  -.003   .439  .020  .013  .199
5  23    .001    .004  .015  .001  1.452  .000    .004  .019  .001  .391
=====

```

"*" Olan nokta uyusumsuzdur.
 $t(2*n-6-1, 1-.050/2n) = t(3, .99500) = 5.7973$

=====

Koordinat Ciftleri icin Uyusumsuz Olculer Testi

=====

```

1.inci nok. ; T = 1.3082  <=  c = 1.6432
2.inci nok. ; T = .5439   <=  c = 1.6432
3.inci nok. ; T = .5479   <=  c = 1.6432
4.inci nok. ; T = 1.3067  <=  c = 1.6432
5.inci nok. ; T = .9604   <=  c = 1.6432

```


Ek-4'ün devamı. 23 numaralı nokta uyuşumsuz olduğu için eşlenik nokta kümesinde çıkarılarak kalan 4 nokta ile afin dönüşümü tekrarlanmıştır.

```

=====
Afin Donusum Paremetreleri
=====
X2 = ax*X1 - oy*Y1 + tx
Y2 = ay*X1 + ox*Y1 + ty
ax = kx * cos(Ax)      ay = kx * sin(Ax)
ox = ky * cos(By)      oy = ky * sin(By)
ax = .99977299          ay = -.00001576
ox = .99991021          oy = -.00000855

kx = .99977299          ky = .99991021
Ax = -.001003 g         By = -.000544 g
tx = 19.9104 m          ty = 1.8749 m

=====
Verilen Koor.          Hesaplanan Koor.      Duzeltmeler
=====
i  N.N.      x (m)      y (m)      X (m)      Y (m)      vx=X-x  vy=Y-y
=====
1  29      89687.350    3741.870    89687.362    3741.876    .0122    .0059
2  43      91913.740    7703.240    91913.751    7703.245    .0105    .0051
3  48      92417.740    8063.660    92417.729    8063.655   -.0108   -.0052
4  86      89159.590    3295.210    89159.578    3295.204   -.0118   -.0057
=====
[vx] = .0000 [vy] = .0000 [vxvx+vyvy] = .0006 m2
f = 2      mo = .0178 m

```

Taci=(Ax-By)/MAB =0.0893<= t(2,.950)= 2.9130 --> Farkli Donukluk anlamsizdir
 Tolc=(kx-ky)/Mkxy=1.6996<= t(2,.950)= 2.9130 --> Farkli Olcek anlamsizdir

```

=====
i  N.N.  vx(m)  qvx  svx0  mvx  Tvx  vy(m)  qvy  svy0  mvy  Tvy
=====
1  29    .012  .287  .011  .006  2.072  .006  .287  .023  .012  .483
2  43    .011  .214  .011  .005  2.072  .005  .214  .023  .011  .483
3  48   -.011  .228  .011  .005  2.072  -.005  .228  .023  .011  .483
4  86   -.012  .271  .011  .006  2.072  -.006  .271  .023  .012  .483
=====

```

"*" Olan nokta uyusumsuzdur.
 $t(2*n-6-1, 1-.050/2n) = t(1 , .99375) = 34.4879$

Koordinat Ciftleri icin Uyuşumsuz Olculer Testi

```

1.inci nok. ; T = 1.0000  <=  c = 1.4053
2.inci nok. ; T = 1.0000  <=  c = 1.4053
3.inci nok. ; T = 1.0000  <=  c = 1.4053
4.inci nok. ; T = 1.0000  <=  c = 1.4053

```

```

i  N.N.  x (m)      y (m)      X (m)      Y (m)      dx      dy      ds
=====
1  23    88671.27    9026.26    88671.63    9026.14   -0.36    0.12    0.38
=====

```