

## **TRAVAUX PRATIQUES DE CALCUL SCIENTIFIQUE**



Projet de Calcul Scientifique  
M1 Mécanique et Energétique

**Login** : 20805577

Houdroge Farah Yasmina  
Le 5 janvier 2012  
Page | 2

## Table des Matières

<b>INTRODUCTION</b>	<b>4</b>
<b>1 ÉTAPE 1. GÉOMÉTRIE ET MAILLAGE</b>	<b>6</b>
1.1 OBJECTIFS	6
1.2 QUESTIONS SUR L'ÉTAPE 1	6
<b>2 ÉTAPE 2. APPROXIMATION NUMÉRIQUE ET DISCRÉTISATION</b>	<b>6</b>
2.1 LA DISCRÉTISATION DU PROBLÈME CONTINU	7
2.2 MATRICES DE MASSE ET MATRICES DE RIGIDITÉ	7
2.3 QUESTIONS SUR L'ÉTAPE 2	8
<b>3 ÉTAPE 3. RÉOLUTION DU SYSTÈME LINÉAIRE</b>	<b>11</b>
3.1 LA MÉTHODE DE DIAGONALISATION SUCCESSIVE	11
3.2 QUESTIONS SUR L'ÉTAPE 3	12
<b>4 ÉTAPE 4. VALIDATION DANS LE CAS DE NEUMAN</b>	<b>13</b>
4.1 OBJECTIFS	13
4.2 QUESTIONS SUR L'ÉTAPE 4	13
<b>5 ÉTAPE 5. ADAPTATION ET VALIDATION DANS LE CAS DE DIRICHLET</b>	<b>17</b>
5.1 INTRODUCTION	17
5.2 QUESTIONS SUR L'ÉTAPE 5	17
<b>6 CONCLUSION : QUESTIONS DE SYNTHÈSE ET TESTS FINAUX</b>	<b>17</b>
<b>ANNEXES</b>	<b>19</b>

## INTRODUCTION

Ce document constitue le rapport des Travaux Pratiques mené dans le cadre du cours de Calcul Scientifique. Il présente une synthèse des procédures de programmation utilisées, des résultats obtenus ainsi que de la confrontation des solutions exactes avec les solutions trouvées par approximation. Les programmes, qui ont été développés à l'aide de MATLAB, ont pour but d'approximer la solution d'un problème type Laplacien en deux dimensions par une méthode de discrétisation en éléments finis.

Ce projet a été mené par Farah Yasmina Houdroge.

# Discretisation du laplacien par éléments finis et inversion par diagonalisation successive

---

## 1 ÉTAPE 1. GÉOMÉTRIE ET MAILLAGE

### 1.1 OBJECTIFS

À partir d'une géométrie rectangulaire donnée, on cherche à effectuer un maillage cartésien. On a :

$$x_{i+1} = x_i + \Delta x_i, \quad 1 \leq i \leq n-1$$

$$y_{j+1} = y_j + \Delta y_j, \quad 1 \leq j \leq m-1$$

Avec  $x_1 = y_1 = 0$ ,  $x_n = L_x$  et  $y_m = L_y$ . On définit ainsi  $N_r$  rectangles, où  $N_r = (n-1) \times (m-1)$ .

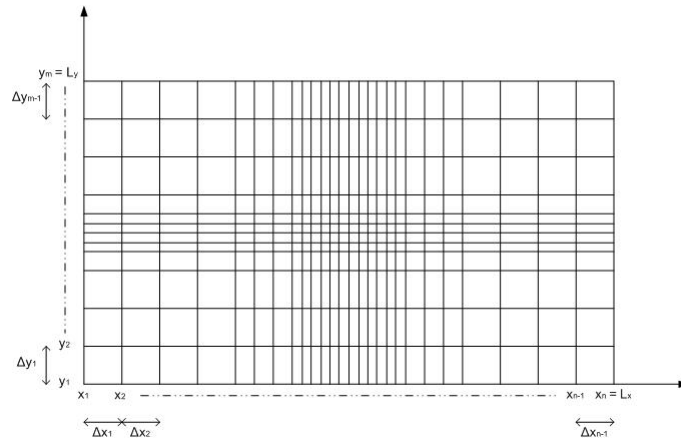


Figure 1 : exemple de maillage rectangulaire

Ainsi, si l'on prend le sommet en bas à gauche du rectangle  $k$  comme point de référence, les fonctions  $I_R(k)$  et  $J_R(k)$  définies ci-dessous permettent d'obtenir ses coordonnées :

$$I_R(k) = k - (n-1)E\left(\frac{k-1}{n-1}\right)$$

$$J_R(k) = 1 + E\left(\frac{k-1}{n-1}\right)$$

où  $E(N)$  est la partie entière du nombre  $N$  et  $1 \leq k \leq N_r$ .

Bien évidemment, connaissant les pas de discrétisation  $\Delta x_i$  et  $\Delta y_j$ , les coordonnées des 3 autres sommets du rectangle  $k$  peuvent aisément être calculées.

Enfin, les deux fonctions  $I_P(k)$  et  $J_P(k)$  suivantes donnent, au numéro d'un point, les indices  $i$  et  $j$  de ce point :

$$I_P(k) = k - nE\left(\frac{k-1}{n}\right)$$

$$J_P(k) = 1 + E\left(\frac{k-1}{n}\right)$$

avec  $1 \leq k \leq N_T$  où  $N_T = nm$ .

### 1.2 QUESTIONS SUR L'ÉTAPE 1

Programmation de tableaux, tableauxindice et delta avec Matlab.

## 2 ÉTAPE 2. APPROXIMATION NUMÉRIQUE ET DISCRÉTISATION

## 2.1 LA DISCRÉTISATION DU PROBLÈME CONTINU

Quand on effectue une discrétisation en éléments finis, il est nécessaire de définir des fonctions de base qui sont des fonctions à support local. Ces fonctions, notées  $\varphi_q(x, y)$  où  $q = 1, \dots, N_t = nm$ , sont des polynômes de degré 1 par rapport à chaque variable  $x$  et  $y$  séparément, soit :

$$\varphi_q(x, y) = \gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 xy$$

avec  $\gamma_i, i = 0, \dots, 3$ , des constantes réelles.

On a donc :

$$\varphi_q(x_i, y_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } I_p(q) = i \text{ et } J_p(q) = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

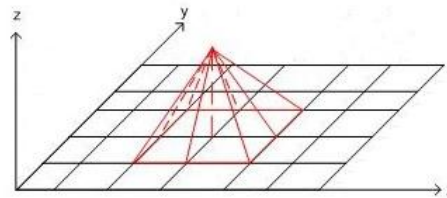


Figure 2 : représentation en 3D d'une fonction de base

Le problème que nous cherchons à résoudre est le suivant :

$$\begin{cases} -\Delta v = -\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) = f(x, y) \\ \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où  $f$  est une fonction  $C^0$  connue. Par la suite, on désigne par  $u(x, y)$  l'approximation numérique de la solution exacte  $v(x, y)$  du problème.

$u(x, y)$  est de la forme :

$$u(x, y) = \sum_{q=1}^{N_T} u_q \varphi_q(x, y)$$

Avec  $u_q = u(x_{I_p(q)}, y_{J_p(q)})$ .

La suite consistera à résoudre le problème en question d'une façon « traditionnelle » en utilisant une formulation faible. L'inconvénient de cette méthode est qu'elle serait très coûteuse en temps de calcul, c'est pour cela qu'il est préférable de passer à une autre méthode que l'on va exploiter ci-dessous.

## 2.2 MATRICES DE MASSE ET MATRICES DE RIGIDITÉ

Il s'agit ici d'avoir recours à l'orthogonalité de ce maillage afin de pouvoir exprimer les fonctions de base sous la forme suivante :

$$\varphi_q(x, y) = \varphi_r^x(x) \varphi_s^y(y)$$

où  $(r, s)$  sont les indices en  $x, y$  du point numéro  $q$  ( $r = I_p(q)$  et  $s = J_p(q)$ ).

On admet que le problème se ramène à la résolution de l'équation suivante :

$$A^x U (B^y)^T + B^x U (A^y)^T = B^x F (B^y)^T$$

avec

$$A_{ij}^x = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{\partial \varphi_i^x}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j^x}{\partial x} dx \quad A_{ij}^y = \sum_{k=1}^{m-1} \int_{y_k}^{y_{k+1}} \frac{\partial \varphi_i^y}{\partial y} \frac{\partial \varphi_j^y}{\partial y} dy$$

$$B_{ij}^x = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_i^x \varphi_j^x dx \quad B_{ij}^y = \sum_{k=1}^{m-1} \int_{y_k}^{y_{k+1}} \varphi_i^y \varphi_j^y dy$$

et  $U$  et  $F$  deux matrices  $n \times m$  de termes général respectifs  $u(x_r, y_s)$  et  $f(x_r, y_s)$ .

### 2.3 QUESTIONS SUR L'ÉTAPE 2

On sait que :

$$A_{ij}^x = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{\partial \varphi_i^x}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j^x}{\partial x} dx$$

et que les fonctions  $\varphi_q^x$  sont à support local, c'est-à-dire qu'elles sont nulles sauf si  $x \in [x_k, x_{k+1}]$  donc uniquement si  $i$  et  $j$  sont égaux chacun à  $k$  ou  $k + 1$ .

La matrice de rigidité obtenue est tridiagonale et symétrique, et s'écrit donc sous la forme (pour  $n = 2$  par exemple) :

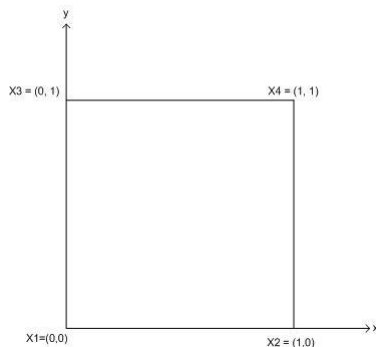
$$A^x = \begin{pmatrix} Y & X \\ X & Y \end{pmatrix}$$

Ceci montre bien qu'on n'a en réalité que deux intégrales à calculer !

Les fonctions de base sont des fonctions telles que :

$$\hat{\varphi}_q(\hat{x}_i, \hat{y}_j) = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{si } I_p(q) = i \text{ et } J_p(q) = j \\ \text{sinon} \end{matrix}$$

Dans ce cas, on a  $\hat{\Omega} = [0,1] \times [0,1]$  :



Comme explicité sur la figure 3, à chaque rectangle  $k$  sont associés quatre points et leur numéros locaux :  $X1, X2, X3$  et  $X4$  de coordonnées respectives  $(0,0), (1,0), (0,1)$  et  $(1,1)$ . On peut donc définir quatre fonctions de bases associées à chaque point telles que :

$$\hat{\varphi}_i(X_j) = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{si } i = j \\ \text{sinon} \end{matrix}$$

Figure 3 : élément de référence  $\Omega$



- **Calcul de  $\hat{\varphi}_1$  :**

On sait d'après la définition de  $\hat{\varphi}_1$  son expression :

$$\hat{\varphi}_1(\hat{x}, \hat{y}) = \gamma_0 + \gamma_1 \hat{x} + \gamma_2 \hat{x} + \gamma_3 \hat{x} \hat{y}$$

Or

$$\hat{\varphi}_1(\hat{x}, \hat{y}) = \begin{cases} 1 & \text{si } (\hat{x}, \hat{y}) = (0,0) \\ 0 & \text{si } (\hat{x}, \hat{y}) = (0,1) \text{ ou } (1,0) \text{ ou } (1,1) \end{cases}$$

Ceci nous ramène au système linéaire suivant :

$$\begin{cases} \gamma_0 + \gamma_1 \times 0 + \gamma_2 \times 0 + \gamma_3 \times 0 = 1 \\ \gamma_0 + \gamma_1 \times 0 + \gamma_2 \times 1 + \gamma_3 \times 0 = 0 \\ \gamma_0 + \gamma_1 \times 1 + \gamma_2 \times 0 + \gamma_3 \times 0 = 0 \\ \gamma_0 + \gamma_1 \times 1 + \gamma_2 \times 1 + \gamma_3 \times 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \gamma_0 = 1 \\ \gamma_0 + \gamma_2 = 0 \\ \gamma_0 + \gamma_1 = 0 \\ \gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \gamma_0 = 1 \\ \gamma_2 = -1 \\ \gamma_1 = -1 \\ \gamma_3 = 1 \end{cases}$$

D'où l'expression de  $\hat{\varphi}_1$  :

$$\boxed{\hat{\varphi}_1(\hat{x}, \hat{y}) = 1 - \hat{x} - \hat{y} + \hat{x}\hat{y}}$$

- **Calcul de  $\hat{\varphi}_2$  :**

En procédant de la même manière que pour  $\hat{\varphi}_1$ , on trouve :

$$\boxed{\hat{\varphi}_2(\hat{x}, \hat{y}) = \hat{x} - \hat{x}\hat{y}}$$

- **Calcul de  $\hat{\varphi}_3$  :**

$$\boxed{\hat{\varphi}_3(\hat{x}, \hat{y}) = \hat{y} - \hat{x}\hat{y}}$$

- **Calcul de  $\hat{\varphi}_4$  :**

$$\boxed{\hat{\varphi}_4(\hat{x}, \hat{y}) = \hat{x}\hat{y}}$$

Si on pose  $\hat{\varphi}_0(z) = z$  et  $\hat{\varphi}_1(z) = 1 - z$ , on remarque que les fonctions  $\hat{\varphi}_i(\hat{x}, \hat{y}), i = 1, \dots, 4$ , peuvent en effet s'écrire comme une combinaison de  $\hat{\varphi}_0(\hat{x}), \hat{\varphi}_1(\hat{x}), \hat{\varphi}_0(\hat{y})$  et  $\hat{\varphi}_1(\hat{y})$ . Le résultat est :

$$\hat{\varphi}_1(\hat{x}, \hat{y}) = 1 - \hat{x} - \hat{y} + \hat{x}\hat{y} = (1 - \hat{x})(1 - \hat{y}) = \hat{\varphi}_1(\hat{x})\hat{\varphi}_1(\hat{y})$$

$$\hat{\varphi}_2(\hat{x}, \hat{y}) = \hat{x} - \hat{x}\hat{y} = \hat{x}(1 - \hat{y}) = \hat{\varphi}_0(\hat{x})\hat{\varphi}_1(\hat{y})$$

$$\hat{\varphi}_3(\hat{x}, \hat{y}) = \hat{y} - \hat{x}\hat{y} = (1 - \hat{x})\hat{y} = \hat{\varphi}_1(\hat{x})\hat{\varphi}_0(\hat{y})$$

$$\hat{\varphi}_4(\hat{x}, \hat{y}) = \hat{x}\hat{y} = \hat{\varphi}_0(\hat{x})\hat{\varphi}_0(\hat{y})$$

On définit les matrices de dimension 2 x 2 notées  $\hat{a}_{\alpha\beta}$  et  $\hat{b}_{\alpha\beta}$ ,  $\alpha, \beta = 0, 1$ , par :

$$\hat{a}_{\alpha\beta} = \int_0^1 \hat{\varphi}'_{\alpha}(\hat{x})\hat{\varphi}'_{\beta}(\hat{x})d\hat{x} \text{ et } \hat{b}_{\alpha\beta} = \int_0^1 \hat{\varphi}_{\alpha}(\hat{x})\hat{\varphi}_{\beta}(\hat{x})d\hat{x}.$$

On rappelle que  $\hat{\varphi}_0(z) = z$  donc  $\hat{\varphi}'_0(z) = 1$  et que  $\hat{\varphi}_1(z) = 1 - z$  donc  $\hat{\varphi}'_1(z) = -1$ .

- **Calcul analytique de  $\hat{a}_{\alpha\beta}$  :**

$$\hat{a}_{00} = \hat{a}_{11} = \int_0^1 1d\hat{x} = [\hat{x}]_0^1 = 1$$

et

$$\hat{a}_{01} = \hat{a}_{10} = -\int_0^1 1d\hat{x} = -1$$

d'où

$$\hat{a}_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- **Calcul analytique de  $\hat{b}_{\alpha\beta}$  :**

$$\hat{b}_{00} = \int_0^1 \hat{x}^2 d\hat{x} = \left[ \frac{\hat{x}^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3},$$

$$\hat{b}_{11} = \int_0^1 (1 - \hat{x})^2 d\hat{x} = \left[ -\frac{(1 - \hat{x})^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3} = \hat{b}_{00}$$

et

$$\hat{b}_{01} = \hat{b}_{10} = \int_0^1 \hat{x}(1 - \hat{x})d\hat{x} = \left[ \frac{\hat{x}^2}{2} - \frac{\hat{x}^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

d'où

$$\hat{b}_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

- **Calcul de la matrice  $A_{ij}^x$  en fonction de  $\hat{a}$**

Pour passer de la matrice  $A_{ij}^x$  à la matrice  $\hat{a}$ , on effectue un changement de variable. On a :

$$\begin{cases} \hat{x}(x) = c_1 x + c_2 \\ \hat{x}(x = x_k) = 0 \\ \hat{x}(x = x_{k+1}) = 1 \end{cases}$$

où  $c_1$  et  $c_2$  sont des constantes à déterminer.

La résolution de ce système linéaire nous ramène à la solution suivante :

$$\hat{x}(x) = \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}.$$

On a donc :  $x = (x_{k+1} - x_k)\hat{x} + x_k$  soit  $dx = (x_{k+1} - x_k)d\hat{x}$ , d'où :

$$A_{ij}^x = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{\partial \varphi_i^x}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j^x}{\partial x} dx$$

$$\Leftrightarrow A_{i\alpha j\beta}^x = \int_0^1 \frac{\hat{\varphi}'_\alpha(\hat{x})}{(x_{i+1} - x_i)} \frac{\hat{\varphi}'_\beta(\hat{x})}{(x_{i+1} - x_i)} (x_{i+1} - x_i) d\hat{x} = \frac{1}{\Delta x_i} \int_0^1 \hat{\varphi}'_\alpha(\hat{x}) \hat{\varphi}'_\beta(\hat{x}) d\hat{x}$$

D'où :

$$A_{i\alpha j\beta}^x = \frac{\hat{a}_{\alpha\beta}}{\Delta x_i}.$$

Si  $|i_\alpha - j_\beta| > 1$ , alors  $A_{i\alpha j\beta}^x = 0$ .

- **Calcul de  $B_{ij}^x$  en fonction de  $\hat{b}$**

En procédant de la même façon que pour  $A_{ij}^x$ , on trouve :

$$B_{i\alpha j\beta}^x = \Delta x_i \hat{b}_{\alpha\beta}.$$

Si  $|i_\alpha - j_\beta| > 1$ , alors  $B_{i\alpha j\beta}^x = 0$ .

### 3 ÉTAPE 3. RÉOLUTION DU SYSTÈME LINÉAIRE

#### 3.1 LA MÉTHODE DE DIAGONALISATION SUCCESSIVE

Le système linéaire suivant

$$A^x U (B^y)^T + B^x U (A^y)^T = B^x F (B^y)^T$$

ou encore

$$(B^x)^{-1} A^x U + U ((B^y)^{-1} A^y)^T = F$$

sera ici résolu par la méthode de diagonalisation successive. On peut se ramener au système suivant

$$\Lambda^x \hat{U} + \hat{U} \Lambda^y = \hat{F}$$

où  $\Lambda^x = P^{-1}\tilde{A}^xP$  et  $\Lambda^y = Q^{-1}\tilde{A}^yQ$  sont les matrices diagonales formées des valeurs propres des matrices  $\tilde{A}^x = (B^x)^{-1}A^x$  et  $\tilde{A}^y = (B^y)^{-1}A^y$  respectivement (on note que les matrices  $P$  et  $Q$  sont les matrices de passage),  $\hat{U} = P^{-1}U(Q^{-1})^T$  et  $\hat{F} = P^{-1}F(Q^{-1})^T$ .

On admet que la solution de ce système s'écrit sous la forme :

$$\hat{U}_{ij} = \frac{\hat{F}_{ij}}{\lambda_i^x + \lambda_j^y}$$

où  $\lambda_i^x$  et  $\lambda_j^y$  sont les valeurs propres des matrices  $\tilde{A}^x$  et  $\tilde{A}^y$ .

### 3.2 QUESTIONS SUR L'ÉTAPE 3

On a :

$$(B^x)^{-1}A^xU + U((B^y)^{-1}A^y)^T = F$$

or  $\tilde{A}^x = (B^x)^{-1}A^x$  et  $\tilde{A}^y = (B^y)^{-1}A^y$  d'où :

$$\tilde{A}^xU + U(\tilde{A}^y)^T = F$$

On multiplie à gauche par  $P^{-1}$  et à droite par  $(Q^{-1})^T$  :

$$P^{-1}\tilde{A}^xU(Q^{-1})^T + P^{-1}U(\tilde{A}^y)^T(Q^{-1})^T = P^{-1}F(Q^{-1})^T = \hat{F}$$

et sachant que  $PP^{-1} = (Q^{-1}Q)^T = (Q^{-1})^TQ^T = \bar{I}$  (matrice identité), on se permet d'écrire :

$$P^{-1}\tilde{A}^xPP^{-1}U(Q^{-1})^T + P^{-1}U(Q^{-1})^TQ^T(\tilde{A}^y)^T(Q^{-1})^T = \hat{F}$$

d'où :

$$\Lambda^x\hat{U} + \hat{U}Q^T(\tilde{A}^y)^T(Q^{-1})^T = \hat{F}$$

et enfin, en utilisant la propriété de la transposée du produit de deux matrices :  $(AB)^T = B^TA^T$ , on en déduit que  $Q^T(\tilde{A}^y)^T(Q^{-1})^T = Q^T(Q^{-1}\tilde{A}^y)^T = (Q^{-1}\tilde{A}^yQ)^T = (\Lambda^y)^T = \Lambda^y$  puisque  $\Lambda^y$  est une matrice diagonale. D'où le résultat final :

$$\boxed{\Lambda^x\hat{U} + \hat{U}\Lambda^y = \hat{F}}$$

Cependant, il existe un couple  $i, j$  tel que  $\lambda_i^x = \lambda_j^y = 0$ . Cela pose un problème dans la résolution parce que si  $\lambda_i^x = \lambda_j^y = 0$ , on a donc  $\hat{U}_{ij}$  qui tend vers l'infini (solution non physique). Pour éviter cela, on pose dans ce cas  $\hat{U}_{ij} = 0$ . Afin de le prouver, il suffit de montrer qu'il existe deux lignes ou deux colonnes des matrices  $\tilde{A}^x$  et  $\tilde{A}^y$  telles que l'une est une combinaison linéaire de l'autre.

On a  $\tilde{A}^x = (B^x)^{-1}A^x$ . Or la matrice  $B^x$  est inversible, donc son déterminant n'est jamais nul. D'où :

$$\det(\tilde{A}^x) = \det((B^x)^{-1}A^x) = 0 \Leftrightarrow \det((B^x)^{-1})\det(A^x) = 0 \Leftrightarrow \det(A^x) = 0$$

Or on a montré précédemment que la matrice  $A^x$  s'écrit sous la forme :

$$A^x = \begin{pmatrix} \frac{1}{\Delta x_1} & -\frac{1}{\Delta x_1} & & 0 \\ -\frac{1}{\Delta x_1} & \frac{1}{\Delta x_1} + \frac{1}{\Delta x_2} & -\frac{1}{\Delta x_2} & \\ & -\frac{1}{\Delta x_2} & \frac{1}{\Delta x_2} + \frac{1}{\Delta x_3} & -\frac{1}{\Delta x_3} \\ 0 & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Si on somme toutes les lignes de  $i = 2$  à  $i = n$ , on remarque que les lignes  $i = 1$  et  $i = 2$  sont identiques et s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\Delta x_1} & -\frac{1}{\Delta x_1} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

On a donc bien deux lignes dont une est une combinaison linéaire de l'autre, donc on en déduit qu'il existe bien un couple  $i, j$  tel que  $\lambda_i^x = \lambda_j^x = 0$ .

## 4 ÉTAPE 4. VALIDATION DANS LE CAS DE NEUMAN

### 4.1 OBJECTIFS

Afin de valider le programme écrit précédemment, nous allons directement l'appliquer à l'exemple suivant :

Résoudre :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -2 \cos(x) \cos(y) \\ \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{sur } \Omega = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \\ \text{sur } \partial\Omega \end{matrix}$$

dont la solution exacte est  $v(x, y) = \cos(x) \cos(y)$ .

On choisit un maillage régulier :  $n = m$  et  $\Delta x_i = \Delta y_j = L_x/(n-1) = L_y/(n-1) \equiv \Delta x$ .

L'erreur  $E$  est définie par :  $E = \sup_{i,j} |v(x_i, y_j) - u_{ij}| = A(\Delta x)^p$  où  $A$  est une constante,  $p$  l'ordre du schéma et  $u_{ij}$  l'approximation numérique de  $v$  au point  $(x_i, y_j)$ .

Un programme qui regroupe toutes les étapes de la résolution numérique se trouve en annexe.

### 4.2 QUESTIONS SUR L'ÉTAPE 4

Afin de trouver l'ordre de la méthode, il suffit de représenter graphiquement l'évolution du logarithme de l'erreur définie précédemment en fonction du logarithme des pas de discrétisation. En effet, si  $E$  est fonction linéaire de  $(\Delta x)^p$ , alors  $\log(E)$  est fonction affine de  $\log(\Delta x)$  et cette droite a pour pente le coefficient  $p$  qui est l'ordre de la méthode :

$$E = A(\Delta x)^p \Leftrightarrow \log(E) = \log[A(\Delta x)^p] = \log[(\Delta x)^p] + \log(A) = p \log(\Delta x) + \log(A)$$

On trouve une pente  $p$  égale à 1.9976, soit  $p \approx 2$ . On en déduit alors que la méthode est d'ordre 2.

Essayons de résoudre maintenant le problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 2 - 2 \cos(x) \cos(y) \\ \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{sur } \Omega = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \\ \text{sur } \partial\Omega \end{matrix}$$

Ce problème n'admet pas de solution, car le membre de droite n'est pas dans l'image.

- **Diagonalisation successive dans le cas 1D :**

Etudions le problème suivant :

$$\begin{cases} \mathcal{L}v \equiv \frac{d^2v}{dx^2} = f(x) \\ \frac{dv}{dx}(0) = \frac{dv}{dx}(2\pi) = 0 \end{cases}$$

pour  $x \in [0, 2\pi]$  et où  $v$  et  $f$  sont  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $[0, 2\pi]$ .

Cherchons les couples valeur propre, vecteur propre  $(\lambda_k, h_k(x))$  de l'opérateur  $\mathcal{L}$  :

$$\mathcal{L}h_k = \lambda_k h_k$$

avec  $h'_k(0) = h'_k(2\pi) = 0$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{L}h_k &= \lambda_k h_k \\ \Leftrightarrow \frac{d^2h_k}{dx^2} - \lambda_k h_k &= 0 \end{aligned}$$

dont l'équation caractéristique est :  $R^2 - \lambda_k = 0 \Leftrightarrow R^2 = \lambda_k$ .

On distingue trois cas :

- **Si  $\lambda_k = 0$  :**

$$\frac{d^2h_k}{dx^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{dh_k}{dx} = A \Leftrightarrow h_k(x) = Ax + B \text{ où } A, B \text{ sont des constantes.}$$

On a  $h'_k(0) = h'_k(2\pi) = 0$  soit  $A = 0$ , d'où :  $\boxed{h_k(x) = cste = B} \forall x \in [0, 2\pi]$ .

- **Si  $\lambda_k < 0$  :**

$$R^2 = \lambda_k \Leftrightarrow R = \mp i\sqrt{-\lambda_k} \text{ d'où :}$$

$$\begin{aligned} h_k(x) &= Ae^{-i\sqrt{-\lambda_k}x} + Be^{i\sqrt{-\lambda_k}x} \\ &= A_1 \cos(\sqrt{-\lambda_k}x) + B_1 \sin(\sqrt{-\lambda_k}x) \end{aligned}$$

$$\text{Dans ce cas : } h'_k(x) = \sqrt{-\lambda_k} [B_1 \cos(\sqrt{-\lambda_k}x) - A_1 \sin(\sqrt{-\lambda_k}x)]$$

$$\text{en } x = 0 : h'_k(x = 0) = \sqrt{-\lambda_k} B_1 = 0 \text{ soit } B_1 = 0.$$

$$\text{En } x = 2\pi : h'_k(x = 2\pi) = -\sqrt{-\lambda_k} A_1 \sin(2\pi\sqrt{-\lambda_k}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin(2\pi\sqrt{-\lambda_k}) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\pi\sqrt{-\lambda_k} \equiv 0(\pi)$$

$$\Leftrightarrow 2\pi\sqrt{-\lambda_k} = k\pi, \quad k \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{-\lambda_k} = \frac{k}{2}, \quad k \in \mathbb{N}$$

D'où la solution :

$$\boxed{h_k(x) = A_1 \cos\left(\frac{kx}{2}\right)}$$

- **Si  $\lambda_k > 0$  :**

$$R = \mp \sqrt{\lambda_k}$$

et

$$h_k(x) = Ae^{x\sqrt{\lambda_k}} + Be^{-x\sqrt{\lambda_k}}$$

$$h'_k(x) = A\sqrt{\lambda_k}e^{x\sqrt{\lambda_k}} - B\sqrt{\lambda_k}e^{-x\sqrt{\lambda_k}}$$

En  $x = 0$  :  $h'_k(x = 0) = (A - B)\sqrt{\lambda_k} = 0 \Leftrightarrow A = B$

En  $x = 2\pi$  :  $h'_k(x = 2\pi) = A\sqrt{\lambda_k}(e^{2\pi\sqrt{\lambda_k}} - e^{-2\pi\sqrt{\lambda_k}}) = 0$

$\Leftrightarrow A = 0$  ou  $e^{2\pi\sqrt{\lambda_k}} - e^{-2\pi\sqrt{\lambda_k}} = 0$  soit  $\sqrt{\lambda_k} = -\sqrt{\lambda_k} = 0$ .

La solution  $A = 0$  donne donc  $h_k(x) = 0$  ce qui est impossible, et la solution  $\lambda_k = 0$  nous ramène au cas  $h_k(x) = cste$  résolu précédemment.

Au final, il existe deux couples (valeur propre, vecteur propre) associés à l'opérateur  $\mathcal{L}$  tels que  $\mathcal{L}h_k = \lambda_k$  et  $h'_k(0) = h'_k(2\pi) = 0$  :

$$(0, A) \text{ et } \left(-\frac{k^2}{4}, A_1 \cos\left(\frac{kx}{2}\right)\right)$$

où  $A$  et  $A_1$  sont des constantes et  $k \in \mathbb{Z}$ .

Le vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda_k = 0$  est constant.

On note  $\hat{f}_k, k \in \mathbb{N}$ , la projection  $\mathcal{P}(f)$  de  $f$  sur la base des vecteurs propres de  $\mathcal{L}$ , et on suppose que  $\mathcal{P}(f)(x) = f(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \hat{f}_k h_k(x)$ . On fait de même pour  $\mathcal{P}(v)(x) = v(x) = \sum_k \hat{v}_k h_k(x)$ .

De plus,  $f$  s'exprime sous la forme :

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\langle f(x), h_k(x) \rangle}{\langle h_k(x), h_k(x) \rangle} h_k(x)$$

où  $\langle f(x), g(x) \rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$  est le produit scalaire de  $f$  par  $g$  dans l'espace  $L^2$  (espace des fonctions de carré intégrable). On a donc :

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\int_0^{2\pi} f(x)h_k(x)dx}{\|h_k(x)\|_{L_2}^2} h_k(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \hat{f}_k h_k(x), \text{ où } \|h_k(x)\|_{L_2}^2 = \langle h_k(x), h_k(x) \rangle.$$

Par identification, on trouve :

$$\hat{f}_k = \frac{\int_0^{2\pi} f(x)h_k(x)dx}{\|h_k(x)\|_{L_2}^2}$$

et de manière similaire, on a

$$\hat{v}_k = \frac{\int_0^{2\pi} v(x)h_k(x)dx}{\|h_k(x)\|_{L_2}^2}$$

Or on a :

$$\mathcal{L}v \equiv \frac{d^2v}{dx^2} = f(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2v}{dx^2} - f(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2}{dx^2} \left( \sum_{k \in \mathbb{N}} \hat{v}_k h_k(x) \right) - \sum_{k \in \mathbb{N}} \hat{f}_k h_k(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k \in \mathbb{N}} \left( \hat{v}_k \frac{d^2 h_k}{dx^2}(x) - \hat{f}_k h_k(x) \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k \in \mathbb{N}} \left( \hat{v}_k \mathcal{L} h_k - \hat{f}_k h_k(x) \right) = 0$$

or  $\mathcal{L} h_k = \lambda_k h_k$  par définition, d'où :

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \left( \hat{v}_k \lambda_k h_k - \hat{f}_k h_k(x) \right) = 0$$

donc, pour chaque  $k \in \mathbb{N}$ , il faut qu'on ait :

$$\hat{v}_k \lambda_k h_k(x) - \hat{f}_k h_k(x) = 0, \quad \forall h_k(x) \neq 0$$

soit

$$\boxed{\hat{v}_k = \frac{1}{\lambda_k} \hat{f}_k}.$$

Le problème

$$\begin{cases} \mathcal{L} v \equiv \frac{d^2 v}{dx^2} = f(x) \\ \frac{dv}{dx}(0) = \frac{dv}{dx}(2\pi) = 0 \end{cases}$$

admet alors une solution si et seulement si  $\int_0^{2\pi} f(x) dx = 0$ . En effet :

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = f(x)$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{2\pi} \frac{d^2 v}{dx^2} dx = \frac{dv}{dx}(2\pi) - \frac{dv}{dx}(0) = \int_0^{2\pi} f(x) dx$$

or  $\frac{dv}{dx}(0) = \frac{dv}{dx}(2\pi) = 0$  d'où  $\int_0^{2\pi} f(x) dx = 0$  forcément.

Vu qu'on est en dimension finie, seuls les  $n$  premiers modes propres de  $\mathcal{L}$  comptent. On a alors :

$$\mathcal{P}_n(f)(x) = f(x) = \sum_{k=0}^n \hat{f}_k h_k(x) \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_n(v)(x) = v(x) = \sum_{k=0}^n \hat{v}_k h_k(x)$$

On note maintenant  $U \in \mathbb{R}^{n+1}$  et  $F \in \mathbb{R}^{n+1}$  les vecteurs de coordonnées  $u_k = u(x_k)$  et  $f_k = f(x_k)$ , où  $x_k = k\Delta x = \frac{2k\pi}{n}$  où  $0 \leq k \leq n$ , et  $\hat{U} \in \mathbb{R}^{n+1}$  et  $\hat{F} \in \mathbb{R}^{n+1}$  les vecteurs de coordonnées  $\hat{v}_k$  et  $\hat{f}_k$ .

D'après la donnée, on a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \hat{f}_k h_k(x)$$

$$\text{pour } x = x_0 : f_0 = f(x_0) = \sum_{k=0}^n \hat{f}_k h_k(x_0) = \hat{f}_0 h_0(x_0) + \dots + \hat{f}_n h_n(x_0)$$

$$\text{pour } x = x_1 : f_1 = f(x_1) = \sum_{k=0}^n \hat{f}_k h_k(x_1) = \hat{f}_0 h_0(x_1) + \dots + \hat{f}_n h_n(x_1)$$

...

$$\text{pour } x = x_{n-1} : f_{n-1} = f(x_{n-1}) = \sum_{k=0}^n \hat{f}_k h_k(x_{n-1}) = \hat{f}_0 h_0(x_{n-1}) + \dots + \hat{f}_n h_n(x_{n-1})$$

$$\text{pour } x = x_n : f_n = f(x_n) = \sum_{k=0}^n \hat{f}_k h_k(x_n) = \hat{f}_0 h_0(x_n) + \dots + \hat{f}_n h_n(x_n).$$



On voit bien apparaître le système matriciel suivant :

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_0(x_0) & \dots & h_n(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_0(x_n) & \dots & h_n(x_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{f}_0 \\ \vdots \\ \hat{f}_n \end{pmatrix}$$

soit  $F = P\hat{F}$  où  $P_{ij} = h_i(x_j)$ . En procédant de la même manière, on montre que  $U = P\hat{U}$ .

De plus, on a montré précédemment que  $\hat{u}_k = \frac{1}{\lambda_k} \hat{f}_k$ . Si on note  $\Lambda$  la matrice diagonale contenant les valeurs propres  $\lambda_k$  sur la diagonale, on a donc la relation matricielle suivante :

$$\hat{U} = \Lambda^{-1} \hat{F}$$

d'où :

$$U = P\hat{U} = P\Lambda^{-1} \hat{F}$$

or  $F = P\hat{F}$  soit  $\hat{F} = P^{-1}F$ . Finalement on obtient la relation suivante :

$$\boxed{U = P\Lambda^{-1} \hat{F} = P\Lambda^{-1} P^{-1} F}$$

## 5 ÉTAPE 5. ADAPTATION ET VALIDATION DANS LE CAS DE DIRICHLET

### 5.1 INTRODUCTION

Afin d'adapter notre méthode au cas des conditions aux limites de Dirichlet, il nous faut modifier les matrices  $\tilde{A}^x$  et  $\tilde{A}^y$  avant leur diagonalisation. On impose alors  $u = u^D$  sur le bord du domaine  $\Omega$  correspondant à la ligne  $y = 0$  soit aux points d'indice  $i = 1 : u_{1j} = u_{1j}^D \forall j = 1, \dots, m$ . On a donc :

$$\sum_{k=2}^n \tilde{a}_{ik}^x u_{kj} + \sum_{k=1}^m \tilde{a}_{jk}^x u_{ik} = f_{ij} - \tilde{a}_{i1}^x u_{1j}^D$$

Après avoir modifié le membre de droite, on remplace la première colonne de la matrice  $\tilde{A}^x$  par des valeurs nulles et on a le système suivant :

$$\sum_{k=1}^n \hat{a}_{ik}^x u_{kj} + \sum_{k=1}^m \tilde{a}_{jk}^x u_{ik} = f_{ij} - \tilde{a}_{i1}^x u_{1j}^D$$

où  $\hat{A}^x$  est la matrice  $\tilde{A}^x$  après modification.

### 5.2 QUESTIONS SUR L'ÉTAPE 5

Voir annexes pour le tracé de l'évolution de  $\log(E)$  en fonction de  $\log(\Delta x)$  pour le problème

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -2 \cos(x) \cos(y) & \text{sur } \Omega = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \\ v(x, y) = \cos(x) \cos(y) & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

## 6 CONCLUSION : QUESTIONS DE SYNTHÈSE ET TESTS FINAUX

Si on choisit, dans le cas de Dirichlet, des distributions non-uniformes de points, le programme fonctionne toujours.

En effet, prenons par exemple une distribution de  $n = 8$  et  $m = 10$ . En exécutant le programme, on obtient les résultats suivants pour U (solution approximée) et V (solution exacte) :

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0,766044 & 0,173648 & -0,5 & -0,93969 & -0,93969 & -0,5 & 0,173648 & 0,766044 & 1 \\ 0,62349 & 0,471713 & 0,101506 & -0,31606 & -0,58841 & -0,58841 & -0,31606 & 0,101506 & 0,471713 & 0,62349 \\ -0,22252 & -0,17338 & -0,0515 & 0,085709 & 0,174852 & 0,174852 & 0,085709 & -0,0515 & -0,17338 & -0,22252 \\ -0,90097 & -0,68814 & -0,17266 & 0,405027 & 0,780619 & 0,780619 & 0,405027 & -0,17266 & -0,68814 & -0,90097 \\ -0,90097 & -0,68814 & -0,17266 & 0,405027 & 0,780619 & 0,780619 & 0,405027 & -0,17266 & -0,68814 & -0,90097 \\ -0,22252 & -0,17338 & -0,0515 & 0,085709 & 0,174852 & 0,174852 & 0,085709 & -0,0515 & -0,17338 & -0,22252 \\ 0,62349 & 0,471713 & 0,101506 & -0,31606 & -0,58841 & -0,58841 & -0,31606 & 0,101506 & 0,471713 & 0,62349 \\ 1 & 0,766044 & 0,173648 & -0,5 & -0,93969 & -0,93969 & -0,5 & 0,173648 & 0,766044 & 1 \end{pmatrix}$$
  

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0,766044 & 0,173648 & -0,5 & -0,93969 & -0,93969 & -0,5 & 0,173648 & 0,766044 & 1 \\ 0,62349 & 0,477621 & 0,108268 & -0,31174 & -0,58589 & -0,58589 & -0,31174 & 0,108268 & 0,477621 & 0,62349 \\ -0,22252 & -0,17046 & -0,03864 & 0,11126 & 0,209101 & 0,209101 & 0,11126 & -0,03864 & -0,17046 & -0,22252 \\ -0,90097 & -0,69018 & -0,15645 & 0,450484 & 0,846634 & 0,846634 & 0,450484 & -0,15645 & -0,69018 & -0,90097 \\ -0,90097 & -0,69018 & -0,15645 & 0,450484 & 0,846634 & 0,846634 & 0,450484 & -0,15645 & -0,69018 & -0,90097 \\ -0,22252 & -0,17046 & -0,03864 & 0,11126 & 0,209101 & 0,209101 & 0,11126 & -0,03864 & -0,17046 & -0,22252 \\ 0,62349 & 0,477621 & 0,108268 & -0,31174 & -0,58589 & -0,58589 & -0,31174 & 0,108268 & 0,477621 & 0,62349 \\ 1 & 0,766044 & 0,173648 & -0,5 & -0,93969 & -0,93969 & -0,5 & 0,173648 & 0,766044 & 1 \end{pmatrix}$$

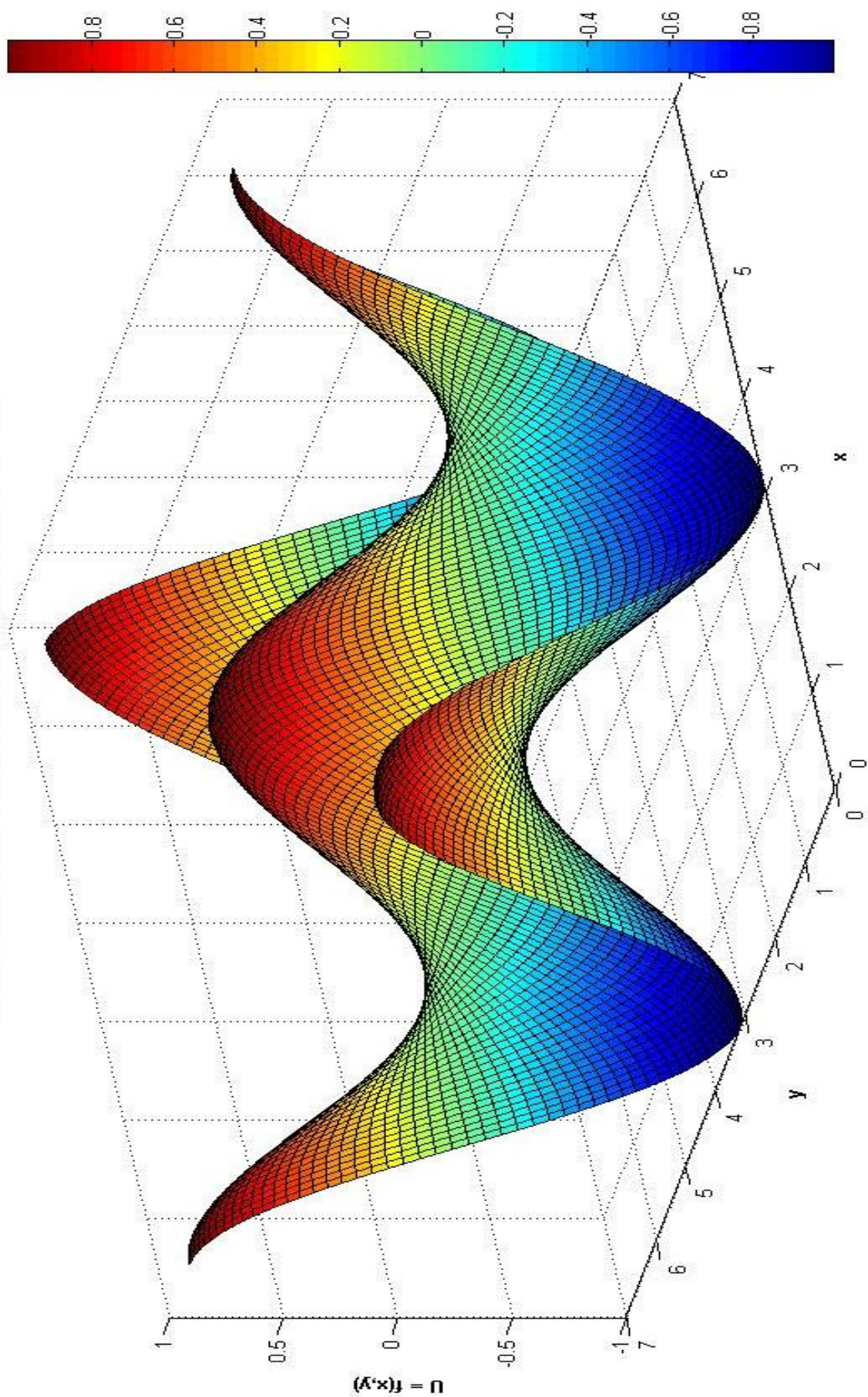
On voit bien que la solution approchée U est très proche de la solution exacte V.

Cependant, afin de pouvoir appliquer la méthode de résolution du système linéaire utilisée dans ce TP à des triangles, il faut que ces derniers soient des triangles rectangles (puisque nous avons utilisé la propriété d'orthogonalité du maillage...).

Il est aussi possible de résoudre le système linéaire dans le cas d'une discrétisation par différences finies : de l'équation  $-\Delta u = f(x, y)$  et des conditions aux limites associées, on génère un maillage du domaine (on choisit des nœuds équidistants ou pas) puis on calcule les équations « discrètes » associées au problème (on approxime les opérateurs différentiels de la formulation exacte par des opérateurs discrets). Ensuite, il suffit de construire le système ainsi obtenu et de le résoudre (on remarquera que les matrices du système linéaire obtenu seront aussi creuses et de grandes tailles). Il ne faudrait pas oublier d'étudier la convergence et la stabilité du schéma numérique pour s'assurer que la solution approchée converge vers la solution exacte de notre problème.

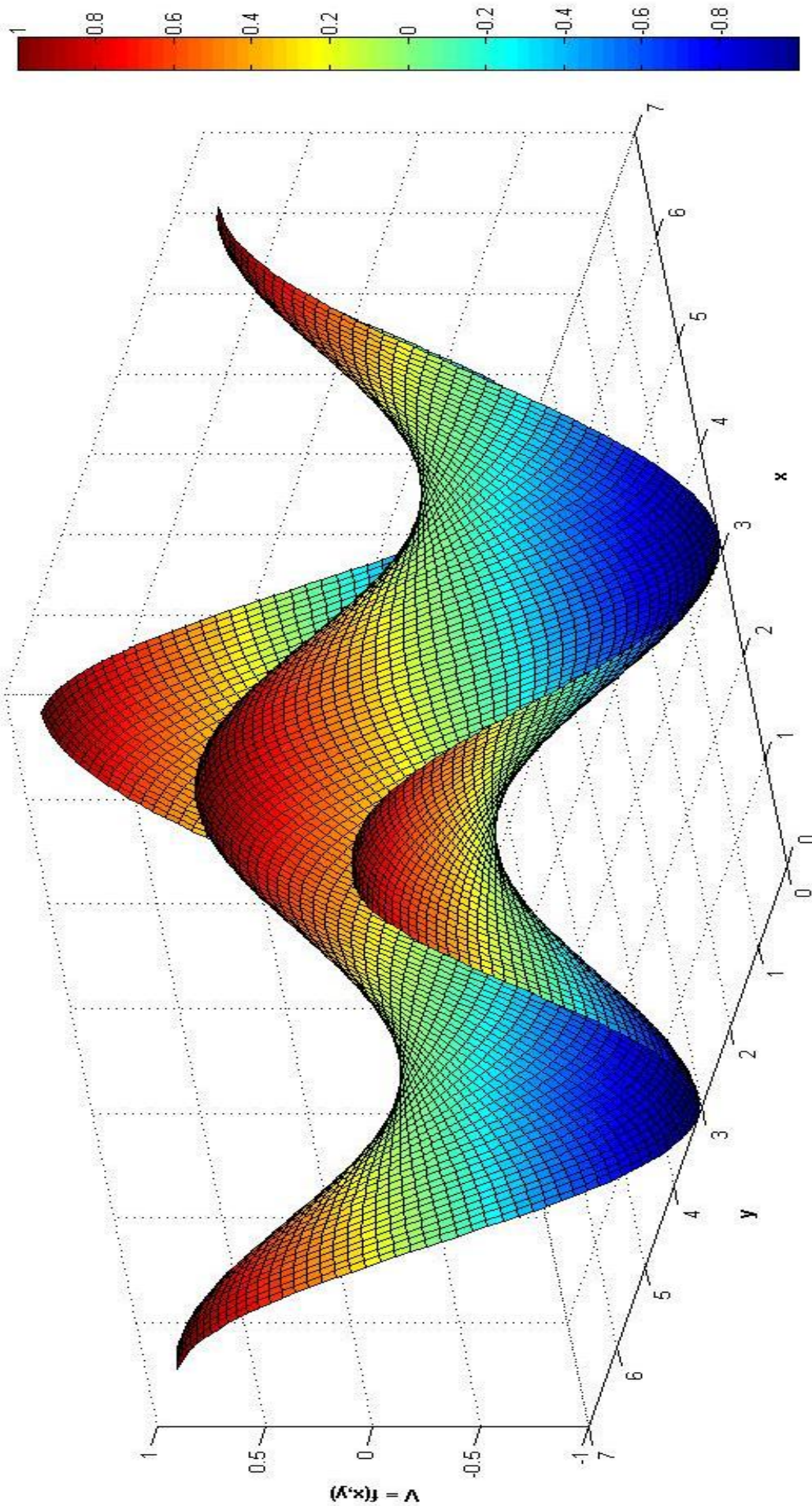
## ANNEXES

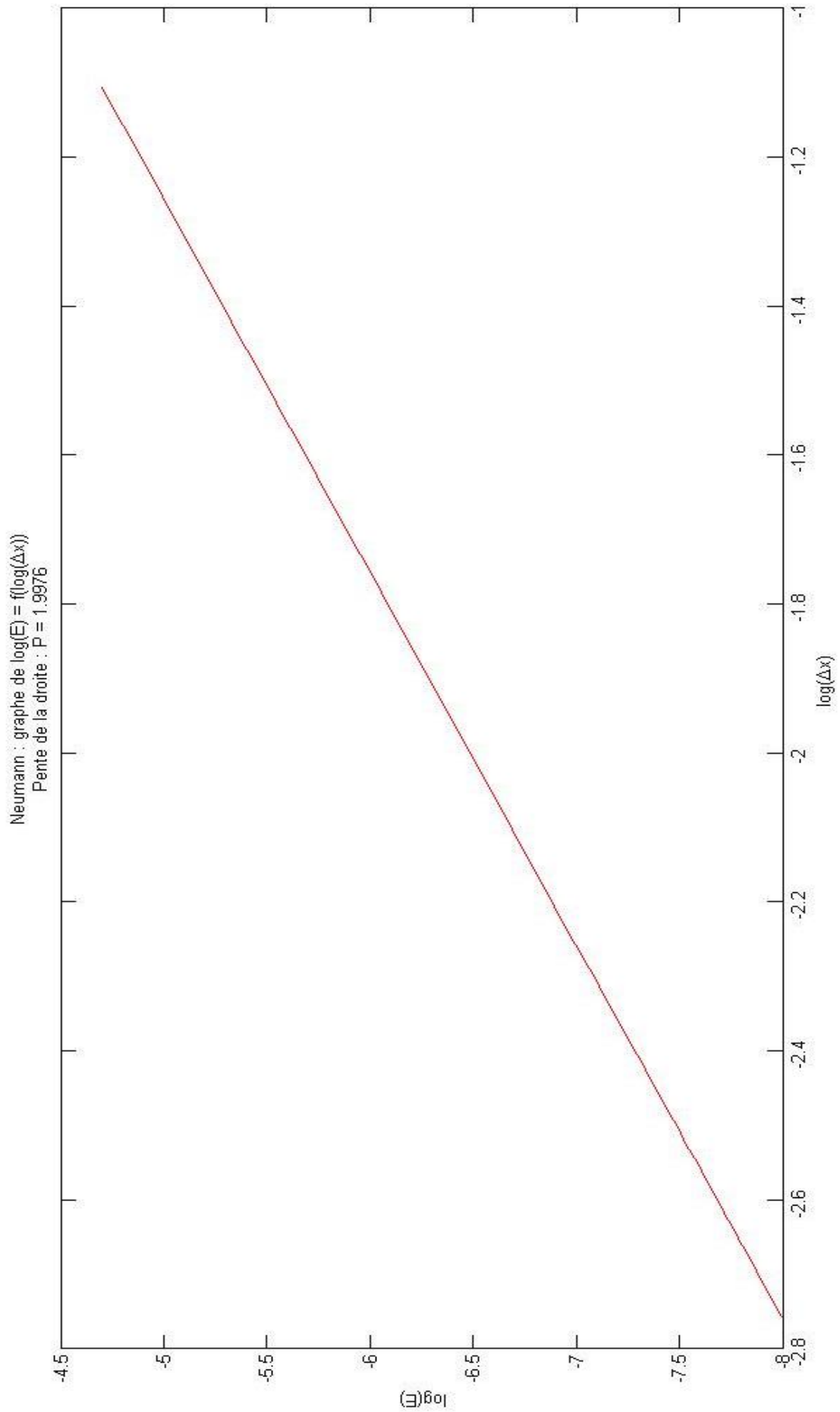
Solution approximée  $U$  du problème de Neumann pour  $n = m = 100$



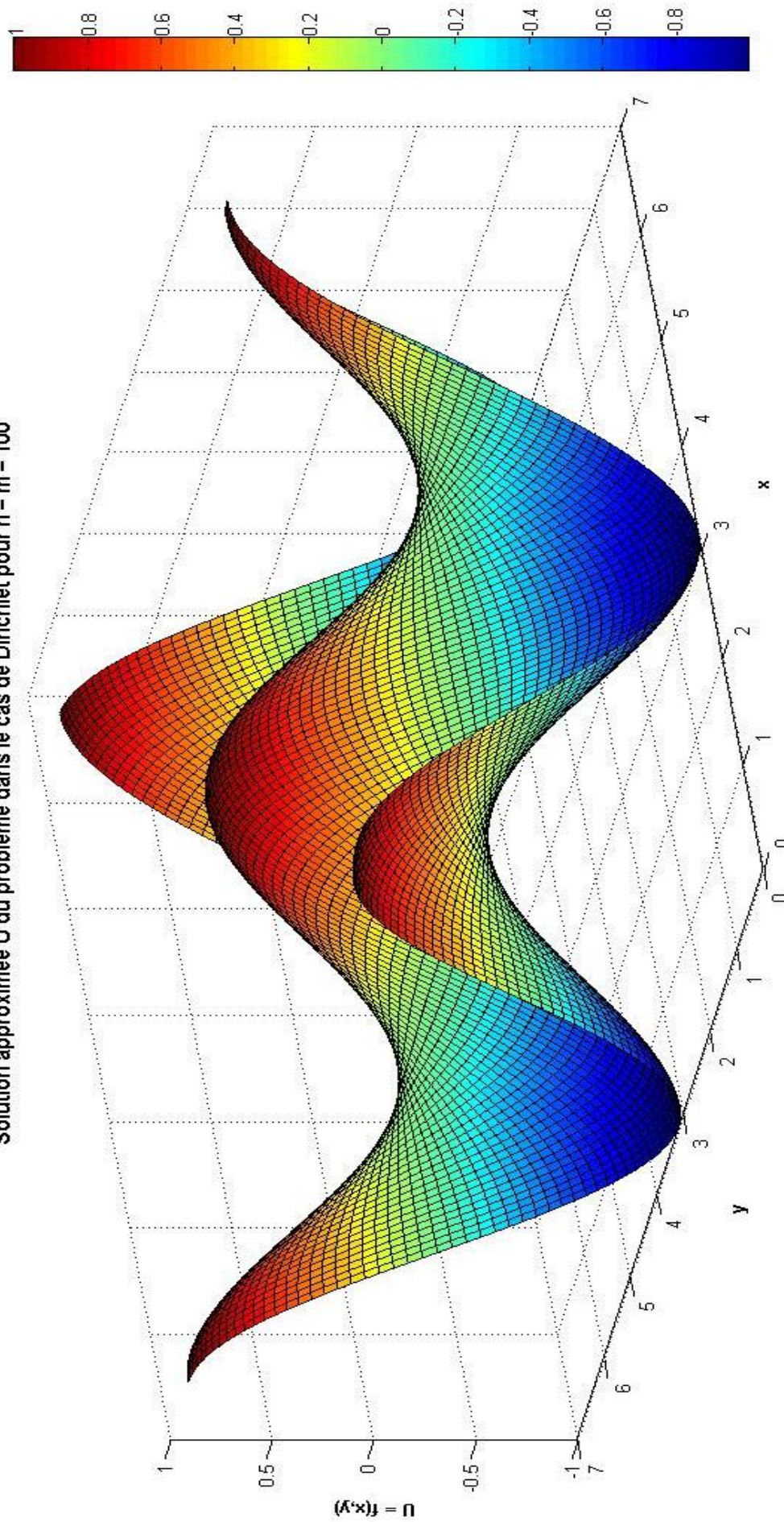


Solution exacte  $V$  du problème de Neumann pour  $n = m = 100$



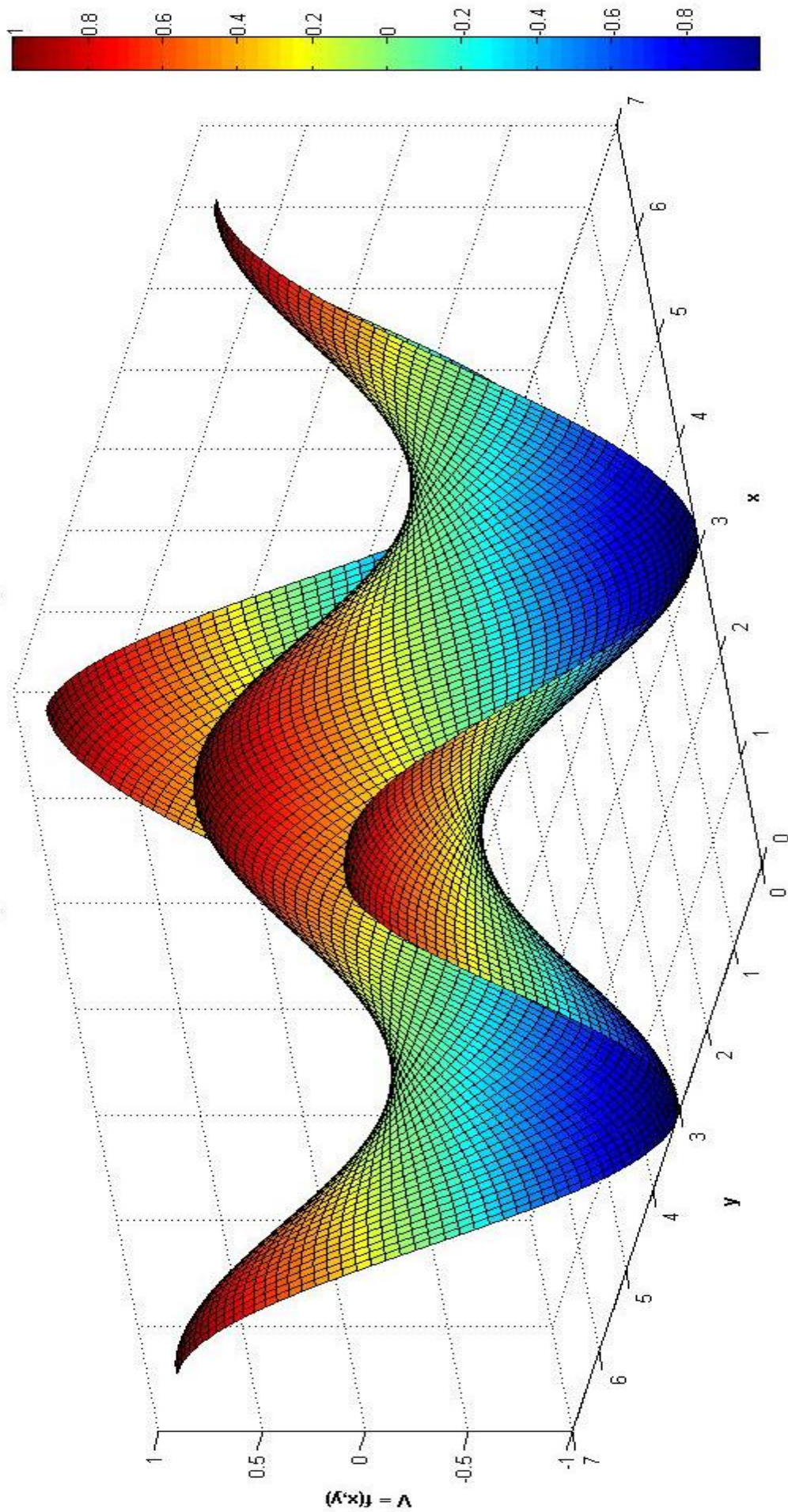


Solution approximée  $U$  du problème dans le cas de Dirichlet pour  $n = m = 100$





Solution exacte  $V$  du problème dans le cas de Dirichlet pour  $n = m = 100$



Dirichlet : graphe de  $\log(E) = f(\log(\Delta x))$   
Pente de la droite :  $P = 2.0015$

