Luồng cực đại

Thực tế

Xét một hệ thống đường ống dầu. Trong đó các ống nối từ hệ thống cấp trung tâm đến bể chứa. Lưu lượng dầu chảy được qua các ống là khác nhau do tiết diện ống khác nhau. Cần phải tìm luồng dầu lớn nhất có thể bơm từ nguồn vào bể chứa.

Nội dung

- Một số khái niệm
- Thuật toán Ford-Fulkerson
- Lát cắt

Một số khái niệm

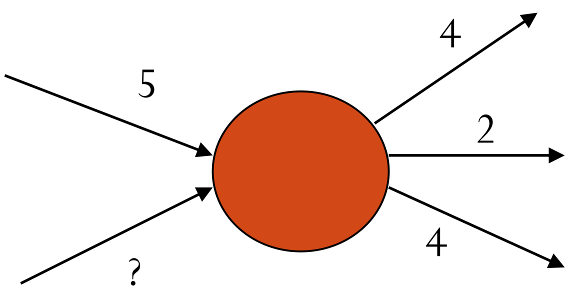
Một số khái niệm

- Mạng (flow network):
  - G = (V, E): Đồ thị có hướng, trong đó mỗi cung (u,v) $\in$ E được gán 1 giá trị không âm, gọi là khả năng thông qua (băng thông) c(u, v) >= 0
  - Nếu (u,v) $\notin$ E, thì đặt c(u,v) = 0.
  - Trong mạng chứa 2 đỉnh phân biệt: **đỉnh phát** s và **đỉnh thu** t

Một số khái niệm

- Luồng (flow):
  - Cho mạng G = (V, E) có đỉnh phát: s, đỉnh thu: t
  - Luồng f trong G là một ánh xạ $f : V \times V \rightarrow R^+$ thỏa mãn điều kiện:
    - $\forall$ u,v $\in$V: $f(u, v) \leq c(u,v)$
    - $\forall$ v $\in V \backslash \{s, t\}$:

$$\sum_{e.in.v} f(e) = \sum_{e.out.v} f(e)$$



Một số khái niệm

- Giá trị f(u, v) được gọi là lưu lượng thực của luồng (net flow) từ đỉnh u đến đỉnh v
- Giá trị của luồng được xác định bởi tổng lưu lượng thực từ đỉnh phát đến tất cả các đỉnh trong mạng:

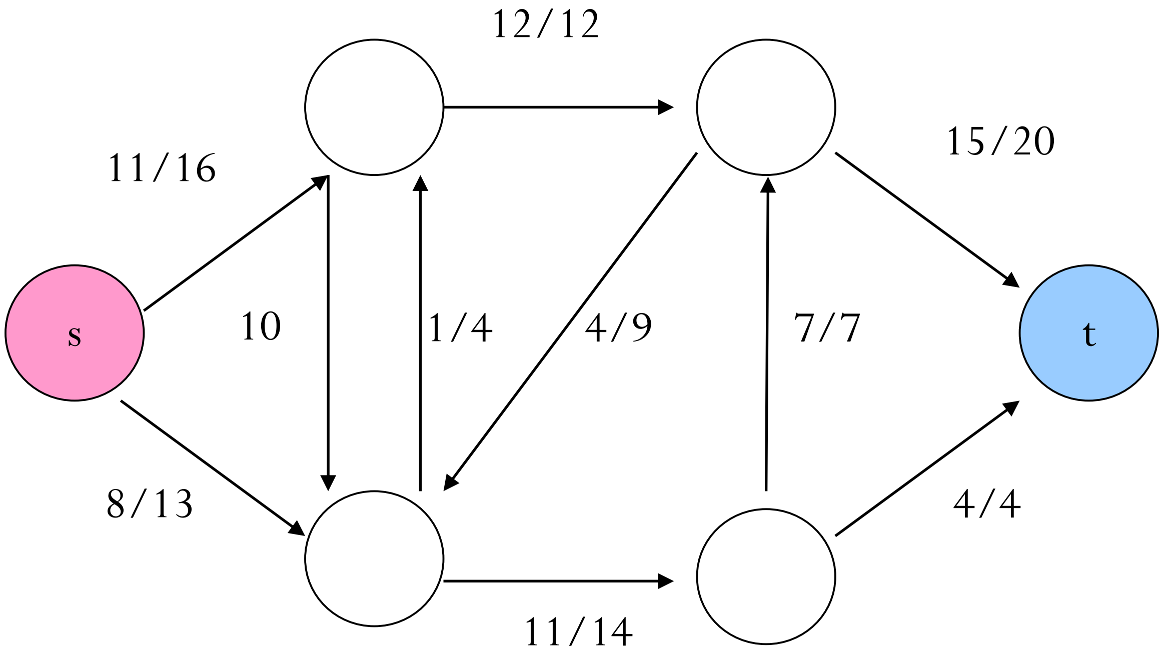
$$|f| = \sum_{v \in V} f(s, v)$$

  - Giá trị này đúng bằng tổng lưu lượng từ tất cả các đỉnh trong mạng đến đỉnh thu

Một số khái niệm

- Ví dụ:

  Giá trị luồng = ?



Bài toán luồng cực đại trong mạng

- Cho trước một mạng G = (V, E). Hãy tìm luồng f* trong mạng có giá trị luồng |f*| là lớn nhất. Luồng thỏa mãn điều kiện này gọi là luồng cực đại (max-flow) trong mạng G.
- Ứng dụng:
  - Bài toán ghép cặp
  - Bài toán hệ đại diện
  - Bài toán cực tiểu chi phí
  - …

Thuật toán Ford-Fulkerson

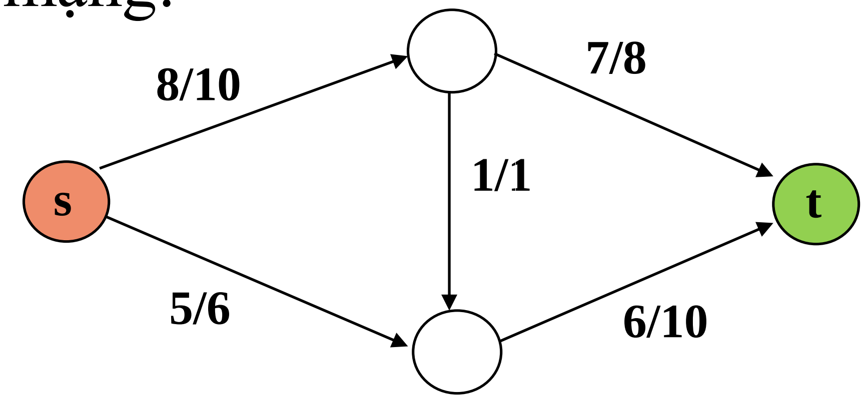
Thuật toán Ford-Fulkerson

- Mạng thặng dư
- Đường tăng luồng
- Lát cắt
- Ý tưởng:

```
FORD-FULKERSON-METHOD(G, s, t)
Khởi tạo luồng f có giá trị bằng 0
While tồn tại đường tăng luồng p
        do tăng luồng f dọc theo đường p
return f
```

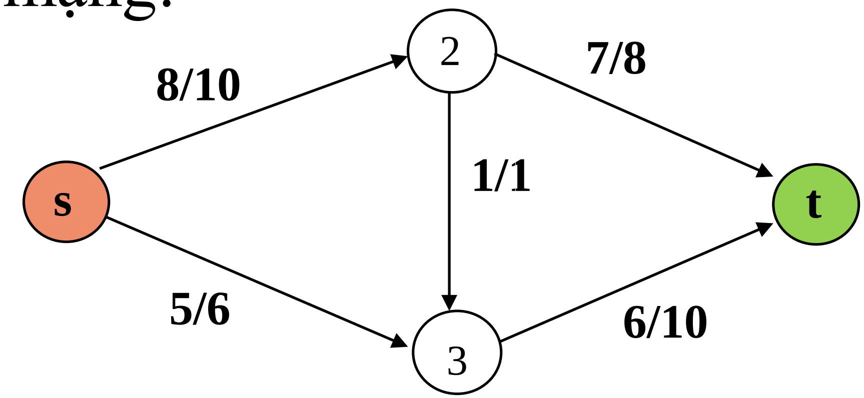
Mạng thặng dư

Xét mạng:

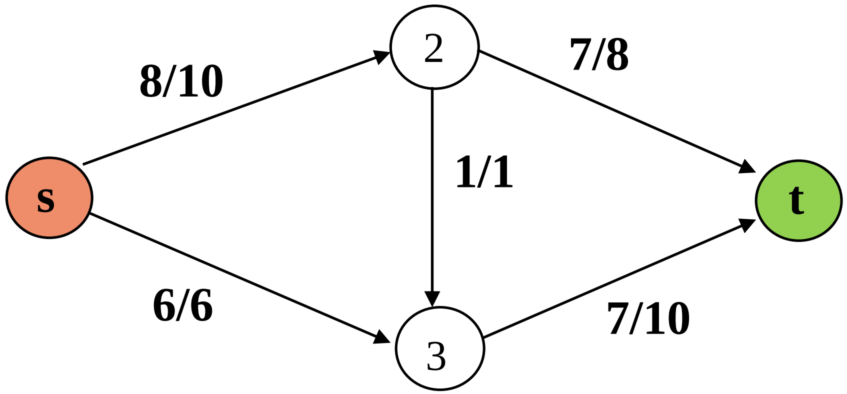


Mạng thặng dư

Xét mạng:

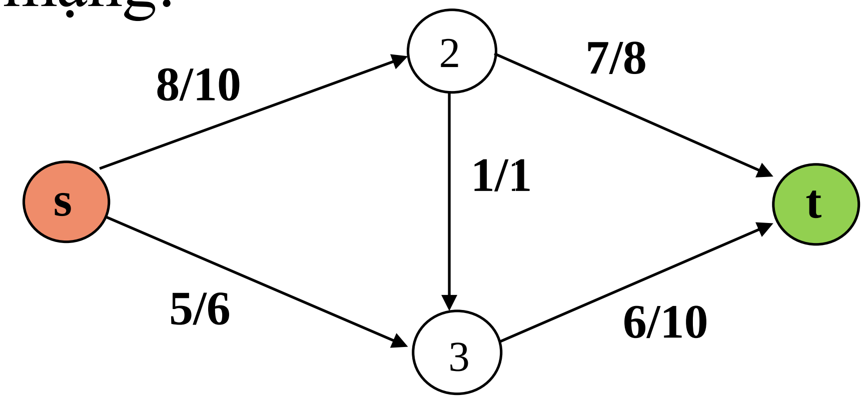


Ta có thể tăng thêm 1 trên đường: s - v_3 - t

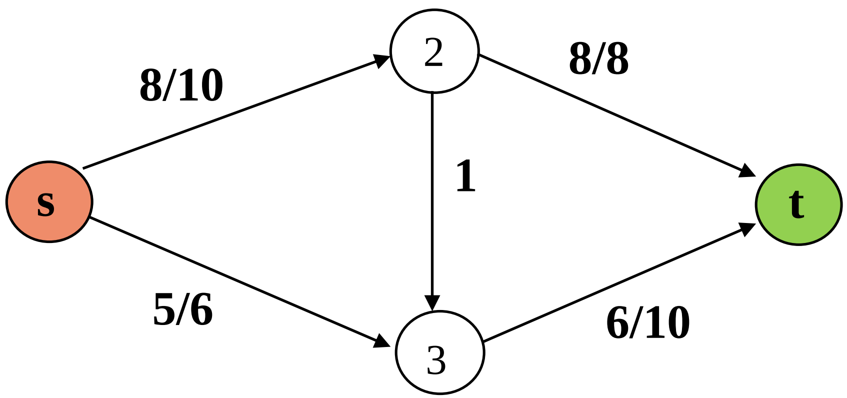


Mạng thặng dư

Xét mạng:



Ta có thể giảm 1 trên cung: $v_2 - v_3$

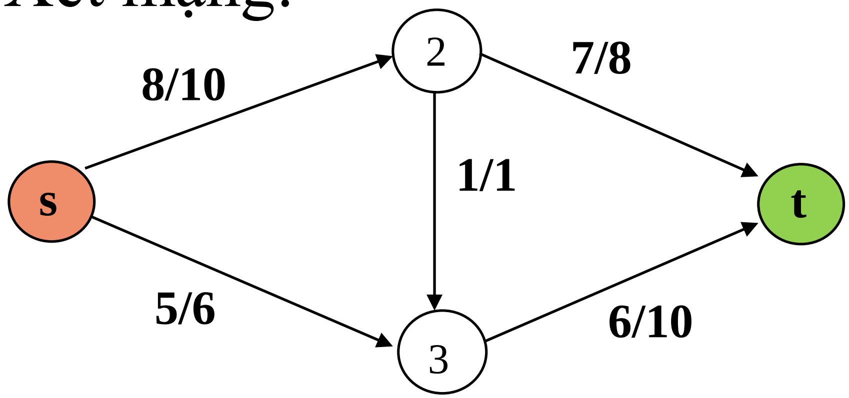


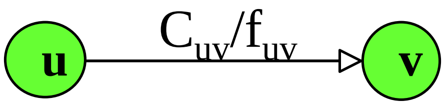
Mạng thặng dư

- Mạng thặng dư chứa các cung có thể thay đổi để tăng lưu lượng thực trong luồng
- Xét $G = (V, E)$ => mạng thặng dư: $G_f = (V, E_f)$ là đồ thị có hướng, mỗi cung $(u, v) \in E_f$ có trọng số $c_f(u, v) \in R^+$:
  - $c_f(u, v) = c(u, v) - f(u, v)$ // Lượng băng thông có thể nhận thêm trước khi đạt đến giới hạn
  - $c_f(v, u) = f(u, v)$ // Chiều ngược lại = lượng tối đa có thể giảm bớt
  - Nếu $c_f(e) = 0$: bỏ qua cung e

Ví dụ - mạng thặng dư

- Xét mạng:





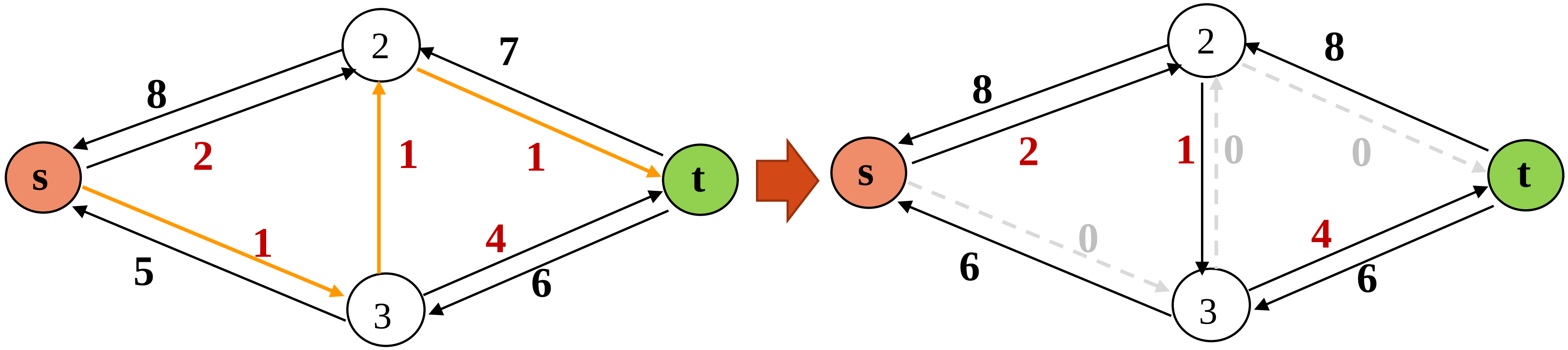
Đường tăng luồng

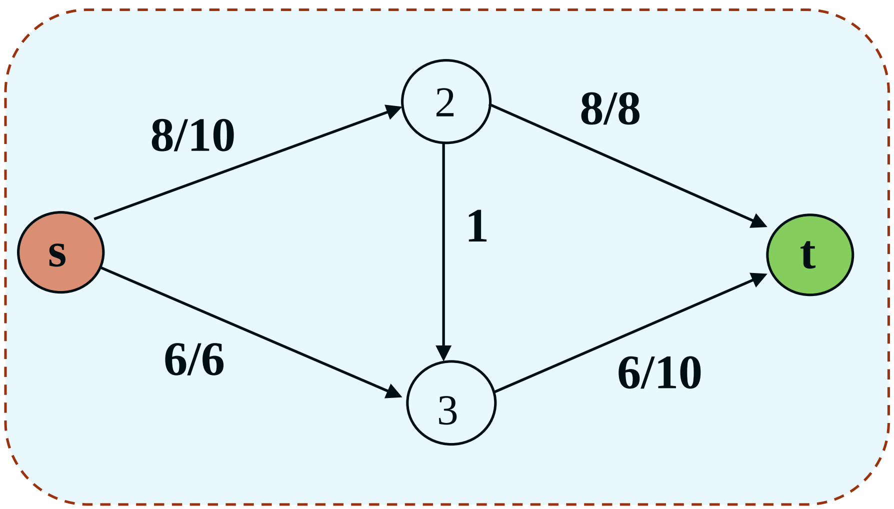
- Một đường tăng luồng (augmenting path): là một đường đi từ s đến t trong mạng thặng dư.
- Giá trị tăng của mỗi đường tăng luồng là trọng số nhỏ nhất trong các cung thuộc đường đi - $\delta(P)$
- Để tăng luồng dọc theo đường P: ta sẽ thêm $\delta(P)$ vào các cung trên đường P và thay đổi giá trị mạng thặng dư tương ứng:

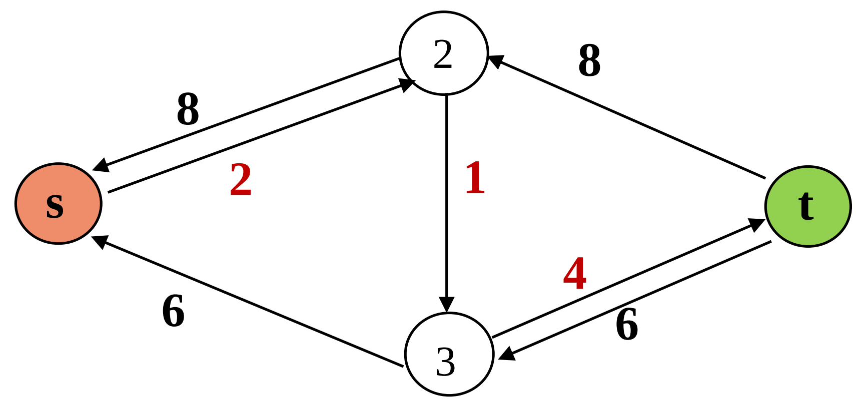
$$c_f(u,v) = c_f(u,v) - \delta(P) \qquad \forall\ (u,v) \in P$$

$$c_f(v,u) = c_f(v,u) + \delta(P) \qquad \forall\ (u,v) \in P$$

Ví dụ - tăng luồng dọc theo đường P







Thuật toán Ford-Fulkerson

FORD-FULKERSON(G, s, t)

for each (u,v) ∈ E[G]

    do f[u,v]:= 0

G_f = mạng thặng dư của G

while tồn tại đường p đi từ s đến t trong G_f

    do $\delta(p) := \min\{c_f(u,v) \mid (u,v) \in p\}$

        for each (u,v) in p

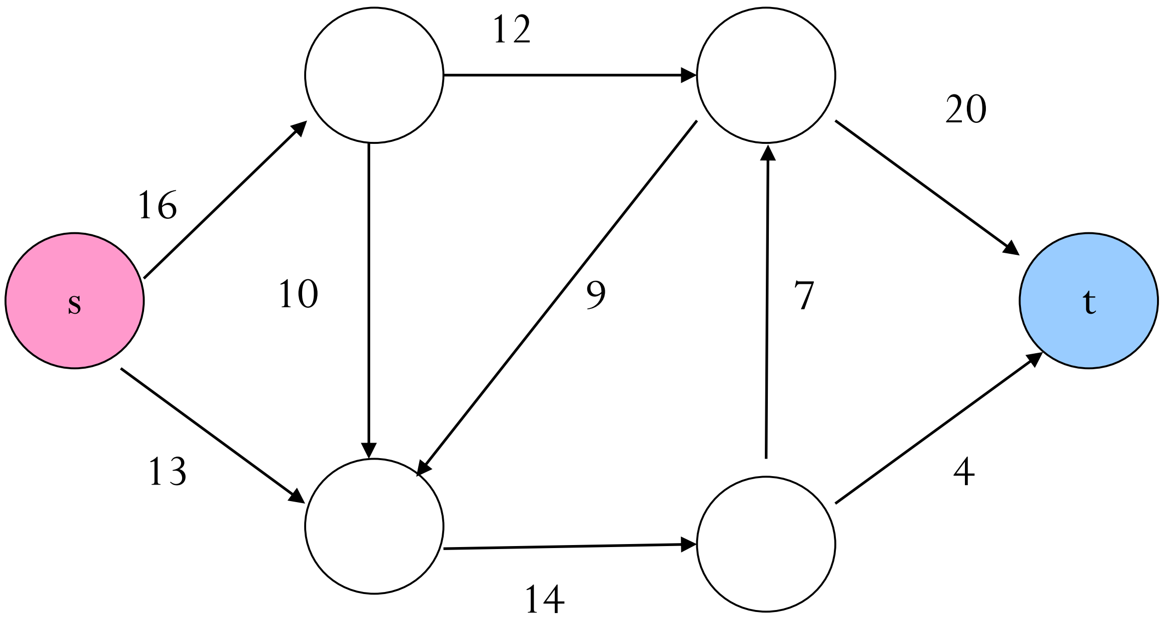
            do update G_f

Thuật toán Ford-Fulkerson

- Nếu băng thông của các cung đều nguyên và hữu hạn:
  - Giá trị tăng thêm trên mỗi đường tăng luồng đều là nguyên
  - Giá trị của luồng sẽ tăng ít nhất 1 sau mỗi lần lặp
  - Thuật toán sẽ dừng sau không quá |f*| lần lặp
  - f*(u,v) là số nguyên với mọi cung (u,v) ∈ E

Ví dụ

- Tìm luồng cực đại trong mạng sau:



Thuật toán Ford-Fulkerson

- Độ phức tạp: O(E.|f*|)

FORD-FULKERSON(G, s, t)

for each (u,v) ∈ E[G]

        do f[u,v]:= 0   O(E)

G_f = mạng thặng dư của G

while tồn tại đường p đi từ s đến t trong G_f

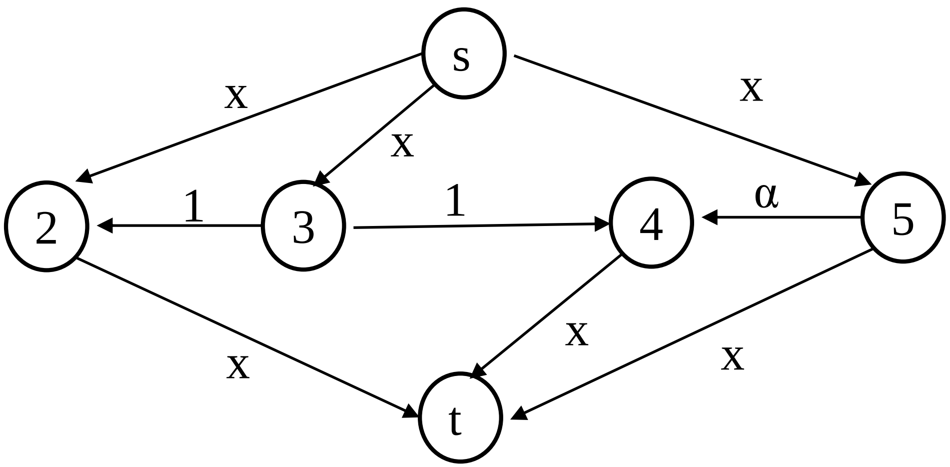
        do δ(p):= min{c_f(u,v) | (u,v) ∈ p}

                for each (u,v) in p   O(E)

                        do update G_f

Thuật toán Ford-Fulkerson

- Nếu băng thông là số vô tỉ, thuật toán có thể sẽ không kết thúc, không hội tụ đến giá trị tối ưu



x: giá trị nguyên lớn

$$\alpha = {}^{(\sqrt{5}-1)}/_{2}$$

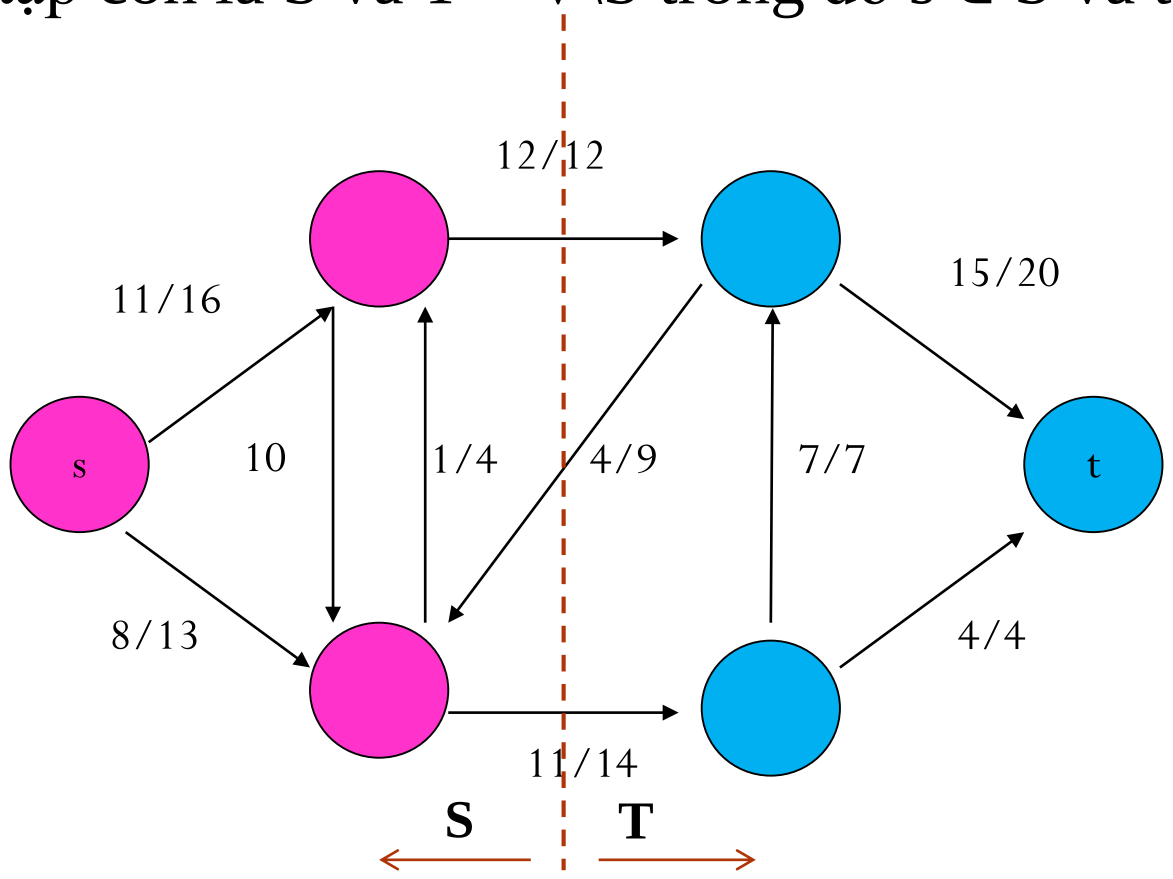
Thuật toán Edmonds-Karp

- Vấn đề của thuật toán Ford-Fulkerson: tìm đường đi trong mạng thặng dư
- E.K phát triển thuật toán F.F, sử dụng thuật toán tìm kiếm theo chiều rộng để tìm đường đi s-t
- Đường tăng luồng là đường đi ngắn nhất (coi trọng số của các cạnh đều là 1)
- Độ phức tạp của thuật toán Edmonds-Karp: $O(V.E^2)$

Lát cắt

Lát cắt

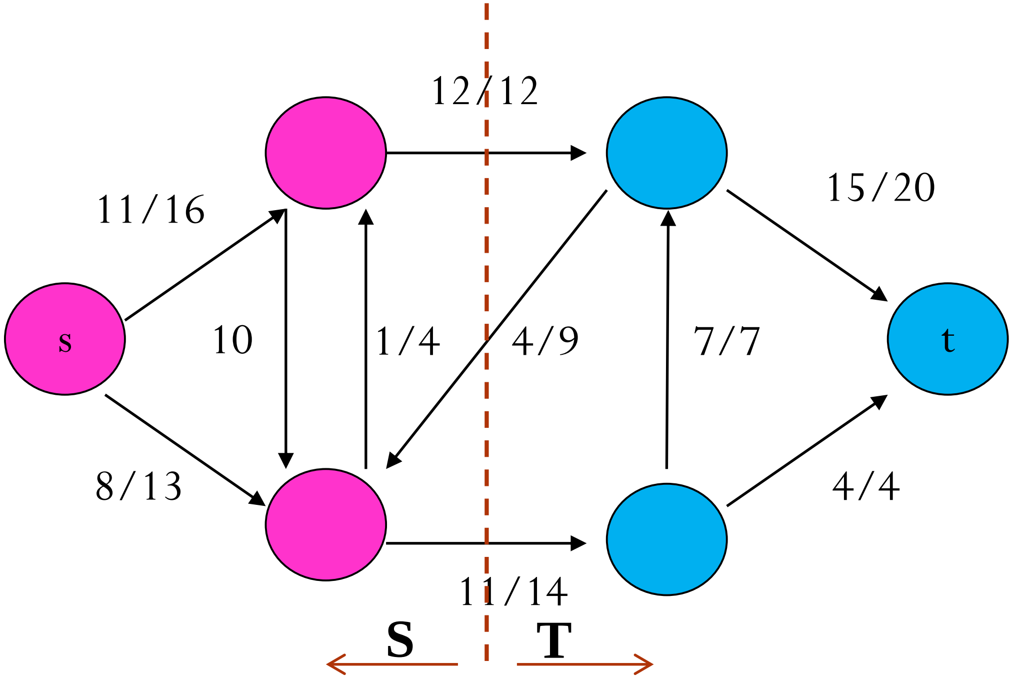
- Định nghĩa: Lát cắt là một cách phân chia tập V thành 2 tập con là S và T = V\S trong đó s ∈ S và t ∈ T



Lát cắt

- Khả năng thông qua của lát cắt (S,T) là

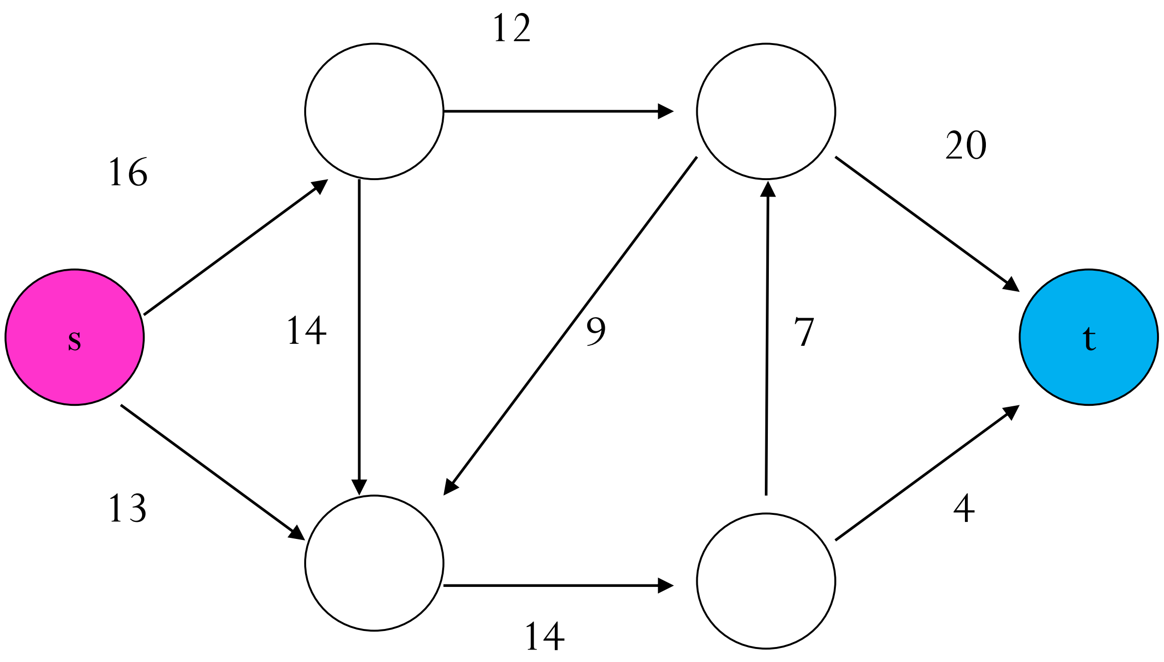
$$c(S,T) = \sum_{u \in S, v \in T} c(u,v)$$



$c(S,T) = ?$

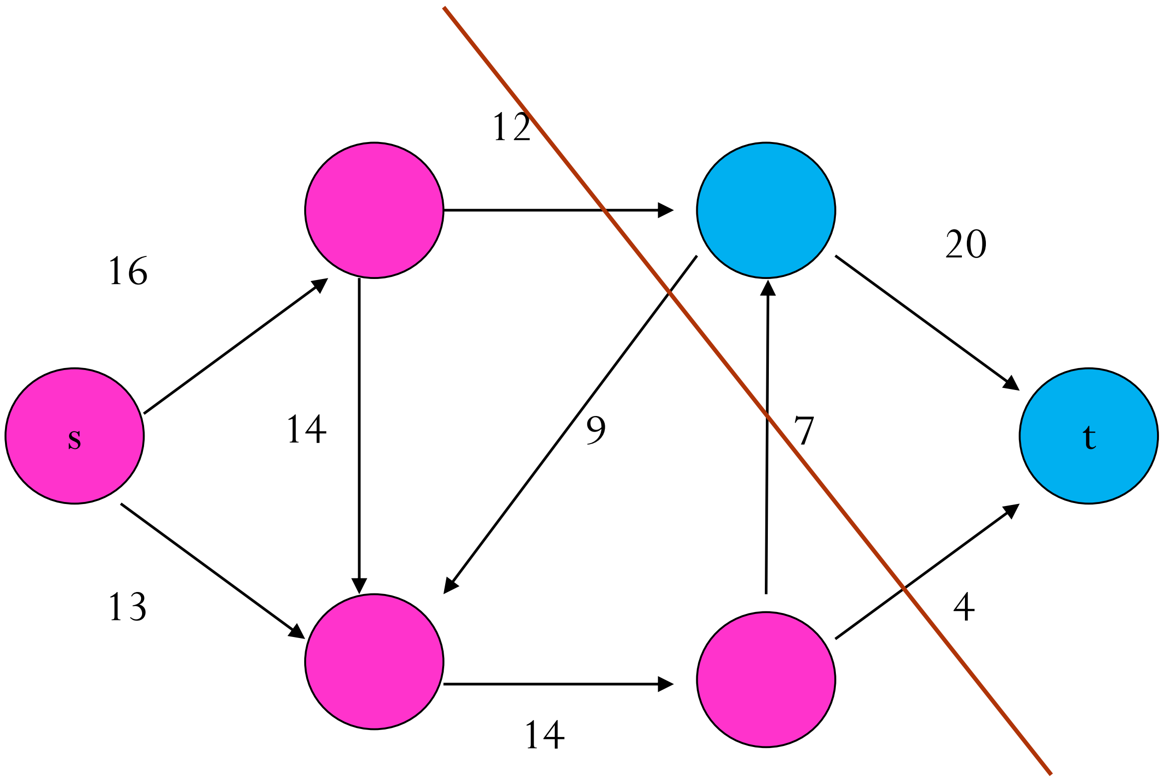
Lát cắt hẹp nhất

- Lát cắt hẹp nhất (S, T) là lát cắt có khả năng thông qua c(S, T) thấp nhất



Lát cắt hẹp nhất (min-cut)

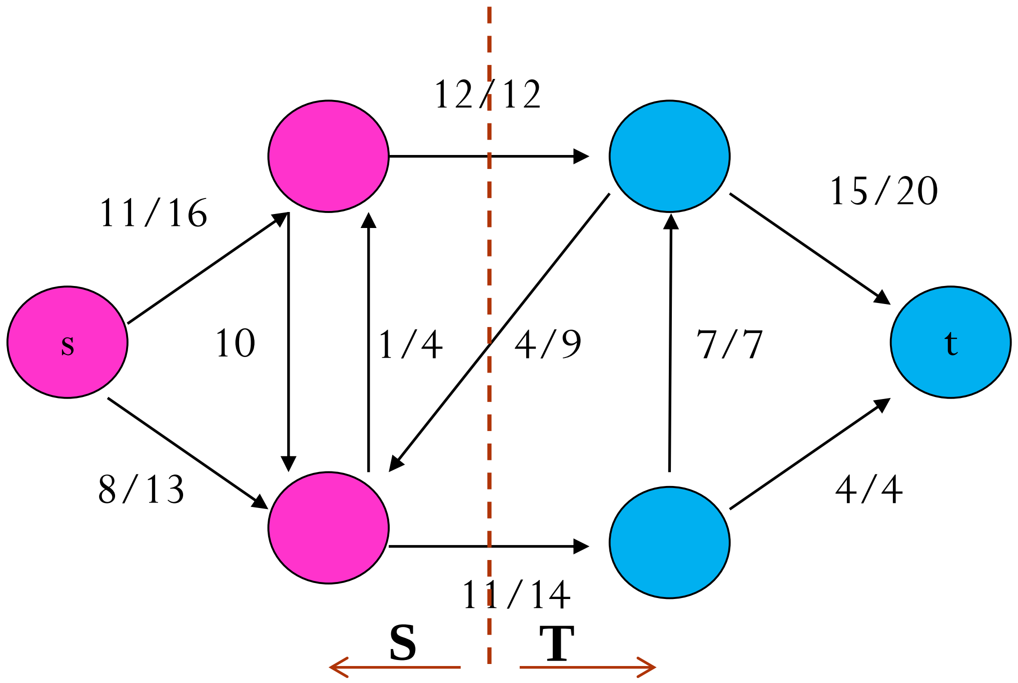
- Lát cắt hẹp nhất (S, T) là lát cắt có khả năng thông qua c(S, T) thấp nhất



Lát cắt

- Lưu lượng thông qua 1 lát cắt (S, T) là:

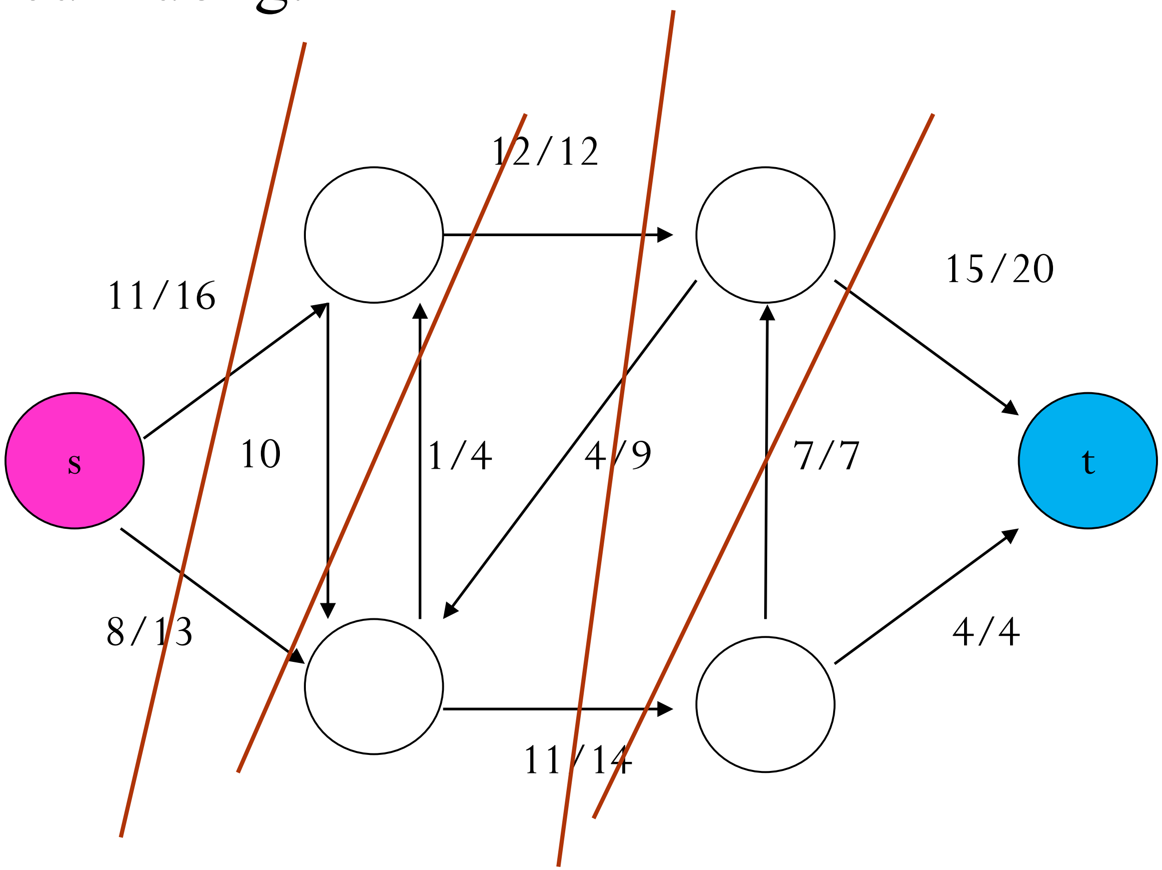
$$f(S,T) = \sum_{u \in S, v \in T} f(u,v)$$



$f(S,T) = ?$

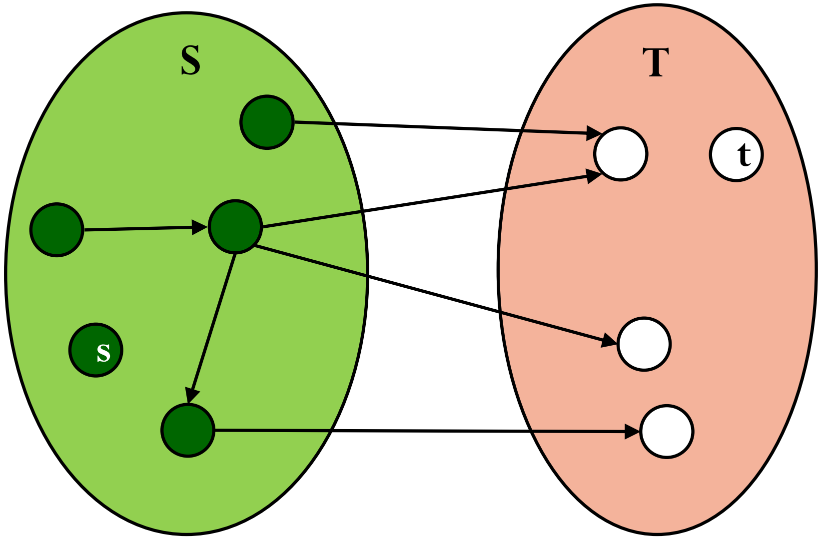
Bổ đề

- Lưu lượng qua một lát cắt (S,T) bất kỳ đúng bằng giá trị của luồng.



Hệ quả

- Giá trị của luồng không vượt quá khả năng thông qua của một lát cắt bất kỳ trong mạng



Định lý max-flow min-cut

Cho mạng G = (V, E) có đỉnh phát là s, đỉnh thu là t

f là một luồng trong mạng G

Khi đó các mệnh đề sau là tương đương:

1. f là luồng cực đại trong mạng G
2. Mạng thặng dư không chứa đường tăng luồng nào
3. $|f| = c(S, T)$ với một lát cắt (S, T) nào đó (lát cắt hẹp nhất)

Bài toán tổng quát

- Nhiều điểm phát, nhiều điểm thu

  Giải pháp: Thêm điểm phát giả, điểm thu giả

- Giới hạn băng thông tại đỉnh

  Giải pháp: Tách một đỉnh (v) thành v^+ và v^- với băng thông giữa hai đỉnh này bằng băng thông tại đỉnh v

- Băng thông của cung bị chặn

  Thêm đỉnh phát giả, thu giả (s_a, t_a) Xây dựng mạng G_a theo quy tắc: nếu chặn dưới d(u, v) khác 0

  Đặt c(sa, v) = c(u, ta) = d(u, v)

  c(u, v) = c(u, c) – d(u,v)

  Và tìm luồng trên mạng mới (tr 251)

Ứng dụng

- Bài toán đám cưới vùng quê

  M chàng trai, n cô gái – làm sao có nhiều đám cưới đúng ý nhất?

- Bài toán kho hàng

  M kho xuất, n kho nhập, làm sao chuyển được tối đa?

- Baseball elimination

  Tại một thời điểm của vòng đấu, làm sao biết đội nào không còn khả năng vô địch?

- Giải pháp?