BÀI TẬP ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

GV: *Lê Thị Hồng Vân*   Email: *van.le@ut.edu.vn*

---

1 Chương 1: Ma trận- Định thức- Hệ PTTT

1. Tìm hạng của các ma trận sau

   (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

   (b) $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

   (c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

   (d) $D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

   (e) $E = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -3 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 3 & 5 & -1 \end{bmatrix}$

   (f) $F = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 6 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & 0 & 5 & -1 \end{bmatrix}$

2. Biện luận hạng của các ma trận sau theo tham số m:

   (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 3 & m \\ 0 & 1 & m & 2 \end{pmatrix}$

   (b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & -4 \\ 8 & -2 & 2 & 0 \\ -4 & m & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

3. Cho các ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$. Tìm ma trận X thỏa $AX + B = C$.

4. Tính giá trị định thức của các ma trận sau:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 4 & 5 \\ -3 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & 2 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 8 & 10 \\ 3 & 9 & 15 & 42 \\ 5 & 20 & -15 & 30 \\ 6 & 24 & -12 & 36 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 4 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

(f) $\begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 & 5 \\ -4 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & -3 & 0 & 1 \\ -5 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

(g) $\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$

(h) $\begin{pmatrix} 4 & 7 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

(i) $\begin{pmatrix} a+b & ab & a^2+b^2 \\ b+c & bc & b^2+c^2 \\ c+a & ca & a^2+c^2 \end{pmatrix}$

(j) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{pmatrix}$

(k) $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{pmatrix}$

(l) $\begin{pmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-z \end{pmatrix}$

5. Giải phương trình theo biến x

(a) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & x & 4 \\ -3 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$

(b) $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & x-1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & x & -1 \end{vmatrix} = 0$

6. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Hãy tính $A.A^T, A^T.A, A^2, A^3$.

7. Tính lũy thừa các ma trận

(a) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^3$

(b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^n$

(c) $\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}^n$

(d) $\begin{pmatrix} a_1 & 0 \dots 0 & & \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}^m$

8. Tìm tất cả các ma trận giao hoán được với ma trận

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} -5 & 7 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

9. Tìm ma trân nghịch đảo của

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(f) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

10. Giải hệ PTTT bằng phương pháp Cramer:

(a) $\begin{cases} 2x - 4y = -24 \\ 5x + 2y = 0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 3x - 2y + z = 13 \\ -2x + y + 4z = 11 \\ x + 4y - 5z = -31 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 3y - 4z = 16 \\ 2x - 5y + 7z = -27 \\ -x - 9z = 9 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} -4w + x + y = -10 \\ w - 4x + z = 1 \\ w - 4y + z = 7 \\ x + y - 4z = 10 \end{cases}$

11. Giải các hệ phương trình sau

(a) $\begin{cases} -3y + 5z = 0 \\ x + y + 4z = 0 \\ x + y - 7z = 0 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} -3y + 5z = 0 \\ x + y + 4z = 0 \\ x + y - 7z = 0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x - 3y + 4z = 0 \\ 3x - 4y + 5z = 0 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x - 2y + t = -3 \\ 2x - y - 2z = 8 \\ 2x + y - 2z - t = 4 \\ x + 3y - 2z - 2t = 7 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 2x - y + 5z = 0 \\ x - 2y + 4z = -3 \\ 2x + y - 7z = 4 \end{cases}$

12. Cho các ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & m \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

    (a) Tìm m để A suy biến.

    (b) Với $m = 2$, tìm ma trận X sao cho $AX = B$ và tìm ma trận Y sao cho $YA = C$.

13. Giải và biện luận các hệ phương trình sau

    (a) $\begin{cases} ax + y + z + t &= 1 \\ x + ay + z + t &= a \\ x + y + az + t &= a^2 \end{cases}$

    (b) $\begin{cases} x - ay + a^2z &= a \\ ax - a^2y + az &= 1 \\ ax + y - a^3z &= 1 \end{cases}$

    (c) $\begin{cases} (2-a)x + y + z &= 0 \\ x + (2-a)y + z &= 0 \\ x + y + (2-a)z &= 0 \end{cases}$

    (d) $\begin{cases} ax + y + z &= 1 \\ x + ay + z &= a \\ x + y + az &= a^2 \end{cases}$

    (e) $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + mz = 3 \\ x + my + 3z = 2 \end{cases}$

    (f) $\begin{cases} x + y + mz = 0 \\ 2y - z = 0 \\ 3x - y + 2z = 0 \end{cases}$

2 Chương 2: Không gian vector

1. Các họ vector sau đây độc lập hay phụ thuộc tuyến tính? Vì sao?

    (a) $S_1 = \{s_1 = (1, 2, 3), s_2 = (-1, 2, 1), s_3 = (2, 1, 2)\}$

    (b) $S_2 = \{s_1 = (1, 1, 1), s_2 = (1, 1, 0), s_3 = (0, 1, 1), s_4 = (1, 2, 1)\}$

    (c) $S_3 = \{s_1 = 1 + x, s_2 = 1 + x - x^2, s_3 = 2 - x^2\}$

    (d) $S_4 = \{s_1 = 1 + x + x^2, s_2 = 2 + x + 3x^2, s_3 = -1 + x^2, s_4 = 1 - x\}$

    (e) $S_5 = \{s_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, s_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, s_3 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\}$

2. Tìm hạng của họ vector

    (a) $S_1 = \{s_1 = (1, 1, 1), s_2 = (1, 1, 0), s_3 = (0, 0, 1), s_4 = (2, 2, 1)\}$

    (b) $S_2 = \{s_1 = (1, 2, 3), s_2 = (-1, 2, 1), s_3 = (0, 1, 1)\}$

    (c) $S_3 = \{s_1 = (1, 0, 2, 3), s_2 = (-1, 2, 1, 2), s_3 = (0, 2, 1, 2), s_4 = (1, -1, 1, 1)\}$

    (d) $S_4 = \{s_1 = 1 + x, s_2 = 1 + x - x^2, s_3 = 2 - x^2\}$

    (e) $S_5 = \{s_1 = 1 + x, s_2 = 1 + 2x - x^2, s_3 = 1 + x - x^2\}$

(f) $S_6 = \left\{ s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, s_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}, s_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}, s_4 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, s_5 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

(g) $S_7 = \left\{ s_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, s_2 = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, s_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, s_4 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

3. Chứng minh rằng W là một không gian vector con của không gian vector V, chỉ ra hệ sinh.

   (a) $W = \{(a+2b-c, -3a+b-4c, a-c) | a, b, c \in \mathbb{R}\}, V = \mathbb{R}^3$

   (b) $W = \{u = (a, b, c) | a - b + 2c = 0, a, b, c \in \mathbb{R}\}$, $V = \mathbb{R}^3$

   (c) $W = \left\{a + b + (2a+3b)x + (c-a)x^2 | a, b, c \in \mathbb{R}\right\}$, $V = P_2[\mathbb{R}]$

   (d) $W = \left\{a + bx + cx^2 | 3a + 4b - c = 0, a, b, c \in \mathbb{R}\right\}$, $V = P_2[\mathbb{R}]$

   (e) $W = \left\{ u = \begin{pmatrix} a - 4b + c & 3b + c \\ 2a - 3b & 2a + c \end{pmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$, $V = M_2[\mathbb{R}]$

4. Họ vector S sau đây có là cơ sở của KGVT V được chỉ ra hay không? Nếu có, hãy tìm tọa độ $(u)_S$

   (a) $S = \{s_1 = (1, 1, 2), s_2 = (1, 2, 1), s_3 = (2, 1, 1)\}$, $V = \mathbb{R}^3$, $u = (1, 2, 3)$

   (b) $S = \{s_1 = (1, 1, 0), s_2 = (0, 1, 1), s_3 = (1, 0, 1)\}$, $V = \mathbb{R}^3$, $u = (1, 2, 3)$

   (c) $S = \{s_1 = 1+x, s_2 = 1+x-x^2, s_3 = 2-x^2\}$, $V = P_2[\mathbb{R}]$, $u = 1+2x+3x^2$

   (d) $S = \{s_1 = 1-x, s_2 = 1+x+x^2, s_3 = 1-x^2\}$, $V = P_2[\mathbb{R}]$, $u = 1+x+3x^2$

   (e) $S = \left\{ s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, s_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, s_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, s_4 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, $V = M_2[\mathbb{R}]$, $u = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

5. Tìm số chiều và một cơ sở của không gian nghiệm của hệ phương trình

   (a) $\begin{cases} x + 2y - 2z + 2t - u = 0 \\ x + 2y - z + 3t - 2u = 0 \\ 2x + 4y - 7z + t + u = 0 \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} x + 2y - z + 3t - 4u = 0 \\ 2x + 4y - 2z - t + 5u = 0 \\ x + 2y - z + 2t - u = 0 \end{cases}$

   (c) $\begin{cases} x - y + z - + = 0 \\ -x + y - 2z = 0 \\ 2x + y - z + 2t = 0 \end{cases}$

   (d) $\begin{cases} -x + y + z - + = 0 \\ -x + z - t = 0 \\ 2x + y - z + t = 0 \end{cases}$

6. Tìm số chiều và cơ sở của không gian con sinh ra bởi họ vector được chỉ ra:

   (a) $S_1 = \{s_1 = (1, -1, 2), s_2 = (2, 0, 3), s_3 = (1, 1, -1), s_4 = (0, 1, -1)\}$

(b) $S_2 = \{s_1 = (-1, 3, 0), s_2 = (-2, 1, 4), s_3 = (1, 1, 1)\}$

(c) $S_2 = \left\{s_1 = 1 + x - x^2, s_2 = 2 + 3x - x^2, s_3 = x - x^2, s_4 = -2 + x + 3x^2\right\}$

(d) $S_2 = \left\{s_1 = 1 - 2x^2, s_2 = 1 + 2x - x^2, s_3 = x + x^2\right\}$

(e) $S = \left\{s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, s_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, s_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, s_4 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\right\}$

7. Trong KGVT $P_2[\mathbb{R}]$, cho họ vector: $S = \{f_1 = 1 + 3x + mx^2, f_2 = -1 + mx + 2x^2, f_3 = x + 4x^2\}$

   (a) Tìm điều kiện của m để S là một cơ sở của $P_2[\mathbb{R}]$.

   (b) Với $m = 1$, Tìm tọa độ của $g = 1 + 2x + 3x^2$ đối với cơ sở S.

8. Trong KGVT $\mathbb{R}^3$, cho hai cơ sở

   $S_1 = \{s_1 = (1, 1, 0), s_2 = (0, 1, 1), s_3 = (1, 0, 1)\}$, $S_2 = \{s_1 = (1, 2, 3), s_2 = (0, 1, -1), s_3 = (0, 1, 1)\}$

   và cơ sở chính tắc $B = \{\alpha_1 = (1, 0, 0), \alpha_2 = (0, 1, 0), \alpha_3 = (0, 0, 1)\}$

   (a) Tìm $P(B \to S_1) =?$, $P(B \to S_2) =?$

   (b) Tìm $P(S_1 \to S_2) =?$, $P(S_2 \to S_1) =?$

   (c) Biết $(u)_{S_1} = (1, 2, 3)$. Tìm $(u)_{S_2} =?$

9. Trong KGVT $P_2[\mathbb{R}]$, cho $S_1 = \{u_1 = m + x + x^2, u_2 = 2 + x - mx^2, u_3 = -1 + 2x + x^2\}$ và cơ sở $S_2 = \{v_1 = 3 + 5x + x^2, v_2 = -3 - 2x + 2x^2, v_3 = 2 - x + 3x^2\}$.

   (a) Tìm điều kiện của m để S_1 là một cơ sở của $P_2[\mathbb{R}]$.

   (b) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ S_1 sang S_2.

10. Trong KGVT $\mathbb{R}^3$, cho hai cơ sở $S_1 = \{u_1, u_2, u_3\}$ và $S_2 = \{v_1 = (-1, 1, 0), v_2 = (1, 2, 3), v_3 = (2, -1, 3)\}$ và ma trận chuyển cơ sở từ S_1 sang S_2 là $P(S_1 \to S_2) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Hãy tìm các vector trong cơ sở của S_1.

11. Trong KGVT $\mathbb{R}^4$ với tích vô hướng Euclide, cho không gian con $W = span(S)$, với $S = \{s_1 = (1, 0, 2, -1), s_2 = (0, 3, 4, 1)\}$. Tìm số chiều và một cơ sở của không gian con bù trực giao $W^{\perp}$.

12. Trong KGTV $\mathbb{R}^3$, cho $< x, y >= x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3$, với $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ và $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$.

    (a) Chứng minh rằng $< x, y >$ là một tích vô hướng trên $\mathbb{R}^3$.

    (b) Với tích vô hướng trên, hãy tìm tham số a, b, c để hệ vector sau trực giao: $B = \{u_1 = (a, -1, 2), u_2 = (2, b, 2), u_3 = (1, 0, c)\}$.

3 Chương 3: Bài toán trị riêng- Chéo hóa ma trận

1. Tìm ma trận P làm chéo hóa các ma trận sau. Áp dụng tính A^{2021}.

   (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

   (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

   (c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

   (d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

2. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ -1 & a & -3 \\ 2 & -4 & b \end{pmatrix}$ và $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Tìm a, b để v là một vector riêng của A. Chéo hóa A với a, b vừa tìm được.

3. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

   (a) Hãy chứng tỏ rằng: $A^3 - 5A^2 + 8A - 16I_3 = O_{3\times 3}$.

   (b) Áp dụng kết quả hãy tính A^{-1}.