③ (Lũy thừa of ma trận tích)

GT Cho A ma trận vuông cấp n.
P, Q - 2 ma trận vuông cùng cấp vs A. | Giả sử $PQ = I_n = QP$

KL CMR, $\forall k \in \mathbb{N}$ (k=1,2,...), ta có $(PAQ)^k = P.A^k.Q$

BGiải

+ Xét giả thiết $P.Q = I_n \Rightarrow$ Q khả nghịch, có $Q^{-1} = P$
$QP = I_n \Rightarrow$ P khả nghịch, có $P^{-1} = Q$

+ Vs $k=1 \Rightarrow (PAQ)^1 = PAQ = P.A^1.Q$
Vs $k=2 \Rightarrow (PAQ)^2 = (PAQ.PAQ) = PA.(Q.P).A.Q$ (t/c kết hợp)
$= PA.I_n.A.Q$
$= P.A.A.Q$
$= P.A^2.Q$

+ Vs $k=3$

$$(PAQ)^3 = (PAQ)^2.(PAQ) = PA^2.Q.P.A.Q = PA^2.(Q.P).AQ$$
$$= P.A^2.I_n.A.Q$$
$$= P.A^2.A.Q$$
$$= P.A^3.Q$$

đúng vs $\forall k \in \mathbb{N}$ $(k=1,2,..)$

+ Gsử $(PAQ)^k = PA^k.Q$ Ta cần cminh $(PAQ)^{k+1} = PA^{k+1}.Q$

Thật vậy $(PAQ)^{k+1} = (PAQ)^k.PAQ$
$$= PA^k.Q.PAQ$$
$$= P.A^k.(Q.P).AQ$$
$$= PA^{k+1}.Q \text{ (đcan)}$$

Vậy bằng quy nạp, ta cminh đc $(PAQ)^k = P.A^k.Q$

Scanned with CamSca