

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

ĐỀ THI KẾT THÚC HỌC KỲ I
NĂM HỌC 2015-2016

Môn thi: Giải tích số (MAT 2404), Đề số 1
Thời gian làm bài: 120 phút

Câu 1. Cho phương trình $x^3 - 3x - 18 = 0$.

- Chứng minh rằng phương trình đã cho có nghiệm thực duy nhất x^* và nghiệm này thuộc đoạn $[2, 4]$.
- Khảo sát điều kiện hội tụ của phép lặp đơn $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ với $\varphi(x) = \sqrt[3]{3x + 18}$ và $x_0 \in [2, 4]$.
- Với $x_0 = 4$, cần thực hiện bao nhiêu phép lặp để đảm bảo nghiệm xấp xỉ có sai số tuyệt đối không vượt quá 10^{-3} ? Tính x_1 và x_2 và đánh giá sai số hậu nghiệm cho x_2 .

Câu 2. Cho bộ dữ liệu $\{(x_i, y_i), i = 0, \dots, 3\} = \{(-1, 1), (0, 2), (1, 4), (2, 3)\}$.
Xét bài toán xấp xỉ bình phương tối thiểu: Tìm đa thức xấp xỉ $P(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ sao cho tổng bình phương sai số $\sum_{i=0}^3 (y_i - P(x_i))^2$ là nhỏ nhất.

Hãy giải bài toán trên theo các bước sau:

- Đưa bài toán về dạng: tìm $x \in \mathbb{R}^3$ cực tiểu hóa chuẩn $\|b - Ax\|_2$, với A và b là các ma trận thích hợp.
- Giải hệ phương trình chuẩn tắc $A^T Ax = A^T b$ bằng phương pháp phân tích Cholesky.

Câu 3. Cho hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{aligned} 10x_1 - x_2 + 2x_3 &= 10 \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 &= 14 \\ -x_1 + 2x_2 + 9x_3 &= 12 \end{aligned}$$

- Viết công thức lặp Jacobi đối với hệ trên và kiểm tra điều kiện hội tụ. Cho $x^{(0)} = (0, 0, 0)^T$, tính $x^{(k)}$, $k = 1, 2, 3$.
- Viết công thức đánh giá sai số tiên nghiệm và hậu nghiệm cho nghiệm xấp xỉ $x^{(k)}$, $k > 1$ (sử dụng một chuẩn thích hợp). Hãy đánh giá số lần lặp cần thiết để sai số không vượt quá 10^{-3} .
- Viết công thức lặp Gauss-Seidel. Với $x^{(0)}$ như ở phần (b), tính lại $x^{(1)}$ bằng phương pháp Gauss-Seidel.

Câu 4. Cho bài toán Cauchy

$$\begin{cases} y' = \sqrt{x^2 + 2y}, & x \geq 0, \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

- Viết công thức Euler và áp dụng để tính y_1, y_2 với bước lưới $h = 0.1$.
- Viết công thức hình thang hiện và áp dụng để tính y_1, y_2 với cùng bước lưới như ở phần (a).

Chú ý: Các kết quả tính toán được lấy qui tròn đến 4 chữ số sau dấu phẩy. Cán bộ coi thi không cần giải thích gì thêm.

h.w2