

# ĐSTT BTTL 12

① Cho ánh xạ  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  xác định bởi:

$$T(1,0,0) = (1,1,1)$$

$$T(0,1,0) = (2,3,4)$$

$$T(0,0,1) = (1,2,3)$$

a) Tìm ma trận biểu diễn của  $T$  ở cặp cơ sở  $B = (u_1, u_2, u_3)$  và  $C = (v_1, v_2, v_3)$

$$u_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad u_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{và} \quad v_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

b) Tìm cơ sở của hạt nhân  $T$

c) Tìm hạng của ánh xạ  $T$

d) Tìm 1 cơ sở của ảnh của ánh xạ  $T$

Bài giải:

a)

~~$f(x,y,z) = T(x,y,z)$~~

$$T(1,0,0) = (1,1,1)$$

$$T(0,1,0) = (2,3,4)$$

$$T(0,0,1) = (1,2,3)$$

$$\Rightarrow f(x,y,z) = (x+2y+z, x+3y+2z, x+4y+3z)$$

$$\Rightarrow f(u_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad f(u_2) = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} \quad f(u_3) = \begin{bmatrix} 8 \\ 13 \\ 18 \end{bmatrix}$$

Ta ghép ma trận

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} -2 & 2 & 4 & 0 & 3 & 8 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 5 & 13 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 7 & 18 \end{array} \right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 5 & 13 \\ -2 & 2 & 4 & 0 & 3 & 8 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 7 & 18 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} R_2 + 2R_1 \rightarrow R_2 \\ R_3 - 3R_1 \rightarrow R_3 \end{array} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 5 & 13 \\ 0 & 2 & 6 & 0 & 13 & 34 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & -8 & -21 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 5 & 13 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & -8 & -21 \\ 0 & 2 & 6 & 0 & 13 & 34 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{R_3 - 2R_2 \rightarrow R_3} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 5 & 13 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & -8 & -21 \\ 0 & 0 & 14 & 0 & 29 & 76 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 17 & 38 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -29 & -76 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{29}{14} & \frac{38}{7} \end{array} \right] \Rightarrow \text{Vậy} \dots$$

b) Giả sử  $T(v) = 0$  vs  $v = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$

Ta giải ma trận

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 8 & 0 \\ 0 & 9 & 13 & 0 \\ 0 & 7 & 18 & 0 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & \frac{8}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{13}{9} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{18}{7} & 0 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & \frac{8}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{15} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{21} & 0 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Số' ảnh > số' cột  $\Rightarrow$  Pt có vô pt ~~thực~~ là  $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \text{ tùy ý} \end{bmatrix}$

Vậy  $\ker T = \{x_3 \cdot (0, 0, 1) \mid x_3 \in \mathbb{R}\}$

$$\Rightarrow V = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

c) Ta có ma trận

$$\left[ \begin{array}{ccc} -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 0 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \Rightarrow \text{Hạng of } T = 3.$$

d) Cơ sở of ảnh  $T$  là  $\theta_1 = (1, 0, 5)$

$$\theta_2 = (0, 1, 3)$$

$$\theta_3 = (0, 0, 1)$$

$$c) \left[ \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \text{Hạng } T = 2.$$

d) Cơ sở of  $T$  là

$$\theta_1 = (1, 1, 1)$$

$$\theta_2 = (0, 1, 2)$$