① Đưa dạng toàn phương sau về dạng chính tắc

$$H = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3$$

Tìm hạng, chỉ số quán tính âm, chỉ số quán tính dương of dạng t.phương này

Bg giải

Từ H ta xđịnh được ma trận đối xứng

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Ta tiến hành chéo ~~q~~ hóa trực giao ma trận đxứng M

$$\oplus P_M(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & -2 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ -2 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3 - 8 - 8 - 4.(1-\lambda) - 4.(1-\lambda) - 4.(1-\lambda)$$

$$= (1 - 3\lambda + 3\lambda^2 - \lambda^3) - 16 + 12.(\lambda - 1)$$

$$= -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 9\lambda - 27$$

$$= -(\lambda+3).(\lambda-3)^2$$

Vậy gtr riêng là $\lambda = -3$ và $\lambda = 3$

⊕ Xét kgn ứng vs gtr riêng $\lambda = -3$.

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & -2 & 4 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 0 \\ 4 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{\frac{R_2}{-2} \to R_2 \\ \frac{R_3}{-2} \to R_3}]{\frac{R_1}{-2} \to R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 - 2R_1 \to R_3]{R_2 - R_1 \to R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{\frac{R_2}{-3} \to R_2 \\ R_1 - R_2 \to R_1}]{R_3 - R_2 \to R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Vậy $V_{-3} = \left\{ x_3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \mathcal{L}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Chọn $u_1 = (1,1,1)$ $v_1 = u_1$ $\Rightarrow e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (1,1,1)$

Vậy e_1 là cs trực giao of V_{-3}

⊕ Xét kg con ứng vs giá trị riêng $\lambda = 3$

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{R_3 - R_1 \to R_3 \\ \frac{R_1}{-2} \to R_1}]{R_2 - R_1 \to R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\text{Vậy } V_3 = \left\{ \begin{bmatrix} -x_2 - x_3 \\ x_2 + 0x_3 \\ 0x_2 + x_3 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ x_2 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \varphi \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Chọn $u_2 = (-1, 1, 0)$ $\quad u_3 = (-1, 0, 1)$

$$v_2 = u_2 = (-1, 1, 0) \Rightarrow e_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-1, 1, 0)$$

$$v_3 = u_3 - pr_{v_2}(u_3) = u_3 - \frac{\langle u_3, v_2 \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} \cdot v_2 = u_3 - \frac{1}{2} \cdot v_2$$

$$= (-1, 0, 1) - \left(\frac{-1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right) = \left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}, 1\right) = -\frac{1}{2} \cdot (1; 1, -2)$$

$$\Rightarrow e_3 = \frac{(-2v_3)}{\|(-2v_3)\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot (1, 1, -2)$$

Vậy e_2, e_3 là cstc of V_3

⊕ Chọn

$$Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{bmatrix} \text{ thì } Q^t A Q = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

⊕ Sd phép đổi biến

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = Q^t \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1/\sqrt{3} + x_2/\sqrt{3} + x_3/\sqrt{3} \\ -x_1/\sqrt{2} + x_2/\sqrt{2} \\ x_1/\sqrt{6} + x_2/\sqrt{6} - 2x_3/\sqrt{6} \end{bmatrix} \text{ thì ta đc}$$

$$H = -3y_1^2 + 3y_2^2 + 3y_3^2$$

⊕ KL: Dạng toàn phương H có:
- hạng = 3
- chỉ số quán tính dương = 2
- chỉ số quán tính âm = 1