Kha giữa kỳ Giải tích 1 (14/12/2021)

Phạm Ngọc Hải   09/07/2003   21002139

K66A5   SBD: 31

Đề 1.

Câu 1. Chứng minh các giới hạn sau bằng định nghĩa

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\cos n}{n} = 0$

Đặt $a_n = \frac{\cos n}{n}$

Xét $|a_n - 0| = \left|\frac{\cos n}{n}\right| < \frac{2}{n} < \varepsilon$ vì $|\cos n| \leq 1$ với $\forall n$

$\Leftrightarrow n > \frac{2}{\varepsilon}$

Vậy với $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 = \left[\frac{2}{\varepsilon}\right] + 1$ sao cho với $n \geq n_0$ thì $|a_n - 0| < \varepsilon$

hay $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\cos n}{n} = 0$

b) $\lim\limits_{x\to 2} (x^2 - 4) = 0.$

Giả sử có $\varepsilon > 0$ bất kỳ

Xét $|(x^2-4) - 0| = |x^2 - 4| = |(x-2).(x+2)| < \varepsilon$

Khi $x \to 2$ thì $|x-2|.|x+2| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow |x-2| < \frac{\varepsilon}{4}$

Vậy với $\forall \varepsilon > 0$ tùy ý, $\exists |x-2| < \frac{\varepsilon}{4}$ mà làm $|(x^2-4) - 0| < \varepsilon$

hay $\lim\limits_{x\to 2} (x^2 - 4) < 0$

Câu 2. Xét sự hội tụ của dãy $\{a_n\}_n$. Nếu hội tụ, tìm giới hạn q dãy

$$\begin{cases} a_1 = 1. \\ a_{n+1} = \dfrac{-1}{a_n + 3} \quad (n \geq 1) \end{cases}$$

+ Ta chứng minh dãy giảm bằng phương pháp quy nạp.

$a_1 = 1$ $a_2 = -\frac{1}{4}$ $\Rightarrow a_1 > a_2.$

Phạm Ngọc Hải 09/07/2003 21002139
K66 A5 SBD: 31

+ Giả sử $a_k < a_{k-1}$

• Ta chứng minh $a_{k+1} < a_k$ là đúng.

Thật vậy, $a_k = -\dfrac{1}{a_{k-1}+3}$

$$a_{k+1} = -\frac{1}{a_k+3}$$

Theo giả thiết quy nạp,

$a_k < a_{k-1}$

$\Leftrightarrow a_k + 3 < a_{k-1} + 3$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{a_k+3} > \dfrac{1}{a_{k-1}+3}$

$\Leftrightarrow \dfrac{-1}{a_k+3} < \dfrac{-1}{a_{k-1}+3}$

$\Leftrightarrow a_{k+1} < a_k$ ■

Vậy ta chứng minh được $\{a_n\}$ là dãy giảm. (1)

⊕ Ta chứng minh $\{a_n\}$ bị chặn dưới.

Có $a_1 = 1 > -1$

Giả sử $a_k > -1$, ta chứng minh $a_{k+1} > -1$.

Thật vậy.

+ $a_{k+1} = \dfrac{-1}{a_k+3}$

+ Có $a_k > -1 \Leftrightarrow a_k+3 > -1+3 = 2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{a_k+3} < \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{-1}{a_k+3} > \dfrac{-1}{2}$

$\Leftrightarrow a_{k+1} > -\dfrac{1}{2} > -1$ ■

Vậy $\{a_n\}$ bị chặn dưới bởi -1. (2)

⊕ Từ (1) và (2) → $\{a_n\}$ là dãy hội tụ.

⊕ Tính giới hạn. Giả sử $\lim\limits_{n\to+\infty} \{a_n\} = a$.

Pham Ngọc Hải   09/07/2003   21002139
K66 A5   SBD: 31

Ta có $a_{n+1} = \frac{-1}{a_n+3}$

$\Leftrightarrow a = \frac{-1}{a+3}$ (lấy lim 2 vế)

$\Leftrightarrow a^2 + 3a + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = \frac{-3+\sqrt{5}}{2} \\ a = \frac{-3-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$

Vì ta chứng minh đc rằng $a_{k+1} > -\frac{1}{2}$ (phần trên) $\Rightarrow$ loại $a = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$

$\Rightarrow$ lấy $a = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$

Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$

Câu 3. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to3} \frac{3^x - x^2}{x-3}$ b) $\lim\limits_{x\to0} (1+x^2)^{\frac{1}{e^x-1-x}}$

Bgiải

a) Xét

$\lim\limits_{x\to3^+} \frac{3^x-x^2}{x-3} = \lim\limits_{x\to3^+} \frac{3^x-x^2}{x-3} = +\infty$ (vì $x\to3^+ \Rightarrow \begin{cases} x-3\to0 \\ x-3>0) \\ 3^x-x^2 \to 27-9=18>0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to3^-} \frac{3^x-x^2}{x-3} = \lim\limits_{x\to3^-} \frac{3^x-x^2}{x-3} = -\infty$ (vì khi $x\to3^- \Rightarrow \begin{cases} x-3\to0 \\ x-3<0 \\ 3^x-x^2\to27-9=18>0 \end{cases}$

Vì $\lim\limits_{x\to3^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to3^-} f(x)$ nên không tồn tại $\lim\limits_{x\to3} \frac{3^x-x^2}{x-3}$

b) $\lim\limits_{x\to0} (1+x^2)^{\frac{1}{e^x-1-x}}$

Phạm Ngọc Hải 09/07/2003 21002139

K66A5 SBD: 31

Câu 4. Xét tính liên tục và khả vi của hàm số trên $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} (2x-1).\cos\left(\frac{1}{(2x-1)^2}\right) & \text{nếu } x \neq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{nếu } x = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Bg giải.

+ TXĐ: $\mathbb{R}$ ⊕ Xét tính liên tục

+ Với $x \neq \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) = (2x-1).\cos\left(\frac{1}{(2x-1)^2}\right)$ là hàm sơ cấp $\Rightarrow f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$ (1)

+ Tại $x = \frac{1}{2}$ ta có.

$f(\frac{1}{2}) = 0$

$\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} (2x-1).\cos\left(\frac{1}{(2x-1)^2}\right)$ (*)

Đặt $u = 2x-1 \Rightarrow$ khi $x \to \frac{1}{2}$ thì $u \to 0$

(*) $\Leftrightarrow \lim\limits_{u \to 0} u.\cos\left(\frac{1}{u^2}\right) = 0$ (vì $u \to 0$ là vô cùng bé; $|\cos(\frac{1}{u^2})| \leq 1$ là đại lượng bị chặn)

Vậy $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} f(x) = f(0) \Rightarrow$ Hàm số liên tục tại $x = \frac{1}{2}$. (2)

Vậy (1), (2) $\Rightarrow f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

⊕ Xét tính khả vi.

+ Với $x \neq \frac{1}{2}$ ta có $f(x) = (2x-1).\cos\left((2x-1)^{-2}\right)$

$\Rightarrow f'(x) = 2.\cos\left((2x-1)^{-2}\right) + (2x-1).\left[-\sin\left((2x-1)^{-2}\right).\left((2x-1\right.\right.$

$= 2.\cos\left((2x-1)^{-2}\right) + (2x-1).\sin(2x-1)^{-2}).2.2.(2x-$

$= 2.\cos\left((2x-1)^{-2}\right) + 4.\sin\left((2x-1)^{-2}\right).(2x-1)^{-2}$

+ Với $x = \frac{1}{2}$, ta có

$\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{f(x) - f(\frac{1}{2})}{x - \frac{1}{2}} = \lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{(2x-1).\cos\left((2x-1)^{-2}\right)}{x - \frac{1}{2}} = \lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} 2.\cos\left((2x-1)^{-2}\right)$ là $\nexists$

Scanned with CamSca

Phạm Ngọc Hải 09/07/2003 21002139
K66 A5 SBD: 31

Vì $x \to \frac{1}{2}$ thì $(2x-1)^{-2} \to \infty$. mà $\lim\limits_{u \to \infty} \cos u$ là không tồn tại.

Vậy $f(x)$ không khả vi tại $x = \frac{1}{2}$ hay $f(x)$ khả vi trên $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$

Câu 5. Tính $y^{(2021)}(0)$ với $y = (x^2+3x).\cos(5x+\pi)$

Bgiải.

Biến đổi.

$y = (x^2+3x).\cos(5x+\pi)$
$= -(x^2+3x).\cos(5x)$
$= (-x^2-3x).\cos(5x)$

Ta có.

$$y^{(2021)}(x) = \sum_{k=0}^{2021} C_{2021}^{k}.(-x^2-3x)^{(k)}.[\cos(5x)]^{(2021-k)}$$

$= (-x^2-3x).[\cos(5x)]^{(2021)} + C_{2021}^{1}(-2x-3).[\cos(5x)]^{(2020)} + C_{2021}^{2}.(-2).[\cos(5x)]^{(2019)}$
$+ 0 + \ldots + 0$

$= (-x^2-3x).5^{2021}.\cos(5x+2021.\frac{\pi}{2}) + 2021.(-2x-3).5^{2020}.\cos(5x+2020.\frac{\pi}{2})$
$+ C_{2021}^{2}.(-2).5^{2019}.\cos(5x+2019.\frac{\pi}{2})$

Vậy $y^{(2021)}(0) = 0 - 3.2021.5^{2020}.1 + 0$
$= -6063.5^{2020}$