Thứ
Ngày
No.

Ktra giữa kỳ I - năm 1 Đại số tuyến tính

Họ tên: Phạm Ngọc Hải
MSV: 2100 2139

Trang số 1

Câu 1. Tìm các số thực λ sao cho hệ vector sau là 1 hệ vector độc lập tuyến tính. (6đ)

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{bmatrix} \quad u_2 = \begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \\ \lambda \end{bmatrix} \quad u_3 = \begin{bmatrix} \lambda^2 \\ \lambda \\ 1 \end{bmatrix}$$

Bgiải.

⊕ Ta xét phương trình vector

$$x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{bmatrix} + x_2 \cdot \begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \\ \lambda \end{bmatrix} + x_3 \cdot \begin{bmatrix} \lambda^2 \\ \lambda \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \cdot x_1 + \lambda \cdot x_2 + \lambda^2 \cdot x_3 = 0 \\ \lambda \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + \lambda \cdot x_3 = 0 \quad (*) \\ \lambda^2 \cdot x_1 + \lambda \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = 0 \end{cases}$$

Để hệ vector u_1, u_2, u_3 đltt thì $(*)$ phải có nghiệm duy nhất là $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

⊕ Xét ma trận

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & \lambda^2 & 0 \\ \lambda & 1 & \lambda & 0 \\ \lambda^2 & \lambda & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 - \lambda^2 \cdot R_1 \to R_3]{R_2 - \lambda \cdot R_1 \to R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & \lambda^2 & 0 \\ 0 & (1-\lambda^2) & (\lambda-\lambda^3) & 0 \\ 0 & (\lambda-\lambda^3) & (1-\lambda^4) & 0 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & \lambda^2 & 0 \\ 0 & (1-\lambda^2) & \lambda \cdot (1-\lambda^2) & 0 \\ 0 & \lambda \cdot (1-\lambda^2) & (1+\lambda^2) \cdot (1-\lambda^2) & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\frac{R_3}{1-\lambda^2} \to R_3]{\frac{R_2}{1-\lambda^2} \to R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & \lambda^2 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & \lambda & 1+\lambda^2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3 - \lambda \cdot R_2 \to R_3]{R_1 - \lambda R_2 \to R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 - \lambda \cdot R_3 \to R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Họ tên: Phạm Ngọc Hải
MSV: 2100 2139
Trang số 2.

Vì ma trận dạng bậc thang rút gọn không có chốt ở cột hệ số tự do, đồng thời số ẩn = số phương trình nên (*) có nghiệm duy nhất $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ với $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

<u>Kết luận</u>. Vậy với $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ thì hệ vector đã cho độc lập tuyến tính.

<u>Câu 2</u>. Ma trận sau đây có phải ma trận khả nghịch hay không? Nếu có, hãy tìm ma trận nghịch đảo of nó.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

<u>Bgiải</u>.

⊕ Ta có.

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0.2.3 + 0.2.1 + 1.0.4 - 0.2.4 - 0.0.3 - 1.2.1 = -2 \neq 0$$

Vì $\det A \neq 0$ nên A là ma trận khả nghịch.

⊕ Tìm ma trận ~~(khả)~~ nghịch đảo của A.

Ta xét.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\frac{R_2}{2} \to R_2]{R_1 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_1 - 2R_2 \to R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_2 - 2R_3 \to R_2]{R_1 + R_3 \to R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Họ và tên: Phạm Ngọc Hải
MSV: 2100 2139
Trang số 3

Kết luận. Vậy ma trận khả nghịch của A là

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Câu 3. Giải ptrình sau

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ x & 1 & x & x^2 \\ x^2 & x & 1 & x \\ x^3 & x^2 & x & 1 \end{vmatrix} = -8$$

Bgiải.

⊕ Xét định thức.

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ x & 1 & x & x^2 \\ x^2 & x & 1 & x \\ x^3 & x^2 & x & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}.1.\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ x & 1 & x \\ x^2 & x & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}.x.\begin{vmatrix} x & x & x^2 \\ x^2 & 1 & x \\ x^3 & x & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}.x^2.\begin{vmatrix} x & 1 & x^2 \\ x^2 & x & x \\ x^3 & x^2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{1+4}.x^3.\begin{vmatrix} x & 1 & x \\ x^2 & x & 1 \\ x^3 & x^2 & x \end{vmatrix}$$

⊕ Ta tính các định thức sau

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ x & 1 & x \\ x^2 & x & 1 \end{vmatrix} = 1.1.1 + x.x.x^2 + x^2.x.x - 1.x.x - x.x.1 - x^2.1.x^2$$

$$= 1 + x^4 + x^4 - x^2 - x^2 - x^4$$

$$= 1 + x^4 - 2x^2$$

Thứ
Ngày . . No.

Họ và tên: Phan Ngọc Hải
MSV: 21002139
Trang số 4

$$\begin{vmatrix} x & x & x^2 \\ x^2 & 1 & x \\ x^3 & x & 1 \end{vmatrix} = x.1.1 + x^2.x.x^2 + x^3.x.x - x.x.x - x^2.x.1 - x^3.1.x^2$$

$$= x + x^5 + x^5 - x^3 - x^3 - x^5$$

$$= x + x^5 - 2x^3$$

$$= x.(1 + x^4 - 2x^2)$$

$$\begin{vmatrix} x & 1 & x^2 \\ x^2 & x & x \\ x^3 & x^2 & 1 \end{vmatrix} = x.x.1 + x^2.x^2.x^2 + x^3.1.x - x.x^2.x - x^2.1.1 - x^3.x.x^2$$

$$= x^2 + x^6 + x^4 - x^4 - x^2 - x^6$$

$$= 0$$

$$\begin{vmatrix} x & 1 & x \\ x^2 & x & 1 \\ x^3 & x^2 & x \end{vmatrix} = x^3 + x^2.x^2.x + x^3.1.1 - x.x^2.1 - x^2.1.x - x^3.x.x$$

$$= x^3 + x^5 + x^3 - x^3 - x^3 - x^5$$

$$= 0.$$

⊙ Như vậy ta có.

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ x & 1 & x & x^2 \\ x^2 & x & 1 & x \\ x^3 & x^2 & x & 1 \end{vmatrix} = 1.(1 + x^4 - 2x^2) - x.x.(1 + x^4 - 2x^2)$$

$$= (x^4 - 2x^2 + 1).(1 - x^2)$$

Trang số 4

KOKUYO

Scanned with CamScanner

Họ và tên: Phạm Ngọc Hải
MSV: 21002139
Trang số 5

Vậy phtrình (*) đề bài tương đương.

$(*) \Leftrightarrow (x^4 - 2x^2 + 1).(1 - x^2) = -8$

$\Leftrightarrow x^4 - 2x^2 + 1 - x^6 + 2x^4 - x^2 + 8 = 0$

$\Leftrightarrow -x^6 + 3x^4 - 3x^2 + 9 = 0$

$\Leftrightarrow x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 9 = 0.$ $(\star)$

Đặt $x^2 = t$ (đk: $t \geq 0$) ta có.

$(\star) \Leftrightarrow t^3 - 3t^2 + 3t - 9 = 0$

$\Leftrightarrow (t-3).(t^2+3) = 0$

$\Leftrightarrow t = 3$ (vì $t^2 + 3 > 0 \ \forall \ t \geq 0$)

$\Leftrightarrow x^2 = 3$

$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}.$

Vậy nghiệm của phtrình (*) của đề bài là $x = \pm\sqrt{3}$.