Btập4. (AxH) (Btập tổng hợp)

Cho axạ $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ xđịnh bởi

$$T(x,y,z,t) \longrightarrow (x-3z+t,\ 2x+y+z+t,\ 3y-4z+7t)$$

a) Tìm ma trận của T (/) cặp cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^4$ và $\mathbb{R}^3$

b) Tính $T(1,-2,1,3)$

c) Tìm 1 cơ sở của hạt nhân T

d) Tìm hạng của ảnh xạ T

e) Tìm 1 cơ sở của ảnh của axạ T

<div align="center">Bgiải.</div>

a) $\mathbb{R}^4$ có

$$u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4$$

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$\mathbb{R}^3$ có

$$v_1 \quad v_2 \quad v_3$$

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad f(u_1) \qquad f(u_2) \qquad f(u_3) \qquad f(u_4)$$

$$\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}0\\1\\3\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}-3\\1\\-4\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}1\\1\\7\end{bmatrix}$$

Muốn tìm ma trận của T (/ cặp cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^4$ và $\mathbb{R}^3$, ta ghép ma trận

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 6 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & -4 & 7 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 7 \end{bmatrix}$$ là ma trận chuyển (cơ sở)

của T (/ cặp cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^4$ và $\mathbb{R}^3$.

b) $T(1,-2,1,3) = (1,4,11)$

c) Gsử $T(v) = 0$ vs $v(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$

Ta có $(*) \Leftrightarrow$ giải ma trận sau

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 7 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_2 - 2R_1]{\rightarrow R_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 7 & 0 \end{array}\right]$$

$\xrightarrow{R_3 - 3R_2 \to R_3}$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -25 & 10 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\frac{R_3}{-25} \to R_3]{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{5} & 0 \end{array}\right]$$

$\xrightarrow[R_2 - 7R_3 \to R_2]{R_1 + 3R_3 \to R_1}$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{9}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{5} & 0 \end{array}\right]$$

Vì |số ẩn > số chốt $\Rightarrow$ Hệ phương có vô số ∈ tham số
|có chốt cột tự do

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} x_4 \\ \frac{9}{5} x_4 \\ \frac{2}{5} x_4 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \ker T = \left\{ x_4 \cdot \left(-\frac{1}{5}, \frac{9}{5}, -\frac{2}{5}, 1\right) \mid x_4 \in \mathbb{R} \right\}$

$\Rightarrow$ Cơ sở của $\ker T$ là $\mathcal{L} = \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{9}{5} \\ -\frac{2}{5} \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

d) Ta có ma trận of 🅤T là.

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 7 \end{bmatrix}
\xrightarrow[\text{kg phần}]{\text{than khải}}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{9}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}
$$

$\Rightarrow$ Có 0 dòng $= (0,...0)$

$\Rightarrow$ Hạng of axạ T là 3

e) $Im\,T = \{ T(v) \mid v \in \mathbb{R}^4 \}$

Cơ sở of $Im\,T$