

Hạng 2. Ma trận chuyển cơ sở

Cơ sở vectơ sau là 1 cơ sở of \mathbb{R}^3

$$v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Hãy tìm ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở (v_1, v_2, v_3) sang cơ sở sau đây.

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad u_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Bgiải:

+ Để (u_1, u_2, u_3) là 1 cơ sở of \mathbb{R}^3 thì

$$x_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad (a_1, a_2, a_3 \text{ bất kỳ } \in \mathbb{R}) \text{ có n. duy nhất} \quad (*)$$

+ Xét ma trận

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -1 & a_1 \\ 1 & 0 & 2 & a_2 \\ 1 & 1 & 0 & a_3 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & a_2 \\ 1 & 1 & 0 & a_3 \\ 3 & 0 & -1 & a_1 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & a_2 \\ 0 & 1 & -2 & -a_2 + a_3 \\ 0 & 0 & 7 & 3a_2 - a_1 \end{array} \right] \\ & \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & a_2 \\ 0 & 1 & -2 & -a_2 + a_3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{7}a_2 - \frac{1}{7}a_1 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{7}a_2 + \frac{2}{7}a_1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{7}a_2 + a_3 - \frac{2}{7}a_1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{7}a_2 - \frac{1}{7}a_1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Vì số chốt = số ẩn $\Rightarrow (*)$ luôn có nghiệm duy nhất

$\Rightarrow (u_1, u_2, u_3)$ là cơ sở of \mathbb{R}^3 .

* Tìm ma trận chuyển (v_1, v_2, v_3) sang (u_1, u_2, u_3) ta xét

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -3 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & -1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right]$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 7 & -1 & 2 & 4 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & \frac{4}{7} \end{array} \right]$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{6}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{7} & -\frac{3}{7} & -\frac{27}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & \frac{4}{7} \end{array} \right]$$

Vậy ma trận chuyển từ cơ sở (v_1, v_2, v_3) sang cơ sở (u_1, u_2, u_3) là

$$\left[\begin{array}{ccc} \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{5}{7} & -\frac{3}{7} & -\frac{27}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & \frac{4}{7} \end{array} \right]$$