

# 复杂多智能体系统的最大一致性

王付永, 杨洪勇, 翁 灿

(鲁东大学信息与电气工程学院, 山东 烟台 264025)

**摘要:** 复杂多智能体系统由于其在机器人、航空航天、网络通信等领域的广泛应用, 受到越来越多的关注。基于一阶多智能体的无向网络, 研究了智能群体的最大一致性问题。根据智能个体之间信息交换特性, 提出了一种应用个体局部信息的线性分布式控制协议。运用 Laplacian 矩阵的相关性质和联合连通的相关结论以及代数图论的有关技巧和 SIA 的性质进行了稳定性分析, 得到了多智能体系统的最大一致收敛条件。最后通过一个示例进行仿真, 并验证了所得结论的正确性。

**关键词:** 多智能体; 最大一致性; 分布式控制协议; 联合连通

**中图分类号:** TP18 **文献标识码:** B

## Maximum Consistence of Complex Multi-Agent Systems

WANG Fu-yong, YANG Hong-yong, WENG Can

(College of Information and Electrical Engineering, Ludong University, Yantai, Shandong 264025, China)

**ABSTRACT:** Based on undirected networks of first-order multi-agent, the maximum consistence of agent group was studied. A distributed control protocol with individual local information was proposed. By using related properties of Laplacian matrix and related conclusions of jointly-connected, the stability analysis was analyzed based on algebraic graph theory and the nature of SIA. The maximum consistent convergence of multi-agent systems was achieved in this paper. Finally, a simulation example was given to verify the correctness of the conclusion.

**KEYWORDS:** Multi-agent; Maximum consistence; Distributed control protocol; Jointly-connected

### 1 引言

近些年来, 基于生物学启发的多智能体、多小车、多机器人系统分布式协调问题引起了研究人员的极大关注。一致性问题是多智能体或多机器人基于动态网络通过协调控制使其状态取得某同一值(称为决策值), 例如多智能体通过相互协调使得运动速度或运动方向趋于一致, 或者到达某一集合点(位置趋于一致)就是典型的一致性问题。在实际应用中, 多智能体或多小车可能只对某个感兴趣的量取得一致(即同步), 因此对一致性问题一般形式的研究十分重要。

1995年, Vicsek等<sup>[1]</sup>提出了一个简单但引起巨大关注的多自主移动智能体(即点或者粒子)模型, 每个智能体在系统演变过程中通过采用“最邻近规则”的模型在没有集中协调的情况下, 使所有智能体的运动方向最终趋于一致。Jadbabaie<sup>[2]</sup>考虑了简化的 Vicsek 模型(忽略了干扰输入的影响)

响), 运用矩阵分析和代数图论工具进行了理论验证, 并将该模型推广到有领航者的情形, 其领航者状态取为一常值, 对连续时间和离散时间模型分别给出了收敛性结果。Olfati-Saber等提出了一个线性及非线性分散协调控制规则, 以使多智能体无向网络取得平均一致性; 并考虑了多智能体有向网络的一致性问题<sup>[4]</sup>。Yang等人<sup>[4-6]</sup>研究了具有干扰的不确定性的多智能体系统的一致性问题。Hatano等<sup>[7-8]</sup>考虑了无向动态网络的随机一致收敛问题。Lin等人<sup>[9-10]</sup>研究了动态切换网络联合联通特性下的多智能体系统的一致性。

本文针对无向固定网络拓扑, 提出了一种应用局部信息的分布式控制协议, 将权重系数和选择系数引入到控制器的参数设计, 从而增强了控制器设计的灵活性和多样性, 有效地解决了无向固定网络的全局最大一致性问题。

### 2 代数图论及一致性问题的数学描述

#### 2.1 代数图论介绍

设  $G=(V, \mathcal{E}, A)$  是  $n$  个结点的权重无向图,  $V=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  为一个顶点(或结点)集合,  $\mathcal{E} \subset V \times V$  为一个边的集合,  $A=[a_{ij}]$  为权重邻接矩阵, 其中  $(v_i, v_j) \in \mathcal{E}$ ,  $v_i, v_j \in V$ ; 对

基金项目: 国家自然科学基金(61273152); 山东省科技发展计划(2012YD03110); 鲁东大学科研基金(LY2012021)

收稿日期: 2014-12-05 修回日期: 2014-12-29

于  $\forall i, j \in I = \{1, 2, \dots, n\} : i \neq j, a_{ij} \geq 0$ ; 对于  $\forall i \in I, a_{ii} = 0$ 。对于一个图, 如果对  $\forall (v_i, v_j) \in \mathcal{E}$  有  $(v_j, v_i) \in \mathcal{E}$ , 记为  $v_i \sim v_j$  或  $i \sim j$  称该图为无向的。结点  $v_i$  的邻接集合用  $N_i$  表示, 定义为  $N_i = \{j \in I : a_{ij} > 0\}$ 。结点的入度和出度分别定义如下:

$$\deg_{in}(v_i) = \sum_{j=1}^n a_{ji}, \deg_{out}(v_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij} \quad (1)$$

对于一般的图, 如果图  $G$  的邻接矩阵为 0-1 矩阵, 则  $\deg_{out}(v_i) = |N_i|$ 。对于无向图来说, 它所有顶点的入度和出度都相等。定义  $A = [a_{ij}]$  为图  $G$  的邻接矩阵, 如果  $(v_i, v_j) \in \mathcal{E}$  则  $a_{ij} > 0$  (一般为 1); 否则  $a_{ij} = 0$ 。定义  $\Delta = [\Delta_{ij}]$  为图  $G$  的度矩阵, 其中  $\forall i \neq j, \Delta_{ij} = 0$  且  $\Delta_{ii} = \deg_{out}(v_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij}$ 。图  $G$  的 Laplacian 矩阵定义为:

$$L = \Delta - A \quad (2)$$

对于无向图  $G, \forall x \in R^n$ , 有

$$x^T L x = \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{ij} (x_j - x_i)^2 \quad (3)$$

上式表明无向图的 Laplacian 矩阵为半正定的。由 Laplacian 矩阵的定义可知, Laplacian 矩阵的行和为 0, 因此 0 为 Laplacian 矩阵的特征值,  $\omega_\gamma = (1, 1, \dots, 1)^T$  为属于特征值 0 的一个右特征向量。对于无向图, 如果  $G$  为连通的, 则  $\text{rank}(L) = n - 1$  [3]。

## 2.2 一致性问题的数学描述

设  $x_i \in R$  表示图  $G$  的结点  $v_i$  的状态, 其中  $\forall i \in I = \{1, 2, \dots, n\}$ 。称结点  $v_i$  与结点  $v_j$  为一致的, 当且仅当  $x_i = x_j$ 。同样, 称结点  $v_i$  与结点  $v_j$  为不一致的, 当且仅当  $x_i \neq x_j$ 。

设  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  表示所有结点的状态, 且满足下面微分方程:

$$\dot{x} = f(x), x(0) = x^0 \in R^n \quad (4)$$

$\chi: R^n \rightarrow R$  为  $x$  的函数, 其值  $y = \chi(x)$  称为决策值。图的所有结点在有限时间  $T > 0$  关于  $\chi$  取得了一致性, 当且仅当所有结点两两一致且  $x_i(T) = \chi(x(0)), \forall i \in I$ 。本文研究多智能体系统的最大一致性问题。

$$\chi(x) = \text{Max}(x) = \text{Max}\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \quad (5)$$

## 3 多智能体系统的最大一致性

### 3.1 问题描述

基于固定网络拓扑  $G = (V, E, A)$ , 考虑  $n$  个智能体

$$\dot{x}_i(t) = u_i(t), x_i(t) \in R, i = 1, 2, \dots, n. \quad (6)$$

构成的连续时间多智能体网络取得最大一致性问题。

定义 1 [11]: 如果矩阵  $A \in M_n(R)$  的所有元素均非负, 就称矩阵  $A$  为非负矩阵, 记为  $A \geq 0$ , 这里  $M_n(R)$  表示所有  $n$  阶实方阵的集合。一个非负矩阵, 如果其行和为 1, 就称其为 (行) 随机矩阵。一个随机矩阵  $P$ , 如果满足  $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n = 1_n y^T$ , 其中  $y$  为某个列向量,  $1_n = (1, 1, \dots, 1)^T$ , 则称随机矩阵  $P$  为非周期不可分的 (SIA)。

定义 2 [10]: 设拓扑图  $G_1, G_2, \dots, G_m$  与联合图  $G = G_1 \cup G_2$

$\cup \dots \cup G_m$  具有相同的顶点集  $V$ ; 联合图  $G$  的边集为所有图  $G_1, G_2, \dots, G_m$  边集的并, 它的第  $i$  个节点和第  $j$  个节点间的连接权重是图  $G_1, G_2, \dots, G_m$  的第  $i$  个节点和第  $j$  个节点间所有的链接权重之和。如果它们的联合图  $G$  是连通的, 则称  $G_1, G_2, \dots, G_m$  为联合连通的。

假设  $G_{\sigma(t)}$  表示切换时刻  $t$  智能体的通信拓扑图,  $L_{\sigma(t)}$  表示相应的拉普拉斯矩阵,  $N_{\sigma(t)}^i$  表示智能体  $i$  关于拓扑图  $G_{\sigma(t)}$  的邻接集合, 函数  $\sigma: [0, \infty) \rightarrow \{1, 2, \dots, M\}$  是一个分段切换常函数,  $M$  表示所有切换通信拓扑图的总数。

引理 [11]: 如果一个无向图的集合  $\{G_{i_1}, G_{i_2}, \dots, G_{i_m}\} \subset G$  的并为完全连通的, 则矩阵积  $e^{C_{i_m} \Delta t_m} \dots e^{C_{i_2} \Delta t_2} e^{C_{i_1} \Delta t_1}$  为 SIA 的, 其中  $C_{i_d}$  为对应于每个无向拓扑图  $G_{i_d}$  的随机矩阵,  $\Delta t_d > 0, d = \{1, 2, \dots, m\}$ 。

### 3.2 最大一致性线性控制器

定理: 假设由多智能体系统的  $n$  个智能体的动态模型 (3.1) 组成的一个无向连通网络, 应用如下的分布式协调控制规则:

$$u_i(t) = \alpha_i [(1 - \delta)(x_k(t) - x_i(t)) + \delta \sum_{\substack{j \in N_i \\ j \neq k}} a_{ij}(x_j(t) - x_i(t))], i = 1, 2, \dots, n. \quad (7)$$

其中  $\delta$  (权值系数) 为一个很小的正数,  $x_k(t) = \text{Max}_{j \in N_i} \{x_j(t)\}$ ,

$\alpha_i$  (选择系数) 的取值满足如下定义:

$$\alpha_i = \begin{cases} 1, & x_i(t) \leq x_k(t) \\ 0, & x_i(t) > x_k(t) \end{cases} \quad (8)$$

则联合图  $G$  的所有结点取得全局最大一致性, 即: 设  $x^* = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ , 则  $x_i^* = x_j^* = \text{Max}(x) = \text{Max}\{x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0)\}, \forall i, j, i \neq j$ 。

分析: 本文研究的是基于固定拓扑的多智能系统, 由于控制器中动态参数  $\alpha_i$  的引入, 造成系统的局部拓扑结构为动态变化的。这样就造成了系统并非时时刻刻为连通的, 但是最终整个拓扑结构是连通的。为了更好的解决这一问题, 引入了联合连通的定义及其相关理论。

智能群体中各智能体状态均为有限值, 且根据控制规则, 智能体最小状态收敛至最大状态为有限时间  $T$ , 也就是, 存在  $T_1 > 0$ , 使得  $T \leq T_1$ 。记  $T_p^i$  为智能体  $i$  的状态  $x_i(t)$  收敛至其邻域内局部最大状态  $x_k(t)$  的时间, 其中  $p$  为一有限常序列。  $T_p^i = 0$  对应于控制规则  $\alpha_i = 0$  的情况。对于  $T_p^i \neq 0$ , 记  $T_2 = \min\{T_p^i\}$ , 易知  $T_2 > 0$ 。显然, 该智能体网络最多有  $m = \lfloor T_1/T_2 \rfloor + 1$  个切换拓扑, 其中  $\lfloor T_1/T_2 \rfloor$  表示不超过  $T_1/T_2$  的最大整数。记  $[t_p, t_{p+1}) = T_2$ , 其中  $[t_p, t_{p+1})$  为一个非零、不重叠、有限严格递增的时间区间且连续,  $0 \leq p < m$ 。假设系统初始时刻为  $t_0$ , 有限时间序列  $\{t_1, t_2, \dots, t_m\}$  表示通信拓扑切换时刻, 其中  $t_m - t_0 = T$ 。在每个时间段  $[t_p, t_{p+1})$  内有  $G_{\sigma(t)} = G_{\sigma(t_p)}$ , 即通信拓扑在  $[t_p, t_{p+1})$  内保持不变。对于多智能体系统 (6), 其拓扑图对应的  $L$  矩阵是时变的, 但是在  $[t_p, t_{p+1})$  内有  $L_{\sigma(t)} = L_{\sigma(t_p)}$  保持不变。

证明: 由式(6)和式(7), 系统动态方程可以表示为矩阵形式

$$\dot{x} = -\hat{L}x \quad (9)$$

其中  $\hat{L} = \alpha L$ ,  $\alpha = \text{diag}\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ ,  $L = D - A$ ,  $D = \text{diag}\{((1-\delta) + (|N_1| - 1)\delta), ((1-\delta) + (|N_2| - 1)\delta), \dots, ((1-\delta) + (|N_n| - 1)\delta)\}$ ; 对于上述无向图  $G$ , 如果  $(v_i, v_j) \in \mathcal{E}$ , 则  $a_{ij} = 1$ , 否则  $a_{ij} = 0$ .  $|N_i|$  表示智能体  $i$  邻域内智能体的个数 ( $i = 1, 2, \dots, n$ );  $A$  为(3.2)所对应的邻接矩阵(与  $x_k(t)$  相连接的权值系数为  $(1-\delta)$ , 其它相连接的权值系数为  $\delta$ )。

根据上述分析, 可知在有限个不重叠的时间间隔  $[t_p, t_{p+1})$  内的通信拓扑保持不变。令  $\sigma: [0, +\infty) \rightarrow \Gamma, \Gamma = 1, 2, \dots, m$  是一个切换信号,  $m$  为总拓扑数。记系统通信拓扑图为  $G_\sigma^s (s = 1, 2, \dots, m)$ , 且  $G_\sigma^s$  相应的 Laplacian 矩阵用  $L_\sigma^s$  表示。

系统在时间段  $[t_p, t_{p+1})$  内的动态方程可表示为:

$$\dot{x}_\sigma^s = -\hat{L}_\sigma^s x_\sigma^s \quad (10)$$

其中  $\hat{L}_\sigma^s = \alpha_\sigma^s L_\sigma^s$ ,  $\alpha_\sigma^s = \text{diag}\{\alpha_{\sigma 1}^s, \alpha_{\sigma 2}^s, \dots, \alpha_{\sigma n}^s\}$ ,  $L_\sigma^s = D_\sigma^s - A_\sigma^s$ ,  $D_\sigma^s = \text{diag}\{((1-\delta) + (|N_{\sigma 1}^s| - 1)\delta), ((1-\delta) + (|N_{\sigma 2}^s| - 1)\delta), \dots, ((1-\delta) + (|N_{\sigma n}^s| - 1)\delta)\}$ ;  $A_\sigma^s$  为通信拓扑图  $G_\sigma^s$  所对应的邻接矩阵,  $|N_{\sigma i}^s|$  表示智能体  $i$  在时间段  $[t_p, t_{p+1})$  内智能体的个数。系统在整个有限时间段  $[t_0, t_m]$  内的解为系统在各时间段  $[t_p, t_{p+1})$  内的逐一迭代, 具体形式如下:

$$\begin{aligned} x(1) &= e^{-\hat{L}_\sigma^1 \Delta t_1} x(0), \quad x(2) = e^{-\hat{L}_\sigma^2 \Delta t_2} x(1) \\ \dots \quad x(m) &= e^{-\hat{L}_\sigma^m \Delta t_m} x(m-1) \end{aligned} \quad (11)$$

即有:

$$x(m) = e^{-\hat{L}_\sigma^m \Delta t_m} \dots e^{-\hat{L}_\sigma^2 \Delta t_2} e^{-\hat{L}_\sigma^1 \Delta t_1} x(0) \quad (12)$$

下面讨论各智能体与其邻接成员中智能体状态较大者的关系的不同情形, 并定性分析各种情况下多智能体的动态特性:

1) 当智能体  $i$  的状态  $x_i$  大于或等于其邻域内智能体  $k$  的状态  $x_k$  (邻域内最大状态) 时, 由  $\alpha_i$  的定义可知  $\alpha_i = 0$ , 则有  $\dot{x}_i(t) = u_i(t) = 0$ , 即  $x_i(t)$  保持不变并作为其局部最大状态。

2) 当智能体  $i$  的状态  $x_i$  小于其邻域内智能体  $k$  的状态  $x_k$  (邻域内最大状态) 时, 由  $\alpha_i$  的定义可知  $\alpha_i = 1$ , 则有  $\dot{x}_i(t) = u_i(t) = (1-\delta)(x_k(t) - x_i(t)) + \delta \sum_{\substack{j \in N_i \\ j \neq k}} a_{ij}(x_j(t) - x_i(t))$ ,  $\delta$  为足够小的正数, 当时间足够大时, 则有  $\dot{x}_i(t) > 0$ , 即  $x_i(t)$  会逐渐增大到其邻域内局部最大状态  $x_k(t)$ 。

通过分析不同情形下的多智能体的动态特性, 易知各智能体的局部最大状态会不断更新, 并且至少存在一个全局状态最大的智能体  $l$  的状态  $x_l(t)$  始终保持不变, 恒有  $\dot{x}_l(t) = 0$ 。则由所有智能体组成的通信拓扑图的集合在整个有限时间区间  $[t_0, t_m]$  内必为联合连通的, 即整个通信拓扑图为完全连通的, 且存在一个全局可达的结点。

根据引理, 多智能体系统在每个时间区间  $[t_p, t_{p+1})$  一致有界, 且系统的通信拓扑图在有限时间区间  $[t_0, t_m]$  上为完全

连通的。多智能体连续时间系统(3.1)取得渐进一致性, 且系统的任意解会渐进收敛到系统平衡点  $x^*$ , 即全局最大状态。

所以  $\text{Max}(x^*) = \text{Max}\{x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*\}$ 。

## 4 实例分析

用计算机仿真验证前面的结论。考虑 8 个智能体, 其互连拓扑如图 1 所示。由图 1 可知, 其邻接矩阵为  $A = \hat{A} + \hat{A}^T$ ,

其中, 定义矩阵  $\hat{A} = \begin{bmatrix} 0_{8 \times 1} & E_8 \\ 1 & 0_{1 \times 8} \end{bmatrix}$ ,  $E_8$  为 8 阶单位阵,  $0_{8 \times 1}$  和  $0_{1 \times 8}$  分别为相应阶数的零矩阵。智能体  $i$  的控制输入  $u_i(t)$  中的参数  $\delta$  分别取为 0.1 和 0.001。各智能体的初始状态取为  $x(0) = [5, 4, 6, 5, 5, 6, 5, 8, 4, 5, 7]$ 。图 2 和图 3 分别为  $\delta = 0.1$  和  $\delta = 0.001$  情况下系统在 10 秒计算机仿真时间内的运动轨迹, 其中采样间隔为 0.1s。从图中可以看出, 各智能体从各自的初始状态出发, 系统中状态值最大的智能体的状态始终保持不变, 其余智能体的状态渐进收敛到其状态最大值, 最大状态即为平衡状态。比较图 2 和图 3 的实验结果, 权值系数  $\delta$  越小, 系统的收敛速度越快, 收敛性能越好。

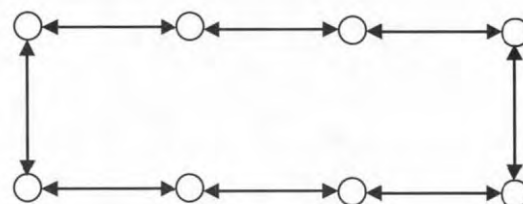


图 1 8 个智能体的互连拓扑

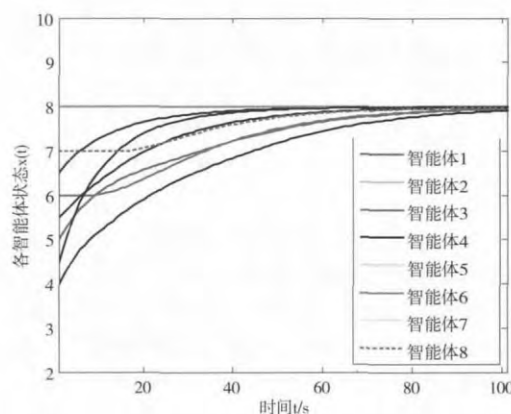


图 2 线性控制器作用下系统状态轨迹 ( $\delta = 0.1$ )

## 5 结论

本文提出了一类分布式协调控制器, 通过将权值系数和选择系数融入控制器设计, 增强了控制器设计的灵活性, 有效地解决了无向固定网络的全局最大一致性问题。利用控制理论及代数图论工具, 给出了多智能体在无向固定网络拓

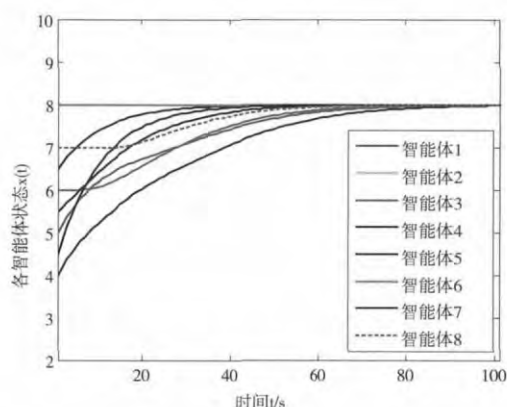


图3 线性控制器作用下系统状态轨迹( $\delta=0.001$ )

扑的收敛性分析。多智能体无向网络的连通性及控制器的可选择性设计是系统收敛性分析的关键。仿真示例对理论结果进行了有效验证。本文中多智能体的最大一致性基于固定无向拓扑,有向网络及动态拓扑情形有待进一步研究。

#### 参考文献:

- [1] T Vicsek, et al. Novel Type of Phase - Transition in a System of Self - Driven Particles [J]. Physical Review Letters, 1995, 75 (6): 1226 - 1229
- [2] A Jadbabaie, J Lin, A S Morse. Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2003, 48(6): 988 - 1001.
- [3] R Olfati - Saber, R M Murray. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time - delays [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2004, 49(9): 1520 - 1533
- [4] H Y Yang, L Guo, H Zou. Robust Consensus of Multi - Agent Systems with Time - Delays and Exogenous Disturbances, International Journal of Control [J]. Automation, and Systems, 2012, 10 (4): 797 - 805.

- [5] H Y Yang, X Zhu, S Zhang. Consensus of Second - Order Delayed Multi - Agent Systems with Leader - Following [J]. European Journal of Control, 2010, 16(2): 188 - 199.
- [6] H Y Yang, et al. Consensus Tracking of Multiagent Systems with Time - Varying Reference State and Exogenous Disturbances [J]. Mathematical Problems in Engineering, 2014, Volume 2014, Article ID 213862, 7 pages, 2014
- [7] Y Hatano, M Mesbahi. Agreement over random networks [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2005, 50(11): 1867 - 1872.
- [8] Y Hatano, M Mesbahi. Agreement over random networks [C]. in: Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control, Nassau, Bahamas: Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc., 2004: 2010 - 2015.
- [9] P LIN, Y JIA. Multi - agent consensus with diverse time - delays and jointly - connected topologies [J]. Automatica, 2011, 47(4): 848 - 856.
- [10] P LIN, Y JIA. Consensus of a class of second - order multi - agent systems with time - delay and jointly - connected topologies [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2010, 55(3): 778 - 784.
- [11] W Ren, R W Beard. Consensus seeking in multiagent systems under dynamically changing interaction topologies [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2005, 50(5): 655 - 661.

#### 【作者简介】

王付永(1990 -),男(汉族),山东省济南市人,硕士研究生,主要研究领域为复杂网络、多智能体编队控制等。

杨洪勇(1967 -),男(汉族),山东省德州市人,教授,硕士研究生导师,主要研究领域为网络应用技术、多智能体编队控制、复杂网络控制、非线性系统控制等。

翁 灿(1987 -),男(老龙族),老挝人,硕士研究生,主要研究领域为 Web 应用技术。



#### 【作者简介】

王 尉(1990 -),男(汉族),安徽省亳州市人,硕士研究生,主要研究领域为光伏发电系统。

王 萍(1959 -),女(汉族),天津市人,教授,博士生导师,主要研究领域为电力电子技术。

曹艳侠(1989 -),女(汉族),安徽省蚌埠市人,硕士研究生,主要研究领域为控制理论。

元 才(1991 -),男(汉族),山东省莱芜市人,硕士研究生,主要研究领域为并网逆变器。



(上接第 124 页)

- [10] 于蓉蓉,等. 一种改进型预测电流控制算法 [J]. 电工技术学报, 2010, 25(7): 100 - 107.
- [11] D G Holmes, D A Martin. Implementation of a direct digital predictive current controller for Single and three Phase voltage source inverter [C]. Industry Applications Conference, San Diego, CA: IEEE, 1996 - 2: 906 - 913.
- [12] G H Bode, et al. An improved robust predictive current regulation algorithm [J]. IEEE Transactions on Industry Applications, 2005, 41(6): 1720 - 1733.