

具有正负混合连接权重及通讯时滞的多智能体系统一致性

杜明骏, 孟德元

北京航空航天大学第七研究室, 北京 100191
E-mail: dumingjun0421@163.com, dymeng@buaa.edu.cn

摘要: 本文考虑多智能体系统在具有正负混合连接权重及通讯时滞的无向拓扑情形下的一致性, 使得多智能体系统达到一致时的状态绝对值相同但符号可能不同。首先, 提出了一种问题转换方法, 能够将所考虑一致性问题转换成一个等价的稳定性问题。其次, 证明了当多智能体系统达到结构平衡时, 尽管其相关无向图含有多个通讯时滞, 能够在固定连通拓扑结构下达到一致性。最后, 利用仿真实例验证了所得结论的有效性。

关键词: 多智能体系统、一致性、正负混合连接权重、通讯时滞

Consensus of Multi-Agent Systems with Antagonistic Interactions and Communication Delays

DU Mingjun, MENG Deyuan

The Seventh Research Division, Beihang University (BUAA), Beijing 100191, P.R.China
E-mail: dumingjun0421@163.com, dymeng@buaa.edu.cn

Abstract: This paper deals with the consensus problem of multi-agent systems under undirected graphs that have antagonistic interactions and communication delays. The multi-agent systems are guaranteed to reach agreement on a consensus value that is the same for all agents except the sign. A problem transformation approach is proposed, which can transform the considered consensus problem into an equivalent stability problem. It is shown that if a multi-agent network under fixed topology is connected and can achieve structural balance, then it can reach consensus, regardless of multiple communication delays. Simulation examples are provided to demonstrate the effectiveness of the derived results.

Key Words: multi-agent systems, consensus, antagonistic interactions, communication delays.

1 引言

近年来, 多智能体 (multi-agent) 系统的一致性问题一直是国内外人员研究的热点之一, 这主要是由于其成果可以应用到机器人编队控制、无人机协调控制、人造卫星控制等诸多领域中。特别地, 通讯时滞是多智能体系统信息交换中不可忽视的一个重要实际问题, 因而针对含有通讯时滞的多智能体系统的一致性问题研究受到了广泛的关注^[1-7]。

上述文献[1-7]的研究成果都是针对具有非负连接权重的多智能体系统获得的。最近, 具有混合连接权重的多智能体系统的一致性逐步引起了人们的关注^[8-10], 其在社会学、飞机编队等方面应用比较广泛。目前, 关于多智能体系统在混合连接权重的情况下一致性的研究还比较少。在具有混合连接权重的多智能体系统一致性问题的研究中, C. Altanfini给出了多智能体系统在无向图情形下其能够达到一致性的条件

[8], 但是其没有考虑智能体之间存在通讯时滞的问题。与文献[8]相比, 本论文考虑具有正负混合连接权重的多智能体系统在固定拓扑结构、存在通讯时滞情形下的一致性问题。

本论文的研究思路如下: 首先给出一种问题转换方法, 把多智能体系统的一致性问题转换为一个稳定性问题。然后通过李雅普诺夫分析方法和线性矩阵不等式方法来得出多智能体系统存在通讯时滞时能够达到一致性的条件。此外, 针对得出的结论进行仿真, 验证所得结论的正确性。

符号标记: 在下文中为了标识方便, 令 $I = \{1, 2, \dots, n\}$, $I_1 = \{2, 3, \dots, n\}$, $I_2 = \{1, 2, \dots, n-1\}$ 及 $I_3 = \{1, 2, \dots, m\}$ 。

2 预备知识与问题描述

2.1 预备知识

定义一个无向图为 $G = (V, \mathcal{E}, A)$ 其中 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 表示由有限顶点或节点组成的集

*此项工作得到国家973计划项目资助, 项目批准号: 2012CB821200, 2012CB821201; 国家自然科学基金资助, 项目批准号: 61104011, 61134005, 61221061, 61327807; 北京市自然科学基金资助, 项目批准号: 4122046; 中央高校基本科研业务费专项资金资助

合; $\varepsilon \subseteq V \times V$ 是一个无向边的集合, $e_{ij} = (v_i, v_j) \in \varepsilon$ 叫做边。若一对边有相同的节点, 即: $(v_i, v_j), (v_j, v_i) \in \varepsilon$, 则称其为对角的。 $A = [a_{ij}] \in R^{n \times n}$, 其表示权重矩阵, a_{ij} 表示权重, $a_{ij} \neq 0 \Leftrightarrow (v_j, v_i) \in \varepsilon$, 且 a_{ij} 的取值可正可负。在本文中, 考虑多智能体系统拓扑为无向图, 那么可以得到 A 为对称矩阵, 即 $a_{ij} = a_{ji}$, 故 $a_{ij}a_{ji} \geq 0$ 。若节点出现了重复, 则定义其权重为 0, 即 $a_{ii} = 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$ 。若 $a_{ij} \neq 0$, 则称节点 v_j 称为节点 v_i 的邻居, 节点 v_i 的所有邻居组成的集合称为节点 v_i 的邻集, 其指标集合记为 $N(i)$, 即 $N(i) = \{j \in I: a_{ij} \neq 0\}$ 。如果任意两个节点都能够由路径连接, 则无向图 G 是连通的, 也即是强连通。

定义1^[8] (结构平衡): 对无向图而言, 多智能体系统分成两个集合 V_1 和 V_2 , 有 $V_1 \cup V_2 = V, V_1 \cap V_2 = \emptyset$, 且满足如下两个条件:

- (1) 若 $\forall v_i, v_j \in V_q (q \in \{1, 2\})$, 则所有权重 $a_{ij} \geq 0$ 。
- (2) 若 $\forall v_i \in V_q, v_j \in V_r, q \neq r (q, r \in \{1, 2\})$, 则所有权重 $a_{ij} \leq 0$ 。

则称该无向图是结构平衡; 否则称该无向图为结构不平衡。

2.2 问题描述

假设多智能体系统有 n 个多智能体, 且每个智能体的动态可以表为

$$\dot{x}_i(t) = u_i(t), \quad i \in I \quad (1)$$

其中, $x_i(t) \in R$ 表示第 i 个智能体的状态及 $u_i(t) \in R$ 表示第 i 个智能体的控制协议或输入。为了便于描述, 下面的叙述中我们在不引起混淆的情况下省略时间变量 t , 例如 $x_i(t)$ 记为 x_i 及 $u_i(t)$ 记为 u_i 。对多智能体系统(1), 若存在两个集合 \bar{I}_1 和 \bar{I}_2 满足 $\bar{I}_1 \cup \bar{I}_2 = I$ 及 $\bar{I}_1 \cap \bar{I}_2 = \emptyset$ 能够使得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_i = c, \quad i \in \bar{I}_1 \text{ 和 } \lim_{t \rightarrow \infty} x_j = -c, \quad j \in \bar{I}_2 \quad (2)$$

其中 c 为任意常数, 则称该系统的状态可以实现绝对值一致性。

对绝对值一致性问题(2), 在多智能体系统(1)不受通讯时滞影响的情况下, 考虑其控制协议为^[8]:

$$u_i = - \sum_{j \in N(i)} |a_{ij}| (x_i - \text{sgn}(a_{ij}) x_j), \quad i, j \in I \quad (3)$$

根据文献[8], 若令 $L = [l_{ij}] \in R^{n \times n}$ 表示具有正负混合连接权重的无向图 $G(A)$ 的拉普拉斯矩阵, 则其元素

l_{ij} 可定义如下

$$l_{ij} = \begin{cases} \sum_{j \in N(i)} |a_{ij}| & j = i \\ -a_{ij} & j \neq i \end{cases}$$

进一步, 可得拉普拉斯矩阵 L 可表示如下:

$$L = \text{diag} \left(\sum_{j \in N(1)} |a_{1j}|, \sum_{j \in N(2)} |a_{2j}|, \dots, \sum_{j \in N(n)} |a_{nj}| \right) - A \quad (4)$$

基于(4)式, 将协议(3)用于系统(1), 可得:

$$\dot{x} = -Lx \quad (5)$$

其中, $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ 为多智能体系统状态。

在实际应用中, 各智能体间的信息传输往往不可避免地存在着通讯时滞。为了解决该通讯时滞问题, 这里我们考虑如下的控制协议:

$$u_i = - \sum_{j \in N(i)} |a_{ij}| (x_i(t - \tau_{ij}) - \text{sgn}(a_{ij}) x_j(t - \tau_{ji})) \quad (6)$$

其中, $\tau_{ij} \geq 0$ 表示第 j 个智能体获得第 i 个智能体状态信息时存在的通讯时滞。这里, 由于多智能体系统的通讯拓扑是无向图, 故 $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ 。

由于不同智能体之间通讯距离不一定相同, 设多智能体系统中的不同通讯时滞个数为 m , 其中 $m \leq n(n-1)/2$ 。记第 k 个通讯时滞为 $\tau_k, k \in \{1, 2, \dots, m\}$, 则令 $0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_m \leq d$, 其中 d 为通讯时滞上界。那么, 将协议(6)用于系统(1)可得

$$\dot{x} = - \sum_{k=1}^m L_k x(t - \tau_k) \quad (7)$$

其中, $\sum_{k=1}^m L_k = L$, $L_k = [l_{k,ij}]$ 且其元素可定义如下

$$l_{k,ij} = \begin{cases} -a_{ij}, & j \neq i, \tau_{ij} = \tau_k \\ 0, & j \neq i, \tau_{ij} \neq \tau_k \\ \sum_{j \in N(k,i)} |a_{ij}|, & i = j \end{cases}$$

其中, $N(k,i) = \{j \mid j \neq i \text{ 且 } \tau_{ij} = \tau_k\}$ 。

3 多智能体系统的绝对值一致性

3.1 引理

首先, 我们引入一类正交矩阵 D , 其定义如下:

$$D = \{\text{diag}(\sigma), \sigma = [\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n], \sigma_i \in \{-1, 1\}\}$$

那么容易看出, D 满足 $D^T D = D D^T = I$ (单位阵) 且 $D^{-1} = D$ 。由此, 我们给出如下引理。

引理1: 令 $X = Dx$ 且 $X = [X_1, X_2, \dots, X_n]^T$ 。

那么, (2) 式中的绝对值一致性成立等价于存在正交矩阵 D 使成立

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X_i = c', i \in I \quad (8)$$

其中, 常数 c' 满足 $|c'| = |c|$ 。

证明: 充分性 (8) \Rightarrow (2): 由 $X = Dx$ 可知:
 $X_i = \sigma_i x_i, i \in I$ 。有(8)式可得: $\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma_i x_i = c'$, 进一步 $\lim_{t \rightarrow \infty} x_i = \sigma_i c'$ 。如果令 $\bar{I}_1 = \{i | \sigma_i > 0\}$ 和 $\bar{I}_2 = \{j | \sigma_j < 0\}$, 那么 \bar{I}_1, \bar{I}_2 满足 $\bar{I}_1 \cup \bar{I}_2 = I$ 且 $\bar{I}_1 \cap \bar{I}_2 = \emptyset$ 。此外当 $i \in \bar{I}_1, \sigma_i = 1$, 故 $\lim_{t \rightarrow \infty} x_i = c'$; 当 $j \in \bar{I}_2, \sigma_j = -1$, 故 $\lim_{t \rightarrow \infty} x_j = -c'$ 。所以(2)式成立, 充分性得证。

必要性 (2) \Rightarrow (8): 由 $X = Dx$ 和 $D = D^{-1}$ 可知: $x = DX, x_i = \sigma_i X_i, i \in I$ 。由(2)式可得:
 $\lim_{t \rightarrow \infty} X_i = \sigma_i c, i \in \bar{I}_1$ 和 $\lim_{t \rightarrow \infty} X_j = -\sigma_j c, j \in \bar{I}_2$ (9)
 根据 \bar{I}_1 和 \bar{I}_2 满足 $\bar{I}_1 \cup \bar{I}_2 = I$ 且 $\bar{I}_1 \cap \bar{I}_2 = \emptyset$, 令正交矩阵 D 的元素选取满足: $\sigma_i \sigma_j = -1$, 对任意的 $i \in \bar{I}_1$ 和 $j \in \bar{I}_2$ 。等价地, 可知 $\sigma_j = -\sigma_i$, 对任意的 $i \in \bar{I}_1$ 和 $j \in \bar{I}_2$ 。故(9)等价于

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X_i = \sigma_i c, i \in I$$

从而对任意的 $i \in I$, 由 $|\sigma_i| = 1$, 可知 $\lim_{t \rightarrow \infty} X_i = c'$,

且 c' 满足 $|c'| = |c|$ 。必要性得证。 \square

除了上述引理, 由文献[8]可给出如下引理。

引理2^[8]: 若系统为结构平衡的, 则下面三个条件等价:

- A1) $G(A)$ 中所有的循环都是正的。
- A2) $\exists D$, 使得 DAD 所有的元素都是正的。
- A3) 0是拉普拉斯矩阵 (Laplacian Matrix) 的 L 的一个特征值。

若系统为结构不平衡, 则下面三个条件等价:

- B1) $G(A)$ 中至少有一个循环是负的。
- B2) 不 $\exists D$, 使得 DAD 所有的元素都是正的。
- B3) 拉普拉斯矩阵所有的特征值大于0。

基于上述引理2, 我们进一步可得如下结论。

引理3: 若图 $G(A)$ 为结构平衡, 则存在正交矩阵 D 使得 $\bar{L} = DLD$ 为图 $G(|A|)$ 的拉普拉斯矩阵。

证明: 由引理2可知, 当 $G(A)$ 为结构平衡时, 存在正交矩阵 D 使得 $|A| = DAD$ 。基此并考虑

$$\bar{L} = DLD$$

$$\begin{aligned} &= \text{diag} \left(\sum_{j \in N(1)} |a_{1j}|, \sum_{j \in N(2)} |a_{2j}|, \dots, \sum_{j \in N(n)} |a_{nj}| \right) - DAD \\ &= \text{diag} \left(\sum_{j \in N(1)} |a_{1j}|, \sum_{j \in N(2)} |a_{2j}|, \dots, \sum_{j \in N(n)} |a_{nj}| \right) - |A| \end{aligned}$$

可知 \bar{L} 为图 $G(|A|)$ 的拉普拉斯矩阵^[1-7]。 \square

基于引理3, 将 $x = DX$ 代入(5)式可得

$$\dot{X} = -\bar{L}X \quad (10)$$

即, 获得了关于 X 的状态方程。

除了上面的引理外, 我们将还需用到下面的引理。

引理4^[11]: 设 x, y 为任意 n 维实向量, H 为 $n \times n$ 维可逆对称矩阵, 则下面的矩阵不等式成立:

$$2x^T y \leq x^T H^{-1} x + y^T H y$$

3.2 绝对值一致性分析

定义 $Y = [y_1, y_2, \dots, y_{n-1}]^T$, 其中

$$\begin{aligned} y_1 &= X_1 - X_2 \\ y_2 &= X_1 - X_3 \\ &\vdots \\ y_{n-1} &= X_1 - X_n \end{aligned} \quad (11)$$

基此定义并根据引理1, 容易看出(2)可等价地表示为

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Y(t) = 0 \quad (12)$$

即, 多智能体系统一致性问题(2)能够转化成一个关于 Y 的稳定性问题。此外, 由(11)式可知

$$Y = EX \quad (13)$$

其中, $E = [1_{n-1}, -I_{n-1}]$ 。同时, 由(11)式还可知

$$X = X_1 1_n + FY \quad (14)$$

其中, $F = [0_{n-1}, -I_{n-1}]^T$ 。对(13)两边求导, 并将(10)代入可得

$$\dot{Y}(t) = E\dot{X}(t) = -E\bar{L}X(t) \quad (15)$$

由引理3并利用拉普拉斯矩阵的性质^[1-7], 可知 $\bar{L}1_n = 0$ 。那么将(14)代入(15), 有

$$\dot{Y}(t) = -E\bar{L}X(t) = -E\bar{L}FY(t) \quad (16)$$

令 $A = E\bar{L}F$, 式(16)可写为

$$\dot{Y}(t) = -AY(t) \quad (17)$$

基于上面的描述, 我们首先给出在固定拓扑下的多智能体系统绝对值一致性的如下结论。

结论1^[8]: 对在固定拓扑连通图 $G(A)$ 下的多智能体系统(5), 其能够达到绝对值一致性当且仅当 $G(A)$ 是结构平衡的, 并且有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \frac{1}{n} (1_n^T D x(0)) D 1_n$$

其中, 1_n 为元素全部为1 的列向量。若 $G(A)$ 为结构不平衡, 则 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ 。

注释1: 在文献[8]中, 尽管给出了此结论, 但是其证明没有详细给出。这里, 我们采用一种Lyapunov 稳定性的方法给出其详细证明(见附录)。此外, 在下面分析中, 还可以看出, 我们所采用分析方法能够很好的应用到带有通讯时滞的正负混合连接权重多智能体系统绝对值一致性的分析中。

4 有通讯时滞的多智能体系统绝对值一致性

对多智能体系统存在通讯时滞的情形, 类似于(17)式的建立, 我们由(7)式可得

$$\dot{Y}(t) = -\sum_{k=1}^m A_k Y(t - \tau_k) \quad (18)$$

其中, $A_k = E \bar{L}_k F$, $k \in I_3$, $\sum_{k=1}^m A_k = A$ 。

通过分析, 我们给出固定拓扑下多智能体系统存在通讯时滞能够达到绝对值一致性结论。

结论2: 对在固定拓扑连通图 $G(A)$ 下的多智能体系统(19), 并且 $G(A)$ 是结构平衡的。假设存在 m 个固定时滞 τ_k ($k \in I_3$)。当存在对称正定矩阵 $P, Q_k, W_k \in R^{(n-1) \times (n-1)}$ ($k \in I_3$), 使得下面式子(19)和(20)成立:

$$J = \begin{bmatrix} -\sum_{k=1}^m (PA_k + A_k^T P - Q_k) & PA_1 & \cdots & PA_m \\ A_1^T P & -\frac{W_1}{d} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_m^T P & 0 & \cdots & -\frac{W_m}{d} \end{bmatrix} < 0 \quad (19)$$

$$\Phi = -\text{diag}(Q_1, Q_2, \cdots, Q_m) + d \sum_{k=1}^m [A_1, A_2, \cdots, A_m]^T W_k [A_1, A_2, \cdots, A_m] < 0 \quad (20)$$

则多智能体系统能够实现绝对值一致性目标(2)。

证明: 构造Lyapunov- Krasovskii泛函

$$V(t) = V_1(t) + V_2(t) + V_3(t)$$

其中:

$$V_1(t) = Y^T(t) P Y(t)$$

$$V_2(t) = \sum_{k=1}^m \int_{-\tau_k}^t Y^T(s) Q_k Y(s) ds$$

$$V_3(t) = \sum_{k=1}^m \int_{-\tau_k}^0 \int_{+\theta}^0 \dot{Y}^T(s) W_k \dot{Y}(s) ds d\theta$$

计算 $V(t)$ 对 t 的导数可得

$$\dot{V}_1(t) = -2Y^T(t) P \sum_{k=1}^m A_k Y(t - \tau_k)$$

$$\dot{V}_2(t) = \sum_{k=1}^m \{Y^T(t) Q_k Y(t) - Y^T(t - \tau_k) Q_k Y(t - \tau_k)\}$$

$$\dot{V}_3(t) = \sum_{k=1}^m \{\tau_k \dot{Y}^T(t) W_k \dot{Y}(t) - \int_{-\tau_k}^t \dot{Y}^T(s) W_k \dot{Y}(s) ds\}$$

由Newton-Leibniz 公式和引理4可知:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t) &= \sum_{k=1}^m \{-2Y^T(t) P A_k Y(t) + \int_{-\tau_k}^t 2[A_k^T P^T Y(t)]^T \dot{Y}(s) ds\} \\ &\leq \sum_{k=1}^m \{-2Y^T(t) P A_k Y(t) \\ &\quad + dY^T(t) P A_k W_k^{-1} A_k^T P^T Y(t) + \int_{-\tau_k}^t \dot{Y}^T(s) W_k \dot{Y}(s) ds\} \end{aligned}$$

由于 $\dot{Y}(t) = -\sum_{k=1}^m A_k Y(t - \tau_k)$, 则

$$\begin{aligned} \dot{V}_3(t) &= \sum_{k=1}^m \{\tau_k \dot{Y}^T(t) W_k \dot{Y}(t) - \int_{-\tau_k}^t \dot{Y}^T(s) W_k \dot{Y}(s) ds\} \\ &= \sum_{k=1}^m \tau_k \left\{ \sum_{j=1}^m Y^T(t - \tau_j) A_j^T W_k \sum_{i=1}^m A_i Y(t - \tau_i) \right. \\ &\quad \left. - \int_{-\tau_k}^t \dot{Y}^T(s) W_k \dot{Y}(s) ds \right\} \end{aligned}$$

从而可以得到

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq \sum_{k=1}^m \{-Y^T(t) (P A_k + A_k^T P) Y(t) \\ &\quad + dY^T(t) P A_k W_k^{-1} A_k^T P^T Y(t)\} \\ &\quad + \sum_{k=1}^m \{Y^T(t) Q_k Y(t) - Y^T(t - \tau_k) Q_k Y(t - \tau_k)\} \\ &\quad + \sum_{k=1}^m \tau_k \left\{ \sum_{j=1}^m Y^T(t - \tau_j) A_j^T W_k \sum_{i=1}^m A_i Y(t - \tau_i) \right\} \\ &= \begin{bmatrix} Y(t) \\ Y(t - \tau_1) \\ \vdots \\ Y(t - \tau_m) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Omega_{(n-1) \times (n-1)} & 0_{(n-1) \times m(n-1)} \\ 0_{m(n-1) \times (n-1)} & \Phi_{m(n-1) \times m(n-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y(t) \\ Y(t - \tau_1) \\ \vdots \\ Y(t - \tau_m) \end{bmatrix} < 0 \end{aligned}$$

其中

$$\Omega = -\sum_{k=1}^m (P A_k + A_k^T P - d P A_k W_k^{-1} A_k^T P^T + Q_k) < 0 \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \Phi &= -\text{diag}(Q_1, Q_2, \cdots, Q_m) \\ &\quad + d \sum_{k=1}^m [A_1, A_2, \cdots, A_m]^T W_k [A_1, A_2, \cdots, A_m] < 0 \end{aligned} \quad (22)$$

由Schur补引理知, 式(21)成立等价于式(19)成立。如果(19)和(20)式成立, 那么 $\dot{V}(t) < 0$ 。进一步, 由Lyapunov稳定性理论并考虑 $V(t)$ 的定义, 可知 $Y(t)$

最后趋于稳定,则相当于存在通讯时滞多智能体系统达到绝对值一致性。□

注释2: 固定连通拓扑下多智能体系统存在多个通讯时滞,并且每个通讯时滞的值小于时滞上界,则多智能体系统能够达到绝对值一致性。此外,根据结论2可以求出通讯时滞的上界。对结论进行证明的过程中,用的方法与结论1相同,与文献[8]的方法进行比较,本文用的方法可以更好的处理具有通讯时滞的多智能体系统一致性问题。

5 仿真结果

1、多智能体系统一致性仿真

对多智能体系统(5),我们考虑其有四个智能体,且其拓扑如图1所示。容易看出,图1中的无向图是连通的并且 $V_1 = \{v_1, v_3, v_4\}, V_2 = \{v_2\}$, 其满足结构平衡,使得结论1条件满足。取四个多智能体初始状态为 $x_1(0) = 1, x_2(0) = 2, x_3(0) = 3, x_4(0) = 4$ 。

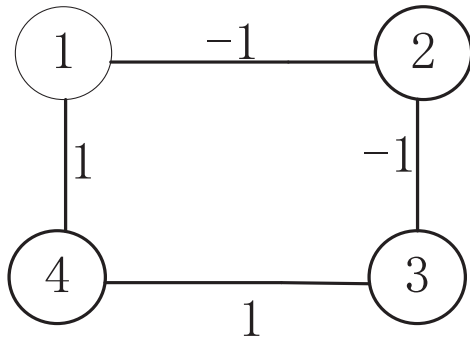


图1: 无向图固定拓扑的情形

仿真结果如图2所示。由图2可以看出,多智能体系统在连通无向图下,当其能够达到结构平衡时,则所有智能体能够达到绝对值一致性。并且多智能体 v_1, v_3, v_4 达到一致性状态值为1.5,多智能体 v_2 达到一致性状态值为-1.5,这证实了结论1中的论断。

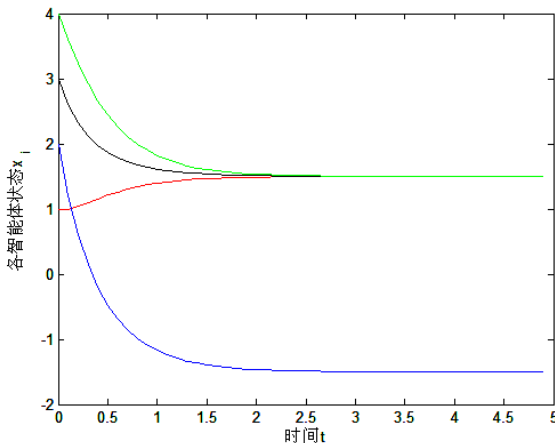


图2: 无通讯时滞时,多智能体系统绝对值一致性示意图

2、存在通讯时滞的多智能体系统一致性仿真

考虑存在通讯时滞多智能体系统(19),且拓扑结构如图1所示。取四个多智能体初始状态为 $x_1(0) = 1, x_2(0) = 2, x_3(0) = 3, x_4(0) = 4$ 。根据(19)和(20)式可得时滞上界 $d = 0.2632$,基于此假设系统存在两个不同的通讯时滞 $\tau_{12} = \tau_{21} = \tau_{34} = \tau_{43} = 0.2$, $\tau_{14} = \tau_{41} = \tau_{23} = \tau_{32} = 0.1$ 。

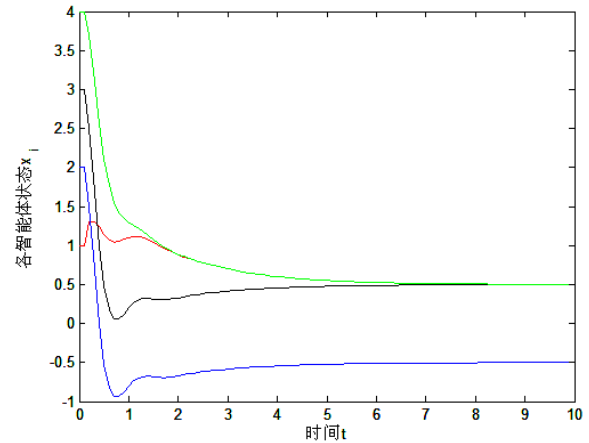


图3: 存在通讯时滞时,多智能体系统绝对值一致性示意图

仿真结果如图3所示。由图3可以看出,多智能体系统在连通无向图下,通讯时滞 τ 小于通讯时滞上界 d ,则多智能体系统能够达到绝对值一致性,这证实了结论2中的论断。

6 结论

本文研究了具有正负混合连接权重多智能体系统在具有正负混合连接权重及通讯时滞情形下的一致性。为解决此一致性问题,给出了一种问题转化方法,能够把所考虑多智能体一致性问题等价转化成一类稳定性问题。这使得我们可以通过构造 Lyapunov-Krasovskii 泛函,并结合 Lyapunov 稳定性理论和线性矩阵不等式方法来解决多智能体系统的一致性问题。证明了即使多智能体系统中存在多个通讯时滞,各智能体仍能够达到一致性,并且该一致性为各智能体状态绝对值相同,但符号可能不同。最后,用 Matlab 仿真验证了结论的正确性。

附录

结论1证明: 由于 $G(A)$ 和 $G(|A|)$ 具有相同的连通性,可知图 $G(|A|)$ 是连通的。由此并考虑拉普拉斯矩阵的性质^[1-7],可知图 $G(|A|)$ 的拉普拉斯矩阵 \bar{L} 有一个特征值0,且其余 $(n-1)$ 个特征值具有正实部。

若令 $\bar{F} = [1_n, F]$ 及 $G = [e_1^T, 0]$, 其中 e_1 表示单位阵 I_{n-1} 的第一列, 则 $\bar{F}^{-1} = [G^T, E^T]^T$ 。基此, 再令 $\bar{Y} = GX$, 那么结合(13)可得

$$\bar{F}^{-1}X = \begin{bmatrix} GX \\ EX \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Y} \\ Y \end{bmatrix}$$

对其进行求导并代入(10), 可得

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\bar{Y}} \\ \dot{Y} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} G\dot{X} \\ E\dot{X} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -G\bar{L}X \\ -E\bar{L}X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -G\bar{L} \\ -E\bar{L} \end{bmatrix} X \\ &= \begin{bmatrix} -G\bar{L} \\ -E\bar{L} \end{bmatrix} \bar{F} \begin{bmatrix} \bar{Y} \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -G\bar{L} \\ -E\bar{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1_n & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{Y} \\ Y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -G\bar{L}F \\ 0 & -E\bar{L}F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{Y} \\ Y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

容易看出, $\dot{Y}(t) = -E\bar{L}FY(t)$ 。由上面分析可知, 矩阵 $-E\bar{L}F$ 具有 $n-1$ 个负实部的特征值, 所以(12)成立。又基于前面分析可知, (12)式成立等价于(2)式成立。由此容易看出, 多智能体系统能够达到绝对值一致性。

下面证明 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \frac{1}{n} 1_n^T Dx(0) D 1_n$ 。由上面的证

明可知, \bar{L} 有一个特征值为零, 其余特征值都具有正实部, 可得 $\bar{L}\omega_r = 0, \omega_l^T \bar{L} = 0$, ω_r, ω_l^T 分别为 \bar{L} 特征值为0的右特征向量和左特征向量。由于其对应的拉普拉斯矩阵是对称的, 所以 $w_r = w_l$ 。令

$$\omega_r = \omega_l = (1/\sqrt{n}, \dots, 1/\sqrt{n})^T$$

由文献[1]可知

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \exp(-\bar{L}t) = \omega_r \omega_l^T$$

解(5)式可得

$$x(t) = \exp(-Lt)x(0) \quad (23)$$

由(23)式可得

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \exp(-D\bar{L}Dt)x(0) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} D \exp(-\bar{L}t) Dx(0) \\ &= D \lim_{t \rightarrow \infty} \exp(-\bar{L}t) Dx(0) \\ &= D \omega_r \omega_l^T Dx(0) \\ &= \frac{1}{n} (1_n^T Dx(0)) D 1_n \end{aligned}$$

即, 可得 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \frac{1}{n} (1_n^T Dx(0)) D 1_n$ 。结论得证。

由引理2可得若图 $G(A)$ 是结构不平衡的, 则 $G(A)$ 拉普拉斯矩阵所有的特征值大于0, 则由(5)式容易得

出: $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ 。□

参考文献

- [1] R. Olfati-Saber, R. Murry, Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delay, *IEEE Trans. Automatic. Control*, 2004, 49(9):1520–1533.
- [2] W. Ren, Consensus seeking in multi-agent systems under dynamically changing interaction topologies. *IEEE Trans. Automatic. Control*, 2005, 50(5): 655–661.
- [3] W. Wang, J. Slotine, Contraction analysis of time-delayed communications and group cooperation. *IEEE Trans. Automatic. Control*, 2006, 51(4): 712–717.
- [4] P. Lin, Y. Jia, Average consensus in networks of multi-agents with both switching topology and coupling time-delay. *Physica A*, 2008, 387 (1): 303–313.
- [5] P.A. Bliman, Average consensus problems in networks of agents with delayed communications. *Automatica*, 2008, 44(8): 1985–1995.
- [6] P. Lin, Y. Jia, Consensus of second-order discrete-time multi-agent systems with non-uniform time-delays and dynamically changing topologies. *Automatica*, 2009, 45(9): 2154–2158.
- [7] Y.G. Sun, L. Wang, Average consensus in networks of dynamic agents with switching topologies and multiple time-varying delays. *Systems & Control Letters*, 2008, 57(2): 175–183.
- [8] C. Altanfini, Consensus problems on networks with antagonistic interactions. *IEEE Trans. Automatic. Control*, 2013, 58(4): 935–946.
- [9] Z.Y. Meng, Multi-agent systems with compasses. arxiv:1308.0813.v1.
- [10] J.P. Hu, Formation control over antagonistic networks. *Proceeding of the 32nd Chinese Control Conference*, 2013: 6879–6884.
- [11] 吴敏, 何勇. 时滞系统鲁棒控制-自由权矩阵方法. 北京: 科学出版社, 2007.