

硕士学位论文

多智能体复权网络中的
一致性及其应用

**CONSENSUS IN MULTI-AGENT
COMPLEX-WEIGHTED NETWORKS
AND ITS APPLICATIONS**

林 琳

哈尔滨工业大学
2016 年 6 月

国内图书分类号：O175
国际图书分类号：517.9

学校代码：10213
密级：公开

理学硕士学位论文

多智能体复权网络中的 一致性及其应用

硕士研究生：林琳

导师：董久刚副教授

申请学位：理学硕士

学科：运筹学与控制论

所在单位：数学系

答辩日期：2016年6月

授予学位单位：哈尔滨工业大学

Classified Index: O175

U.D.C: 517.9

Dissertation for the Master Degree in Science

**CONSENSUS IN MULTI-AGENT
COMPLEX-WEIGHTED NETWORKS
AND ITS APPLICATIONS**

Candidate :	Lin Lin
Supervisor :	A. P. Dong Jiugang
Academic Degree Applied for :	Master of Science
Speciality :	Operational Research and Cybernetics
Affiliation :	Department of Mathematics
Date of Defence :	June, 2016
Degree-Conferring-Institution :	Harbin Institute of Technology

摘 要

多智能体系统在实权网络中的一致性问题的研究在文献中已经有所研究。复值系统能够应用于模拟包括复值信号和飞机运动在内的许多现象，从而自然的出现了一个问题：在某种意义上我们是否能够在复权网络中建立一致性。对此，本文给出了肯定的答案。更确切的说，本文给出了复权网络中所有智能体能够实现模一致即所有智能体达到相同的模。

第二章给出了本文所使用的一般记号以及关于复权图的定义。给出了有向图的 Laplacian 矩阵特征值的性质。然后，给出了受扰动的 Laplacian 矩阵特征值的性质与其相应无向图的连通性之间的关系。最后，给出了复权图中的对角均等矩阵 Hurwitz 稳定的充分必要条件。

第三章给出连续时间和离散时间下模一致的充分必要条件，明确揭示了网络的连通性和复权的结构性质如何共同地影响模一致性。为实现任意形状编队给出了比例一致的概念及系统实现比例一致的条件。作为一个特殊情况，得到了符号图上的二分一致的结果。

第四章主要将模一致性结果应用于智能体系统平面上的圆形编队。首先给出了具有相对位置圆形编队的定义，即需要所有的智能体收敛到以给定点为圆心的公共圆且智能体间按指定的角度间隔和顺序排列成期望的形式。得到的主要结果为具有相对位置的圆形编队能够实现当且仅当有向通信图有一个生成树。但它的半径和绝对位置并不确定。为了完全决定一个圆形编队，接着给出了具有绝对位置圆形编队的控制。应用牵制控制方法，发现绝对位置的圆形编队能够通过单一的局部控制器实现当且仅当有向通信图有一个生成树。

关键词： 复权有向图；模一致；圆形编队；比例一致；Hurwitz 稳定

Abstract

Consensus problems for multi-agent systems in the literature have been studied under real weighted networks. Complex-valued systems can be used to model many phenomena in applications including complex-valued signals and the motion in a plane. A natural question that arises is whether we can establish consensus under complex-weighted networks in some sense. In this paper, we provide a positive answer to this question. More precisely, we give that in a complex-weighted network all agents can achieve modulus consensus in which the states of all agents reach the same modulus.

The second chapter gives some general notations used in this paper, as well as definition of the complex-weighted digraph. We give the properties of eigenvalues of the Laplacian matrix in terms of its associated digraph. Then, we give the relationship between the properties of eigenvalues of the perturbed Laplacian matrix and the connectivity of its associated digraph. Finally, this chapter gives the necessary and sufficient condition for Hurwitz stability of diagonally equiptent matrices in complex weighted networks.

The third chapter gives the necessary and sufficient conditions for modulus consensus in both continuous-time and discrete-time cases, which explicitly reveal how the connectedness of networks and structural properties of complex weights jointly affect modulus consensus. This chapter, to achieve arbitrary shaped formation, gives scaled consensus under complex weighted networks. As a special case, the necessary and sufficient conditions for bipartite consensus on signed networks are obtained.

The fourth chapter mainly uses the modulus consensus results to achieve circular formation in a plane. We first give the definition of circular formation with relative positions that requires all the agents converge to a common circle centered at a given point and are distributed along the circle in a desired pattern, expressed by the prespecified angle separations and ordering among agents. The main result is the circular formation with relative positions can be achieved if and only if the communication digraph has a spanning tree. However, it has the unspecified radius and absolute phases. To completely determine the circular formation, we give the control problem of circular formation with absolute positions. By using the pinning control strategy, we find that the circular formation with absolute positions can be achieved via a single local controller if and only if the communication digraph has a spanning tree.

Keywords: complex-weight digraphs, modulus consensus, circular formation, scaled consensus, Hurwitz stable

目 录

摘 要.....	I
Abstract.....	II
目 录.....	II
第 1 章 绪 论.....	1
1.1 课题背景与意义.....	1
1.2 国内外的研究现状.....	2
1.3 本文的主要研究内容.....	3
第 2 章 预备知识.....	5
2.1 Laplacian 矩阵的性质.....	6
2.2 受扰动的 Laplacian 矩阵.....	9
2.3 对角均等矩阵的 Hurwitz 稳定性.....	10
2.4 本章小结.....	14
第 3 章 模一致性.....	15
3.1 模一致性问题.....	15
3.2 模一致条件.....	16
3.3 牵制控制下的模一致.....	18
3.4 举例.....	19
3.5 切换拓扑下的模一致性.....	23
3.6 比例一致.....	24
3.7 二分一致性.....	25
3.8 本章小结.....	26
第 4 章 圆形编队.....	27
4.1 相对位置的圆形编队.....	27
4.2 切换拓扑下具有相对位置的圆形编队.....	30
4.3 具有绝对位置的圆形编队.....	31
4.4 本章小结.....	33
结 论.....	34
参考文献.....	35
哈尔滨工业大学学位论文原创性声明和使用权限.....	38
致 谢.....	39

第 1 章 绪 论

1.1 课题背景与意义

近三十年来,一些学者试图对自然界的一些群体现象进行研究,如鱼群游行^[1]、鸟群迁徙^[2]和萤火虫同时闪光^[3]等。研究发现生物群体广泛存在协作行为,他们的集体行为也许仅源自于他们之间的局部相互作用。受此启发,学者们也开始广泛关注人类社会的生活现象,例如,掌声的同步^[4]和人类生物振荡器的同步^[5]。在以上问题的研究中,我们称群体中的成员为个体。由于数量众多,故将整个群体称为多个体系统,而随着科学的进步出现了人工智能领域,科学家们慢慢趋向于将其称为多智能体系统。

多智能体系统为人工智能研究方面的一个重要组成部分,因为不同智能体根据自身特点解决问题的方法和能力并不相同,单个智能体处理复杂问题的能力往往较弱,这就要求使每个智能体通力协助,能够最大限度地发挥他们各自的优势,去共同实行难度非常大的工作,所以多智能体系统其实就是多个智能体构成的集合,用来处理单个智能体无法处理的工作。多智能体系统所拥有的优良特征,运用通信、协调、控制等手段在满足实际需要中拥有很强的鲁棒性,大大的提升了效率^[6]。

在多智能体系统中,“一致性”是指系统中所有智能体在确定数量的特征状态中都趋于一致,“一致性协议”是指系统中智能体和其周围邻居的信息交互的原则。一致性问题在计算机科学领域中有很长的历史,并且是分布式计算^[7]领域的基础。一致性问题正式的研究学习工作开始于 1960 年,是由 De Groot 等专家组成的团队从管理科学和统计学中开始研究^[8]。二十年后 De Groot 当初在统计学中提出的一致性理论再次出现并应用在多传感器采集不确定信息的问题中^[9]。在多智能体系统里,一致性表示系统中所有智能体在所关心的确定数量的特性中都趋于一致。一致性协议表示系统中智能体与其周围邻居的信息交互的原则。多智能体达到一致性为多智能体进行某件工作的先决条件,惟有达到一致性,才可以一起迅速地适应邻居或者周围环境的改变,进而更加精准的去实现所需动作。

近年来,随着分布式网络及多智能体系统的迅速发展,合作协调控制成为控制领域研究的一个热点。一致性是多智能体实现协同合作、完成共同制定任务的基础,其在包括群集、分布式计算、传感器网络及编队控制等许多领域都有的广泛应用^[10-17]。目前已经有许多生物学家、物理学家、计算机科学家、数学家、经

济学家和控制工程师都在对多智能体系统进行深入研究，以便从理论上为各行各业的生产和管理提供技术支持。

1.2 国内外的研究现状

我们回顾一些与我们目前研究工作密切相关的基本结果。关于无向图，2004年 R. Olfati-Saber 发表的文章和 2007 年 A. Olshevsky 发表的文章中 Laplacian 基础协议渐进地解决了平均一致性问题当且仅当相互作用图是连通的^[13,14]。然而对于有向图，2005 年 W. Ren 和 R. W. Bread 发表的文章中提到一个解决一般一致性（不一定是平均一致性）问题的充分必要条件是相互作用有向图有一个生成树^[18,19]。注意到这些结果对连续时间和离散时间的情况都是有效的。2010 年以后推广到包括随机相互作用拓扑，时滞影响，动力学的智能体和量化影响的情况^[20-25]。

在上面的标准一致性问题讨论中，总是假设智能体间仅存在协作关系。然而，在许多实际情况中一些智能体间相协作而一些相对抗。例如，2011 年 G. Facchetti 等人发表的文章与 S. A. Marvel 等人发表的文章就提到的在社会网络智能体间的友好和敌对关系都是普遍存在的^[26,27]。而 2009 年 S. Ermon 等人提及的对于自治网络在工程应用中的事实估计的情况，这种关系可以用符号图表示即图中边的权可以是负的^[28]。一个正权表示相应的两个智能体是朋友而负权表示他们是敌人。2013 年 C. Altafini 发表的文章研究了关于符号图的二分一致性问题，意味着所有的智能体趋近于一个一致的值且其除了符号外都相同，结论是符号图的结构平衡对二分一致性问题具有重要作用^[29]。在社会网络中，结构平衡是一个非常有名的性质，一个符号图是（结构）平衡的若符号图可分为两部分使得两部分之间的任意边有负权而任一部分内部的边有正权^[26,27]。特别地，文献[29]中证明了对于一个连通的符号图（或一个强连通的符号图），Laplacian 基础协议解决二分一致性问题当且仅当符号（有向）图是平衡的。这些结果仅对连续时间情况成立。此外，复权网络已经出现在了 2013 年 Z. Lin 等人发表的文章提及领导—追随平面编队研究之中^[30]。

近年来，国内许多学者也在研究多智能体网络一致性问题，但其中主要研究是正权网络或者是实权网络中一阶或者是高阶一致性问题^[31-33]。

讨论一致性问题主要依靠智能体间权值的集合来实现。当前一致性问题讨论里，智能体间经过协同关系达成协议，这样的系统称为协同系统。利用一个权的图构造智能体间的彼此作用模型会非常方便，智能体间的协同系统以边拥有正权为特征。在特殊的 Laplacian 矩阵图中，代数图论提供了自然的框架处理一致性问题，存在一个关于标准一致性问题研究的实质性的对象。

多智能体系统表示多个具有独立自主能力的智能体经过一定的信息交流方式相互作用形成的系统；若将系统里的每一个智能体看作一个顶点，任意两个有信息交流的智能体之间通过有向边来连接的话，智能体的拓扑结构就可以借助相应的有向图表示。

对于多智能体系统，令其图 $G = \{V, E, A\}$ ，其中，顶点集合 $V = \{1, 2, \dots, n\}$ ，顶点 i 为第 i 个智能体，边集合 $E \subset \{(j, i) : i, j \in V, i \neq j\}$ ， (j, i) 是一有向边，代表智能体 i 能够接到智能体 j 传来的信息， $A = (a_{ij})_{n \times n} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 是图 G 的邻接加权矩阵： $a_{ij} = 0 \quad (j, i) \notin E$ ，以此反映点的连接关系，其中对角线元素恒为 0。

如果 G 是无向图，那么 $(j, i) \in E \Leftrightarrow (i, j) \in E$ ，智能体的连边为无向路径，智能体 i, j 之间可以相互接收和传递信息，此时 $A = A^T$ 。

各个领域的学者根据自身需要，邻接矩阵 A 有不同的取值范围。最初，仅考虑两个顶点间有无关系， A 中元素的取值仅限于 0 和 1；而后，又考虑到不同智能体间相互（协同）作用权重的不同， A 中元素在非负实数域上取值，此时研究一般一致性问题，R. Olfati-Saber 和 A. Olshevsky 分别发表的文章中 Laplacian 基础协议渐进地解决了平均一致性问题当且仅当相互作用图是连通的，然而对于有向图，W. Ren 和 R. W. Bread 发表的文章中提到一个解决一般一致性（不一定是平均一致性）问题的充分必要条件是相互作用有向图有一个生成树^[19]，这些结果对连续时间和离散时间的情况都是有效的，此外，2015 年 S. Roy 发表的文章还讨论了实数域上多智能体系统的比例一致问题^[34]；进而考虑到许多实际情况中一些智能体间相协作而一些相对抗， A 中元素需要在实数域上取值，2013 年 C. Altafini 发表的文章研究了关于符号图的二分一致性问题^[29]，意味着所有的智能体趋近于一个一致的值且其除了符号外都相同，结论是符号图的结构平衡对二分一致性问题具有重要作用；如今为了解决多智能体系统在平面上编队的问题，令 A 中元素需要在复数域上取值。

1.3 本文的主要研究内容

受到以上工作的启发，我的论文将要研究复权网络的一致性问题即每个边的权都是复数。不同于实权网络，复权网络的邻接矩阵是复数域上的矩阵。论文中将会给出的多智能体网络中复权有向图 $G = \{V, E, A\}$ ^[28]，其中邻接加权矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times n} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 不同于文献[21]，在复权网络有向图中我们这样定义 Laplacian

矩阵 $L = D - A$ ，其中 $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ ， $d_i = \sum_{j \in N_i} |a_{ij}|$ ，当权重是正的就退化

到正权图中 Laplacian 矩阵的定义，可看作是正权图中 Laplacian 矩阵的定义的推广，但这并不是平凡的推广。正权图中 Laplacian 矩阵特征值的性质仅与图的连通性有关，但复权图中 Laplacian 矩阵特征值的性质不仅与图的连通性有关还和边所对应的权的性质有关，这就要复杂得多。一些学者从数学上对复权图的 Laplacian 矩阵的性质进行了讨论^[20,35,36]，但目前已有的关于 Laplacian 矩阵的结果都是无向图上的，而我们需要用到有向图上 Laplacian 矩阵的性质，所以我们首先要对有向图的 Laplacian 矩阵的性质以及加扰动的 Laplacian 矩阵进行讨论，从而得到多智能体复权网络中一致性问题的相应结果。

论文的主要研究内容：

第二章将给出了本文所使用的一般记号以及关于复权图的定义。研究有向图的 Laplacian 矩阵特征值的性质。然后，给出受扰动的 Laplacian 矩阵特征值的性质与其相应复权图的连通性之间的关系。最后，当复权图不是平衡的时给出对角均等矩阵的 Hurwitz 稳定条件。

第三章将讨论复权图是平衡时的模一致性问题，连续时间和离散时间下模一致的条件、牵制控制下的模一致性问题以及切换拓扑下的模一致性问题等。为使多智能体系统能够实现任意形状的编队，将给出比例一致及其实现的条件。

第四章将列举一些模一致性结果在多智能体系统控制中的应用。主要是在多智能体系统圆形编队中的应用，我们首先将研究满足相对位置的圆形编队即所有的智能体趋向于一个给定圆心的圆且按照预先给定的角度间隔和顺序分布以及切换拓扑下具有相对位置的圆形编队，为了完全决定所实现的圆形编队我们还将讨论具有绝对位置的圆形编队。

第2章 预备知识

首先, 本文均采用标准记号。 \mathbb{R} 是实数域, \mathbb{C} 是复数域。对于复矩阵 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, A^* 是 A 的共轭转置矩阵。 \bar{z} 表示复数 z 的共轭, z 的模用 $|z|$ 表示。 $\mathbf{1} \in \mathbb{R}^n$ 为各元素都是1的 n 维列向量。对于 $x = [x_1, \dots, x_n]^T \in \mathbb{C}^n$, $\|x\|_1$ 是其1-范数。用 \mathbb{T} 表示单位球面即 $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ 。易知 \mathbb{T} 是一个关于乘法的阿贝尔群。对于 $\zeta = [\zeta_1, \dots, \zeta_n]^T \in \mathbb{T}^n$, 令 $D_\zeta = \text{diag}(\zeta)$ 表示第 i 个对角项是 ζ_i 的对角矩阵。最后, $j = \sqrt{-1}$ 。

下面将给出关于复权图的一些有助于模一致性问题研究的结果。这些结果本身从图论的观点看也是很有意思的。首先, 介绍一些复权图的基础概念。多智能体网络中复权有向图 $G = \{V, E, A\}$, 其中, 顶点集合 $V = \{1, 2, \dots, n\}$, 顶点 i 为第 i 个智能体, 边集合 $E \subset \{(j, i) : i, j \in V, i \neq j\}$, (j, i) 为一有向边, 表示智能体 i 可以接收智能体 j 传来的信息, $A = (a_{ij})_{n \times n} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 为有向图 $G = \{V, E, A\}$ 的邻接加权矩阵: $a_{ij} = 0 \quad (j, i) \notin E$, 用来反映点的连接关系, 其中对角线元素恒为0即 $G = \{V, E, A\}$ 没有自环。有向图 $G = \{V, E, A\}$ 可用 $G(A)$ 来表示。为了表述方便, 称 $G(A)$ 是复的、实的或非负的若 A 分别是复的、实的或非负的。 N_i 表示智能体 i 的邻居的集合即 $N_i = \{j : a_{ij} \neq 0\}$ 。 $G(A)$ 的有向路径 P 是 E 中有向边的集合: $P = \{(i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_{p-1}, i_p)\} \subset E$, 其中所有顶点 i_1, \dots, i_p 互异。 $G(A)$ 的圈 C 是起点和终点相同即 $i_1 = i_p$ 的有向路径, 一个圈的权是其中所有边的权的乘积, 一个圈是正的若其有正权。为研究方便, 需要引入一些正权、实权和复权有向图的通用定义:

若有向图所有的圈都是正的, 则称有向图是平衡的;

若有向图中至少存在一个顶点(根)到其他顶点都存在有向路径, 则有向图有一个有向生成树;

若有向图中任意两个不同的顶点 i 和 j 都存在从 i 到 j 的有向路径, 则有向图是强连通的。

易见强连通的条件要强于有一个有向生成树的条件。强连通图的所有顶点都能看作它的根。当 A 是 Hermite 矩阵时它们是等价的。

对于复权有向图 $G(A)$ ，其 Laplacian 矩阵定义为 $L = D - A$ ，这里 $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ 是 $G(A)$ 的模度对角矩阵其中 $d_i = \sum_{j \in N_i} |a_{ij}|$ 。这一定义出现于关于增益图的文献[37]中，它可看作非负图标准 Laplacian 矩阵的推广。我们需要下面切换等价的定义^[37,38]。

定义 2.1 两个图 $G(A_1)$ 和 $G(A_2)$ 是切换等价的若存在一个向量 $\zeta = [\zeta_1, \dots, \zeta_n]^T \in \mathbb{T}^n$ 使得 $A_2 = D_\zeta^{-1} A_1 D_\zeta$ ，记作： $G(A_1) \sim G(A_2)$ 。

不难看出切换等价是一个等价关系。切换等价保持连通性和平衡性。为建立我们的结果，需要研究 Laplacian 矩阵 L 特征值的性质。

2.1 Laplacian 矩阵的性质

我们称 A 是本质非负的若 $G(A)$ 和一个非负邻接矩阵是切换等价的。根据定义， A 是本质非负的当且仅当存在一个对角阵 D_ζ 使得 $D_\zeta^{-1} A D_\zeta$ 是非负的。由 Gersgorin 圆盘定理^[39]， A 的 Laplacian 矩阵的所有特征值有非负实部且 0 是唯一可能具有 0 实部的特征值。下面根据 $G(A)$ 进一步讨论 L 的特征值的性质。

引理 2.1 0 是 L 的特征值，对应于它的一个特征向量 $\zeta \in \mathbb{T}^n$ 当且仅当 A 是本质非负的。

证明 假设 A 是本质非负的。因此存在一个对角阵 D_ζ 使得 $A_1 = D_\zeta^{-1} A D_\zeta$ 是非负的。令 L_1 是非负矩阵 A_1 的 Laplacian 矩阵，有 $L_1 \mathbf{1} = 0$ 。易知两个 Laplacian 矩阵是相似的即 $L_1 = D_\zeta^{-1} L D_\zeta$ 。故 $L \zeta = 0$ 。

令 $L \zeta = 0$ ，其中 $\zeta \in \mathbb{T}^n$ 。所以有 $L D_\zeta \mathbf{1} = 0$ ，从而 $D_\zeta^{-1} L D_\zeta \mathbf{1} = 0$ 。由此可知 $D_\zeta^{-1} L D_\zeta \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 的非对角项不是正的，从而 $A_1 = D_\zeta^{-1} A D_\zeta$ 是非负的，故 A 是本质非负的。□

若考虑连通性，我们会得到一个更强的结果。

命题 2.1 0 是 L 单重特征值，对应于它的一个特征向量 $\zeta \in \mathbb{T}^n$ 当且仅当 A 是本质非负的且 $G(A)$ 有一个生成树。

证明 证明由下面的一系列等价条件完成：

$$(1) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow (3) \Leftrightarrow (4)$$

条件 (1) — (4) 分别为：

(1) A 是本质非负的且 $G(A)$ 有一个生成树；

- (2) 存在一个对角阵 D_ζ 使得 $A_1 = D_\zeta^{-1}AD_\zeta$ 是非负的且 $G(A_1)$ 有一个生成树；
- (3) 存在一个对角阵 D_ζ 使得 $L_1 = D_\zeta^{-1}LD_\zeta$ 有一个单重特征值 0 其对应的特征向量为 $\mathbf{1}$ ；
- (4) L 有一个单重特征值 0 其对应的特征向量为 $\zeta \in \mathbb{T}^n$ 。

其中第二个等价关系由文献[30]的引理 3.1 得到，第三个等价关系也可以类似地得到。 \square

这里有一个关键问题是如何判断 A 的本质非负性。由于有向图平衡的概念，我们可以得到一个 A 本质非负的充分必要条件。为此，对复矩阵 A ，我们用

$A_H = \frac{A + A^*}{2}$ 定义 A 的 Hermite 部分。显然，当 A 是 Hermite 矩阵时 $A = A_H$ 。

命题 2.2 复矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 是本质非负的当且仅当 $G(A_H)$ 是平衡的且 $a_{ij}a_{ji} \geq 0$ ， $1 \leq i, j \leq n$ 。

证明 由 A_H 是 Hermite 矩阵，有 $G(A_H)$ 是平衡的当且仅当 A_H 是本质非负的^[38]。因此，只需证明 A 是本质非负的当且仅当 A_H 是本质非负的且 $a_{ij}a_{ji} \geq 0$ ， $1 \leq i, j \leq n$ 。

由 $a_{ij}a_{ji} \geq 0$ ，有 $|a_{ij}a_{ji}| = \bar{a}_{ij}\bar{a}_{ji}$ 。两边同乘 a_{ij} ，有 $|a_{ji}|a_{ij} = |a_{ij}|\bar{a}_{ji}$ 。因此，对于对角阵 D_ζ 其中 $\zeta = [\zeta_1, \dots, \zeta_n]^T \in \mathbb{T}^n$ ， $a_{ij} \neq 0$ ，有

$$\zeta_i^{-1} \frac{a_{ij} + \bar{a}_{ji}}{2} \zeta_j = \frac{1 + \frac{|a_{ji}|}{|a_{ij}|}}{2} \zeta_i^{-1} a_{ij} \zeta_j \quad (2-1)$$

则 $D_\zeta^{-1}A_H D_\zeta$ 是非负的意味着 $D_\zeta^{-1}AD_\zeta$ 是非负的，充分性得证。

假设 A 是本质非负的，存在一个对角阵 D_ζ 使得 $A_1 = D_\zeta^{-1}AD_\zeta$ 是非负的。则

$$a_{ij}a_{ji} = (\zeta_i^{-1}a_{ij}\zeta_j)(\zeta_j^{-1}a_{ji}\zeta_i) \geq 0$$

从而式 (2-1) 成立。有 $D_\zeta^{-1}A_H D_\zeta$ 是非负的。 \square

上面的命题是用 $G(A_H)$ 的平衡性代替 $G(A)$ 的平衡性。因为 $G(A)$ 是平衡的不是 A 是本质非负的充分条件，参见下例。

例 2.1 考虑复矩阵 A ，

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -j & j & 0 \end{bmatrix}$$

$G(A)$ 仅有一个长度为 2 的正圈, 因此 $G(A)$ 是平衡的。然而, A 不是本质非负的。

接下来我们考虑 A 不是本质非负的情况。当 $G(A)$ 有生成树且 A 不是本质非负的, 由命题 1 仅能得到 0 不是 L 的特征值或者 0 是 L 的特征值但其在 \mathbb{T}^n 中没有相应的特征向量。进一步理解, 考虑 A 是 Hermite 矩阵的特殊情况。此时, L 也是 Hermite 矩阵。则 L 的特征值都是实的。令 $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ 为 L 的特征值。 L 的正定性即 $\lambda_1 \geq 0$ 可由以下推导得到。对 $z = [z_1, \dots, z_n]^T \in \mathbb{C}^n$, 有

$$\begin{aligned} z^* L z &= \sum_{i=1}^n \bar{z}_i \left(\sum_{j \in N_i} |a_{ij}| z_i - \sum_{j \in N_i} a_{ij} z_j \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{(j,i) \in E} \left(|a_{ij}| |z_i|^2 + |a_{ij}| |z_j|^2 - 2a_{ij} \bar{z}_i z_j \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{(j,i) \in E} |a_{ij}| \left| z_i - \frac{a_{ij}}{|a_{ij}|} z_j \right|^2 \end{aligned} \quad (2-2)$$

其中 $\varphi: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{T}$ 由 $\varphi(a_{ij}) = \frac{a_{ij}}{|a_{ij}|}$ 定义。基于式 (2-2) 能够得到以下引理。

引理 2.2 令 A 是 Hermite 矩阵, 设 $G(A)$ 有一个生成树。则 L 是正定的即 $\lambda_1 > 0$ 当且仅当 A 不是本质非负的。

证明 只需证明充分性, 必要性可直接由命题 1 得到。

假设 L 不是正定的即 $\lambda_1 = 0$. 则存在非零向量 $y = [y_1, \dots, y_n]^T \in \mathbb{C}^n$ 使得 $Ly = 0$. 由式 (2),

$$y^* Ly = \frac{1}{2} \sum_{(j,i) \in E} |a_{ij}| \left| y_i - \frac{a_{ij}}{|a_{ij}|} y_j \right|^2 = 0$$

则对 $(j,i) \in E$ 有 $y_i = \frac{a_{ij}}{|a_{ij}|} y_j$, 从而对 $(j,i) \in E$ 有 $|y_i| = |y_j|$. 对于 $G(A)$ 其中 A 是

Hermite 矩阵, 有生成树等价于强连通。故而 $|y_i| = |y_j|$, $i, j = 1, \dots, n$. 不是一般性, 假设 $y \in \mathbb{T}^n$. 由引理 2.1 有 A 是本质非负的, 矛盾。□

另一方面, 对于 A 不是 Hermite 矩阵的一般情况, 不能说当 $G(A)$ 有一个生成树时 L 没有 0 特征值和 A 不是本质非负的。例 3.3 就提供了一个这样的例子。

2.2 受扰动的 Laplacian 矩阵

首先定义对角矩阵 E_{ii} ，它仅第 i 个对角元素 ε 是正的且其余元素均为 0。这一部分，对一些 $1 \leq i \leq n$ ，研究受扰动的 Laplacian 矩阵的性质。对于本质非负的矩阵 A ，命题 1 说明 L 有单重特征值 0 当且仅当 $G(A)$ 有一个生成树。自然想到这种情况下是否存在一个指标 i 使得 $L + E_{ii}$ 没有特征值 0。下面的引理给出了肯定的答案。

引理 2.3 对于本质非负的矩阵 A ， $L + E_{ii}$ 的特征值都有正实部当且仅当 i 是 $G(A)$ 的一个生成树的根。

注 2.1 引理 2.3 的实时模拟已经广泛使用于关于牵制同步的文献中，可以参见其中的例子^[41,42]。我们的结果也与不可约对角占优矩阵的古典理论有密切关联^[43]。这里用著名的 Kirchhoff 矩阵树定理给出另一种证明。

证明 因为 A 是本质非负的，不失一般性可对非负的 A 证明这个引理。

假设 $G(A)$ 有一个生成树。不失一般性，令 1 是生成树的根。需要证明 $L + E_{11}$ 的特征值都有正实部。根据 Gersgorin 圆盘定理^[39]，则等价于要证明 0 不是 $L + E_{11}$ 的特征值。

假设存在非零向量 $x = [x_1, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$ 使得 $(L + E_{11})x = 0$ 。另一方面，由图论^[44]中的著名的 Kirchhoff 矩阵树定理，可知存在一个非零向量 $c = [c_1, \dots, c_n]^T \in \mathbb{R}^n$ 使得 $c^T L = 0$ 且 $c_1 > 0$ 。事实上， c_1 是 $G(A)$ 的根为 1 的所有生成树的权的和。因此， $0 = c^T (L + E_{11})x = c^T E_{11}x = c_1 \varepsilon x_1$ ，从而有 $x_1 = 0$ 。由 $(L + E_{11})x = 0$ 有 $Lx = 0$ ，再由 $G(A)$ 生成树的存在性，得到 $x \in \text{span}\{1\}$ 。因此，由 $x_1 = 0$ ，有 $x = 0$ 。矛盾。

假设 $L + E_{11}$ 的特征值都有正实部。由充分性证明可知仅需证明 $G(A)$ 有一个生成树。

假设 $G(A)$ 没有生成树。令 T_1 是 $G(A)$ 的一个最大树，其包含的顶点最多。令 V_1 是 T_1 的顶点集合。 V_1 可以分成两个顶点子集 V_{11} 和 V_{12} 满足 V_{11} 包含 T_1 的根且由 V_{11} 构成的 $G(A)$ 的子图 $G[V_{11}]$ 是强连通的。进而，所有 V_{11} 和 V_{12} 之间的有向边都是从 V_{11} 到 V_{12} 的。 V_{12} 可以是空的。令 V_2 是其余顶点的集合即 $V_2 = \{1, \dots, n\} \setminus V_1$ 。由 $G(A)$ 没有生成树，有 V_2 非空。鉴于 T_1 是 $G(A)$ 的一个最大树，可知不存在从 V_{11} 到 V_2 的边

且 V_{12} 和 V_2 之间的有向边只可能是由 V_2 到 V_{12} 的。因此，若对顶点经过必要的重新编号， $G(A)$ 的标准 Laplacian 矩阵可化为分块形式：

$$L = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ * & L_{22} & * \\ 0 & 0 & L_{33} \end{bmatrix}$$

其中，“*”表示可能的非零项， L_{11} 和 L_{33} 分别与 $G[V_{11}]$ 和 $G[V_2]$ 的标准 Laplacian 矩阵一致。由于 L_{11} 和 L_{33} 都有特征值 0，有 $y_1^T L_{11} = 0$ 和 $y_3^T L_{33} = 0$ ，其中 y_1 和 y_3 是相应维度的非零向量。因此，线性无关向量 $[y_1^T, 0, 0]^T \in \mathbb{R}^n$ 和 $[0, 0, y_3^T]^T \in \mathbb{R}^n$ 都是与 L 的 0 特征值相应的左特征向量。这与存在指标 i 使得 $L + E_{11}$ 的特征值都有正实部矛盾，故假设不成立。 \square

注 2.2 值得注意的是以上关于 Laplacian 矩阵 L 的结果不能由像 Gersgorin 圆盘定理和对角占优分析^[39]的标准方法推导出来。这是因为这些标准方法仅使用非对角项的绝对值的信息。

2.3 对角均等矩阵的 Hurwitz 稳定性

矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times n} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ，记其（退化的）行和 $R_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, i = 1, \dots, n$ ，（退化的）

列和 $C_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ji}|, i = 1, \dots, n$ 。矩阵 A 为对角均等矩阵若 $|a_{ii}| = R_i, i = 1, \dots, n$ 。矩阵 A

是 Hurwitz 稳定的若它的所有特征值 $\lambda_i(A), i = 1, \dots, n$ ，满足 $\operatorname{Re} \lambda_i(A) < 0$ 。

条件 2.1 $\forall i \in n, |a_{ii}| \geq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ 且 $J(A) = \left\{ i \in N : |a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \right\} \neq \emptyset$ 。

定义 2.2 A 是弱链对角占优的若 A 满足条件 1 且 $\forall i \in n, i \notin J(A)$ 存在 N 中的指标 i_1, i_2, \dots, i_k 使得 $a_{i_r, i_{r+1}} \neq 0, 0 \leq r \leq k-1$ ，其中 $i_0 = i$ 且 $i_k \in J(A)$ 。

引理 2.4 弱链对角占优矩阵是非奇异的。

定理 2.1 A 是一个对角均等矩阵且 $a_{ii} < 0, i = 1, \dots, n$ 。假设 $G(A)$ 有一个生成树，则 A 是 Hurwitz 稳定的当且仅当存在一个含根的圈且此圈的权非正。

证明 由 Gersgorin 圆盘定理，可知 $\operatorname{Re} \lambda_i(A) \leq 0, i = 1, \dots, n$ 。不是一般性，假设 1 是 $G(A)$ 的一个根， $V_1 = \{x \in V \mid \text{存在由 } x \text{ 到 } 1 \text{ 的路}\}$ ， G_1 为由 $V_1 \cup \{1\}$ 生成的 $G(A)$ 的子图

即 $G_1 = G \setminus V_1 \cup \{1\}$. 不是一般性, 可设 $A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$, 其中 A_{11} 为 n_1 阶方阵, A_{22} 为 n_2 阶方阵, $G_1 = G(A_{11})$ 且 $A_{21} \neq 0$, 易知 $G(A_{11})$ 是强连通的。

首先, 我们证明 $\operatorname{Re} \lambda_i(A_{11}) < 0, i = 1, \dots, n_1$.

假设 A_{11} 不是 Hurwitz 稳定的即 0 是 A_{11} 的特征值其对应的特征向量 $x \neq 0$. 由《矩阵分析》中定理 6.2.3 知 向量 x 的元素 $|x_i| = |x_j| = \xi \neq 0, \forall i, j = 1, \dots, n_1$ 且所有的 Gersgorin 圆盘都经过 0. 则 $A_{11}x = 0, x^* A_{11}^* = 0$ 且

$$x^* A_{11}^H x = 0 \quad (2-3)$$

其中 $A_{11}^H = \frac{A_{11} + A_{11}^*}{2}$ 为 A_{11} 的 Hermite 部分. 考虑 A_{11} 的行和 $R_i, i = 1, \dots, n_1$ 和列和 $C_i, i = 1, \dots, n_1$, 又 $a_{ii} < 0, i = 1, \dots, n_1$ 和 A 是对角均等的, 有 $-a_{ii} = R_i, i = 1, \dots, n_1$. 记 $R = \operatorname{diag}(R_1, \dots, R_{n_1})$ 和 $C = \operatorname{diag}(C_1, \dots, C_{n_1})$, A_d 和 A_0 分别表示 A_{11} 的对角部分和非对角部分, 则 $A_{11} = A_d + A_0$ 且 $A_{11}^H = -R + \frac{A_0 + A_0^*}{2}$. 若将 A_{11} 改写成

$$A_{11}^H = -\frac{R-C}{2} - \frac{R+C}{2} + \frac{A_0 + A_0^*}{2}$$

则式 (2-3) 变为

$$0 = -x^* \frac{R-C}{2} x - x^* \frac{R+C}{2} x + x^* \left| \frac{A_0 + A_0^*}{2} \right| x \quad (2-4)$$

将式 (2-4) 中第一项展开且由 $\overline{x_i} x_i = \xi^2, \forall i = 1, \dots, n_1$, 有

$$\sum_{i=1}^{n_1} \overline{x_i} x_i (R_i - C_i) = \sum_{i=1}^{n_1} \overline{x_i} x_i \left| \left(|a_{ij}| - |a_{ji}| \right) \right| = \xi^2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ j \neq i}}^{n_1} \left(|a_{ij}| - |a_{ji}| \right) = 0$$

式 (2-4) 中的其余部分可写成

$$0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j>i} \left(-\overline{x_i} x_i \left(|a_{ij}| + |a_{ji}| \right) - \overline{x_j} x_j \left(|a_{ij}| + |a_{ji}| \right) + \overline{x_i} x_j \left(a_{ij} + \overline{a_{ji}} \right) + x_i \overline{x_j} \left(\overline{a_{ij}} + a_{ji} \right) \right)$$

若 $a_{ij} a_{ji} \geq 0, \forall i, j = 1, \dots, n_1$ (即 $G(A_{11})$ 的所有长度为 2 的圈的权是正的), 则 $|a_{ij}| + |a_{ji}| = |a_{ij} + \overline{a_{ji}}|$, 从而

$$\begin{aligned}
 0 &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j>i} \left(\overline{x_i x_j} (|a_{ij} + \overline{a_{ji}}|) + \overline{x_j x_i} (|\overline{a_{ij}} + a_{ji}|) - \overline{x_i x_j} (a_{ij} + \overline{a_{ji}}) - x_i \overline{x_j} (\overline{a_{ij}} + a_{ji}) \right) \\
 &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j>i} \left| a_{ij} + \overline{a_{ji}} \right| \left| x_i - \frac{\overline{(a_{ij} + \overline{a_{ji}})}}{|a_{ij} + \overline{a_{ji}}|} x_j \right| \left| x_i - \frac{(a_{ij} + \overline{a_{ji}})}{|a_{ij} + \overline{a_{ji}}|} x_j \right| \\
 &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j>i} \left| a_{ij} + \overline{a_{ji}} \right| \left| x_i - \frac{(a_{ij} + \overline{a_{ji}})}{|a_{ij} + \overline{a_{ji}}|} x_j \right|^2 \tag{2-5}
 \end{aligned}$$

这是一个平方和形式，意味着与特征向量 x 相对应的每一项都为 0。在 $G(A_1)$ 上至少存在一个权非正的圈 $C = \{(v_{i_1}, v_{i_2}), (v_{i_2}, v_{i_3}), \dots, (v_{i_p}, v_{i_1})\} \subset \varepsilon$ 。在式 (5-5) 中我们考虑在 C 中的边的子集，有

$$0 = -\frac{1}{2} \sum_{(v_j, v_i) \in C} \left| a_{ij} + \overline{a_{ji}} \right| \left| x_i - \frac{(a_{ij} + \overline{a_{ji}})}{|a_{ij} + \overline{a_{ji}}|} x_j \right|^2$$

进而有

$$\begin{aligned}
 x_{i_1} &= \frac{(a_{i_1 i_2} + \overline{a_{i_2 i_1}})}{|a_{i_1 i_2} + \overline{a_{i_2 i_1}}|} x_{i_2} = \frac{\overline{a_{i_2 i_1}}}{|a_{i_2 i_1}|} x_{i_2} \\
 x_{i_2} &= \frac{(a_{i_2 i_3} + \overline{a_{i_3 i_2}})}{|a_{i_2 i_3} + \overline{a_{i_3 i_2}}|} x_{i_3} = \frac{\overline{a_{i_3 i_2}}}{|a_{i_3 i_2}|} x_{i_3} \\
 &\vdots \\
 x_{i_p} &= \frac{(a_{i_p i_1} + \overline{a_{i_1 i_p}})}{|a_{i_p i_1} + \overline{a_{i_1 i_p}}|} x_{i_1} = \frac{\overline{a_{i_1 i_p}}}{|a_{i_1 i_p}|} x_{i_1}
 \end{aligned}$$

则

$$x_{i_1} = \frac{\overline{a_{i_2 i_1}}}{|a_{i_2 i_1}|} \cdot \frac{\overline{a_{i_3 i_2}}}{|a_{i_3 i_2}|} \cdots \frac{\overline{a_{i_1 i_p}}}{|a_{i_1 i_p}|} x_{i_1}$$

又 $\overline{a_{i_2 i_1}} \cdot \overline{a_{i_3 i_2}} \cdots \overline{a_{i_1 i_p}} = \overline{a_{i_2 i_1} a_{i_3 i_2} \cdots a_{i_1 i_p}}$ 是非正的且 $|a_{i_2 i_1}| \cdot |a_{i_3 i_2}| \cdots |a_{i_1 i_p}|$ 是正的，从而只能是 $x_{i_1} = 0$ ，这与 $|x_i| = \xi \neq 0, \forall i, j = 1, \dots, n_1$ 矛盾，故这种情况下 0 不是 A_1 的特征值。

若不是对任意的 $i \neq j$ 都有 $a_{ij} a_{ji} \geq 0$ 即至少一对 ε 中的边满足

$|a_{ij} + \overline{a_{ji}}| < |a_{ij}| + |a_{ji}|$ ，则与式 (2-5) 相应的有

$$0 = - \sum_{i_k, j_k \in K} \varepsilon_k (x_{i_k}^2 + x_{j_k}^2) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j>i} \left| a_{ij} + \overline{a_{ji}} \right| \left| x_i - \frac{(a_{ij} + \overline{a_{ji}})}{|a_{ij} + \overline{a_{ji}}|} x_j \right|^2$$

其中 K 是使得 $a_{i_k j_k} a_{j_k i_k}$ 不大于 0 的指标对的集合且 $\varepsilon_k > 0$. 显然此时若要 $|x_i| = \xi \neq 0, \forall i, j = 1, \dots, n_1$ 成立则 K 不能为空. 因此, 存在长度为 2 的圈的权非正时, 0 不是 A_{11} 的特征值.

故 0 不是 A_{11} 的特征值.

考虑 A_{22} , 由 1 是 $G(A)$ 的一个根, 可知 A_{22} 满足定义 2.2, 则由引理 2.3 知 A_{22} 非奇异即 $|A_{22}| \neq 0$. 故 0 不是 A_{22} 的特征值.

综上, 0 不是 A 的特征值即 A 是 Hurwitz 稳定的.

假设所有含根的圈的权都是正的.

与充分性证明相同, 不妨设 $A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$. 由于 A 是 Hurwitz 稳定的, 则 $G(A)$

至少有两个根且 $G(A)$ 中所有含根的圈都在 $G(A_{11})$ 中. 由假设 $G(A_{11})$ 是强连通的且是平衡的. 令

$$A_{11} = (a_{ij})_{n_1 \times n_1}, \text{ 其中 } a_{ij} a_{ji} \geq 0$$

$$A_{11}^H = \frac{A_{11} + A_{11}^*}{2} = (b_{ij})_{n_1 \times n_1}, \text{ 即 } b_{ij} = \frac{a_{ij} + \overline{a_{ji}}}{2} = l_{ij} a_{ij}, \text{ 其中 } l_{ij} > 0$$

由此可知 $G(A_{11})$ 与 $G(A_{11}^H)$ 中的权相差正常数倍.

任取一个圈 $C \subset G(A_{11}^H)$,

若 $C \subset G(A_{11})$, 则 C 的权重是正的;

若 $C \not\subset G(A_{11})$, 令 $C = \{(v_{i_1}, v_{i_2}), (v_{i_2}, v_{i_3}), \dots, (v_{i_p}, v_{i_1})\}$, 不妨假设

$C = \{(v_{i_1}, v_{i_2})\} \cup P_1$, 其中 $(v_{i_1}, v_{i_2}) \notin G(A_{11})$, $P_1 \in G(A_{11})$, 则 $a_{i_2 i_1} = 0$ 且 $a_{i_1 i_2} \neq 0$. 由 $G(A_{11})$ 是强连通的, 则 $G(A_{11})$ 中存在一个从 v_{i_1} 到 v_{i_2} 的路径 P_2 .

若 P_1 与 P_2 除 v_{i_1} 与 v_{i_2} 外没有相交的点, 令 $C_1 = P_1 \cup P_2$, $C_2 = \{(v_{i_2}, v_{i_1})\} \cup P_2$, 由于 C_1 、 C_2 都是 $G(A_{11})$ 中的圈, 则在 $G(A_{11})$ 中的权重

$$W_{C_1} = W_{P_1} \bullet W_{P_2} > 0, \quad W_{C_2} = a_{i_2 i_1} \bullet W_{P_2} > 0$$

从而, C_1 、 C_2 在 $G(A_{11}^H)$ 中的权重

$$W'_{C_1} = W'_{P_1} \bullet W'_{P_2} > 0, \quad W'_{C_2} = \overline{2b_{i_2 i_1}} \bullet W'_{P_2} > 0$$

故 $W'_C = b_{i_2 i_1} \bullet W'_{P_1} > 0$ 即 C 在 $G(A_{11}^H)$ 中的权重为正。

若 P_1 与 P_2 除 v_{i_1} 与 v_{i_2} 外还有相交的点，不妨设还有一个相交的点 v_{i_k} 、 v_{i_k} 分别将 P_1 、 P_2 各分为两段，令 $P_1 = P_{11} \cup P_{12}$ ， $P_2 = P_{21} \cup P_{22}$ ，其中 P_{11} 为 P_1 中从 v_{i_2} 到 v_{i_k} 的路径， P_{12} 为 P_1 中从 v_{i_k} 到 v_{i_1} 的路径， P_{21} 为 P_2 中从 v_{i_1} 到 v_{i_k} 的路径， P_{22} 为 P_2 中从 v_{i_k} 到 v_{i_2} 的路径，则

$$C_{11} = P_{11} \cup P_{22}, \quad C_{12} = P_{21} \cup P_{12}, \quad C_2 = \{(v_{i_2}, v_{i_1})\} \cup P_{21} \cup P_{22}$$

它们都是 $G(A_{11})$ 中的圈，则它们在 $G(A_{11})$ 中的权重

$$W_{C_{11}} = W_{P_{11}} \bullet W_{P_{22}} > 0, \quad W_{C_{12}} = W_{P_{21}} \bullet W_{P_{12}} > 0, \quad W_{C_2} = a_{i_1 i_2} \bullet W_{P_{21}} \bullet W_{P_{22}} > 0$$

从而，它们在 $G(A_{11}^H)$ 中的权重

$$W'_{C_{11}} = W'_{P_{11}} \bullet W'_{P_{22}} > 0, \quad W'_{C_{12}} = W'_{P_{21}} \bullet W'_{P_{12}} > 0, \quad W'_{C_2} = \overline{2b_{i_2 i_1}} \bullet W'_{P_{21}} \bullet W'_{P_{22}} > 0$$

则此时 $W'_C = b_{i_2 i_1} \bullet W'_{P_{11}} \bullet W'_{P_{12}} > 0$ 即 C 在 $G(A_{11}^H)$ 中的权重为正。

综上， $G(A_{11}^H)$ 是平衡的。

又 $a_{ij}a_{ji} \geq 0, \forall i, j = 1, \dots, n_1$ ，由命题 2 知 A_{11} 是本质非负的，由引理 2.1 知 0 是 A_{11} 的一个特征值，从而 0 是 A 的一个特征值，这与 A 是 Hurwitz 稳定的相矛盾，假设不成立，即存在一个含根的圈的权重是非负的。

2.4 本章小结

在这一章，首先给出了本文所使用的一般记号以及关于复权图的定义，包括复权有向图及其平衡性和连通性的概念。再由两图之间的切换等价关系得到复矩阵本质非负的概念。

其次，讨论了 Laplacian 矩阵的性质。给出了有向图 $G(A)$ 的 Laplacian 矩阵特征值与 A 的本质非负和 $G(A)$ 连通性的关系，以及借助 Hermite 矩阵得到 A 的本质非负与连通性的关系，同时给出了受扰动的 Laplacian 矩阵特征值的性质与有向图的连通性之间的关系。

最后，当 $G(A)$ 不平衡时给出了 Laplacian 矩阵 Hurwitz 稳定的条件。

本章给出的关于特征值性质的结果将用于研究模一致性问题。

第3章 模一致性

在这一部分，首先构造出所要研究的模一致性问题。然后，模一致的充分必要条件可在第二章建立的预备结果的帮助下得到。

3.1 模一致性问题

对于 n 个智能体的系统，考虑复数域上连续时间的一致性协议

$$\dot{z}_i(t) = u_i(t), \quad t \geq 0 \quad (3-1)$$

其中 $z_i(t) \in \mathbb{C}$ 和 $u_i(t) \in \mathbb{C}$ 分别是第 i 个智能体的状态和输入，我们也考虑复数域上离散时间的一致性协议

$$z_i(k+1) = z_i(k) + u_i(k), \quad k = 0, 1, \dots \quad (3-2)$$

智能体间的交流由复权图 $G(A)$ 表示，控制输入 $u_i(t)$ 用分布式方式预设为

$$u_i(t) = -\kappa \sum_{j \in N_i} (|a_{ij}| z_i - a_{ij} z_j)$$

其中 $\kappa > 0$ 是一个固定的控制增益。则我们有以下两个系统

$$\dot{z}_i(t) = -\kappa \sum_{j \in N_i} (|a_{ij}| z_i - a_{ij} z_j)$$

和

$$z_i(k+1) = z_i(k) - \kappa \sum_{j \in N_i} (|a_{ij}| z_i - a_{ij} z_j)$$

由 $z = (z_1, \dots, z_n)^T \in \mathbb{C}^n$ 表示 n 个智能体的状态向量。用 $G(A)$ 的 Laplacian 矩阵 L ，两个系统可以改写为更简洁的形式：

在连续时间下

$$\dot{z}(t) = -\kappa L z(t) \quad (3-3)$$

在离散时间下

$$z(k+1) = z(k) - \kappa L z(k) \quad (3-4)$$

受到实权网络一致性的启发^[13,14,29]，本文介绍下面的定义：

定义 3.1 连续系统 (3-3) 达到模一致若

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |z_i(t)| = a > 0, \quad i = 1, \dots, n$$

离散系统 (3-4) 达到模一致若

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |z_i(k)| = a > 0, \quad i = 1, \dots, n$$

3.2 模一致条件

这一部分将要建立模一致的充分必要条件。令 A 是本质非负的复矩阵。若 $G(A)$ 有一个生成树，则由命题 1 有 0 是 L 的一个具有一个特征向量 $\zeta \in \mathbb{T}^n$ 的单重特征值。因此， $A_1 = D_\zeta^{-1}AD_\zeta$ 是非负的且 $D_\zeta^{-1}LD_\zeta$ 有一个单重特征值 0 其对应的特征向量为 $\mathbf{1}$ 。在标准一致定理^[45]中， $D_\zeta^{-1}LD_\zeta$ 有与特征值 0 相应的非负的左特征向量 $v = [v_1, \dots, v_n]^T$ ，即 $v^T(D_\zeta^{-1}LD_\zeta) = 0$ 且 $v_i \geq 0$ ， $i = 1, \dots, n$ 。假设 $\|v\|_1 = 1$ 。令 $\eta = D_\zeta^{-1}v = [\eta_1, \dots, \eta_n]^T$ ，有 $\|\eta\|_1 = 1$ 且 $\eta^T L = 0$ 。首先给出连续系统 (3-3) 的模一致的充分必要条件。

定理 3.1 连续时间系统 (3-3) 达到模一致当且仅当 A 是本质非负的且 $G(A)$ 有一个生成树。这种情况下，我们有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = (\eta^T z(0)) \zeta$$

证明 假设 A 是本质非负的且 $G(A)$ 有一个生成树。由命题 1，有 0 是 L 的一个具有一个特征向量 $\zeta \in \mathbb{T}^n$ 的单重特征值。因此， $A_1 = D_\zeta^{-1}AD_\zeta$ 是非负的且 $D_\zeta^{-1}LD_\zeta$ 有一个单重特征值 0 其对应的特征向量为 $\mathbf{1}$ 。令 $z = D_\zeta x$ 。由系统 (3-3)，可知 x 满足系统

$$\dot{x} = -\kappa D_\zeta^{-1}LD_\zeta x$$

注意这是一个标准一致问题。由文献[45]有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = v^T x(0) \mathbf{1} = v^T D_\zeta^{-1} z(0) \mathbf{1}$$

等价于

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = (v^T D_\zeta^{-1} z(0)) D_\zeta \mathbf{1} = (\eta^T z(0)) \zeta$$

假设系统 (3-3) 达到模一致但 $G(A)$ 没有生成树。令 T_1 是 $G(A)$ 的一个最大树， T_1 是 $G(A)$ 子图 G_1 的一个生成树。子图 G_2 由不属于 G_1 的顶点构成。易知不存在从 G_1 到 G_2 的边否则 T_1 不是 $G(A)$ 的最大树。 G_1 和 G_2 之间只可能存在从 G_2 到 G_1 的边，进而再由 T_1 是 $G(A)$ 的一个最大树有不存在从 G_2 的顶点到 T_1 的根的有向边。因此， T_1 的根和 G_2 的顶点之间不可能达到模一致。意味着系统 (3-3) 不能达到模一致。产生矛盾。因此 $G(A)$ 有一个生成树。另一方面，由于系统 (3-3) 达到模一致可知

$Ly = 0$ 的解 $y = [y_1, \dots, y_n]^T$ 满足 $|y_i| = |y_j|$, $i, j = 1, \dots, n$. 即 0 是 L 的一个特征值, 它对应的特征向量为 $\zeta \in \mathbb{T}^n$. 因此, 根据引理 2.1 知 A 是本质非负的。□

定理 3.2 设输入增益 κ 使得 $0 < \kappa < 1/\Delta$. 则离散时间系统 (3-4) 达到模一致当且仅当 A 是本质非负的且 $G(A)$ 有一个生成树。这种情况下, 我们有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} z(k) = (\eta^T z(0)) \zeta$$

其中 $\Delta = \max_{1 \leq i \leq n} d_i$.

证明 假设 A 是本质非负的且 $G(A)$ 有一个生成树。由命题 1, 有 0 是 L 的一个具有一个特征向量 $\zeta \in \mathbb{T}^n$ 的单重特征值。因此, $A_1 = D_\zeta^{-1} A D_\zeta$ 是非负的且 $D_\zeta^{-1} L D_\zeta$ 有一个单重特征值 0 其对应的特征向量为 $\mathbf{1}$. 令 $z = D_\zeta x$. 由系统 (3-4), 可知 x 满足系统

$$x(k+1) = (I - \kappa D_\zeta^{-1} L D_\zeta) x(k)$$

注意这是一个标准一致问题。由文献[45], 有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(k) = v^T x(0) \mathbf{1} = v^T D_\zeta^{-1} z(0) \mathbf{1}$$

等价于

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z(k) = (v^T D_\zeta^{-1} z(0)) D_\zeta \mathbf{1} = (\eta^T z(0)) \zeta$$

假设系统 (3-4) 达到模一致。根据与上述连续系统 (3-3) 相同的论证, 可知 $G(A)$ 有一个生成树。另一方面, 基于 Gersgorin 圆盘定理^[39], $-\kappa L$ 的所有特征值都在下面的 n 个圆盘的并集之中:

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : \left| z + \kappa \sum_{j \in N_i} a_{ij} \right| \leq \kappa \sum_{j \in N_i} |a_{ij}| \right\}, \quad i = 1, \dots, n$$

显然, 这 n 个圆盘都包含在最大的圆盘: $\{z \in \mathbb{C} : |z + \kappa \Delta| \leq \kappa \Delta\}$ 之中。注意 $0 < \kappa < 1/\Delta$, 可知这个最大的圆盘包含在区域 $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \cup \{1\}$ 中。由于系统 (6) 达到模一致可知 1 一定是 $I - \kappa L$ 的特征值。 $I - \kappa L$ 的其余特征值都严格小于 1 . 进而, 若 $y = [y_1, \dots, y_n]^T$ 是与 $I - \kappa L$ 的特征值 1 相对应的特征向量, 则 $|y_i| = |y_j| > 0$, $i, j = 1, \dots, n$. 即 0 是 L 的特征值其对应的特征向量 $\zeta \in \mathbb{T}^n$. 因此, 由引理 2.1 有 A 是本质非负的。□

注 3.1 在命题 2 的帮助下, 有 A 是本质非负的可通过 $G(A_H)$ 是平衡的条件验证。对于 A 是 Hermite 矩阵的特殊情况, 定理 3.1 和定理 3.2 采取了更简单的形式。作为一个例子, 考虑连续系统 (3-3) 其中 A 是 Hermite 矩阵。这种情况下, 由命题 2 有 A 是本质非负的当且仅当 $G(A)$ 是平衡的。则连续系统 (3-3) 达到模一致当且仅当 $G(A)$ 有一个生成树且是平衡的。此时,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = \frac{1}{n} (\zeta^* z(0)) \zeta$$

此外, 鉴于引理 2.2 当 $G(A)$ 有一个生成树且不平衡时有 $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0$ 。

3.3 牵制控制下的模一致

这一部分, 我们的目标是通过牵制一个智能体使全部智能体达到具有特定模的模一致。考虑本质非负矩阵 A , 引理 2.1 说明存在一个向量 $\zeta \in \mathbb{T}^n$ 满足 $L\zeta = 0$ 。基于系统 (3-3) 和 (3-4), 我们分别讨论下面的连续系统和离散系统:

$$\dot{z}(t) = -\kappa Lz(t) - \kappa E_{ii}(z(t) - \tilde{z}\zeta) \quad (3-5)$$

和

$$z(k+1) = z(k) - \kappa Lz(k) - \kappa E_{ii}(z(k) - \tilde{z}\zeta) \quad (3-6)$$

其中对角矩阵 E_{ii} 在第二部分中已给定义且特定模是由 $\tilde{z} \in \mathbb{C}$ 的模 $|\tilde{z}|$ 给定。牵制控制量只加在第 i 个智能体上。现在能够表述对于连续系统 (3-5) 的主要结果。

定理 3.3 令 A 是本质非负的, 则连续系统 (3-5) 达到特定模 $|\tilde{z}|$ 的模一致当且仅当 i 是 $G(A)$ 的一个生成树的根。此时,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = \tilde{z}\zeta$$

证明: 令 $e(t) = z(t) - \tilde{z}\zeta$, 连续系统 (3-5) 导致

$$\dot{e}(t) = -\kappa(L + E_{ii})e(t) \quad (3-7)$$

既然连续系统 (3-5) 达到特定模 $|\tilde{z}|$ 的模一致的条件等价于系统 (3-7) 是渐近稳定的条件。鉴于引理 2.3, 这等价于 i 是 $G(A)$ 的一个生成树的根的条件。□

相似地, 由引理 2.3 还可得到对于离散系统 (3-6) 的相应结果。

定理 3.4 设 $0 < \kappa < \frac{1}{\Delta + \varepsilon}$, A 是本质非负的。则离散系统 (3-6) 达到特定模 $|\tilde{z}|$ 的模一致当且仅当 i 是 $G(A)$ 的一个生成树的根。此时, $\lim_{k \rightarrow \infty} z(k) = \tilde{z}\zeta$ 。

3.4 举例

这一部分将举一些例子说明我们的主要结果。

例 3.1 考虑图 3-1 所示的复权图 $G(A)$ 其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -j & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 & 0 \\ 0 & 1+j & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

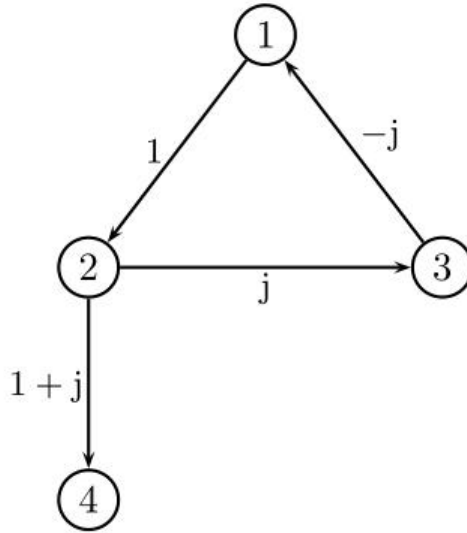


图 3-1 非 Hermite 邻接矩阵的图

显然 $G(A)$ 有一个生成树。由于 $G(A_H)$ 是平衡的，由命题 2 可知 A 是本质非负

的。给定 $\zeta = \left[1, 1, j, e^{j\frac{\pi}{4}}\right]^T \in \mathbb{T}^4$ ，有

$$A_1 = D_\zeta^{-1} A D_\zeta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A 的 Laplacian 矩阵

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & j & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -j & 1 & 0 \\ 0 & -1-j & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

L 的特征值集合为 $\left\{0, \sqrt{2}, \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j, \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j\right\}$. 向量 ζ 是与特征值 0 相对应的特征

向量。图 3-2 给出系统 (5) 的模拟, 表明渐进地达到模一致。这与定理 3.1 和定理 3.2 的分析结果一致。

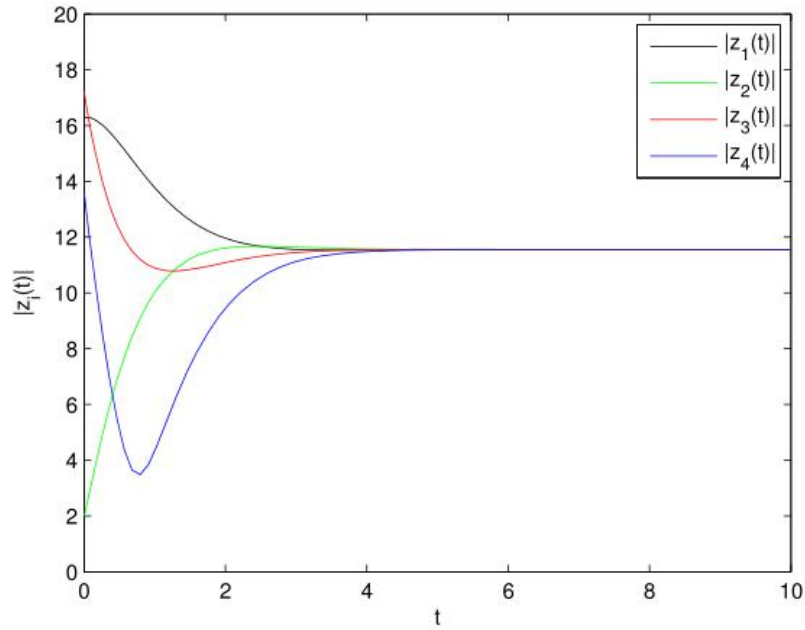


图 3-2 多智能体的模一致过程

例 3.2 考虑图 3-3 所示的复权图 $G(A)$ 其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1-j & -1-j \\ 1+j & 0 & -j \\ -1+j & j & 0 \end{bmatrix}$$

是 Hermite 对称矩阵。

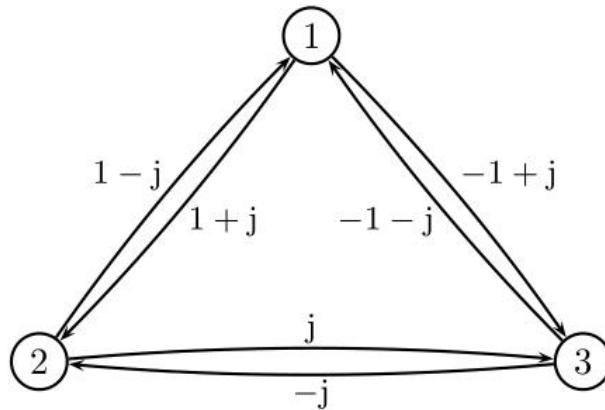


图 3-3 Hermite 邻接矩阵的图

显然 $G(A)$ 是强连通且平衡的。从而 A 是本质非负的。给定

$$\zeta = \left[e^{-j\frac{\pi}{2}}, e^{-j\frac{\pi}{4}}, e^{j\frac{\pi}{4}} \right]^T \in \mathbb{T}^3, \text{ 有}$$

$$A_1 = D_\zeta^{-1} A D_\zeta = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 & 1 \\ \sqrt{2} & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A 的 Laplacian 矩阵

$$L = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & -1+j & 1+j \\ -1-j & 1+\sqrt{2} & j \\ 1-j & -j & 1+\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

L 的特征值集合为 $\{0, 3.14, 4.24\}$ 。向量 ζ 是与特征值 0 相对应的特征向量。图 3-4 给出的模拟，表明渐进地达到模一致。这与注 3.1 的分析结果一致。

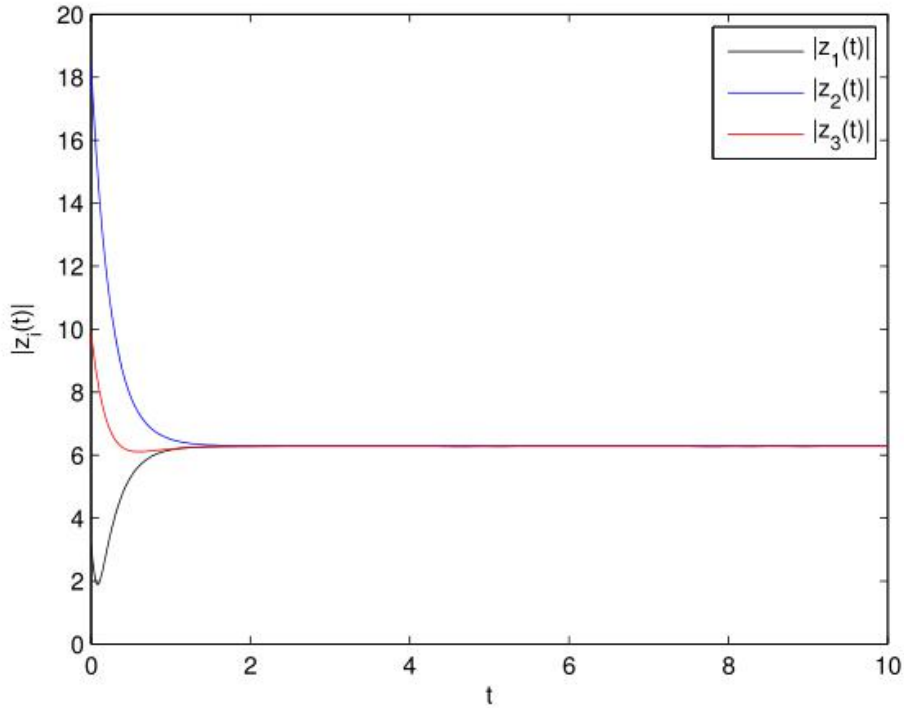


图 3-4 智能体的模一致过程

例 3.3 考虑图 3-5 所示的复权图 $G(A)$ 其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-j & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -j & 0 \end{bmatrix}$$

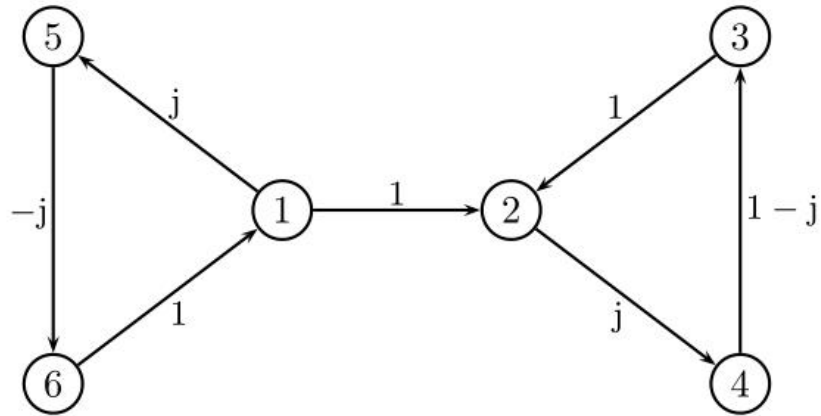


图 3-5 非平衡图

可以看出 $G(A)$ 有一个生成树但 A 是本质非负的因为 $G(A_H)$ 不是平衡的。可以确定 0 不是 L 的特征值。图 3-6 中的模拟表明不能达到模一致。

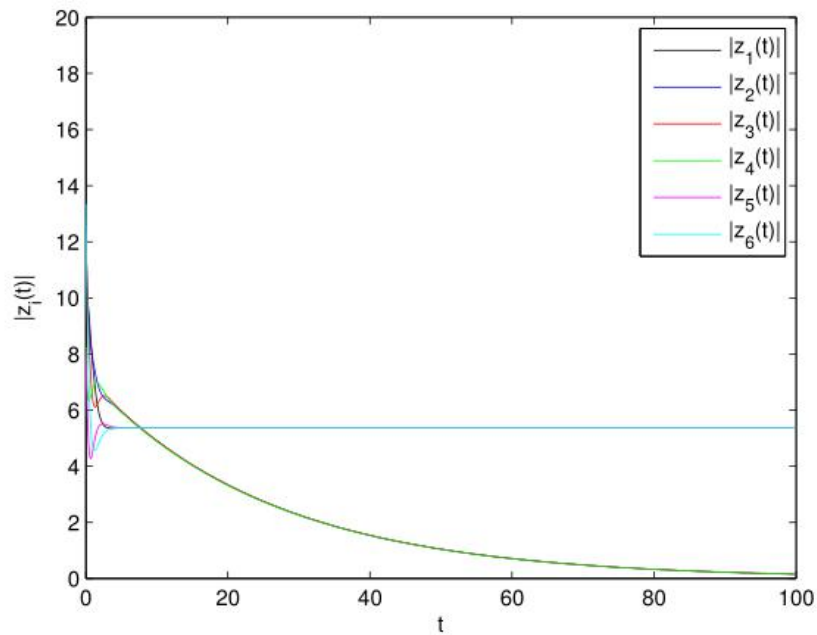


图 3-6 智能体的轨迹显示其不能达到模一致

3.5 切换拓扑下的模一致性

在此将在 3.2 中获得的模一致性结果推广到切换拓扑的情况。考虑由复邻接矩阵 $\{A_1, \dots, A_m\}$ 定义的 m 个可能的拓扑，假设 A_p 是本质非负的， $p = 1, \dots, m$ 。进一步假设存在公共的对角矩阵 D_ξ 其中 $\xi \in \mathbb{T}^n$ 使得所有的 $D_\xi^{-1} A_p D_\xi$ 都是非负的。这可由约束对任意 $i \neq j \in \{1, \dots, n\}$ 的项 $a_{p,ij}$ 有相同的幅角， $p = 1, \dots, m$ 。首先，考虑切换拓扑下的连续系统

$$\dot{z}(t) = -\kappa L_{\sigma(t)} z(t) \quad (3-8)$$

其中 $\sigma(t): [0, \infty) \rightarrow \{1, \dots, m\}$ 是一个右连续的分段常数切换信号其切换时间为 $\{t_i, i = 0, 1, \dots\}$ 。

定理 3.5 连续系统 (3-8) 达到模一致当且仅当存在一个 $\{t_i, i = 0, 1, \dots\}$ 的子序列 $\{t_{i_k}\}$ 使得 $t_{i_{k+1}} - t_{i_k}$ 对于 $k \geq 0$ 是一致有界的且在每个时间间隔 $[t_{i_k}, t_{i_{k+1}})$ 上的有向图 $G(A_{\sigma(t)})$ 的并集有一个生成树。

证明 由关于 $\{A_1, \dots, A_m\}$ 的假设，有它们可以由公共的对角矩阵 D_ξ 同时转换为非负矩阵。采取变换 $z(t) = D_\xi x(t)$ ，系统 (3-3) 变为

$$\dot{x}(t) = -\kappa D_\xi^{-1} L_{\sigma(t)} D_\xi x(t)$$

这是标准一致问题因为 $D_\xi^{-1} L_{\sigma(t)} D_\xi$ 是标准 Laplacian 矩阵。由文献[19]，可以得到我们的结果。 \square

考虑切换拓扑下的离散系统

$$z(k+1) = z(k) - \kappa L_{\sigma(t)} z(k) \quad (3-9)$$

假设 $0 < \kappa < 1 / (\max_{1 \leq p \leq m} \Delta_p)$ ，其中 Δ_p 是图 $G(A_p)$ ， $p = 1, \dots, m$ 的最大模度。

定理 3.6 离散系统 (3-9) 达到模一致当且仅当存在一个 $\{k, k = 0, 1, \dots\}$ 的子序列 $\{k_j\}$ 使得 $k_{j+1} - k_j$ 对于 $j \geq 0$ 是一致有界的且在每个时间间隔 $[k_j, k_{j+1})$ 上的有向图 $G(A_{\sigma(k)})$ 的并集有一个生成树。

这个结果可以由文献[19]连同定理 3.5 证明中用到的公共切换等价变换得到。

3.6 比例一致

对于多智能体系统的编队问题，在许多应用中需要编队成指定形状。为对多智能体系统编队成任意形状的情况进行讨论，在此给出复权网络的比例一致定义。

定义 3.2 连续系统 (3-1) (或离散系统 (3-2)) 达到 $[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$ 的比例一致若对任意的初始条件 $z(0)$ 都有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\alpha_1 z_1(t) - \alpha_j z_j(t)) = 0$$

$$(\text{或 } \lim_{k \rightarrow \infty} (\alpha_1 z_1(k) - \alpha_j z_j(k)) = 0), \quad j = 2, \dots, n,$$

其中 $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ 是非零的。

按照所需的编队形状，可以预设 $[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$ ，若多智能体系统能够达到 $[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$ 的比例一致，则多智能体系统可编队成指定形状。

下面，讨论比例一致的条件。

我们考虑以下系统对于指定的实权有向图 $G = \{V, E, A\}$ 达到 $[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$ 的比例一致的条件：

$$\dot{z}_i(t) = \frac{\bar{\alpha}_i}{|\alpha_i|} \sum_{j \in N_i} a_{ij} (\alpha_j z_j(t) - \alpha_i z_i(t)) \quad (3-10)$$

可改写为

$$\dot{z}(t) = \left[\text{diag} \left(\frac{\bar{\alpha}_i}{|\alpha_i|} \right) \right] L [\text{diag}(\alpha_i)] z(t) \quad (3-11)$$

其中 L 为 $G(A)$ 的 Laplacian 矩阵。

定理 3.7 实矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 是非负的且 $G(A)$ 有一个生成树，则系统 (3-11) 达到 $[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$ 的比例一致。

证明 考虑矩阵 $L_1 = [\text{diag}(|\alpha_i|)] L$ ， L_1 是 $G(\text{diag}(|\alpha_i|)A)$ 的 Laplacian 矩阵， $\text{diag}(|\alpha_i|)A$ 本质非负且 $G(\text{diag}(|\alpha_i|)A)$ 有一个生成树。

则 L_1 有与右特征向量 $v = \mathbf{1}$ 对应的单重特征值 $\lambda = 0$ 。

系统 (3-11) 的状态矩阵 $B = \left[\text{diag} \left(\frac{\bar{\alpha}_i}{|\alpha_i|} \right) \right] L [\text{diag}(\alpha_i)]$ 可改写为 $\left[\text{diag} \left(\frac{1}{\alpha_i} \right) \right] [\text{diag}(|\alpha_i|)] L [\text{diag}(\alpha_i)]$, 则 B 与 L_1 相似。从而, B 有与右特征向量 $v = \left[\frac{1}{\alpha_1}, \dots, \frac{1}{\alpha_n} \right]^T$ 对应的单重特征值 $\lambda = 0$ 。

因此, 我们有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = \left[\frac{1}{\alpha_1}, \dots, \frac{1}{\alpha_n} \right]^T w^T z(0)$$

其中, w^T 是 $\lambda = 0$ 的与 w^T 特征值相应的左特征向量, 且 $z(0)$ 是系统 (3-11) 的初始状态。

故

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\alpha_1 z_1(t) - \alpha_j z_j(t)) = 0, \quad j = 2, \dots, n \quad \square$$

3.7 二分一致性

目前, 二分一致性问题已经有所研究文献[19]。在这一部分, 我们将根据 3.2 中得到的模一致性结果来获得一些二分一致性结果。我们将看到这些结果改善现有的结果。

令 $G(A)$ 是一个符号图, 即 $A = (a_{ij})_{n \times n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 且 a_{ij} 可以是负的。符号图中二分一致性意味着所有的智能体收敛于一致的值, 这些值除却符号外绝对值均相同。状态 z 现在就限制在实数域 \mathbb{R} 上, 记作 x 。则系统 (3-3) 和系统 (3-4) 退化为标准一致性系统:

$$\dot{x}(t) = -\kappa Lx(t) \quad (3-12)$$

$$x(k+1) = x(k) - \kappa Lx(k) \quad (3-13)$$

以上两个系统并基于 3.2 中的定理 3.1 和定理 3.2, 能够得的符号图上的二分一致性结果。

推论 3.1 令 $G(A)$ 是一个符号图。则连续系统 (3-12) 渐进地实现二分一致当且仅当 A 是本质非负的且 $G(A)$ 有一个生成树。这种情况下, 对于任意的初始状态 $x(0) \in \mathbb{R}^n$, 有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = (\eta^T x(0)) \sigma$$

其中 $\sigma = [\sigma_1, \dots, \sigma_n]^T \in \{\pm 1\}^n$ 使得 $D_\sigma A D_\sigma$ 是非负矩阵, $\eta^T L = 0$, $\eta = [\eta_1, \dots, \eta_n]^T \in \mathbb{R}^n$ 且 $\|\eta\|_1 = 1$.

推论 3.2 令 $G(A)$ 是一个符号图。则离散系统 (3-13) 其中 $0 < \kappa < 1/\Delta$, 渐进地实现二分一致当且仅当 A 是本质非负的且 $G(A)$ 有一个生成树。这种情况下, 对于任意的初始状态 $x(0) \in \mathbb{R}^n$, 有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = (\eta^T x(0)) \sigma$$

其中 η 和 σ 与推论 3.1 中定义相同。

注 3.2 推论 3.1 表明二分一致在一个弱于文献[1]中定理 3.1 和定理 3.2 的条件下也可以实现。此外, 对于离散系统 (3-11) 的二分一致性也能得到相似的充分必要条件。切换拓扑下的二分一致性可以与前一部分相同的方式进行讨论, 但在此省略。

3.8 本章小结

本章首先给出了连续系统和离散系统的模一致性定义, 讨论了模一致条件即系统达到模一致当且仅当 A 是本质非负的且 $G(A)$ 有一个生成树, 并且通过一些例子对我们得到的结果加以说明, 并给出了牵制控制下的模一致条件和切换拓扑下的模一致条件。然后, 为实现任意形状圆形编队给出了比例一致的定义及实现条件。最后, 得到的系统实现二分一致的条件要弱于文献[1]中定理 3.1 和定理 3.2 的条件, 所得到的结果可以覆盖有向图上的二分一致性结果。

第4章 圆形编队

作为重要应用，在这一部分模一致性结果可用于研究圆形编队问题。

4.1 相对位置的圆形编队

考虑在平面上移动的编号为 $1, \dots, n$ 的 n 个智能体。智能体的位置用复数 $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ 表示。令 $z = [z_1, \dots, z_n]^T$ 为 n 个智能体的聚合位置向量。我们关心的具有相对位置的圆形编队定义如下。

定义 4.1 给定 $q \in \mathbb{C}$ 和 $\theta = [0, \theta_2, \dots, \theta_n] \in [0, 2\pi)^n$ ，称 n 个智能体系统形成一个圆形编队 $[q, \theta]$ 若它们的位置满足 $z_i - q = (z_1 - q)e^{j\theta_i}$ ， $i = 2, \dots, n$ 。

显然，在圆形编队 $[q, \theta]$ 中，全部智能体分布为一个以 q 为圆心且智能体间角度间隔为 θ 的圆形。注意圆形编队 $[q, \theta]$ 没有指定的半径和绝对的位置，这就是为什么称其为具有相对位置的圆形编队。我们的目标是设计分布式运算法则以实现圆形编队。令 $G(A)$ 是非负邻接矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 的图，图 $G(A)$ 可以是无向的或者是有向的。我们定义 A 的标准 Laplacian 矩阵 $L = (l_{ij})_{n \times n}$ ：

$$l_{ij} = \begin{cases} -a_{ij}, & i \neq j \\ d_i = \sum_{k \in N_i} a_{ik}, & j = i \end{cases}$$

则我们有 $\Delta = \max_{1 \leq i \leq n} l_{ii}$ 。对给定的圆形编队 $[q, \theta]$ ，我们定义 $D_\zeta = \text{diag}(\zeta)$ ，其中 $\zeta = [1, e^{j\theta_2}, \dots, e^{j\theta_n}]^T$ 。

易见 $\zeta \in \mathbb{T}^n$ ，我们现在能够提出我们的算法：对连续系统

$$\dot{z}(t) = -\kappa D_\zeta L D_\zeta^{-1} (z(t) - q\mathbf{1}) \quad (4-1)$$

和对离散系统

$$z(k+1) = z(k) - \kappa D_\zeta L D_\zeta^{-1} (z(k) - q\mathbf{1}) \quad (4-2)$$

现在可以描述对于连续系统 (4-1) 的结果。

定理 4.1 在连续系统下的初始状态为 $z(0)$ 的 n 个智能体实现圆形编队 $[q, \theta]$ 当且仅当 $G(A)$ 有一个生成树。此时，对 $i = 2, \dots, n$ ，我们有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (z_i(t) - q) = \lim_{t \rightarrow \infty} (z_1(t) - q) e^{j\theta_i} = (v^T D_\zeta^{-1} (z(0) - q\mathbf{1})) e^{j\theta_i}$$

其中 $v \in \mathbb{R}^n$ 是一个非负向量满足 $v^T L = 0$ 且 $\|v\|_1 = 1$.

证明 假设 $G(A)$ 有一个生成树。定义 $\delta_i(t) = z_i(t) - q$, 令 $\delta(t) = [\delta_1(t), \dots, \delta_n(t)]^T$. 则 $\delta(t)$ 满足一下系统

$$\dot{\delta}(t) = -\kappa D_\zeta L D_\zeta^{-1} \delta(t) \quad (4-3)$$

令 $A_1 = D_\zeta^{-1} A D_\zeta$, A_1 是本质非负的。因此, 应用定理 3.1 得到

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \delta(t) = (v^T D_\zeta^{-1} \delta(0)) \zeta$$

这等价于

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (z_i(t) - q) = \lim_{t \rightarrow \infty} (z_1(t) - q) e^{j\theta_i} = (v^T D_\zeta^{-1} (z(0) - q\mathbf{1})) e^{j\theta_i}$$

相反地, 若圆形编队 $[q, \theta]$ 能够实现则系统 (4-3) 能达到模一致。因此, 由定理 3.1 有 $G(A)$ 有一个生成树。 \square

相似地, 还可得到对于离散系统 (4-2) 的圆形编队结果。

定理 4.2 令 $0 < \kappa < 1/\Delta$, 在离散系统 (4-2) 下的初始状态为 $z(0)$ 的 n 个智能体实现圆形编队 $[q, \theta]$ 当且仅当 $G(A)$ 有一个生成树。此时, 对 $i = 2, \dots, n$, 我们有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (z_i(k) - q) = \lim_{k \rightarrow \infty} (z_1(k) - q) e^{j\theta_i} = (v^T D_\zeta^{-1} (z(0) - q\mathbf{1})) e^{j\theta_i}$$

其中 $v \in \mathbb{R}^n$ 是一个非负向量满足 $v^T L = 0$ 且 $\|v\|_1 = 1$.

注 4.1

(1) 在通信拓扑 $G(A)$ 是无向的情况下, 对于定理 4.1 和定理 4.2 中的圆形编队的充分必要条件可以重述为 $G(A)$ 是强连通的因为对于无向图有生成树等价于强连通。此时, 有 $v = \frac{1}{n} \mathbf{1}$. 有定理 4.1 和定理 4.2 可知到达的圆的半径独立于初始状态 $z(0)$, 进而有

$$|v^T D_\zeta^{-1} (z(0) - q\mathbf{1})| \leq \max_{1 \leq i \leq n} |z_i(0) - q|$$

(2) 通过引入一个移动的圆心, 也可以研究移动的圆形编队即智能体移动时达到一个预定的圆形编队。这里考虑两个系统:

连续系统

$$\dot{z}(t) = -\kappa D_\zeta L D_\zeta^{-1} (z(t) - \omega_0(t) \mathbf{1}) + \dot{\omega}_0(t) \mathbf{1}$$

和对离散系统

$$z(k+1) = z(k) - \kappa D_{\zeta} L D_{\zeta}^{-1} (z(k) - \omega_0(k) \mathbf{1}) + (\omega_0(k+1) - \omega_0(k)) \mathbf{1} (z(t) - q \mathbf{1})$$

其中 $\omega_0 \in \mathbb{C}$ 是移动的圆心。与定理 4.1 和定理 4.2 相似, 对于这两个系统的移动圆形编队可以实现。

例 4.1 考虑五个智能体的系统。通信图 $G(A)$ 如图 4-1 所示其邻接矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

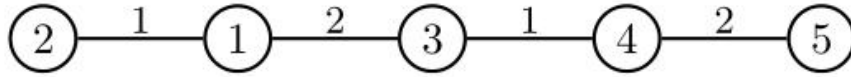


图 4-1 无向图

考虑由 $\theta_5 = [0, 0.4\pi, 0.8\pi, 1.2\pi, 1.6\pi]$ 定义的圆形编队 $[0, \theta_5]$. $G(A)$ 是无向且连通的。应用定理 4.1 和定理 4.2 实现定义的圆形编队 $[0, \theta_5]$. 连续系统 (4-1) 的模拟如图 4-2 所示。对移动圆形编队的模拟如图 4-3 所示。

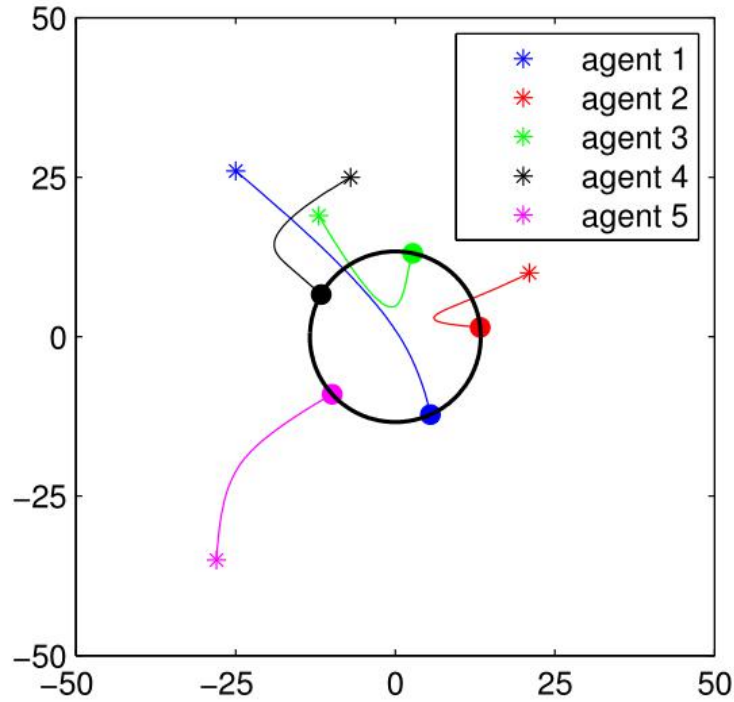


图 4-2 实现圆形编队 $[0, \theta_5]$

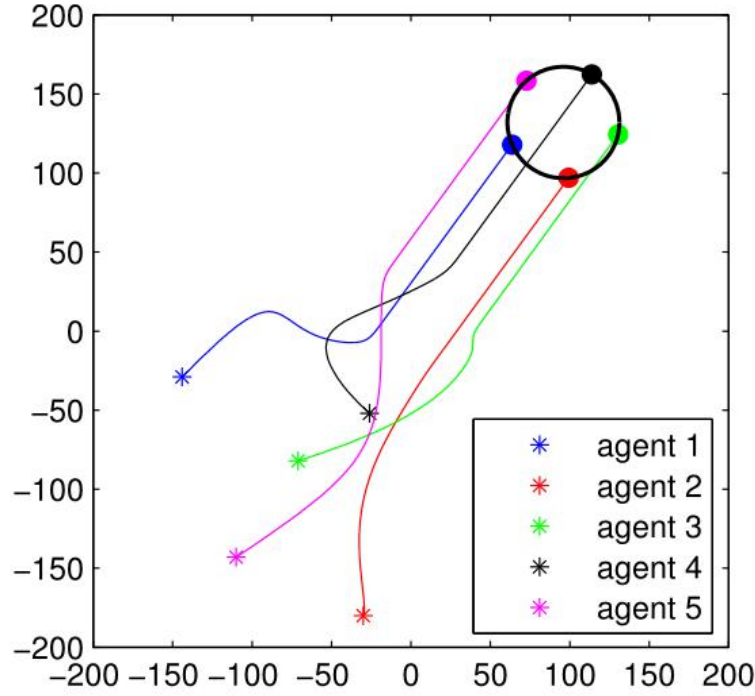


图 4-3 实现移动的圆形编队

4.2 切换拓扑下具有相对位置的圆形编队

考虑由非负邻接矩阵 $\{A_1, \dots, A_m\}$ 定义的 m 个可能的通信拓扑。首先考虑切换拓扑下连续时间圆形编队算法

$$\dot{z}(t) = -\kappa D_{\zeta} L_{\sigma(t)} D_{\zeta}^{-1} (z(t) - q\mathbf{1}) \quad (4-4)$$

其中 $\sigma(t): [0, \infty) \rightarrow \{1, \dots, m\}$ 是一个右连续的分段常数切换信号其切换时间为 $\{t_i, i = 0, 1, \dots\}$ 。根据定理 3.5，得到以下结果。

定理 4.3 系统 (4-4) 实现圆形编队 $[q, \theta]$ 若存在一个 $\{t_i, i = 0, 1, \dots\}$ 的子序列 $\{t_{i_k}\}$ 使得 $t_{i_{k+1}} - t_{i_k}$ 对于 $k \geq 0$ 是一致有界的且在每个时间间隔 $[t_{i_k}, t_{i_{k+1}})$ 上的有向图 $G(A_{\sigma(t)})$ 的并集有一个生成树。

现在考虑换拓扑下离散时间圆形编队算法

$$z(k+1) = z(k) - \kappa D_{\zeta} L_{\sigma(t)} D_{\zeta}^{-1} (z(k) - q\mathbf{1}) \quad (4-5)$$

借助定理 3.6，有以下结果。

定理 4.4 系统 (4-5) 实现圆形编队 $[q, \theta]$ 若存在一个 $\{k, k = 0, 1, \dots\}$ 的子序列 $\{k_j\}$ 使得 $k_{j+1} - k_j$ 对于 $j \geq 0$ 是一致有界的且在每个时间间隔 $[k_j, k_{j+1})$ 上的有向图 $G(A_{\sigma(k)})$ 的并集有一个生成树。

4.3 具有绝对位置的圆形编队

以上两部分，研究了具有相对位置的圆形编队，所有智能体收敛于给定圆心的公共圆，其具有预设的沿圆周的角度间隔和顺序。半径和沿圆周的角度位置是不确定的并由初始条件和图拓扑决定。然而在许多应用中我们希望能够完全设定圆形的具体位置。为了完全决定多智能体实现的圆形编队，我们要研究具有绝对位置的圆形编队。我们对系统 (4-1) 中的一个智能体应用牵制控制策略。因此，牵制控制的连续系统可表示为

$$\dot{z}(t) = -\kappa D_\zeta L D_\zeta^{-1} (z(t) - q\mathbf{1}) - \kappa E_{ii} ((z(t) - q\mathbf{1}) - p\mathbf{1}) \quad (4-6)$$

其中 $p \in \mathbb{C}$ ，对角矩阵 E_{ii} 的定义与 2.2 中定义相同。 E_{ii} 只有第 i 个对角元素是 ε 且其余对角元素皆为 0。因此只有第 i 个多智能体被牵制了。我们称多智能体实现绝对位置的圆形编队 $[q, \theta, p]$ 若实现圆形编队 $[q, \theta]$ 其中 $p + q$ 是被牵制的智能体到达的绝对位置。 p 的模 $|p|$ 是圆形的半径。相似地，牵制控制的离散系统可描述为

$$z(k+1) = z(k) - \kappa D_\zeta L D_\zeta^{-1} (z(k) - q\mathbf{1}) - \kappa E_{ii} ((z(k) - q\mathbf{1}) - p\mathbf{1}) \quad (4-7)$$

现在研究牵制控制下的系统 (4-6) 和系统 (4-7) 能够实现绝对位置的圆形编队 $[q, \theta, p]$ 的条件。

下面描述这一部分的主要结果。首先，考虑连续时间的情况。

定理 4.5 连续系统 (4-6) 实现满足绝对位置的圆形编队 $[q, \theta, p]$ 当且仅当 i 是 $G(A)$ 的一个生成树的根。

证明 假设 $G(A)$ 有一个生成树。不是一般性，令智能体 1 是生成树的根。现在对智能体 1 施加牵制控制。令 $x(t) = D_\zeta^{-1} (z(t) - q\mathbf{1})$ 。既然 $E_{ii} = \text{diag}(\varepsilon, 0, \dots, 0)$ ，由连续系统 (4-6) 有 $x(t)$ 满足系统：

$$\dot{x}(t) = -\kappa L x(t) - \kappa E_{11} (x(t) - p\mathbf{1}) \quad (4-8)$$

根据定理 3.3，有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = p\mathbf{1}$$

意味着

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (z(t) - q\mathbf{1}) = p\zeta$$

即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (z_1(t) - q) = p$$

且

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (z_i(t) - q) = pe^{j\theta_{i1}}, \quad i = 2, \dots, n$$

假设系统 (4-6) 实现满足绝对位置的圆形编队 $[q, \theta, p]$ 。与以上证明一起说明系统 (4-8) 实现具有指定模 $|p|$ 的模一致。则由定理 3.3 可知 i 是 $G(A)$ 的一个生成树的根。

然后，考虑离散时间的情况。

定理 4.6 令 $0 < \kappa < \frac{1}{\Delta + \varepsilon}$ ，则离散系统 (4-7) 实现绝对位置的圆形编队 $[q, \theta, p]$ 当

且仅当 i 是 $G(A)$ 的一个生成树的根。

注 4.2 可以看出仅需通过牵制一个生成树的根就可实现所有智能体都被牵制到预设位置的圆形编队。这些结果基于网络拓扑的直观知识。

例 4.2 考虑五个智能体的系统。通信图 $G(A)$ 如图 4-4 所示其邻接矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

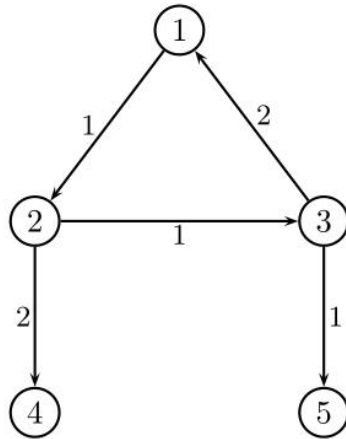


图 4-4 通信图

考虑由 $\theta_5 = [0, 0.5\pi, 0.75\pi, 1.25\pi, 1.5\pi]$ 和 $p = 20j$ 定义的圆形编队 $[0, \theta_5, p]$. $G(A)$ 有一个以顶点 1 为根的生成树。根据定理 4.5 和定理 4.6, 通过对智能体 1 的牵制控制能够实现绝对位置的圆形编队 $[0, \theta_5, p]$. 模拟结果如图 4-5 所示。

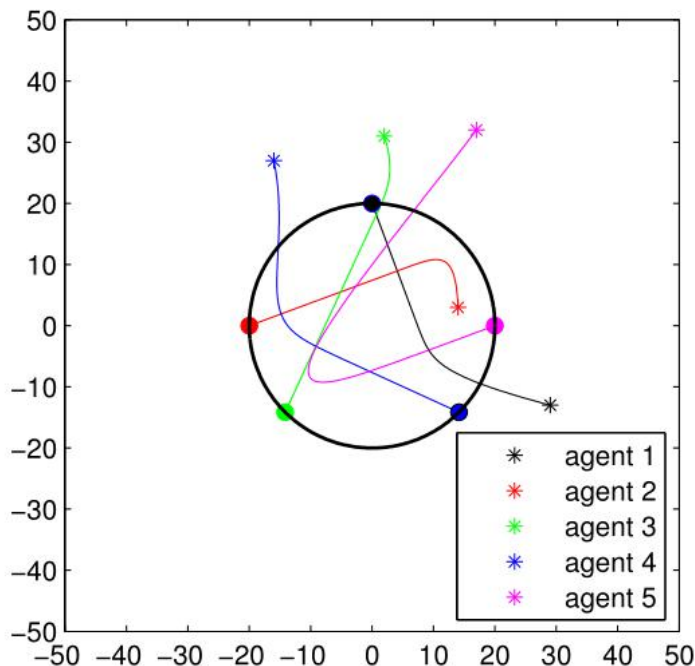


图 4-5 实现绝对位置的圆形编队 $[0, \theta_5, p]$

注 4.3 圆形编队问题在一些文章^[33]中已经被广泛研究了。相较已有工作, 本文关于圆形编队的结果有以下优点: 本文的算法是线性的, 对无向和有向拓扑下的分析都非常简单; 通过简单地调整复权来控制达到圆形的智能体间的角度间隔和顺序; 能够得到圆形编队的充分必要条件; 所达到的圆形中所有智能体的绝对位置可以通过单一控件来控制; 对于圆形编队的离散时间的算法也进行了研究。

4.4 本章小结

本章主要讨论了比例一致性在控制中的应用——圆形编队问题。首先研究具有相对位置圆形编队的控制问题, 即需要所有的智能体收敛到以给定点为圆心的公共圆且智能体间按指定的角度间隔和顺序排列成期望的形式。得到的主要结果是具有相对位置的圆形编队能够实现当且仅当有向通信图有一个生成树。但它的半径和绝对位置并不确定。为了完全决定一个圆形编队, 接着讨论了具有绝对位置圆形编队的控制问题。应用牵制控制方法, 发现绝对位置的圆形编队能够通过单一的局部控制器实现当且仅当有向通信图有一个生成树。

结 论

研究一致性问题主要依靠智能体间权值的集合来实现。在特殊的 Laplacian 矩阵图中，代数图论提供了自然的框架处理一致性问题，存在一个关于标准一致性问题研究的实质性的对象。本文就介绍了一种对于研究复权网络中一致性非常普遍的框架。现在将取得的主要进展和研究成果概述如下：

(1) 得到了 Laplacian 矩阵特征值的性质，证明了 Laplacian 矩阵零特征值存在的充分必要条件。在实数域上对角占优矩阵 Hurwitz 稳定性的基础上，证明了对角均等矩阵 Hurwitz 稳定的条件。

(2) 结合 Laplacian 矩阵的慎重选择，能够得到实现模一致的充分必要条件，实现模一致意味着所有智能体对模度而言达成一致并不是对所有参数。对于连续时间、离散时间和切换拓扑的情况下都得到了实现模一致的条件。结果表明模一致性不仅依赖网络的连通性还依赖复权的结构特性。此外，为实现多智能体系统任意形状编队，在实权比例一致的基础上，本文引入了复权系统比例一致的定义，并证明了给定系统实现比例一致的充分必要条件。本文的结果还能够覆盖符号有向图上的二分一致性结果。

(3) 作为重要应用，本文将模一致性协议应用于实现无向图和有向图上的圆形编队。其中包括相对位置的圆形编队、切换拓扑下的相对位置圆形编队，以及应用牵制控制方法实现绝对位置的圆形编队。

在本文的基础上，可以进行更进一步的研究和探索：

- (1) 将我们得到的模一致性结果推广到高阶模一致性问题；
- (2) 将我们的方法引入到社交网络的舆论动态研究中。

参考文献

- [1] Peter F, Lawrence M. The Three-dimensional Structure of Airborne Bird Flocks[J]. Behavioral Ecology and Sociobiology, 1978, 4(2): 111-122.
- [2] Reynolds, Craig W. Flocks. Herds and Schools: A Distributed Behavioral Model[J]. ACM SIG-GRAPH Computer Graphics, 1987, 21(4): 25-34.
- [3] Buck J. Synchronous Fireflies[J]. Scientific American, 1976, 234:74-85.
- [4] Neda Z, Ravasz E, Brechet Y, et al. Self-organizing Processes: The Sound of Many Hands Clapping[J]. Nature, 403: 849-850.
- [5] Mirollo R E, Strogatz S H. Synchronization of Pulse-coupled Biological Oscillators[J]. SIAM Journal on Applied Mathematics, 1990, 50(6): 1645-1662.
- [6] 唐骥宇. 多智能体系统一致性问题研究[D]. 西安: 长安大学控制工程专业硕士学位论文, 2014: 1.
- [7] Lynch N A. Distributed Algorithms[M]. Amsterdam: Elsevier, 1997: 1-8.
- [8] Morris H, De Groot. Reaching a Consensus[J]. Journal of American Statistical Association, 1974, 69(345): 118-121.
- [9] Benediktsson J A, Swain P H, Consensus Theoretic Classification Methods[J]. IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics, 1992, 22(4): 688-704.
- [10] Cucker F, Smale S. Emergent Behavior in Flocks[J]. IEEE Trans. Automat. Control, 2007, 52(5): 852-862.
- [11] Jadbabaie A, Lin J, Morse A S. Coordination of Groups of Mobile Autonomous Agents Using Nearest Neighbor Rules[J]. IEEE Trans. Automat. Control, 2003, 48(6): 988-1001.
- [12] Olfati-Saber R. Flocking for Multi-agent Dynamic Systems: Algorithms and Theory[J]. IEEE Trans. Automat. Control, 2006, 51(3): 401-420.
- [13] Olfati-Saber R, Murray R. Consensus Problems in Networks of Agents with Switching Topology and Time-delays[J]. IEEE Trans. Automat. Control, 2004, 49(9): 1520-1533.
- [14] Olfati-Saber R, Fax J A, Murray R M. Consensus and Cooperation in Networked Multi-agent Systems[J]. Proc. IEEE, 2007. 95(1): 215-233.
- [15] Olshevsky A, Tsitsiklis J N. Convergence Speed in Distributed Consensus and Averaging[J]. SIAM Rev, 2011. 53(4): 747-772.
- [16] Ren W, Beard R W. Consensus Seeking in Multiagent Systems Under Dynamically Changing Interaction Topologies[J]. IEEE Trans. Automat. Control, 2005. 50(5): 655-661.

- [17] Tsitsiklis J N, Bertsekas D P, Athans M. Distributed Asynchronous Deterministic and Stochastic Gradient Optimization Algorithms[J]. IEEE Trans. Automat. Control, 1989. 31(9): 803-812.
- [18] Beard R W, Stepanyan V. Information Consensus in Distributed Multiple Vehicle Coordinated Control[J]. IEEE Conf. Decision Control, 2003: 2029-2034.
- [19] Ren W, Beard R W. Consensus Seeking in Multiagent Systems Under Dynamically Changing Interaction Topologies[J]. IEEE Trans. Automat. Control, 2005. 50(5):655-661.
- [20] Gu G, Marinovici L D, Lewis F L. Consensus Ability of Discrete-time Dynamic Multi-agent Systems [J]. IEEE Trans. Automat. Control, 2012. 57(8): 2085-2089.
- [21] Li T, Fu M, Xie L, Zhang J. Distributed Consensus with Limited Communication Data Rate[J]. IEEE Trans. Automat. Control, 2003, 48(6): 988-1001.
- [22] Li T, Zhang J. Consensus Conditions of Multi-agent Systems with Time-varying Topologies and Stochastic Communication Noises[J]. IEEE Trans. Automat. Control, 2010. 55(9): 2043-2057.
- [23] Liu B, Lu W, Chen T. Consensus in Networks of Multiagents with Switching Topologies Modeled As Adapted Stochastic Processes[J]. SIAM. Control Optim, 2011. 49(1): 227-253.
- [24] Liu S, Xie L, Zhang H. Distributed Consensus for Multi-agent Systems with Delays and Noises in Transmission Channels[J]. Automatica, 2011. 47(5): 920-934.
- [25] Ma C, Zhang J. Necessary and Sufficient Conditions for Sensusability of Linear Multi-agent Systems[J]. IEEE Trans. Automat. Control, 2010. 55(5): 1263-1268.
- [26] Facchetti G, Iacono G, Altafini C. Computing Global Structural Balance in Large-scale Signed Social Networks[J]. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 2011(108): 20953–20958.
- [27] Marvel S A, Kleinberg J, Kleinberg R D, Strogatz S H. Continuous-time Model of Structural Balance[J]. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 2011, 108(5) : 1771–1776.
- [28] Ermon S, Schenato L, Zampieri S. Trust Estimation in Autonomic Networks: A Statistical Mechanics Approach[J]. IEEE CDC/CCC Conf., 2009: 4790–4795.
- [29] Altafini C. Consensus Problems on Network with Antagonistic Interactions [J]. IEEE Trans. Automat. Control, 2013,58(4): 935-946.
- [30] Lin Z, Ding W, Yan G, Yu C, Giua A. Leader-Follower Formation via Complex Laplacian, Automatica[J]. 2013, 55(9):1900-1906.
- [31] 冯元珍. 多智能体系统一致性问题综述[J]. 长江大学学报(自然科学版), 2011, 8(3): 84-87.
- [32] 孙雪. 离散多个体系统的一致性问题[D]. 南京: 南京师范大学硕士学位论文, 2012.

- [33] 李敏. 多个体线性系统的一致性分析与控制[D]. 山东: 山东大学博士学位论文, 2014.
- [34] Roy S. Scaled Consensus[J]. IEEE Trans. Automat. Control, 2015(51): 259-262.
- [35] Kalita D. Properties of First Eigenvectors and Eigenvalues of Nonsingular Weighted Directed Graphs[J]. Electronic Journal of Linear Algebra, 2015(30):227-242.
- [36] Reff N. Oriented Gain Graphs. Line Graphs and Eigenvalues, arXiv: 1506.05059v1, 2015.
- [37] Reff N. Spectral Properties of Complex Unit Gain Graphs[J]. Linear Algebra Appl., 2012, 436(9):3165-3176.
- [38] Zaslavsky T. Biased graphs. I. Bias, Balance, and Gains[J]. J. Combin. Theory Ser. B, 1989.,47(1): 32-52.
- [39] Horn R A, Johnson C R. Matrix Analysis [M]. Cambridge, U.K.: Cambridge Univ. Press, 1987.
- [40] Ren W. Multi-vehicle Consensus with A Time-varying Reference State[J]. Systems Control Lett., 2007,56(7): 474-483.
- [41] Chen T, Liu X, Lu W. Pinning Complex Networks by A Single Controller[J]. IEEE Trans. Circuits Syst. I, 2007,54(6):1317-1326.
- [42] Sun W, Lu J, Chen S, Yu X. Pinning Impulsive Control Algorithms for Complex Network[J]. Chaos, 2014(24).
- [43] Horn R A, Johnson C R. Matrix Analysis [M]. Cambridge, U.K.: Cambridge Univ. Press, 1987.
- [44] Chebotarev P, Agaev R. Forest Matrices Around the Laplacian Matrix[J]. 2002(356): 253-274.
- [45] Ren W, Beard R, Atkins E. Information Consensus in Multivehicle Cooperative Control [J]. IEEE Control Syst. Mag., 2007, 27(2): 71-82.

哈尔滨工业大学学位论文原创性声明和使用权限

学位论文原创性声明

本人郑重声明：此处所提交的学位论文《多智能体复权网络中的一致性及其应用》，是本人在导师指导下，在哈尔滨工业大学攻读学位期间独立进行研究工作所取得的成果，且学位论文中除已标注引用文献的部分外不包含他人完成或已发表的研究成果。对本学位论文的研究工作做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式注明。

作者签名：林琳 日期：2016 年 6 月 29 日

学位论文使用权限

学位论文是研究生在哈尔滨工业大学攻读学位期间完成的成果，知识产权归属哈尔滨工业大学。学位论文的使用权限如下：

(1) 学校可以采用影印、缩印或其他复制手段保存研究生上交的学位论文，并向国家图书馆报送学位论文；(2) 学校可以将学位论文部分或全部内容编入有关数据库进行检索和提供相应阅览服务；(3) 研究生毕业后发表与此学位论文研究成果相关的学术论文和其他成果时，应征得导师同意，且第一署名为哈尔滨工业大学。

保密论文在保密期内遵守有关保密规定，解密后适用于此使用权限规定。

本人知悉学位论文的使用权限，并将遵守有关规定。

作者签名：林琳 日期：2016 年 6 月 29 日

导师签名：董红刚 日期：2016 年 6 月 29 日

致 谢

2014年9月，我正式成为哈尔滨工业大学的学生。在这两年的时光中，有幸聆听了数学系各位老师和专家学者的授课，感受到了同学之间的关心帮助。我相信读研的美好经历将使我一生受益。

在此衷心感谢我的导师董久刚老师的悉心指导。从论文选题到论文完成的过程中董老师都给予我巨大的帮助，董老师的精心指教和耐心审阅批改都使我深受感动。同时，董老师渊博的学识、严谨的治学态度和诲人不倦的师者风范都令我深受启发，在今后的生活和工作中，我都会以我的导师为榜样。在论文完成之际，向我的导师董老师致以我最崇高的敬意和最诚挚的谢意！

感谢两年来遇到的所有哈工大的老师们，你们让我深切的体会到了什么是“规格严格、功夫到家”，向你们学习，向你们致敬！衷心感谢所有老师的教导和帮助！

感谢我亲爱的同学们，在这两年里，无论是学习还是生活中，你们都给予了我很多帮助，我很珍惜我们共同度过的美好时光，相遇在哈工大，但我知道我们的情谊不止于哈工大！

感谢我的家人，你们的爱是我不断前行的动力，也是我永远的心灵港湾，感谢你们的理解、鼓励和支持！

最后，衷心感谢在百忙之中抽出时间来参加我的论文评阅和论文答辩的所有专家！