

基于二部图的多智能体 系统加权分组一致性^{*}

何英高¹ 王翔宇²

(1. 无锡工艺职业技术学院, 无锡 214221; 2. 东南大学自动化学院, 南京 210096)

摘要 针对拓扑结构为二部图的多智能体系统, 设计了由当前状态和时延状态不同权重构成的控制算法, 通过采用频域控制理论中广义 Nyquist 准则和 Gerschgorin 圆盘定理, 给出了多智能体系统实现加权分组一致性的充分条件. 提出多智能体时延最大上界与权重参数具有单调递减函数关系, 为改进加权分组一致性的最大时延上界提供了可行方法. 最后通过数值仿真验证了结论的正确性.

关键词 多智能体系统, 分组一致性, Nyquist 准则, 圆盘定理.

MR(2000) 主题分类号 34H05

Weighted Group-Consensus of Multi-Agent System with Bipartite Topology

HE Yinggao¹ WANG Xiangyu²

(1. *Wuxi Institute of Arts Technology, Wuxi 214221*; 2. *School of Automation, Southeast University, Nanjing 210096*)

Abstract This paper studies weighted group-consensus of multi-agent system with bipartite topology through adjusting the proportion of the current state and delay-state in the control algorithm. A sufficient condition for the convergence to weighted group-consensus is addressed by adopting the generalized Nyquist stability criterion and the Gerschgorin disk theorem. Monotone decreasing function relation is proposed between upper bound on the maximum time-delay and proportion parameter. An effective method is provided to enlarge upper bound on the maximum time-delay of weighted group-consensus. Correctness of the proposed result is verified through numerical simulation.

^{*} 国家自然科学基金 (61271333, 61503078) 资助课题.

收稿日期: 2016-06-02, 收到修改稿日期: 2016-08-25.

编委: 纪志坚.

Keywords Multi-agent system, group-consensus, Nyquist criterion, Gerschgorin disk theorem.

1 引言

近年来, 由于多智能体系统在智能机器人编队控制、无线传感器网络智能化等领域有重要应用, 引起国内外众多研究者的广泛关注^[1-6]. 一致性问题作为多智能体系统诸多研究领域中的一个基本问题, 长时间以来成为许多学者广泛研究的一个课题, 即需要设计合适的控制器协调控制各智能体, 使它们在信息交换后状态达到一致. Jadbabaie 等人^[7]基于 Vicsek 模型研究多智能体方向一致性并提出了系统达到一致性相应条件; 针对通信时延和输入时延对多智能体系统一致性问题带来的影响, Olfati-Saber^[8]和 Tian 等众多研究者^[9-13]研究了包含通信时延和输入时延状态(过去状态)多智能体系统一致性. 然而在实际应用中, 一个复杂的多智能体系统由多个子网构成, 子网内的多智能体是合作关系, 而相互联系的子网智能体之间不是合作, 而是竞争的一种关系, 所以要求系统中所有智能体状态最终按组收敛到不同的状态值成为现实需要, 即同一子网中所有智能体一致收敛到相同状态, 而不同的子网则收敛到不同的状态, 学者将这类多智能体系统建模为多智能体分组一致性. 文献[14-18]研究了基于竞争或者既存在竞争又存在合作的模型情形下基于连通二部图的多智能体系统两分组一致性, 并给出了相应的时延上界; 文献[19]针对系统是否有无时延, 研究了多智能体加权两分组一致性, 并对存在时延的情形, 给出收敛时可能容忍的最大时延上界; 文献[20]基于无向图和强连通平衡图网络设计了多智能体系统分组一致控制器并给出了相关收敛判据; 对于线性多智能体系统多分组一致性问题也取得一些研究成果, 在文献[21]中, 针对固定拓扑提出了融合组内信息交互、组间信息交互一致性协议, 研究了一类线性多智能体系统多分组一致性问题; 文献[22]研究了线性控制下的多智能体系统多分组一致收敛到期望状态的通信拓扑设计方法.

不过目前对于时延多智能体加权分组一致性研究不够充分, 时延多智能体系统加权分组一致性方面研究成果较少. 本文基于竞争关系引入由当前状态和时延状态按不同权重构成的一种控制算法, 采用广义 Nyquist 准则与频域控制理论方法, 给出了基于二部图拓扑结构多智能体系统加权两分组一致性的充分条件, 并证明了多智能体时延上界与控制算法中权重参数在确定区间上具有单调递减函数关系. 本文提出的控制算法比文献[18, 19]更具通用性, 论证了通过调节时延权重参数, 可以获得比现有文献[19]更大时延上界并实现多智能体系统加权两分组一致性.

2 问题描述

2.1 多智能体网络拓扑描述

将多智能体系统中每个智能体看作图的节点, 智能体间连接关系描述为图的边, 智能体之间信息交换可用图的邻接矩阵表示, 具有二部图拓扑结构的多智能体系统可以完整的用图严格描述如下

令 $I = \{1, 2, \dots, n\}$, 三元组 $G = \{V, E, A\}$ 表示具有 n 个节点的无向图, 其中 $V =$

$\{v_i | i \in I\}$ 为图节点集. $E \subseteq \{(v_i, v_j) | v_i, v_j \in V, \text{ 且 } v_i \neq v_j\}$ 表示由节点组成边集合. $A = [a_{ij}]_{n \times n} \in R^{n \times n}$ 为图 G 邻接矩阵, 矩阵元素 a_{ij} 表示 v_i 到 v_j 连接边的权重, 当 v_i 可以得到 v_j 的信息时 $a_{ij} > 0$, 否则 $a_{ij} = 0$. 节点的邻居集表示为 $N_i = \{v_j \in V | (v_i, v_j) \in E\}$, 由于 G 为无向图, 所以 $a_{ij} = a_{ji}$, A 为对称矩阵. 在无向图中, 节点 v_i 的度定义为: $d_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}$, 定义 $D = \text{diag}\{d_i, i \in I\}$ 为对角矩阵, 则称 D 为无向图 G 的度矩阵.

定义 1 图 G 节点集 V 可分为两个互不相交的子集 V_1, V_2 , 使得图 G 中的每条边 (v_i, v_j) 所关联的两个节点 v_i 和 v_j 分别属于这两个不同的节点集.

设 $V_1 = \{v_i | i \in I_1\}$, $V_2 = \{v_j | j \in I_2\}$, 其中 $I_1 = \{1, 2, \dots, r\}$, $I_2 = \{r+1, r+2, \dots, n\}$, 如果存在 $V = V_1 \cup V_2$, 且 $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. $I = I_1 \cup I_2$, 且 $I_1 \cap I_2 = \emptyset$, 则称图 G 为二部图.

2.2 多智能体动态模型描述

本文以连续一阶多智能体系统为研究对象, 其每个智能体动态模型描述为

$$\dot{x}_i(t) = u_i(t), \quad i \in I, \quad (2.1)$$

其中 $x_i(t), u_i(t) \in R$ 分别为智能体 i 在 t 时刻的状态和控制输入.

2.3 多智能体加权分组控制算法

定义 2^[19] 对于含有 n 个节点的多智能体系统, 给定决策函数

$\text{Wave}^*(x) = \sum_{i=1}^r b_i x_i(t) - \sum_{i=r+1}^n b_i x_i(t)$, 其中 $b_i > 0$, $\sum_{i=1}^n b_i = 1$, $i \in I$, 如果当 $i \in I_1$ 时, $\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = \text{Wave}^*(x(0))$, 如果当 $i \in I_2$ 时, $\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = -\text{Wave}^*(x(0))$, 则称系统可实现加权分组一致. 其中 $x(0) = [x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0)]^T$.

对于系统 (2.1), 通过引入控制分量参数 b_i 和调整时延状态和当前状态的权重参数 α ($0 \leq \alpha \leq 1$), 采用的加权分组一致性控制算法为

$$u_i(t) = -\frac{1}{b_i} \sum_{j=1}^n a_{ij} ((1-\alpha)(x_i(t) + x_j(t)) + \alpha(x_i(t-\tau) + x_j(t-\tau))), \quad (2.2)$$

其中 $b_i > 0$, $\sum_{i=1}^n b_i = 1$, $i \in I$.

当 $\alpha = 0$ 时, $u_i(t) = -\frac{1}{b_i} \sum_{j=1}^n a_{ij} (x_i(t) + x_j(t))$, 即为文献 [18, 19] 系统不含时延控制器算法

当 $\alpha = 1$ 时, $u_i(t) = -\frac{1}{b_i} \sum_{j=1}^n a_{ij} (x_i(t-\tau) + x_j(t-\tau))$, 即为文献 [18, 19] 系统含时延控制器算法.

将式 (2.2) 代入式 (2.1) 整理得

$$\dot{x}_i(t) = -\frac{(1-\alpha)}{b_i} \sum_{j=1}^n a_{ij} (x_i(t) + x_j(t)) - \frac{\alpha}{b_i} \sum_{j=1}^n a_{ij} (x_i(t-\tau) + x_j(t-\tau)). \quad (2.3)$$

令 $B = \text{diag}\{b_i, i \in I\}$, $M = B^{-1}(D + A)$, 式 (2.3) 向量形式表示如下

$$\dot{X}(t) = -(1-\alpha)MX - \alpha MX(t-\tau), \quad (2.4)$$

其中 $X(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T$.

3 多智能体加权分组一致性分析

引理 1^[17] 如果图 G 拓扑结构为一连通二部图, 则矩阵 $D + A$ 的秩为 $n - 1$, 且该矩阵非零特征根为正实数.

引理 2^[15] 如果图 G 拓扑结构为一连通二部图, 则在适当的排序下, 图 G 所对应的邻接矩阵 A 可表示如下形式

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{r \times r} & A_1 \\ A_1^T & \mathbf{0}_{(n-r) \times (n-r)} \end{bmatrix}.$$

引理 3 如果图 G 拓扑结构为一连通二部图, 则在适当的排序下, 图 G 所对应的度矩阵 D 可表示如下形式

$$D = \begin{bmatrix} D1_{r \times r} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D2_{(n-r) \times (n-r)} \end{bmatrix}.$$

证 由定义 $D = \text{diag}\{d_i, i \in I\}$ 为对角矩阵且图 G 为二部图, 易证结论成立.

引理 4 如果图 G 拓扑结构为一连通二部图, 由图 G 所对应的邻接矩阵 A 和度矩阵 D 子块可构建矩阵 L

$$L = \begin{bmatrix} -D1_{r \times r} & -A_1 \\ A_1^T & D2_{(n-r) \times (n-r)} \end{bmatrix},$$

则 $[1, 1, \dots, 1]LX = 0$ 成立, 其中 $X(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T$.

证 由度矩阵 D 和邻接矩阵 A 定义, 可得

$$LX = \begin{pmatrix} -d_1 x_1(t) - \sum_{j=r+1}^n a_{1j} x_j(t) \\ \vdots \\ -d_r x_r(t) - \sum_{j=r+1}^n a_{rj} x_j(t) \\ d_{r+1} x_{r+1}(t) + \sum_{j=1}^r a_{r+1j} x_j(t) \\ \vdots \\ d_n x_n(t) + \sum_{j=1}^r a_{nj} x_j(t) \end{pmatrix},$$

$$[1, 1, \dots, 1]LX = \sum_{j=1}^r \left(-d_j + \sum_{i=r+1}^n a_{ij} \right) x_j(t) + \sum_{j=r+1}^n \left(d_j - \sum_{i=1}^r a_{ij} \right) x_j(t).$$

由二部图的定义知道, 节点集 V_1 的度定义为: $d_i = \sum_{j=1}^r a_{ij} = \sum_{j=r+1}^n a_{ij}$, 节点集 V_2 的度定义为: $d_i = \sum_{j=1}^r a_{ij} = \sum_{j=1}^r a_{ij}$, 所以 $\sum_{j=1}^r (-d_j + \sum_{i=r+1}^n a_{ij}) x_j(t) + \sum_{j=r+1}^n (d_j - \sum_{i=1}^r a_{ij}) x_j(t) = 0$. 即证明 $[1, 1, \dots, 1]LX = 0$ 成立.

定理 1 对于初始状态为 $x(0)$ ($i \in I$) 的多智能体系统 (2.4), 其网络拓扑为具有 n 个节点的连通二部图, 如果对于 $\forall i \in I$, 有 $\frac{d_i \tau}{b_i} < \frac{\tau \omega_{i0}}{2} \tan(\frac{\tau \omega_{i0}}{2})$, 则系统实现加权分组一致, 且最终渐近稳定达到 $[\underbrace{\beta, \beta, \dots, \beta}_r, \underbrace{-\beta, -\beta, \dots, -\beta}_{n-r}]^T$, 其中

$$\tau \omega_{i0} = \arccos \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha} \right). \quad (3.1)$$

ω_{i0} 为 $G_i(j\omega) = \frac{(1-\alpha) + \alpha e^{-j\tau\omega}}{j\omega b_i} d_i$ 的 Nyquist 曲线与复平面负实轴交点.

$$\beta = \sum_{i=1}^r b_i x_i(0) - \sum_{i=r+1}^n b_i x_i(0). \quad (3.2)$$

证 对式 (2.4) 进行 Laplace 变换, 可得系统的特征方程为 $\det(sI_n + (1-\alpha)\mathbf{M} + \alpha\mathbf{M}e^{-\tau s}) = 0$, \mathbf{M} 为 n 阶方阵, 其元素 m_{ij} 定义如下

当 $i = j$ 时, $m_{ij} = \frac{a_{ij}}{b_i}$, 当 $i \neq j$ 时, $m_{ij} = \frac{d_i}{b_i}$. 令

$$\mathbf{F}(s) = \det(sI_n + (1-\alpha)\mathbf{M} + \alpha\mathbf{M}e^{-\tau s}). \quad (3.3)$$

下面证明 $\mathbf{F}(s)$ 的零点具有负实部或 $s = 0$.

当 $s = 0$ 时, $\mathbf{F}(0) = \det((1-\alpha)\mathbf{M} + \alpha\mathbf{M}) = \det(\mathbf{M})$, 由 $\mathbf{M} = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{D} + \mathbf{A})$ 和引理 1 知, 0 是 $\mathbf{F}(s)$ 单一特征值, 即 0 是系统唯一零点, 所以 $\mathbf{F}(0) = \det(\mathbf{M}) = 0$.

由文献 [19] 可知, 特征值 0 对应的特征向量为 $[\underbrace{\beta, \beta, \dots, \beta}_r, \underbrace{-\beta, -\beta, \dots, -\beta}_{n-r}]^T$, 其中 β 为一个非零常数, 则该点正好为系统的平衡点.

当 $s \neq 0$, 令

$$\mathbf{P}(s) = \det(\mathbf{I}_n + \mathbf{G}(s)), \quad (3.4)$$

其中

$$\mathbf{G}(s) = \frac{(1-\alpha)\mathbf{M} + \alpha\mathbf{M}e^{-\tau s}}{s} = \frac{(1-\alpha) + \alpha e^{-\tau s}}{s} \mathbf{M}, \quad (3.5)$$

所以 $\mathbf{F}(s)$ 零点具有负实部等价于 $\mathbf{P}(s)$ 的零点具有负实部, 令 $s = j\omega$ 代入 $\mathbf{G}(s)$ 则

$$\mathbf{G}(j\omega) = \frac{(1-\alpha)\mathbf{M} + \alpha\mathbf{M}e^{-j\tau\omega}}{j\omega} = \frac{(1-\alpha) + \alpha e^{-j\tau\omega}}{j\omega} \mathbf{M}. \quad (3.6)$$

如果对于 $\forall \omega \in R$, $\mathbf{G}(j\omega)$ 的特征值的 Nyquist 不包含复平面 $(-1, j0)$ 点, 则 $\mathbf{P}(s)$ 的所有零点为负实部, 采用 Gerschgorin 圆盘定理估计 $\mathbf{G}(j\omega)$ 特征值 λ_i , 得

$$\lambda_i(\mathbf{G}(j\omega)) \in \bigcup_{i \in I} G_i, \quad (3.7)$$

其中

$$G_i = \left\{ \zeta : \zeta \in C, \left| \zeta - \frac{((1-\alpha) + \alpha e^{-j\tau\omega})}{j\omega b_i} d_i \right| \leq \left| \frac{((1-\alpha) + \alpha e^{-j\tau\omega})}{j\omega b_i} d_i \right| \right\}. \quad (3.8)$$

式 (3.8) 中 C 为复数域, 则圆盘中心为

$$G_{i0} = \frac{((1-\alpha) + \alpha e^{-j\tau\omega})}{j\omega b_i} d_i. \quad (3.9)$$

如果点 $(-\gamma, j0)$ ($\gamma > 1$) 不在圆盘 G_i 内, 则

$$\left| \gamma - \frac{((1-\alpha) + \alpha e^{-j\tau\omega})}{j\omega b_i} d_i \right| > \left| \frac{((1-\alpha) + \alpha e^{-j\tau\omega})}{j\omega b_i} d_i \right|. \quad (3.10)$$

对式 (3.10) 指数复数化简整理, 得

$$\left| \gamma - \frac{\alpha \sin \tau\omega + j((1-\alpha) + \alpha \cos \tau\omega)}{\omega b_i} d_i \right| > \left| \frac{\alpha \sin \tau\omega + j((1-\alpha) + \alpha \cos \tau\omega)}{\omega b_i} d_i \right|. \quad (3.11)$$

两边按复数进行模运算并展开, 得

$$\gamma \left(\gamma - \frac{2\tau \sin \tau\omega}{\omega b_i} d_i \right) > 0. \quad (3.12)$$

要使式 (3.12) 成立, 只要保证 $\frac{2\tau \sin \tau \omega}{\omega b_i} d_i < 1$, 即

$$\frac{d_i \tau}{b_i} < \frac{\omega \tau}{2\alpha \sin \omega \tau}. \quad (3.13)$$

令 $G_{i0} = \frac{(1-\alpha)+\alpha e^{-j\tau\omega}}{j\omega b_i} d_i$ 的 Nyquist 曲线与复平面负实轴交点, 可得 ω_{i0} 满足

$$(1-\alpha) + \alpha \cos \tau \omega_{i0} = 0. \quad (3.14)$$

对式 (3.14) 移项整理, 即得

$$\cos \tau \omega_{i0} = 1 - \frac{1}{\alpha} = \left(\frac{\alpha-1}{\alpha} \right), \quad (3.15)$$

$$\frac{1}{\alpha} = 1 - \cos \tau \omega_{i0} = 2 \sin^2 \frac{\tau \omega_{i0}}{2}. \quad (3.16)$$

对式 (3.15) 求解, 得

$$\tau \omega_{i0} = \arccos \frac{\alpha-1}{\alpha}. \quad (3.17)$$

综合 (3.13)、(3.16)、(3.17) 得

$$\frac{d_i \tau}{b_i} < \frac{\tau \omega_{i0}}{2} \tan \frac{\tau \omega_{i0}}{2}, \quad (3.18)$$

即基于二部图的多智能体系统满足条件 (3.18) 将最终渐近稳定达到平衡点 $\underbrace{[\beta, \beta, \dots, \beta]}_r, \underbrace{-\beta, -\beta, \dots, -\beta}_{n-r}^T$.

下面证明: $\beta = \sum_{i=1}^r b_i x_i(0) - \sum_{i=r+1}^n b_i x_i(0)$.

由决策函数: $y = \text{Wave}^*(x) = \sum_{i=1}^r b_i x_i(t) - \sum_{i=r+1}^n b_i x_i(t)$, 可得

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \sum_{i=1}^r b_i \dot{x}_i(t) - \sum_{i=r+1}^n b_i \dot{x}_i(t) \\ &= - \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^n a_{ij} ((1-\alpha)(x_i(t) + x_j(t)) + \alpha(x_i(t-\tau) + x_j(t-\tau))) \\ &\quad + \sum_{i=r+1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} ((1-\alpha)(x_i(t) + x_j(t)) + \alpha(x_i(t-\tau) + x_j(t-\tau))) \\ &= - \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^n a_{ij} ((1-\alpha)(x_i(t) + x_j(t))) \\ &\quad + \sum_{i=r+1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} ((1-\alpha)(x_i(t) + x_j(t))) \\ &\quad - \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^n a_{ij} (\alpha(x_i(t-\tau) + x_j(t-\tau))) \\ &\quad + \sum_{i=r+1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} (\alpha(x_i(t-\tau) + x_j(t-\tau))) \\ &= (1-\alpha)[1, 1, \dots, 1] \mathbf{LX}(t) + \alpha[1, 1, \dots, 1] \mathbf{LX}(t-\tau), \end{aligned} \quad (3.19)$$

其中 $\mathbf{X}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T$, $\mathbf{X}(t-\tau) = [x_1(t-\tau), x_2(t-\tau), \dots, x_n(t-\tau)]^T$.

由引理 4 得: $[1, 1, \dots, 1]L\mathbf{X}(t) = 0$, $[1, 1, \dots, 1]L\mathbf{X}(t-\tau) = 0$, 所以 $\dot{y} = 0$, 即决策函数值为常数. 设 x^* 为系统渐近稳定点, 则 $x^* = [\underbrace{\beta, \beta, \dots, \beta}_r, \underbrace{-\beta, -\beta, \dots, -\beta}_{n-r}]^T$, $\text{Wave}^*(x^*) =$

$$y(x^*) = \sum_{i=1}^r b_i(\beta) - \sum_{i=r+1}^n b_i(-\beta) = \beta.$$

设 $x(0) = [x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0)]^T$ 为系统初始状态, 则

$$\text{Wave}^*x(0) = y(x(0)) = \sum_{i=1}^r b_i x_i(0) - \sum_{i=r+1}^n b_i x_i(0).$$

由于决策函数值为常数, 所以 $\text{Wave}^*(x^*) = \text{Wave}^*(x(0))$, 即

$$\beta = \sum_{i=1}^r b_i x_i(0) - \sum_{i=r+1}^n b_i x_i(0).$$

定理 1 得证.

注 1 当 $\alpha = 1$ 时代入 (3.17), 整理得,

$$\omega_{i0}\tau = \arccos \frac{\alpha - 1}{\alpha} = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}. \quad (3.20)$$

将 (3.20) 结果代入 (3.18) 得

$$\frac{d_i\tau}{b_i} < \frac{\tau\omega_{i0}}{2} \tan \frac{\tau\omega_{i0}}{2} = \frac{\pi}{4}, \quad (3.21)$$

即当 $u_i(t) = -\frac{1}{b_i} \sum_{j=1}^n a_{ij}(x_j(t-\tau) + x_i(t-\tau))$ 时, 可得 (2.1) 式多智能体系统加权分组一致性收敛的一个充分条件 $\frac{d_i\tau}{b_i} < \frac{\pi}{4}$, 与文献 [19] 中定理 3 结论一致.

注 2 当 $\alpha = 0$ 时, 即 $u_i(t) = -\frac{1}{b_i} \sum_{j=1}^n a_{ij}(x_j(t) + x_i(t))$, 参照文献 [19] 可知, 不含时延多智能体系统可实现加权分组一致性.

推论 1 对于多智能体系统 (2.1), 其网络拓扑为具有 n 个节点的连通二部图, 如果各智能体具有不同时延,

$$u_i(t) = -\frac{1}{b_i} \sum_{j=1}^n a_{ij}((1-\alpha)(x_i(t) + x_j(t)) + \alpha(x_i(t-\tau_i) + x_j(t-\tau_{ij}))), \quad (3.22)$$

其中 τ_i, τ_{ij} 分别为输入时延和通信时延. 对于 $\forall i \in I$, 有 $\frac{d_i\tau_i}{b_i} < \frac{\tau\omega_{i0}}{2} \tan(\frac{\tau\omega_{i0}}{2})$, 则系统实现加权分组一致性. 其中 ω_{i0} 为 $G_i(j\omega) = \frac{(1-\alpha)+\alpha e^{-j\tau_i\omega}}{j\omega b_i} d_i$ 的 Nyquist 曲线与复平面负实轴交点.

注 3 参照定理 1 的证明方法不难证明推论 1 结论, 不过由于各智能体时延值不同会对分组一致性收敛状态值带来影响, 推论 1 不能得出 $\beta = \sum_{i=1}^r b_i x_i(0) - \sum_{i=r+1}^n b_i x_i(0)$. 另外, 由 (3.20) 和 (3.21) 两式可知, 定理 1 中时延 τ 范围与比重 α 存在依赖关系, 可以调整比重参数 α 调整 τ 设置范围, 对于 α 与 τ 之间具体关系有

推论 2 定理 1 中加权分组一致性充分条件中的多智能体输入时延 τ 选取范围是控制算法 (2.2) 中当前状态和时延状态调整权重 α 在区间 $(\frac{1}{2}, 1]$ 单调递减函数.

证 设 $f(x) = \frac{\pi}{2} \tan \frac{\pi}{2}$, 则 $f(x)$ 单调递增函数; 设 $x = g(\alpha) = \tau\omega_{i0} = \arccos \frac{(\alpha-1)}{\alpha}$, 有

$$\dot{x} = \dot{g}(\alpha) = \left(\arccos \frac{\alpha-1}{\alpha} \right)' = -\frac{1}{\alpha\sqrt{2\alpha-1}}.$$

当 $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$ 时, $g(\alpha) < 0$, 可证明 $g(\alpha)$ 为单调递减函数, 则复合函数 $f(g(\alpha)) = \frac{\tau\omega_{i0}}{2} \tan \frac{\tau\omega_{i0}}{2}$ 为权重 α 在区间 $(\frac{1}{2}, 1]$ 单调递减函数, 推论 2 得证.

基于推论 2 可知, 实际应用中可以降低控制比重 α 来增加 τ 取值最大上界.

例如当 $\alpha = \frac{2}{3}$ 时代入式 (3.17), 整理得

$$\omega_{i0}\tau = \arccos \frac{\alpha - 1}{\alpha} = \arccos \frac{-1}{2} = \frac{2\pi}{3}. \quad (3.23)$$

将 (3.23) 结果代入 (3.18) 得

$$\frac{d_i\tau}{b_i} < \frac{\tau\omega_{i0}}{2} \tan \frac{\tau\omega_{i0}}{2} = \frac{\sqrt{3}\pi}{3}. \quad (3.24)$$

比较式 (3.21) 和式 (3.24) 可知, 降低比重 α , 增加了多智能体加权分组一致性时延 τ 最大上界.

4 计算机数值仿真

为了验证本文结论正确性和有效性, 采用文献 [19] 包含 5 个智能体的多智能系统进行仿真实验, 系统拓扑如下图 1.

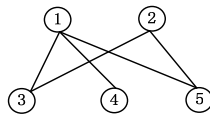


图 1 多智能体二部图拓扑图

(Figure 1 Undirected bipartite topology graph)

设各连接边的权重为 1, 其余各连接边的权重为 0, 初始条件 $x(0) = [12, -10, -8, -7, 6]^T$, 控制分量参数 $B = \text{diag}\{0.25, 0.2, 0.3, 0.1, 0.15\}$, 则有: $d_1 = 3, d_2 = 2, d_3 = 2, d_4 = 1, d_5 = 2$, $\max(\frac{d_i}{b_i}) = 13.32$.

当权重参数 $\alpha = 1$, 则控制算法 $u_i(t) = -\frac{1}{b_i} \sum_{j=1}^n a_{ij}(x_j(t-\tau) + x_i(t-\tau))$, 由式 (3.21) 可知, 输入时延调节范围为 $0 < \tau < 0.06$, 系统加权分组一致收敛到 $[3.2, 3.2, -3.2, -3.2, -3.2]^T$, 系统仿真结果如图 2.

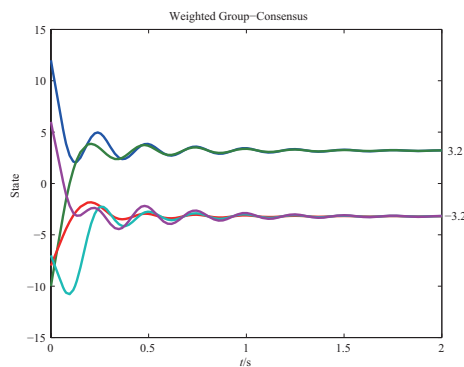


图 2 $\alpha = 1, \tau = 0.06$ 智能体状态呈现分组一致性

(Figure 2 $\alpha = 1, \tau = 0.06$ group consensus of multi-agents)

如果 $\tau > 0.06$, 不妨取 $\tau = 0.09$, 多智能体系统状态发散, 控制算法失效, 系统仿真结果如图 3.

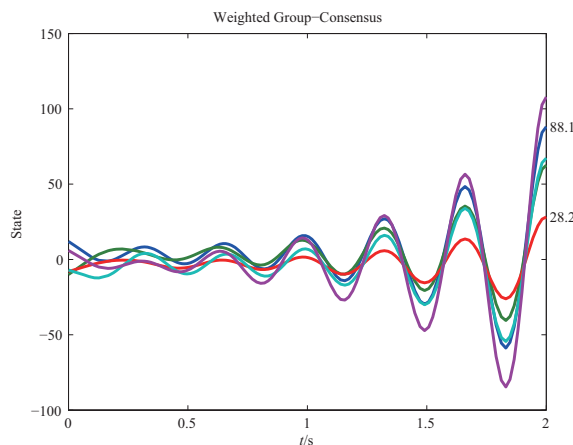


图 3 $\alpha = 1, \tau = 0.09$ 智能体状态呈现发散
(Figure 3 $\alpha = 1, \tau = 0.09$ divergence of multi-agents)

当权重参数 $\alpha = \frac{2}{3}$, 则控制算法 $u_i(t) = -\frac{1}{b_i} \sum_{j=1}^n a_{ij} (\frac{1}{3}(x_i(t) + x_j(t)) + \frac{2}{3}(x_i(t - \tau) + x_j(t - \tau)))$, 由 $\max(\frac{d_i}{b_i}) = 13.32$ 和式 (3.24) 可知, $0 < \tau < 0.135$, 取 $\tau = 0.13$ 系统仿真结果如图 4.

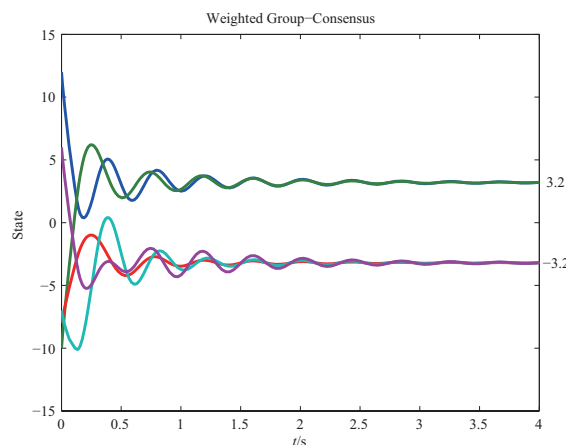


图 4 $\alpha = \frac{2}{3}, \tau = 0.13$ 智能体状态呈现分组一致性
(Figure 4 $\alpha = \frac{2}{3}, \tau = 0.13$ group consensus of multi-agents)

由图 2 和图 4 仿真结果可知, 通过降低控制算法权重参数 α 大小, 可以改进多智能体系统时延 τ 最大上界并实现分组一致性, 即验证了本文定理 1 正确性及推论 2 结论的正确性; 控制算法权重参数 α 选取越大, 要保证系统实现加权分组一致, 输入时延 τ 可选取范围越小; 反之, 适当降低控制算法权重参数可以扩大输入时延 τ 可选取范围.

5 结 论

本文对基于拓扑结构为二部图的多智能体系统, 设计了由当前状态和时延状态按不同权重构成的控制算法, 给出的系统实现加权两分组一致性充分条件, 提供了一种改进加权两分组一致性时延最大上界方法; 论述了多智能体系统加权分组一致性中时延最大上界与时延状态权重参数在确定区间上具有单调递减函数关系. 在实际应用中通过适当降低控制算法权重参数值可以增加系统时延调节范围并保障系统加权两分组一致性; 最后通过数字仿真与现有文献结果进行对比研究, 验证了结论的正确性和有效性. 不过, 本文主要研究拓扑结构为二部图的一阶系统的两分组一致性, 对于多分组或任意分组时延多智能系统还需继续探索.

参 考 文 献

- [1] Dimarogonas D V, Tsiotras P, Kyriakopoulos K J. Leader-follower cooperative attitude control of multiple rigid bodies. *Systems and Control Letters*, 2009, **58**(6): 429–435.
- [2] Li S H, Du H B, Lin X Z. Finite-time consensus algorithm for multi-agent system with double-integrator dynamics. *Automatica*, 2011, **47**(8): 1706–1712.
- [3] 蒋方翠. 具有非对称通信时滞和切换拓扑的高阶多智能体系统的一致. 系统科学与数学, 2015, **35**(3): 258–269.
(Jiang F C. High-order consensus for multi-agent systems with switching topologies asymmetric communication delays. *Journal of Systems Science and Mathematical Sciences*, 2015, **35**(3): 258–269.)
- [4] Li S H, Wang X Y. Finite-time consensus and collision avoidance control algorithms for multiple AUVs. *Automatica*, 2013, **49**(11): 3359–3367.
- [5] Wang X Y, Li S H, Shi P. Distributed finite-time containment control for double-integrator multi-agent systems. *IEEE Trans. on Cybernetics*, 2014, **44**(9): 1518–1528.
- [6] 褚福芳, 杨洪勇. 具有通信时延的二阶多自主体系统的采样控制. 系统科学与数学, 2015, **35**(3): 308–316.
(Chu F F, Yang H Y. Sampling control of second order multi-agent system with time-delays. *Journal of Systems Science and Mathematical Sciences*, 2015, **35**(3): 308–316.)
- [7] Jadbabaie A, Lin J, Morse A S. Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules. *IEEE Trans. On Automatic Control*, 2003, **48**(6): 988–1001.
- [8] Olfati-Saber R. Ultrafast consensus in small — World networks. Proceedings of America Control Conference, 2005, 8179–8184.
- [9] Tian Y P, Liu C L. Consensus of multi-agent systems with diverse input and communication delays. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 2008, **53**(9): 2122–2128.
- [10] 张庆杰, 沈林成, 朱华勇. 具有多个通信时延的一类二阶多智能体系统平均一致性. 控制与决策, 2011, **26**(10): 1485–1492.
(Zhang Q J, Shen L C, Zhu H Y. Average consensus of a class of second order multi-agent systems with multiple communication delays. *Control and Decision*, 2011, **26**(10): 1485–1492.)
- [11] 纪良浩, 廖晓峰. 具有不同时延的多智能体系统一致性分析. 物理学报, 2012, **61**(15): 150202–7.
(Ji L H, Liao X F. Consensus analysis of multi-agent system with multiple time delays. *Acta Physica Sinica*, 2012, **61**(15): 150202–7.)

- [12] 潘欢, 年晓红, 郭凌. 高阶时滞多智能体系统一致性控制. 控制理论与应用, 2013, **30**(7): 909–915.
(Pan H, Nian X H, Guo L. Consensus control of higher-order multi-agent systems with delays. *Control Theory & Applications*, 2013, **30**(7): 909–915.)
- [13] 俞辉, 蹇继贵, 王永骥. 多智能体时滞网络的加权平均一致性. 控制与决策, 2007, **22**(5): 558–561.
(Yu H, Jian J G, Wang Y J. Weighted average-consensus for networks of multi-agent with time delays. *Control and Decision*, 2007, **22**(5): 558–561.)
- [14] Godsil C, Royle G. Algebraic Graph Theory. New York: Springer, 2001.
- [15] Horn R, Johnson C. Matrix Analysis. New York: Cambridge University Press, 1985.
- [16] 纪良浩, 廖晓峰, 刘群. 时延多智能体系统分组一致性分析. 物理学报, 2012, **61**(22): 5–12.
(Ji L H, Liao X F, Liu Q. Group consensus analysis of multi-agent systems with delays. *Acta Physica Sinica*, 2012, **61**(22): 5–12.)
- [17] Wang Q, Wang Y Z. Cluster synchronization of a class of multi-agent systems with a bipartite graph topology. *Science China Information Sciences*, 2014, **57**(1): 1–11.
- [18] 王强, 王玉振, 杨仁明. 一类多智能体系统分组一致控制协议的设计与分析. 控制与决策, 2013, **28**(3): 369–374.
(Wang Q, Wang Y Z, Yang R M. Design and analysis of group-consensus protocol for a class of multi-agent systems. *Control and Decision*, 2013, **28**(3): 369–374.)
- [19] 王玉振, 杜英雪, 王强. 多智能体时滞和无时滞网络的加权分组一致性分析. 控制与决策, 2015, **30**(11): 1993–1998.
(Wang Y Z, Du Y X, Wang Q. Weighted group-consensus analysis of multi-agent systems with and without time-delay network. *Control and Decision*, 2015, **30**(11): 1993–1998.)
- [20] Yu J Y, Wang L. Group consensus of multi-agent systems with undirected information exchange. *Int. J. of Systems Science*, 2012, **43**(2): 334–348.
- [21] 宋海裕, 俞立, 胡鸿翔. 牵制控制下的多智能体系统群一致性. 控制理论与应用, 2012, **29**(6): 765–772.
(Song H Y, Yu L, Hu H X. Group consensus in multi-agent systems via pinning control. *Control Theory & Applications*, 2012, **29**(6): 765–772.)
- [22] 袁玩贵, 屈百达. 多智能体系统通信拓扑最优设计. 控制理论与应用, 2016, **33**(2): 228–232.
(Yuan W G, Qu B D. The optimal design for interaction topology of multi-agent systems. *Control Theory & Applications*, 2016, **33**(2): 228–232.)