第六次课程作业

张浩然 023082910001

2023 年 11 月 8 日

题目 1. 33. 在欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 中求一个超平面 W, 使得向量 e_1+e_2 在 W 中的最佳近似向量为 e_2.

解答. $n=2$ 时,$W=e_2$

$n>2$ 时, 要求 e_1 与 W 正交, 因此 W 是一个正交于 e_1 并且包含 e_2 的超平面.

题目 2. 37. 设 α_0 是欧式空间 V 中的单位向量, $\sigma(\alpha)=\alpha-2(\alpha,\alpha_0)\alpha_0, \alpha\in V$. 证明

(1). σ 是线性变换;

(2). σ 是正交变换.

解答. (1). 证明 σ 是线性变换: 要证明 σ 是线性变换, 我们需要证明两个性质: 加法性 $\sigma(\alpha+\beta)=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta)$ 和齐次性 $\sigma(c\alpha)=c\sigma(\alpha)$, 对所有 $\alpha,\beta\in V$ 和所有标量 c 成立.

加法性证明:

$\sigma(\alpha+\beta)=(\alpha+\beta)-2((\alpha+\beta),\alpha_0)\alpha_0$

展开并重新排列: $\sigma(\alpha+\beta)=\alpha-2(\alpha,\alpha_0)\alpha_0+\beta-2(\beta,\alpha_0)\alpha_0$

这可以重写为: $\sigma(\alpha+\beta)=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta)$

齐次性证明:

$\sigma(c\alpha)=c\alpha-2(c\alpha,\alpha_0)\alpha_0$

因 α_0 是单位向量, 提取 c: $\sigma(c\alpha)=c(\alpha-2(\alpha,\alpha_0)\alpha_0)$

这可以重写为: $\sigma(c\alpha)=c\sigma(\alpha)$

(2). 证明 σ 是正交变换:

正交变换是指保持向量内积不变的变换, 即 $(\sigma(\alpha)\sigma(\beta))$ =(α,β), 对所有 α,$\beta\in V$.

我们需要证明 σ 保持任意两个向量的内积不变。

由于 α_0 是单位向量,$(\alpha_0,\alpha_0)=1$.

考虑 $(\sigma(\alpha),\sigma(\beta))$:

$(\sigma(\alpha),\sigma(\beta))=((\alpha-2(\alpha,\alpha_0)\alpha_0)(\beta-2(\beta,\alpha_0)\alpha_0))$

展开内积:$(\sigma(\alpha),\sigma(\beta))=(\alpha,\beta)-2(\alpha,\alpha_0)(\alpha_0,\beta)-2(\beta,\alpha_0)(\alpha,\alpha_0)+4(\alpha,\alpha_0)(\beta,\alpha_0)$

根据 α_0 的单位性质和内积的分配律, 我们可以简化为:$(\sigma(\alpha)\sigma(\beta))$ =(α,β)

从而证明了 σ 保持向量内积不变, 所以它是一个正交变换。

题目 3. 38. 证明: 欧氏空间 V 的线性变换 σ 是反对称变换 (即 $(\sigma(\alpha),\beta)=-(\alpha,\sigma(\beta)))\Leftrightarrow\sigma$ 在 V 的标准正交基下的矩阵是反对称矩阵.

解答. 证明: 设 σ 在 V 的标准正交基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的矩阵是 $A=(a_{ij})$. 则 $\sigma(\alpha_i)=\sum_{k=1}^n a_{ki}\alpha_k, 1\leqslant i\leqslant n$.

于是 $(\sigma(\alpha_i),\alpha_j)=\sum_{k=1}^n a_{ki}(\alpha_k,\alpha_j)=a_{ji},(\alpha_i,\sigma(\alpha_j))=\sum_{k=1}^n a_{kj}(\alpha_i,\alpha_k)=a_{ij}$. 因此 σ 是反对称变换当且仅当 a_{ji} =- a_{ij} , 即 A 是反对称矩阵。

题目 4. 39. 设 σ 是实平面 $\mathbb{R}^2$ 上的线性变换, 其关于标准基的矩阵为

P=$\begin{pmatrix} c & s \\ s & -c \end{pmatrix}$,

其中 $c^2+s^2=1$. 证明 σ 是反射变换, 并计算其对称轴.

解答.

1. 证明 σ 是一个反射变换:

   - 对于变换 σ 的任意向量 $\alpha=(x,y)$，变换后的向量是 $\sigma(\alpha)=(cx+sy,sx-cy)$。
   - 如果我们取 α 为 (c,s)，则 $\sigma(\alpha)=(c^2+s^2,sc-sc)=(1,0)=\alpha$。
   - 如果我们取 α 为 $(-s,c)$, 则 $\sigma(\alpha)=(-cs-sc,s^2-c^2)=(0,-1)=-\alpha$。
   - 这表明 σ 实际上是沿着由 (c,s) 定义的直线的反射。

2. 计算对称轴:

   - 对称轴是保持不变的直线，所以它必须与保持不变的向量 (c,s) 平行。
   - 对称轴的方程可以写为 $y=mx+b$，其中斜率 m 是向量 $(-s,c)$ 的 y 分量除以 x 分量，即 $m=\frac{c}{-s}$。
   - 由于 (c,s) 在变换下保持不变，它也位于对称轴上，因此我们可以用它来找到 b。
   - 我们可以设置点 $(0,s)$ 和 $(c,0)$ 在对称轴上，从而得到 $b=s$ 和 $b=0$。综合这两点，我们得到对称轴的方程为 $y=\frac{c}{-s}x+s$。