第七次课程作业

张浩然 023082910001

2023 年 11 月 15 日

题目 1. 43. 证明 $Householder$ 变换 H_v 是关于超平面 $v^{\perp}$ 的反射, 从而是正交变换. 试画出三维 $Householder$ 变换的示意图.

解答. 设 $u \in v^{\perp}$, 则 $u \cdot v = 0, H_v(u) = u$

设 w 是超平面外的任意向量, 则 $w = u + \lambda v$, 其中 $\lambda \in \mathbb{R}$, 则 $H_v(w) = -w$

因此 $Householder$ 变换是镜面反射正交变换.

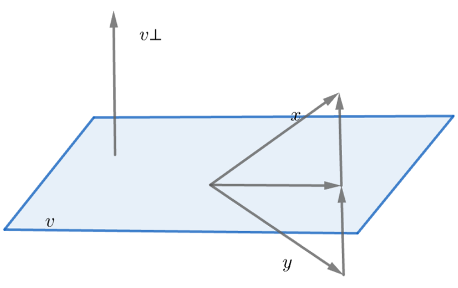

图 1: 三维图示

题目 2. 2. 设 A 为第一章**例 1.2.2** 中的矩阵,

(1) 利用满秩分解和 $Sylvester$ 降幂公式求 A 的特征多项式与 A^6;

(2) 求与 A 相似的分块对角矩阵, 使得每块恰有唯一的特征值.

题目 2 的注记.

例 1.2.2 $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 2 & -2 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

例 1.2.3 $A=\begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

解答. ps. **例 1.2.2** 无法使用降幂公式，应该为**例 1.2.3**

(1). 由于

$$A=\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \\ -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}=LR$$

故

$|\lambda I-A|=|\lambda I-LR|=\lambda^2|\lambda I-RL|=\lambda^2(\lambda+1)(\lambda+2).$

$A^n=(LR)^n=L(RL)^{n-1}R$

所以 $A^6=\begin{pmatrix} 96 & -95 & 95 & -96 \\ 64 & 63 & -63 & -64 \\ 64 & -64 & 64 & -64 \\ 32 & -32 & 32 & -32 \end{pmatrix}.$

(2). 计算 $Jordan$ 标准型得 $J=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&-2&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$.

题目 3. 3. 设 $\alpha=(a_1,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}},\beta=(b_1,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$, x 为任意常数, $A=xI_n+\alpha\beta^{\mathrm{T}}$.

(1) 直接计算行列式 $|A|$;

(2) 利用 $Sylvester$ 降幂公式计算行列式 $|A|$;

(3) 利用特征值计算行列式 $|A|$.

解答. (1). $A=|xI_n+\alpha\beta^T|=\begin{vmatrix}a_1b_1+x&a_1b_2&a_1b_3&\cdots&a_1b_n\\a_2b_1&a_2b_2+x&a_2b_3&\cdots&a_2b_n\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&\vdots\\a_nb_1&a_nb_2&a_nb_3&\cdots&a_nb_n+x\end{vmatrix}=$
$\begin{vmatrix}1&b_1&b_2&b_3&\cdots&b_n\\0&a_1b_1+x&a_1b_2&a_1b_3&\cdots&a_1b_n\\0&a_2b_1&a_2b_2+x&a_2b_3&\cdots&a_2b_n\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&\vdots\\0&a_nb_1&a_nb_2&a_nb_3&\cdots&a_nb_n+x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&b_1&b_2&b_3&\cdots&b_n\\-a_1&x&0&0&\cdots&0\\-a_2&0&x&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&\vdots\\-a_n&0&0&0&\cdots&x\end{vmatrix}=$
$x^n(1+\frac{\beta^T\alpha}{x})$

(2).$|A|=\left|xI_n+\alpha\beta^T\right|=x^{n-1}\left|x+\beta^T\alpha\right|=x^{n-1}\left(x+\beta^T\alpha\right)$

(3). 矩阵 A 的特征值有 $n-1$ 个 x 一个 $x+\beta^T\alpha$, 所以 $|A|=x^{n-1}(x+\beta^T\alpha)$

题目 4. 5.(1) 举例说明 $Schur$ 三角化定理在实数域上不成立.

解答. $\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$

题目 5. 11. 求下列矩阵的最小多项式并指出其中可以对角化的矩阵:

(1) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$; (3) $\begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$; (4) $\begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$.

解答. (1) $|\lambda I - A| = (\lambda-3)(\lambda-5) - 8 = (\lambda-1)(\lambda-7)$, 所以最小多项式为 $(\lambda-1)(\lambda-7)$ 无重根, 可对角化.

(2) 最小特征多项式 $(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-1)$ 无重根，可对角化.

(3) 最小特征多项式 $(\lambda+2)(\lambda-1)$ 无重根, 可对角化.

(4) 最小特征多项式 $(\lambda+2)(\lambda-1)^2$ 有重根, 不可对角化.