第二次课程作业

张浩然 023082910001

2023 年 10 月 11 日

题目 1. 21. 证明**例 1.4.2** 中的 $(V, \oplus, \cdot)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的线性空间.

(**例 1.4.2** 设 $V = \{$ 所有正实数 $\}$，$\mathbb{F} = \mathbb{R}$ 是实数域. 定义 V 中的加法运算为 $x \oplus y = xy$(即通常的实数乘法)；定义 V 中元素与 $\mathbb{F}$ 中数的数乘运算为 $k \cdot x = x^k$(通常的幂运算). 那么 $(V, \oplus, \cdot)$ 是实线性空间.)

解答. 封闭性: 对于 V 中的任意元素 x, y, 及实数 k, 有 $x \oplus y = xy \in V$, 且 $k \cdot x = x^k \in V$, 所以满足封闭性。

交换律: 对于 V 中的任意元素 x, y, 及实数 k, 有 $x \oplus y = xy = yx = y \oplus x$, 且 $k \cdot x = x^k = (k \cdot x)$, 所以满足交换律。

结合律: 对于 V 中的任意元素 x, y, z, 及实数 k, h, 有 $x \oplus (y \oplus z) = x(yz) = (xy)z = (x \oplus y) \oplus z$, 且 $k \cdot (h \cdot x) = (x^h)^k = x^{hk} = (kh) \cdot x$, 所以满足结合律。

单位元素: 取 $1 \in V$, 对于任意 $x \in V$, 有 $x \oplus 1 = x1 = x$, 且 $1 \cdot x = x^1 = x$, 所以 1 是加法单位元和乘法单位元。

逆元素: 对于任意 $x \in V$, 取 x^{-1} 为其逆元素, 有 $x \oplus x^{-1} = xx^{-1} = 1$, 且 $x^{-1} \cdot x = x^{x^{-1}} = 1$, 所以满足逆元素存在性。

乘法封闭性: 对于任意 $x \in V$, 及实数 k, h, 有 $k \cdot (h \cdot x) = (x^h)^k = x^{hk} = (kh) \cdot x$, 所以满足乘法封闭性。

综上所述, 该集合 V 满足线性空间的所有条件, 所以是 $\mathbb{R}$ 上的一个线性空间。

题目 2. 27. 证明过渡矩阵必是可逆矩阵.

解答. 过渡矩阵是两组基之间的变换矩阵，每组基中的向量是线性无关的，所以基构成的矩阵是满秩的. 因此对于 $A = PB$，其中 A,B 分别是两个基构成的矩阵，P 是过渡矩阵. 显然 A,B 是可逆的，所以 $AB^{-1} = P$. 又因为 A,B^{-1} 可逆，因此 P 可逆。

题目 3. 30. 对 $x = (x_1, x_2)^T, y = (y_1, y_2)^T$, 规定

$$(x, y) = ax_1y_1 + bx_1y_2 + bx_2y_1 + cx_2y_2$$

证明 (x, y) 是 $\mathbb{R}^2$ 的内积 $\Leftrightarrow a > 0, ac > b^2$.

解答. 设 $x = (x_1, x_2)^T$,$y = (y_1, y_2)^T$, 定义内积 $(x, y) = ax_1y_1 + bx_1y_2 + by_1x_2 + cx_2y_2$

(1) 正定性: 当 $x \neq 0$ 时,$(x, x) = ax_1^2+2bx_1x_2+cx_2^2 > 0 \Leftrightarrow a > 0, ac > b^2$

当 $x = 0$ 时,$(x, x) = 0$

所以满足正定性。

(2) 对称性: $(x, y) = ay_1x_1 + by_2x_1 + bx_2y_1 + cy_2x_2 = (y, x)$

所以满足对称性。

(3) 线性性: 设 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 则 $(\alpha x + \beta y, z) = a(\alpha x_1 + \beta y_1)z_1 + b(\alpha x_1 + \beta y_1)z_2+b(\alpha x_2+\beta y_2)z_1+c(\alpha x_2+\beta y_2)z_2 = \alpha(ax_1z_1+bx_1z_2+bx_2z_1+cx_2z_2)+\beta(ay_1z_1 + by_1z_2 + by_2z_1 + cy_2z_2) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$

$(c(\alpha x+\beta y), z) = cac(\alpha x_1+\beta y_1)z_1+cbc(\alpha x_1+\beta y_1)z_2+cbc(\alpha x_2+\beta y_2)z_1+c^2c(\alpha x_2 + \beta y_2)z_2 = c\alpha(ax_1z_1 + bx_1z_2 + bx_2z_1 + cx_2z_2) + c\beta(ay_1z_1 + by_1z_2 + by_2z_1 + cy_2z_2)$

$= c\alpha(x,z) + c\beta(y,z)$

所以满足线性性。

综上所述，(x,y) 是 $\mathbb{R}^2$ 的内积 $\Leftrightarrow a>0, ac>b^2$.

题目 4. 31. 设 $V=\{a\cos t+b\sin t:$ 其中 a,b 为任意实数 $\}$ 是实二维线性空间. 对任意 $f,g\in V$, 定义

$$(f,g)=f(0)g(0)+f(\frac{\pi}{2})g(\frac{\pi}{2}).$$

证明 (f,g) 是 V 上的内积，并求 $h(t)=3\cos(t+7)+4\sin(t+9)$ 的长度.

解答. 1、正定性：当 $f\neq 0$ 时，$(f,f)=a^2+b^2\geq 0$; 当 $f=0$ 时，$(f,f)=0$

2、对称性：$(f,g)=f(0)g(0)+f(\frac{\pi}{2})g(\frac{\pi}{2})=a_f\cos ta_g\cos t+b_f\sin tb_g\sin t=(g,f)$

3、线性性：$(\alpha f+\beta g,h)=\alpha a_f a_h+\beta a_g a_h+\alpha b_f b_h+\beta b_g b_h=\alpha(a_f a_h+b_f b_h)+\beta(a_g a_h+b_g b_h)=\alpha(f,h)+\beta(g,h)$

$h(0)=3\cos 7+4\sin 9, h(\frac{\pi}{2}=4cos9-3sin7)$

$(h,h)=h(0)^2+h(\frac{\pi}{2})^2=25+24\sin 2$

因此 $h(t)$ 的长度为 $\sqrt{25+24\sin 2}$