第八次课程作业

张浩然 023082910001

2023 年 11 月 22 日

题目 1. 6. 设 a 是复常数, $V=\{\mathrm{e}^{ax}f(x):f(x)\in\mathbb{C}_n[x]\}$ 是 n 维复线性空间,

(1) 证明求导运算 $\partial:\alpha\mapsto\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x}$ 是 V 上的线性变换;

(2) 求 ∂ 的 *Jordan* 标准形.

解答. (1) 设 $v=e^{ax}f(x)$ 和 $w=e^{ax}g(x)$ 为 V 中的任意两个元素,

其中 $f(x),g(x)\in C^n[x]$, c 为任意复数。

首先计算 $\partial(v)=\partial\left(e^{ax}f(x)\right)$: $\partial(v)=\frac{d}{dx}\left(e^{ax}f(x)\right)=e^{ax}\frac{df(x)}{dx}+ae^{ax}f(x)$

类似地, 对 w 应用 $\partial:\partial(w)=\frac{d}{dx}\left(e^{ax}g(x)\right)=e^{ax}\frac{dg(x)}{dx}+ae^{ax}g(x)$

现在计算 ∂ 在 $cv+w$ 上的作用:

$$\partial(cv+w)=\partial\left(ce^{ax}f(x)+e^{ax}g(x)\right)$$
$$=\partial\left(e^{ax}(cf(x)+g(x))\right)$$
$$=e^{ax}\frac{d(cf(x)+g(x))}{dx}+ae^{ax}(cf(x)+g(x))$$
$$=ce^{ax}\frac{df(x)}{dx}+e^{ax}\frac{dg(x)}{dx}+ace^{ax}f(x)+ae^{ax}g(x)$$
$$=c\left(e^{ax}\frac{df(x)}{dx}+ae^{ax}f(x)\right)+\left(e^{ax}\frac{dg(x)}{dx}+ae^{ax}g(x)\right)$$
$$=c\partial(v)+\partial(w)$$

由此证明 ∂ 满足线性变换的定义条件。

(2)V 的一组基为 $\{e^{ax},xe^{ax},\cdots,x^{n-1}e^{ax}\}$

∂ 在这组基下的矩阵为:

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix}$$

由于 A 的特征多项式为 $(\lambda - a)^n$，因此 A 的特征值为 a，且其代数重数为 n，几何重数为 1，因此 A 的 $Jordan$ 标准型为:

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix}$$

题目 2. 18. (本题是幂零矩阵的 $Jordan$ 标准形定理的证明中, 当数 $a = \alpha_1^{\mathrm{T}} e_1 \neq 0$ 时的实际计算.)

设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

计算 A 的 $Jordan$ 标准形.

解答.

$A^3 = 0, r(A) = 3$

因此 A 的 $Jordan$ 标准型最大的 $Jordan$ 块为 3 阶，有 2 块 $Jordan$ 块.

根据幂零矩阵的 $Jordan$ 标准型定理，A 的 $Jordan$ 标准型为 $J_3 \oplus J_2$

题目 3. 27. 求下列矩阵的 $Jordan$ 标准形:

$$(1)\begin{pmatrix}0&1&0\\-4&4&0\\-2&1&2\end{pmatrix};(2)\begin{pmatrix}2&6&-15\\1&1&-5\\1&2&-6\end{pmatrix};(3)\begin{pmatrix}9&-6&-2\\18&-12&-3\\18&-9&-6\end{pmatrix}$$

解答. (1) A 的特征多项式为 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&-1&0\\4&\lambda-4&0\\2&-1&\lambda-2\end{vmatrix}=\lambda^3-6\lambda^2+12\lambda-8=(\lambda-2)^3$

$$A-2I=\begin{pmatrix}-2&1&0\\-4&2&0\\-2&1&0\end{pmatrix}$$

$r(A-2I)=1=r(J-2I)$

$$\therefore J=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

(2) 计算方法同 (1),$J=\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$

(3) 计算方法同 (1),$J=\begin{pmatrix}-3&1&0\\0&-3&0\\0&0&-3\end{pmatrix}$

题目 4. 28. 求下列矩阵的 $Jordan$ 标准形, 并求变换矩阵 P, 使 $P^{-1}AP=J$:

$$(1)\begin{pmatrix}-4&2&10\\-4&3&7\\-3&1&7\end{pmatrix};(2)\begin{pmatrix}3&2&1\\0&4&0\\-1&2&5\end{pmatrix};(3)\begin{pmatrix}2&2&2&1\\-1&-1&-3&-2\\1&2&5&3\\-1&-2&-4&-2\end{pmatrix}.$$

解答. (1) A 的特征多项式为 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda+4&-2&-10\\4&\lambda-3&-7\\3&-1&\lambda-7\end{vmatrix}=\lambda^3-6\lambda^2+12\lambda-8=(\lambda-2)^3$

$$A-2I=\begin{pmatrix}-6&2&10\\-4&1&7\\-3&1&5\end{pmatrix}$$

$$r(A-2I)=2=r(J-2I)$$

$$\therefore J=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP=J,P^{-1}(A-2I)P=(J-2I)$$

$$\therefore P=\begin{pmatrix}2&0&1\\1&1&-3\\1&0&0\end{pmatrix}$$

(2) 计算方法同 (1), $J=\begin{pmatrix}4&1&0\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix},P=\begin{pmatrix}-1&1&2\\0&0&1\\-1&0&0\end{pmatrix}$

(3) 计算方法同 (1), $J=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{pmatrix},P=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\-1&0&-2&0\\1&0&3&0\\-1&0&-3&1\end{pmatrix}$