第四次课程作业

张浩然 023082910001

2023 年 10 月 25 日

题目 1. 5. 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

求 A 的四个相关子空间.

解答. $(A, I) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{elementary transformation} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = (H_A, P)$

由此，$PA = H_A, r(A) = 2$

可知 A 前两列线性无关

因此

$R(A) = span[(1,0,1)^T, (1,1,3)^T]$

$R(A^T) = R(H_A^T) = span[(1,0,1)^T, (0,1,1)^T]$

$N(A) = N(H_A) = span[(1,1,-1)^T]$

$N(A^T) = \{x|xA = 0\} = span[(1,2,-1)^T]$

题目 2. 7. 设 V 是所有 n 阶实数矩阵按矩阵的加法和数乘作成的实线性空间，U 是 V 中所有迹为零的矩阵的集合. 证明 U 是 V 的子空间，并求 U 的维数和一个补空间.

解答.

证明. $\forall A, B \in U, tr(A+B) = tr(A) + tr(B) = 0$

$\therefore A + B \in U$

$\forall C \in U, \lambda \in \mathbb{F}, tr(\lambda C) = \lambda tr(C) = 0$

$\therefore \lambda C \in U$

$\therefore U$ 是 V 的子空间. □

$dim(V) = n^2$

由于 $trace = 0$ 是线性限制，因此 U 的自由度减小 1

$dim(U) = n^2 - 1$

考虑 $W = \{cI | c \in \mathbb{R}\}$

显然 W 是 V 的子空间，且 U 和 W 正交

$dim(W) = 1$

$dim(V) = dim(U) + dim(W)$

因此 W 即为所求子空间.

题目 3. 8. 设 V 是所有次数小于 n 的实系数多项式组成的实线性空间，$U = \{f(x) \in V : f(1) = 0\}$. 证明 U 是 V 的子空间，并求 V 的一个补空间.

解答.

证明. $\forall f_1, f_2 \in U, f_1(1) + f_2(1) = 0$

$\therefore f_1 + f_2 \in U$

$\forall f_3 \in U, \lambda \in \mathbb{F}, \lambda f_3(1) = 0$

$\therefore \lambda f_3 \in U$

因此 U 是 V 的一个子空间.

$\square$

设 $W: \{cx^n | c \in \mathbb{R}\}$

易知 W 是 V 的一个子空间

$dim(V) = n, dim(U) = n-1, dim(W) = 1$

$\therefore dim(V) = dim(U) + dim(W)$

因此 W 即为所求子空间.

题目 4. 9. 设 $U = \left[(1,2,3,6)^T, (4,-1,3,6)^T, (5,1,6,12)^T\right]$，$W = \left[(1,-1,1,1)^T, (2,-1,4,5)^T\right]$ 是 $\mathbb{R}^4$ 的两个子空间.

1. 求 $U \cap W$ 的基;
2. 扩充 $U \cap W$ 的基, 使其成为 U 的基;
3. 扩充 $U \cap W$ 的基, 使其成为 W 的基;
4. 求 $U + W$ 的基.

解答. (1). 令 $V = U + W$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & 6 & 1 & 4 \\ 6 & 6 & 12 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

经初等行变换后得

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \frac{7}{9} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -\frac{4}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由此得出 $(1,2,3,6)^T,(4,-1,3,6)^T,(1,-1,1,1)^T$ 是 V 的一组基.

$dim(V)=3$

易知 $dim(U)=2, dim(W)=2$

因此 $dim(U\cap W)=dim(U)+dim(W)-dim(V)=1$

因此要求 $U\cap W$ 的基，只需要求其一个非零向量即可；

设 $U=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3], W=[\beta_1,\beta_2]$

因此 β_2 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1$ 线性表示.

$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\beta_1=\beta_2$

方程组解为 $(\frac{7}{9},-\frac{4}{9},3)$

因此 $-3\beta_1+\beta_2=(-1,2,1,2)^T$ 是 $U\cap W$ 的基.

(2).$(-1,2,1,2)^T,(1,2,3,6)^T$

(3).$(-1,2,1,2)^T,(1,-1,1,1)^T$

(4).$(-1,2,1,2)^T,(1,2,3,6)^T,(1,-1,1,1)^T$

题目 5. 10. 设 $U=\{(x,y,z,w):x+y+z+w=0\}, W=\{(x,y,z,w):x-y+z-w=0\}$ 求 $U\cap W, U+W$ 的维数与基.

解答. $dim(U)=dim(W)=3$

设 $\alpha\in U\cap W$

$$\begin{cases} x+y+z+w=0 \\ x-y+z-w=0 \end{cases}$$

$\therefore U\cap W$ 的一组基为 $(1,0,-1,0),(0,1,0,-1)$

$\therefore dim(U\cap W)=2$

$\therefore dim(U+W)=4$

$\therefore U+W$ 的一组基为 $\mathbb{F}^4$ 的一组标准基.