第九次课程作业

张浩然 023082910001

2023 年 11 月 29 日

题目 1. 32. 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) 求 A 的特征值以及 A^{100}.

解答. $|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ -1 & \lambda & 1 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 1)$

$\therefore$, A 的特征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = i, \lambda_3 = -i$. $\exists P$ 使得 $A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix} P^{-1}$.

$$\therefore A^{100} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i^{100} & 0 \\ 0 & 0 & (-i)^{100} \end{pmatrix} P^{-1} = I$$

题目 2. 35. 如果矩阵 A 的特征多项式和最小多项式相同, 问 A 的 $Jordan$ 标准型有何特点.

解答. 设 A 的特征多项式为 $\prod_{i=1}^{k}=(\lambda-\lambda_i)^{a_i}$,$A$ 的最小多项式为 $\prod_{i=1}^{k}=(\lambda-\lambda_i)^{b_i}$.

a_i 为 A 的 $Jordan$ 标准型中特征值为 λ_i 的 $Jordan$ 块的个数,b_i 为 A 的 $Jordan$ 标准型中特征值为 λ_i 的 $Jordan$ 块的大小.

$a_i=b_i,\therefore A$ 每个不同的特征值只有一个 $Jordan$ 块.

题目 3. 39. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 7 & -16 & 8 \\ -16 & 7 & -8 \\ 8 & -8 & -5 \end{pmatrix}$.

(1) 求 A 的盖尔圆盘并利用对角相似变换改进之;

(2) 同构特征多项式计算 A 的特征值并与 (1) 比较.

解答. (1). $D_1:|\lambda-7|\le 24$

$D_2:|\lambda-7|\le 24$

$D_3:|\lambda+5|\le 16$

对 A 进行相似对角变换, $B=diag(b_1,b_2,b_3)Adiag(b_1^{-1},b_2^{-1},b_3^{-1})=\begin{pmatrix} 7 & -16\frac{b_1}{b_2} & 8\frac{b_1}{b_3} \\ -16\frac{b_2}{b_1} & 7 & -8\frac{b_2}{b_3} \\ 8\frac{b_3}{b_1} & -8\frac{b_3}{b_2} & -5 \end{pmatrix}$

B 的盖尔圆盘为

$D_1:|\lambda-7|\le 16\frac{b_1}{b_2}+8\frac{b_1}{b_3}$

$D_2:|\lambda-7|\le 16\frac{b_2}{b_1}+8\frac{b_2}{b_3}$

$D_3:|\lambda+5|\le 8\frac{b_3}{b_1}+8\frac{b_3}{b_2}$

我们可以使得 $b_1=b_2=1,b_3=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore D_1:|\lambda-7|\le 16+8\sqrt{2}$

$D_2:|\lambda-7|\le 16+8\sqrt{2}$

$D_3:|\lambda+5|\le 8\sqrt{2}$

(2). 特征多项式 $|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-7 & 16 & -8 \\ 16 & \lambda-7 & 8 \\ -8 & 8 & \lambda+5 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 9\lambda^2 - 405\lambda - 2187 = (\lambda-27)(\lambda+9)^2$

$\therefore A$ 的特征值为 $\lambda_1 = 27, \lambda_2 = -9, \lambda_3 = -9$. 均在范围中.

题目 4. 40. 证明 *Hilbert* 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2^2} & \cdots & \frac{1}{2^{n-1}} \\ \frac{2}{3} & 4 & \frac{2}{3^2} & \cdots & \frac{2}{3^{n-1}} \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{4^2} & 6 & \cdots & \frac{3}{4^{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{n}{n+1} & \frac{n}{(n+1)^2} & \frac{n}{(n+1)^3} & \cdots & 2n \end{pmatrix}$

可以对角化, 且 A 的特征值都是实数.

解答. $D_1 : |\lambda - 2| \le \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$

$D_i : |\lambda - 2i| \le \frac{i}{i+1} + \frac{i}{(i+1)^2} + \cdots + \frac{i}{(i+1)^{n-1}} = 1 - \frac{1}{(i+1)^{n-1}}$

$D_{i+1} : |\lambda - 2(i+1)| \le 1 - \frac{1}{(i+2)^{n-1}}$

A 的第 i 个圆盘和第 $i+1$ 个圆盘不联通，所以 A 有 n 个两两不等的实特征值，可以对角化.

题目 5. 5. 设 A 是 n 阶正规矩阵, x 是任意复数. 证明

(1) $A - xI$ 也是正规矩阵;

(2) 对于任何向量 x, 向量 Ax 与 A^*x 的长度相同;

(3) A 的任一特征向量都是 A^* 的特征向量;

(4) A 的属于不同特征值的特征向量正交.

解答. 1. 正规矩阵定义为 $A^*A = AA^*$。若 A 是正规矩阵，我们有:

$$(A - xI)^*(A - xI) = (A^* - \bar{x}I)(A - xI) = A^*A - xA^* - \bar{x}A + |x|^2 I$$

与

$$(A-xI)(A-xI)^* = (A-xI)(A^*-\bar{x}I) = AA^* - \bar{x}A - xA^* + |x|^2 I$$

由于 $A^*A = AA^*$, 因此 $(A-xI)^*(A-xI) = (A-xI)(A-xI)^*$, 所以 $A-xI$ 也是正规矩阵。

2. 对于任何向量 x，有 $\|Ax\|^2 = (Ax)^*(Ax) = x^*A^*Ax$。因为 A 是正规的，所以 $A^*A = AA^*$，则 $x^*A^*Ax = x^*AA^*x = \|A^*x\|^2$。因此，$\|Ax\| = \|A^*x\|$。

3. 假设 v 是 A 的一个特征向量，对应特征值 λ，即 $Av = \lambda v$。考虑 $A^*A = AA^*$，我们有 $A^*Av = A^*\lambda v = \lambda A^*v$。因此，如果 v 是 A 的特征向量，它也是 A^* 的特征向量。

4. 设 $Av = \lambda v$ 和 $Aw = \mu w$，其中 λ 和 μ 是不同的特征值。那么 $v^*Aw = v^*\mu w = \mu v^*w$ 和 $w^*Av = w^*\lambda v = \lambda w^*v$。因为 A 是正规的，$v^*Aw = w^*Av$。将这两个等式合并，我们得到 $\mu v^*w = \lambda w^*v$。由于 λ 和 μ 是不同的，$v^*w = 0$，意味着 v 和 w 正交。