第五次课程作业

张浩然 023082910001

2023 年 11 月 1 日

题目 1. 15. 若 $\sigma(\alpha_1), \sigma(\alpha_2), \cdots, \sigma(\alpha_s)$ 线性相关, 证明或否定 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 也线性相关.

解答. 假设 $\sigma\left(\alpha_1\right), \sigma\left(\alpha_2\right), \ldots, \sigma\left(\alpha_s\right)$ 线性相关。这意味着存在不全为零的系数 $c_1, c_2, \ldots, c_s$ 使得

$$c_1 \sigma\left(\alpha_1\right)+c_2 \sigma\left(\alpha_2\right)+\ldots+c_s \sigma\left(\alpha_s\right)=0$$

设 σ 是一个线性变换, 我们可以提取系数:

$$\sigma\left(c_1 \alpha_1+c_2 \alpha_2+\ldots+c_s \alpha_s\right)=0$$

如果 $c_1 \alpha_1+c_2 \alpha_2+\ldots+c_s \alpha_s$ 是非零向量, 那么我们就得到了 σ 将一个非零向量映射到零向量, 这意味着 σ 不是单射, 即不是一一映射.

如果 $c_1 \alpha_1+c_2 \alpha_2+\ldots+c_s \alpha_s$ 是零向量，那么这意味着 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性相关.

因此不能确定是否线性相关.

题目 2. 25. 分别求导数运算 $\partial: f(x) \mapsto f'(x)$ 在标准基 $1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}$ 与基 $1, (x-a), (x-a)^2, \cdots, (x-a)^{n-1}$ 下的矩阵. 问 ∂ 的行列式与迹是多少? 解释之.

解答. 对于标准基 $\{1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}\}$, 导数运算 ∂ 的作用是:

$$\begin{gathered}\partial(1)=0 \\ \partial(x)=1 \\ \partial\left(x^2\right)=2x \\ \vdots \\ \partial\left(x^{n-1}\right)=(n-1)x^{n-2}\end{gathered}$$

将这些结果用标准基表示, 矩阵 A 为:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & n-2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

对于基 $\{1, (x-a), (x-a)^2, \ldots, (x-a)^{n-1}\}$ ，导数运算 ∂ 的作用是:

$$\begin{gathered}\partial(1)=0 \\ \partial(x-a)=1 \\ \partial\left((x-a)^2\right)=2(x-a) \\ \vdots \\ \partial\left((x-a)^{n-1}\right)=(n-1)(x-a)^{n-2}\end{gathered}$$

将这些结果用 $\{1,(x-a),(x-a)^2,...,(x-a)^{n-1}\}$ 基表示，矩阵 B 为:

$$B=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&2&\cdots&0\\0&0&0&\ddots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&n-2\\0&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}$$

行列式和迹均为 0, 导数运算只是降低了多项式的阶数，并没有缩放或者拉伸这个空间.

题目 3. 27.(1) 求例 2.2.22 中的幂零变换 τ 的幂零指数及其在标准基下的矩阵;

(2) 设 $\sigma,\tau\in EndV$ 分别是线性空间 V 的同构变换和幂零变换, 证明 $\sigma+\tau$ 是 V 的同构变换;

(3) 设 A,D 是可逆矩阵,B,C 是幂零矩阵, 证明分块矩阵 $\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}$ 可逆.

例 2.2.22 设 $V=\mathbb{F}^n$. 对 $\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$, 定义

$$\sigma(\alpha)=(x_1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}};\quad \tau(\alpha)=(x_2,x_3,\cdots,x_n,0)^{\mathrm{T}}.$$

则 σ 与 τ 均是 V 的线性变换, 且 σ 是幂等变换, τ 是幕零变换.(幂零指数是多少?)

解答. (1).

$$\alpha=(x_1,x_2\cdots x_n)^T$$
$$T^{n-1}(\alpha)=(x_n,0\cdots0)^T$$
$$T^n(\alpha)=0$$
$$\therefore T\text{ 的幂零指数为}n$$

在标准基下的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

(2). 没证出来 (3). 没证出来

题目 4. 29. 设 $V = \mathbb{R}^3, \sigma(x,y,z) = (x+2y-z, y+z, x+y-2z)$. 求

(1) σ 的核与像空间的基与维数;

(2) σ 的行列式与迹.

解答. (1). 求核空间的基, 即为解方程组

$$x + 2y - z = 0$$

$$y + z = 0$$

$$x + y - 2z = 0$$

求得

$$x = 3z, y = -z$$

因此核空间的基为 $(3,-1,1)$, 维数为 1.

σ 用矩阵表示为 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

计算 A 的列空间得

像空间的基为 $(1,0,1)^T, (2,1,1)^T$, 维数是 2

(2). $det(A) = 0, tr(A) = 0$

题目 5. 32. 设 $V=\mathbb{R}[x]_n$, 其上的内积为

$$(f(x),g(x))=\int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

设 $U=\{f(x)\in V:f(0)=0\}$.

(1) 证明 U 是 V 的一个 $n-1$ 维子空间, 并求 U 的一组基;

(2) 当 $n=3$ 时, 求 U 的正交补 $U^{\perp}$.

解答. (1).

1. **非空**:U 包含零多项式, 因为零多项式在 $x=0$ 处的值为 0.
2. **封闭性**: 对于任意 $f(x),g(x)\in U$ 和任意标量 α,β, 我们有 $\alpha f(x)+\beta g(x)\in U$. 这是因为 $(\alpha f+\beta g)(0)=\alpha f(0)+\beta g(0)=0$.
3. **标量乘法**: 对于任意 $f(x)\in U$ 和任意标量 α，我们有 $\alpha f(x)\in U$. 这是因为 $(\alpha f)(0)=\alpha f(0)=0$.

U 的一个基是 $\{x,x^2,\dots,x^{n-1}\}$.

(2). 当 $n=3$ 时,V 是所有次数不超过 2 的多项式的集合,U 的一组基是 $\{x,x^2\}$.

$$\int_0^1 f(x)\cdot x\,dx=0$$
$$\int_0^1 f(x)\cdot x^2\,dx=0$$

其中 $f(x)$ 是一个次数不超过 2 的多项式, 可以表示为 $f(x)=ax^2+bx+c$.

解方程组得 $a=\frac{10}{3}c$ 和 $b=-4c$, 其中 c 是任意实数.

因此,$U^{\perp}$ 是由多项式 $\frac{10}{3}x^2-4x+1$ 张成的一维空间.