第三次课程作业

张浩然 023082910001

2023 年 10 月 18 日

题目 1. 32.(1). 设欧式空间 $\mathbb{R}_{[x]_2}$ 中的内积为

$$(f,g)=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

求基 $1,t,t^2$ 的度量矩阵。

解答. 首先我们计算基之间的内积，代入求得:

$$(1,1)=\int_{-1}^{1}1\mathrm{d}t=2$$

$$(t,t)=\int_{-1}^{1}t^2\mathrm{d}t=\frac{2}{3}$$

$$(t^2,t^2)=\int_{-1}^{1}t^4\mathrm{d}t=\frac{2}{5}$$

$$(1,t)=(t,1)=\int_{-1}^{1}t\mathrm{d}t=0$$

$$(1,t^2)=(t^2,1)=\int_{-1}^{1}t^2\mathrm{d}t=\frac{2}{3}$$

$$(t,t^2)=(t^2,t)=\int_{-1}^{1}t^3\mathrm{d}t=0$$

所以度量矩阵为: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$.

题目 2. 37. 在欧式空间 $\mathbb{R}^4$ 中，求三个向量 $\alpha_1 = (1,0,1,1)^T$,$\alpha_2 = (2,1,0,-3)^T$ 和 $\alpha_3 = (1,-1,1,-1)^T$ 所生成的子空间的一个标准正交基。

解答. α_1 标准化得:

$$\beta_1 = \alpha_1 = (1,0,1,1)^T/\sqrt{3}$$

做向量 α_2 在向量 β_1 方向上的投影，并做差标准化得:

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\beta_1,\alpha_2)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1 = (7,3,1,-8)^T/\sqrt{123}$$

做向量 α_3 在向量 β_1,β_2 方向上的投影，并做差标准化得:

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\beta_1,\alpha_3)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1 - \frac{(\beta_2,\alpha_3)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2 = (3,54,-23,20)^T/\sqrt{3854}$$

β_1,β_2,β_3 即为一组标准正交基.

题目 3. 42. 设线性空间 $V = \mathbb{R}^2$ 是欧式空间 (未必是通常的欧式空间). 设 $\alpha_1 = (1,1)^T, \alpha_2 = (1,-1)^T$ 与 $\beta_1 = (0,2)^T, \beta_2 = (6,12)^T$ 是 V 的两组基. 设 α_j 与 β_k 的内积分别为

$$(\alpha_1,\beta_1) = 1, (\alpha_1,\beta_2) = 15, (\alpha_2,\beta_1) = -1, (\alpha_2,\beta_2) = 3$$

(1). 求两组基的度量矩阵;

(2). 求 V 的一个标准正交基.

解答. (1). 利用内积的性质可得

$$(\alpha_1,\alpha_1) = (\alpha_1, \frac{1}{6}\beta_2 - \frac{1}{2}\beta_1) = 2$$

同理，$(\alpha_1,\alpha_2)=1,(\alpha_2,\alpha_2)=2,(\beta_1,\beta_1)=2,(\beta_1,\beta_2)=12,(\beta_2,\beta_2)=126$ 所以两组基的度量矩阵分别为：$\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}2 & 12\\ 12 & 126\end{pmatrix}$

(2). 将 α_1 标准化后得 $\gamma_1=(1,1)^T/\sqrt{2}$ 做向量 α_2 在向量 γ_1 方向上的投影，并做差得：

$$\gamma_2=\alpha_2-\frac{(\gamma_1,\alpha_2)}{(\gamma_1,\gamma_1)}\gamma_1=(\frac{1}{2},-\frac{3}{2})$$

$$(\gamma_2,\gamma_2)=(\alpha_2-\frac{1}{2}\alpha_1,\alpha_2-\frac{1}{2}\alpha_1)=(\alpha_2,\alpha_2)-(\alpha_2,\alpha_1)+\frac{1}{4}(\alpha_1,\alpha_1)=\frac{3}{2}$$

$(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})^T,(\frac{\sqrt{6}}{6},-\frac{\sqrt{6}}{2})^T$ 是 V 的一个标准正交基.

题目 4. 44. 设 A 是**反对称**实矩阵 (即 $A^T=-A$)，证明：

(1).A 的特征值为 0 或纯虚数；

(2). 设 $\alpha+\beta i$ 是 A 的属于一个非零特征值的特征向量，其中 α,β 均为实向量，则 α 与 β 正交.

解答.

证明. (1). 设 A 的特征值和特征向量分别为 λ,v 可知

$$Av=\lambda v$$

同时取共轭转置得

$$(Av)^*=v^*A^*=\overline{\lambda}v^*=-v^*A$$

所以

$$-v^*Av=\overline{\lambda}v^*v-\lambda v^*v=\overline{\lambda}v^*v$$

由于 $v^*v\neq 0$ 所以 λ 是纯虚数或 $\lambda=0$

(2). 设 $\lambda=ki,(k\neq 0)$

$$ki(\alpha+\beta i)=A(\alpha+\beta i)A\alpha+A\beta i=ki\alpha-k\beta$$

因此:

$$A\alpha = -k\beta$$

两边取转置得:

$$\alpha^T A^T = -k\beta^T$$

$$-\alpha^T A = -k\beta^T$$

$$\alpha^T A\alpha = k\beta^T\alpha$$

$$-k\alpha^T\beta = k\beta^T\alpha$$

因此 $\alpha^T\beta = \beta^T\alpha = 0$, 即 α, β 正交. □

题目 5. 设 A 是 $Hermite$ 矩阵. 如果对任意向量 x 均有 $x^*Ax = 0$, 则 $A = 0$.

解答.

证明. 设 A 的特征值为 λ_i, 对应的特征向量为 v_i. 所以,

$$v_i^* A v_i = \lambda_i v_i^* v_i = 0$$

由于 v_i 是特征向量不为零，所以 $\lambda_i = 0$

把矩阵 A 进行特征值分解得

$$A = V\Lambda V^*$$

由于 $\Lambda = 0$, 所以 $A = 0$ □