# 第一次课程作业

张浩然 023082910001

2023 年 9 月 30 日

**题目 1.** 1、计算

$$(1)\begin{pmatrix} cosx & sinx \\ -sinx & cosx \end{pmatrix}^n \quad (2)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^n \quad (3)\begin{pmatrix} a & 1 & & & \\ & a & 1 & & \\ & & a & 1 & \\ & & & a & 1 \\ & & & & a \end{pmatrix}^n$$

**解答.** (1). 记 $A = \begin{pmatrix} cosx & sinx \\ -sinx & cosx \end{pmatrix}$, 那么 $A \cdot A = \begin{pmatrix} cos2x & sin2x \\ -sin2x & cos2x \end{pmatrix}$ 由三角函数公式可知，$A^n = \begin{pmatrix} cosnx & sinnx \\ -sinnx & cosnx \end{pmatrix}$ 实际上 $A$ 是一个旋转矩阵，$A^n$ 相当于将旋转角度加倍。

(2). 由 (1) 得

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \sqrt{2}cos\frac{\pi}{4} & \sqrt{2}sin\frac{\pi}{4} \\ -\sqrt{2}sin\frac{\pi}{4} & \sqrt{2}cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}^n = (\sqrt{2})^n \begin{pmatrix} cos\frac{n\pi}{4} & sin\frac{n\pi}{4} \\ -sin\frac{n\pi}{4} & cos\frac{n\pi}{4} \end{pmatrix}$$

(3). 记 $A=\begin{pmatrix} a & 1 & & & \\ & a & 1 & & \\ & & a & 1 & \\ & & & a & 1 \\ & & & & a \end{pmatrix}$,$B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $B^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $B^3=$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $B^4=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 所以 $B^n=0(n\geq 5)$. 那么 $A=aI+B$, 所以 $A^n=(aI+B)^n=(aI)^n+C_n^1(aI)^{(n-1)}B+C_n^2(aI)^{(n-2)}B^2+C_n^3(aI)^{(n-3)}B^3+C_n^4(aI)^{(n-4)}B^4=$

$$\begin{pmatrix} a^n & & & & \\ & a^n & & & \\ & & a^n & & \\ & & & a^n & \\ & & & & a^n \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} & na^{n-1} & & & \\ & & na^{n-1} & & \\ & & & na^{n-1} & \\ & & & & na^{n-1} \\ & & & & \end{pmatrix}+$$

$$\begin{pmatrix} & & \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2} & & \\ & & & \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2} & \\ & & & & \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2} \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} & & & \frac{n(n-1)(n-2)}{6}a^{n-3} & \\ & & & & \frac{n(n-1)(n-2)}{6}a^{n-3} \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}+$$

$$\begin{pmatrix} & & & & \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}a^{n-4} \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2} & \frac{n(n-1)(n-2)}{6}a^{n-3} & \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}a^{n-4} \\ & a^n & na^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2} & \frac{n(n-1)(n-2)}{6}a^{n-3} \\ & & a^n & na^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2} \\ & & & a^n & na^{n-1} \\ & & & & a^n \end{pmatrix}$$

**题目 2.** 12. 设 $n$ 阶矩阵 $A$ 可逆，$x$，$y$ 是 $n$ 维列向量. 如果 $(A+xy^*)^{-1}$ 可逆，证明 **Sherman-Morrison 公式**:

$$(A+xy^*)^{-1}=A^{-1}-\frac{A^{-1}xy^*A^{-1}}{1+y^*A^{-1}x}$$

**解答.** 假设 $B=A^{-1}-\frac{A^{-1}xy^*A^{-1}}{1+y^*A^{-1}x}$ 由于可逆矩阵的唯一性，所以要想证明 **Sherman-Morrison Fomula**，即证明 $(A+xy^*)B=I$ 即可.

$(A+xy^*)(A^{-1}-\frac{A^{-1}xy^*A^{-1}}{1+y^*A^{-1}x})=I-\frac{xy^*A^{-1}}{1+y^*A^{-1}x}+xy^*A^{-1}-\frac{xy^*A^{-1}xy^*A^{-1}}{1+y^*A^{-1}x}$

由于 $y^*A^{-1}x$ 是一个常量，因此上式可化简为

$I+xy^*A^{-1}-\frac{xy^*A^{-1}(1+y^*A^{-1}x)}{1+y^*A^{-1}x}=I+xy^*A^{-1}-xy^*A^{-1}=I$

**题目 3.** 14.(1) 设矩阵 $A$，$C$ 均可逆，求分块矩阵 $\begin{pmatrix}A & B\\ 0 & C\end{pmatrix}$ 的逆矩阵. (2) 设矩阵 $A$ 可逆，$D-CA^{-1}B$ 也可逆，证明分块矩阵 $\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}$ 可逆并求其逆.

**解答.** (1) 设分块矩阵 $\begin{pmatrix}A & B\\ 0 & C\end{pmatrix}$ 的逆矩阵为 $\begin{pmatrix}A_1 & B_1\\ D_1 & C_1\end{pmatrix}$, 则 $\begin{pmatrix}A & B\\ 0 & C\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1 & B_1\\ D_1 & C_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & I\end{pmatrix}$, 即 $\begin{cases}AA_1+BD_1=I\\ AB_1+BC_1=0\\ CD_1=0\\ CC_1=I\end{cases}$, 解得 $\begin{cases}A_1=A^{-1}\\ B_1=-A^{-1}BC^{-1}\\ C_1=C^{-1}\\ D_1=0\end{cases}$.

所以分块矩阵 $\begin{pmatrix}A & B\\ 0 & C\end{pmatrix}$ 的逆矩阵为 $\begin{pmatrix}A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1}\\ 0 & C^{-1}\end{pmatrix}$.

(2) 我们根据矩阵求逆的方法，构造 $\begin{pmatrix} A & B & \vdots & I & 0 \\ C & D & \vdots & 0 & I \end{pmatrix}$ 若经过初等变换使左边变成单位矩阵，那么右边即是逆矩阵。首先第一行左乘 $A^{-1}$，得 $\begin{pmatrix} I & A^{-1}B & \vdots & A^{-1} & 0 \\ C & D & \vdots & 0 & I \end{pmatrix}$ 然后第二行减去第一行左乘 $C$,得 $\begin{pmatrix} I & A^{-1}B & \vdots & A^{-1} & 0 \\ 0 & D-CA^{-1}B & \vdots & -CA^{-1} & I \end{pmatrix}$ 令 $E=D-CA^{-1}B$,第二行左乘 $E^{-1}$ 得, $\begin{pmatrix} I & A^{-1}B & \vdots & A^{-1} & 0 \\ 0 & I & \vdots & -E^{-1}CA^{-1} & E^{-1} \end{pmatrix}$ 消去 $A^{-1}B$ 得 $\begin{pmatrix} I & 0 & \vdots & A^{-1}+A^{-1}BE^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}BE^{-1} \\ 0 & I & \vdots & -E^{-1}CA^{-1} & E^{-1} \end{pmatrix}$ 所求逆矩阵为 $\begin{pmatrix} A^{-1}+A^{-1}BE^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}BE^{-1} \\ -E^{-1}CA^{-1} & E^{-1} \end{pmatrix}$，其中 $E=D-CA^{-1}B$.

**题目 4.** 17. 求下列各矩阵的满秩分解：

$(1)A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; $(2)A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

**解答.** (1).$A$ 经过初等行变换后得

$$A_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$A$ 的极大线性无关组构成的矩阵 $A_2=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 所以 $A$ 的满秩分解为

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(2). $A$ 经过初等行变换后得

$$A_1=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&-1&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$A$ 的极大线性无关组构成的矩阵 $A_2=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\\-1&-1\\1&1\end{pmatrix}$ 所以 $A$ 的满秩分解为

$$A=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\\-1&-1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&-1&-1\end{pmatrix}$$