第十一次课程作业

张浩然 023082910001

2023 年 12 月 12 日

题目 1. 2. 证明: 若 $x \in \mathbb{C}^n$, 则

(1) $\|x\|_2 \leqslant \|x\|_1 \leqslant \sqrt{n}\|x\|_2$;

(2) $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_1 \leqslant n\|x\|_\infty$;

(3) $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_2 \leqslant \sqrt{n}\|x\|_\infty$.

解答. (1). $x \in \mathbb{C}^n$

$||x||_2 = \sqrt{\sum |x_i|^2}$

$||x||_1 = \sum |x_i|$

$||x||_1^2 = (\sum |x_i|)^2 \geqslant \sum |x_i|^2 = ||x||_2^2$(当且仅当 $x_i = 0, i = 1, 2, 3, \cdots, n$ 时等号成立)

由均值不等式

$\frac{\sum |x_i|}{n} \leqslant \sqrt{\frac{\sum |x_i|^2}{n}}$

即: $||x||_1 \leqslant \sqrt{n} \cdot ||x||_2$

$\therefore ||x||_2 \leqslant ||x||_1 \leqslant \sqrt{n} \cdot ||x||_2$

(2).

$\|x\|_\infty = \max\{|x_i|\}$

记 $|x_k| = \max\{|x_i|\}$

则 $\|x\|_\infty = |x_k|$

$\|x\|_1 = |x_k| + \sum_{i\neq k}^{n} |x_i|$

$n\|x\|_\infty = n\,|x_k| \geq \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

可知 $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n \cdot \|x\|_\infty$

(3). 记 $\|x\|_\infty = |x_k|$

则 $\|x\|_\infty^2 = |x_k|^2$

$\|x\|_2^2 = \sum |x_i|^2 \geq |x_k|^2$

$(\sqrt{n}\,\|_x\|_\infty)^2 = n \cdot |x_k|^2 \geq \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2$

$\therefore \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$

题目 2. 11. 验证矩阵的极大列和范数与极大行和范数均满足次乘性.

解答. 极大列和范数的次乘性证明

对于矩阵 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 和 $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$, 我们有:

$\|AB\|_1 = \max_{1\leq k\leq p} \sum_{i=1}^{m} \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}\right|$

利用三角不等式和绝对值的性质, 可以得到:

$\sum_{i=1}^{m} \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}\right| \leq \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\,|b_{jk}|$

接着, 我们可以利用 $Holder$ 不等式, 得到:

$\|AB\|_1 \leq \max_{1\leq k\leq p} \sum_{j=1}^{n} |b_{jk}| \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$

由于 $\max_{1\leq k\leq p} \sum_{j=1}^{n} |b_{jk}|$ 是 B 的极大列和范数, $\max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$ 是 A 的极大列和范数, 因此我们有:

$\|AB\|_1 \leq \|A\|_1\|B\|_1$

这证明了极大列和范数满足次乘性.

极大行和范数同理.

题目 3. 26. 设 $A_k = \begin{pmatrix} \frac{1}{k^2} & \frac{k^2+k}{k^2+1} \\ 2 & \left(1-\frac{2}{k}\right)^k \end{pmatrix}$, 求 $\lim\limits_{k\to\infty} A_k$.

解答. $A_k = \begin{pmatrix} \frac{1}{k^2} & \frac{k^2+k}{k^2+1} \\ 2 & \left(1-\frac{2}{k}\right)^k \end{pmatrix}$

$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k^2} = 0$

$\lim_{k\to\infty} \frac{k^2+k}{k^2+1} = 1$

$\lim_{k\to\infty} \left(1-\frac{2}{k}\right)^k = \left(\lim_{k\to\infty} \left(1-\frac{2}{k}\right)^{\frac{k}{2}}\right)^2 = \frac{1}{e^2}$

$\therefore \lim_{k\to\infty} A_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & \frac{1}{e^2} \end{pmatrix}$

题目 4. 28. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = B$, 则 B 为幂等矩阵.

解答. $\lim_{n\to\infty} A^n = B$

$B^2 = (\lim_{n\to\infty} A^n)^2 = \lim_{n\to\infty} A^{2n} = B$

题目 5. 30. 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, 求 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{2^k}$.

解答.

$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & \frac{1}{2} \\ -2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-2)+1 = (\lambda-1)^2$

$A - I = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad r(A-I) = 1$

$m_A(\lambda) = (\lambda-1)^2$

则 f 在 A 的谱上的数值为 $\{f(1), f'(1)\}$

设 $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{2^k}, g(t) = a_0 + a_1 t$

$f(A) = g(A) \Leftrightarrow f.\ g$ 在 A 的谱上的数值相等

$f(1) = 2$

$f'(1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \cdot 1^{k-1}}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k} = \lim_{n\to\infty} \left(\left(\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2^i}\right) - \frac{n}{2^n}\right) = 2$

$\therefore g(1) = a_0 + a_1 = 2$

$g'(1) = a_1 = 2$

$\therefore a_0 = 0$

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{2^k} = f(A) = g(A) = 2A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

题目 6. 31. 设 $A = \begin{pmatrix} -0.6 & 1 & 0.8 \\ 0 & 0.2 & 0 \\ -0.6 & 1 & 0.8 \end{pmatrix}$. 试判断 A 是否幂收敛.

解答. $A = \begin{pmatrix} -0.6 & 1 & 0.8 \\ 0 & 0.2 & 0 \\ -0.6 & 1 & 0.8 \end{pmatrix}$

$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda + 0.6 & -1 & -0.8 \\ 0 & \lambda - 0.2 & 0 \\ 0.6 & -1 & \lambda - 0.8 \end{vmatrix} = (\lambda - 0.2) \begin{vmatrix} \lambda + 0.6 & -0.8 \\ 0.6 & \lambda - 0.8 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 0.2)^2$

$|\lambda| < 1$

$\therefore J_A$ 幂收敛 $\Leftrightarrow A$ 幂收敛。