

第七次课程作业

张浩然 023082910001

2023 年 11 月 15 日

题目 1. 43. 证明 *Householder* 变换 H_v 是关于超平面 v^\perp 的反射, 从而是正交变换. 试画出三维 *Householder* 变换的示意图.

解答. 设 $u \in v^\perp$, 则 $u \cdot v = 0, H_v(u) = u$

设 w 是超平面外的任意向量, 则 $w = u + \lambda v$, 其中 $\lambda \in \mathbb{R}$, 则 $H_v(w) = -w$

因此 *Householder* 变换是镜面反射正交变换.

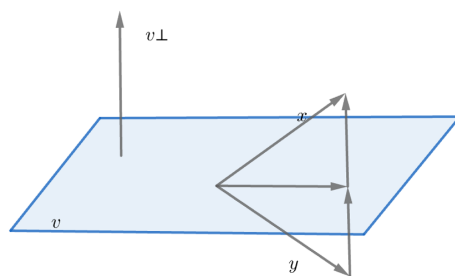


图 1: 三维图示

题目 2. 2. 设 A 为第一章例 1.2.2 中的矩阵,

- (1) 利用满秩分解和 *Sylvester* 降幂公式求 A 的特征多项式与 A^6 ;
- (2) 求与 A 相似的分块对角矩阵, 使得每块恰有唯一的特征值.

题目 2 的注记.

$$\text{例 1.2.2 } A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 2 & -2 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{例 1.2.3 } A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

解答. ps. 例 1.2.2 无法使用降幂公式, 应该为例 1.2.3

(1). 由于

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \\ -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = LR$$

故

$$|\lambda I - A| = |\lambda I - LR| = \lambda^2 |\lambda I - RL| = \lambda^2 (\lambda + 1)(\lambda + 2).$$

$$A^n = (LR)^n = L(RL)^{n-1}R$$

$$\text{所以 } A^6 = \begin{pmatrix} 96 & -95 & 95 & -96 \\ 64 & 63 & -63 & -64 \\ 64 & -64 & 64 & -64 \\ 32 & -32 & 32 & -32 \end{pmatrix}.$$

(2). 计算 *Jordan* 标准型得 $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$

题目 3. 3. 设 $\alpha = (a_1, \dots, a_n)^T, \beta = (b_1, \dots, b_n)^T, x$ 为任意常数, $A = xI_n + \alpha\beta^T$.

- (1) 直接计算行列式 $|A|$;
- (2) 利用 *Sylvester* 降幂公式计算行列式 $|A|$;
- (3) 利用特征值计算行列式 $|A|$.

解答. (1). $A = |xI_n + \alpha\beta^T| = \begin{vmatrix} a_1b_1 + x & a_1b_2 & a_1b_3 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 + x & a_2b_3 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & a_nb_3 & \cdots & a_nb_n + x \end{vmatrix} =$

$$\begin{vmatrix} 1 & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n \\ 0 & a_1b_1 + x & a_1b_2 & a_1b_3 & \cdots & a_1b_n \\ 0 & a_2b_1 & a_2b_2 + x & a_2b_3 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_nb_1 & a_nb_2 & a_nb_3 & \cdots & a_nb_n + x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n \\ -a_1 & x & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_2 & 0 & x & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -a_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix} =$$

$$x^n \left(1 + \frac{\beta^T \alpha}{x}\right)$$

(2). $|A| = |xI_n + \alpha\beta^T| = x^{n-1} |x + \beta^T \alpha| = x^{n-1} (x + \beta^T \alpha)$

(3). 矩阵 A 的特征值有 $n-1$ 个 x 一个 $x + \beta^T \alpha$, 所以 $|A| = x^{n-1} (x + \beta^T \alpha)$

题目 4. 5.(1) 举例说明 *Schur* 三角化定理在实数域上不成立.

解答. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

题目 5. 11. 求下列矩阵的最小多项式并指出其中可以对角化的矩阵:

$$(1) \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}; \quad (2) \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}; \quad (3) \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}; \quad (4) \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

解答. (1) $|\lambda I - A| = (\lambda - 3)(\lambda - 5) - 8 = (\lambda - 1)(\lambda - 7)$, 所以最小多项式为 $(\lambda - 1)(\lambda - 7)$ 无重根, 可对角化.

(2) 最小特征多项式 $(\lambda - 2)(\lambda - 3)(\lambda - 1)$ 无重根, 可对角化.

(3) 最小特征多项式 $(\lambda + 2)(\lambda - 1)$ 无重根, 可对角化.

(4) 最小特征多项式 $(\lambda + 2)(\lambda - 1)^2$ 有重根, 不可对角化.