

《算法设计与分析》

第五章 动态规划

马丙鹏

2023年10月22日



中国科学院大学

University of Chinese Academy of Sciences 1

第五章 动态规划

- 5.1 一般方法
- 5.2 多段图问题
- 5.3 每对结点之间的最短路径
- 5.4 最优二分检索树
- 5.5 0/1背包问题
- 5.6 可靠性设计
- 5.7 货郎担问题
- 5.8 流水线调度问题



5.2 多段图问题

■ 1. 问题的描述

- 在多段图中求从s到t的一条最小成本的路径，可以看作是在 $k-2$ 个段作出某种决策的结果。
- 第 i 次决策决定 V_{i+1} 中的哪个结点在这条路径上，这里 $1 \leq i \leq k-2$;
- 最优性原理对多段图问题成立。



5.2 多段图问题

■ 2. 向前处理策略求解

□ 设 $P(i, j)$ 是一条从 V_i 中的结点 j 到汇点 t 的最小成本路径， $COST(i, j)$ 是这条路径的成本。

□ 向前递推式

V_i 中的结点 j 到汇点 t 的最小成本

V_i 中的结点 j 到 V_{i+1} 中的结点 l 成本

$$COST(i, j) = \min_{\substack{l \in V_{i+1} \\ (j, l) \in E}} \{c(j, l) + COST(i+1, l)\}$$

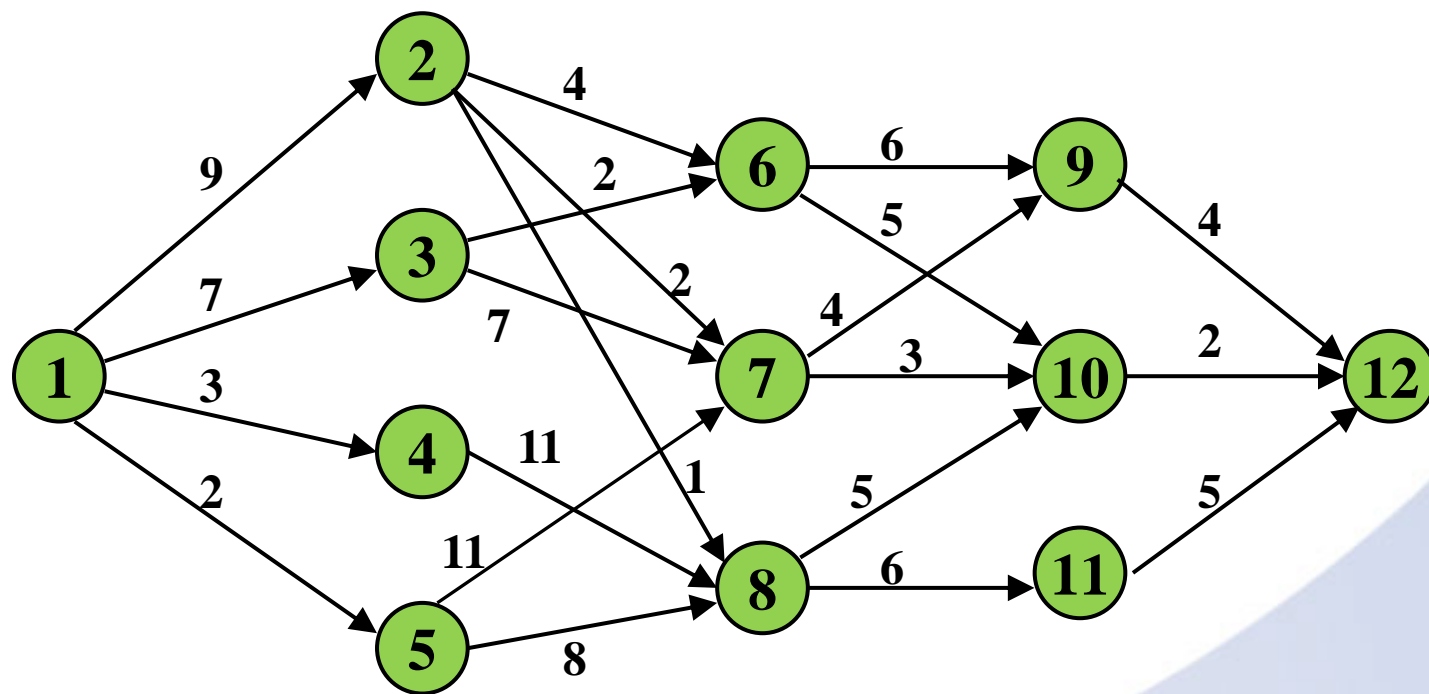
□ 递推过程

第 $k-1$ 段

V_{i+1} 中的结点 l 到汇点 t 的最小成本

$$COST(k-1, j) = \begin{cases} c(j, t) & \langle j, t \rangle \in E \\ \infty & \text{otherwise} \end{cases}$$



V_1 V_2 V_3 V_4 V_5 

5段图



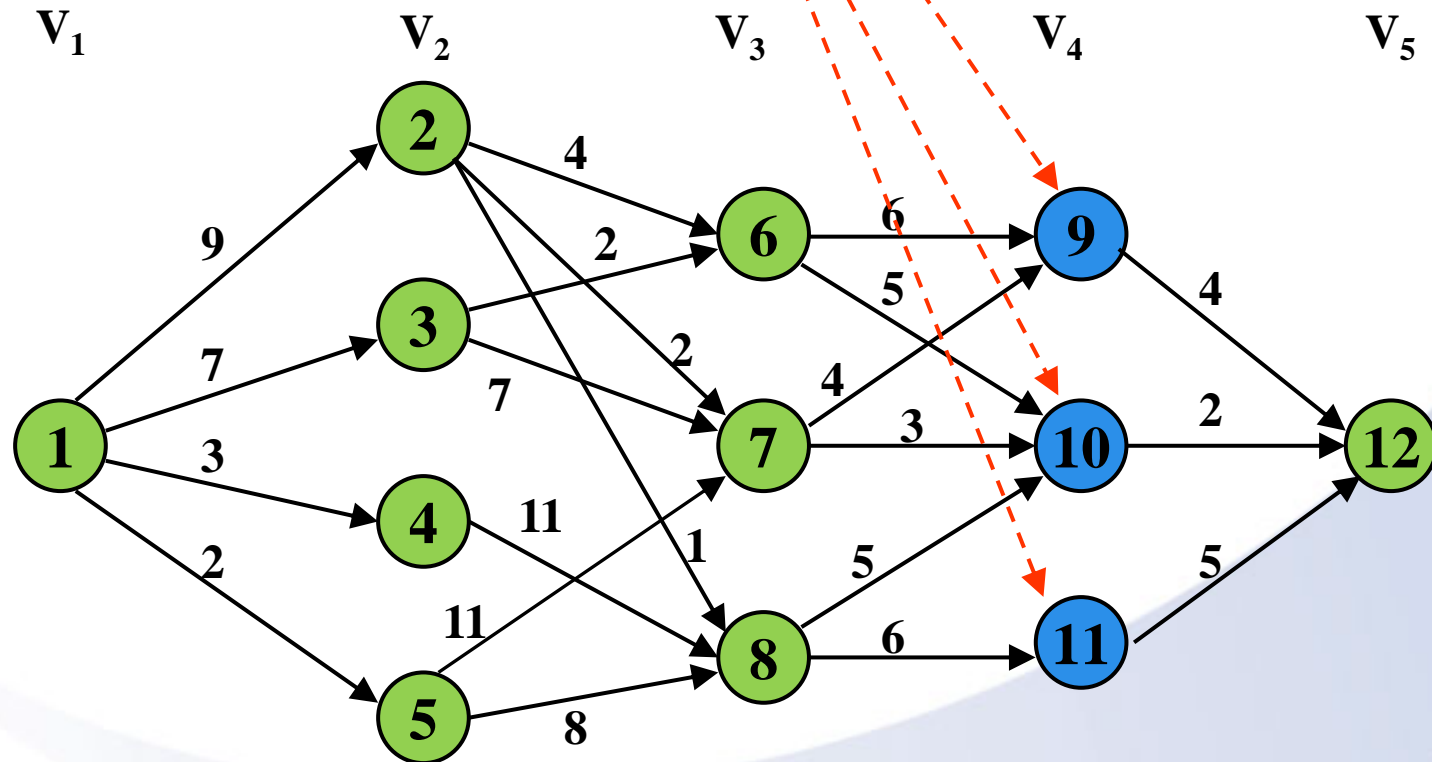
中国科学院大学

University of Chinese Academy of Sciences 5

$$COST(i, j) = \min_{\substack{l \in V_{i+1} \\ \langle j, l \rangle \in E}} \{c(j, l) + COST(i+1, l)\}$$

★各递推结果

第4段 $COST(4, 9) = c(9, 12) = 4$
 $COST(4, 10) = c(10, 12) = 2$
 $COST(4, 11) = c(11, 12) = 5$



5段图



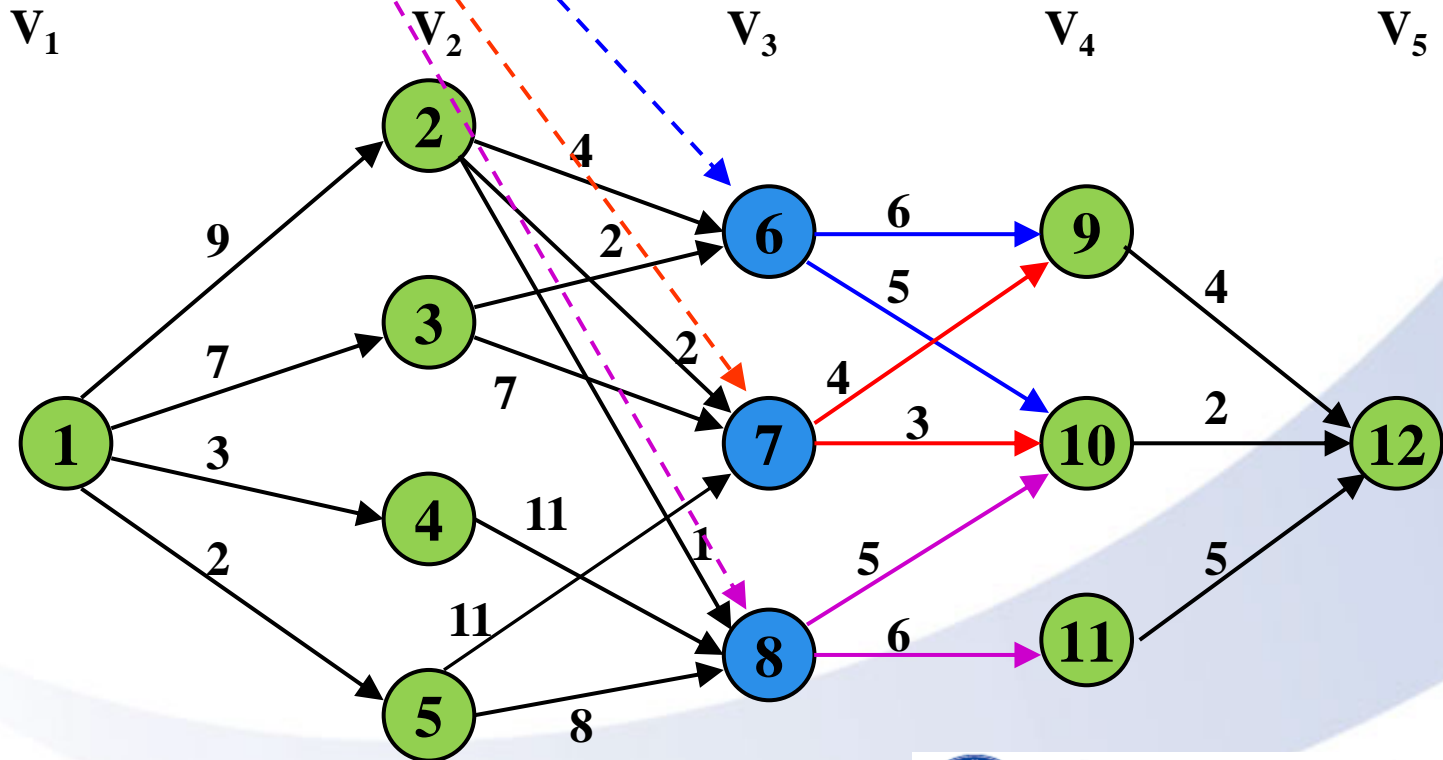
中国科学院大学

University of Chinese Academy of Sciences 6

$$COST(i, j) = \min_{\substack{l \in V_{i+1} \\ \langle j, l \rangle \in E}} \{c(j, l) + COST(i+1, l)\}$$

★各递推结果

第3段 $COST(3, 6) = \min\{6 + COST(4, 9), 5 + COST(4, 10)\} = 7$
 $COST(3, 7) = \min\{4 + COST(4, 9), 3 + COST(4, 10)\} = 5$
 $COST(3, 8) = \min\{5 + COST(4, 10), 6 + COST(4, 11)\} = 7$



5段图



中国科学院大学

University of Chinese Academy of Sciences 7

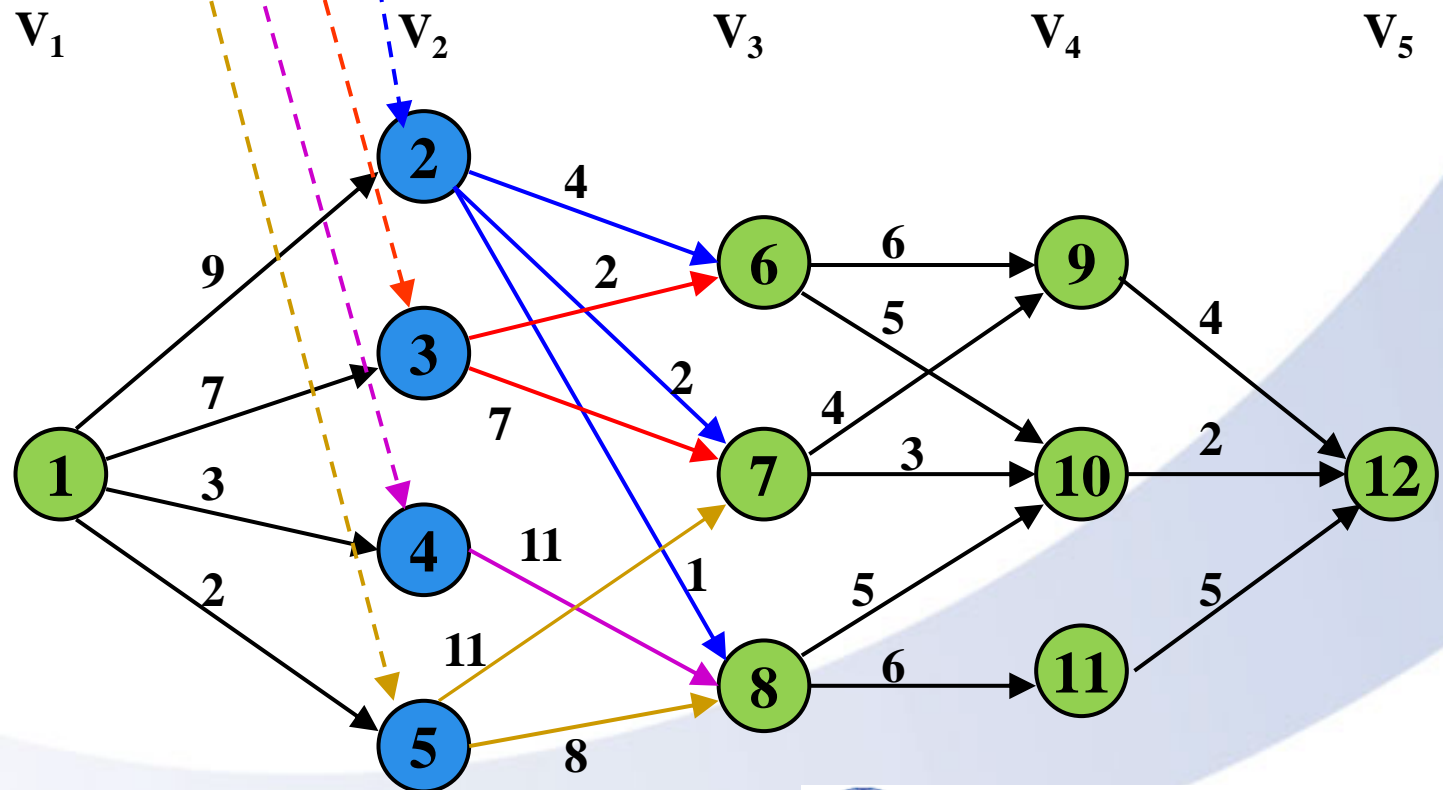
$$COST(i, j) = \min_{\substack{l \in V_{i+1} \\ \langle j, l \rangle \in E}} \{c(j, l) + COST(i+1, l)\}$$

第2段 $COST(2, 2) = \min\{4+COST(3, 6), 2+COST(3, 7), 1+COST(3, 8)\} = 7$

$COST(2, 3) = 9$

$COST(2, 4) = 18$

$COST(2, 5) = 15$



5段图



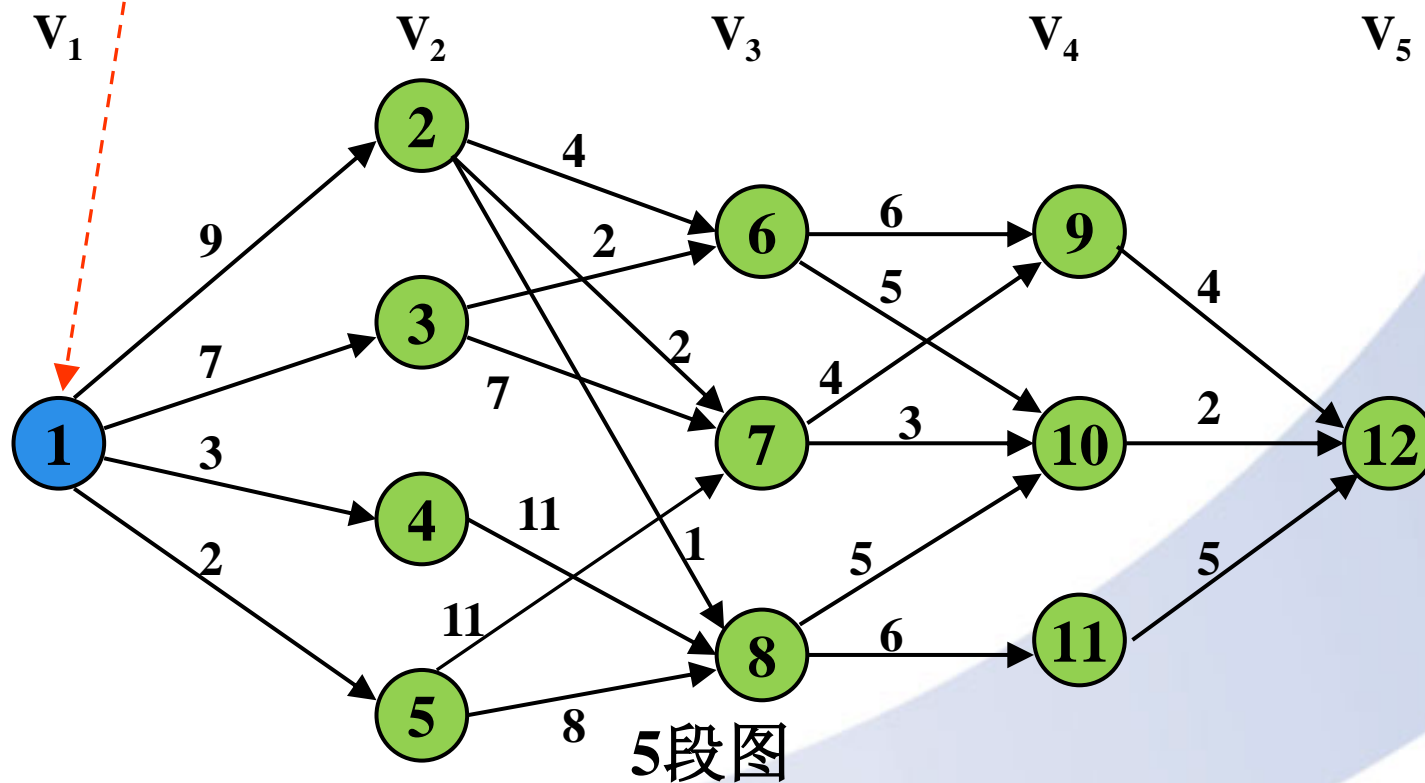
中国科学院大学

University of Chinese Academy of Sciences 8

$$COST(i, j) = \min_{\substack{l \in V_{i+1} \\ \langle j, l \rangle \in E}} \{c(j, l) + COST(i+1, l)\}$$

第1段

$$COST(1, 1) = \min\{9 + \text{COST}(2, 2), 7 + \text{COST}(2, 3), 3 + \text{COST}(2, 4), 2 + \text{COST}(2, 5)\} \\ = 16$$



s到t的最小成本路径的成本 = 16



中国科学院大学

University of Chinese Academy of Sciences 9

★各递推结果

第4段 $\text{COST}(4, 9) = c(9, 12) = 4$

$\text{COST}(4, 10) = c(10, 12) = 2$

$\text{COST}(4, 11) = c(11, 12) = 5$

第3段 $\text{COST}(3, 6) = \min\{6 + \text{COST}(4, 9), 5 + \text{COST}(4, 10)\} = 7$

$\text{COST}(3, 7) = \min\{4 + \text{COST}(4, 9), 3 + \text{COST}(4, 10)\} = 5$

$\text{COST}(3, 8) = \min\{5 + \text{COST}(4, 10), 6 + \text{COST}(4, 11)\} = 7$

第2段 $\text{COST}(2, 2) = \min\{4 + \text{COST}(3, 6), 2 + \text{COST}(3, 7),$
 $1 + \text{COST}(3, 8)\} = 7$

$\text{COST}(2, 3) = 9$

$\text{COST}(2, 4) = 18$

$\text{COST}(2, 5) = 15$

第1段 $\text{COST}(1, 1) = \min\{9 + \text{COST}(2, 2), 7 + \text{COST}(2, 3),$
 $3 + \text{COST}(2, 4), 2 + \text{COST}(2, 5)\}$
 $= 16$

s到t的最小成本路径的成本 = 16



中国科学院大学

University of Chinese Academy of Sciences 10

★ 最小路径的求取

记 $D(i, j)$ = 每一 $COST(i, j)$ 的决策

即, 使 $c(j, l) + COST(i+1, l)$ 取得最小值的 l 值。

例: $D(3, 6) = 10, D(3, 7) = 10, D(3, 8) = 10,$
 $D(2, 2) = 7, D(2, 3) = 6, D(2, 4) = 8, D(2, 5) = 8,$
 $D(1, 1) = 2$

根据 $D(1, 1)$ 的决策值向后递推求取最小成本路径:

● $v_2 = D(1, 1) = 2$

● $v_3 = D(2, D(1, 1)) = D(2, 2) = 7$

● $v_4 = D(3, D(2, D(1, 1))) = D(3, 7) = 10$

故由 s 到 t 的最小成本路径是: $1 \rightarrow 2 \rightarrow 7 \rightarrow 10 \rightarrow 12$



第一段

$COST(1,1)=\min\{9+COST(2,2), 7+COST(2,3), 3+COST(2,4), 2+COST(2,5)\}=16$

第二段

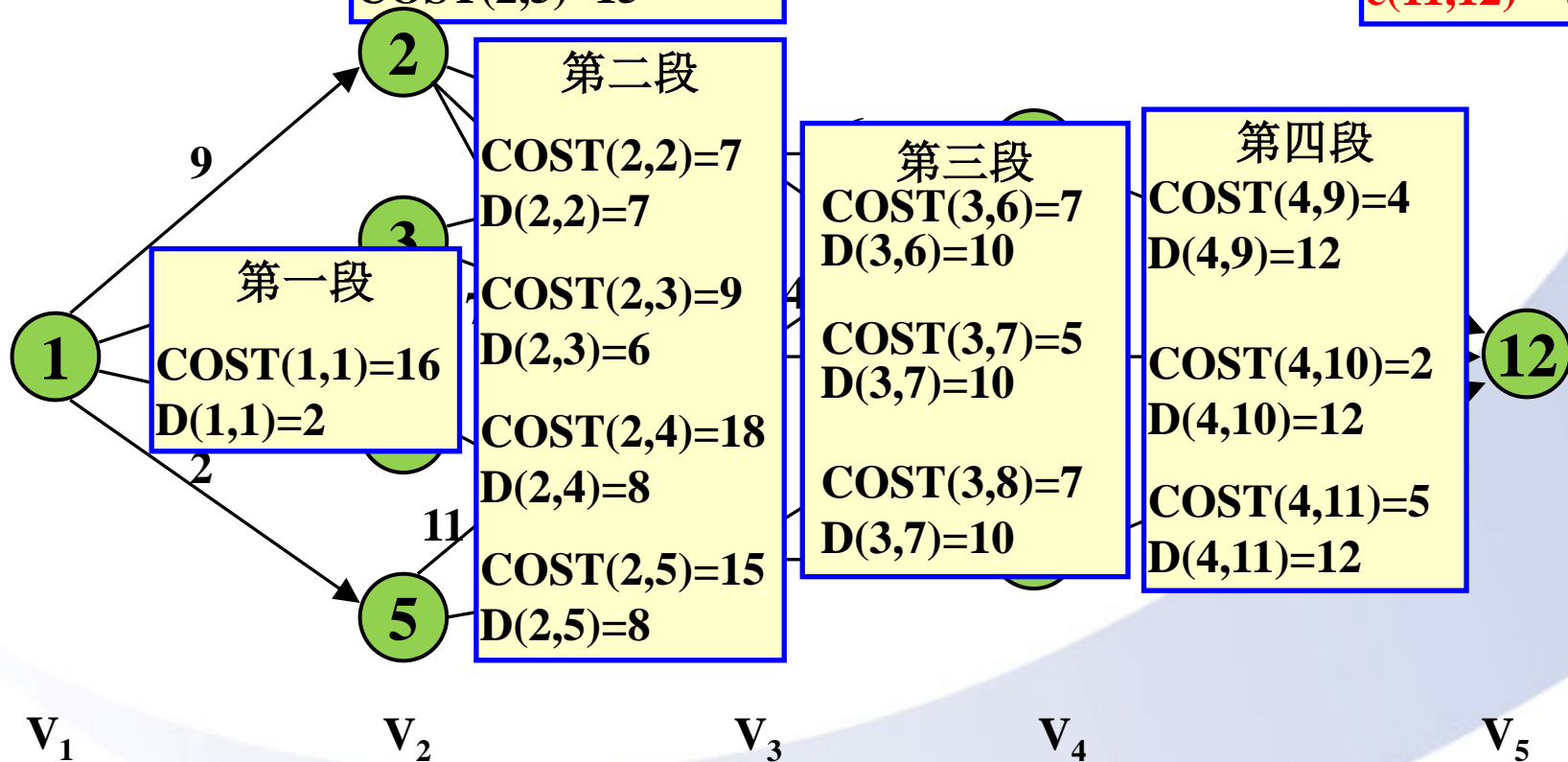
$COST(2,2)=\min\{4+COST(3,6), 2+COST(3,7), 1+COST(3,8)\}=7$
 $COST(2,3)=9$
 $COST(2,4)=18$
 $COST(2,5)=15$

第三段

$COST(3,6)=\min\{6+COST(4,9), 5+COST(4,10)\}=7$
 $COST(3,7)=\min\{4+COST(4,9), 3+COST(4,10)\}=5$
 $COST(3,8)=\min\{5+COST(4,10), 6+COST(4,11)\}=7$

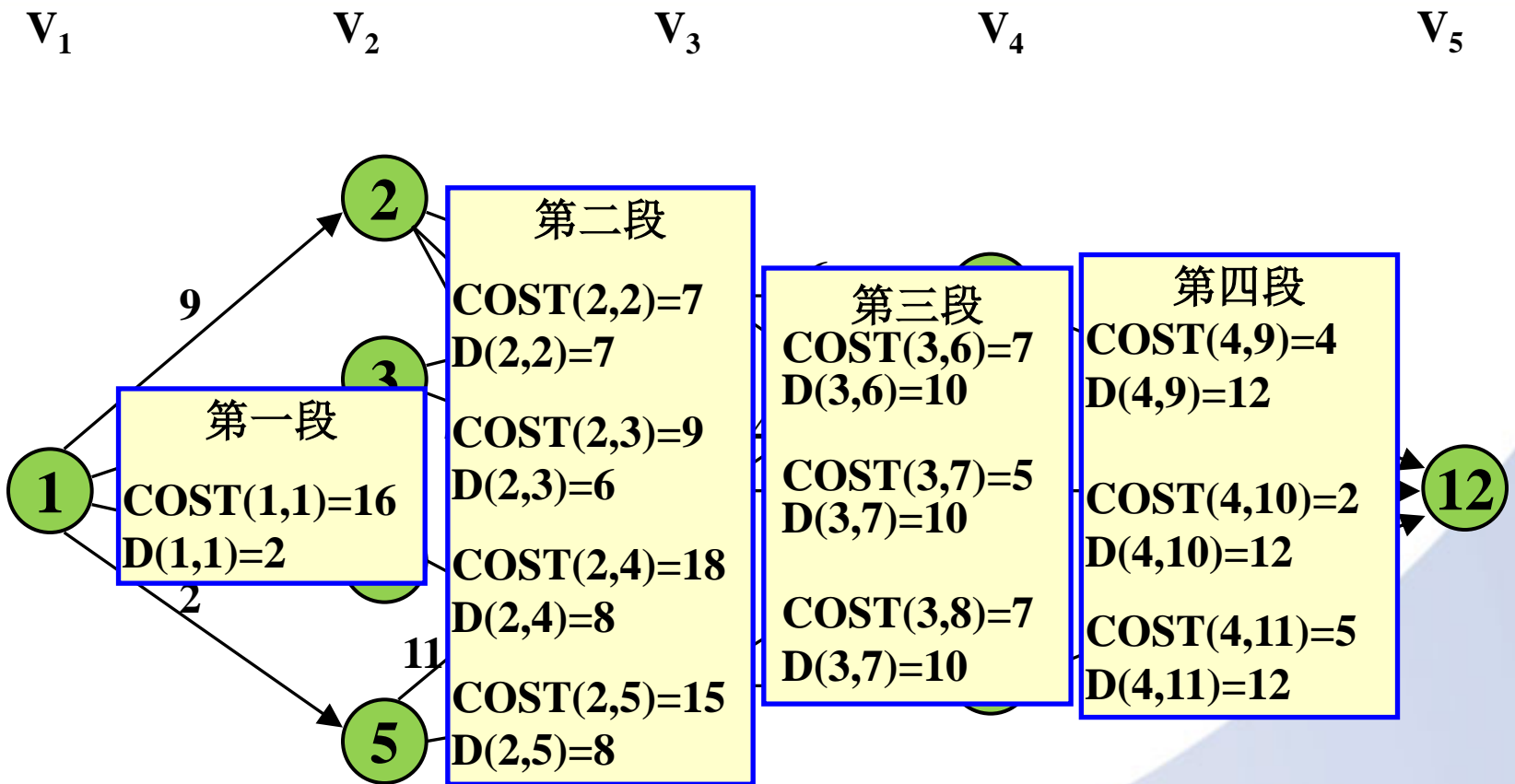
第四段

$COST(4,9)=c(9,12)=4$
 $COST(4,10)=c(10,12)=2$
 $COST(4,11)=c(11,12)=5$



s到t的最小成本路径的成本 :16

$$COST(i, j) = \min_{\substack{l \in V_{i+1} \\ < j, l > \in E}} \{c(j, l) + COST(i+1, l)\}$$



5.2 多段图问题

■ 2. 向前处理策略求解

□ 算法描述

➤ 结点的编号规则

源点 s 编号为 1 ，然后依次对 V_2, V_3, \dots, V_{k-1} 中的结点编号，汇点 t 编号为 n 。

➤ 目的

使对COST和D的计算仅按 $n-1, n-2, \dots, 1$ 的次序计算即可，

无需考虑标示结点所在段的第一个下标。



算法5.1 多段图的向前处理算法

procedure FGRAPH(E, k, n, P)

//输入是按段的顺序给结点编号的, 有n个结点的k段图。E是边集, $c(i, j)$ 是边 $\langle i, j \rangle$ 的成本。P(1:k)带出最小成本路径//

real COST(n); **integer** D(n-1), P(k), r, j, k, n

COST(n) \leftarrow 0

寻找第j个结点到终点的最短路径

for j \leftarrow n-1 **to** 1 **by** -1 **do** //计算COST(j)//

设r是具有性质: $\langle j, r \rangle \in E$ 且使 $c(j, r) + \text{COST}(r)$ 取最小值的结点

COST(j) \leftarrow $c(j, r) + \text{COST}(r)$

D(j) \leftarrow r //记录决策值//

$\Theta(n+e)$

repeat

P(1) \leftarrow 1; P(k) \leftarrow n

for j \leftarrow 2 **to** k-1 **do** //找路径上的第j个结点//

P(j) \leftarrow D(P(j-1)) //回溯求出该路径//

第j个结点到汇点的最短路径上的下一个节点

repeat

end FGRAPH



中国科学院大学

University of Chinese Academy of Sciences 15

5.2 多段图问题

■ 2. 向前处理策略求解

□ 算法的时间复杂度

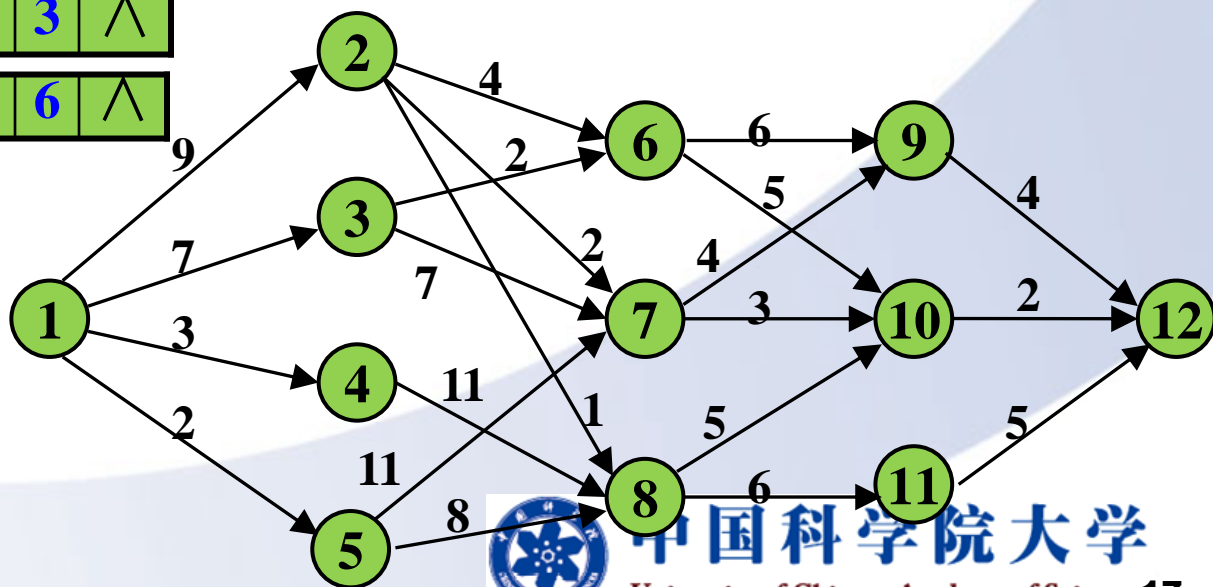
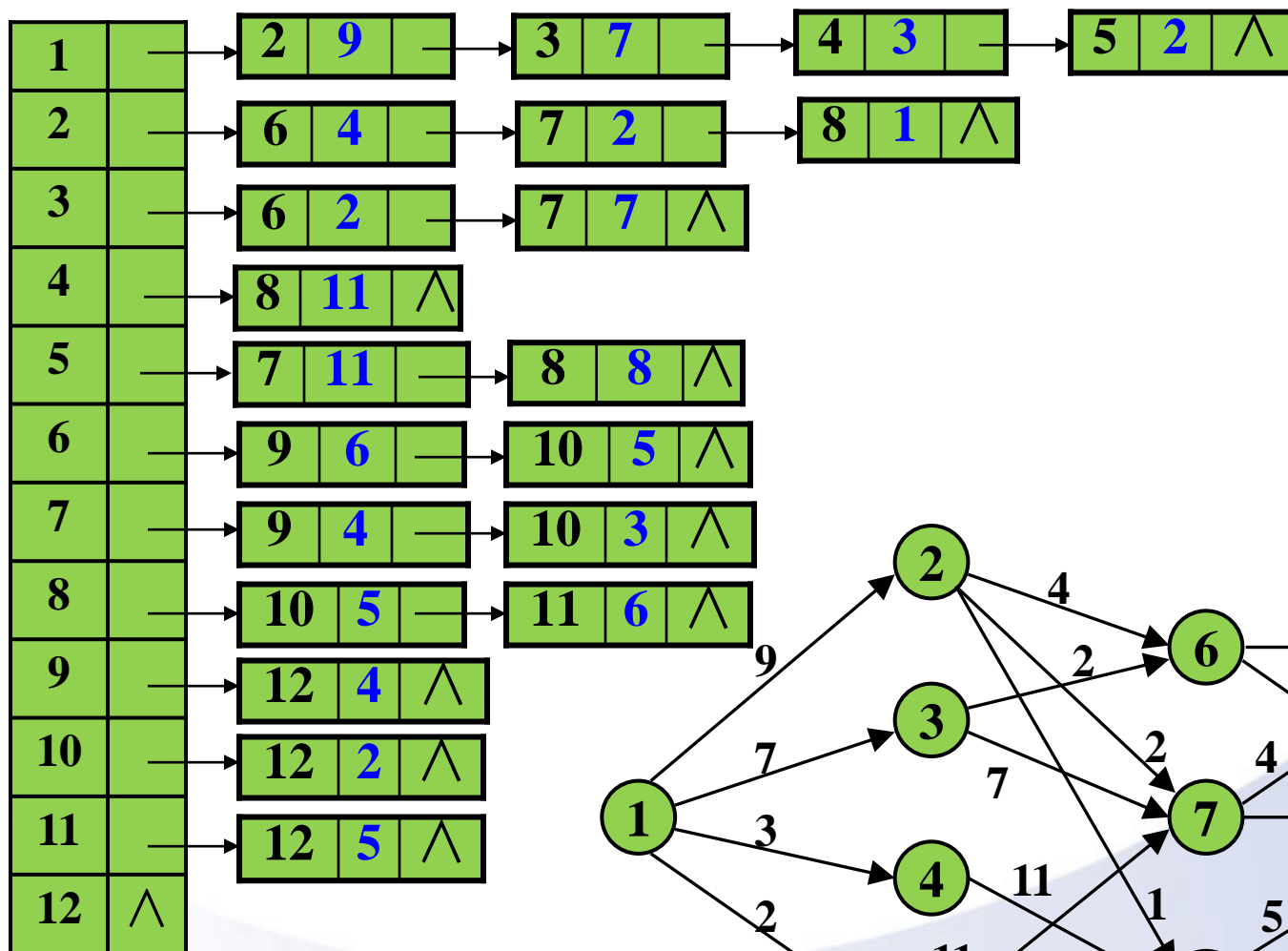
➤ 若G采用邻接表表示，总计算时间为：

$$\Theta(n + e)$$

➤ 邻接表：邻接表是图的一种链式存储结构，对图中的每个顶点建立一个单链表，链表中的结点有3个域，分别存储顶点，边的成本和下一个结点的指针。



5.2 多段图问题



算法的执行过程

$k=5; n=12;$

$COST(12)=0;$

for $j=11$ **downto** 1 do

{ $COST(j)=\min\{c(j, r)+COST(r)\};$
 $D(j)=r; \}$

$P(1)=1; P(k)=12;$

for $j=2$ to 4 do $P(j)=D(P(j-1));$

$COST(11)=5 \quad D(11)=12$

$COST(10)=2 \quad D(10)=12$

$COST(9)=4 \quad D(9)=12$

$COST(8)=7 \quad D(8)=10$

$COST(7)=5 \quad D(7)=10$

$COST(6)=7 \quad D(6)=10$

$COST(5)=15 \quad D(5)=8$

$COST(4)=18 \quad D(4)=8$

$COST(3)=9 \quad D(3)=6$

$COST(2)=7 \quad D(2)=7$

COST

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
16	7	9	18	15	7	5	7	4	2	5	0

$COST(1)=16$

$D(1)=2$

D

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	7	6	8	8	10	10	10	12	12	12

P

1	2	3	4	5
1	2	7	10	12



中国科学院大学

University of Chinese Academy of Sciences 18

5.2 多段图问题

■ 3. 向后处理策略求解

□ 设 $BP(i, j)$ 是一条从源点 s 到 V_i 中的结点 j 的最小成本路径, $BCOST(i, j)$ 是这条路径的成本。

□ 向后递推式

源点 s 到 V_i 中的结点 j 的最小成本

源点 s 到 V_{i-1} 中的结点 l 的最小成本

$$BCOST(i, j) = \min_{\substack{l \in V_{i-1} \\ (l, j) \in E}} \{ BCOST(i-1, l) + c(l, j) \}$$

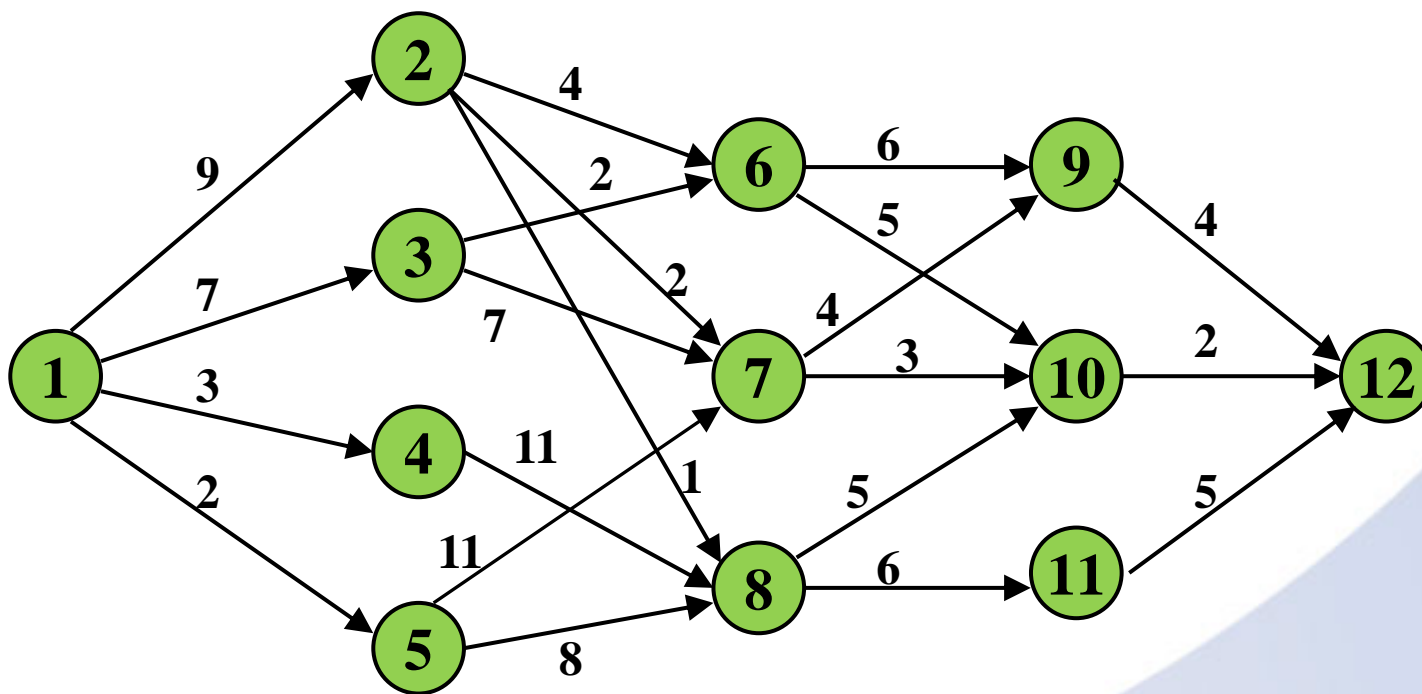
□ 递推过程

➤ 第2段

V_{i-1} 中的结点 l 到 V_{i+1} 中的结点 j 的成本

$$BCOST(2, j) = \begin{cases} c(1, j) & \langle 1, j \rangle \in E \\ \infty & \text{otherwise} \end{cases}$$



V_1 V_2 V_3 V_4 V_5 

5段图



中国科学院大学

University of Chinese Academy of Sciences 20

$$BCOST(i, j) = \min_{\substack{l \in V_{i-1} \\ (l, j) \in E}} \{BCOST(i-1, l) + c(l, j)\}$$

★各递推结果

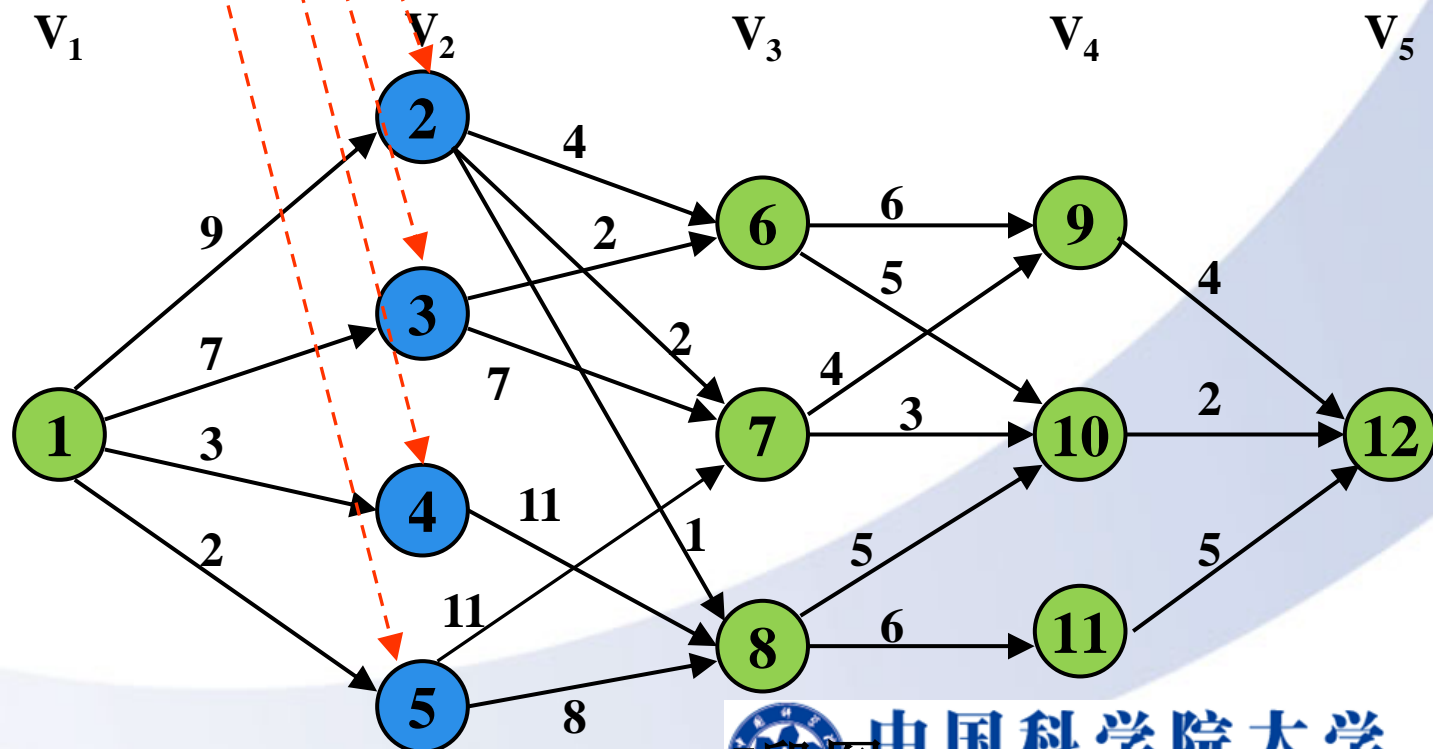
第2段

$$BCOST(2, 2) = 9$$

$$BCOST(2, 3) = 7$$

$$BCOST(2, 4) = 3$$

$$BCOST(2, 5) = 2$$



中国科学院大学

University of Chinese Academy of Sciences

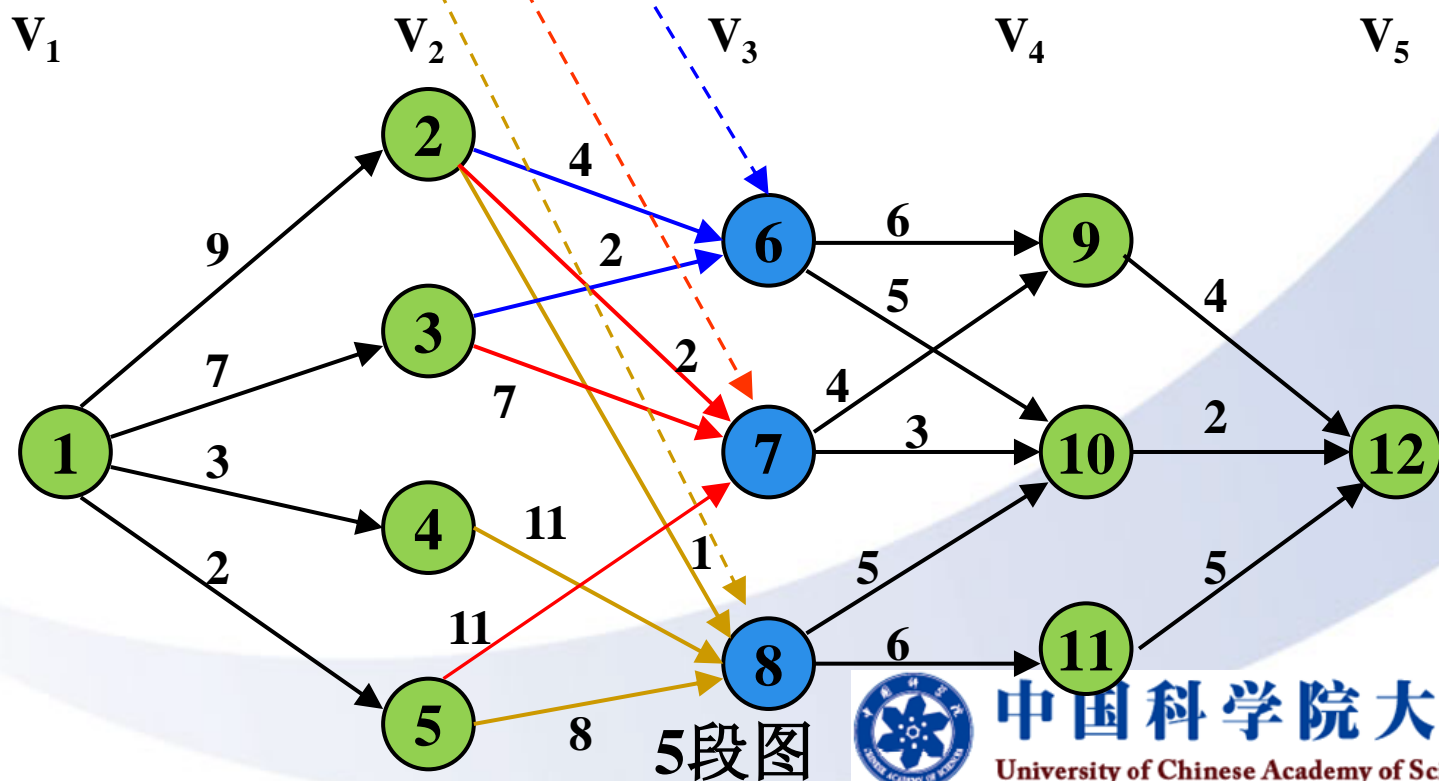
$$BCOST(i, j) = \min_{\substack{l \in V_{i-1} \\ (l, j) \in E}} \{BCOST(i-1, l) + c(l, j)\}$$

★各递推结果

第3段 $BCOST(3, 6) = \min\{BCOST(2, 2)+4, BCOST(2, 3)+2\} = 9$

$BCOST(3, 7) = \min\{BCOST(2, 2)+2, BCOST(2, 3)+7, BCOST(2, 5)+11\} = 11$

$BCOST(3, 8) = \min\{BCOST(2, 2)+1, BCOST(2, 4)+11, BCOST(2, 5)+8\} = 10$



中国科学院大学

University of Chinese Academy of Science 22

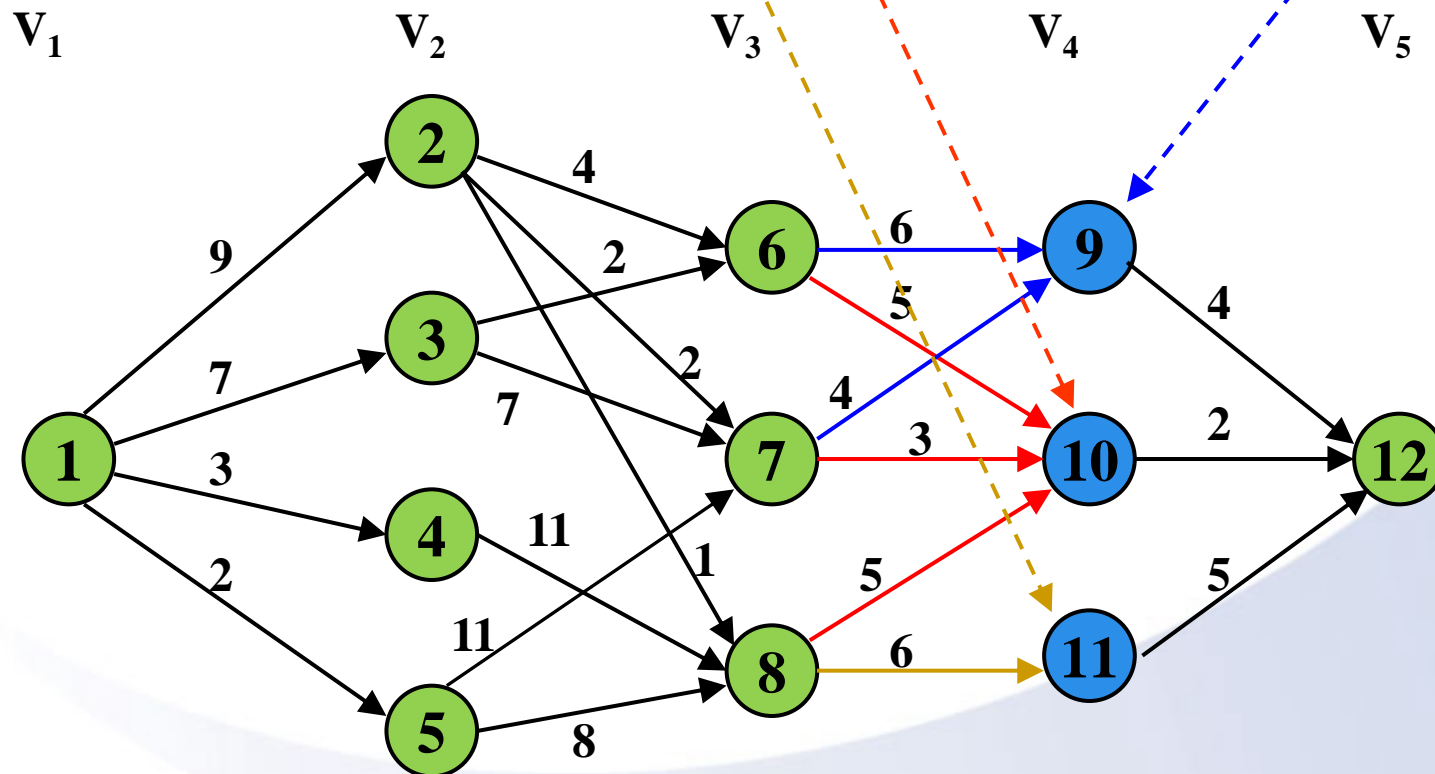
$$BCOST(i, j) = \min_{\substack{l \in V_{i-1} \\ (l, j) \in E}} \{BCOST(i-1, l) + c(l, j)\}$$

第4段

$$BCOST(4, 9) = \min\{BCOST(3, 6)+6, BCOST(3, 7)+4\} = 15$$

$$BCOST(4, 10) = \min\{BCOST(3, 6)+5, BCOST(3, 7)+3, BCOST(3, 8)+5\} = 14$$

$$BCOST(4, 11) = \min\{BCOST(3, 8)+6\} = 16$$



5段图

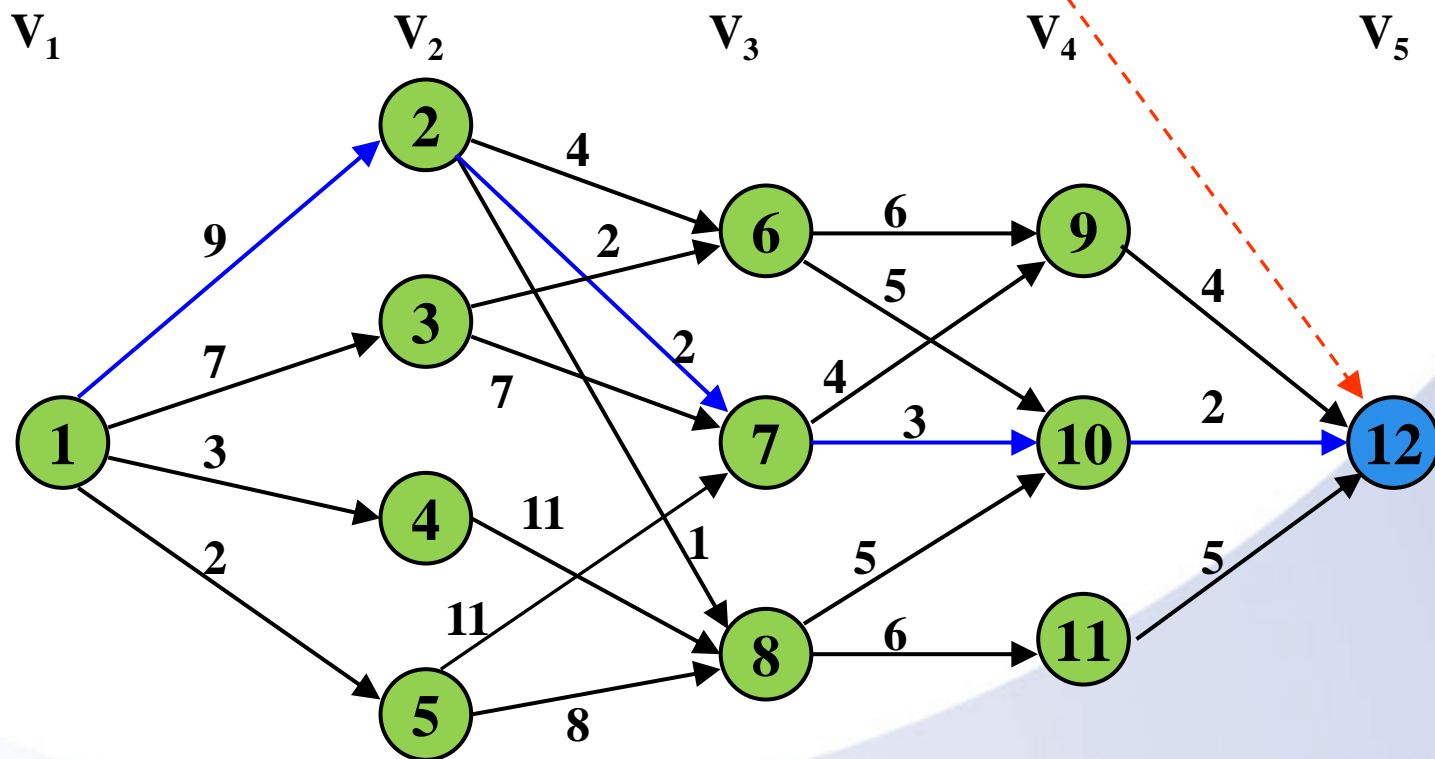


中国科学院大学

University of Chinese Academy of Science 23

$$BCOST(i, j) = \min_{\substack{l \in V_{i-1} \\ (l, j) \in E}} \{BCOST(i-1, l) + c(l, j)\}$$

第5段 $BCOST(5, 12) = \min\{BCOST(4, 9)+4, \textcolor{red}{BCOST(4, 10)+2}, BCOST(4, 11)+5\}$
 $= \textcolor{red}{16}$



s到t的最小成本路径的成本 = $\textcolor{red}{16}$



★各递推结果

第2段 $\text{BCOST}(2, 2) = 9$ $\text{BCOST}(2, 3) = 7$

$\text{BCOST}(2, 4) = 3$ $\text{BCOST}(2, 5) = 2$

第3段 $\text{BCOST}(3, 6) = \min\{\text{BCOST}(2, 2)+4, \text{BCOST}(2, 3)+2\} = 9$

$\text{BCOST}(3, 7) = \min\{\text{BCOST}(2, 2)+2, \text{BCOST}(2, 3)+7, \\ \text{BCOST}(2, 5)+11\} = 11$

$\text{BCOST}(3, 8) = \min\{\text{BCOST}(2, 4)+11, \text{BCOST}(2, 5)+8\} = 10$

第4段 $\text{BCOST}(4, 9) = \min\{\text{BCOST}(3, 6)+6, \text{BCOST}(3, 7)+4\} = 15$

$\text{BCOST}(4, 10) = \min\{\text{BCOST}(3, 6)+5, \text{BCOST}(3, 7)+3, \\ \text{BCOST}(3, 8)+5\} = 14$

$\text{BCOST}(4, 11) = \min\{\text{BCOST}(3, 8)+6\} = 16$

第5段 $\text{BCOST}(5, 12) = \min\{\text{BCOST}(4, 9)+4, \text{BCOST}(4, 10)+2, \\ \text{BCOST}(4, 11)+5\} \\ = 16$

s到t的最小成本路径的成本 = 16



★ 最小路径的求取

记 $BD(i, j)$ = 每一 $COST(i, j)$ 的决策

即, 使 $COST(i-1, l) + c(l, j)$ 取得最小值的 l 值。

例: $BD(3, 6) = 3$, $BD(3, 7) = 2$, $BD(3, 8) = 5$

$BD(4, 9) = 6$, $BD(4, 10) = 7$, $BD(4, 11) = 8$

$BD(5, 12) = 10$

根据 $D(5, 12)$ 的决策值向前递推求取最小成本路径:

● $v_4 = BD(5, 12) = 10$

● $v_3 = BD(4, BD(5, 12)) = BD(4, 10) = 7$

● $v_2 = BD(3, BD(4, BD(5, 12))) = BD(3, 7) = 2$

故由 s 到 t 的最小成本路径是: $1 \rightarrow 2 \rightarrow 7 \rightarrow 10 \rightarrow 12$



第一段

$$\text{BCOST}(2,2)=\text{COST}(1,2)=9$$

$$\text{BCOST}(2,3)=\text{COST}(1,3)=7$$

$$\text{BCOST}(2,4)=\text{COST}(1,4)=3$$

$$\text{BCOST}(2,5)=\text{COST}(1,5)=2$$

第二段

$$\text{BCOST}(3,6)=\min\{\text{BCOST}(2,2)+4, \text{BCOST}(2,3)+2\}=9$$

$$\text{BCOST}(3,7)=\min\{\text{BCOST}(2,2)+2, \text{BCOST}(2,3)+7, \text{BCOST}(2,5)+11\}=11$$

$$\text{BCOST}(3,8)=\min\{\text{BCOST}(2,2)+1, \text{BCOST}(2,4)+11, \text{BCOST}(2,5)+8\}=10$$

第三段

$$\text{BCOST}(4,9)=\min\{\text{BCOST}(3,6)+6, \text{BCOST}(3,7)+4\}=15$$

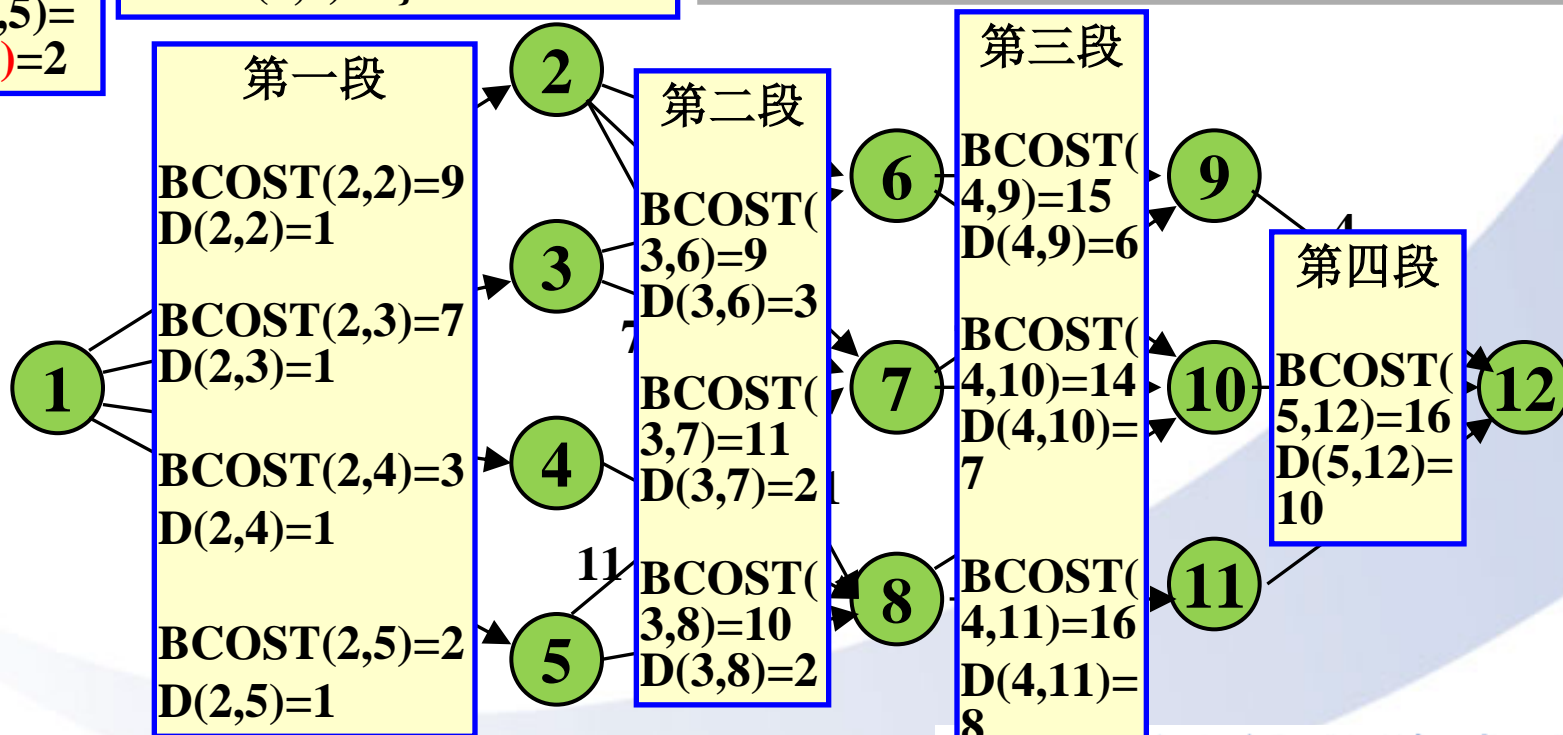
$$\text{BCOST}(4,10)=14$$

$$\text{BCOST}(4,11)=16$$

第四段

$$\text{BCOST}(5,12)=\min\{\text{BCOST}(4,9)+4, \text{BCOST}(4,10)+2, \text{BCOST}(4,11)+5\}=16$$

s到t的最小成本路径的成本：16

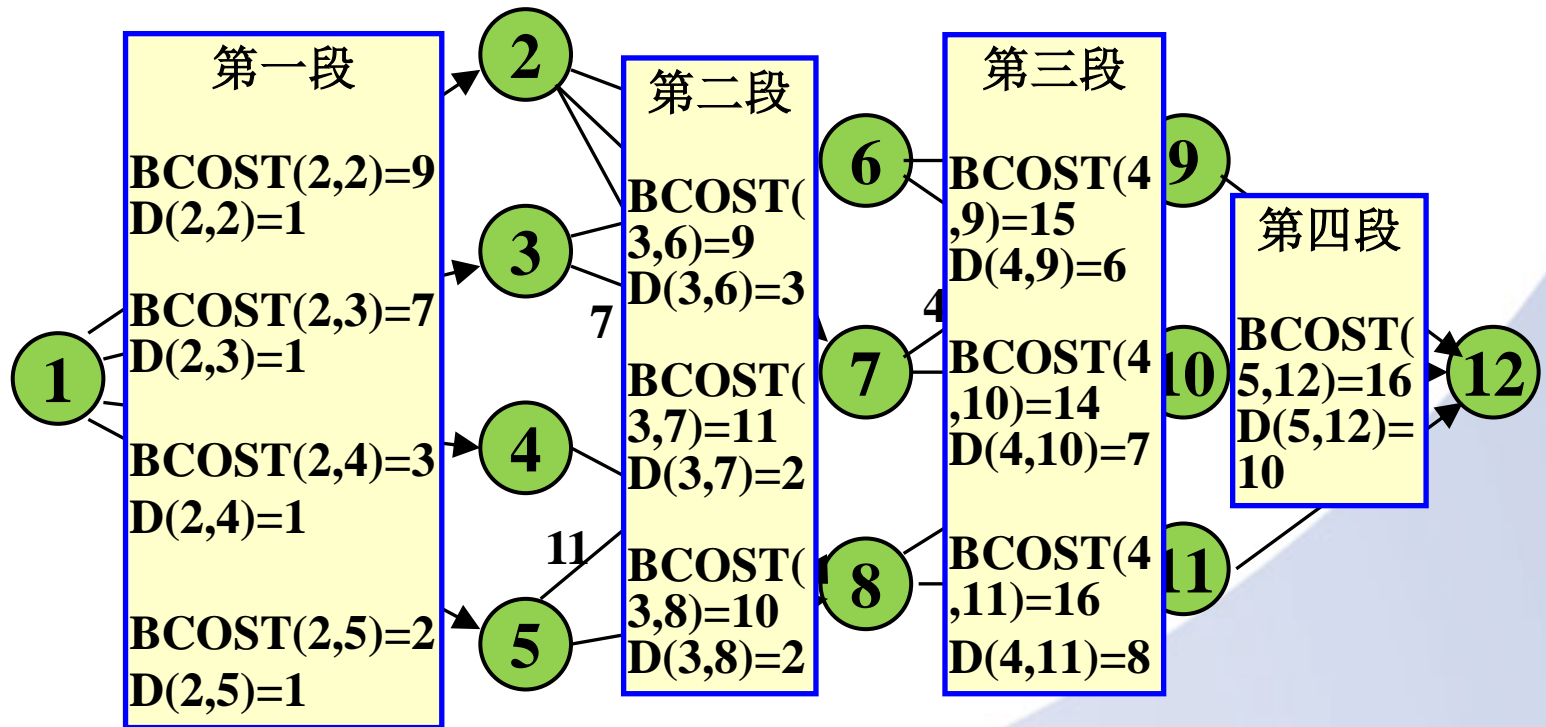


$$\text{BCOST}(i, j) = \min_{\substack{l \in v_{i-1} \\ (l, j) \in E}} \{ \text{COST}(i-1, l) + c(l, j) \}$$



中国科学院大学

University of Chinese Academy of Sciences 27

V_1 V_2 V_3 V_4 V_5 

中国科学院大学

University of Chinese Academy of Sciences 28

算法5.2 多段图的向后处理算法

procedure BGRAPH(E, k, n, P)

//输入是按段的顺序给结点编号的, 有n个结点的k段图。E是边集, $c(i, j)$ 是边 $\langle i, j \rangle$ 的成本。P(1:k)带出最小成本路径//

real BCOST(n); **integer** BD(n-1), P(k), r, j, k, n

BCOST(1) \leftarrow 0

for j \leftarrow 2 **to** n **do** //计算BCOST(j)//

 设r是具有 $\langle r, j \rangle \in E$ 且使BCOST(r)+ $c(r, j)$ 取最小值性质的结点

 BCOST(j) \leftarrow BCOST(r)+ $c(r, j)$

 BD(j) \leftarrow r //记录决策值//

repeat

P(1) \leftarrow 1; P(k) \leftarrow n

for j \leftarrow k-1 **to** 2 **by** -1 **do** //找路径上的第j个结点//

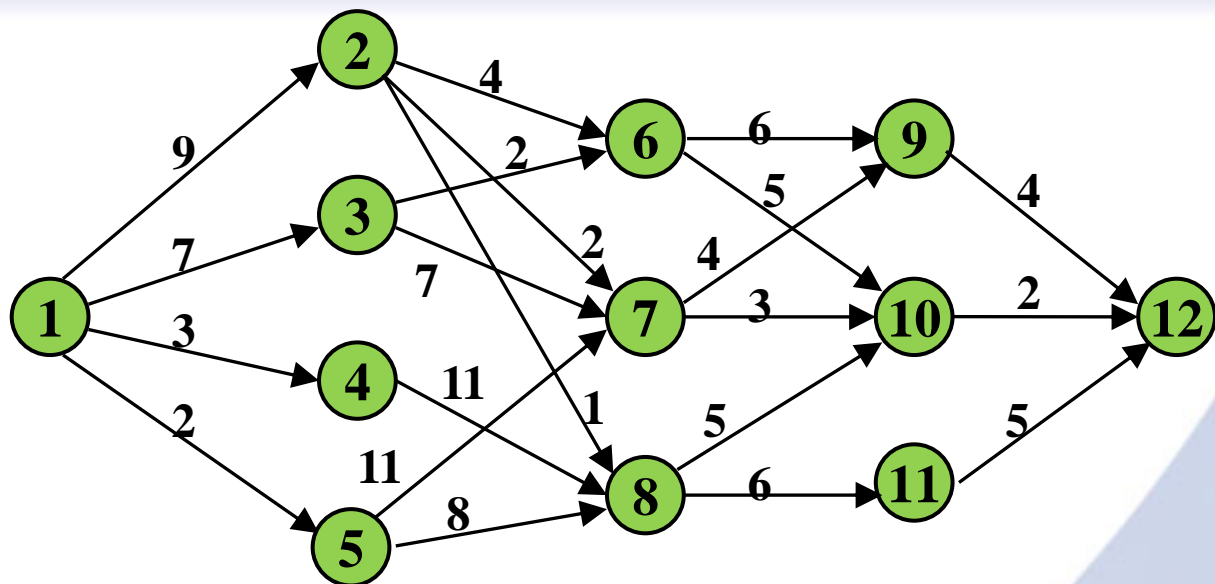
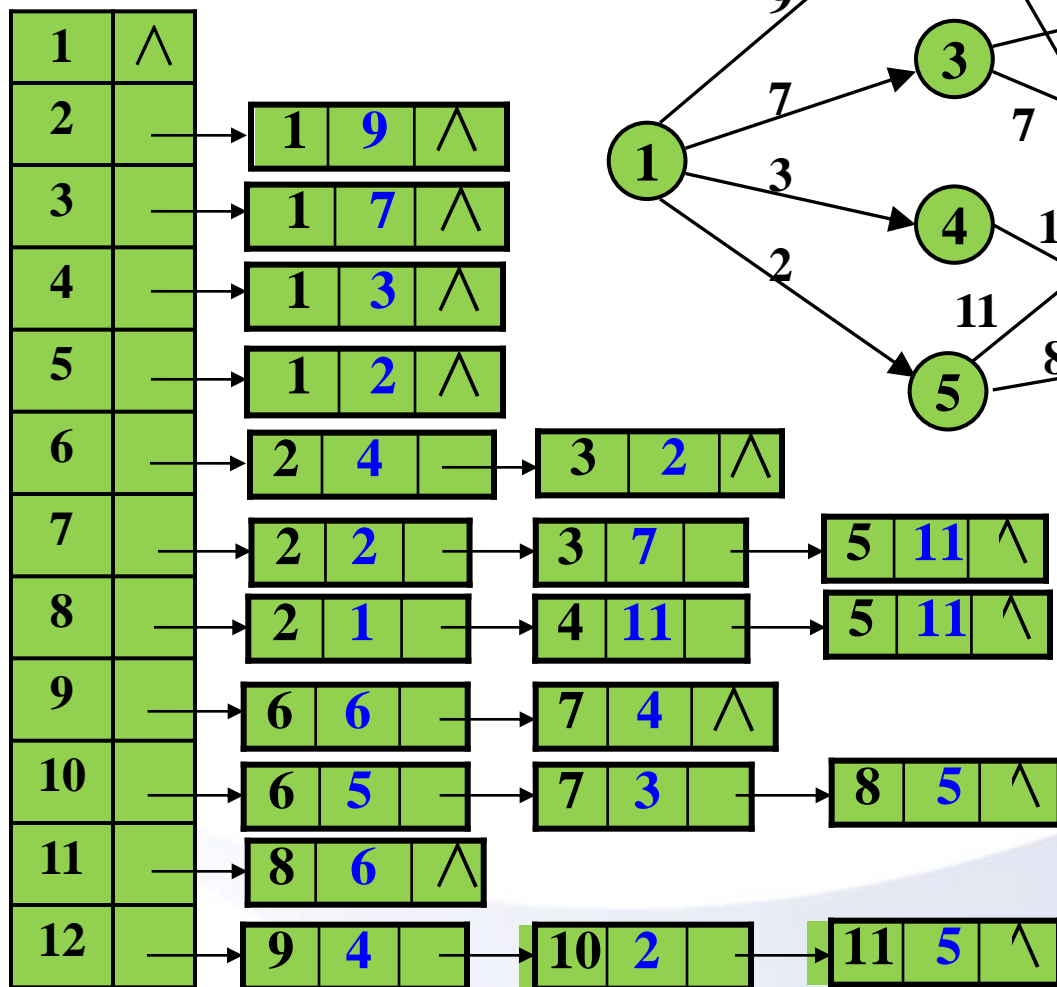
 P(j) \leftarrow D(P(j+1)) //回溯求出该路径//

repeat

end BGRAPH



5.2 多段图问题



多段图用逆邻接表来存储



中国科学院大学

University of Chinese Academy of Sciences 30

5.2 多段图问题

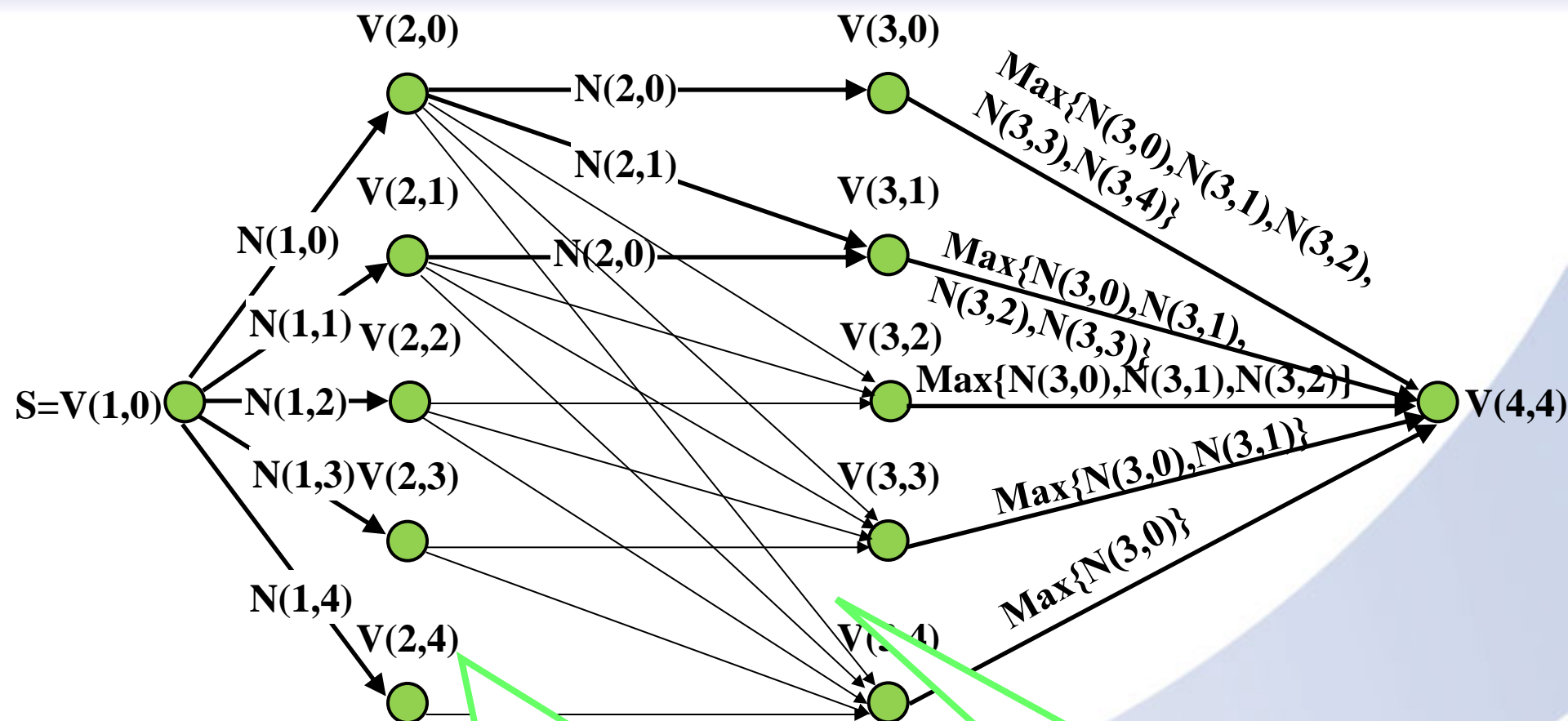
■ 4. 资源的分配问题

□ 问题描述

- 将 n 个资源分配给 r 个项目的问题：如果把 j 个资源， $0 \leq j \leq n$ ，分配给项目 i ，可以获得 $N(i, j)$ 的净利。
- 问题：如何将这 n 个资源分配给 r 个项目才能使各项目获得的净利之和达到最大。（假设分配顺序为项目1, 2, 3, 4并且一次就分配完，一个资源只能分配给一个项目）
- 转换成一个多段图问题求解。



4(n)个资源分给3(r)个项目的4(r+1)段图构造

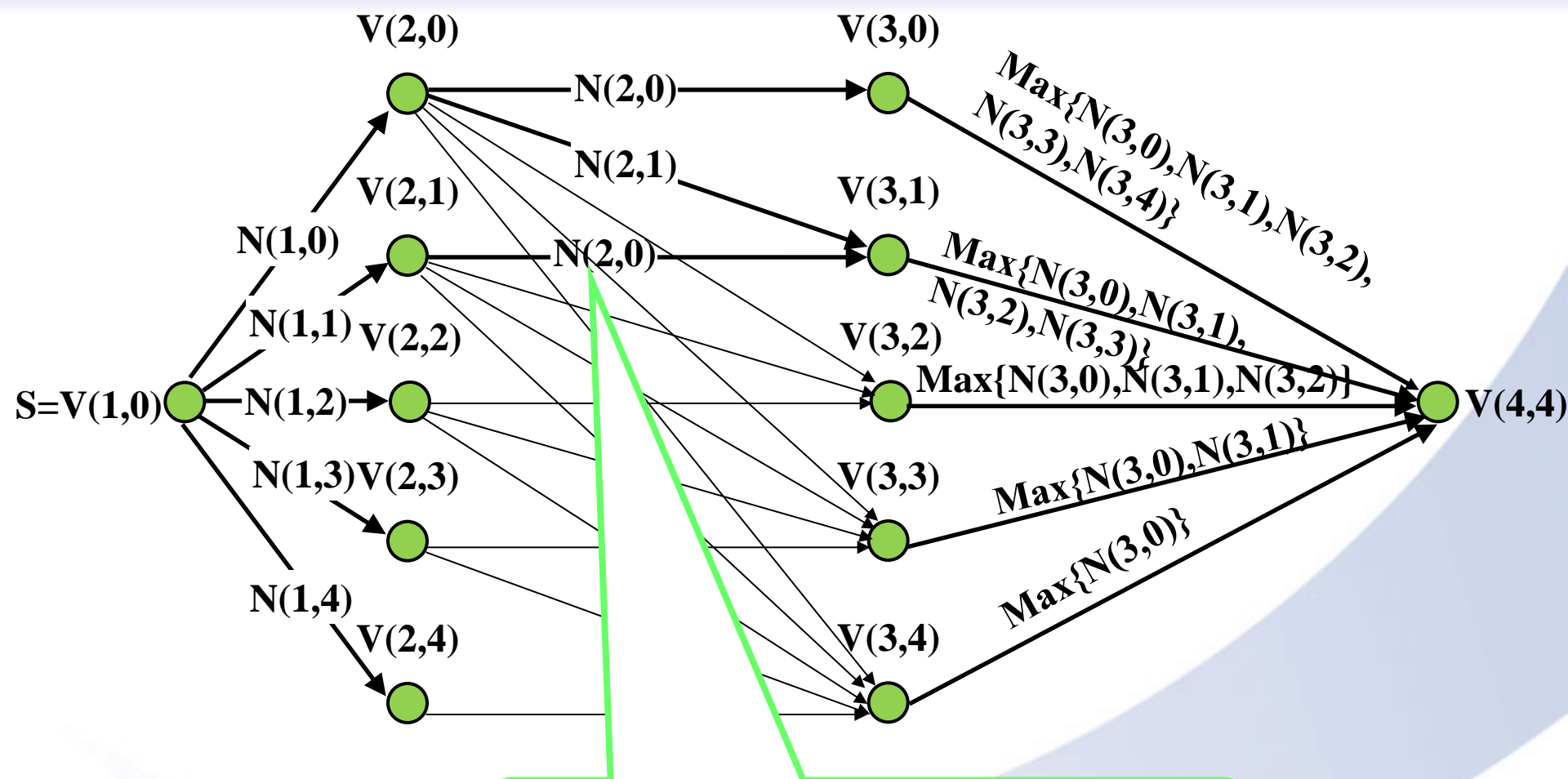


$V(i, j)$: 表示到项目*i*之前为止，共把*j*个资源分配给了前*i-1*个项目， $j=0, 1, \dots, n$ 。

边的一般形式: $\langle V(i, j), V(i+1, l) \rangle, j \leq l, 1 \leq i \leq r$

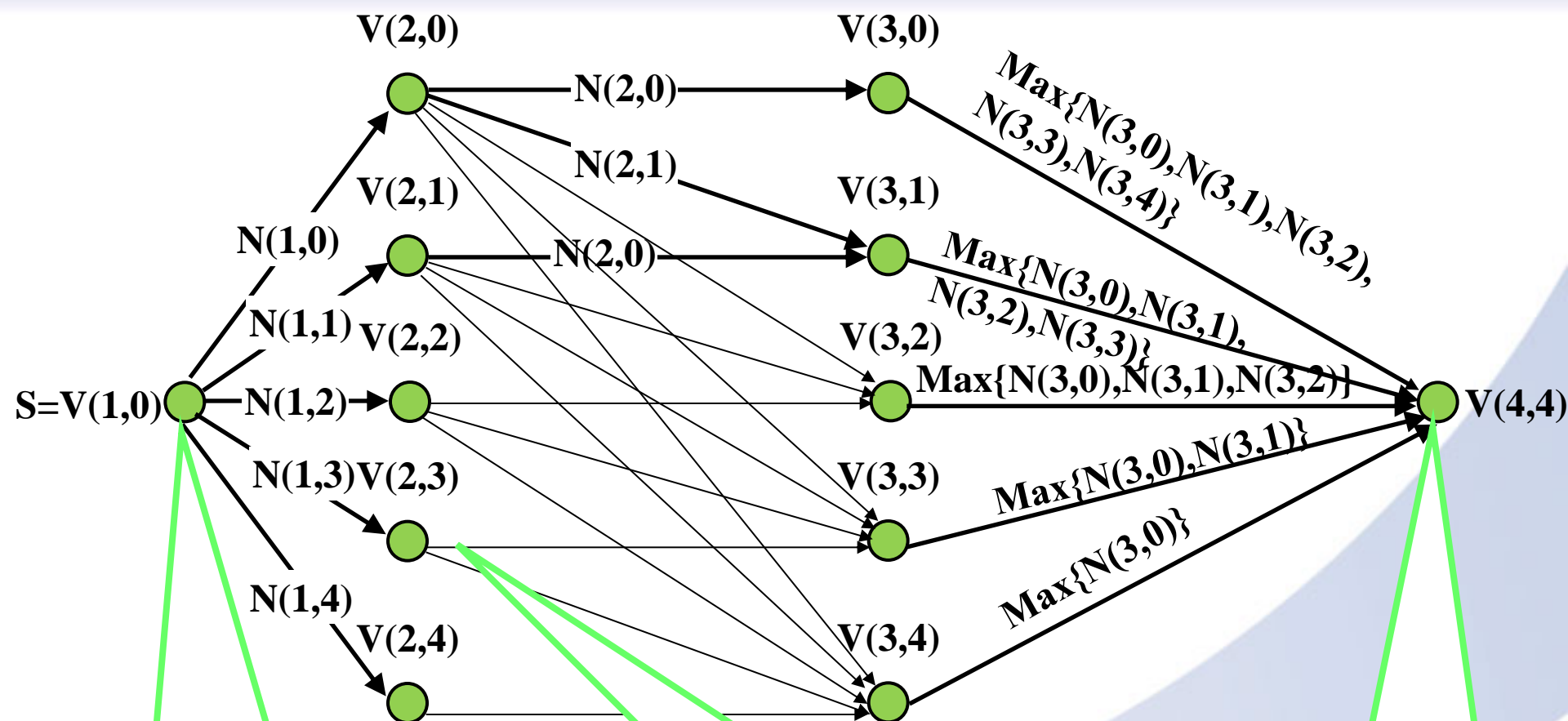


4(n)个资源分给3(r)个项目的4(r+1)段图构造



当 $j \leq l$ 且 $1 \leq i \leq r$ 时，边 $\langle V(i, j), V(i+1, l) \rangle$ 赋予成本 $N(i, l-j)$ ，表示给项目 i 分配 $l-j$ 个资源所可能获得的净利。

4(n)个资源分给3(r)个项目的4(r+1)段图构造



第1段

为项目0分配资源。i=1
只有一个结点 $V(1, 0)$ 。

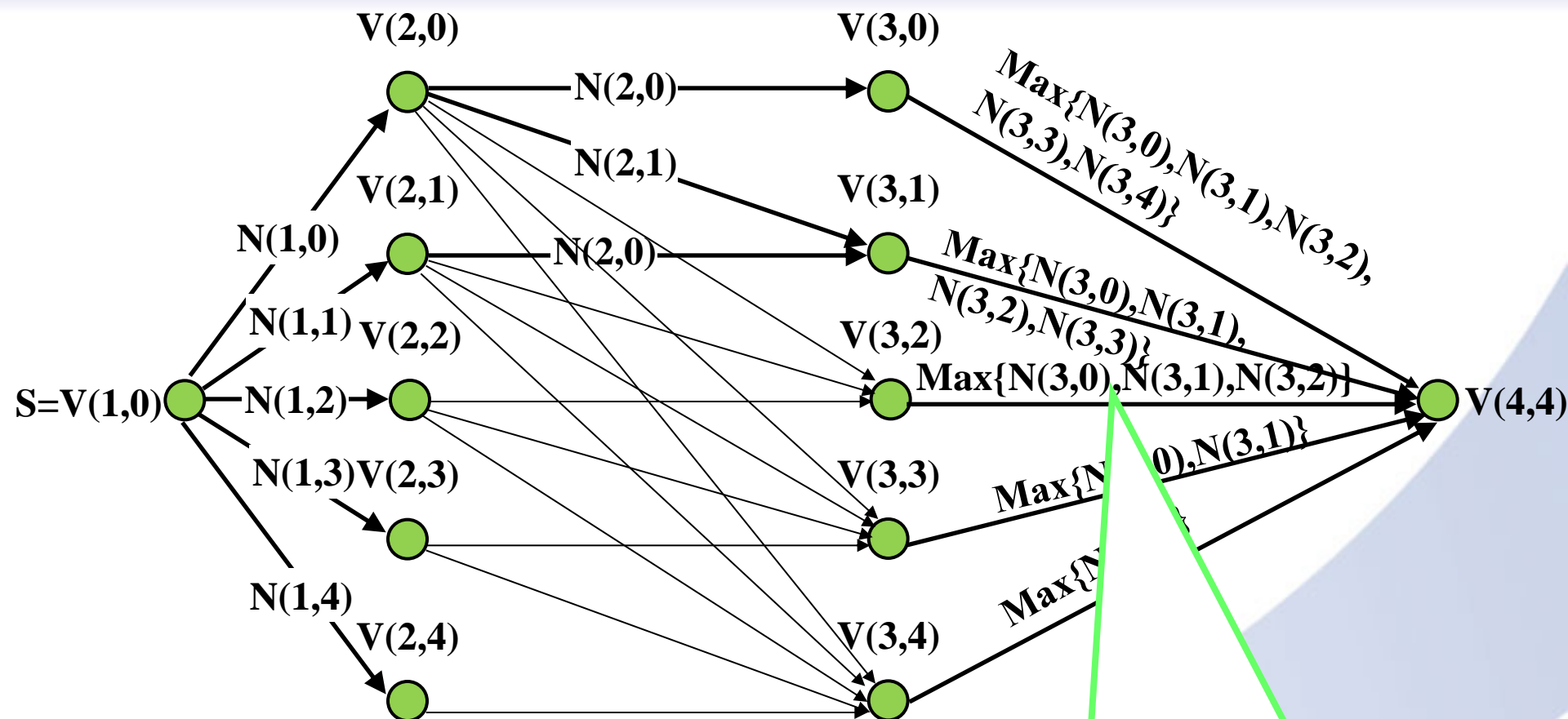
第i段

i:2~r。每段有n+1个
结点。

第r+1段

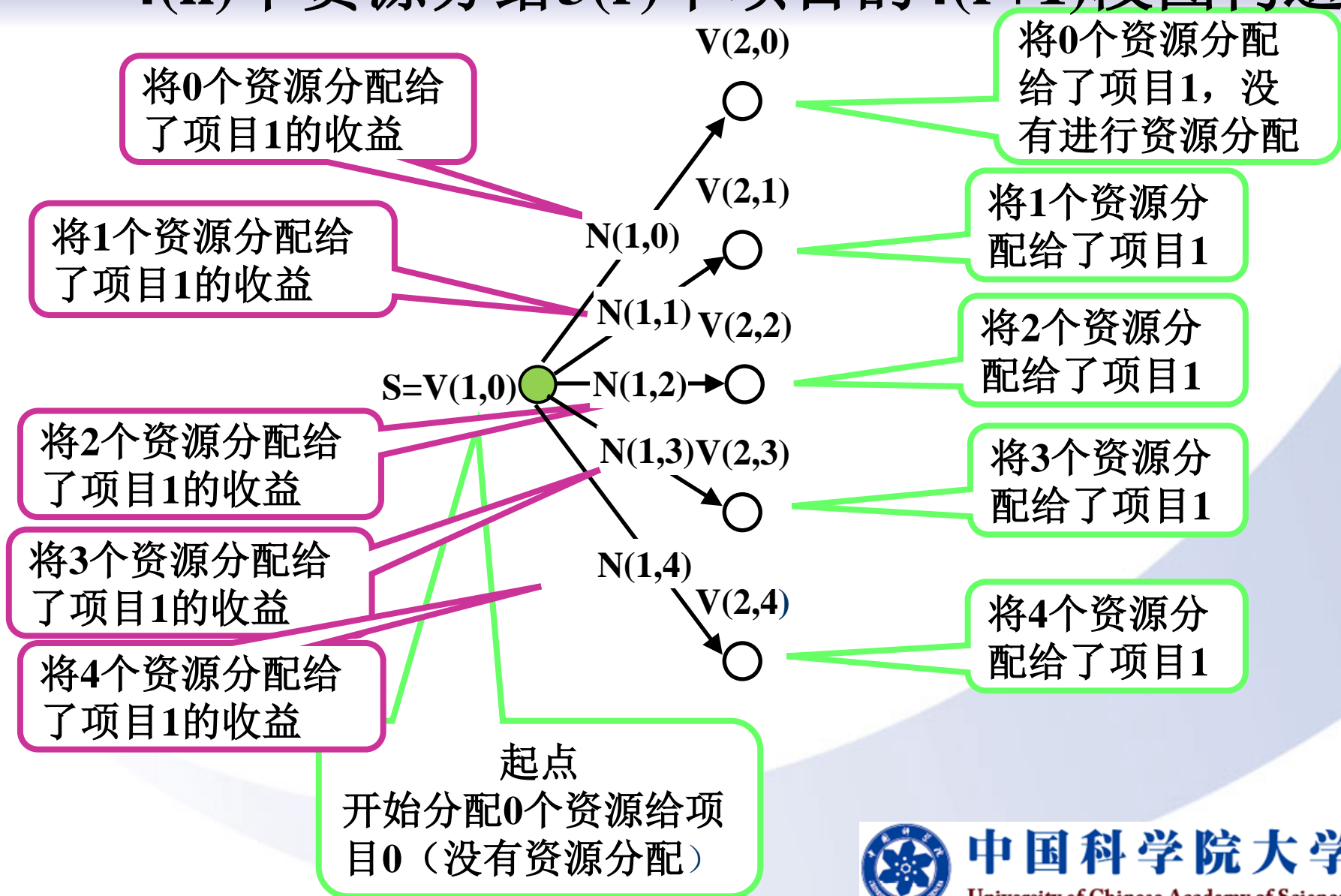
有1个结点 $V(r+1, n)$ 。

4(n)个资源分给3(r)个项目的4(r+1)段图构造

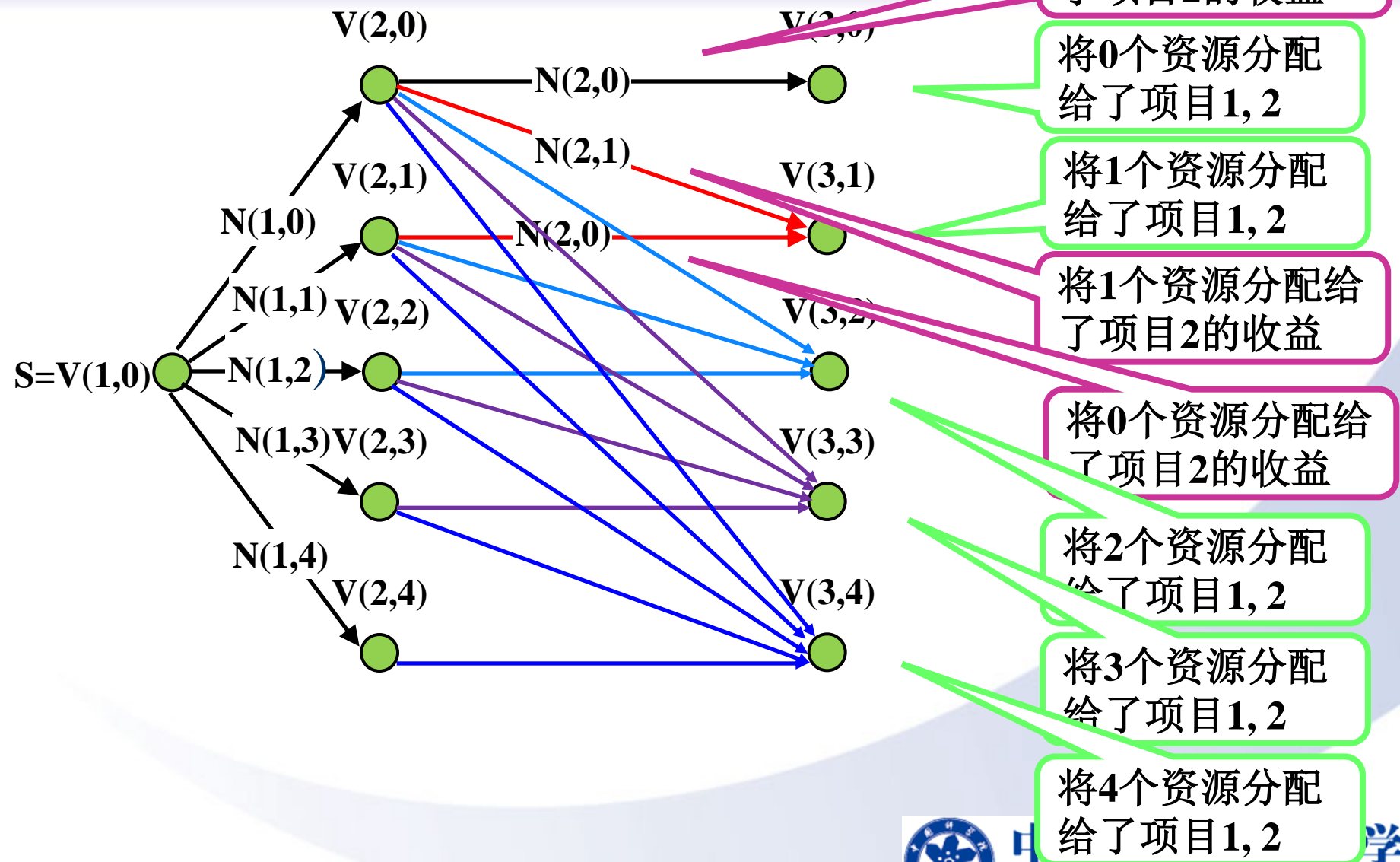


当 $j \leq n$ 且 $i = r$ 时, 此时的边为: $\langle V(r, j), V(r+1, n) \rangle$, 该边赋予成本: $\max_{0 \leq p \leq n-j} \{N(r, p)\}$

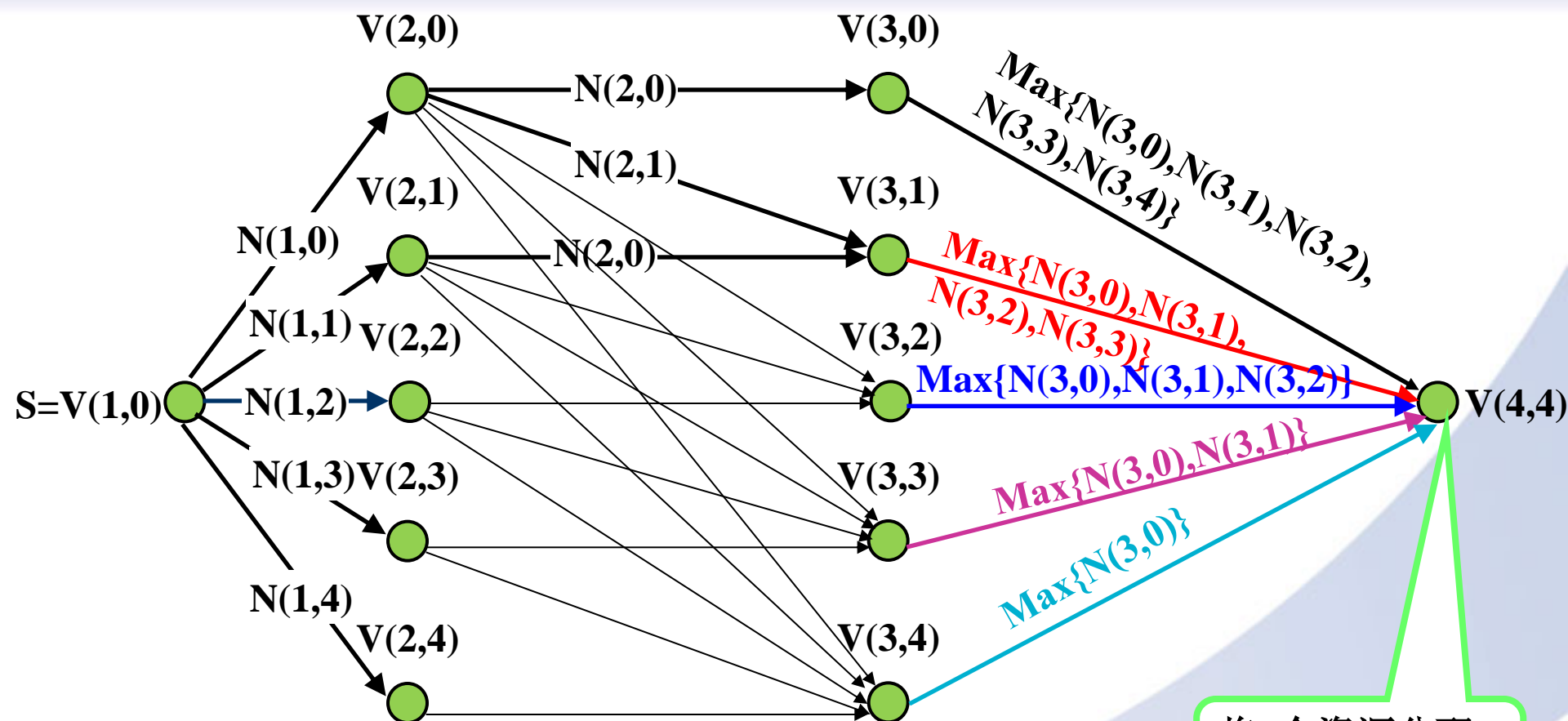
4(n)个资源分给3(r)个项目的4(r+1)段图构造



4(n)个资源分给3(r)个项目的4(r+1)段图构造



4(n)个资源分给3(r)个项目的4(r+1)段图构造



将4个资源分配给了项目1, 2, 3



中国科学院大学

University of Chinese Academy of Sciences 38

第五章 动态规划

- 5.1 一般方法
- 5.2 多段图问题
- 5.3 每对结点之间的最短路径
- 5.4 最优二分检索树
- 5.5 0/1背包问题
- 5.6 可靠性设计
- 5.7 货郎担问题
- 5.8 流水线调度问题

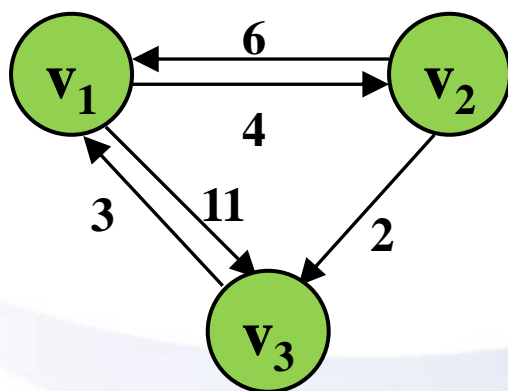


5.3 每对结点之间的最短路径

■ 1. 问题描述

□ 设 $G=(V, E)$ 是一个有 n 个结点的有向图， C 是 G 的成本邻接矩阵， C 中元素有：

$$c(i, j) = \begin{cases} 0, & i = j \\ \text{边} \langle i, j \rangle \text{的成本}, & i \neq j \text{ 且 } \langle i, j \rangle \in E(G) \\ \infty, & i \neq j \text{ 且其中 } 1 \leq i, j \leq n \end{cases}$$



	1	2	3
1	0	4	11
2	6	0	2
3	3	∞	0

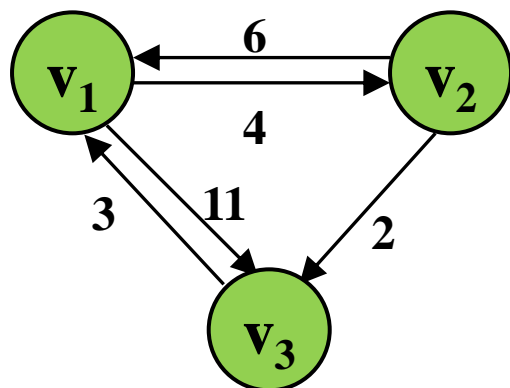


5.3 每对结点之间的最短路径

■ 1. 问题描述

□ 每对结点之间的最短路径问题：

➤ 求满足下述条件的矩阵 A ， A 中的任一元素 $A(i, j)$ 代表结点 i 到结点 j 的最短路径长度。



	1	2	3
1	0	4	11
2	6	0	2
3	3	∞	0

C: 成本邻接矩阵



	1	2	3
1	0	4	6
2	5	0	2
3	3	7	0

A: 每对结点间最短路径矩阵



5.3 每对结点之间的最短路径

■ 1. 问题描述

□ 利用单源最短路径算法求解

➤ 计算 n 个结点的单源最短路径。

➤ 时间复杂度： $O(n^3)$ 。

□ 利用动态规划策略求解

➤ 将求解 G 中每对结点之间的最短路径问题转化成一个多阶段决策过程。

➤ 最优性原理对于该问题是否成立？

➤ 决策什么？



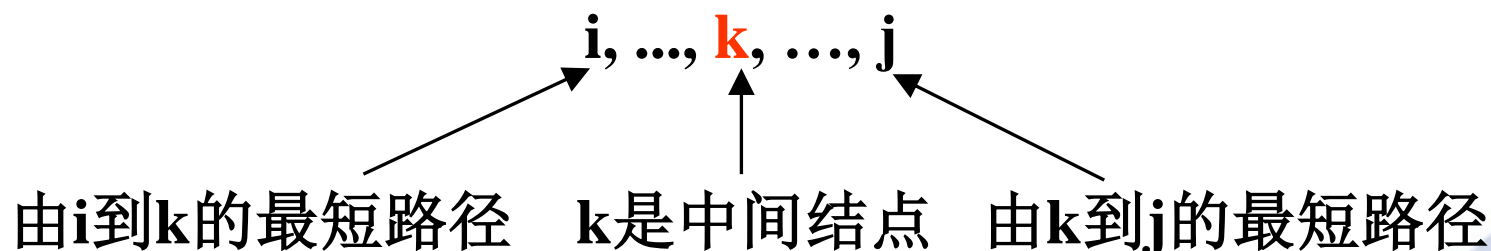
5.3 每对结点之间的最短路径

■ 2. 动态规划求解策略

即证明最短路径具有最优性原理刻画性质

□ 最优性原理对于每对结点之间的最短路径问题成立

对 G 的一条由 i 到 j 的最短路径(假设该路径中不包含环), 设 k 是该路径上的一个中间结点:



则, 由 i 到 k 和 k 到 j 的两条子路径将分别是由 i 到 k 和由 k 到 j 的最短路径。否则 i, \dots, k, \dots, j 也将不是由 i 到 j 的最短路径。

故, 最优性原理对于该问题成立。



5.3 每对结点之间的最短路径


■ 2. 动态规划求解策略

□ 多阶段决策过程

假设所有 n 个结点依次有从1到 n 的编号。

设 k 是由 i 到 j 的最短路径上编号最高的中间结点：

i, \dots, k, \dots, j



k 是编号最高的中间结点

则由 i 到 k 的子路径上将不会有比编号 $k-1$ 更大的结点；同理，由 k 到 j 的子路径上也将不会有比编号 $k-1$ 更大的结点。

构造多阶段决策过程：对由 i 到 j 的最短路径，首先决策哪一个结点是该路径上具有最大编号的中间结点 k ，然后再去求取由 i 到 k 和由 k 到 j 的最短路径——其中应不包含比 $k-1$ 还大的中间结点。



5.3 每对结点之间的最短路径

■ 2. 动态规划求解策略

□ 递推关系式

- 记 $A^k(i, j)$ 表示从 i 到 j 并且不经过比 k 还大的结点的
最短路径长度。
- $A^0(i, j)$: i 至 j 的路径上中间不包含任何中间结点
- $A^1(i, j)$: i 至 j 的路径上可以包含中间结点, 但仅能
是结点1
- $A^2(i, j)$: i 至 j 的路径上中间结点可以是结点1, 2
- $A^3(i, j)$: i 至 j 的路径上中间结点可以是结点1, 2, 3
- ...



5.3 每对结点之间的最短路径

■ 2. 动态规划求解策略

□ 递推关系式

- $A^n(i, j)$: i 至 j 的路径上中间可以包含结点 $1, 2, \dots, n(i, j)$ 除外)
- 因为所有结点的编号不会大于 n , 所以 $A(i, j) = A^n(i, j)$, 即由 i 到 j 的最短路径不通过编号比 n 还大的结点。
- 所有的 $A(i, j)$ 构成结果矩阵 A 。



5.3 每对结点之间的最短路径

■ 2. 动态规划求解策略

□ 递推关系式

➤ 注：该路径可以经过结点n，也可以不经过结点n。

✓ 若该路径不经过结点n，则

$$A^n(i, j) = A^{n-1}(i, j)$$

✓ 若该路径经过结点n，则

$$A^n(i, j) = A^{n-1}(i, n) + A^{n-1}(n, j)$$

➤ 故可得

$$A^n(i, j) = \min\{A^{n-1}(i, j), A^{n-1}(i, n) + A^{n-1}(n, j)\}$$

不经过n结点

经过n结点



5.3 每对结点之间的最短路径

■ 2. 动态规划求解策略

□ 递推关系式

➤ 注：对任意的 k , $k \geq 1$ 有,

$$A^k(i, j) = \min\{A^{k-1}(i, j), A^{k-1}(i, k) + A^{k-1}(k, j)\}$$

不经过 k 结点

经过 k 结点

➤ 初值:

$$A^0(i, j) = C(i, j), 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$$

➤ 递推计算:

$$A^1(i, j) = \min\{A^0(i, j), A^0(i, 1) + A^0(1, j)\}$$

$$A^2(i, j) = \min\{A^1(i, j), A^1(i, 2) + A^1(2, j)\}$$

...

$$\begin{aligned} A^n(i, j) &= \min\{A^{n-1}(i, j), A^{n-1}(i, n) + A^{n-1}(n, j)\} \\ &= A(i, j) \end{aligned}$$



算法5.3 每对结点之间的最短路径长度

procedure ALL-PATHS(COST, A, n)

//COST(n,n)是n结点图的成本邻接矩阵; A(i, j)是结点 v_i 到 v_j 的最短路径的成本; COST(i, i)=0, $1 \leq i \leq n$ //

integer i, j, k, n; **real** COST(n, n), A(n, n)

for i \leftarrow 1 **to** n **do**

for j \leftarrow 1 **to** n **do**

 A(i, j) \leftarrow COST(i, j) //用COST(i, j)对 A^0 赋初值//

repeat

repeat

for k \leftarrow 1 **to** n **do**

for i \leftarrow 1 **to** n **do**

for j \leftarrow 1 **to** n **do**

 A(i, j) \leftarrow min{A(i, j), A(i, k) + A(k, j)}

repeat

repeat

repeat

end ALL-PATHS

$A^0(i, j)$

$A^1(i, j), A^2(i, j), \dots, A^n(i, j) = A(i, j)$

$A^k(i, j) = \min\{A^{k-1}(i, j), A^{k-1}(i, k) + A^{k-1}(k, j)\}$



5.3 每对结点之间的最短路径

■ 3. 算法描述

□ 程序正确性讨论

- \because (1) 在第 $k-1$ 到第 k 次的迭代过程中, A 的第 k 行、第 k 列元素不变, 即

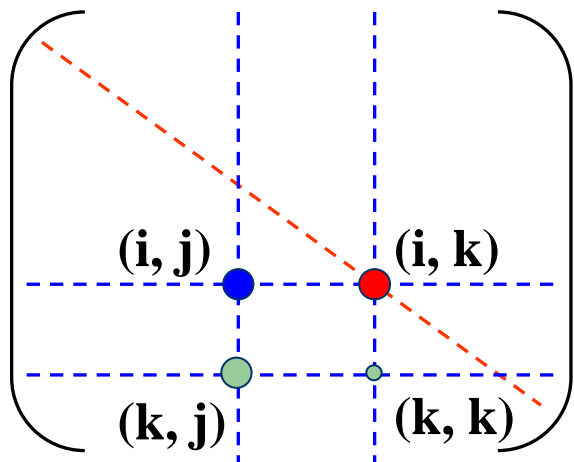
$$A^k(i, k) = A^{k-1}(i, k)$$

$$A^k(k, j) = A^{k-1}(k, j)$$

- (2) 讨论 k 与 i, j 的关系, 可知 $A(i, j)$, $A(i, k)$ 和 $A(k, j)$ 执行的先后次序

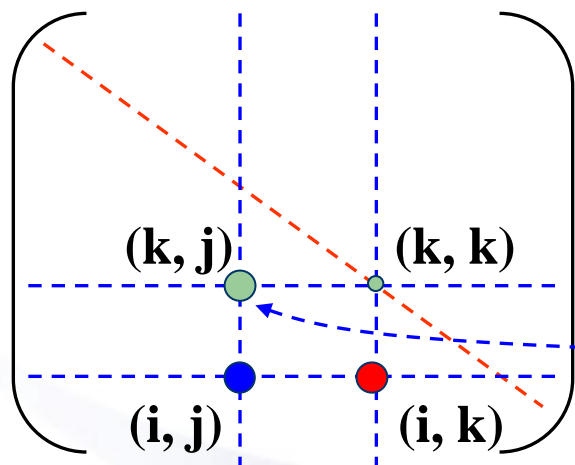


5.3 每对结点之间的最短路径



$k > j$ 且 $k > i$, 则有

$$A^k(i, j) \leftarrow \min\{A^{k-1}(i, j), A^{k-1}(i, k) + A^{k-1}(k, j)\}$$



$k > j$ 且 $k < i$, 则有

$$A^k(i, j) \leftarrow \min\{A^{k-1}(i, j), A^{k-1}(i, k) + A^{k-1}(k, j)\}$$

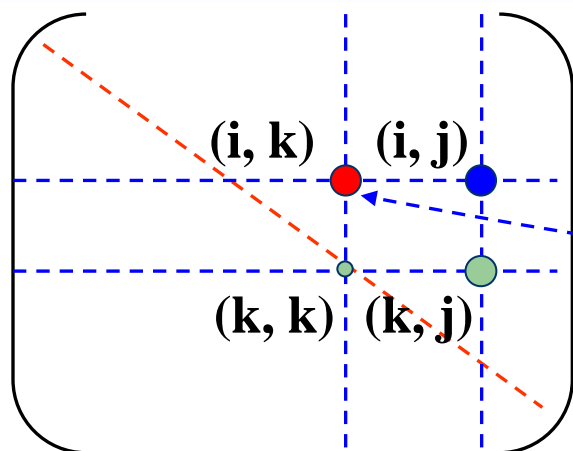
$A^{k-1}(k, j)$



中国科学院大学

University of Chinese Academy of Sciences 51

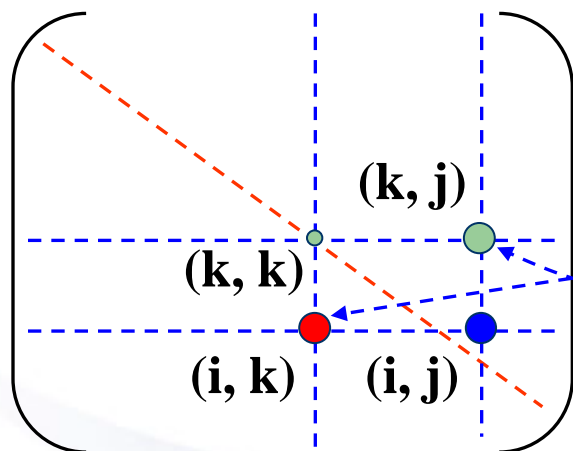
5.3 每对结点之间的最短路径



$k < j$ 且 $k > i$, 则有

$$A^k(i, j) \leftarrow \min\{A^{k-1}(i, j), A^{\mathbf{k}}(i, k) + A^{k-1}(k, j)\}$$

$$A^{k-1}(i, k)$$



$k < j$ 且 $k < i$, 则有

$$A^k(i, j) \leftarrow \min\{A^{k-1}(i, j), A^{\mathbf{k}}(i, k) + A^{\mathbf{k}}(k, j)\}$$

$$A^{k-1}(i, k) \quad A^{k-1}(k, j)$$



5.3 每对结点之间的最短路径

■ 3. 算法描述

□ 程序正确性讨论

$$\left. \begin{aligned} A^k(i, j) &\leftarrow \min\{A^{k-1}(i, j), A^{\mathbf{k}}(i, k) + A^{k-1}(k, j)\} \\ A^k(i, j) &\leftarrow \min\{A^{k-1}(i, j), A^{k-1}(i, k) + A^{\mathbf{k}}(k, j)\} \\ A^k(i, j) &\leftarrow \min\{A^{k-1}(i, j), A^{\mathbf{k}}(i, k) + A^{\mathbf{k}}(k, j)\} \end{aligned} \right\}$$

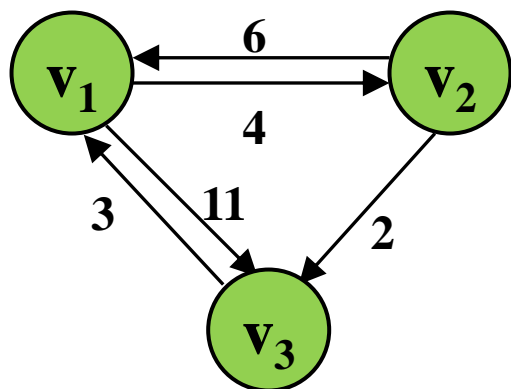
$$\equiv A^k(i, j) \leftarrow \min\{A^{k-1}(i, j), A^{k-1}(i, k) + A^{k-1}(k, j)\}$$

\therefore 在算法的计算过程中取消了A的上标，并保证了每次计算的 $A^k(i, j)$ 即为

$$\min\{A^{k-1}(i, j), A^{k-1}(i, k) + A^{k-1}(k, j)\}$$



例5.8 有向图如图所示



求图中所有结点间的最短路径矩阵A:

A^0	1	2	3
1	0	4	11
2	6	0	2
3	3	∞	0

A^1	1	2	3
1	0	4	11
2	6	0	2
3	3	7	0

	1	2	3
1	0	4	11
2	6	0	2
3	3	∞	0

A^2	1	2	3
1	0	4	6
2	6	0	2
3	3	7	0

A^3	1	2	3
1	0	4	6
2	5	0	2
3	3	7	0

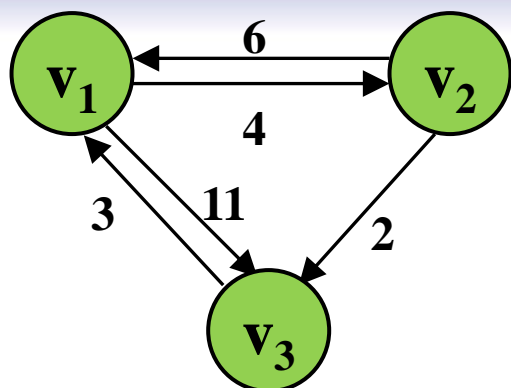
注: $A(i, j) = \infty$ 表明G中从i到j没有有向路径



中国科学院大学

University of Chinese Academy of Sciences 54

例5.8 有向图如图所示



A^0	1	2	3
1	0	4	11
2	6	0	2
3	3	∞	0

A^1	1	2	3
1	0	4	11
2	6	0	2
3	3	7	0

算法的设计说明(1)：

$$A^k(i, k) = A^{k-1}(i, k)$$

$$A^k(k, j) = A^{k-1}(k, j)$$

即：在由第k-1到第k次的迭代过程中，A的第k行、第k列元素保持不变

$$\begin{aligned}
 A^1(2, 3) &= \min\{A^0(2, 3), A^0(2, 1) + A^0(1, 3)\} \\
 &= \min\{2, 6 + 11\} \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

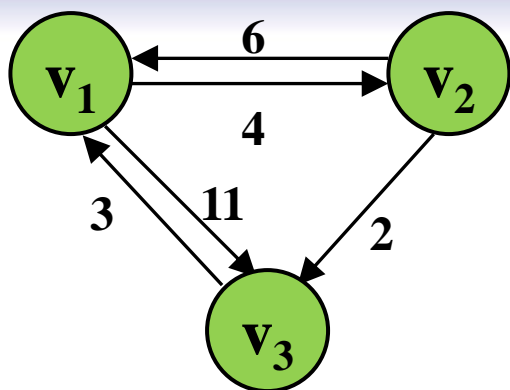
$$\begin{aligned}
 A^1(3, 2) &= \min\{A^0(3, 2), A^0(3, 1) + A^0(1, 2)\} \\
 &= \min\{\infty, 3 + 4\} \\
 &= 7
 \end{aligned}$$



中国科学院大学

University of Chinese Academy of Sciences 55

例5.8 有向图如图所示



A^1	1	2	3
1	0	4	11
2	6	0	2
3	3	7	0

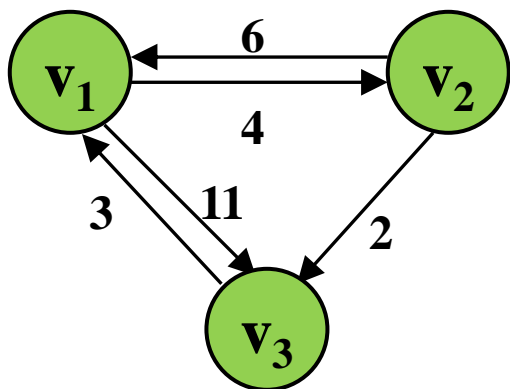
A^2	1	2	3
1	0	4	6
2	6	0	2
3	3	7	0

$$\begin{aligned}
 A^2(1, 3) &= \min\{A^1(1, 3), A^1(1, 2) + A^1(2, 3)\} \\
 &= \min\{11, 4 + 2\} \\
 &= 6
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A^2(3, 1) &= \min\{A^1(3, 1), A^1(3, 2) + A^1(2, 1)\} \\
 &= \min\{3, 7 + 6\} \\
 &= 3
 \end{aligned}$$



例5.8 有向图如图所示



A^2	1	2	3
1	0	4	6
2	6	0	2
3	3	7	0

A^3	1	2	3
1	0	4	6
2	5	0	2
3	3	7	0

$$A^3(1, 2) = \min\{A^2(1, 2), A^2(1, 3) + A^2(3, 2)\}$$

$$= \min\{4, 6 + 7\}$$

$$= 4$$

$$A^3(2, 1) = \min\{A^2(2, 1), A^2(2, 3) + A^2(3, 1)\}$$

$$= \min\{6, 2 + 3\}$$

$$= 5$$



5.3 每对结点之间的最短路径

■ 3. 算法描述

□ 性能分析

➤ 计算时间 $= \Theta(n^3)$

➤ 注：该时间与A的值无关：

for k←1 to n do	→	迭代n次
for i←1 to n do	→	迭代n次
for j←1 to n do	→	迭代n次
$A(i, j) \leftarrow \min\{A(i, j), A(i, k) + A(k, j)\}$		
repeat		
repeat		
repeat		



5.3 每对结点之间的最短路径

■ 3. 算法描述

□ ∞ 的处理

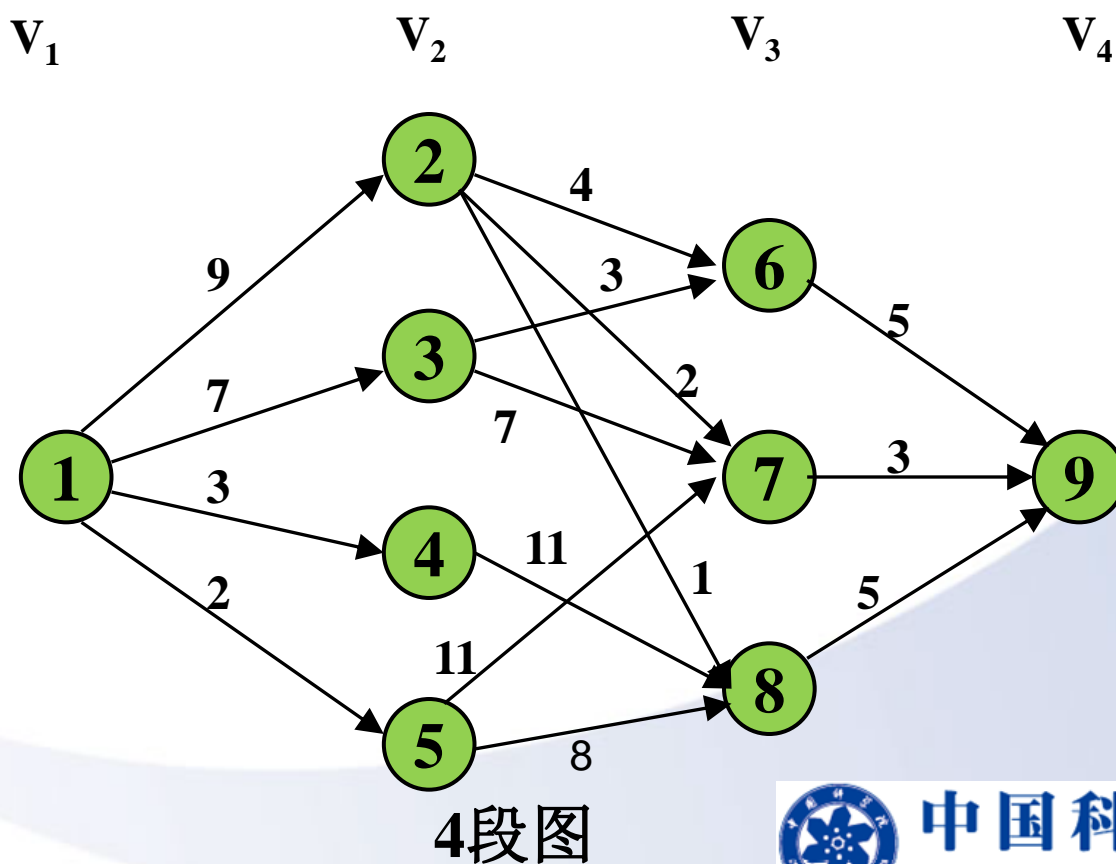
- 设 M 是 E 中最大成本的一条边的成本，则 $A^n(i, j) \leq (n-1)*M$ 。
- 因此，对于成本邻接矩阵中的 ∞ 用一个大于 $(n-1)*M$ 的值代替。
- 如果在算法结束时， $A(i, j) > (n-1)*M$ ，则表明 G 中没有由 i 到 j 的有向路径。



作业-课后练习15

■ 问题描述

□ 用向前递推方法求解下面的四段图问题。

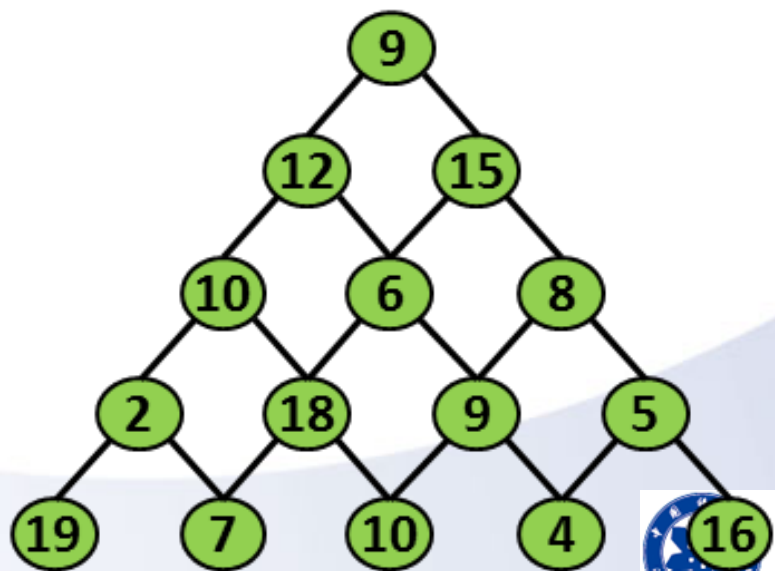


作业-课后练习16

■ 问题描述

□ 给定一个树塔，如下图所示。在此树塔中，从顶部出发，可以选择向左走还是向右走，一直走到最低层。请找出一条路径，使得路径上的数值和最大，并给出该数值和。(15分)

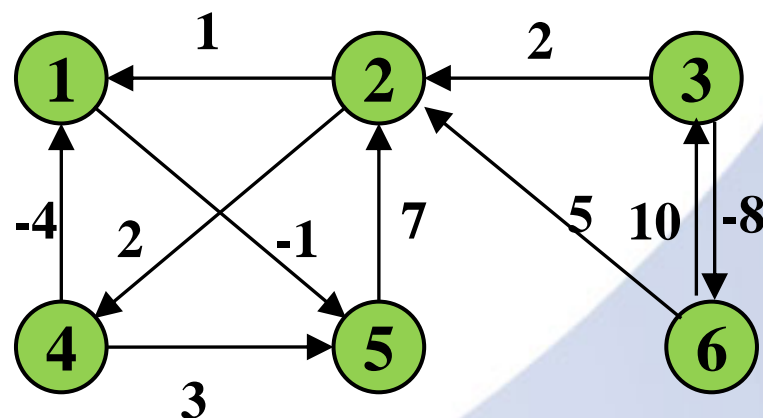
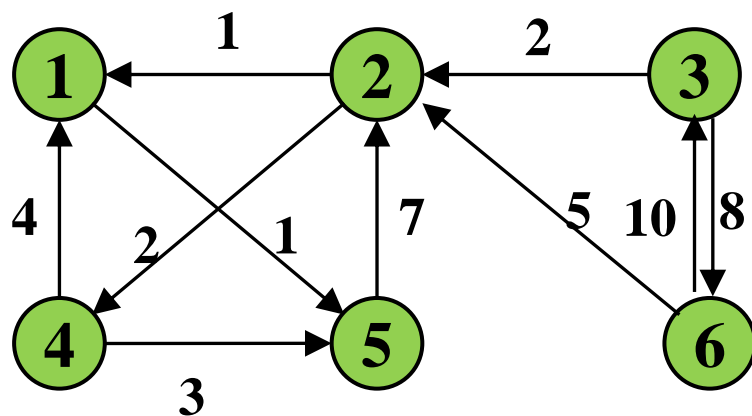
□ 2014年本课程的考试试题



作业-课后练习17

■ 问题描述

□ 求下面两个图里面每对结点之间的最短路径



End

