第十二章 线性规划

马丙鹏

2023年12月25日

中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

第十二章 线性规划

- 12.1 数学模型
- 12.2 图解法
- 12.3 标准型
- 12.4 基本概念
- 12.5 单纯形法

12.5 单纯形法

■ 1. 普通单纯形法

□线性方程组求解方法

- 例，求非齐次线性方程组的通解:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 = 9 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad\qquad = 6 \end{cases}$$

- 解, 两个方程相加，相减后

$$(A|b) = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{化为行最简形}]{\text{初等行变换}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- 由此知系数矩阵的秩与增广矩阵秩相等为2, 即原方程组有无穷多解.

12.5 单纯形法

■ 1. 普通单纯形法

□线性方程组求解方法

➢同解方程组为：

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \quad\quad + x_4 = 5 \\ \quad\quad\quad\quad x_3 - x_4 = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 + 5 \\ x_3 = \quad\quad\quad\quad x_4 + 1 \end{cases}$$

➢令x_2=x_4= 0，可得方程组的一个特解(5, 0, 1, 0)！

中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

12.5 单纯形法

- **1. 普通单纯形法**
  - 单纯形计算方法(Simplex Method)
    - 先求出一个初始基可行解并判断它是否最优，若不是最优，再换一个基可行解并判断，直到得出最优解或无最优解。
    - 它是一种逐步逼近最优解的迭代方法。
    - 当系数矩阵A中可以观察得到一个可行基时（通常是一个单位矩阵或*m*个线性无关的单位向量组成的矩阵），可以通过解线性方程组求得基本可行解。

12.5 单纯形法

■ 1. 普通单纯形法

- □【例12-15】用单纯形法求例12-1线性规划的最优解

$$\max Z = 300x_1 + 400x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 40 \\ x_1 + 3/2x_2 \le 30 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

- ➢【解】化为标准型，加入松弛变量x_3、x_4则标准型为

$$\max Z = 300x_1 + 400x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 40 \\ x_1 + 3/2x_2 + x_4 = 30 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{cases}$$

12.5 单纯形法

■ 1. 普通单纯形法

- 【例12-15】用单纯形法求例12-1线性规划的最优解
  - 系数矩阵A及可行基B_1

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 3/2 & 0 & 1\end{bmatrix}\qquad B_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

  - r(B_1)=2，B_1是一个初始基,
  - x_3、x_4为基变量，x_1、x_2为非基变量，
  - 令x_1 =0、x_2 =0由约束方程知x_3 =40、x_4 =30得到初始基本可行解

$$X^{(1)}=(0, 0, 40, 30)^T$$

12.5 单纯形法

1. 普通单纯形法

- 【例12-15】用单纯形法求例12-1线性规划的最优解
  - 以上得到的一组基可行解是不是最优解，可以从目标函数中的系数看出。
  - 目标函数 $Z=300x_1+400x_2$中x_1的系数大于零，如果x_1为一正数，则Z的值就会增大，同样若x_2不为零为一正数，也能使Z的值增大；
  - 因此只要目标函数中非基变量的系数大于零，那么目标函数就没有达到最大值，即没有找到最优解，
  - 判别线性规划问题是否达到最优解的数称为检验数，记作λ_j，j=1, 2, …, n

12.5 单纯形法

■ 1. 普通单纯形法

- 检验数
  - 目标函数用非基变量表达时的变量系数
  - 本例中λ_1=300, λ_2=400, λ_3=0, λ_4=0。参看表12-6（a）
- 最优解判断标准
  - 当所有检验数$\lambda_j \le 0$ (j=1, …, n) 时，基本可行解为最优解。
- 当目标函数中有基变量x_i时，利用约束条件将目标函数中的x_i消去即可求出检验数。

12.5 单纯形法

- **1. 普通单纯形法**
  - 本例中$\lambda_1=300>0$, $\lambda_2=400>0$, 从而$X^{(1)}$不是最优解，B_1不是最优基。
  - 改进办法
    - 选一个$\lambda_k>0$的非基变量x_k换成基变量，称为进基变量
    - 同时选一个能使所有变量非负的基变量x_l换成非基变量，称为出基变量

12.5 单纯形法

表12-6

基变量

进基列

b_i/a_{i2}, $a_{i2}>0$, 出基检验数

出基行

将3/2化为1

	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	b	θ_i
(a)	x_3	2	1	1	0	40	40
	x_4	1	3/2	0	1	30	20
	λ_j	300	400	0	0		
(b)	x_3	4/3	0	1	-2/3	20	
	x_4	2/3	1	0	2/3	20	
	λ_j						

谁变成0呢？

选择出基行时要保证右列常数始终非负！

如此问题变成了

$$\max Z = 300x_1 + 400x_2$$

$$\frac{4}{3}x_1 \qquad + x_3 - \frac{2}{3}x_4 = 20$$

$$\frac{2}{3}x_1 + x_2 \qquad + \frac{2}{3}x_4 = 20$$

$$x_i \geq 0, i = 1,2,3,4$$

12.5 单纯形法

- **1. 普通单纯形法**
  - 当x_1=0时，
    - 为使$x_3 \geq 0$，有$x_2 \leq 40$
    - 为使$x_4 \geq 0$，有$x_2 \leq 20$
    - 即x_2的上限分别是常数(b_1, b_2)与x_2的系数(a_{12}, a_{22})的比值40与20
    - 显然只有$x_2 \leq 20$时x_3，$x_4 \geq 0$
    - 因为非基变量等于零，所以x_2=20，x_4=0，即x_4为出基变量

12.5 单纯形法

■ 1. 普通单纯形法

□【例12-15】用单纯形法求例12-1线性规划的最优解

$$\max Z = 300x_1 + 400x_2$$

$$\begin{cases} \frac{4}{3}x_1 + x_3 - \frac{2}{3}x_4 = 20 & (1) \\ \frac{2}{3}x_1 + x_2 + \frac{2}{3}x_4 = 20 & (2) \\ x_i \geq 0, i = 1,2,3,4 \end{cases}$$

➢此时的基可行解为(0, 20, 20, 0),是否最优呢？

➢目标函数中有非基变量x_1，其系数大于等于0，让其成为基变量似乎可以使目标函数值增大！

12.5 单纯形法

■ 1. 普通单纯形法

- □【例12-15】用单纯形法求例12-1线性规划的最优解
  - ➢但是，也有基变量x_2，如果x_1进基时，不幸使x_2离基了，那么x_2的值重新归零，就无法保证目标函数值增大了。
  - ➢所以应当让消去目标函数中的基变量，用非基变量表示目标函数！
  - ➢(2)式可化为 $x_2 = 20 - \frac{2}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_4$
  - ➢代入目标函数得

$$z = 300x_1 + 400\left(20 - \frac{2}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_4\right)$$

$$= 8000 + \frac{100}{3}x_1 - \frac{800}{3}x_4$$

12.5 单纯形法

■ 1. 普通单纯形法

□【例12-15】用单纯形法求例12-1线性规划的最优解

➢于是问题转化为

$$\max Z = 8000 + \underline{\frac{100}{3}x_1 - \frac{800}{3}x_4}$$

$$\begin{cases} \frac{4}{3}x_1 \qquad + x_3 - \frac{2}{3}x_4 = 20 & (1) \\ \frac{2}{3}x_1 + x_2 \qquad + \frac{2}{3}x_4 = 20 & (2) \\ x_i \geq 0, i = 1,2,3,4 \end{cases}$$

12.5 单纯形法

■ 1. 普通单纯形法

- 【例12-15】用单纯形法求例12-1线性规划的最优解
  - 这种操作在单纯形表中如下：

	x_1	x_2	x_3	x_4	b
λ_i	300	400	0	0	0
x_3	4/3	0	1	-2/3	20
x_2	2/3	1	0	2/3	20
λ_i	100/3	0	0	-800/3	-8000

目标函数值的相反数！

12.5 单纯形法

表12-6

基变量

进基列

b_i / a_{i2}, $a_{i2}>0$, 出基检验数

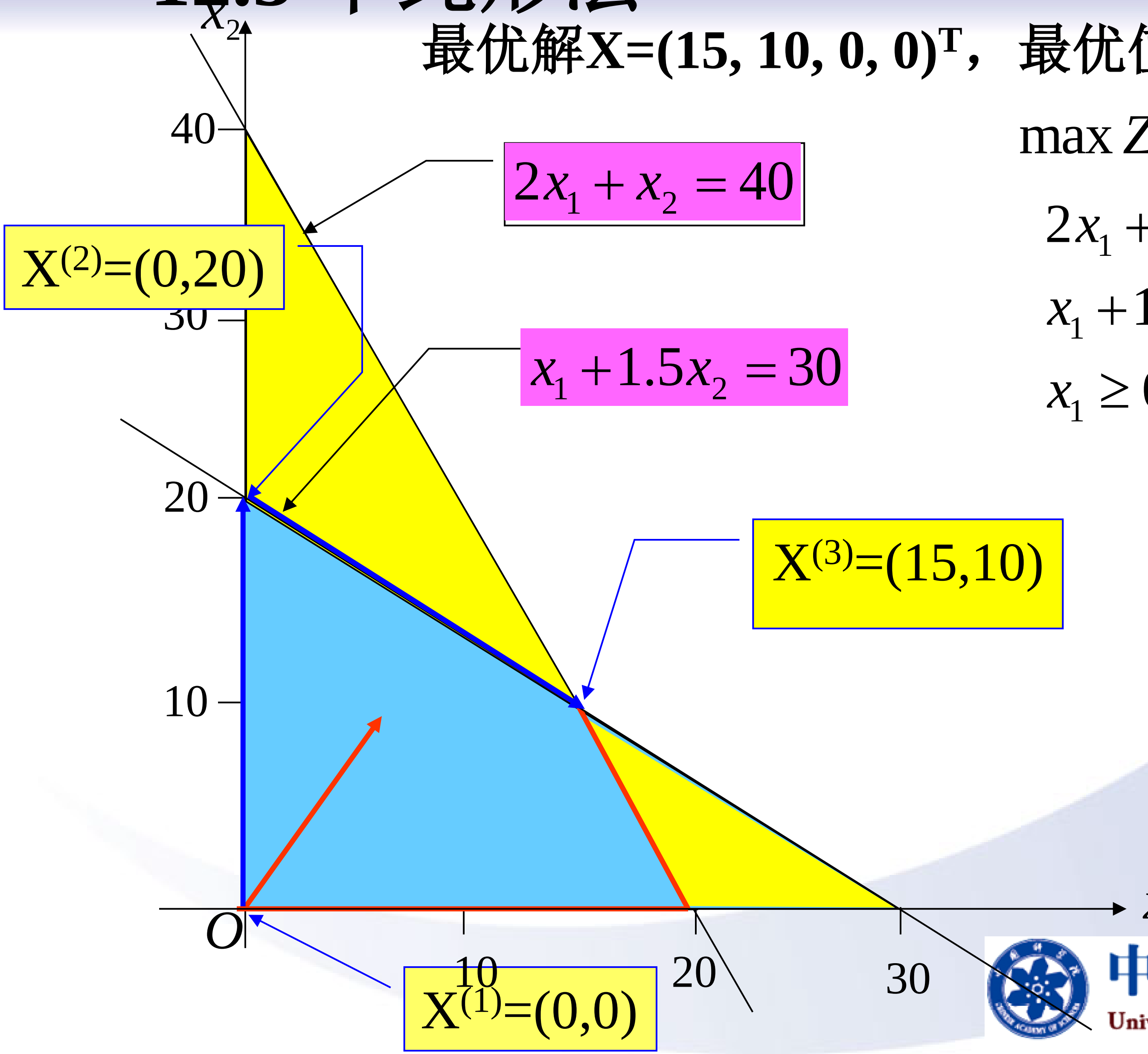
出基行

将3/2化为1

	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	b	θ_i
(a)	x_3	2	1	1	0	40	40
	x_4	1	3/2	0	1	30	20
	λ_j	300	400	0	0	0	
(b)	x_3	4/3	0	1	-2/3	20	15
	x_2	2/3	1	0	2/3	20	30
	λ_j	100/3	0	0	-800/3	-8000	
(c)	x_1	1	0	3/4	-1/2	15	
	x_2	0	1	-1/2	1	10	
	λ_j	0	0	-25	-250	-8500	

12.5 单纯形法

最优解X=(15, 10, 0, 0)^T，最优值Z=8500



$$\max Z = 300x_1 + 400x_2$$

$$2x_1 + x_2 \le 40$$

$$x_1 + 1.5x_2 \le 30$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

如果第一步迭代让x_1进基，搜索路径会如何？

12.5 单纯形法

■ 1. 普通单纯形法

□单纯形表最优性条件（以max情况为例）：

① 中心部位有单位阵；

② 右列非负；

③ 底行基变量对应的位置为0；

④ 底行非基变量对应的位置非正。

➢单纯形法就是让单纯形表在保证满足前三个条件的情况下，逐步去满足第四个条件！

中心部位	右列
底行	右下角

目标函数的相反数！

12.5 单纯形法

- 1. 普通单纯形法
  - 典则形式:
    - (1)约束条件系数矩阵存在m个不相关的单位向量;
    - (2)目标函数中不含有基变量。
    - 满足条件(1)时立即可以写出基本可行解，满足条件(2)时马上就可以得到检验数。
    - 如何通过观察得到第一个基本可行解并能判断是否为最优解，关键看模型是不是典则形式（或典式）。
    - 单纯形法的开始和后面的计算都是在做这两件工作。

中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

12.5 单纯形法

■ 1. 普通单纯形法

- □典则形式:
  - ➢表12-6每一张表对应的模型都是典式，从一个可行基换到另一个可行基后，接下来的任务就是从当前的典式变换到另一个典式。
  - ➢单纯形法全过程的计算，可以用列表的方法计算更为简洁，这种表格称为单纯形表（表12-6）。
- □计算步骤:
  - ➢1. 求初始基可行解，列出初始单纯形表，求出检验数。其中基变量的检验数必为零；

12.5 单纯形法

■ 1. 普通单纯形法

□计算步骤：

➢2. 判断：

a) 若$\lambda_j \le 0 (j=1, 2, \ldots, n)$得到最优解；

b) 某个$\lambda_k>0$且$a_{ik}\le 0$ $(i=1, 2, \ldots, m)$则线性规划具有无界解(见例12-18)。

c) 存在$\lambda_k>0$且a_{ik} $(i=1, \ldots, m)$不全非正，则进行换基；

➢3.换基：

a) 选进基变量

非必须，有较强任意性

设$\lambda_k=\max\{\lambda_j \mid \lambda_j>0\}$, x_k为进基变量

12.5 单纯形法

■ 1. 普通单纯形法

□计算步骤：

➢**3.换基：**

b) 选出基变量，求最小比值：

$$\theta_L = \min\left\{ \frac{b_i}{a_{ik}} \middle| a_{ik} > 0, \text{当} a_{ik} \leqslant 0 \text{时} \frac{b_i}{a_{ik}} = M, M\text{为任意大的正数} \right\}$$

第 L 个比值最小，选最小比值对应行的基变量为出基变量，

若有相同最小比值，则任选一个。

a_{Lk}为主元素；

12.5 单纯形法

■ 1. 普通单纯形法

- **计算步骤：**
  - **3.换基：**
    - c) 求新的基可行解：用初等行变换方法将a_{Lk}化为1，k列其它元素化为零（包括检验数行）得到新的可行基及基本可行解，再判断是否得到最优解。

- **例12-16 用单纯形法求解**

$$\max Z = x_1 + 2x_2 + x_3$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 \le 15 \\ \dfrac{1}{3}x_1 + x_2 + 5x_3 \le 20 \\ x_1、x_2、x_3 \ge 0 \end{cases}$$

12.5 单纯形法

■ 1. 普通单纯形法

□例12-16 用单纯形法求解

➢【解】将数学模型化为标准形式：

$$\max Z = x_1 + 2x_2 + x_3$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 15 \\ \dfrac{1}{3}x_1 + x_2 + 5x_3 + x_5 = 20 \\ x_j \geq 0, j = 1,2,\cdots,5 \end{cases}$$

➢不难看出x_4、x_5可作为初始基变量，单纯形法计算结果如表 12-7所示。

中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

表12-7

C_j		1	2	1	0	0	b	θ
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
0	x_4	2	-3	2	1	0	15	M
0	x_5	1/3	1	5	0	1	20	20
λ_j		1	2	1	0	0	0	
0	x_4	3	0	17	1	3	75	25
2	x_2	1/3	1	5	0	1	20	60
λ_j		1/3	0	-9	0	-2	-40	
1	x_1	1	0	17/3	1/3	1	25	
2	x_2	0	1	28/9	-1/9	2/3	35/3	
λ_j		0	0	-98/9	-1/9	-7/3	-145/3	

最优解$X=(25, 35/3, 0, 0, 0)^T$，最优值$Z=145/3$

12.5 单纯形法

■ 1. 普通单纯形法

□例12-17 用单纯形法求解

$$\min Z = 2x_1 - 2x_2 - x_4$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 6 \\ 6x_1 + 2x_2 + x_5 = 21 \\ x_j \geq 0, j = 1, \cdots, 5 \end{cases}$$

➢【解】这是一个极小化的线性规划问题，可以将其化为极大化问题求解，也可以直接求解，这时判断标准是：$\lambda_j \geq 0$(j=1, …, n)时得到最优解。

12.5 单纯形法

■ 1. 普通单纯形法

□例12-17 用单纯形法求解

- 容易观察到，系数矩阵中有一个3阶单位矩阵，x_3、x_4、x_5为基变量。
- 目标函数中含有基变量x_4，由第二个约束得到$x_4=6+x_1-x_2$，并代入目标函数消去x_4得

$$Z=2x_1-2x_2-(6+x_1-x_2)=-6+x_1-x_2$$

- 消去x_4的工作也可在单纯形表中进行！

12.5 单纯形法

表12-8

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	θ
x_3	1	[1]	1	0	0	5	5
x_4	-1	1	0	1	0	6	6
x_5	6	2	0	0	1	21	21/2
λ_j	1	-1	0	0	0	6	
x_2	1	1	1	0	0	5	
x_4	-2	0	-1	1	0	1	
x_5	4	0	-2	0	1	11	
λ_j	2	0	1	0	0	11	

12.5 单纯形法

- 1. 普通单纯形法
  - 例12-17 用单纯形法求解
    - 表中$\lambda_j \geq 0$, $j=1,2,\ldots,5$所以最优解为$X=(0, 5, 0, 1, 11)$
    - 最优值$Z=2x_1-2x_2-x_4=-2\times 5-1=-11$
    - 极小值问题，注意判断标准，选进基变量时，应选$\lambda_j<0$的变量x_j进基。

中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

12.5 单纯形法

■ 1. 普通单纯形法

□例12-18 求解线性规划

$$\max Z=-x_1+x_2$$
$$\begin{cases}3x_1-2x_2\le 1\\ -2x_1+x_2\ge -4\\ x_1,x_2\ge 0\end{cases}$$

➢【解】化为标准型

$$\max Z=-x_1+x_2$$
$$\begin{cases}3x_1-2x_2+x_3 \quad =1\\ 2x_1-\ \ x_2 \quad +x_4=4\\ x_j\ge 0, j=1,\cdots,4\end{cases}$$

➢初始单纯形表为

■ 1. 普通单纯形法

□例12-18 求解线性规划

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_3	3	-2	1	0	1
x_4	2	-1	0	1	4
λ_j	-1	1	0	0	0

➢ $\lambda_2=1>0$, x_2进基，而$a_{12}<0$，$a_{22}<0$，没有比值，从而线性规划的最优解无界。

➢由模型可以看出，当固定x_1使$x_2\to+\infty$时，满足约束条件，可使目标函数值无限增大！

12.5 单纯形法

- **1. 普通单纯形法**
  - **例12-19 求解线性规划**

$$\max Z = 2x_1 + 4x_2$$
$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 4 \\ x_1 + 2x_2 \le 10 \\ x_1 - x_2 \le 2 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

➢ 【解】:化为标准型后用单纯形法计算如下表所示

	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	θ
(1)	x_3	-1	[2]	1	0	0	4 →	2
	x_4	1	2	0	1	0	10	5
	x_5	1	-1	0	0	1	2	—
	λ_j	2	4 ↑	0	0	0	0	
(2)	x_2	- 1/2	1	1/2	0	0	2	—
	x_4	[2]	0	-1	1	0	6 →	3
	x_5	1/2	0	1/2	0	1	4	8
	λ_j	4 ↑	0	-2	0	0	-8	
(3)	x_2	0	1	1/4	1/4	0	7/2	14
	x_1	1	0	- 1/2	1/2	0	3	—
	x_5	0	0	[3/4]	- 1/4	1	5/2 →	10/3
	λ_j	0	0	0 ↑	-2	0	-20	
(4)	x_2	0	1	0	1/3	- 1/3	8/3	
	x_1	1	0	0	1/3	2/3	14/3	
	x_3	0	0	1	- 1/3	4/3	10/3	
	λ_j	0	0	0	-2	0	-20	

12.5 单纯形法

■ 1. 普通单纯形法

□ 例12-19 求解线性规划

- 表 (3)中λ_j全部非正，则最优解为:

$$X^{(1)} = (3, \frac{7}{2}, 0, 0, \frac{5}{2})^T, Z = 20$$

- 表 (3)表明，非基变量x_3的检验数λ_3=0，x_3若增加，目标函数值不变，即当x_3进基时Z仍等于20。
- 使x_3进基 x_5出基继续迭代，得到表(4)的另一 基本最优解

$$X^{(2)} = (\frac{14}{3}, \frac{8}{3}, \frac{10}{3}, 0, 0,)^T, Z = 20$$

12.5 单纯形法

■ 1. 普通单纯形法

□例12-19 求解线性规划

- ➢ $X^{(1)}$，$X^{(2)}$是线性规划的两个最优解，它的凸组合

$$X = \alpha X^{(1)} + (1-\alpha) X^{(2)} \qquad (0 \le \alpha \le 1)$$

- ➢仍是最优解，从而原线性规划有多重最优解。

12.5 单纯形法

■ 1. 普通单纯形法

- 唯一最优解的判断：
  - 最优表中所有非基变量的检验数非零，则线性规划具有唯一最优解。
- 多重最优解的判断：
  - 最优表中存在非基变量的检验数为零，则线则性规划具有多重最优解。
- 无界解的判断：
  - 某个$\lambda_k>0$且$a_{ik}\le 0(i=1, 2,\ldots, m)$则线性规划具有无界解
- 退化基本可行解的判断：
  - 存在某个基变量为零的基本可行解。

作业-课后练习30

■ 用单纯形法求解下列线性规划

（1）

$$\max Z = 3x_1 + 4x_2 + x_3$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 \le 4 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 3 \\ x_j \ge 0, j = 1, 2, \cdots, 3 \end{cases}$$

（2）

$$\max Z = 3x_1 + 2x_2 - \frac{1}{8}x_3$$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 4 \\ 4x_1 - 2x_3 \le 12 \\ 3x_1 + 8x_2 + 4x_3 \le 10 \\ x_j \ge 0, j = 1, 2, 3 \end{cases}$$

End