《算法设计与分析》

第十二章 线性规划

马丙鹏

2023年12月11日

中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

第十二章 线性规划

- 12.1 数学模型
- 12.2 图解法
- 12.3 标准型
- 12.4 基本概念
- 12.5 单纯形法

12.1 数学模型

■ 1. 简要历史

- 线性规划（Linear Programming；LP）通常研究资源的最优利用、设备最佳运行等问题。
- 例如，
  - 当任务或目标确定后，如何统筹兼顾，合理安排，用最少的资源（如资金、设备、原标材料、人工、时间等）去完成确定的任务或目标；
  - 企业在一定的资源条件限制下，如何组织安排生产获得最好的经济效益（如产品量最多 、利润最大）。
- 线性规划是应用最广的数学模型

12.1 数学模型

■ 1. 简要历史

- **L.V. Kantorovich**
  - 苏联数学家、经济学家、1975年诺贝尔经济学奖获得者，1939年在《组织和计划生产的数学方法》一文中最早提出线性规划
- **G.B. Dantzig**
  - 1947年，给出一般的线性规划模型和单纯形法.
- **L.G. Khachian**
  - 苏联数学家，1979年椭球算法，多项式时间算法
- **N. Karmarkar**
  - 印度数学家，1984年投影算法

12.1 数学模型

■ 2. 应用模型举例

□例12.1 生产计划问题

- ➢某企业在计划期内计划生产甲、乙两种产品。
- ➢按工艺资料规定，每件产品甲需要消耗A材料 2公斤，消耗B材料1公斤，每件产品乙需要消耗A材料1公斤，消耗B材料1.5公斤。
- ➢已知在计划期内可供材料分别为40、30公斤；
- ➢每生产一件甲、乙两产品，企业可获得利润分别为300、400元，如表12-1所示。
- ➢假定市场需求无限制。
- ➢企业决策者应如何安排生产计划，使企业在计划期内总的利润收入最大。

12.1 数学模型

■ 2. 应用模型举例

□例12.1 生产计划问题

➢ 解: 设x_1、x_2分别为甲、乙产品的产量，数学模型为:

$$\max Z = 300x_1 + 400x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 40 \\ x_1 + 1.5x_2 \le 30 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

表12-1

资源 \ 产品	甲	乙	现有资源
材料A	2	1	40
材料B	1	1.5	30
利润（元/件）	300	400	

12.1 数学模型

■ 2. 应用模型举例

□例12.1 生产计划问题

➢线性规划的数学模型由决策变量 Decision variables, 目标函数 Objective function及约束条件 Constraints构成。称为三个要素。

➢怎样辨别一个模型是线性规划模型？

① 解决问题的目标函数是多个决策变量的线性函数，通常是求最大值或最小值；

② 解决问题的约束条件是一组多个决策变量的线性不等式或等式。

12.1 数学模型

■ 2. 应用模型举例

□例12.2某超市决定：营业员每周连续工作5天后连续休息2天，轮流休息。根据统计，超市每天需要的营业员如表12-2所示。

表12-2 营业员需要量统计表

星期	需要人数	星期	需要人数
一	300	五	480
二	300	六	600
三	350	日	550
四	400		

➢超市人力资源部应如何安排每天的上班人数，使超市总的营业员最少。

12.1 数学模型

■ 2. 应用模型举例

□例12.2

➢解，设x_j (j=1，2，…，7)为休息2天后星期一到星期日开始上班的营业员，则这个问题的线性规划模型为

$$\min Z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7$$

$$\begin{cases} x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 300 \\ x_1 + x_2 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 300 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_6 + x_7 \geq 350 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_7 \geq 400 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 480 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 600 \\ x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 550 \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, \cdots, 7 \end{cases}$$

12.1 数学模型

■ 2. 应用模型举例

□例12.2

➢最优解：

1	X1	0	C1	404	>=	300	104
2	X2	67	C2	301	>=	300	1
3	X3	146	C3	350	>=	350	0
4	X4	170	C4	400	>=	400	0
5	X5	97	C5	480	>=	480	0
6	X6	120	C6	600	>=	600	0
7	X7	17	C7	550	>=	550	0

➢Z＝617（人）

➢注：表中是取整数后的结果！

12.1 数学模型

■ 2. 应用模型举例

□例12.3 合理用料问题

- 某汽车需要用甲、乙、丙三种规格的轴各一根，这些轴的规格分别是1.5, 1, 0.7（m），这些轴需要用同一种圆钢来做，圆钢长度为4 m。
- 现在要制造1000辆汽车，最少要用多少圆钢来生产这些轴？
- 解：是一个条材下料问题，设切口宽度为零。设一根圆钢切割成甲、乙、丙三种轴的根数分别为y_1, y_2, y_3,则切割方式可用不等式$1.5y_1+y_2+0.7y_3\le 4$表示，求这个不等式关于y_1, y_2, y_3的非负整数解。

12.1 数学模型

■ 2. 应用模型举例

□例12.3 合理用料问题

- ➢像这样的非负整数解共有10组，也就是有10种下料方式，如表12-3所示。

表12-3 下料方案

方案 / 规格	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	需求量
y_1(根)	2	2	1	1	1	0	0	0	0	0	1000
y_2	1	0	2	1	0	4	3	2	1	0	1000
y_3	0	1	0	2	3	0	1	2	4	5	1000
余料（m）	0	0.3	0.5	0.1	0.4	0	0.3	0.6	0.2	0.5	

12.1 数学模型

- **2. 应用模型举例**
  - **例12.3 合理用料问题**
    - 设x_j (j=1, 2…, 10) 为第j种下料方案所用圆钢的根数。则用料最少数学模型为:

$$\min Z=\sum_{j=1}^{10}x_j$$

$$\begin{cases}2x_1+2x_2+x_3+x_4+x_5\geq 1000\\ x_1+2x_3+x_4+4x_6+3x_7+2x_8+x_9\geq 1000\\ x_2+2x_4+3x_5+x_7+2x_8+4x_9+5x_{10}\geq 1000\\ x_j\geq 0,\ j=1,2\ldots,10\end{cases}$$

中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

12.1 数学模型

■ 2. 应用模型举例

□例12.3 合理用料问题

- 求下料方案时应注意，余料不能超过最短毛坯的长度；
- 最好将毛坯长度按降的次序排列，即先切割长度最长的毛坯，再切割次长的，最后切割最短的，不能遗漏了方案 。
- 如果方案较多，用计算机编程排方案，去掉余料较长的方案，进行初选。

12.1 数学模型

- 2. 应用模型举例
  - 例12.3 合理用料问题
    - Z＝812.5

1	X1	500
2	X2	0
3	X3	0
4	X4	0
5	X5	0
6	X6	62.5
7	X7	0
8	X8	0
9	X9	250
10	X10	0

12.1 数学模型

- **2. 应用模型举例**
  - 例12.4 配料问题。
    - 某钢铁公司生产一种合金，要求的成分规格是：锡不少于28%，锌不多于15%，铅恰好10%，镍要界于35%~55%之间，不允许有其他成分。
    - 钢铁公司拟从五种不同级别的矿石中进行冶炼，每种矿物的成分含量和价格如表12-4所示。
    - 矿石杂质在冶炼过程中废弃，现要求每吨合金成本最低的矿物数量。假设矿石在冶炼过程中，合金含量没有发生变化。

12.1 数学模型

■ 2. 应用模型举例

□例12.4 配料问题。

表12-4 矿石的金属含量

合金 矿石	锡%	锌%	铅%	镍%	杂质	费用（元/t ）
1	25	10	10	25	30	340
2	40	0	0	30	30	260
3	0	15	5	20	60	180
4	20	20	0	40	20	230
5	8	5	15	17	55	190

12.1 数学模型

- **2. 应用模型举例**
  - **例12.4 配料问题。**
    - **解: 设x_j（j=1,2, …, 5）是生产一个单位的合金所需第j种矿石数量，得到下列线性规划模型**

$$\min Z = 340x_1 + 260x_2 + 180x_3 + 230x_4 + 190x_5$$

$$\begin{cases} 0.25x_1 + 0.4x_2 + 0.2x_4 + 0.08x_5 \geq 0.28 \\ 0.1x_1 + 0.15x_3 + 0.2x_4 + 0.05x_5 \leq 0.15 \\ 0.1x_1 + 0.05x_3 + 0.15x_5 = 0.1 \\ 0.25x_1 + 0.3x_2 + 0.2x_3 + 0.4x_4 + 0.17x_5 \leq 0.55 \\ 0.25x_1 + 0.3x_2 + 0.2x_3 + 0.4x_4 + 0.17x_5 \geq 0.35 \\ 0.7x_1 + 0.7x_2 + 0.4x_3 + 0.8x_4 + 0.45x_5 = 1 \\ x_j \geq 0,\ j = 1,2,\cdots,5 \end{cases}$$

12.1 数学模型

■ 2. 应用模型举例

□ 例12.4 配料问题。

- 注意，矿石在实际冶炼时金属含量会发生变化，建模时应将这种变化考虑进去，有可能是非线性关系。
- 配料问题也称配方问题、营养问题或混合问题，在许多行业生产中都能遇到。
- 最优解：

1	X1	0
2	X2	0.3333
3	X3	0
4	X4	0.5833
5	X5	0.6667

Z=347.5

12.1 数学模型

■ 2. 应用模型举例

□例12.4 配料问题。

- ➢问题：如果允许有杂质，但含量不能超过1%，该如何修改模型？
- ➢设第 i 种矿石剩余的杂质的比例为 y_i，i=1, 2, …, 5,
- ➢增加或修改如下约束：

$$y_1 \le 0.3$$

$$y_2 \le 0.3$$

$$y_3 \le 0.6$$

$$y_4 \le 0.2$$

$$y_5 \le 0.55$$

12.1 数学模型

■ 2. 应用模型举例

□例12.4 配料问题。

- 合金总量约束为

$$(0.7+y_1)x_1+(0.7+y_2)x_2+(0.4+y_3)x_3$$
$$+(0.8+y_4)x_4+(0.45+y_5)x_5=1$$

- 杂质含量约束为

$$y_1x_1+y_2x_2+y_3x_3+y_4x_4+y_5x_5\le 0.01$$

- 故问题模型变为……
- 解: 设x_j（j=1, 2, …, 5）是生产一个单位的合金所需第j种矿石数量，第 i 种矿石剩余的杂质的比例为 y_i，i=1, 2, …, 5，得到下列非线性规划模型

12.1 数学模型

■ 2. 应用模型举例

$$\min Z = 340x_1 + 260x_2 + 180x_3 + 230x_4 + 190x_5$$

$$\begin{cases} 0.25x_1 + 0.4x_2 + 0.2x_4 + 0.08x_5 \ge 0.28 \\ 0.1x_1 + 0.15x_3 + 0.2x_4 + 0.05x_5 \le 0.15 \\ 0.1x_1 + 0.05x_3 + 0.15x_5 = 0.1 \\ 0.25x_1 + 0.3x_2 + 0.2x_3 + 0.4x_4 + 0.17x_5 \le 0.55 \\ 0.25x_1 + 0.3x_2 + 0.2x_3 + 0.4x_4 + 0.17x_5 \ge 0.35 \\ \boxed{\begin{array}{l} (0.7 + y_1)x_1 + (0.7 + y_2)x_2 + (0.4 + y_3)x_3 + (0.8 + y_4)x_4 + (0.45 + y_5)x_5 = 1 \\ y_1x_1 + y_2x_2 + y_3x_3 + y_4x_4 + y_5x_5 \le 0.01 \\ y_1 \le 0.3, y_2 \le 0.3, y_3 \le 0.6, y_4 \le 0.2, y_5 \le 0.55 \end{array}} \\ x_j, y_j \ge 0,\ j = 1, 2, \cdots, 5 \end{cases}$$

12.1 数学模型

■ 2. 应用模型举例

例12.5投资问题

- 某投资公司拟将5000万元的资金用于国债、地方国债及基金三种类型证券投资，每类各有两种。
- 每种证券的评级、到期年限及每年税后收益率见表12-5所示。

表12-5 证券投资方案

序号	证券类型	评级	到期年限	每年税后收益率(%)
1	国债1	1	8	3.2
2	国债2	1	10	3.8
3	地方债券1	2	4	4.3
4	地方债券2	3	6	4.7
5	基金1	4	3	4.2
6	基金2	5	4	4.6

12.1 数学模型

■ 2. 应用模型举例

□ 例12.5投资问题

- 决策者希望：国债投资额不少于1000万，平均到期年限不超过5年，平均评级不超过2。
- 问每种证券各投资多少使总收益最大。
- 解 设x_j (j=1, 2, …, 6)为第j种证券的投资额，目标函数是税后总收益为

$$Z=(8\times3.2x_1+10\times3.8x_2+4\times4.3x_3+6\times4.7x_4+3\times4.2x_5+4\times4.6x_6)/100$$

- 资金约束：

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6\le5000$$

12.1 数学模型

■ 2. 应用模型举例

□例12.5投资问题

➢国债投资额约束： $x_1 + x_2 \geq 1000$

➢平均评级约束：

$$\frac{x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 5x_6}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6} \leq 2$$

➢平均到期年限约束：

$$\frac{8x_1 + 10x_2 + 4x_3 + 6x_4 + 3x_5 + 4x_6}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6} \leq 5$$

12.1 数学模型

■ 2. 应用模型举例

□例12.5投资问题

➢整理后得到线性规划模型

$$\max Z = 0.256x_1 + 0.38x_2 + 0.172x_3 + 0.282x_4 + 0.126x_5 + 0.184x_6$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \le 5000 \\ x_1 + x_2 \ge 1000 \\ -x_1 - x_2 + x_4 + 2x_5 + 3x_6 \le 0 \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 - x_6 \le 0 \\ x_j \ge 0,\ j = 1, 2, \cdots, 6 \end{cases}$$

➢决策结果：**X=(250, 750, 3500, 0, 500, 0) Z=1014**

中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

12.1 数学模型

- **2. 应用模型举例**
  - 例12.6 均衡配套生产问题
    - 某产品由2件甲、3件乙零件组装而成。
    - 两种零件必须经过设备A、B上加工，每件甲零件在A、B上的加工时间分别为5分钟和9分钟，每件乙零件在A、B上的加工时间分别为4分钟和10分钟。
    - 现有2台设备A和3台设备B，每天可供加工时间为8小时。为了保持两种设备均衡负荷生产，要求一种设备每天的加工总时间不超过另一种设备总时间1小时。
    - 怎样安排设备的加工时间使每天产品的产量最大。

12.1 数学模型

■ 2. 应用模型举例

□例12.6 均衡配套生产问题

- 解: 设x_1、x_2为每天加工甲、乙两种零件的件数，则产品的产量是

$$y = \min(\frac{1}{2}x_1, \frac{1}{3}x_2)$$

- 设备A、B每天加工工时的约束为

$$5x_1 + 4x_2 \le 2 \times 8 \times 60$$

$$9x_1 + 10x_2 \le 3 \times 8 \times 60$$

- 要求一种设备每台每天的加工时间不超过另一种设备1小时的约束为

$$\left|(5x_1 + 4x_2) - (9x_1 + 10x_2)\right| \le 60$$

12.1 数学模型

■ 2. 应用模型举例

□例12.6 均衡配套生产问题

- ➢约束线性化。将绝对值约束写成两个不等式

$$(5x_1+4x_2)-(9x_1+10x_2)\le 60$$

$$-(5x_1+4x_2)+(9x_1+10x_2)\le 60$$

- ➢目标函数线性化。产品的产量***y***等价于

$$y\le\frac{1}{2}x_1,\ y\le\frac{1}{3}x_2$$

- ➢整理得到线性规划模型

$$\max Z = y$$

$$\begin{cases} y\le\frac{1}{2}x_1 \\ y\le\frac{1}{3}x_2 \\ 5x_1+4x_2\le 960 \\ 9x_1+10x_2\le 1440 \\ -4x_1-6x_2\le 60 \\ 4x_1+6x_2\le 60 \\ y、x_1、x_2\ge 0 \end{cases}$$

12.1 数学模型

■ 2. 线性规划的一般模型

□一般地，假设线性规划数学模型中，有***m***个约束，有***n***个决策变量x_j, j=1, 2…, n，目标函数的变量系数用c_j表示，c_j称为价值系数。约束条件的变量系数用a_{ij}表示，a_{ij}称为工艺系数。约束条件右端的常数用b_i表示，b_i称为资源限量。则线性规划数学模型的一般表达式可写成

$$\max(\min)Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le (或 =, \ge) b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le (或 =, \ge) b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le (或 =, \ge) b_m \\ x_j \ge 0, j = 1, 2, \cdots, n \end{cases}$$

中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

12.1 数学模型

■ 2. 线性规划的一般模型

□为了书写方便，上式也可写成：

$$\max(\min)Z=\sum_{j=1}^{n}c_j x_j$$

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j \le (或 =,\ge) b_i \qquad i=1,2,\cdots,m \\ x_j \ge 0,\ j=1,2,\cdots,n\end{cases}$$

□在实际中一般$x_j \ge 0$, 但有时 $x_j \le 0$ 或 x_j 无符号限制。

中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

第十二章 线性规划

- 12.1 数学模型
- 12.2 图解法
- 12.3 标准型
- 12.4 基本概念
- 12.5 单纯形法

12.2 图解法

- **1. 图解法的步骤：**

  ① 求可行解集合。

  ➢分别求出满足每个约束包括变量非负要求的区域，其交集就是可行解集合，或称为可行域；

  ② 绘制目标函数图形。

  ➢先过原点作一条矢量指向点(c_1, c_2)，矢量的方向就是目标函数增加的方向，称为梯度方向，再作一条与矢量垂直的直线，这条直线就是目标函数图形；

  ③ 求最优解。

  ➢依据目标函数求最大或最小移动目标函数直线，直线与可行域相交的点对应的坐标就是最优解。

12.2 图解法

- 1. 图解法的步骤：
  - 一般地，将目标函数直线放在可行域中
  - 求最大值时直线沿着矢量方向移动
  - 求最小值时沿着矢量的反方向移动

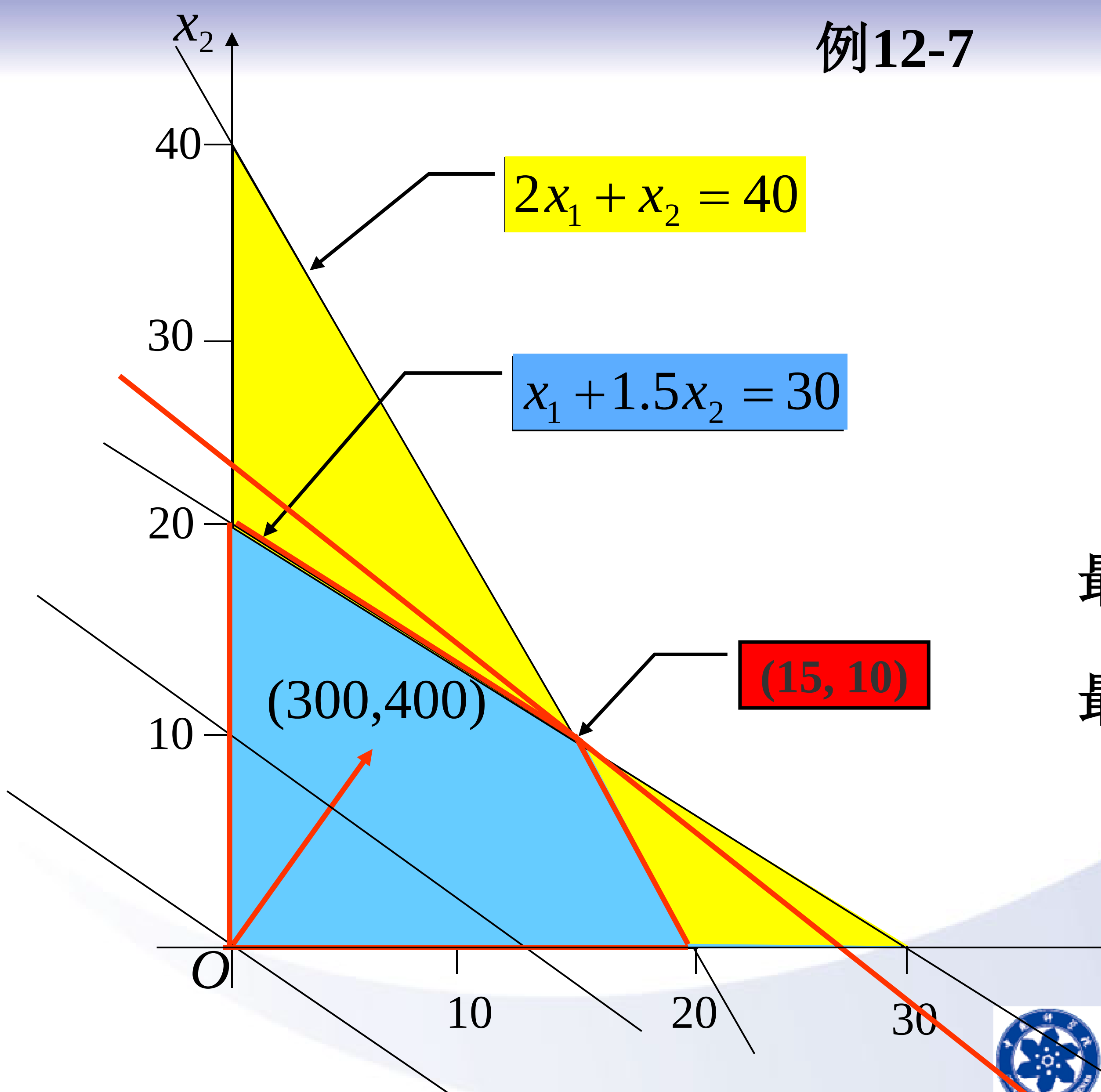
例12-7

$$\max Z = 300x_1 + 400x_2$$

$$2x_1 + x_2 \le 40$$

$$x_1 + 1.5x_2 \le 30$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$



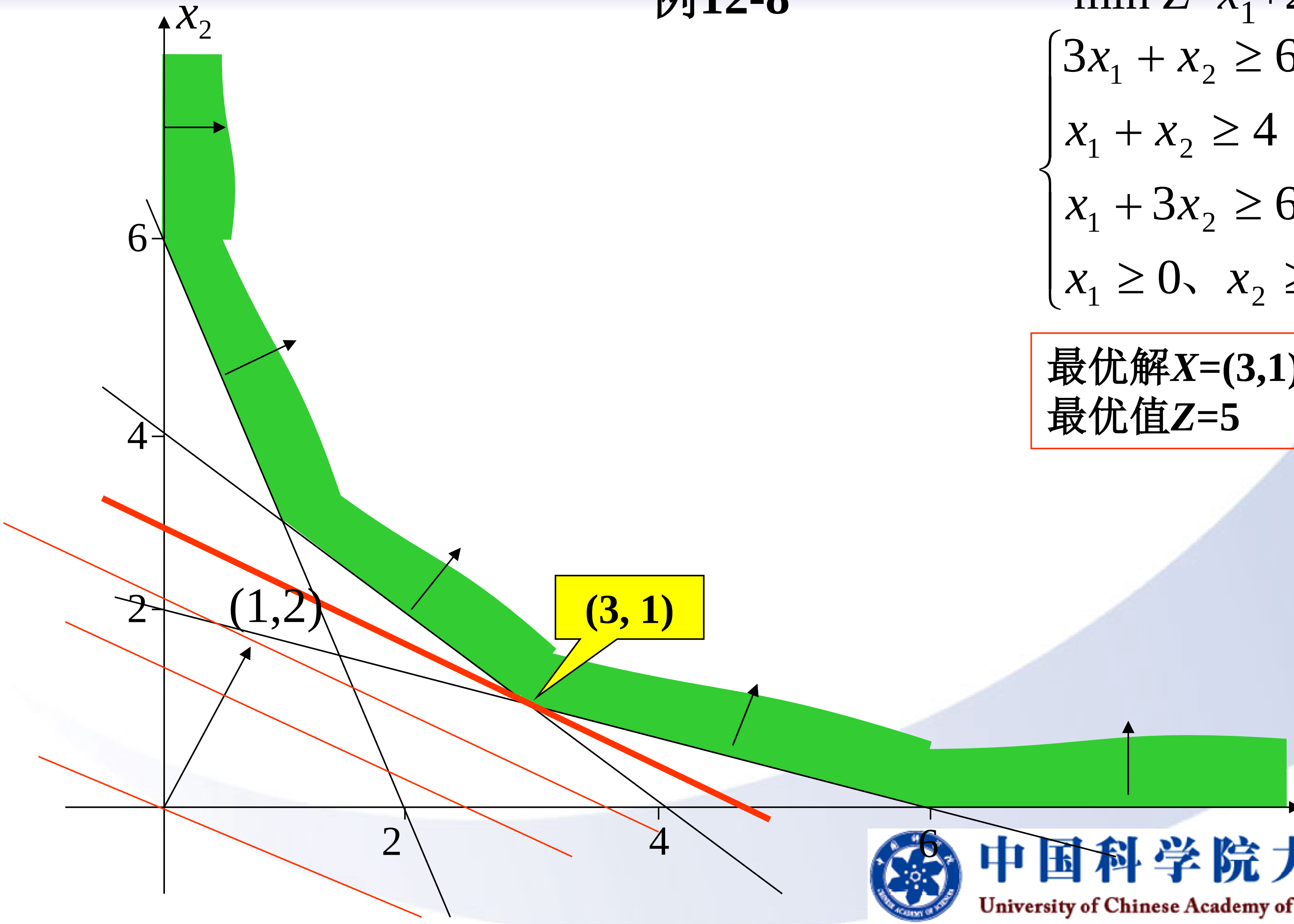
最优解*X*=(15, 10)

最优值*Z*=8500

例12-8

$$\min Z=x_1+2x_2$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \ge 6 \\ x_1 + x_2 \ge 4 \\ x_1 + 3x_2 \ge 6 \\ x_1 \ge 0、x_2 \ge 0 \end{cases}$$

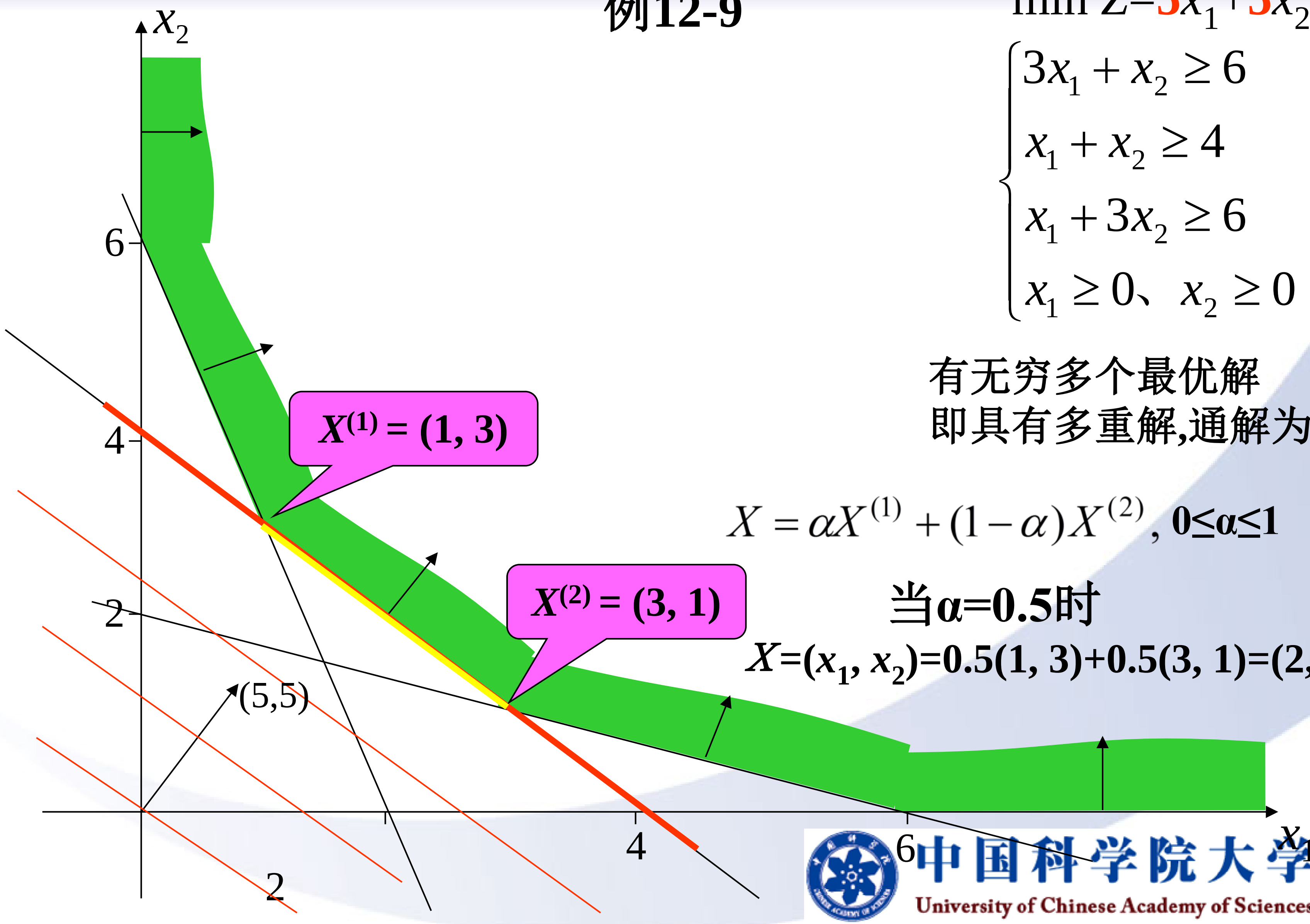


最优解*X*=(3,1)
最优值*Z*=5

例12-9

$$\min Z = 5x_1 + 5x_2$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 6 \\ x_1 + x_2 \geq 4 \\ x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ x_1 \geq 0、x_2 \geq 0 \end{cases}$$



有无穷多个最优解
即具有多重解,通解为

$$X = \alpha X^{(1)} + (1-\alpha)X^{(2)},\ 0 \leq \alpha \leq 1$$

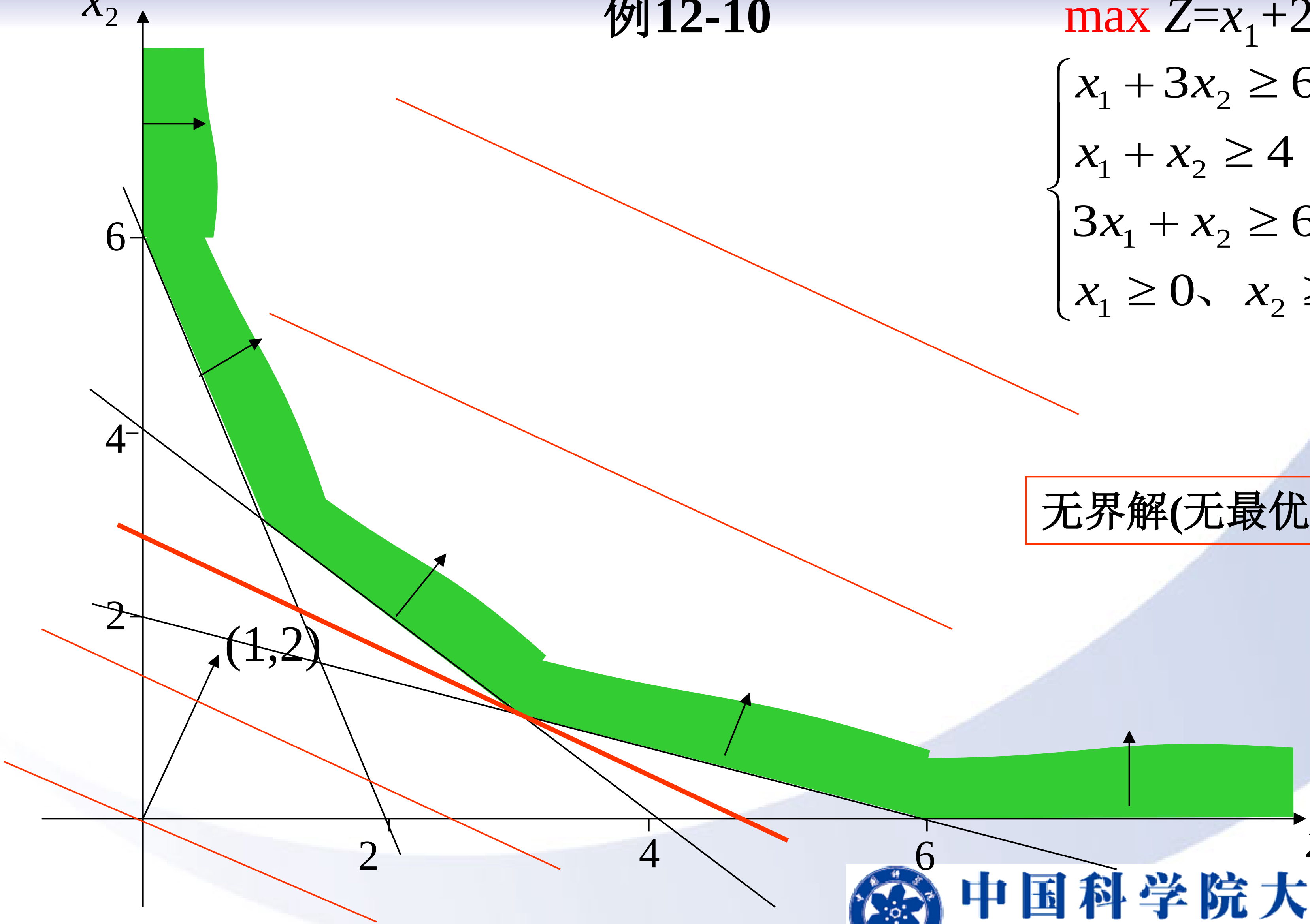
当α=0.5时

$X=(x_1, x_2)=0.5(1, 3)+0.5(3, 1)=(2, 2)$

例12-10

$$\max\ Z=x_1+2x_2$$

$$\begin{cases} x_1+3x_2\ge 6 \\ x_1+x_2\ge 4 \\ 3x_1+x_2\ge 6 \\ x_1\ge 0、\ x_2\ge 0 \end{cases}$$



无界解(无最优解)

例12-11

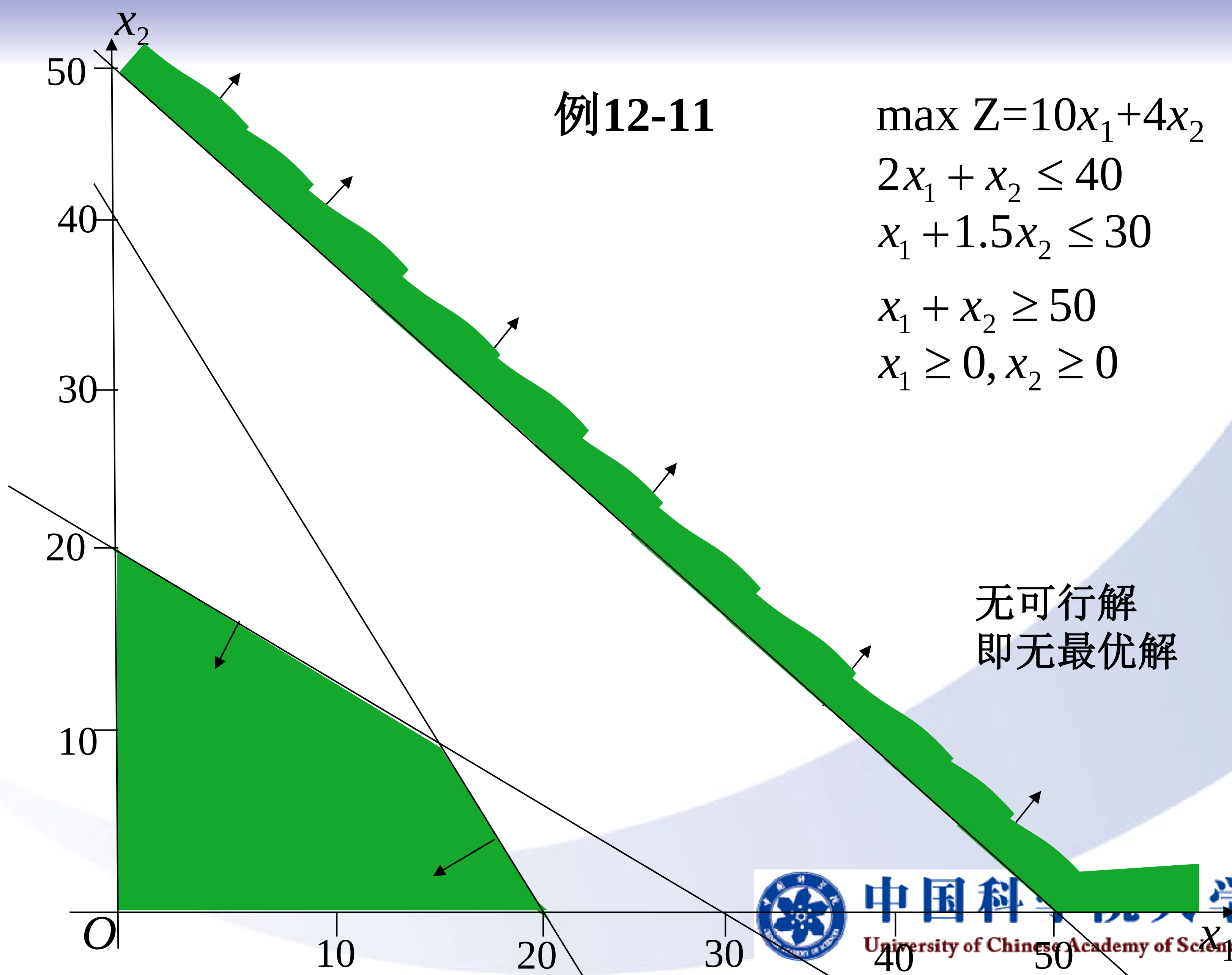
$$\max Z = 10x_1 + 4x_2$$

$$2x_1 + x_2 \le 40$$

$$x_1 + 1.5x_2 \le 30$$

$$x_1 + x_2 \ge 50$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$



无可行解
即无最优解

12.2 图解法

■ 1. 图解法的步骤：

- 由以上例题可知，线性规划的解有4种形式：
  - ① 有唯一最优解(例12-7例12-8)
  - ② 有多重解(例12-9)
  - ③ 有无界解(例12-10)
  - ④ 无可行解(例12-11)
  - ➢1、2情形为有最优解
  - ➢3、4情形为无最优解

End