中国科学院大学

试 题 专 用 纸

课程编号：

课程名称：

任课教师：

姓名________________ 学号________________ 成绩________________

1. 设 $X(1), X(2)$ 是两个独立同分布随机样本，服从 Poisson 分布 $P(\lambda)$，试给出 λ^2 的无偏估计。提示：

$$X \sim P(\lambda) \Rightarrow P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!}\exp(-\lambda))$$

2. 设 $(X(1), X(2))$是独立同分布的随机样本，服从一维高斯分布$N(\theta,\ \theta^2)$，请计算 θ 的 Cramer-Rao 下界。

3. 考虑随机序列$X(n)$，满足

$$X(n) = S(n) + V(n)$$

其中$S(n), V(n)$是独立的零均值宽平稳随机序列，功率谱密度满足，

$$S_S(\omega) = \begin{cases} a & |\omega| \le \pi/4 \\ 0 & others \end{cases},\quad S_V(\omega) = \begin{cases} b & \pi/4 \le |\omega| \le \pi/2 \\ 0 & others \end{cases},\qquad \omega \in [-\pi, \pi]$$

请构造线性滤波器，用$X(n+1)$、$X(n)$和$X(n-1)$估计 $S(n)$。请计算滤波器系数以及预测误差。提示：功率谱密度$S(\omega)$与相关函数$R(\tau)$的关系为

$$R(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S(\omega)\exp(j\omega k)\,d\omega$$

4. 考虑随机信号

$$X(n) = A\rho^n + V(n)$$

其中 $V(n)$ 是功率为 σ^2的白噪声，ρ是已知参数。请设立合适的状态变量，建立适当的状态方程，并在此基础上使用 Kalman 滤波来估计未知参数 A，请给出 Kalman 滤波的预测方程，校正方程，以及滤波增益的递推方程。（无需给出预测误差的递推关系）

5. 考虑第 3 题中的随机序列 $X(n)$，现试图利用 LMS 滤波器来构造对该序列的二阶线性预测，系数为$c(k) = (c_1(k), c_2(k))$，误差度量为

$$e^2(n) = \left(X(n) - c_1(n)X(n-1) - c_2(n)X(n-2)\right)^2$$

滤波方程为：

$$\begin{pmatrix} c_1(k+1) \\ c_2(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1(k) \\ c_2(k) \end{pmatrix} + \mu e(k)\begin{pmatrix} X(k-1) \\ X(k-2) \end{pmatrix}$$

μ为步长。请给出最大允许之步长（用a, b表示）。

提示：设$\left(X(n-1), X(n-2)\right)^T$的相关矩阵为 R，其特征值为$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，那么滤波器均值收敛的条件为

$$0 < \max\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\} < \frac{1}{\mu}$$

6. 设矩阵$\mathrm{A} \in \mathrm{R}^{\mathrm{n}\times\mathrm{n}}$为对称正定阵，$\mathrm{B} \in \mathrm{R}^{\mathrm{n}\times\mathrm{k}}$为满秩矩阵，$\mathrm{X} \in \mathrm{R}^{\mathrm{n}}$，$\mathrm{U} \in \mathrm{R}^{\mathrm{k}}$，请计算

$$\min_{B^T X = U} X^T A X$$

7. 考虑矩阵$\mathrm{A} \in \mathrm{R}^{\mathrm{n}\times\mathrm{m}}$，如果矩阵$A^-$满足$AA^-A = A$，则称$A^-$为A的 g 逆。请计算

$$\min_{A^-} \left||A^-|\right|_F$$

提示：考虑矩阵的 SVD。

8. 请计算第 3 题中的随机信号样本 $X(1), X(2)$ 的 Capon 谱估计。

提示：Capon 谱估计的表达式为

$$\mathrm{S_c} = \frac{1}{a^T(\omega) R^{-1} a(\omega)}$$

9. 请计算第 3 题中的随机信号样本 $X(1), X(2), X(3)$ 的周期图谱估计的均值，并将这里得到的结果与第 8 题结果以及信号的理论谱进行比较，分析 Capon 方法与周期图方法的优劣。