《算法设计与分析》

第五章 动态规划

马丙鹏

2023年10月23日

中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

第五章 动态规划

- 5.1 一般方法
- 5.2 多段图问题
- 5.3 每对结点之间的最短路径
- 5.4 最优二分检索树
- 5.5 0/1背包问题
- 5.6 可靠性设计
- 5.7 货郎担问题
- 5.8 流水线调度问题

5.5 0/1背包问题

- **1. 问题描述**
  - **KNAP(1, j, X)**
    - 目标函数：$\sum_{1\le i\le j} p_i x_i$
    - 约束条件：

$$\sum_{1\le i\le j} w_i x_i \le X$$

$$x_i = 0或1, p_i > 0, w_i > 0, 1 \le i \le j$$

  - 0/1背包问题：**KNAP(1, n, M)**
  - 最优性原理对于0/1背包问题成立
  - 求解策略：向前递推、向后递推

5.5 0/1背包问题

- **1. 问题描述**
  - **向后递推关系式**
    - 记$f_j(X)$是KNAP(1, j, X)的最优解，则$f_n(M)$有
      $f_n(M) = \max\{f_{n-1}(M), f_{n-1}(M-w_n)+p_n\}$
    - 对于任意的$f_i(X)$，i>0，有
      $f_i(X) = \max\{f_{i-1}(X), f_{i-1}(X-w_i)+p_i\}$

5.5 0/1背包问题

- 1. 问题描述
  - 向后递推过程
    - 初始值

$$f_0=\begin{cases} 0 & X\geq 0 \\ -\infty & X<0 \end{cases}$$

    - 求出所有可能的X对应的f_i值。
    - $f_n(M)=KNAP(1, n, M)$

例1 背包问题

n=3, $(w_1, w_2, w_3)=(2, 3, 4)$, $(p_1, p_2, p_3)=(1, 2, 5)$, M=6

递推计算过程

$$f_0(X)=\begin{cases}-\infty & X<0\\ 0 & X\ge 0\end{cases}$$

$$f_1(X)=\max\{f_0(X), f_0(X-2)+1\}=\begin{cases}-\infty & X<0\\ \max\{0,-\infty+1\}=0 & 0\le X<2\\ \max\{0,0+1\}=1 & X\ge 2\end{cases}$$

$$f_2(X)=\max\{f_1(X), f_1(X-3)+2\}=\begin{cases}-\infty & X<0\\ \max\{0,-\infty+2\}=0 & 0\le X<2\\ \max\{1,-\infty+2\}=1 & 2\le X<3\\ \max\{1,0+2\}=2 & 3\le X<5\\ \max\{1,1+2\}=3 & X\ge 5\end{cases}$$

$$f_3(M)=\max\{f_2(6), f_2(6-4)+5\}=\max\{3,1+5\}=6$$

$$\boxed{f_i(X)=\max\{f_{i-1}(X), f_{i-1}(X-w_i)+p_i\}}$$

第1个物品无法放入

第1个物品可放入

第1个物品无法放入

第1个物品可放入，第2个物品无法放入

第1个物品或第2个物品可放入

第1个物品和第2个物品可放入

例1 背包问题

$n=3, (w_1, w_2, w_3)=(2, 3, 4), (p_1, p_2, p_3)=(1, 2, 5), M=6$

递推计算过程

$$f_0(X)=\begin{cases}-\infty & X<0\\ 0 & X\ge 0\end{cases}$$

$$f_1(X)=\begin{cases}-\infty & X<0\\ \max\{0,-\infty+1\}=0 & 0\le X<2\\ \max\{0,0+1\}=1 & X\ge 2\end{cases}$$

$$f_2(X)=\begin{cases}-\infty & X<0\\ \max\{0,-\infty+2\}=0 & 0\le X<2\\ \max\{1,-\infty+2\}=1 & 2\le X<3\\ \max\{1,0+2\}=2 & 3\le X<5\\ \max\{1,1+2\}=3 & X\ge 5\end{cases}$$

$$f_3(M)=\max\{3,1+5\}=6$$

解向量的推导(最优的决策序列)

$f_3(M)=6$ → $x_3=1$

$f_3(M)-p_3=1$

$f_2(X)=1$

$f_1(X)=1$

$x_2=0$

$x_1=1$

KNAP(1,3,6)=6

X=(1,0,1)

$$f_i(X) = \max\{f_{i-1}(X), f_{i-1}(X - w_i) + p_i\}$$

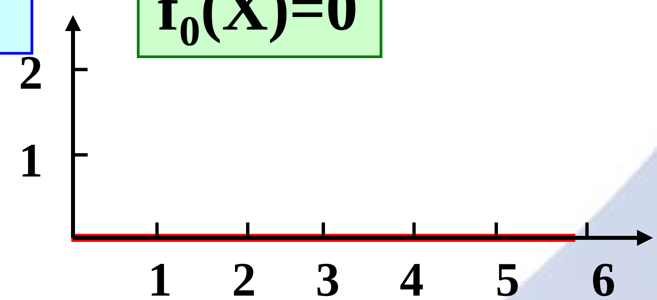
f_1, f_2, f_3计算过程的图解 $(w_1, w_2, w_3)=(2, 3, 4), (p_1, p_2, p_3)=(1, 2, 5), M=6$

- $f_{i-1}(X-w_i)+p_i$曲线的构造：将$f_{i-1}(X)$的曲线在X轴上右移w_i个单位，然后上移p_i个单位而得到；
- $f_i(X)$曲线的构造：由$f_{i-1}(X)$ 和$f_{i-1}(X-w_i)+p_i$的曲线按X相同时f取大值的规则归并而成

i: $f_{i-1}(X-w_i)+p_i$

$f_i(X)$

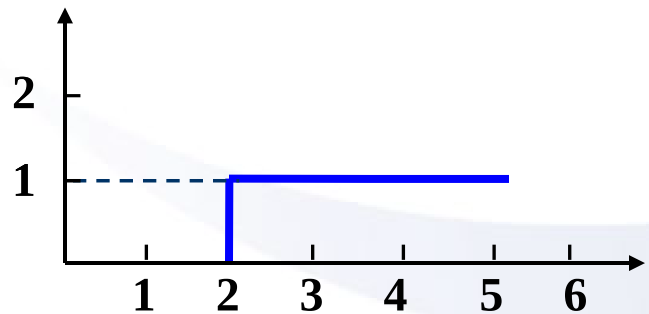
$f_0(X)=0$

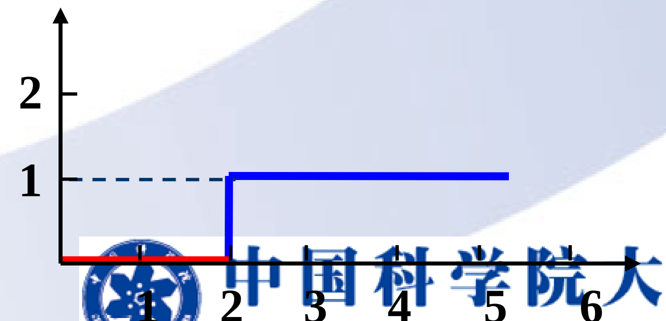


i=0: 函数不存在

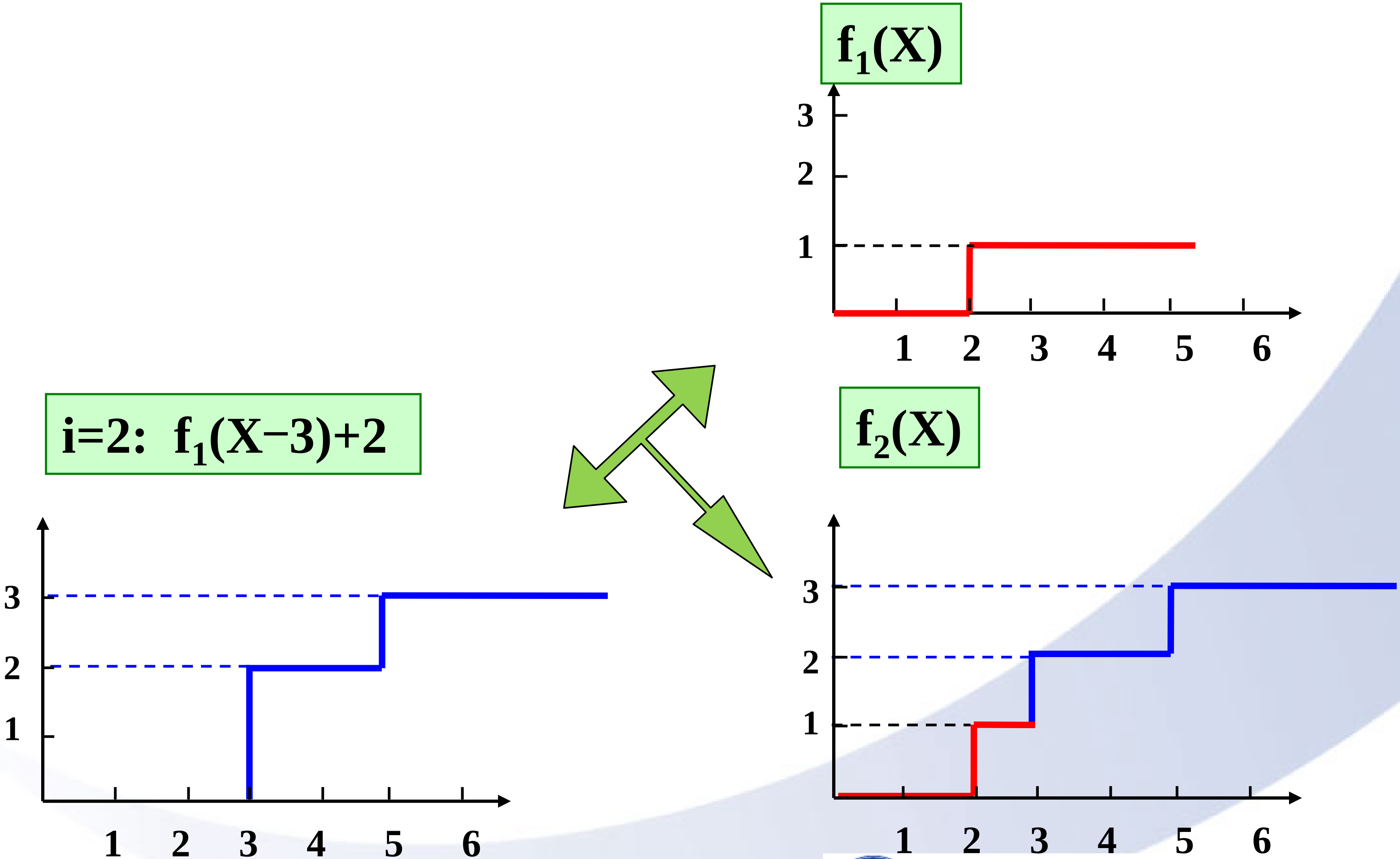
i=1: $f_0(X-w_1)+p_1$

$f_1(X)$





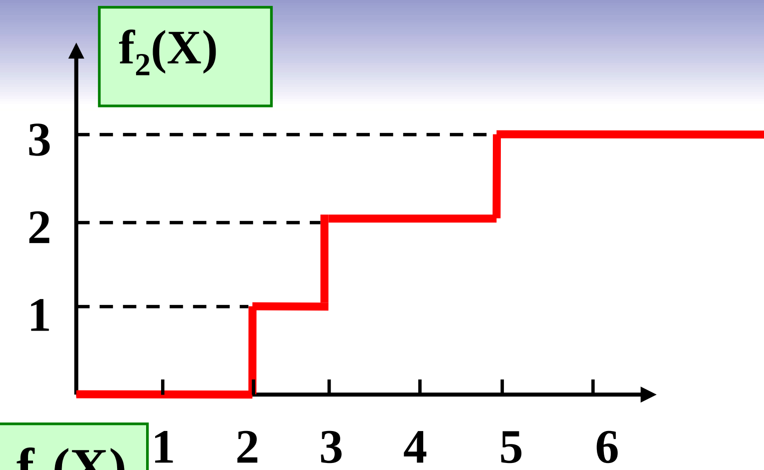
f_1, f_2, f_3计算过程的图解 $(w_1, w_2, w_3)=(2, 3, 4), (p_1, p_2, p_3)=(1, 2, 5), M=6$

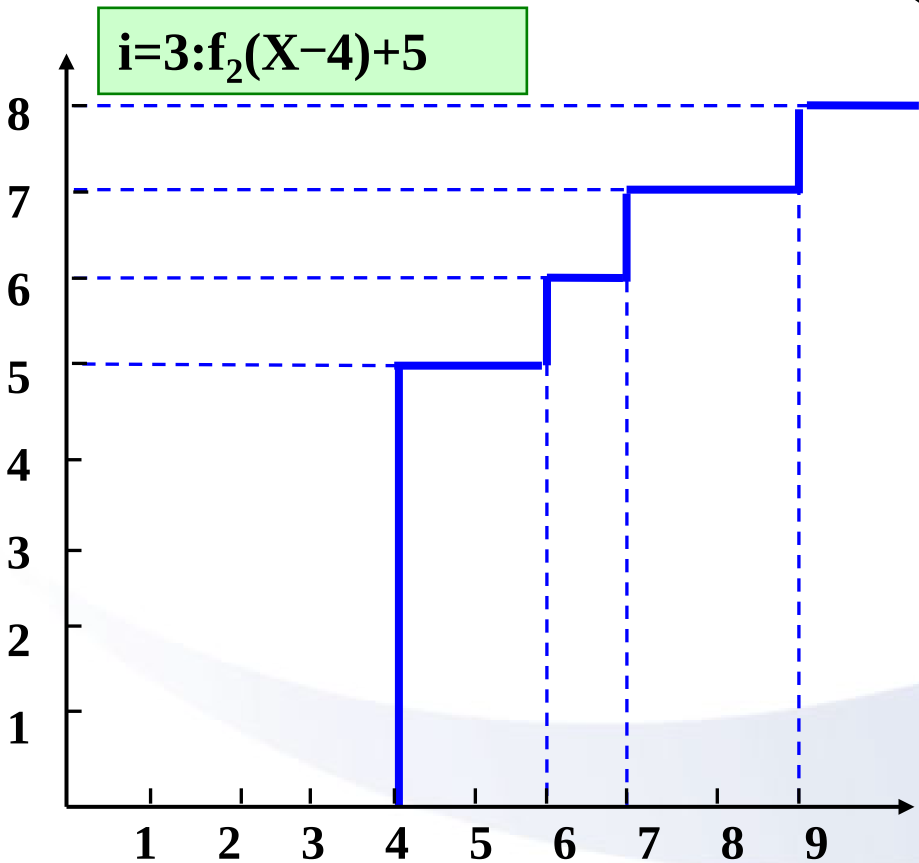


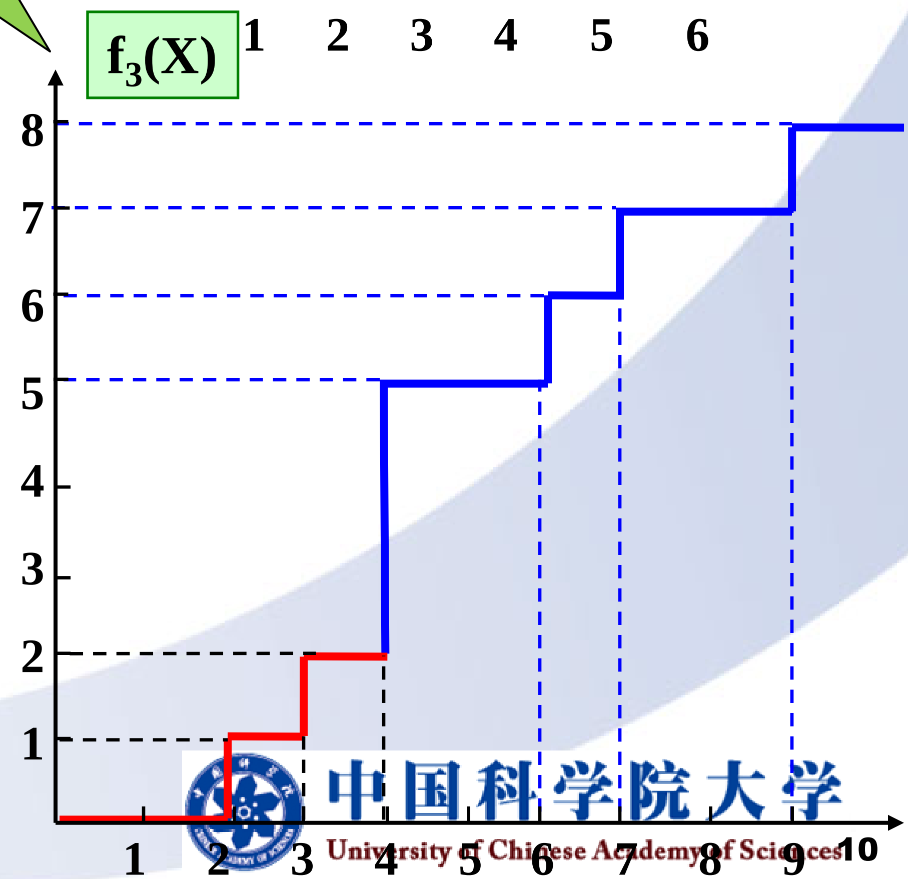
$$f_i(X) = \max\{ f_{i-1}(X), f_{i-1}(X - w_i) + p_i \}$$

f_1, f_2, f_3计算过程的图解 $(w_1, w_2, w_3)=(2, 3, 4), (p_1, p_2, p_3)=(1, 2, 5), M=6$

$$f_i(X) = \max\{ f_{i-1}(X), f_{i-1}(X - w_i) + p_i \}$$







5.5 0/1背包问题

■ 2. 序偶表示

- f_i是关于X的阶跃函数，阶跃点是f_i的关键点。每个阶跃点用其对应坐标表示——称为一个序偶，f_i阶跃点的集合称为 f_i的序偶集合，即
- $S^i = \{(P_j, W_j) | W_j$是f_i曲线中使得f_i产生一次阶跃的X值，$P_j=f_i(W_j)$，$0 \le j < r\}$
  - $(P_0, W_0) = (0, 0)$
  - 共有r个阶跃值，分别对应r个(P_j, W_j)序偶，$1 \le j \le r$

① 若$W_j < W_{j+1}$，则$P_j < P_{j+1}$，$0 \le j < r$，即f_i是关于X的单调递增函数

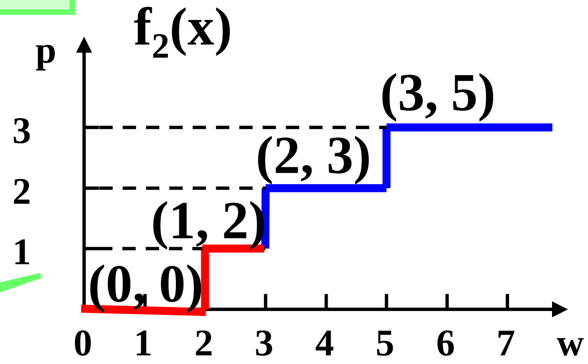
② 若$W_j \le X < W_{j+1}$，$f_i(X)=f_i(W_j)$，即具有阶跃特点

③ 若$X \ge W_r$，$f_i(X)=f_i(W_r)$

5.5 0/1背包问题

■ 2. 序偶表示

(P, W)



(P_j, W_j): $P_j=f_i(W_j)$

$$f_2(X)=\begin{cases} -\infty & X<0 \\ \max\{0,-\infty+2\}=0 & 0\le X<2 \\ \max\{1,-\infty+2\}=1 & 2\le X<3 \\ \max\{1,0+2\}=2 & 3\le X<5 \\ \max\{1,1+2\}=3 & X\ge 5 \end{cases}$$

5.5 0/1背包问题

■ 2. 序偶表示

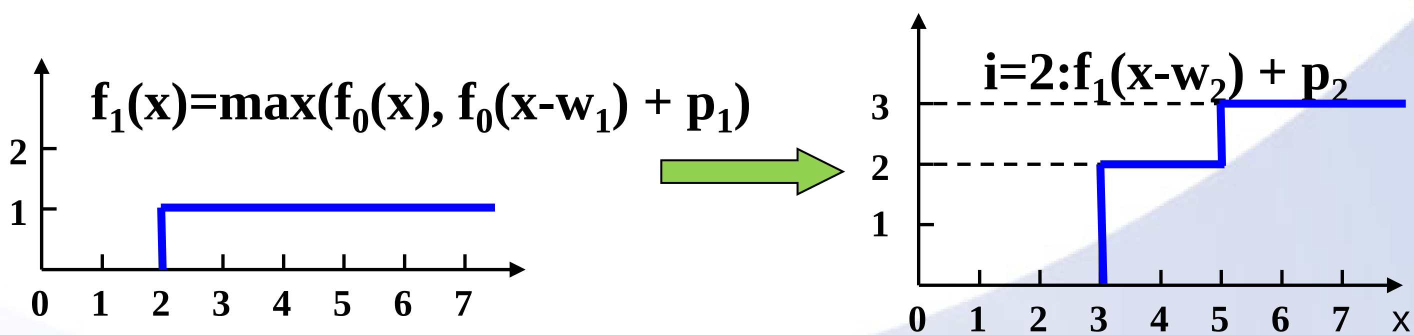
□S^i的构造

- ➢记 S_1^i是$f_{i-1}(X-w_i)+p_i$的所有序偶的集合，则

$$S_1^i = \{(P,W) \mid (P - p_i, W - w_i) \in S^{i-1}\}$$

即：在S^{i-1}的序偶分量上增加p_i、w_i生成

- ➢其中S^{i-1}是f_{i-1} 的所有序偶的集合



5.5 0/1背包问题

- ■ 2. 序偶表示
  - □ S^i的构造
    - ➢ 由S^{i-1}和S_1^i按照支配规则合并而成。
    - ➢ 支配规则：
      - ✓如果S^{i-1}和S_1^i之一有序偶(P_j, W_j),另一有(P_k, W_k)，且有$W_j \geq W_k$, $P_j \leq P_k$，则序偶(P_j, W_j)将被舍弃。(反映曲线合并过程中的取大值规则。)
      - ✓注：S^i中的所有序偶是背包问题KNAP(1, i, X)在X各种取值下的最优解。

5.5 0/1背包问题

- 2. 序偶表示
  - S^i的构造
    - 在S^i中，没有两个完全一样的序偶存在，即不存在j和k，使得(P_j, W_j)、$(P_k, W_k) \in S^i$ 且 $W_j = W_k$ 且 $P_j = P_k$，也不存在$W_j = W_k$ 或 $P_j = P_k$。
    - 若$W_j > W_k$ 则 $P_j > P_k$，反之亦然，即序偶同时按照W_i和P_i递增有序。

例5.12 例5.11的序偶计算

$(w_1, w_2, w_3)=(2, 3, 4), (p_1, p_2, p_3)=(1, 2, 5), M=6$

$S^0=\{(0, 0)\}$ $\qquad S_1^1=\{(1, 2)\}$

$S^1=\{(0, 0), (1, 2)\}$ $\qquad S_1^2=\{(2, 3), (3, 5)\}$

$S^2=\{(0, 0), (1, 2), (2, 3), (3, 5)\}$ $\qquad S_1^3=\{(5, 4), (6, 6), \cancel{(7, 7)}, \cancel{(8, 9)}\}$

$S^3=\{(0, 0), (1, 2), (2, 3), (5, 4), \cancel{(3, 5)}, (6, 6)\}$

支 配

注：序偶(3, 5)被(5, 4)“支配”而删除

5.5 0/1背包问题

■ 3. 决策序列的求取

- 如何求取决策序列?
  - ➢分析S^i中序偶的来源:
    - ✓S^i中的序偶或者来源于S^{i-1} 或者来源于 S_1^i 。
    - ✓若来源于S^{i-1}，则对当前的W计算$f_i(X)$时，表达式中$f_{i-1}(X)$的值大些，故第i件物品不装为好，即$x_i = 0$。
    - ✓否则来源于S_1^i，$f_{i-1}(X-W_i) + P_i$的效益值好些，第i件物品应该装入背包，$x_i = 1$。

$$f_i(X) = \max\{f_{i-1}(X), f_{i-1}(X - w_i) + p_i\}$$

中国科学院大学 University of Chinese Academy of Sciences

5.5 0/1背包问题

■ 3. 决策序列的求取

□KNAP(1, n, M)问题的解——决策序列的求取

① 生成序偶集S^i。(应将W>M的那些序偶(P, W)去掉，因为由它们不能导出满足约束条件的可行解。)

② S^n是KNAP(1, n, X)在0≤X≤M各种取值下的最优解。

③ 通过计算S^n可以找到KNAP(1, n, X)，0≤X≤M的所有解。

④ KNAP(1, n, M)的最优解由S^n的最后一对有效序偶(具有有效的最大W值的序偶)给出。

5.5 0/1背包问题

■ 3. 决策序列的求取

□KNAP(1, n, M)问题的解——决策序列的求取

⑤ x_n的计算。

- ✓ 设S^n的最后一对有效序偶是(P_1, W_1)，$W_1 \le M$，
- ✓ 则(P_1, W_1)或者是S^{n-1}的最末一对有效序偶，
- ✓ 或者是 (P_j+p_n, W_j+w_n)，其中 $(P_j, W_j) \in S^{n-1}$且W_j是S^{n-1}中满足$W_j+w_n \le M$的最大值。
- ✓ 若$(P_1, W_1) \in S^{n-1}$，则$x_n=0$；否则，
- ✓ $(P_1-p_n, W_1-w_n) \in S^{n-1}$，$x_n=1$

中国科学院大学 University of Chinese Academy of Sciences

5.5 0/1背包问题

- 3. 决策序列的求取
  - KNAP(1, n, M)问题的解——决策序列的求取

⑥ x_{n-1} 的计算。

- ✓ 若x_n=0，则判断S^{n-1}中(P_1, W_1)的来源，以确定x_{n-1}的值
- ✓ 若x_n=1，则判断S^{n-1}中(P_1-p_n, W_1-w_n)的来源，以确定x_{n-1}的值

⑦ $x_{n-2}, \ldots, x_1$将依次推导得出。

例5.13 (例5.12)

$S^0=\{(0, 0)\}$

$S^1=\{(0, 0), (1, 2)\}$

$S^2=\{(0, 0), (1, 2), (2, 3), (3, 5)\}$

$S^3=\{(0, 0), (1, 2), (2, 3), (5, 4), (6, 6), (7, 7), (8, 9)\}$

M=6，$f_3(6)$由S^3中的序偶(6, 6)给出。

1) $\because (6, 6) \notin S^2$

$\therefore x_3=1$

2) $\because (6-p_3, 6-w_3)=(1, 2) \in S^2$且$(1, 2) \in S^1$

$\therefore x_2=0$

3) $\because (1, 2) \notin S^0$

$\therefore x_1=1$

算法5.6 非形式化的背包算法

procedure DKP(p, w, n, M)

$S^0 \leftarrow \{(0, 0)\}$

for $i \leftarrow 1$ **to** $n-1$ **do**

$S_1^i \leftarrow \{(P_1, W_1) | (P_1 - p_i, W_1 - w_i) \in S^{i-1} \text{ and } W_1 \leq M\}$

$S^i \leftarrow \text{MERGE-PURGE}(S^{i-1}, S_1^i)$

repeat

$(P_X, W_X) \leftarrow S^{n-1}$的最末一个有效序偶

$(P_Y, W_Y) \leftarrow (P_1 + p_n, W_1 + w_n)$，其中，$W_1$是$S^{n-1}$中使得$W + w_n \leq M$的所有序偶中取最大值得W

//沿S^{n-1}, …, S^1回溯确定x_n, x_{n-1}, …, x_1的取值//

if $P_X > P_Y$ **then** $x_n \leftarrow 0$ //P_X将是S^n的最末序偶//

else $x_n \leftarrow 1$ //P_Y将是S^n的最末序偶//

endif

回溯确定x_{n-1}, …, x_1

end DKP

5.5 0/1背包问题

■ 4. DKP的实现

□序偶集S^i的存储结构

- 使用两个一维数组P和W存放所有的序偶(P_1, W_1)，其中P存放P_1值，W存放W_1值
- 序偶集$S^0, S^1, \ldots, S^{n-1}$顺序、连续存放于P和W中；
- 用指针F(i)表示S^i中第一个元素在数组 (P, W)中的下标位置，$0 \le i \le n$；
- $F(n)=S^{n-1}$中最末元素位置 + 1

	1	2	3	4	5	6	7	8
P	0	0	1	0	1	2	3	
W	0	0	2	0	2	3	5	

F(0) F(1) F(2) F(3)

5.5 0/1背包问题

■ 4. DKP的实现

□序偶的生成与合并

- ➢S^i的序偶将按照P和W的递增次序生成
- ➢S^i_1中序偶的生成将与S^i_1和S^{i-1}的合并同时进行
- ➢设S^i_1生成的下一序偶是(pp, ww)；对所有的(pp, ww)，根据支配规则处理如下：

① S^{i-1}中所有W<ww的序偶(P, W)加入S^i

② 由支配规则看(pp, ww)是否加入S^i

a. 若S^{i-1}中有W_{g+1}= ww,则pp ← max{p_{g+1}, pp}

↓$(pp, ww)=(p_t+p_i, w_t+w_i)$ ↓next

	1	2	3														
P	0	0	P_t	…	…	P_g	P_{g+1}				0	P_t	…		P_g		
W	0	0	W_t	…	…	W_g	W_{g+1}				0	W_t	…		W_g		

<ww >=ww

5.5 0/1背包问题

■ 4. DKP的实现

□序偶的生成与合并

② 由支配规则看(pp, ww)是否加入S^i

b. 若S^{i-1}中有p_g>pp,则舍弃(pp, ww)

c. 若不舍弃(pp, ww)，则(pp, ww) → S^i

③ 考虑S^{i-1}中W>ww的序偶有无被(pp, ww)所支配，若P_{g+1}<pp, (P_{g+1}, W_{g+1})被舍弃

↓(pp, ww)=(p_t+p_i, w_t+w_i)　　　　next

	1	2	3														
P	0	0	P_t	…	…	P_g	P_{g+1}				0	P_t	…		P_g	pp	
W	0	0	W_t	…	…	W_g	W_{g+1}				0	W_t	…		W_g	ww	

<ww　　　　>=ww

5.5 0/1背包问题

■ 4. DKP的实现

□序偶的生成与合并

④ 对所有的(pp, ww)重复上述处理；

⑤ 将最后S^{i-1}中剩余的序偶直接计入S^i中，(是一些P和W均较大的序偶)；

⑥ 所有计入S^i中的新序偶依次存放到由F(i)指示的S^i的存放位置上。

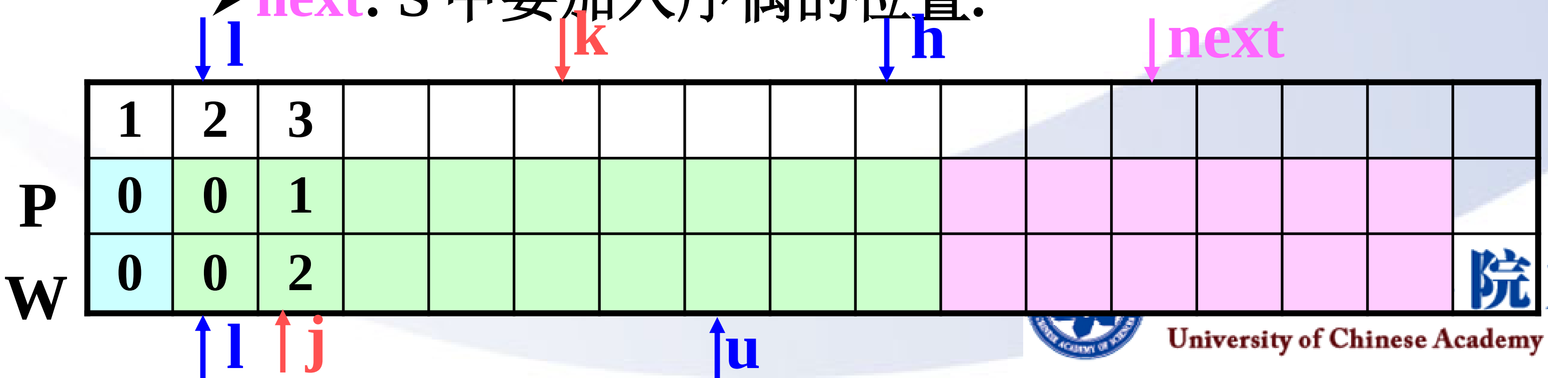
➢注：不需要存放S_1^i的专用空间

5.5 0/1背包问题

■ 4. DKP的实现

□算法中变量的含义

- F(i)：S^i中第一对序偶在数组中的位置(下标)
- l, h：S^{i-1}的第一对序偶和最后一对序偶在数组中的位置，即F(i-1)和F(i)-1.
- k: S^{i-1}中当前要加入S^i的序偶的位置.
- u: 在S^{i-1}能够产生S^i_1序偶的最后一个位置，即对于$u+1 \le v \le h$的序偶(P_v, W_v)，有$W_v+w_i>M$.
- j: 当前正在生成S^i_1的S^{i-1}中序偶的位置.
- next: S^i中要加入序偶的位置.



5.5 0/1背包问题

- **4. DKP的实现**
  - **算法的思想**
    - **1.初始化**

      最初只有S^0的信息，F(0), P(1), W(1), l, h, F(1), next
    - **2.生成S^i**

      对k, u赋值

      (1)依次生成S^i_1中的序偶(pp, ww)

      在S^{i-1}中，重量比ww小的序偶(P(k), W(k))加入S^i中

      (pp, ww)是否被支配；

      S^{i-1}中被(pp, ww)支配的序偶

      (2) S^i_1中的序偶都生成后， S^{i-1}中若还有序偶没有加入S^i中，则全部加入；

      l, h, F(i+1)赋值
    - **3.生成最末序偶，回溯构造最优决策序列**

算法5.7 0/1背包问题的算法描述

```
procedure DKNAP(p, w, n, M, m)
  real p(n), w(n), P(m), W(m), pp, ww, M; integer F(0:n), l, h, u, i, j, p, next
  F(0)←1; P(1)←W(1)←0   //S⁰//
  l←h←1    // S⁰ 的首端和末端；l是Sⁱ⁻¹的首端，h是Sⁱ⁻¹的末端//
  F(1)←next←2 //P和W中第一个空位；next指示P/W中可以存放(P,W)序偶的第一个位置//
  for i←1 to n-1 do //生成Sⁱ//
    k←l
    u←在l≤r≤h中使得W(r)+wᵢ≤M的最大r  //u指示由Sⁱ⁻¹生成 S₁ⁱ的最大有效位置//
    for j←l to u do //生成 S₁ⁱ，同时进行归并//
      (pp, ww)←(P(j)+pᵢ, W(j)+wᵢ) //生成S₁ⁱ中的下一个元素//
      while k≤h and W(k)<ww do //从Sⁱ⁻¹中取元素并归并//
        P(next)←P(k); W(next)←W(k) //所有W(k)<ww 的序偶直接归并//
        next←next+1; k←k＋1
      repeat
```

中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

```
    //按照支配规则考虑(pp, ww)及S^{i-1}中的序偶//
     if k≤h and W(k)=ww then
          pp←max(pp, P(k)); k←k+1
     endif
     if pp>P(next-1) then (P(next), W(next))←(pp, ww)
          next←next+1
     endif
     //清除S^{i-1}中的序偶//
     while k≤h and P(k)≤P(next-1) do k←k+1 repeat
  repeat
  //将S^{i-1}中剩余的元素并入S^i //
  while k≤h do
     (P(next), W(next))←(P(k), W(k))
     next←next+1; k←k+1
  repeat
  //对S^{i+1}置初值 //
  l←h+1; h←next-1; F(i+1)←next
repeat
CALL PARTS  //递推求取x_n, x_{n-1}, …, x_1//
END DKNAP
```

中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

5.5 0/1背包问题

- 5. 过程DKNAP的分析
  - 空间复杂度

记S^i中的序偶数为：$|S^i|$

则有， $|S^i| \le |S^{i-1}| + |S^i_1|$

又， $|S^i_1| \le |S^{i-1}|$

所以， $|S^i| \le 2|S^{i-1}|$

最坏情况下有(由S^{i-1}生成S^i_1和S^i时没有序偶被支配)：

$$\sum_{0 \le i \le n-1} |S^i| = \sum_{0 \le i \le n-1} 2^i = 2^n - 1$$

故，DKNAP所需的空间复杂度(P、W数组)为: $O(2^n)$

5.5 0/1背包问题

- **5. 过程DKNAP的分析**
  - 时间复杂度
    - 由S^{i-1}生成S^i的时间为：$\Theta(|S^{i-1}|)$， $0 \le i \le n-1$
    - 故，DKNAP计算所有的S^i所需的时间为：

$$\sum_{0 \le i \le n-1} |S^{i-1}| = O(2^n)$$

中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

5.5 0/1背包问题

■ 5. 过程DKNAP的分析

□时间复杂度

若每件物品的重量w_i和效益值p_i均为整数，则S^i中每个序偶(P, W)的P值和W值也是整数，且有$P \le \sum_{0 \le j \le i} |p_j|$，W≤M

又，在任一S^i中的所有序偶具有互异P值和W值，故有

$$|S^i| \le 1 + \sum_{0 \le j \le i} |p_j| \text{ 且 } |S^i| \le 1 + \min\{\sum_{0 \le j \le i} |w_j|, M\}$$

在所有w_j和p_j均为整数的情况下，DKNAP的时间和空间复杂度将为：

$$O(\min\{2^n, n\sum_{1 \le i \le n} |p_i|, nM\})$$

5.5 0/1背包问题

- 6. 序偶集合的一种启发式生成策略
  - 由S^0生成S^n的过程中，有些序偶无论如何也不会导致问题的最优解——问题的最优解由最大有效序偶给出。
  - 这些序偶最终也不会出现在任何最优决策序列中，故可以及时的舍去，以进一步降低计算量。

例：

$S^2=\{(0, 0), (1, 2), (2, 3), (3, 5)\}$

$p_3=2, w_3=3$

$(0, 0)\rightarrow(2, 3)$

$(1, 2)\rightarrow(3, 5)$

怎样预知背包的可能最好效益？

5.5 0/1背包问题

■ 6. 序偶集合的一种启发式生成策略

- □设L是最优解的估计值，且有$f_n(M) \geq L$
- □设$PLEFT(i) = \sum_{i<j\leq n} p_j$，即i+1至n件物品的效益值之和
- □若正在生成的序偶(P, W)有$P + PLEFT(i) < L$，则(P, W)将不计入S^i中。
- □L的选择：
  - ① 取S^i的最末序偶(P, W)的P作为L，$P \leq f_n(M)$
  - ② 将某些剩余物品的p值 + P作为L

例：$p_3=2$，$w_3=3$ → $PLEFT(2) = 2$

取L=6

$(0, 0) \rightarrow (2, 3)$, $0+PLEFT(2)=2<6$

$(1, 2) \rightarrow (3, 5)$, $1+PLEFT(2)=3<6$

例5.15 0/1背包问题

$n=6$, $(p_1,p_2,p_3,p_4,p_5,p_6)=(w_1, w_2,w_3,w_4,w_5,w_6)=(100,50,20,10,7,3)$, $M=165$

不使用启发方法的序偶集

$S^0=\{0\}$

$S^1=\{0, 100\}$

$S^2=\{0, 50, 100, 150\}$

$S^3=\{0, 20, 50, 70, 100, 120, 150\}$

$S^4=\{0, 10, 20, 30, 50, 60, 70, 80, 100, 110, 120, 130, 150, 160\}$

$S^5=\{0, 7, 10, 17, 20, 27, 30, 37, 50, 57, 60, 67, 70, 77, 80, 87, 100,$
$107, 110, 117, 120, 127, 130, 137, 150, 157, 160\}$

则，$f_6(165)=163$

注：每对序偶(P, W)仅用单一量P(或W)表示

$n=6$, $(p_1,p_2,p_3,p_4,p_5,p_6)=(w_1,w_2,w_3,w_4,w_5,w_6)=(100,50,20,10,7,3)$, $M=165$

启发式规则求解

分析：将物品1, 2, 4, 6装入背包，将占用163的重量并产生163的效益。

故，取期望值L=163。

按照启发式生成规则，从S^i中删除所有P+PLEFT(i)<L的序偶，则有

$PLEFT(0)=p_1+p_2+p_3+p_4+p_5+p_6=190$

$S^0=\{0\}$ $S_1^1=\{100\}$ $PLEFT(1)=p_2+p_3+p_4+p_5+p_6=90$

$S^1=\{100\}$ $S_1^2=\{150\}$ $PLEFT(2)=p_3+p_4+p_5+p_6=40$

$S^2=\{150\}$ $S_1^3=\emptyset$ $PLEFT(3)=p_4+p_5+p_6=20$ $(w_3=20)$

$S^3=\{150\}$ $S_1^4=\{160\}$ $PLEFT(4)=p_5+p_6=10$

$S^4=\{160\}$ $S_1^5=\emptyset$ $PLEFT(5)=p_6=3$ $(w_5=7)$

$S^5=\{160\}$ $PLEFT(6)=0$

$f_6(165)=160+3=163$

中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

作业-课后练习19

- 问题描述
  - 用序偶的方式求0/1背包问题，
    $n=4$,
    $(w_1, w_2, w_3, w_4)=(5, 3, 4, 7)$,
    $(p_1, p_2, p_3, p_4)=(3, 2, 5, 9)$,
    $M=15$
- 要求
  - 作业提交到课程网站上
  - Word文档即可

作业-课后练习20

- 问题描述
  - 用启发式方法求0/1背包问题，
    n=5,
    $(w_1, w_2, w_3, w_4, w_5)=(2, 2, 6, 5, 4)$,
    $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)=(6, 3, 5, 4, 6)$,
    M=10
- 要求
  - 作业提交到课程网站上
  - Word文档即可

End