《算法设计与分析》

第十三章 最大流

马丙鹏

2024年01月14日

第十三章 最大流

- 13.1 基本概念
- 13.2 Ford-Fulkerson标号算法
- 13.3 割集与割量
- 13.4 最小费用流
- 13.5 最大流应用举例

13.1 基本概念

- 1. 容量
  - 图13-18所示的网络图中定义了一个发点v_1，称为源(source, supply node)，定义了一个收点v_7，称为汇(sink, demand node)，其余点$v_2, v_3, \ldots, v_6$为中间点，称为转运点(transshipment nodes)。
  - 如果有多个发点和收点，则虚设发点和收点转化成一个发点和收点。
  - 图中的权是该弧在单位时间内的最大通过能力，称为弧的容量(capacity)。
  - 最大流问题是在单位时间内安排一个运送方案，将发点的物质沿着弧的方向运送到收点，使总运输量最大。

13.1 基本概念

■ 2. 流量

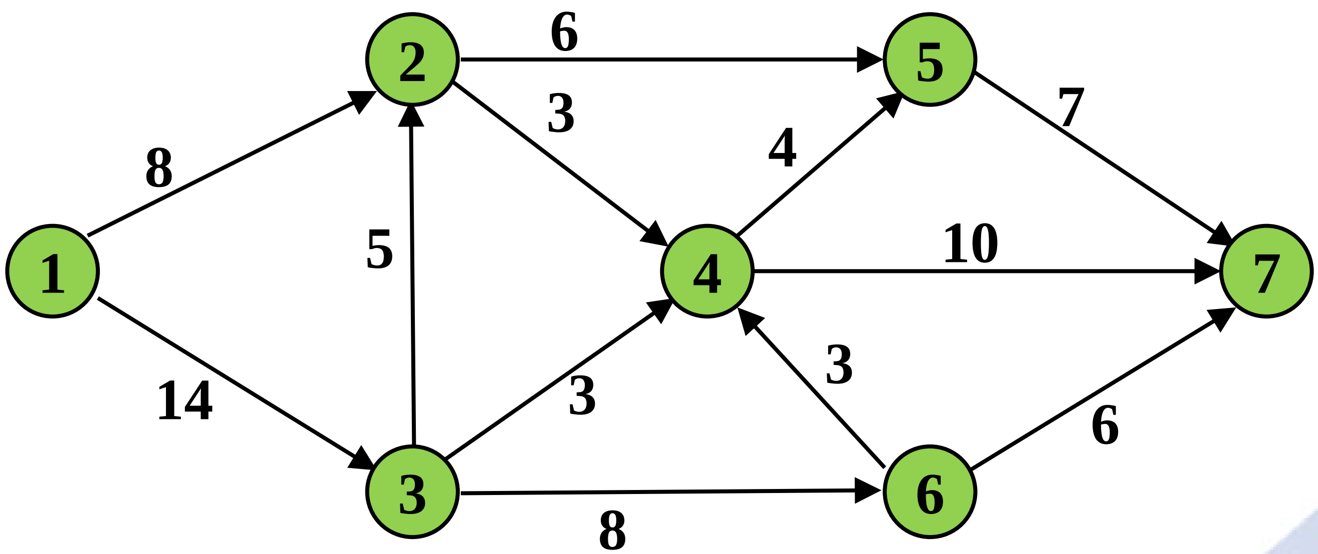


图13-18

- 设c_{ij}为弧(i,j)的容量，f_{ij}为弧(i,j)的流量。
- 容量是弧(i,j)单位时间内的**最大通过能力**，流量是弧(i,j)单位时间内的**实际通过量**，流量的集合$f=\{f_{ij}\}$称为网络的流。

13.1 基本概念

■ 2. 流量

- □发点到收点的总流量记为***v=val(f)***, ***v***也是网络的流量。
- □图13-18最大流问题的线性规划数学模型为

$$\max v = f_{12} + f_{13}$$

$$\begin{cases} f_{12} + f_{13} - f_{57} - f_{47} - f_{67} = 0 \\ \sum_{v_m} f_{im} - \sum_{v_m} f_{mj} = 0 \qquad \text{所有中间点} v_m \\ 0 \le f_{ij} \le c_{ij} \qquad \text{所有弧}(i, j) \end{cases}$$

13.1 基本概念

■ 3. 可行流

□满足下例3个条件的流f_{ij}的集合 $f=\{f_{ij}\}$称为可行流

$$(1)\ \ 0 \le f_{ij} \le c_{ij} \quad \text{所有弧}(i, j)$$

$$(2)\ \ \sum_{v_m} f_{im} = \sum_{v_m} f_{mj} \qquad \text{所有中间点}v_m$$

$$(3)\ \ v = \sum_{v_s} f_{sj} = \sum_{v_t} f_{it}$$

□发点v_s流出的总流量等于流入收点v_t的总流量

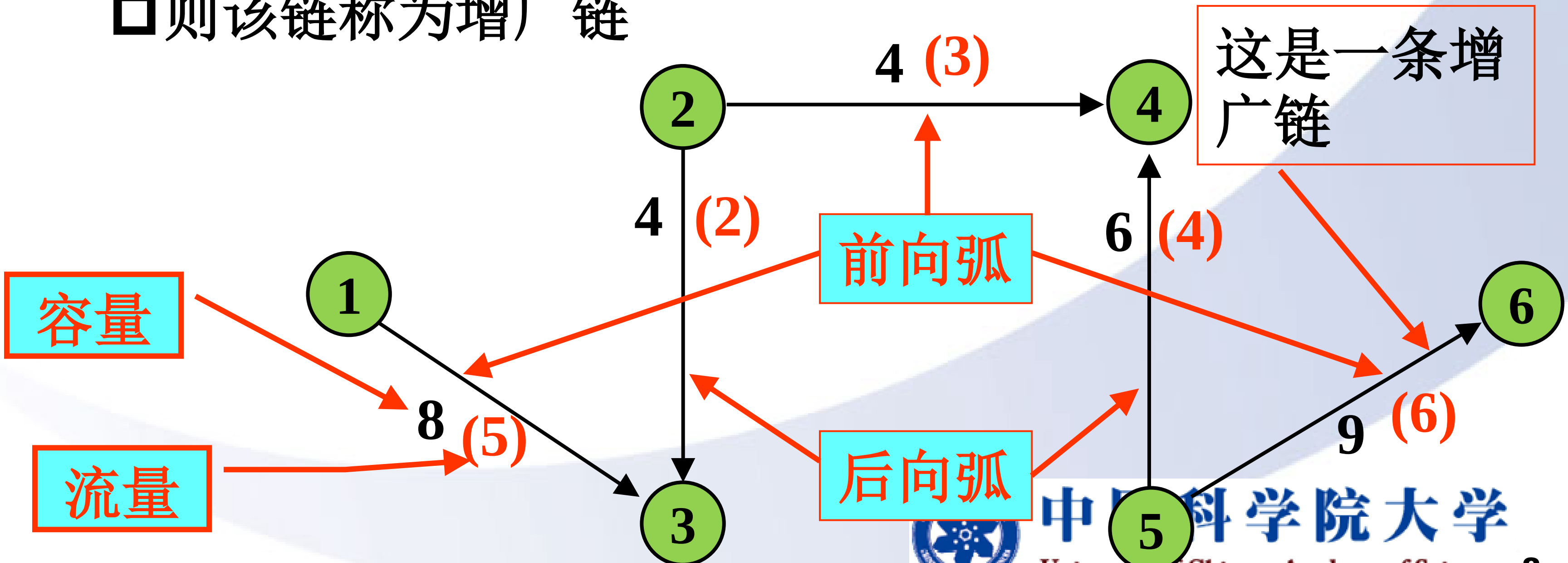
13.1 基本概念

- 4. 链前向弧后向弧
  - 链：
    - 从发点到收点的一条路线（弧的方向不一定都同向）称为链。
    - 从发点到收点的方向规定为链的方向。
  - 前向弧：
    - 与链的方向相同的弧称为前向弧。
  - 后向弧：
    - 与链的方向相反的弧称为后向弧。

13.1 基本概念

■ 5. 增广链

- □设 f 是一个可行流，如果存在一条从v_s到v_t的链，满足：
  - ① 所有前向弧上$f_{ij}<C_{ij}$
  - ② 所有后向弧上$f_{ij}>0$
- □则该链称为增广链



第十三章 最大流

- 13.1 基本概念
- 13.2 Ford-Fulkerson标号算法
- 13.3 割集与割量
- 13.4 最小费用流
- 13.5 最大流应用举例

13.2 Ford-Fulkerson标号算法

- 步骤
  - 第一步：
    - 找出第一个可行流，例如所有弧的流量$f_{ij}=0$
  - 第二步：对点进行标号找一条增广链。

    ① 发点标号（∞）

    ② 选一个点 v_i 已标号并且另一端未标号的弧沿着某条链向收点检查：

    ③ 如果弧的方向向前（前向弧）并且有$f_{ij}< c_{ij}$，则v_j标号：

    $$\theta_j= c_{ij} - f_{ij}$$

    ④ 如果弧的方向指向v_i（后向弧）并且有$f_{ji}>0$，则v_j标号：

    $$\theta_j= f_{ji}$$

13.2 Ford-Fulkerson标号算法

- 步骤
  - 第二步：对点进行标号找一条增广链。
    - 当收点已得到标号时，说明已找到增广链，依据v_i的标号反向跟踪得到一条增广链。
    - 当收点不能得到标号时，说明不存在增广链，计算结束。
  - 第三步：调整流量
    ① 求增广链上点v_i的标号的最小值，得到调整量

$$\theta = \min_j \left\{ \theta_j \right\}$$

13.2 Ford-Fulkerson标号算法

- 步骤
  - 第三步：调整流量
    - ① 调整流量

$$f_1 = \begin{cases} f_{ij} & (i,j) \notin \mu \\ f_{ij} + \theta & (i,j) \in \mu^+ \\ f_{ij} - \theta & (i,j) \in \mu^- \end{cases}$$

  - 得到新的可行流f_1，去掉所有标号，返回到第二步从发点重新标号寻找增广链，直到收点不能标号为止
  - 定理13.1
    - 可行流f是最大流的充分必要条件是不存在发点到收点的增广链

13.2 Ford-Fulkerson标号算法

■ 例13-10

□求图13-18发点v_1到收点v_7的最大流及最大流量

➢【解】给定初始可行流，见图13-19

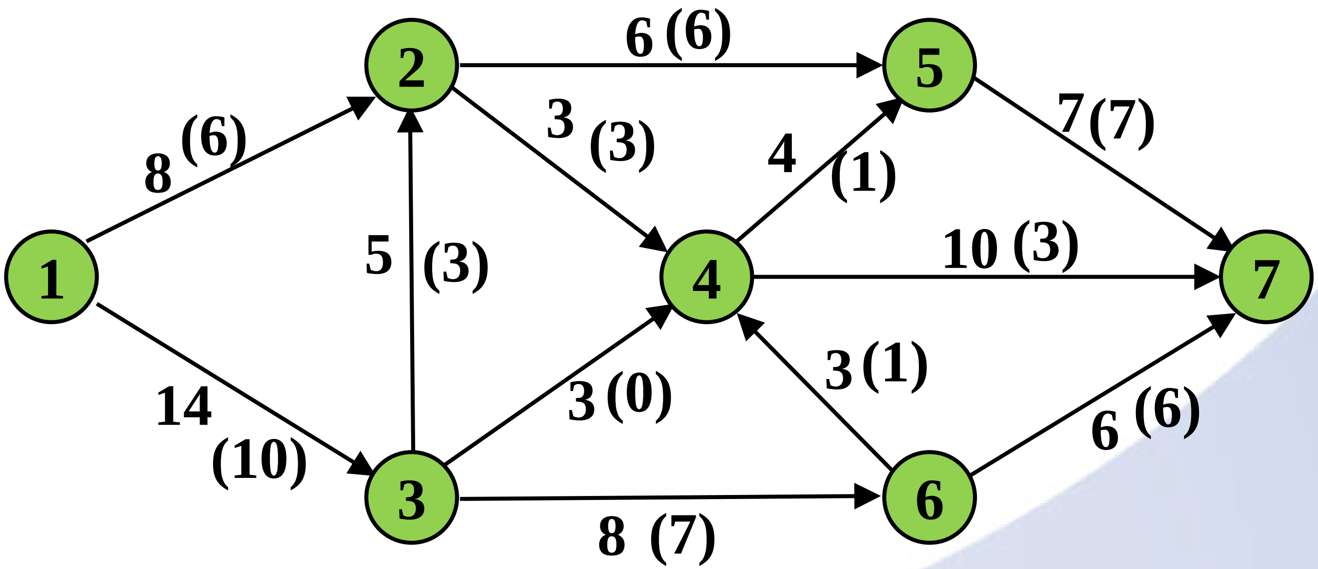


图13-19

13.2 Ford-Fulkerson标号算法

- 例13-10
  - 求图13-18发点v_1到收点v_7的最大流及最大流量
    - 第一轮标号：

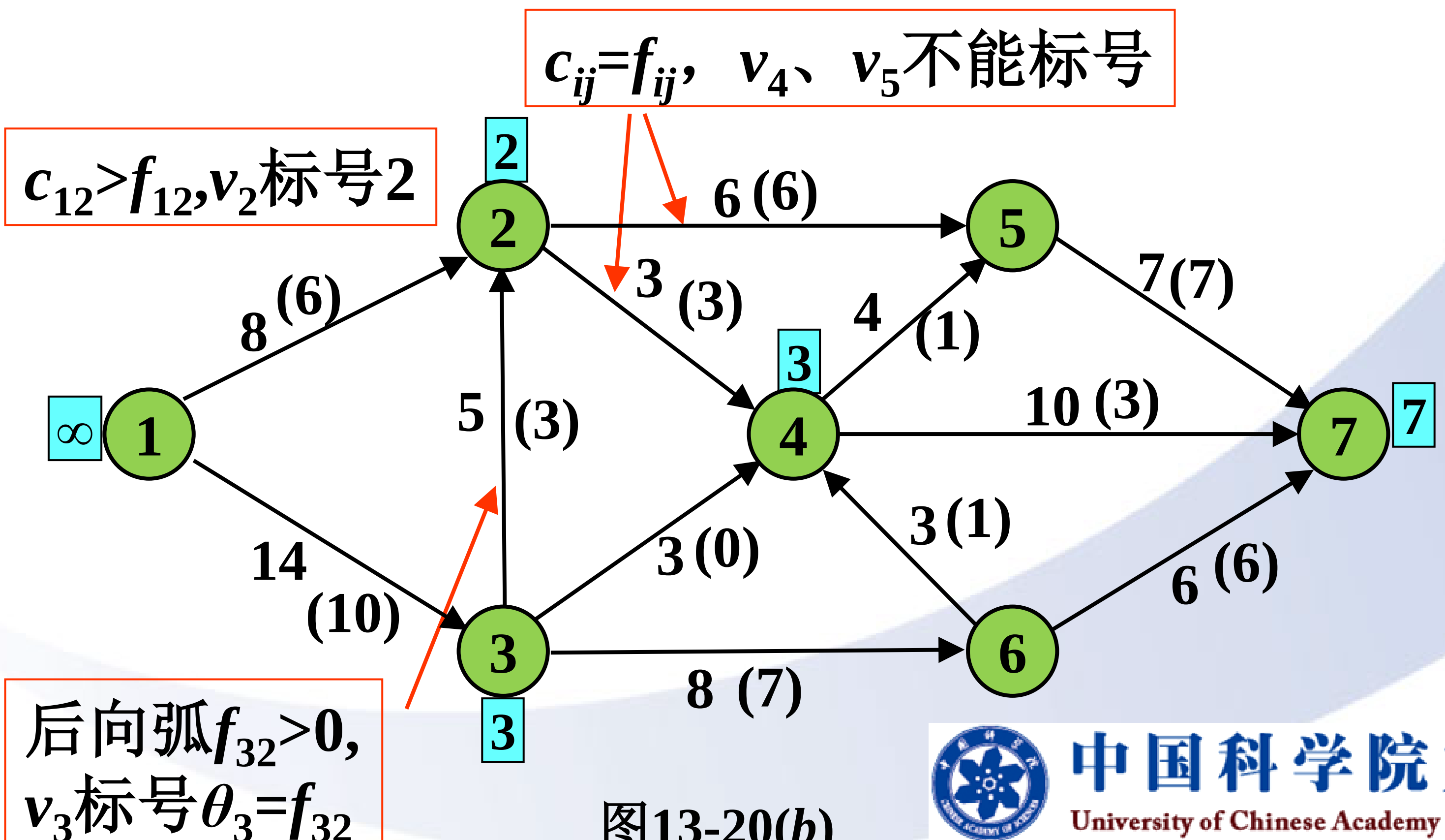


图13-20(*b*)

13.2 Ford-Fulkerson标号算法

- 例13-10
  - 求图13-18发点v_1到收点v_7的最大流及最大流量
    - 第一轮标号：
      - ✓增广链μ＝{(1, 2), (3, 2), (3, 4), (4, 7) }, μ^+={(1, 2), (3, 4), (4, 7)}, μ^-={(3, 2)}，调整量为增广链上点标号的最小值
      - ✓$\theta = \min\{\infty, 2, 3, 3, 7\} = 2$

13.2 Ford-Fulkerson标号算法

- 例13-10
  - 求图13-18发点v_1到收点v_7的最大流及最大流量
    - 第一轮标号：
      - ✓调整后的可行流：

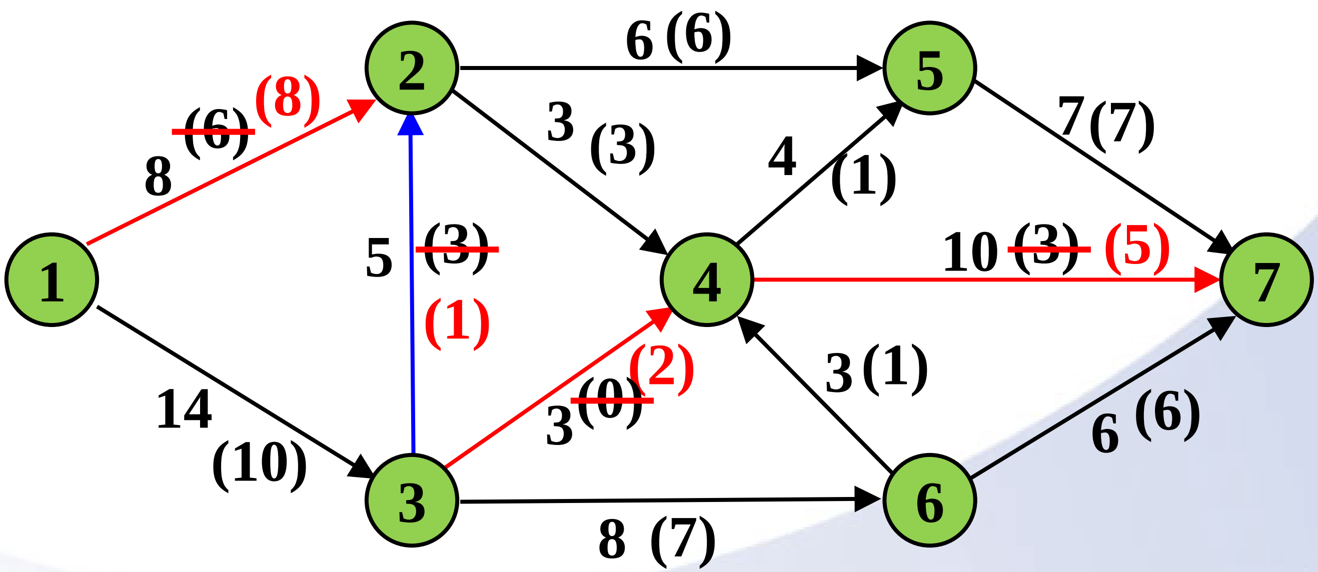


图13-21

13.2 Ford-Fulkerson标号算法

- 例13-10
  - 求图13-18发点v_1到收点v_7的最大流及最大流量
    - 第二轮标号：

$C_{ij}=f_{ij}$，v_4、v_5不能标号，返回到v_3

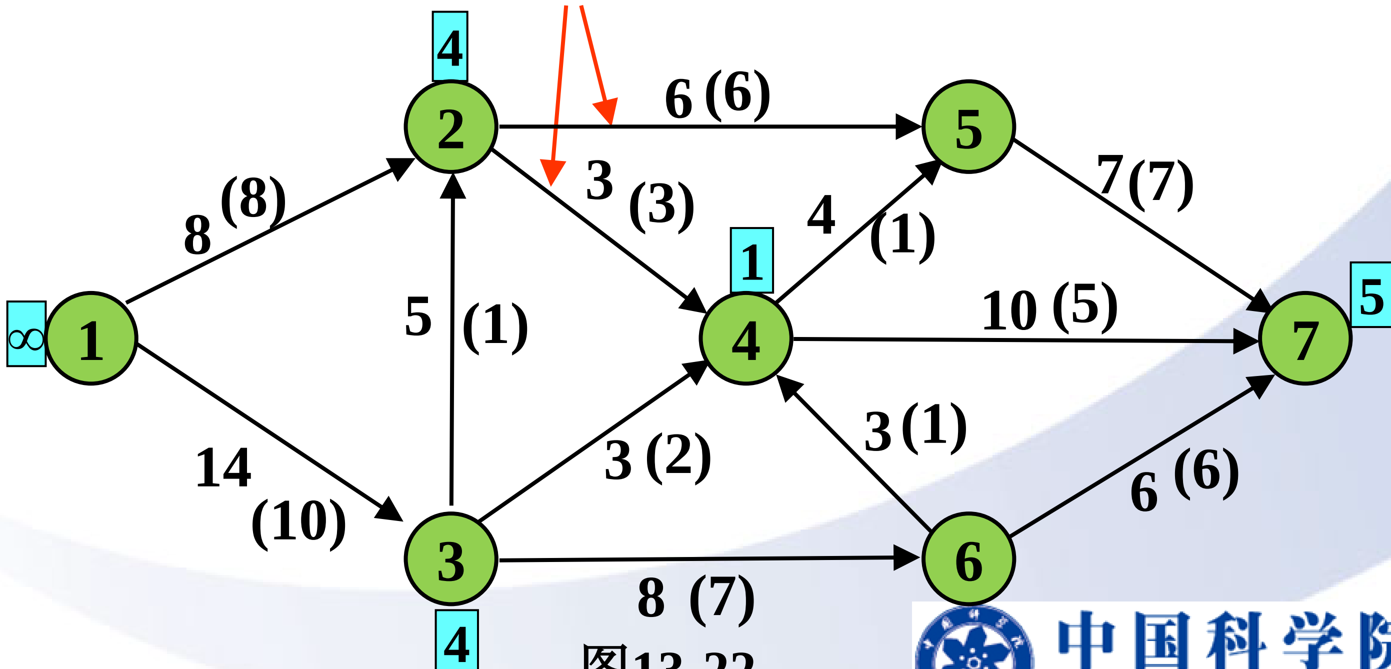


图13-22

13.2 Ford-Fulkerson标号算法

■ 例13-10

□求图13-18发点v_1到收点v_7的最大流及最大流量

➢第二轮标号：

✓增广链$\mu=\mu^{+}=\{(1, 3), (3, 4), (4, 7)\}$，调整量为$\theta=\min\{\infty, 4, 1, 5\}=1$

✓调整后得到可行流：

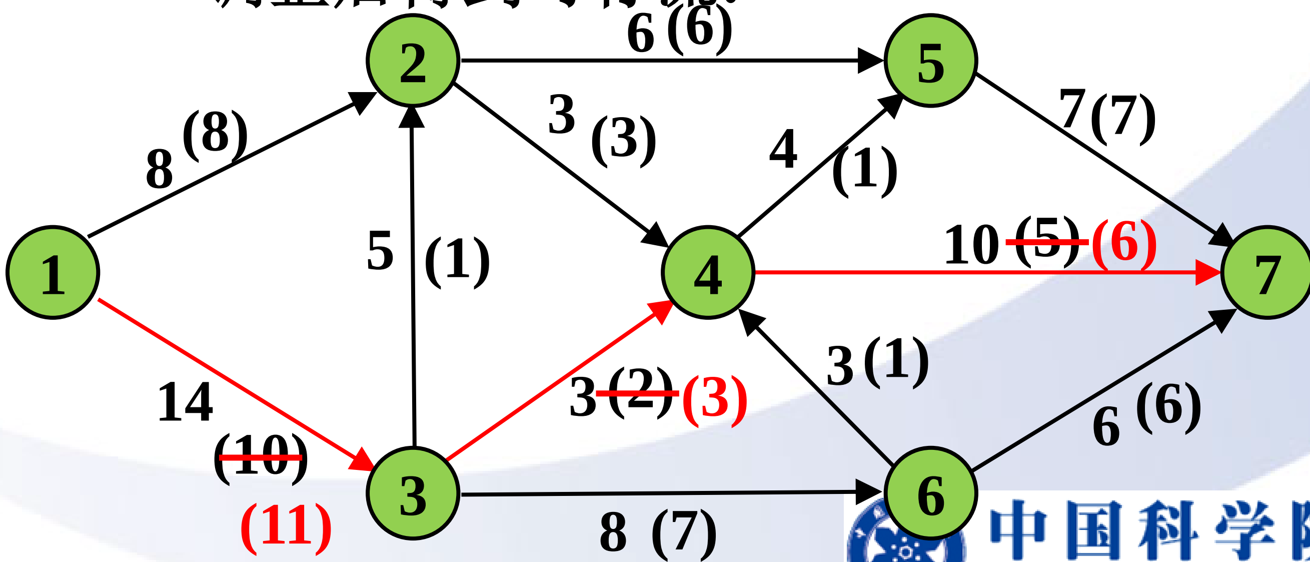


图13-23

13.2 Ford-Fulkerson标号算法

- 例13-10
  - 求图13-18发点v_1到收点v_7的最大流及最大流量
    - 第三轮标号：

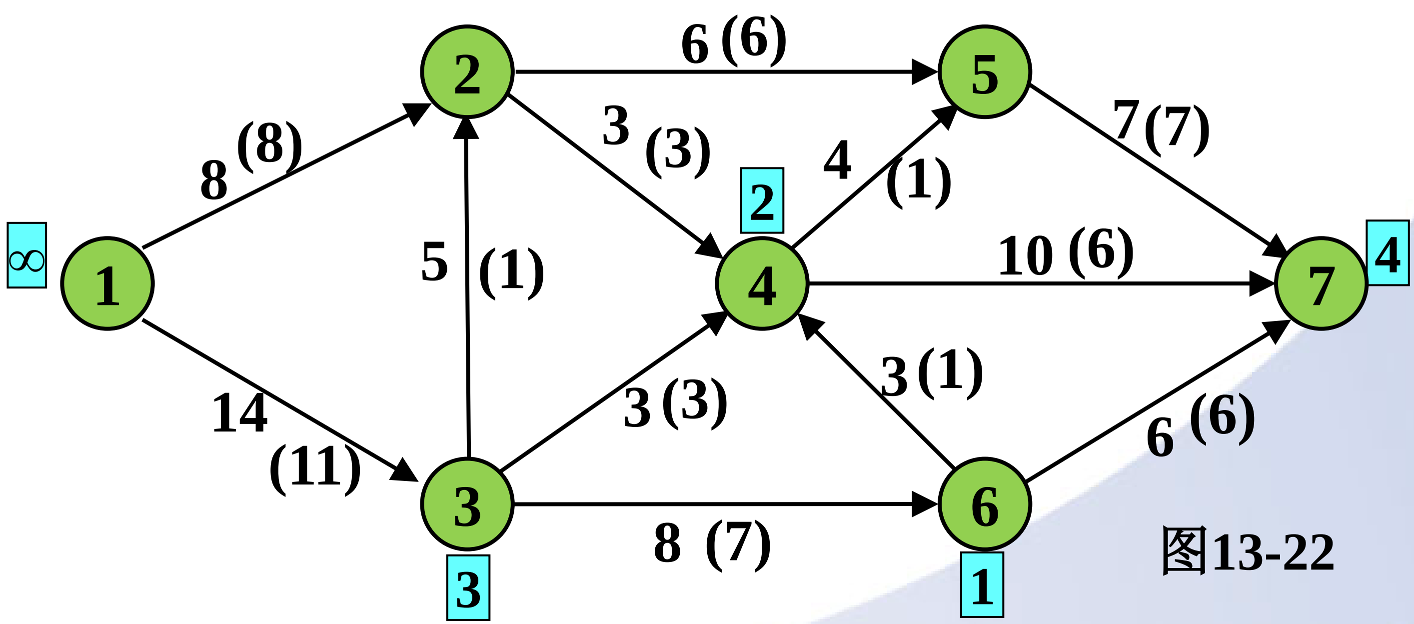


图13-22

✓增广链$\mu=\mu^+=\{(1, 3), (3, 6), (6, 4), (4, 7)\}$，

13.2 Ford-Fulkerson标号算法

■ 例13-10

□求图13-18发点v_1到收点v_7的最大流及最大流量

➢第三轮标号：

✓调整量为$\theta=\min\{\infty, 3, 1, 2, 4\}=1$

✓调整后得到可行流：

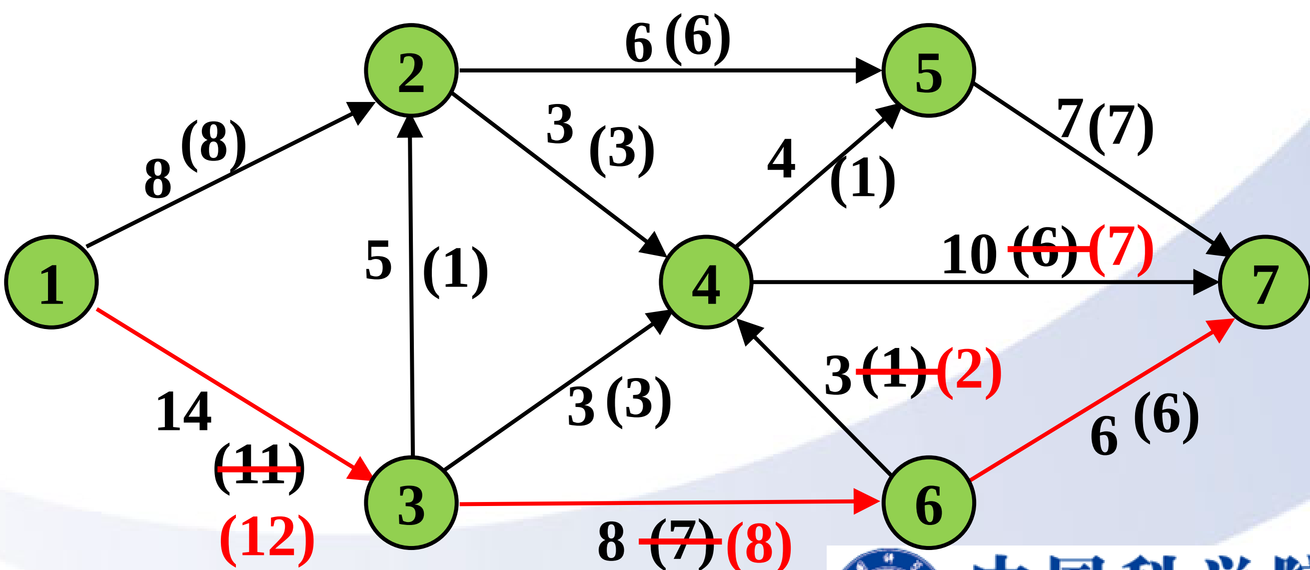


图13-25

13.2 Ford-Fulkerson标号算法

- ■ 例13-10
  - □求图13-18发点v_1到收点v_7的最大流及最大流量
    - ➢第四轮标号：

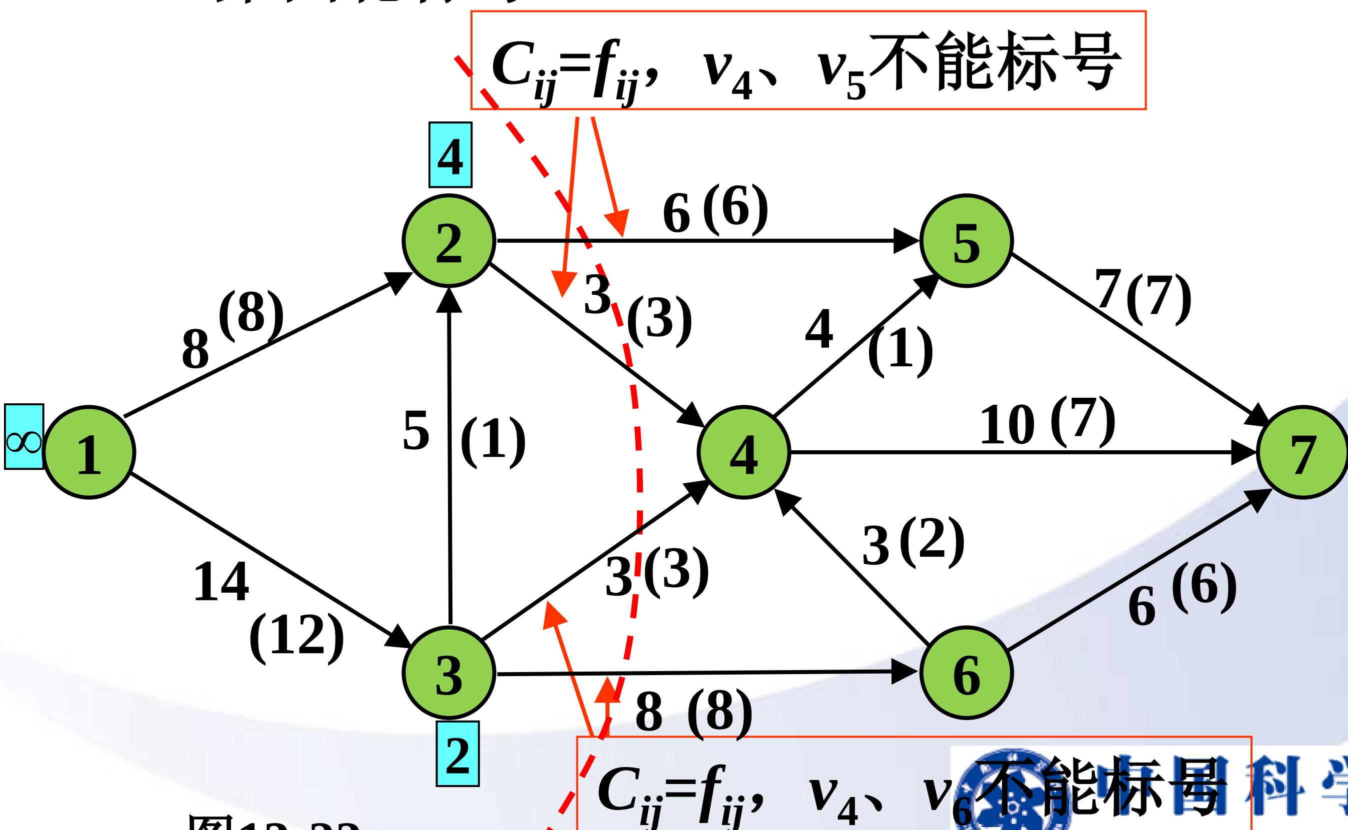


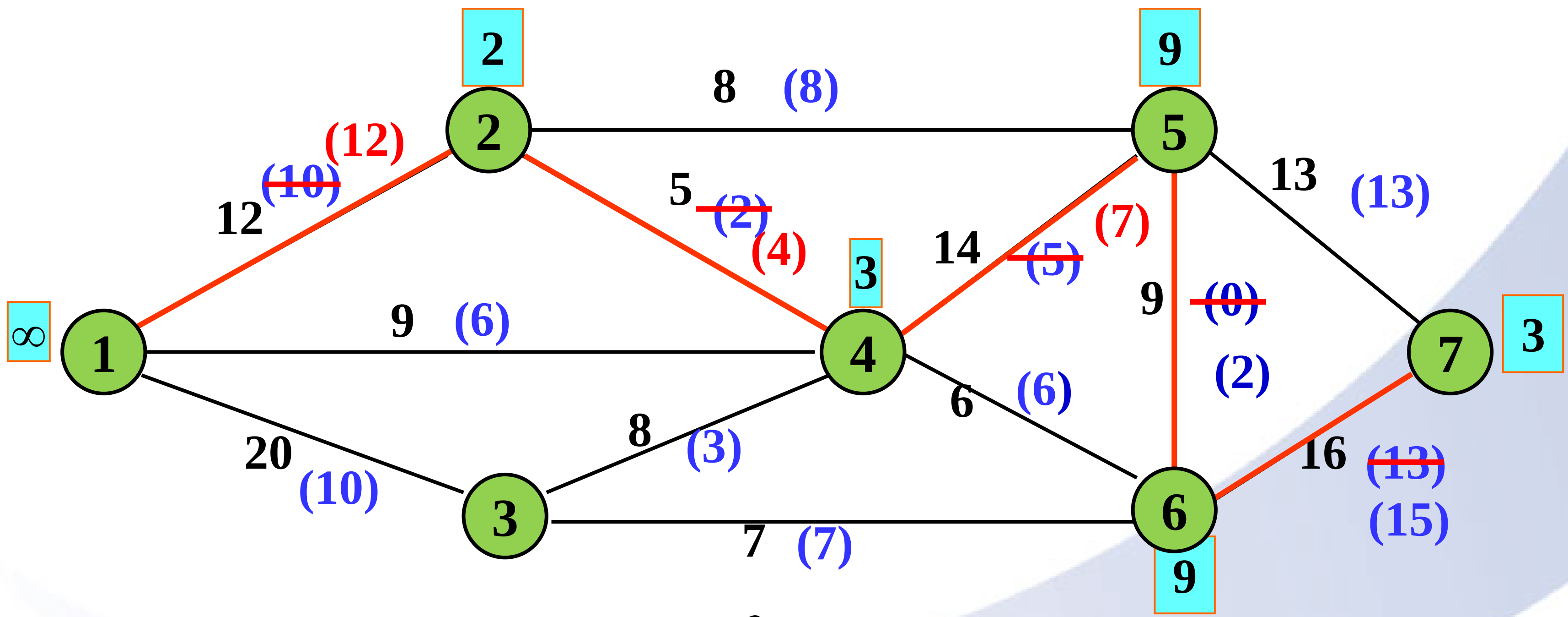
图13-22

13.2 Ford-Fulkerson标号算法

- 例13-10
  - 求图13-18发点v_1到收点v_7的最大流及最大流量
    - 第四轮标号：
      - ✓v_7得不到标号，不存在v_1到 v_7的增广链，图13-22所示的可行流是最大流，最大流量为$v=f_{12}+f_{13}=8+12=20$
  - 无向图最大流标号算法
    - 无向图不存在后向弧，可以理解为所有弧都是前向弧，对一端v_i已标号另一端v_j未标号的边只要满足$c_{ij}-f_{ij}>0$ 则v_j就可标号$(c_{ij}-f_{ij})$

13.2 Ford-Fulkerson标号算法

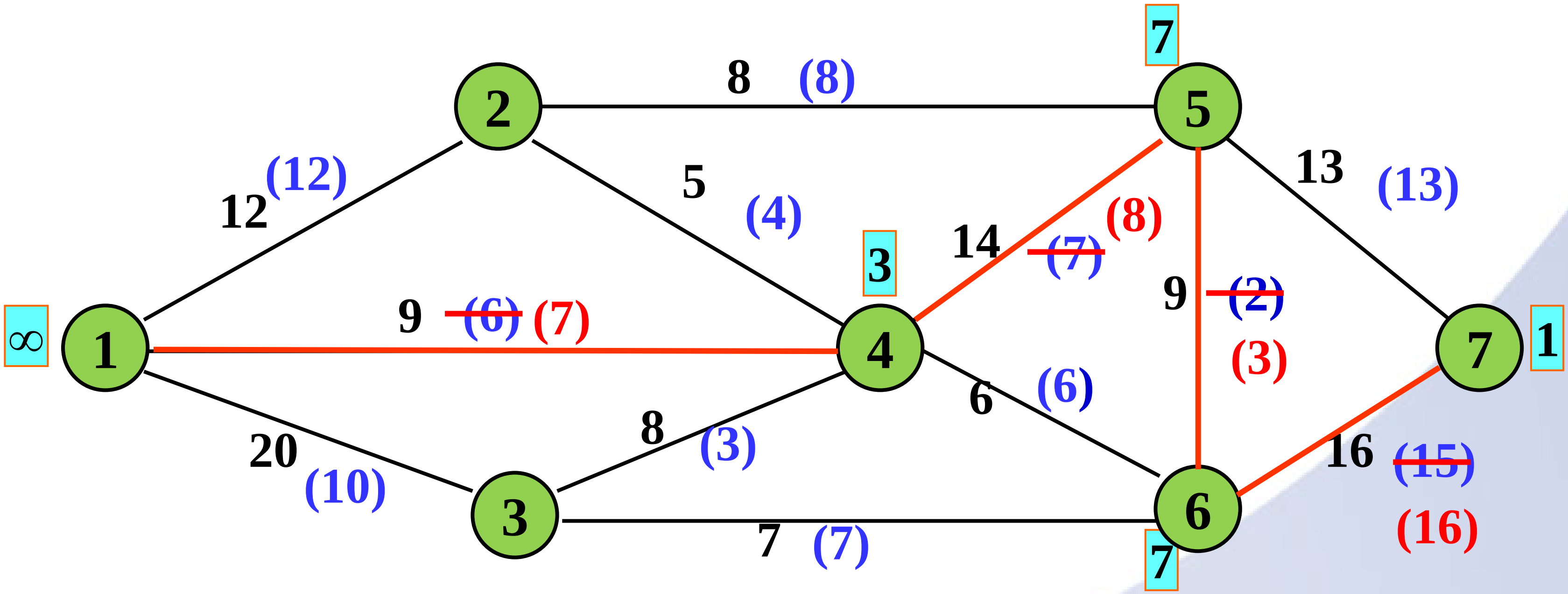
- 例, 求下图v_1到则v_7标的最大流



$\theta = 2$

13.2 Ford-Fulkerson标号算法

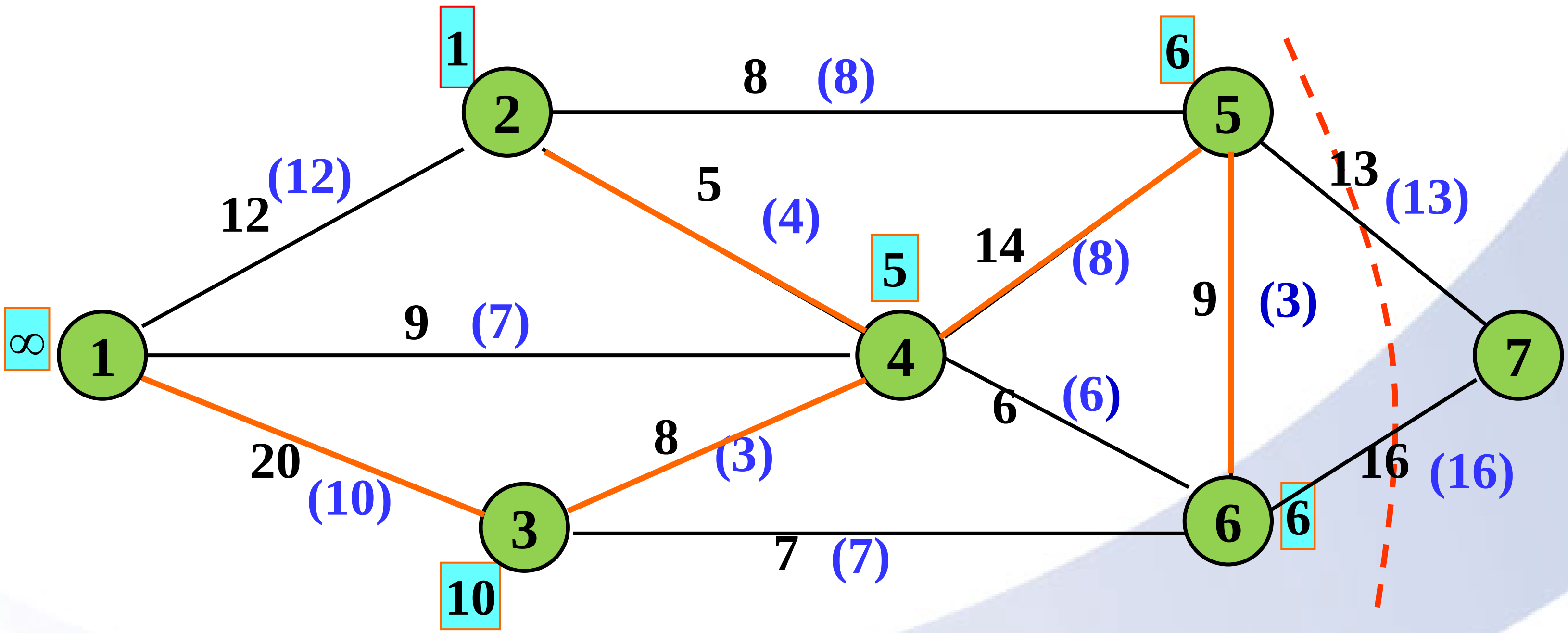
■ 例, 求下图v_1到则v_7标的最大流



$$\theta = 1$$

13.2 Ford-Fulkerson标号算法

- 例, 求下图v_1到则v_7标的最大流



V=29

第十三章 最大流

- 13.1 基本概念
- 13.2 Ford-Fulkerson标号算法
- 13.3 割集与割量
- 13.4 最小费用流
- 13.5 最大流应用举例

13.3 割集与割量

■ 1. 定义

□割集

➢割集是分割网络发点和收点的一组弧集合，从网络中去掉这组弧就断开网络，发点就不能到达收点。

➢将图G＝(V, E)的点集分割成两部分 V_1、$\overline{V}_1$，并且发点 $v_s \in V_1$及收点 $v_t \in \overline{V}_1$，则箭尾在$\boldsymbol{V_1}$ 箭头在 $\overline{V}_1$的弧的集合称为一个割集。记为 $(V_1,\overline{V}_1)$

□割量

➢割集中所有弧的容量之和称为割集的割量。

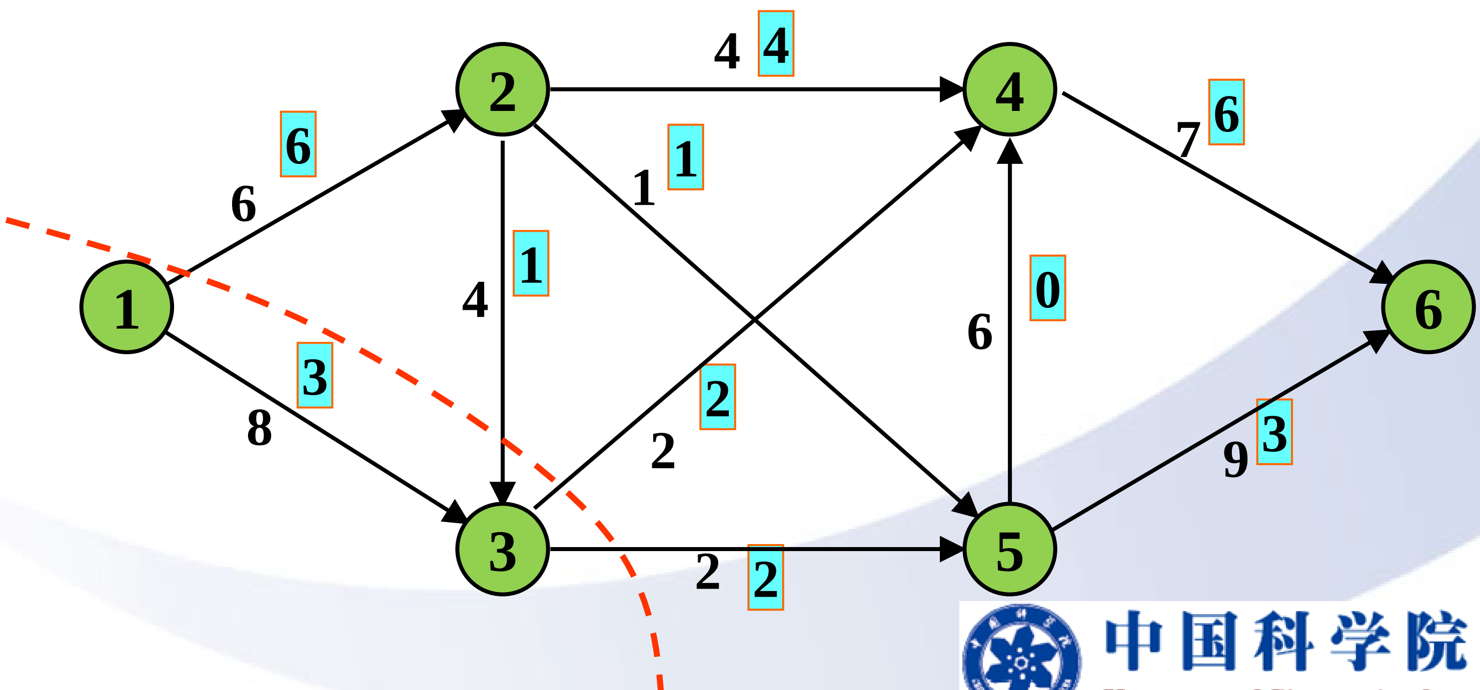
➢记为$C(V_1,\overline{V}_1)$

University of Chinese Academy of Sciences

13.3 割集与割量

■ 2. 例子

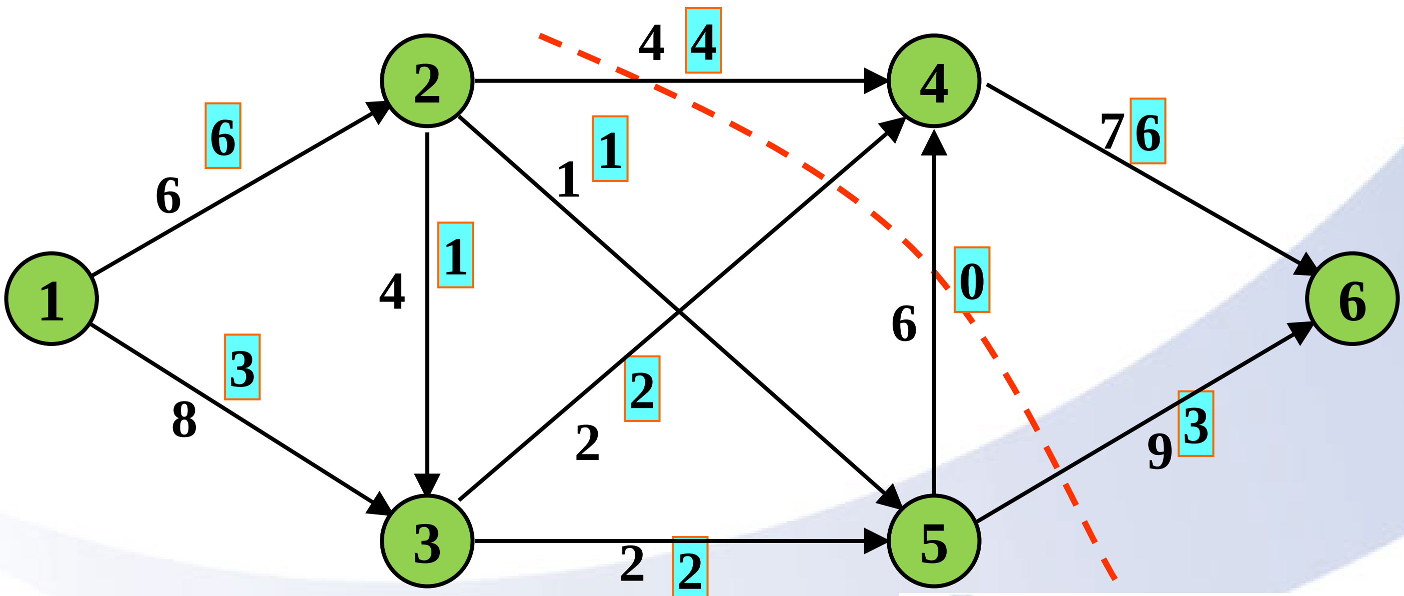
- 取点集$V_1=\{v_1, v_3\}$及$\overline{V}_1=\{v_2, v_4, v_5, v_6\}$
- 割集为$(V_1,\overline{V}_1)=\{(1, 2), (3, 4), (3, 5)\}$
- 割量 $C(V_1,\overline{V}_1)=6+2+2=10$



13.3 割集与割量

■ 2. 例子

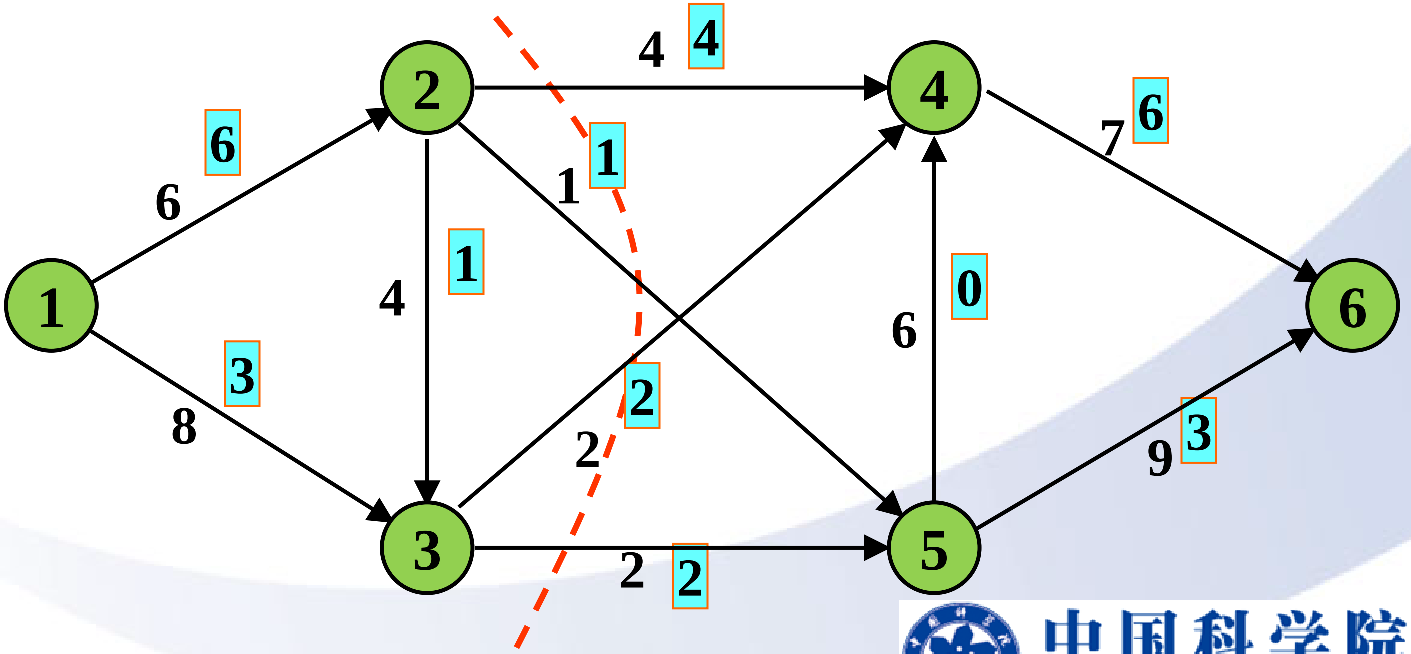
- 取点集$V_1=\{v_1, v_2, v_3, v_5\}$及 $\bar{V}_1=\{v_4, v_6\}$
- 割集为$(V_1,\bar{V}_1)$ =\{(2, 4), (3, 4), (5, 4), (5, 6)\}
- 割量$C(V_1,\bar{V}_1)$ =4+2+6+9=21



13.3 割集与割量

■ 2. 例子

- □取点集$V_1=\{v_1, v_2, v_3\}$及$\overline{V}_1=\{v_4, v_5, v_6\}$
- □割集为$(V_1,\overline{V}_1)=\{(2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5)\}$
- □割量$C(V_1,\overline{V}_1)=4+1+2+2=9$



13.3 割集与割量

- 2. 例子
  - 最小割集
    - 所有割量中此割量最小且等于最大流量，此割集称为最小割集。
  - 【定理】最大流量等于最小割集的割量。
    - 当最大流已求出时，将最后一张图已标号点与未能标号的点组成两个点集，对应的割集就是最小割集。
    - $C(V_2,\overline{V}_2)$是最小割量，并且刚好等于最大流量。
    - 割集$(V_2,\overline{V}_2)$中每-条弧的流量等于容量(饱和弧)。
    - 因此，网络的最大流量取决于最小割集中弧的容量，如果想增加网络的流量，首先应扩大这些弧的容量。

第十三章 最大流

- 13.1 基本概念
- 13.2 Ford-Fulkerson标号算法
- 13.3 割集与割量
- 13.4 最小费用流
- 13.5 最大流应用举例

第十三章 最大流

■ 4. 最小费用流

- □满足流量达到一个固定数使总费用最小，就是**最小费用流问题**。
- □另一个问题是满足流量到达最大使总费用最小，称为**最小费用最大流问题**。
- □设弧(i, j)的单位流量费用为$d_{ij}\geq 0$，弧的容量为$c_{ij}\geq 0$
- □设可行流f的一条增广链为μ，称

$$d(\mu)=\sum_{\mu^+}d_{ij}-\sum_{\mu^-}d_{ij}$$

为增广链μ的费用。第一个求和式是增广链中前向弧的费用之和，第二个求和式是增广链中后向弧的费用之和。$d(\mu)$最小的增广链称为最小费用增广链。

■ 4. 最小费用流

- 图13-27是一个运输网络图，将工厂v_1, v_2及v_3的物质运往v_6, v_4和v_5是中转点，弧上的数字为(c_{ij}, d_{ij})。

① 制定一个总运量等于15总运费最小的运输方案；属于最小费用流问题

② 制定使运量最大并且总运费最小的运输方案，属于最小费用最大流问题

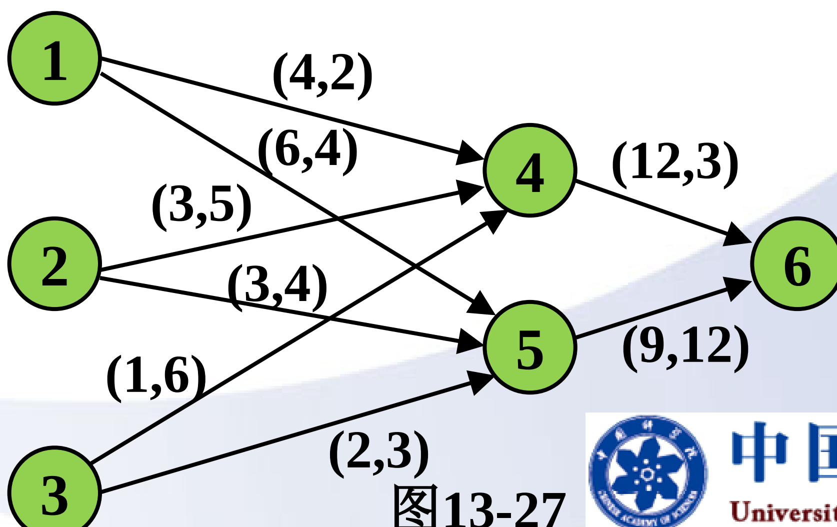


图13-27

■ 4. 最小费用流

- □ 虚拟一个发点 v_s，弧的费用等于零，容量等于以弧的终点为起点弧的容量之和，得到一个发点一个收点的网络图，见图 13-28。
- □ 当运输方案唯一，得到的费用也就是最小费用.

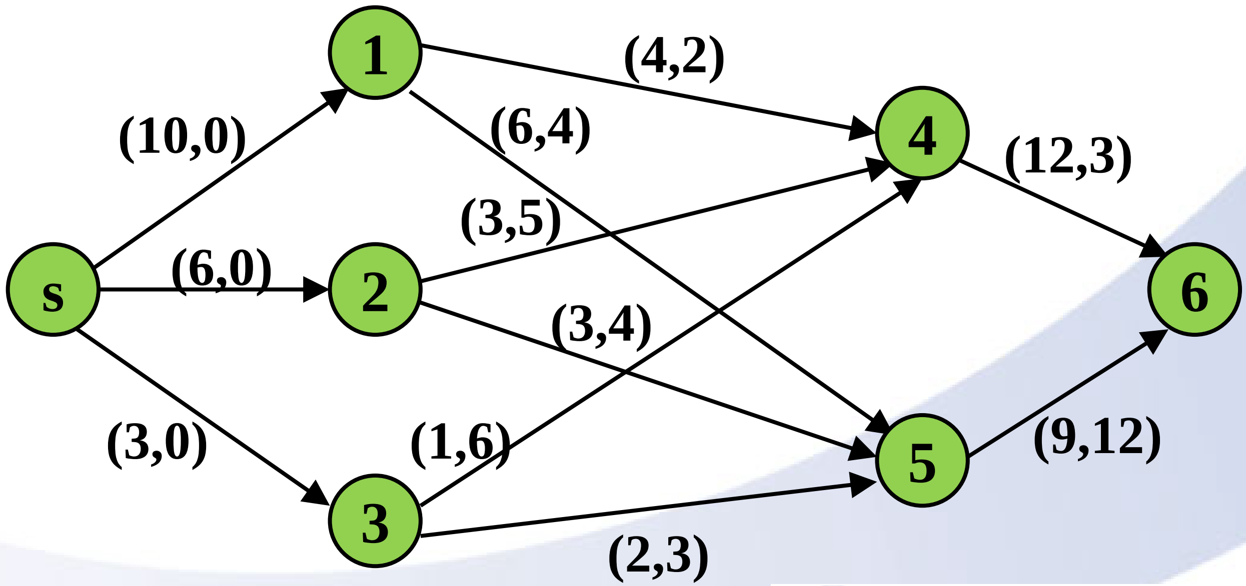


图13-28

■ 4. 最小费用流

- 设给定的流量为v。最小费用流的标号算法步骤如下。
- 第1步：取初始流量为零的可行流$f(0)=\{0\}$，令网络中所有弧的权等于d_{ij}得到一个赋权图D，用Dijkstra算法求出最短路，这条最短路就是初始最小费用增广链μ。
- 第2步：调整流量。在最小费用增广链上调整流量的方法与前面最大流算法一样，前向弧上令$\theta_j = c_{ij} - f_{ij}$，后向弧上令$\theta_j = f_{ij}$，调整量为$\theta=\min\{\theta_j\}$。调整后得到最小费用流$f^{(k)}$，流量为$v^{(k)} = v^{(k-1)}+\theta$，当$v^{(k)} = v$时计算结束，否则转第3步继续计算。
- 第3步：作赋权图D并寻找最小费用增广链。

■ 4. 最小费用流

① 对可行流$f^{(k-1)}$的最小费用增广链上的弧(i, j)作如下变动

$$w_{ij}=\begin{cases} d_{ij} & f_{ij}<c_{ij} \\ +\infty & f_{ij}=c_{ij} \end{cases}, w_{ji}=\begin{cases} -d_{ij} & f_{ij}>0 \\ +\infty & f_{ij}=0 \end{cases}$$

➢第一种情形：当弧(i, j)上的流量满足$0< f_{ij} < c_{ij}$时，在点v_i与v_j之间添加一条方向相反的弧(j, i), 权为$(-d_{ij})$。

➢第二种情形：当弧(i, j)上的流量满足$f_{ij} = c_{ij}$时将弧(i, j)反向变为(j, i), 权为$(-d_{ij})$。不在最小费用增广链上的弧不作任何变动，得到一个赋权网络图D。

■ 4. 最小费用流

② 求赋权图D从发点的收点的最短路，如果最短路存在，则这条最短路就是$f^{(k-1)}$的最小费用增广链，转第2步。
赋权图D的所有权非负时，可用Dijkstra算法求最短路，存在负权时用Floyd算法。

③ 如果赋权图D不存在从发点到收点的最短路，说明$v^{(k-1)}$已是最大流量，不存在流量等于v的流，计算结束。

■ 4. 最小费用流

- □【例13-11】对图13-28，制定一个运量v＝15及运量最大总运费最小的运输方案。
  - ➢【解】令所有弧的流量等于零，得到初始可行流$f^{(0)}$＝{0}，流量$v^{(0)}$＝0，总运费$d(f^{(0)})$=0。

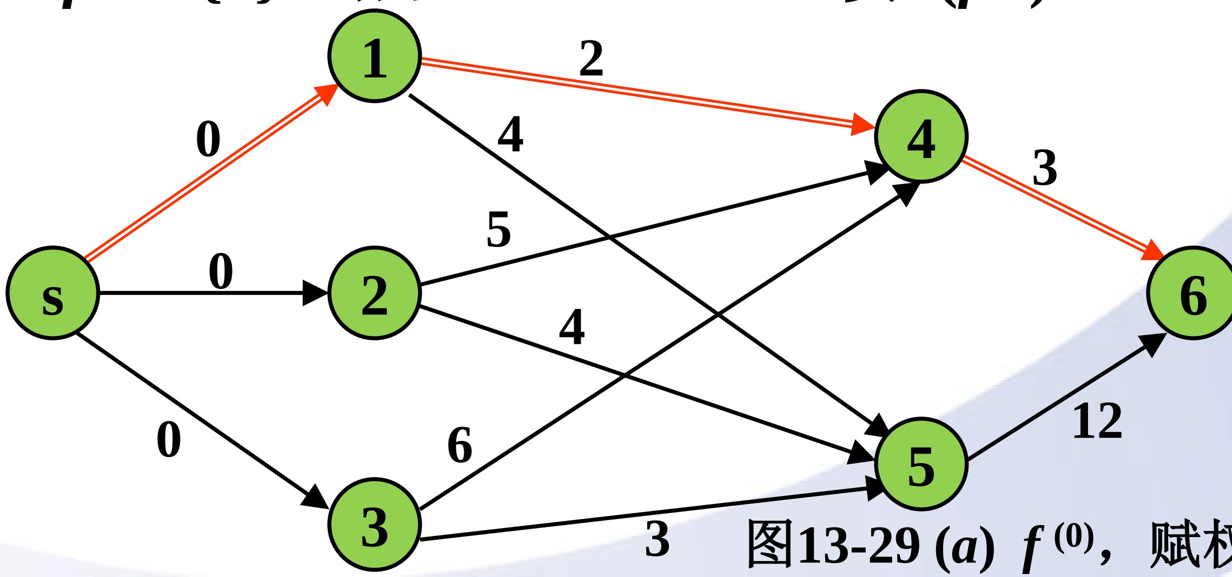


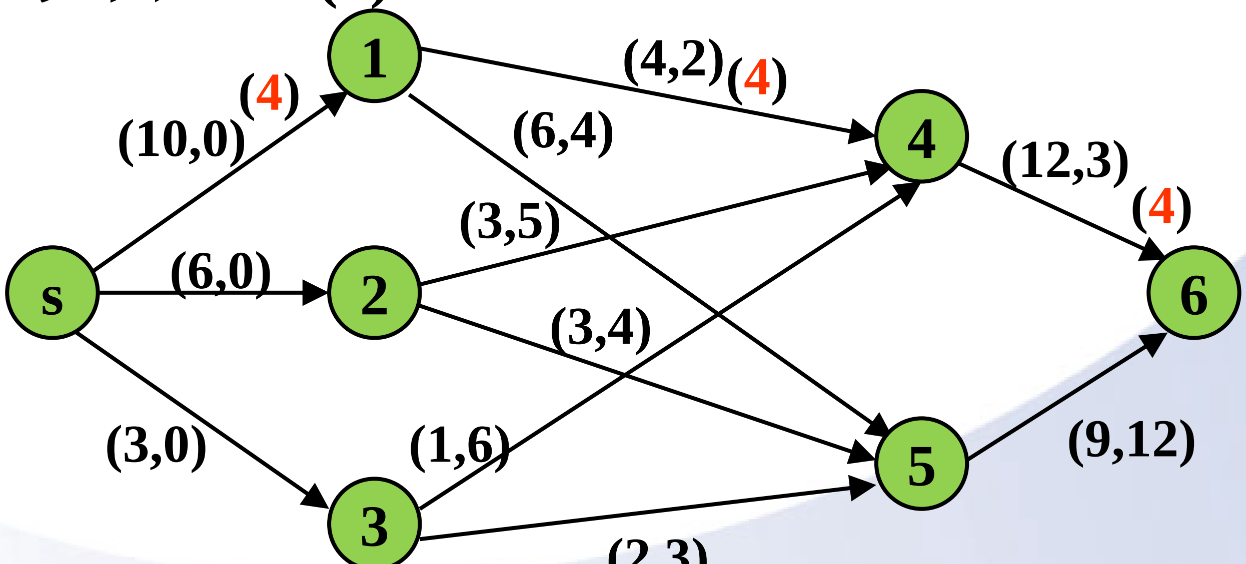
图13-29

图13-29 (a) $f^{(0)}$，赋权图D_0

- ➢最小费用增广链μ_1：s→①→④→⑥,见图13-29(a)

■ 4. 最小费用流

- 调整量θ＝4，对$f^{(0)}=\{0\}$进行调整得到$f^{(1)}$，括号( )内的数字为弧的流量，网络流量$v^{(1)}=4$，总运费$d(f^{(1)})=0\times4+2\times4+3\times4=20$
- 如图13-29(*b*)。



图中：(c_{ij}, d_{ij}) (f_{ij})

图13-29 (*b*) $f^{(1)}$

图13-29

■ 4. 最小费用流

□(3) $v(1)=4<15$，没有得到最小费用流。在图13-29(*b*)中，弧(*s*, 1)和(4, 6)满足条件$0<f_{ij}<c_{ij}$，添加两条边(1, *s*)和(6, 4)，权分别为“0”和“-3”，边(1, *s*)可以去掉，弧(1, 4)上有$f_{ij}=c_{ij}$说明已饱和，将弧(1, 4)反向变为(4, 1)，权为“-2”，如图13-29(c)。

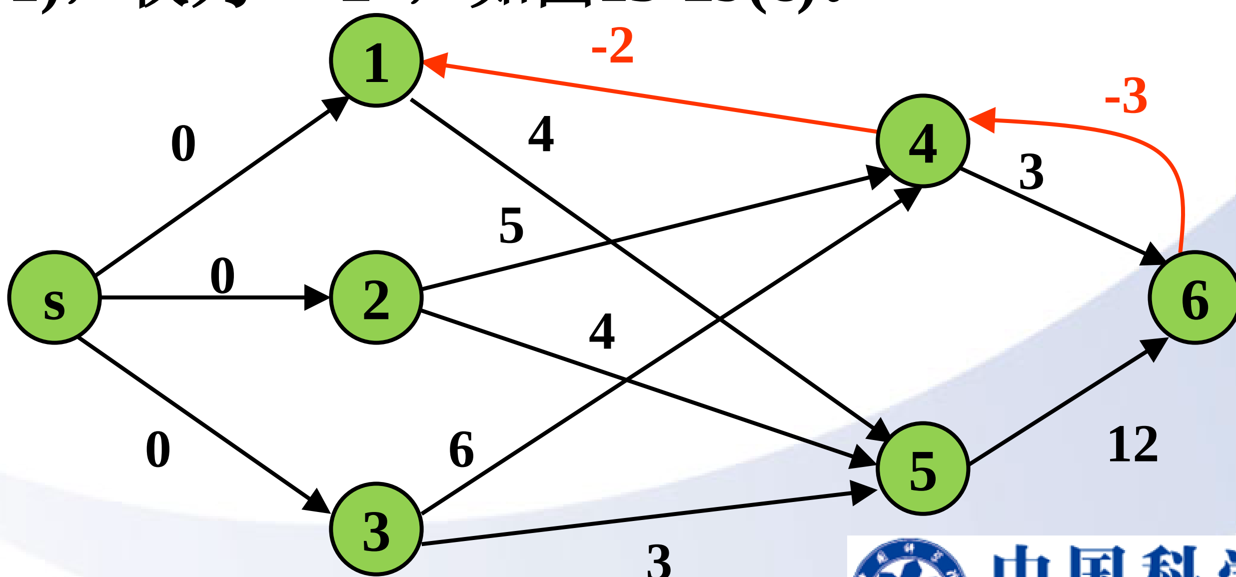
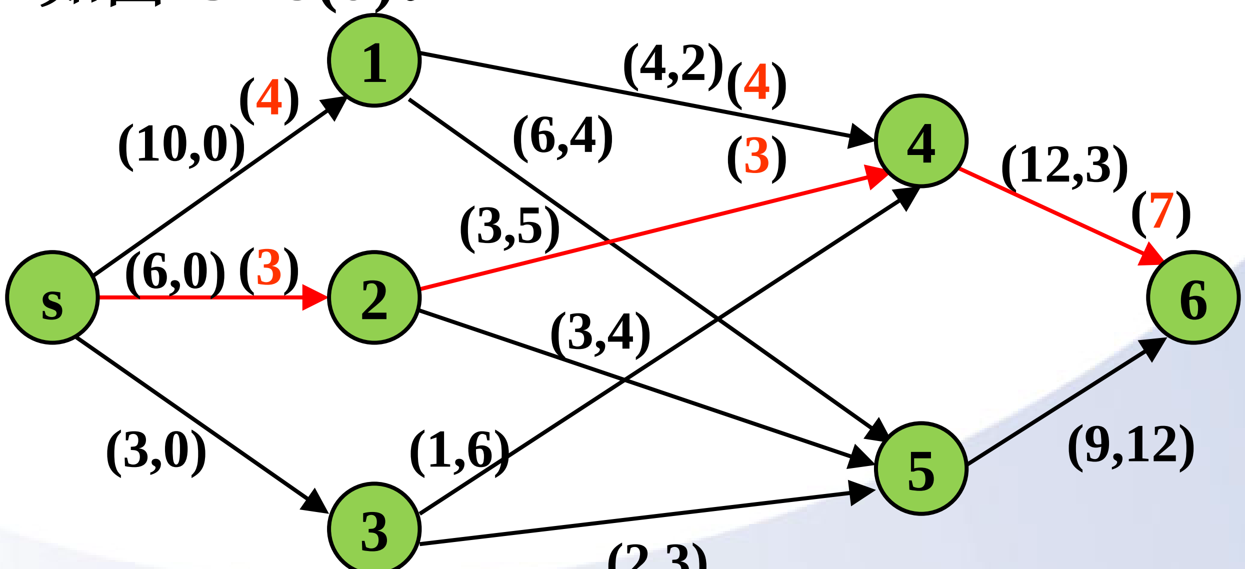


图13-29 (*c*) $f^{(1)}$，赋权图D_1

■ 4. 最小费用流

- 用Floyd算法得到最小费用增广链μ^2：s→②→④→⑥，调整量θ＝3，调整后得到最小费用流$f^{(2)}$，流量$v^{(2)}$＝7，总运费$d(f^{(2)})=2\times4+3\times7+5\times3=44$
- 如图13-29(d)。



图中：(c_{ij}, d_{ij}) (f_{ij})

图13-29 (d) $f^{(2)}$

■ 4. 最小费用流

- □(4) $v^{(2)}=7<15$，对最小费用增广链μ^2上的弧进行调整，在图13-29(*c*)中，弧(*s*, 2)和(4, 6)满足条件$0<f_{ij}<c_{ij}$，添加两条边(2, *s*)和(6, 4)，权分别为“0”和“-3”，边(2, *s*)可以去掉，弧(6, 4)已经存在，弧(2, 4)上有$f_{ij}=c_{ij}$说明已饱和，将弧(2, 4)反向变为(4, 2)，权为“-5”，如图13-29(*e*)。

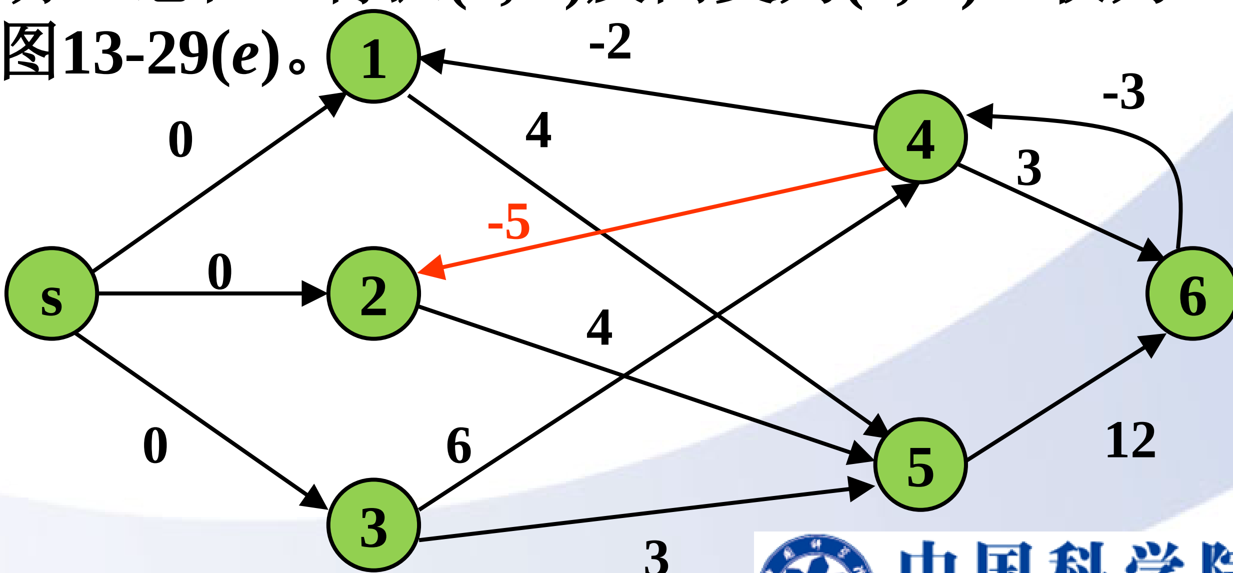


图13-29 (*e*) $f^{(2)}$，赋权图D_2

■ 4. 最小费用流

- □用Floyd算法得到最小费用增广链μ^3：s→③→④→⑥，调整量θ＝1，调整后得到最小费用流$f^{(3)}$，流量$v^{(3)}$＝8，总运费$d(f^{(3)})=2\times4+3\times8+5\times3+6\times1=53$
- □如图13-29(f)。

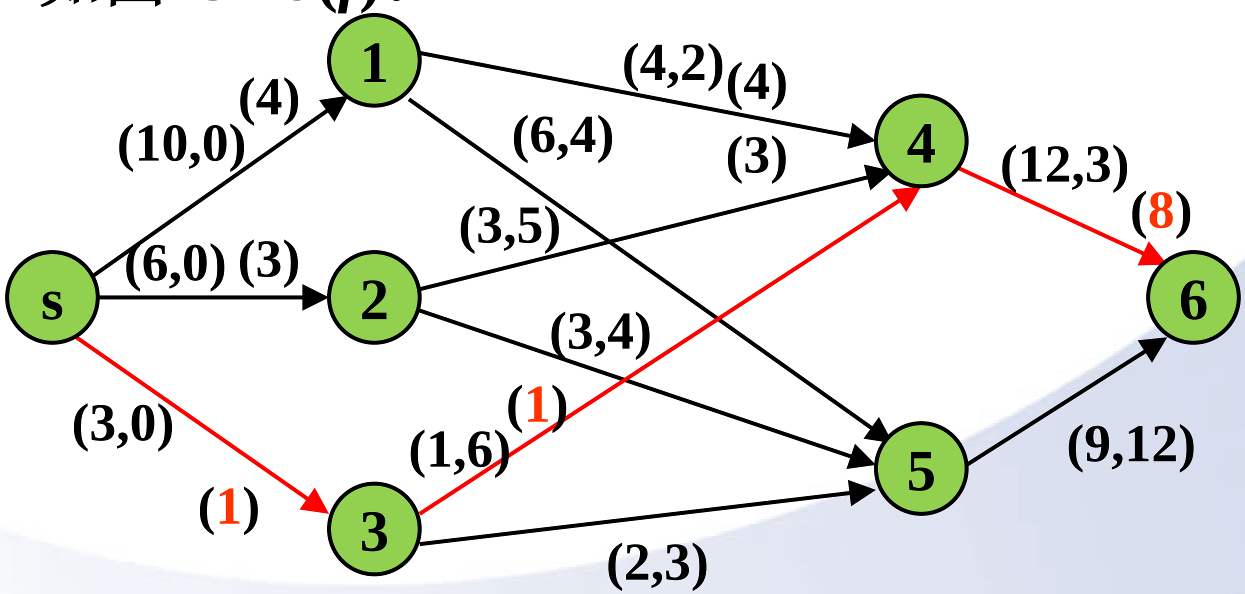


图13-29 (f) $f^{(3)}$

■ 4. 最小费用流

□(5)类似地，得到图13-29(g)

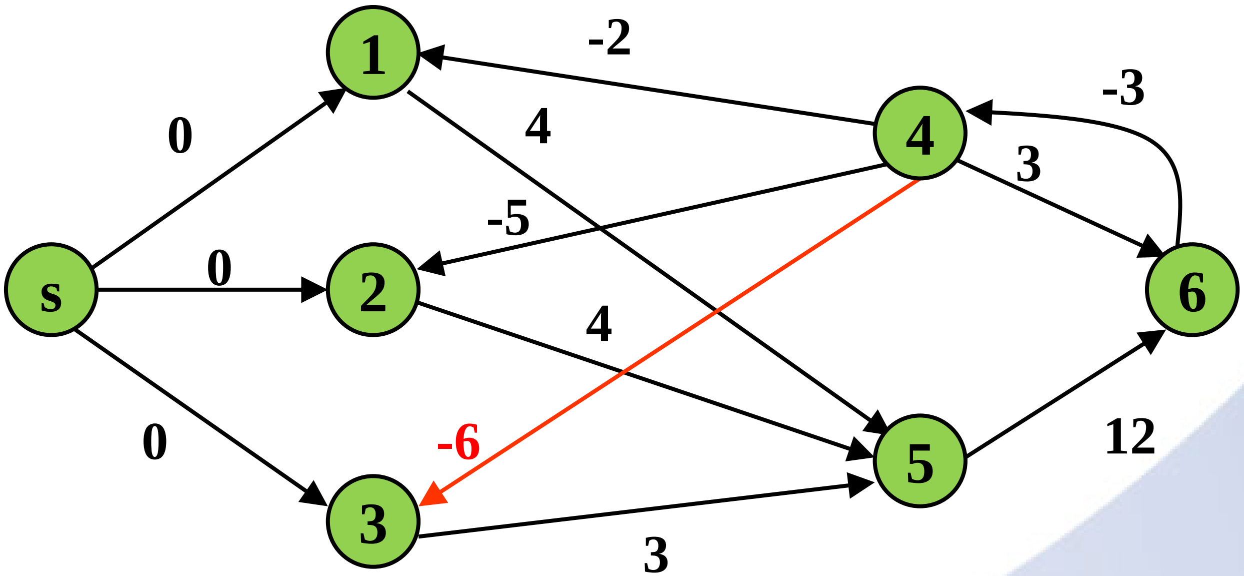


图13-29 (*g*) $f^{(3)}$，赋权图D_3

■ 4. 最小费用流

□最小费用增广链μ^4：s→③→⑤→⑥，调整量θ＝2，流量$v^{(4)}$＝10。见图13-29(h)

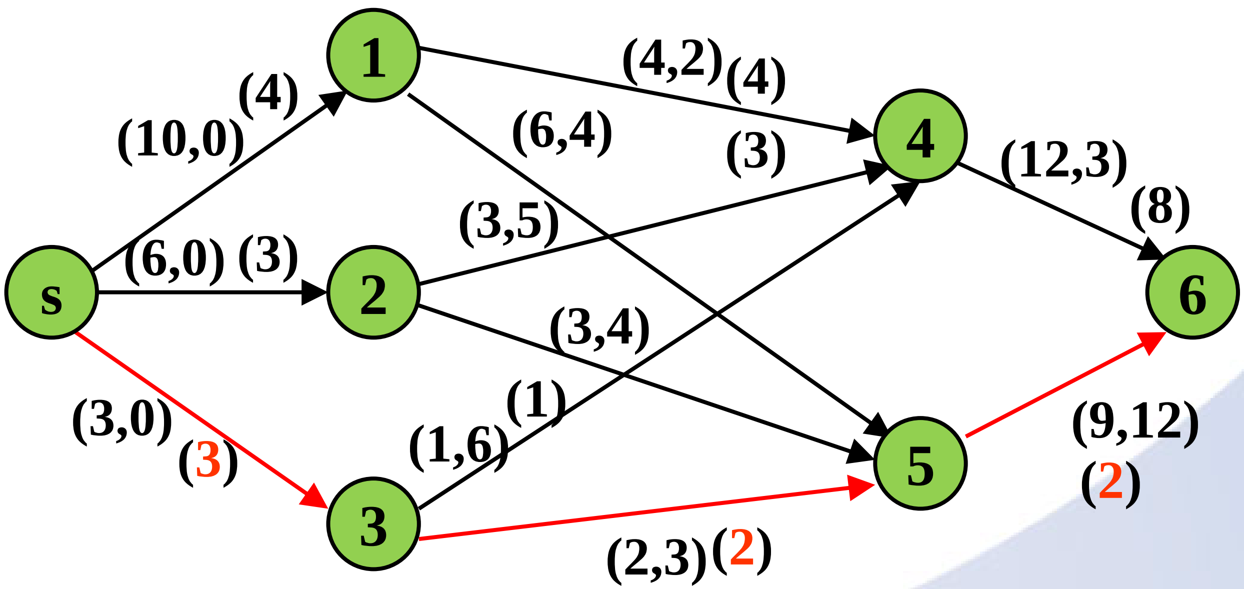


图13-29 (*h*) $f^{(4)}$

■ 4. 最小费用流

□(6)由图13-29(*g*)及(*h*)，得到图13-29(*i*)

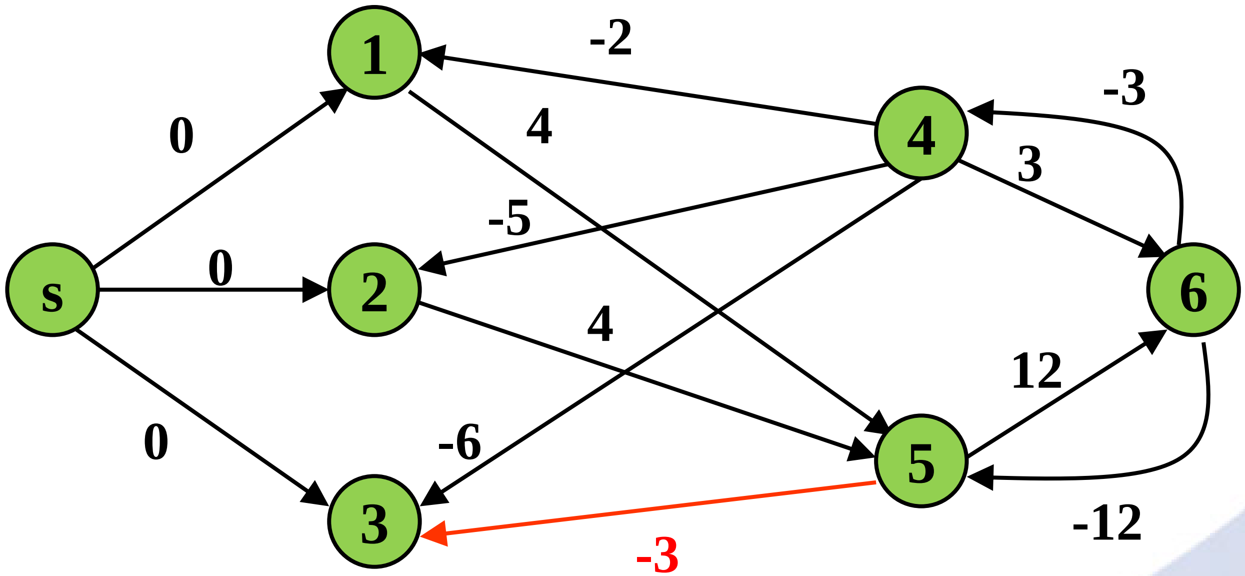


图13-29 (*i*) $f^{(4)}$，赋权图D_4

■ 4. 最小费用流

- □最小费用增广链μ^5：s→①→⑤→⑥，调整量θ＝6，取θ＝5，流量$v^{(5)}=v=15$得到满足，最小费用流见图13-29(j)，问题1计算结束。

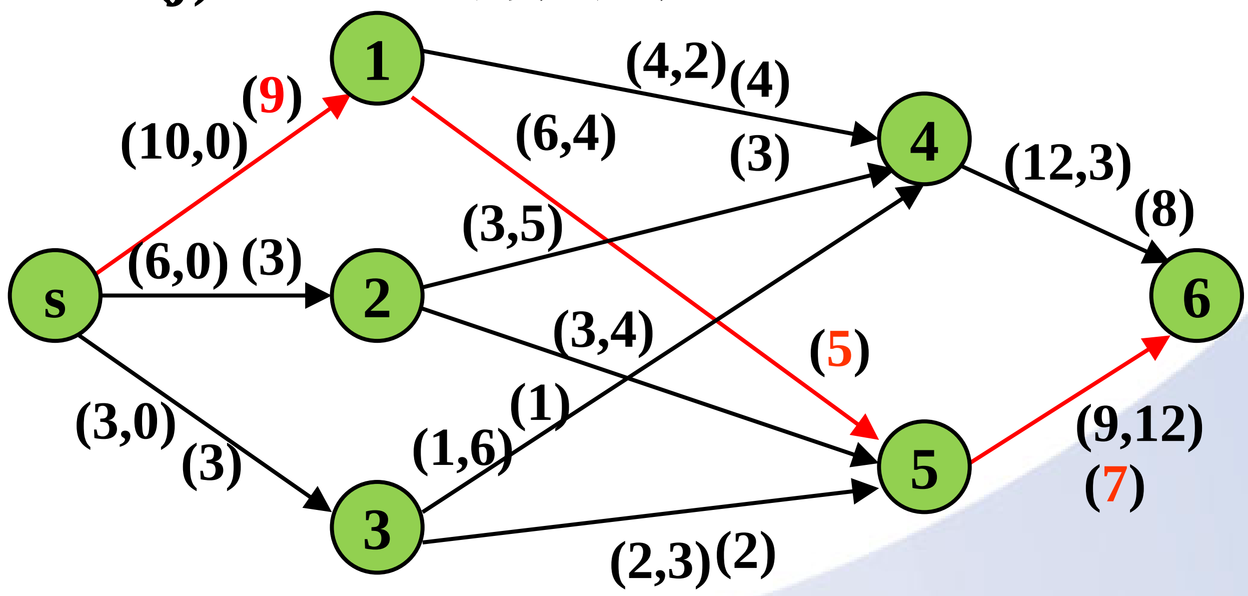


图13-29 (j) $f^{(5)}$

第十三章 最大流

■ 4. 最小费用流

- □(7)求最小费用最大流。对图13-29(*i*)的最小费用增广链μ^5，取调整量$\theta=6$对流量调整，得到图13-30(*a*)及赋权图13-30(*b*)

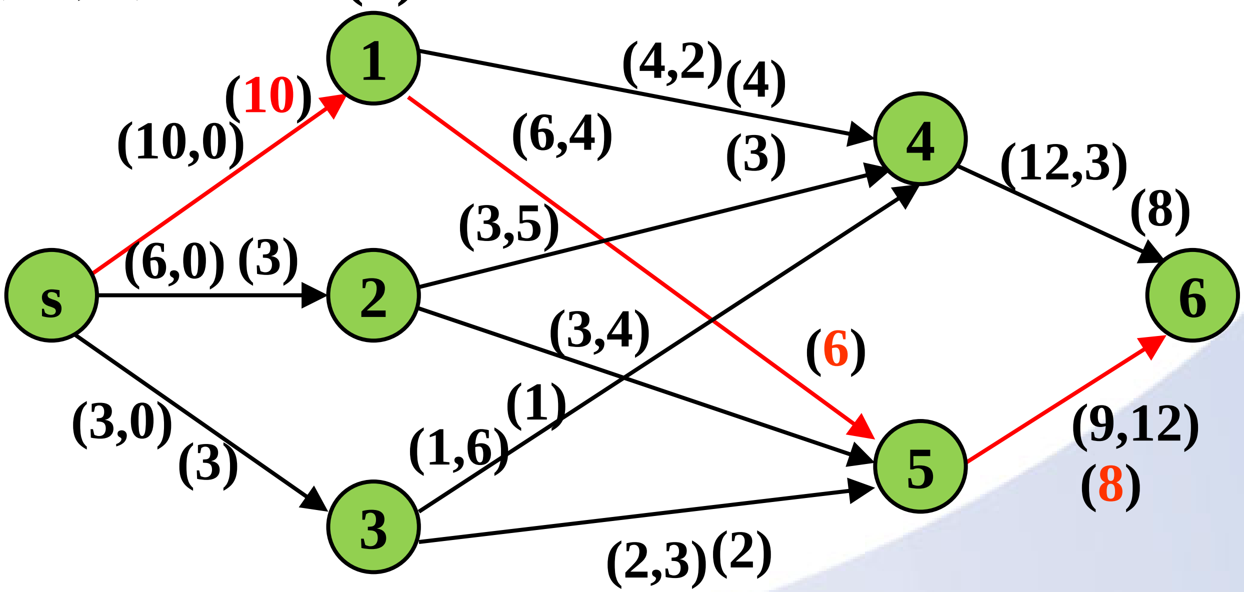


图13-30 (*a*) $f^{(5)}$

■ 4. 最小费用流

□(8)图13-30(b)的最小费用增广链μ^6：s→②→⑤→⑥，

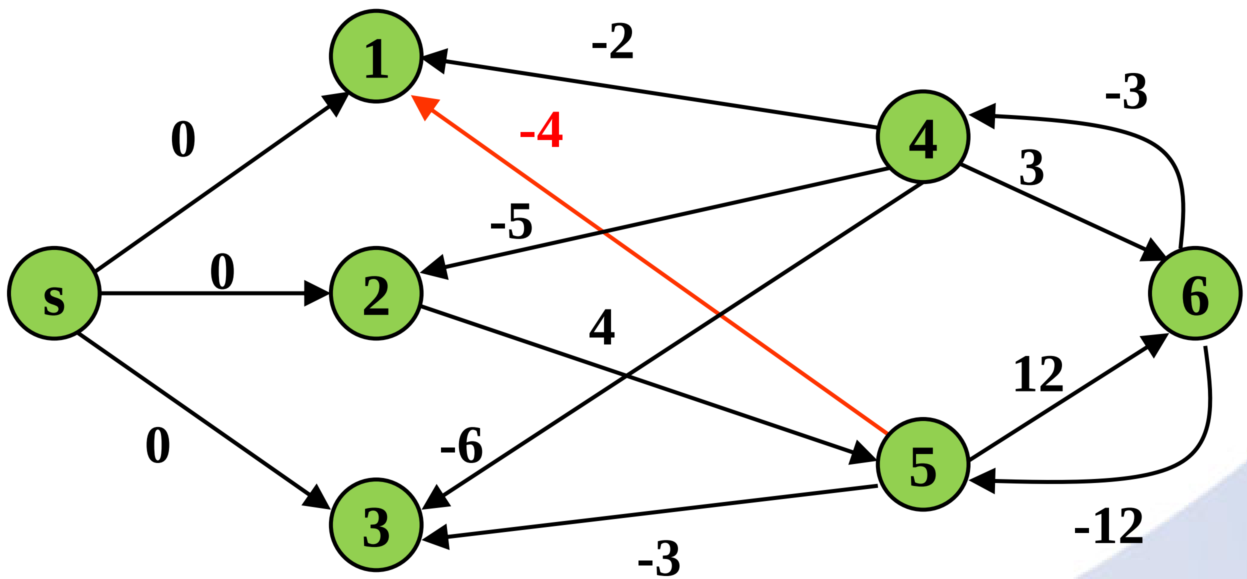


图13-30 (*b*) $f^{(5)}$，赋权图D_5

■ 4. 最小费用流

- □调整量θ＝1，流量$v^{(6)}$＝17，最小费用流为$f^{(6)}$，见图13-30(c)。

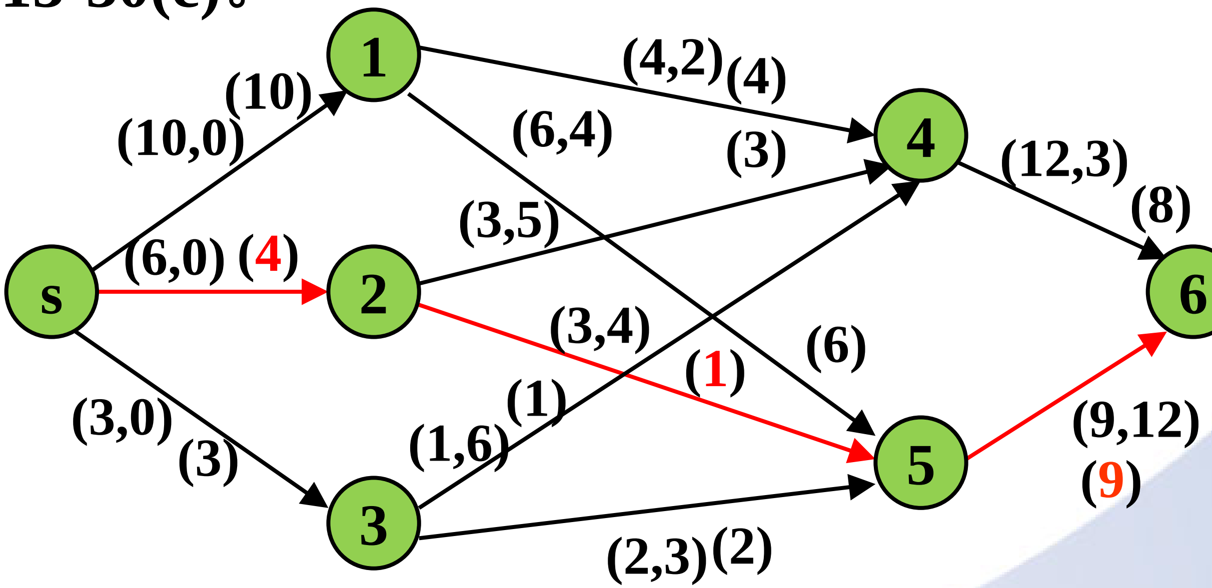


图13-30 (*c*) $f^{(6)}$

■ 4. 最小费用流

- 赋权图见图13-30(d) 。图13-30(d)不存在从v_s发点到v_6的最短路，则图13-30(c)的流就是最小费用最大流，最大流量v=17，最小的总运费为 $d(f)=2\times4+4\times6+5\times3+4\times1+6\times1+3\times2+3\times8+12\times9=195$

3个工厂分别运送10、4及3个单位物质到v_6，总运量为17，运费为195

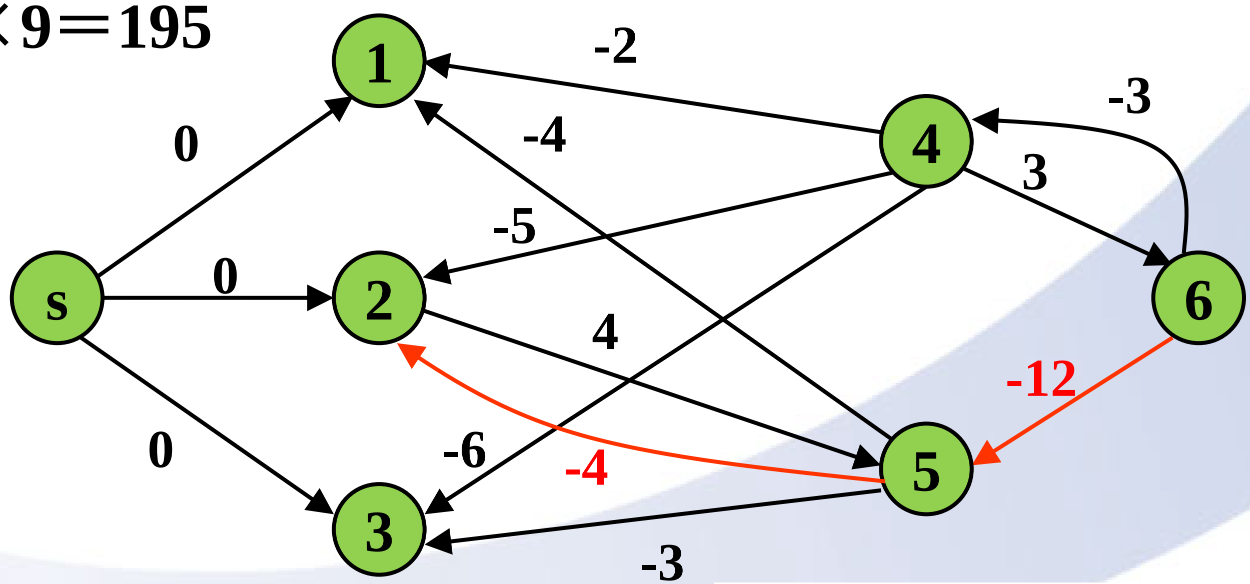


图13-30(d) $f^{(6)}$，赋权图D_6

第十三章 最大流

- 13.1 基本概念
- 13.2 Ford-Fulkerson标号算法
- 13.3 割集与割量
- 13.4 最小费用流
- 13.5 最大流应用举例

第十三章 最大流

■ 5. 最大流应用举例

□1. 二分图的最大匹配问题

➢ 【例13-12】某公司需要招聘5个专业的毕业生各一个，通过本人报名和筛选，公司最后认为有6人都达到录取条件。这6人所学专业见表13-10，表中打"√"表示该生所学专业。公司应招聘哪几位毕业生，如何分配他们的工作 。

表13-10

毕业生	A.市场营销	B.工程管理	C.管理信息	D.计算机	E.企业管理
1	√	√			
2			√	√	
3		√			√
4	√				√
5		√	√		
6				√	√

■ 5. 最大流应用举例

□1. 二分图的最大匹配问题

- 【解】画出一个二分图，虚设一个发点和一收点，每条弧上的容量等于1，问题为求发点到收点的最大流，求解结果之一见图13-32。
- 公司录取第2～6号毕业生，安排的工作依次为管理信息、企业管理、市场营销、工程管理和计算机。

第十三章 最大流

■ 5. 最大流应用举例

□1. 二分图的最大匹配问题

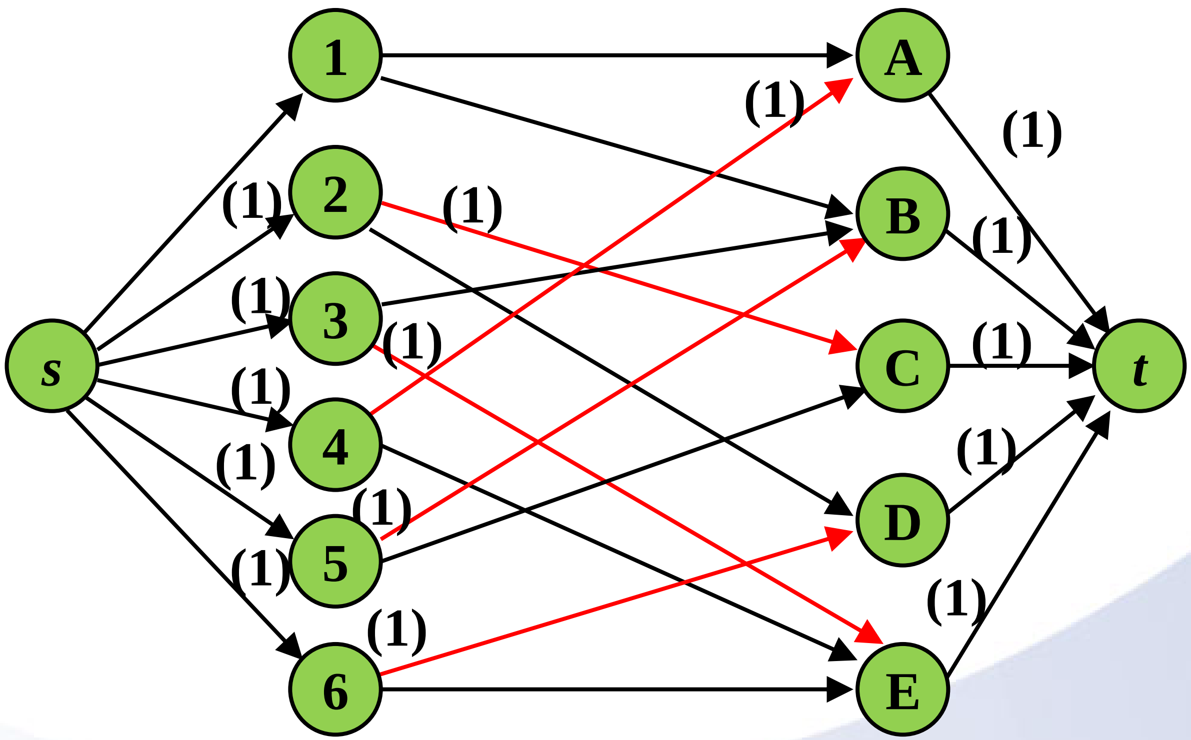


图13-32

■ 5. 最大流应用举例

□【例13-13】某市政工程公司在未来5～8月份内需完成4项工程：A.修建一条地下通道、B.修建一座人行天桥、C.新建一条道路及D.道路维修。工期和所需劳动力见表13-11。该公司共有劳动力120人，任一项工程在一个月内的劳动力投入不能超过80人，问公司如何分配劳动力完成所有工程，是否能按期完成

表13-11

	工期	需要劳动力（人月）
A. 地下通道	5～7月	100
B. 人行天桥	6～7月	80
C. 新建道路	5～8月	200
D. 道路维修	8月	80

第十三章 最大流

■ 5. 最大流应用举例

- 【解】将工程计划用网络图13-33表示。设点v_5、v_6、v_7、v_8分别表示5～8月份，A_i、B_i、C_i、D_i表示工程在第i个月内完成的部分，用弧表示某月完成某项工程的状态，弧的容量为劳动力限制。就是求图13-33从发点到收点的最大流问题。

■ 5. 最大流应用举例

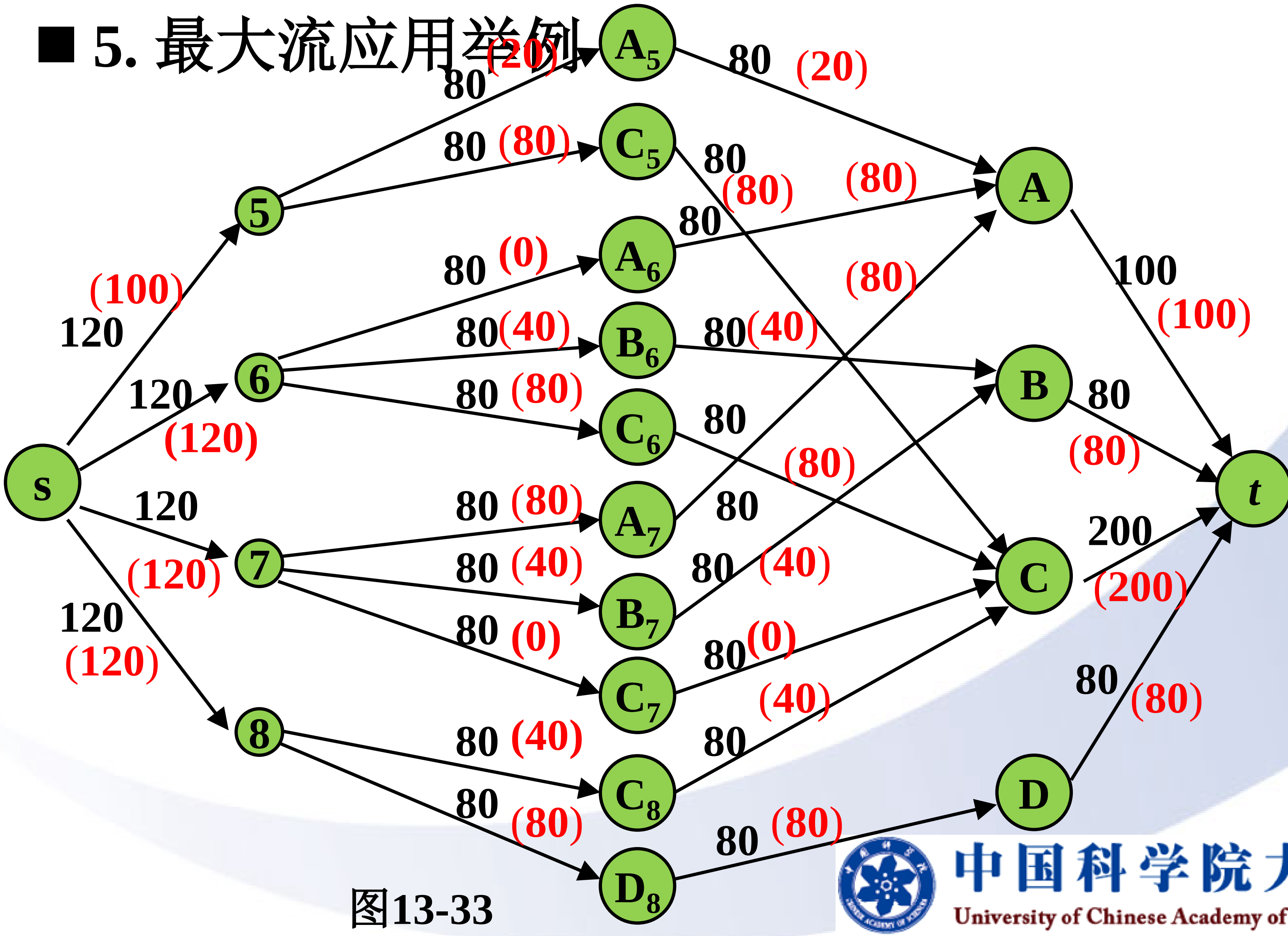


图13-33

■ 5. 最大流应用举例

- □Ford-Fulkerson标号算法求解得到图13-33，括号内的数字为弧的流量。每个月的劳动力分配见表13-12。5月份有剩余劳动力20人，4项工程恰好按期完成

表13-12

月份	投入劳动力	项目A(人)	项目B(人)	项目C(人)	项目D(人)
5	100	20		80	
6	120		40	80	
7	120	80	40		
8	120			40	80
合计(人)	460	100	80	200	80

答疑

- 时间
  - 1月15日，8:30~11:30, 14:00~17:00
- 地点
  - 学园2-387

End