

姓名_____

学号_____

成绩_____

1. 设 $X(1), X(2)$ 是两个独立同分布的随机样本, 服从二项分布 $B(n, p)$, 试给出至少两种 p^2 的无偏估计。
2. 设 $X(1), X(2)$ 是两个独立同分布的随机样本, 服从二项分布 $B(n, p)$, 请计算 p^2 的 Cramer-Rao 下界。并通过对第 1 题中两种无偏估计的均方误差的计算, 指出哪一个无偏估计更加接近 Cramer-Rao 下界。

3. 考虑零均值宽平稳随机序列 $X(n)$, 满足

$$X(n) = S(n) + V(n)$$

其中 $S(n), V(n)$ 是独立的随机序列, 功率谱密度满足,

$$S_S(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \pi/2 \\ 0 & \text{others} \end{cases}, \quad S_V(\omega) = \begin{cases} 1 & \pi/4 < |\omega| < \pi/2 \\ 0 & \text{others} \end{cases}$$

请构造二阶线性滤波器, 用 $X(n)$ 和 $X(n-1)$ 估计 $S(n)$ 。请计算滤波器系数以及预测误差。

4. 考虑零均值宽平稳随机序列 $X(n)$, 满足

$$X(n) = aX(n-1) + W(n) + bW(n-1)$$

其中 $W(n)$ 为零均值高斯白噪声, 方差为 σ^2 。 $|a| < 1, |b| < 1$, 试构造 $X(n)$ 的二阶后向预测, 实计算滤波器系数以及估计误差。

5. 考虑标准的状态方程

$$X(n) = AX(n-1) + U(n)$$

$$Y(n) = HX(n) + V(n)$$

其中 $U(n), W(n)$ 为零均值白噪声, 协方差矩阵分别为 Q, R 。考察 Kalman 滤波器与 Wiener 滤波器的关联。令 $S(n) = \hat{X}(n|n), S(n-1) = \hat{X}(n|n-1)$, 请用 $Y(n), S(n-1)$ 构造 Wiener 滤波器, 对 $S(n)$ 进行估计, 写出滤波器的传递函数。

6. 考虑 LMS 滤波器, 误差度量为 $\epsilon(\theta) = (Y - \theta^T X)^2$ 。该滤波器有如下变化形式

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} + \alpha e(n)X(n) + \beta(\hat{\theta}_n - \hat{\theta}_{n-1})$$

也就是给出了所谓的 Momentum 项。请给出滤波器均值收敛的条件。

7. 请求解如下的优化问题, 设矩阵 $A \in R^{m \times n}$, $x \in R^m$, $y \in R^n$,

$$\min_{x,y} (x^T A y)^2, \text{ s.t. } \|x\| = \|y\| = 1$$

8. 设 $A \in R^{m \times n}$, 其伪逆为 A^+ , $\text{rank}(A) = k$, 试计算

$$\text{rank}(A((A^T A)^+ A^T A)^n A^T)$$

9. 考虑信号 Capon 谱估计的如下推广形式。设 $a(\omega) = (1, \dots, \exp(j(n-1)\omega))$, 随机信号矢量 $X \in$

\mathbb{R}^n , ω_1, ω_2 是两个给定的频率, 求解如下优化问题:

$$\min_{\theta} E\|\theta^H X\|^2, \text{ s.t } \theta^H a(\omega_1) = 1, \theta^H a(\omega_2) = 1$$

10. 零均值宽平稳随机序列 $X(n), n = 1, 2, \dots$, 满足

$$X(n) = \frac{1}{3}W(n-1) + W(n)$$

其中 $W(n)$ 是零均值白噪声, 方差为 1。计算 $X(n)$ 的周期图谱估计的均值,