《算法设计与分析》

第十二章 线性规划

马丙鹏

2023年12月11日

中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

第十二章 线性规划

- 12.1 数学模型
- 12.2 图解法
- 12.3 标准型
- 12.4 基本概念
- 12.5 单纯形法

12.3 标准型

■ 1. 定义

- 在用单纯法求解线性规划问题时，为了讨论问题方便，需将线性规划模型化为统一的标准形式。
- 线性规划问题的标准型为:

① 目标函数求最大值（或求最小值）

② 约束条件都为等式方程

③ 变量x_j非负

④ 常数b_i非负

12.3 标准型

■ 1. 定义

□一般形式

max(或min)Z=$c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n$

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\
a_{21}x+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \\
x_j\geq 0,\ j=1,2,\cdots,n \\
b_i\geq 0, i=1,2,\cdots,m
\end{cases}
$$

➢注：本课程默认目标函数是 max

12.3 标准型

■ 1. 定义

□或写成下列形式:

$$\max Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i & i = 1, 2, \cdots, m \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, \cdots, n \end{cases}$$

12.3 标准型

■ 1. 定义

□或用矩阵形式

$$\max Z = CX$$

$$\begin{cases} AX = b \\ X \geq 0 \end{cases}$$

其中:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}; \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}; \quad C = (c_1, c_2, \cdots, c_n)$$

□通常X记为：$X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$ 称 A 为约束方程的系数矩阵，m是约束方程的个数，n是决策变量的个数，一般情况$m \leq n$，且$r(A) = m$。

12.3 标准型

■ 2. 化成标准形

□例12-12 将下列线性规划化为标准型

$$\min Z = -x_1 + x_2 - 3x_3$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \le 8 & (1) \\ x_1 + x_2 + x_3 \ge 3 & (2) \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 \le -5 & (3) \\ x_1 \ge 0、x_2 \ge 0、x_3\text{无符号要求} \end{cases}$$

12.3 标准型

■ 2. 化成标准形

① 因为x_3无符号要求，即x_3取正值也可取负值，标准型中要求变量非负，所以令

$$x_3 = x_3' - x_3'', 其中 x_3', x_3'' \geq 0$$

$$\min Z = -x_1 + x_2 - 3x_3$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 8 & (1) \\ x_1 + x_2 + x_3 \geq 3 & (2) \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq -5 & (3) \\ x_1 \geq 0、x_2 \geq 0、x_3 无符号要求 \end{cases}$$

$$\min Z = -x_1 + x_2 \underline{- 3x_3' + 3x_3''},$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + \underline{x_3' - x_3''} \leq 8 & (1) \\ x_1 + x_2 + \underline{x_3' - x_3''} \geq 3 & (2) \\ -3x_1 + x_2 + \underline{2x_3' - 2x_3''} \leq -5 & (3) \\ x_1、x_2、\underline{x_3'、x_3''} \geq 0 \end{cases}$$

12.3 标准型

■ 2. 化成标准形

② 第一个约束条件是≤号，在≤左端加入松弛变量 **(slack variable)** x_4， $x_4 \geq 0$,化为等式；

$$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 8 \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} &2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8 \\ &x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

③ 第二个约束条件是≥号，在≥号左端减去剩余变量 **(Surplus variable)** x_5，$x_5 \geq 0$。也称松弛变量

$$x_1 + x_2 + x_3' - x_3'' \geq 3 \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} &x_1 + x_2 + x_3' - x_3'' - x_5 = 3 \\ &x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

12.3 标准型

■ 2. 化成标准形

④ 第三个约束条件是≤号且常数项为负数，因此在≤左边加入松驰变量x_6，$x_6 \geq 0$，同时两边乘以－1。

$$-3x_1 + x_2 + 2x_3' - 2x_3'' \leq -5 \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{l} 3x_1 - x_2 - 2x_3' + 2x_3'' - x_6 = 5 \\ x_6 \geq 0 \end{array}$$

⑤ 目标函数是最小值，为了化为求最大值，令**Z′=－Z,** 得到**max Z′=－Z**，即当**Z**达到最小值时**Z′**达到最大值，反之亦然。

$$\min Z = -x_1 + x_2 - 3x_3' - 3x_3'', \quad \Longrightarrow \quad \max Z' = x_1 - x_2 + 3x_3' - 3x_3''$$

12.3 标准型

■ 2. 化成标准形

□综合起来得到下列标准型

$$\max Z' = x_1 - x_2 + 3x_3' - 3x_3''$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3' - x_3'' + x_4 = 8 \\ x_1 - x_2 + x_3' - x_3'' - x_5 = 3 \\ 3x_1 - x_2 - 2(x_3' - x_3'') - x_6 = 5 \\ x_1、x_2、x_3'、x_3''、x_4、x_5、x_6 \geq 0 \end{cases}$$

12.3 标准型

- **2. 化成标准形**
  - 当某个变量$x_j \le 0$时,令$x'_j = -x_j$。
  - 当某个约束是绝对值不等式时，将绝对值不等式化为两个不等式，再化为等式，例如约束

$$\left| 4x_1 - x_2 + 7x_3 \right| \le 9$$

将其化为两个不等式，再加入松弛变量化为等式。

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 7x_3 \le 9 \\ -4x_1 + x_2 - 7x_3 \le 9 \end{cases}$$

12.3 标准型

■ 2. 化成标准形

□例12-13 将下例线性规划化为标准型

$$\max Z = -|x_1| - |x_2|$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 5 \\ x_1 \le 4 \\ x_1、x_2 \text{无约束} \end{cases}$$

□此题关键是将目标函数中的绝对值去掉。令

$$x_1' = \begin{cases} x_1, & x_1 \ge 0 \\ 0, & x_1 < 0 \end{cases}, \qquad x_1'' = \begin{cases} 0, & x_1 \ge 0 \\ -x_1, & x_1 < 0 \end{cases}$$

$$x_2' = \begin{cases} x_2, & x_2 \ge 0 \\ 0, & x_2 < 0 \end{cases} \qquad x_2'' = \begin{cases} 0, & x_2 \ge 0 \\ -x_2, & x_2 < 0 \end{cases}$$

12.3 标准型

- 2. 化成标准形
  - 则 $|x_1| = x_1' + x_1''$,

    $|x_2| = x_2' + x_2''$
  - 最后可求得 $x_1 = x_1' - x_1''$,

    $x_2 = x_2' - x_2''$
  - 得到线性规划的标准形式

$$\max Z = -(x_1' + x_1'') - (x_2' + x_2'')$$

$$\begin{cases} x_1' - x_1'' + x_2' - x_2'' - x_3 = 5 \\ x_1' - x_1'' + x_4 = 4 \\ x_1'、x_1''、x_2'、x_2''、x_3、x_4 \ge 0 \end{cases}$$

中国科学院大学 University of Chinese Academy of Sciences

12.3 标准型

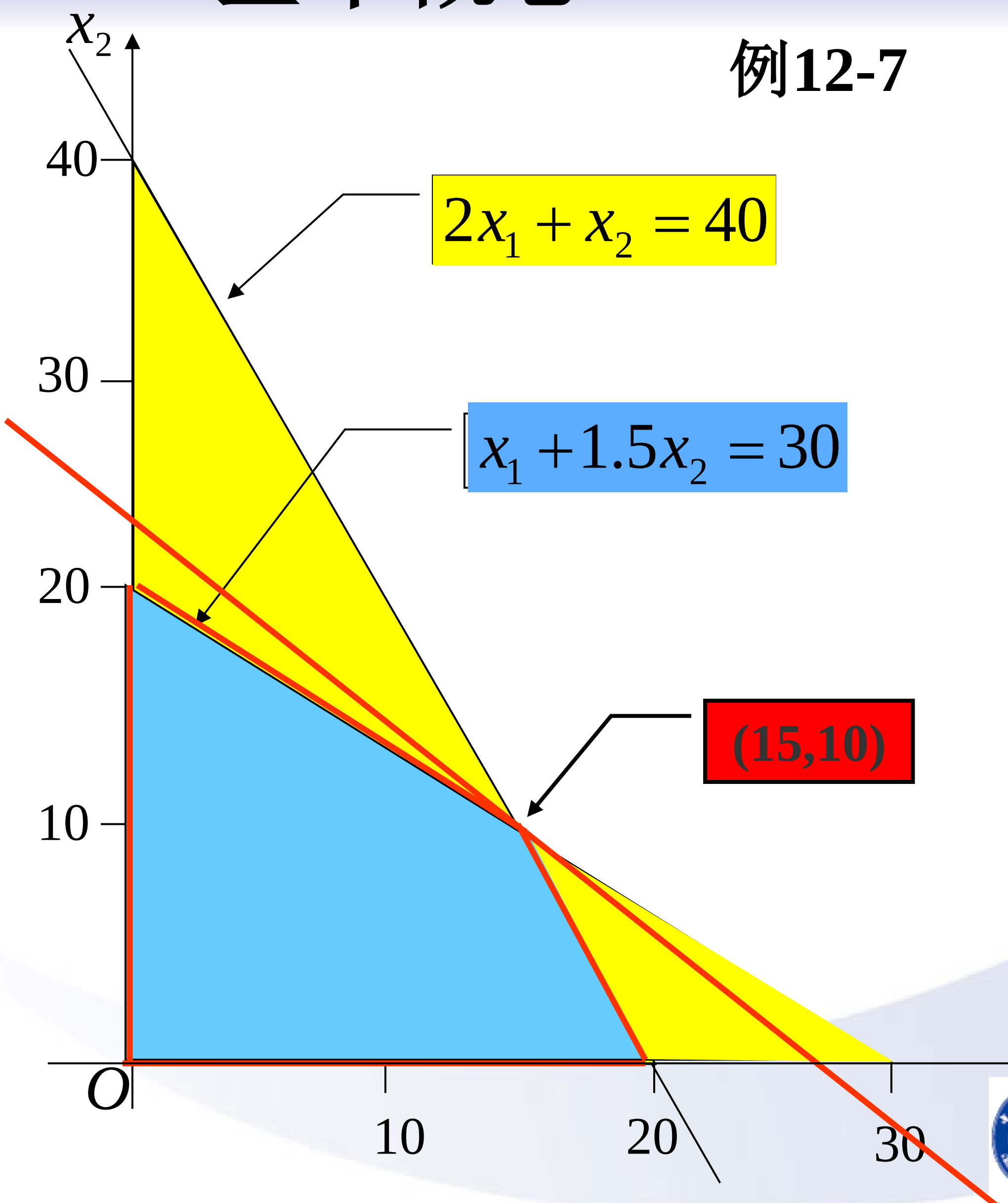
■ 2. 化成标准形

- 对于$a \le x \le b$(a、b均大于零)的有界变量化为标准形式有两种方法。
  - 一种方法是增加两个约束$x \ge a$及$x \le b$
  - 另一种方法是令$x' = x - a$，则$a \le x \le b$等价于$0 \le x' \le b - a$，增加一个约束$x' \le b - a$并且将原问题所有x用$x = x' + a$替换。

第十二章 线性规划

- 12.1 数学模型
- 12.2 图解法
- 12.3 标准型
- 12.4 基本概念
- 12.5 单纯形法

12.4 基本概念



例12-7

$$\max Z = 300x_1 + 400x_2$$

$$2x_1 + x_2 \le 40$$

$$x_1 + 1.5x_2 \le 30$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

最优解*X*=(15, 10)

最优值*Z*=8500

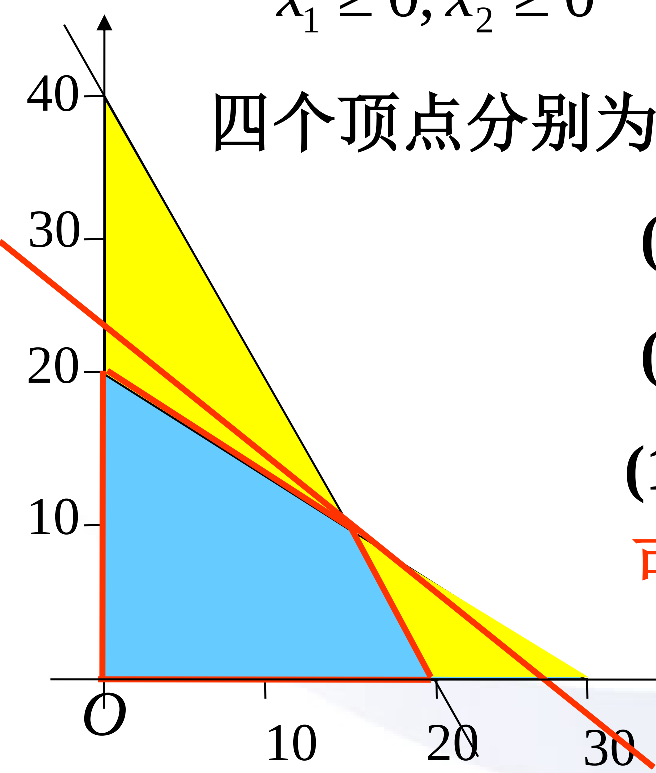
12.4 基本概念

例12-7

$$\max Z = 300x_1 + 400x_2$$
$$2x_1 + x_2 \le 40$$
$$x_1 + 1.5x_2 \le 30$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

化为标准型

$$\max Z = 300x_1 + 400x_2$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 40 \\ x_1 + 1.5x_2 + x_4 = 30 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{cases}$$



四个顶点分别为(0, 0), → **（0, 0, 40, 30）**

(20, 0), → **（20, 0, 0, 10）**

(0, 20), → **（0, 20, 20, 0）**

(15, 10) → **（15, 10, 0, 0）**

可行域顶点的坐标在标准型中有怎样的特征？

$$(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

12.4 基本概念

可行域顶点的坐标在标准型中的特征：

（1）有两个变量为零

（2）另外两个变量非负

第一条保证线性方程组有唯一解；

第二条保证是可行解！

$$\max Z = 300x_1 + 400x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 40 \\ x_1 + 1.5x_2 + x_4 = 30 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

(0, 0, 40, 30)对应方程组

$$\begin{cases} x_3 = 40 \\ x_4 = 30 \end{cases}$$

(0, 20, 20, 0)对应方程组

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 40 \\ 1.5x_2 = 30 \end{cases}$$

(15, 10, 0, 0)对应方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 40 \\ x_1 + 1.5x_2 = 30 \end{cases}$$

(20, 0, 0, 10)对应方程组

$$\begin{cases} 2x_1 = 40 \\ x_1 + x_4 = 30 \end{cases}$$

此时系数矩阵是怎样的矩阵？

系数矩阵的列向量组的线性相关性如何？

中国科学院大学 University of Chinese Academy of Sciences

12.4 基本概念

■ 1. 基

□设线性规划的标准型

$$\max Z = CX \tag{12.1}$$

$$AX = b \tag{12.2}$$

$$X \geq 0 \tag{12.3}$$

□式中A是$m \times n$矩阵，$m \leq n$并且$r(A) = m$，显然A中至少有一个$m \times m$子矩阵B，使得$r(B) = m$。

□基 (basis)

➢A中$m \times m$子矩阵B并且有$r(B) = m$，则称B是线性规划的一个基（或基矩阵basis matrix）。

➢当$m=n$时，基矩阵唯一

➢当$m<n$时，基矩阵可能有多个，但数目不超过C_n^m

12.4 基本概念

■ 1. 基

□求线性规划的所有基矩阵

$$\max Z = 4x_1 - 2x_2 - x_3$$
$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ -10x_1 + 6x_2 + 2x_3 + \qquad x_5 = 2 \\ x_j \geq 0, j = 1, \cdots, 5 \end{cases}$$

➢约束方程的系数矩阵为2×5矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -10 & 6 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

➢容易看出$r(A)$=2，2阶子矩阵有C_5^2=10个，其中第1列与第3列构成的2阶矩阵不是一个基，基矩阵只有9个，即

12.4 基本概念

■ 1. 基

□求线性规划的所有基矩阵

$$B_1=\begin{bmatrix}5 & 1\\ -10 & 6\end{bmatrix},\quad B_2=\begin{bmatrix}5 & 1\\ -10 & 0\end{bmatrix},\quad B_3=\begin{bmatrix}5 & 0\\ -10 & 1\end{bmatrix},$$

$$B_4=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 6 & 2\end{bmatrix}\quad B_5=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 6 & 0\end{bmatrix},\quad B_6=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 6 & 1\end{bmatrix},$$

$$B_7=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix},\quad B_8=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix},\quad B_9=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

□由线性代数知，基矩阵$\boldsymbol{B}$必为非奇异矩阵并且$|\boldsymbol{B}|\neq 0$。当矩阵$\boldsymbol{B}$的行列式等式零即$|\boldsymbol{B}|=0$时就不是基

12.4 基本概念

- **2. 基向量、非基向量、基变量、非基变量**
  - 基向量、非基向量
    - 当确定某一矩阵为基矩阵时，则基矩阵对应的列向量称为基向量(basis vector)，
    - 其余列向量称为非基向量
  - 基变量、非基变量
    - 基向量对应的变量称为基变量(basis variable)，
    - 非基向量对应的变量称为非基变量

12.4 基本概念

■ 2. 基向量、非基向量、基变量、非基变量

□在上例中B_2的基向量是A中的第一列和第四列，其余列向量是非基向量，x_1、x_4是基变量，x_2、x_3、x_5是非基变量。

$$B_2=\begin{bmatrix}5 & 1\\ -10 & 0\end{bmatrix},\qquad A=\begin{bmatrix}\boxed{\begin{matrix}5\\ -10\end{matrix}} & \begin{matrix}1\\ 6\end{matrix} & \begin{matrix}-1\\ 2\end{matrix} & \boxed{\begin{matrix}1\\ 0\end{matrix}} & \begin{matrix}0\\ 1\end{matrix}\end{bmatrix}$$

□基变量、非基变量是针对某一确定基而言的，不同的基对应的基变量和非基变量也不同。

12.4 基本概念

■ 3. 可行解、最优解

□ 可行解(feasible solution)

- 满足式(12.2)及(12.3)的解$X=(x_1, x_2 \ldots, x_n)^T$ 称为可行解。
- 例如，$X=(0,0,\frac{1}{2},\frac{7}{2},1)^T$ 与$X=(0, 0, 0, 3, 2)$都是例1的可行解。

□ 最优解(optimal solution)

- 满足式 (12.1)的可行解称为最优解，即是使得目标函数达到最大值的可行解就是最优解，
- 例如可行解 $X=(\frac{3}{5},0,0,0,8)^T$ 是例2的最优解。

中国科学院大学 University of Chinese Academy of Sciences

12.4 基本概念

■ 4. 基本解、基本可行解

- 基本解(basis solution)
  - 对某一确定的基*B*，令非基变量等于零，利用式(12.2) 解出基变量，则这组解称为基*B*的基本解。
- 基本可行解(basis feasible solution)
  - 若基本解是可行解则称为是基本可行解（也称基可行解）。
  - 显然，只要基本解中的基变量的解满足式(12.3)的非负要求，那么这个基本解就是基本可行解。

12.4 基本概念

- **4. 基本解、基本可行解**
  - 在例12-13中，对B_1来说，x_1, x_2是基变量，x_3, x_4, x_5是非基变量，令$x_3 = x_4 = x_5 = 0$，则式(12.2)为

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 = 3 \\ -10x_1 + 6x_2 = 2 \end{cases} \qquad B_1 = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -10 & 6 \end{bmatrix},$$

  - 因$|B_1|\neq 0$，由克莱姆法则知，x_1、x_2有唯一解$x_1 = 2/5$, $x_2=1$则基本解为

$$X^{(1)} = (\frac{2}{5},1,0,0,0)^T$$

  - 对B_2来说，x_1, x_4,为基变量，令非基变量x_2, x_3, x_5为零，由式(1.2)得到 $x_1 = -\frac{1}{5}$，$x_4=4$，

中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

12.4 基本概念

■ **4. 基本解、基本可行解**

$$\max Z = 4x_1 - 2x_2 - x_3$$

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ -10x_1 + 6x_2 + 2x_3 + x_5 = 2 \\ x_j \geq 0, j = 1, \cdots, 5 \end{cases}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -10 & 0 \end{bmatrix},$$

□基本解为 $X^{(2)} = (-\frac{1}{5}, 0, 0, 4, 0)^T$

□由于 $X^{(1)} \geq 0$ 是基本解，从而它是基本可行解，

□在 $X^{(2)}$ 中$\mathbf{x_1<0}$，因此不是可行解，也不是基本可行解。

□反之，可行解不一定是基本可行解

□例如 $X = (0, 0, \frac{1}{2}, \frac{7}{2}, 1)^T$满足式**(12.2)～(12.3)**, 但不是任何基矩阵的基本解。

12.4 基本概念

■ 5. 基本最优解 、 基本可行解

□基本最优解

➢最优解是基本解称为基本最优解。

➢例如，$X=(\frac{3}{5},0,0,0,8)^T$满足式(12.1) ~(12.3)是最优解，又是$B_3$的基本解，因此它是基本最优解。

□可行基

➢基可行解对应的基称为可行基；

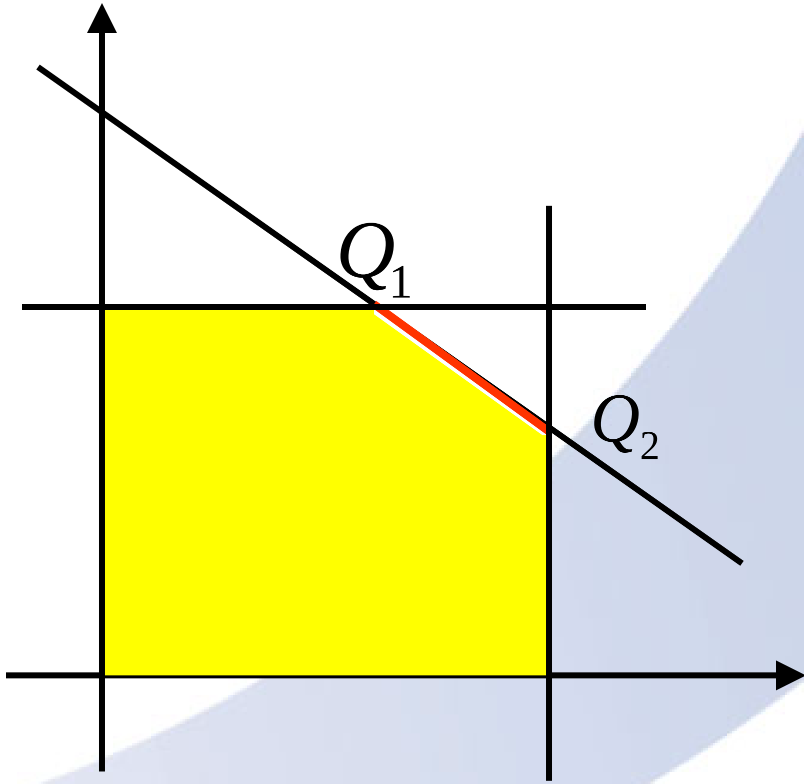
□最优基

➢基本最优解对应的基称为最优基；

➢如上述B_3就是最优基，最优基也是可行基。

12.4 基本概念

- 5. 基本最优解、基本可行解
  - 当最优解唯一时，最优解亦是基本最优解，当最优解不唯一时，则最优解不一定是基本最优解。
  - 例如右图中线段 $\overline{Q_1Q_2}$ 的点为最优解时，**Q_1**点及**Q_2**点是基本最优解，线段 $\overline{Q_1Q_2}$ 的内点是最优解而不是基本最优解。

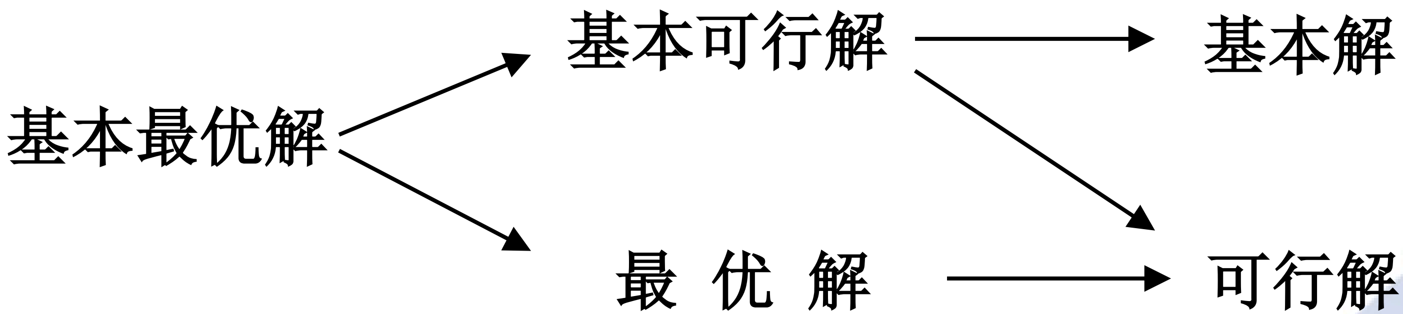


中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

12.4 基本概念

■ 5. 基本最优解、基本可行解

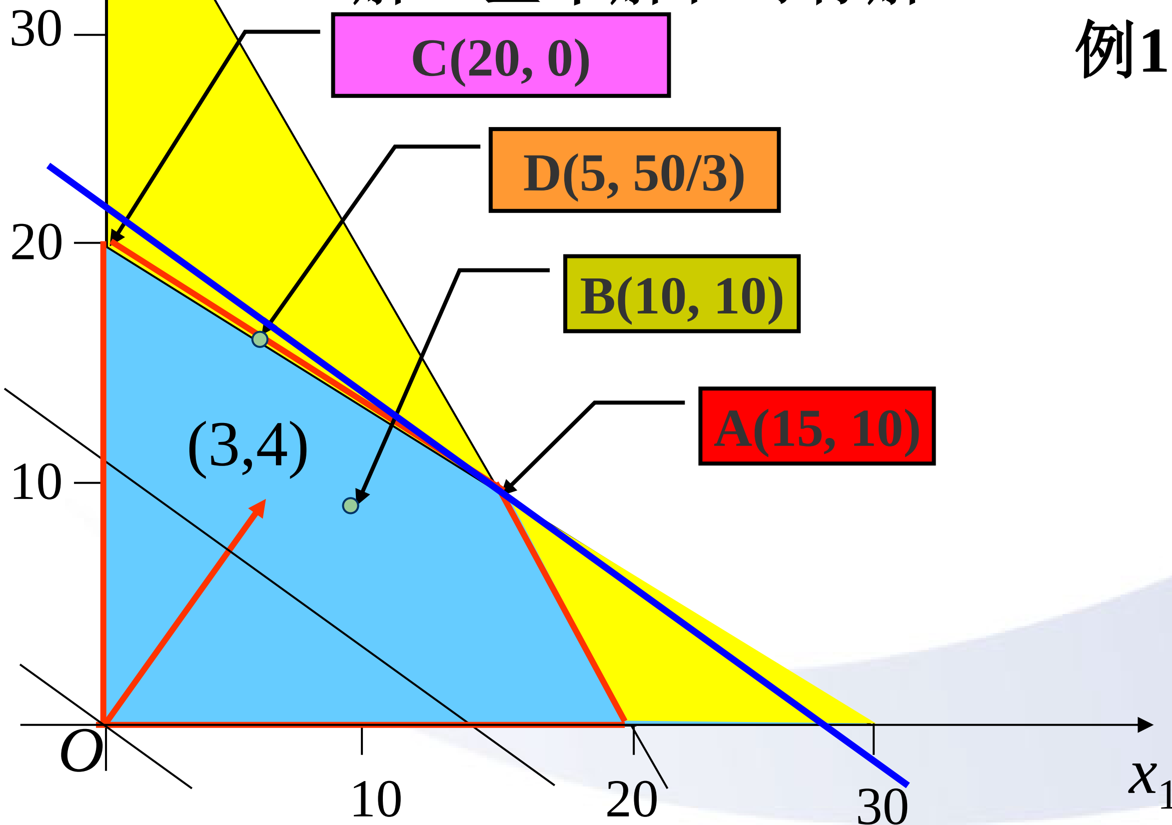
- 基本最优解、最优解、基本可行解、基本解、可行解的关系如下所示：



12.4 基本概念

■ 5. 基本最优解、基本可行解

- □例如, B点和D点是可行解,不是基本解; C点是基本可行解; A点是基本最优解,同时也是最优解、基本可行解、基本解和可行解。



例12-7

$$\max Z = 300x_1 + 400x_2$$
$$2x_1 + x_2 \le 40$$
$$x_1 + 1.5x_2 \le 30$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

最优解*X*=(15, 10)

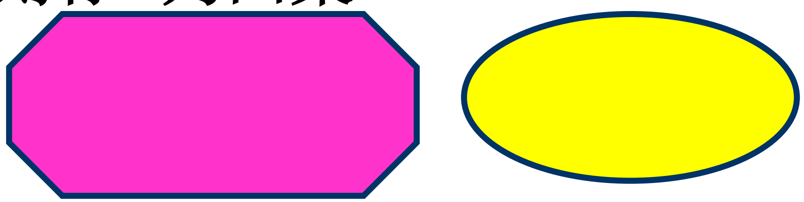
最优值*Z*=8500

12.4 基本概念

■ 6. 凸集、凸组合、极点

□凸集(Convex set):

➢设K是n维空间的一个点集，对任意两点
$X^{(1)}$、$X^{(2)} \in K$，当$X=\alpha X^{(1)}+(1-\alpha)X^{(2)} \in K(0 \le \alpha \le 1)$
时，则称K为凸集。



➢ $X=\alpha X^{(1)}+(1-\alpha)X^{(2)}$就是以$X^{(1)}$、$X^{(2)}$为端点的线段方程，点$X$的位置由α的值确定，当α=0时，
$X=X^{(2)}$, 当α=1时$X= X^{(1)}$

12.4 基本概念

■ 6. 凸集、凸组合、极点

□凸组合(Convex combination)：

➢设 $X, X^{(1)}, X^{(2)}, \cdots, X^{(K)}$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的点, 若存在

$$\lambda_1,\ \lambda_2, \cdots \lambda_K,\ \text{且} \lambda_i \geq 0 \text{及} \sum_{i=1}^{K} \lambda_i = 1$$

使得 $X = \sum_{i=1}^{K} \lambda_i X_i$ 成立，则称**X**为 $X, X^{(1)}, X^{(2)}, \cdots, X^{(K)}$ 的凸组合。

□极点(Extreme point)

➢设**K**是凸集， $X \in K$，若**X**不能用**K**中两个不同的点 $X^{(1)}, X^{(2)}$ 的凸组合表示为

$$X = aX^{(1)} + (1-a)X^{(2)} \quad (0 < a < 1)$$

则称**X**是**K**的一个极点或顶点。

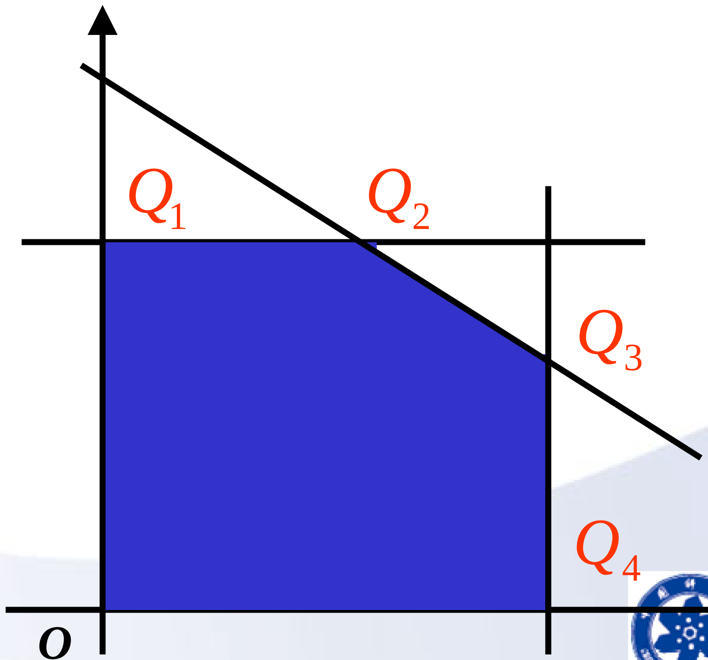
12.4 基本概念

■ 6. 凸集、凸组合、极点

□凸组合(Convex combination)：

➢*X*是凸集*K*的极点，即*X*不可能是*K*中某一线段的内点，只能是*K*中某一线段的端点。

➢凸集内的任何一点可以写成所有极点的凸组合!



12.4 基本概念

■ 7. 线性规划的基本定理

- 定理12.1
  - ➢若线性规划可行解K非空, 则K是凸集。
- 定理12.2
  - ➢线性规划的可行解集合K的点X是极点的充要条件为X是基本可行解。
- 定理12.3
  - ➢若线性规划有最优解,则最优值一定可以在可行解集合的某个极点上到达，最优解就是极点的坐标向量。

12.4 基本概念

- 7. 线性规划的基本定理
  - 定理12.1描述了可行解集的特征。
  - 定理12.2刻划了可行解集的极点与基本可行解的对应关系
    - 极点是基本可行解，
    - 反之，基本可行解一定是极点，
    - 但它们并非一一对应，有可能两个或几个基本可行解对应于同一极点（退化基本可行解时）。

12.4 基本概念

■ 7. 线性规划的基本定理

- 定理12.3描述了最优解在可行解集中的位置，
  - 若最优解唯一，则最优解只能在某一极点上达到，
  - 若具有多重最优解，则最优解是某些极点的凸组合，
  - 从而最优解是可行解集的极点或界点，不可能是可行解集的内点。
  - 若线性规划的可行解集非空且有界，则一定有最优解；
  - 若可行解集无界，则线性规划可能有最优解，也可能没有最优解。

12.4 基本概念

- 7. 线性规划的基本定理
  - ➢定理12.2及12.3还给了我们一个启示，
    - ✓寻求最优解不是在无限个可行解中去找，而是在有限个基本可行解中去寻求。
  - ➢线性规划的枚举法求解
    - ✓用枚举法求出所有的基本可行解，在代入目标函数得到最优解
    - ✓枚举法求解最优解必须以线性规划存在最优解为前提，否则会得到错误的结果。

End