

姓名_____

学号_____

成绩_____

1. 设 $X(1), X(2), \dots, X(n)$ 是独立同分布的随机样本, 服从均匀分布 $U(\theta_1, \theta_2)$, 试给出 $\theta_1 - \theta_2$ 的无偏估计。

2. 考虑如下拟合模型

$$X(n) = A \exp(n) + B \exp(-n) + W(n), \quad n = 1, 2$$

其中 $W(n)$ 为零均值宽平稳高斯噪声, 相关函数 $R_W(\tau)$ 满足

$$R_W(0) = 1, \quad R_W(1) = \rho$$

试计算 A 的 Cramer-Rao 界。

3. 考虑零均值宽平稳随机序列 $X(n)$, 满足

$$X(n) = \frac{1}{2} W(n-1) + W(n)$$

其中 $W(n)$ 是零均值白噪声, 方差为 1, 请计算二阶后向线性预测器的系数以及预测误差。

4. 考虑零均值宽平稳随机序列 $X(n)$, 满足

$$X(n) = aX(n-1) + W(n)$$

其中 $W(n)$ 为零均值高斯白噪声, 方差为 σ^2 。试构造二阶 Wiener 滤波器, 实现对 $X(n)$ 的最优估计, 并计算估计误差。

5. 考虑标准的状态方程

$$X(n) = AX(n-1) + U(n)$$

$$Y(n) = HX(n) + V(n)$$

其中 $U(n), W(n)$ 为零均值白噪声, 协方差矩阵分别为 $Q(n), R(n)$ 。考察 Kalman 滤波器的构造, 试给出估计的协方差阵 $P(n|n)$ 的逆与 $P(n|n-1)$ 的逆之间的解析关系, 即请用 $P(n|n-1)$ 的逆对 $P(n|n)$ 的逆进行表达。

6. 设误差度量为

$$\epsilon(\theta) = (Y - \theta^T X)^2 + \|\theta\|^2$$

试仿照 LMS 滤波器的做法, 使用梯度下降法构造自适应滤波器, 并给出滤波器均值收敛的条件。

7. 设矩阵 $A \in R^{m \times n}$ 和 $B \in R^{m \times n}$ 满足 $A^T A = B^T B$, 请给出矩阵 Q , 使得 $A = QB$ 。

8. 设 $A \in R^{m \times n}$, 其伪逆为 A^+ , $\text{rank}(A) = k$, 试计算

$$\text{rank}(A(A^T A)^+ A^T A) \quad \text{和} \quad \text{rank}(A^T A(A^T A)^+ A)$$

9. 考察零均值白噪声信号 $W(k), k = 1, \dots, n$, 方差为 σ^2 , 请计算该信号的 Capon 谱估计。

10. 考虑周期图谱估计，众所周知，一般情况下它不是相合的谱估计，即当采样长度趋于无穷大时，其估计误差并不趋于 0。但是，在某些特殊频率上，它具有相合性。请举出一个例子，并用计算说明其的确具有相合性。