《算法设计与分析》

第七章 分枝—限界法

马丙鹏

2023年11月20日

中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

第七章 分枝—限界法

- 7.1 一般方法
- 7.2 LC-检索
- 7.3 15-谜问题
- 7.4 布线问题
- 7.5 LC-检索(续)
- 7.6 分枝-限界算法
- 7.7 0/1背包问题
- 7.8 货郎担问题

7.7 0/1背包问题

■ 问题描述

- □假定n个物品的重量w_i，效益值p_i和背包容量M均为已知的正数，
- □目标函数(极小化)

$$-\sum_{1\le i\le j} p_i x_i$$

- □约束条件

$$\sum_{1\le i\le j} w_i x_i \le M$$

$$x_i = 0\text{或}1, p_i > 0, w_i > 0, 1 \le i \le j$$

7.7 0/1背包问题

- 分枝限界法求解
  - 对0/1背包问题的解的结构，约束条件，目标函数和状态空间树的分析与回溯法时相同。
  - 求解0/1背包问题的一个关键问题是设计上下界函数。

(1)目标函数: $\text{cost}(X) = -\sum_{i=1}^{n} p_i x_i$ (求最小值)

(2)代价函数:

$$C(X)=\begin{cases} \text{cost}(X) & X\text{是答案结点} \\ \text{正无穷} & X\text{是叶结点但非答案结点} \\ \min\{c(\text{lchild}(X)),\ r(\text{lchild}(X))\} & X\text{代表非叶节点} \end{cases}$$

(3)上下界函数: U, $\hat{c}(X)$

7.7 0/1背包问题

- 分枝限界法求解
  - X是状态空间树上的结点，从根到X的部分向量为(x_1, x_2, …, x_k)，
  - 背包的剩余载重为cu，以X为根的子树可以看成背包载重为cu，由剩余物品组成物品集的0/1背包的状态空间树：
  - 设Z代表子树X上一般背包问题的最优解(z_{k+1}, z_{k+2}, …, z_n)，
  - ans代表0/1背包的最优解(x_{k+1}, x_{k+2}, …, x_n)，
  - Y代表0/1背包的任一可行解(y_{k+1}, y_{k+2}, …, y_n)，则必有：

$$-\sum_{i=k+1}^{n} p_i z_i \le -\sum_{i=k+1}^{n} p_i x_i \le -\sum_{i=k+1}^{n} p_i y_i$$

7.7 0/1背包问题

■ 分枝限界法求解

- 由此，可得0/1背包问题的代价函数和上下界函数:

1. 代价函数:

$$\text{cost}(X) = -\sum_{i=1}^{k} p_i x_i - \sum_{i=k+1}^{n} p_i x_i$$

2. 下界函数:

$$\hat{c}(X) = -\sum_{i=1}^{k} p_i x_i - \sum_{i=k+1}^{n} p_i z_i$$

✓这是X子树上最小代价答案结点代价的下界估计值

3. 上界函数:

$$U(X) = -\sum_{i=1}^{k} p_i x_i - \sum_{i=k+1}^{n} p_i y_i$$

✓这是X子树上最小代价答案结点代价的上界估计值。

7.7 0/1背包问题

- 分枝限界法求解
  - 下界的定义
    - 按贪心法定义计算最大装入效益值的Bound函数：
    - $c\tilde{}(X)$= Bound($-\sum_{i=1}^{j-1} p_i x_i$, $\sum_{i=1}^{j-1} w_i x_i$, j-1, M)
    - 同第六章中0/1背包问题的bound函数。

```
for i=k+1 to n do
    c = c+w(i);
    if c<M then
        b = b - p(i);
    else
        return b - (1+(c-M)/W(i)*p(i));
    endif
end
```

7.7 0/1背包问题

- 分枝限界法求解
  - 上界的定义
    - ➢ $U(X) = UBound(-\sum_{i=1}^{j-1} p_i x_i\ ,\ \sum_{i=1}^{j-1} w_i x_i\ ,\ j-1,\ M)$
    - ➢ 其中j是结点X所在的层级

```
procedure UBOUND(p, w, k, M)
 //p为当前效益总量；w为当前背包重量；k为上次去掉的物品； M为背包容量；返回一个新效益值//
    global P(1:n), W(1:n); integer k, i, n;
    b ← p; c ← w
    for i=k+1 to n do
        if c+w(i) ≤ M then c = c + w(i); b= b - p(i); endif
    repeat
    return (b)
end UBOUND
```

7.7 0/1背包问题

■ 求解0/1背包问题的分枝限界法:

① 定义一个上界变量U，记录当前为止最小代价答案结点代价的上界值，

② 生成根结点，计算根结点的上下界值U和$\hat{c}(X)$，

③ 令$U = U + \varepsilon$;

④ 若X是答案结点，且该答案结点的收益prof小于U，则记录该答案结点，并令U= prof,

⑤ 若X不是答案结点，若左儿子结点可行，即(cu>w[k])，则生成左儿子结点($\hat{c}(X)$不变);
否则，计算右孩子的上下界，若右孩子的下界小于U，则生成右孩子结点，若右孩子的上界+ε小于U，则令U=U+ε;

⑥ 当活结点(优先权队列)为空时或当扩展结点的下界≥ U时，结束。

7.7 0/1背包问题

- 实例
  - $n=4, M=15$
  - $(p_1, p_2, p_3, p_4) = (10, 10, 12, 18)$
  - $(w_1, w_2, w_3, w_4) = (2, 4, 6, 9)$

7.7 0/1背包问题

$n=4, M=15$

$(p_1, p_2, p_3, p_4) = (10, 10, 12, 18)$

$(w_1, w_2, w_3, w_4) = (2, 4, 6, 9)$

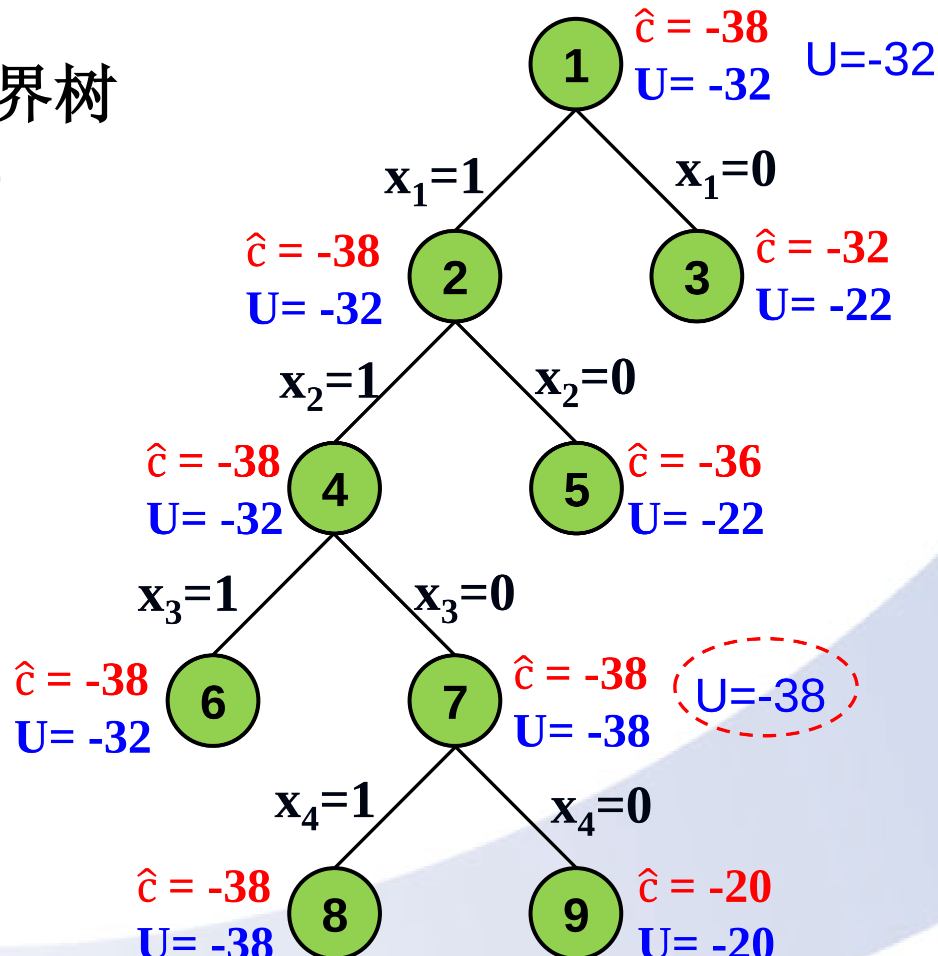
■ 实例

- □LC分枝 –限界树

  上面的数=$\hat{c}(X)$

  下面的=U

  大小固定元组



7.7 0/1背包问题

n=4, M=15

$(p_1, p_2, p_3, p_4) = (10, 10, 12, 18)$

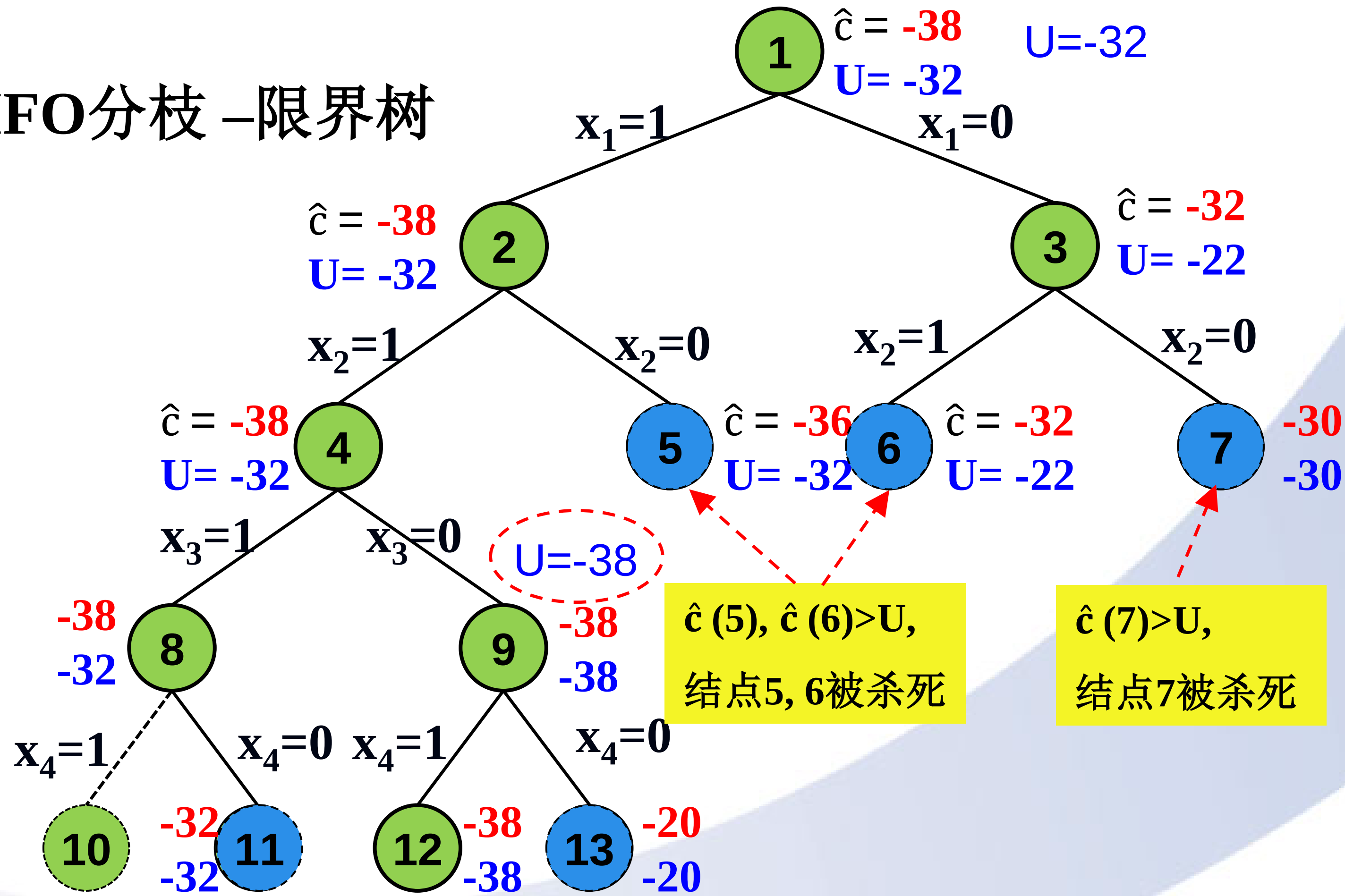
$(w_1, w_2, w_3, w_4) = (2, 4, 6, 9)$

- 实例
  - FIFO分枝–限界树

上面的数=ĉ(X)

下面的=U

大小固定元组



第七章 分枝—限界法

- 7.1 一般方法
- 7.2 LC-检索
- 7.3 15-谜问题
- 7.4 布线问题
- 7.5 LC-检索(续)
- 7.6 分枝-限界算法
- 7.7 0/1背包问题
- 7.8 货郎担问题

中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

7.8 货郎担问题

■ 问题描述

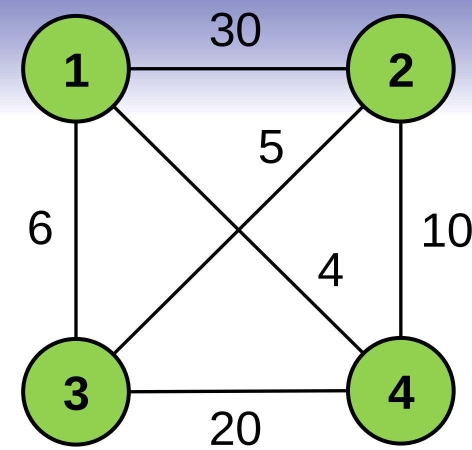
- □某售货员要到n个城市去推销商品，已知各城市之间的路程(或旅费)。他要选定一条从驻地出发，经过每个城市一次，最后回到驻地的路线，使总的路程(或总旅费)最小。
- □有向图：G=(V, E), |V|=n
- □成本邻接矩阵：

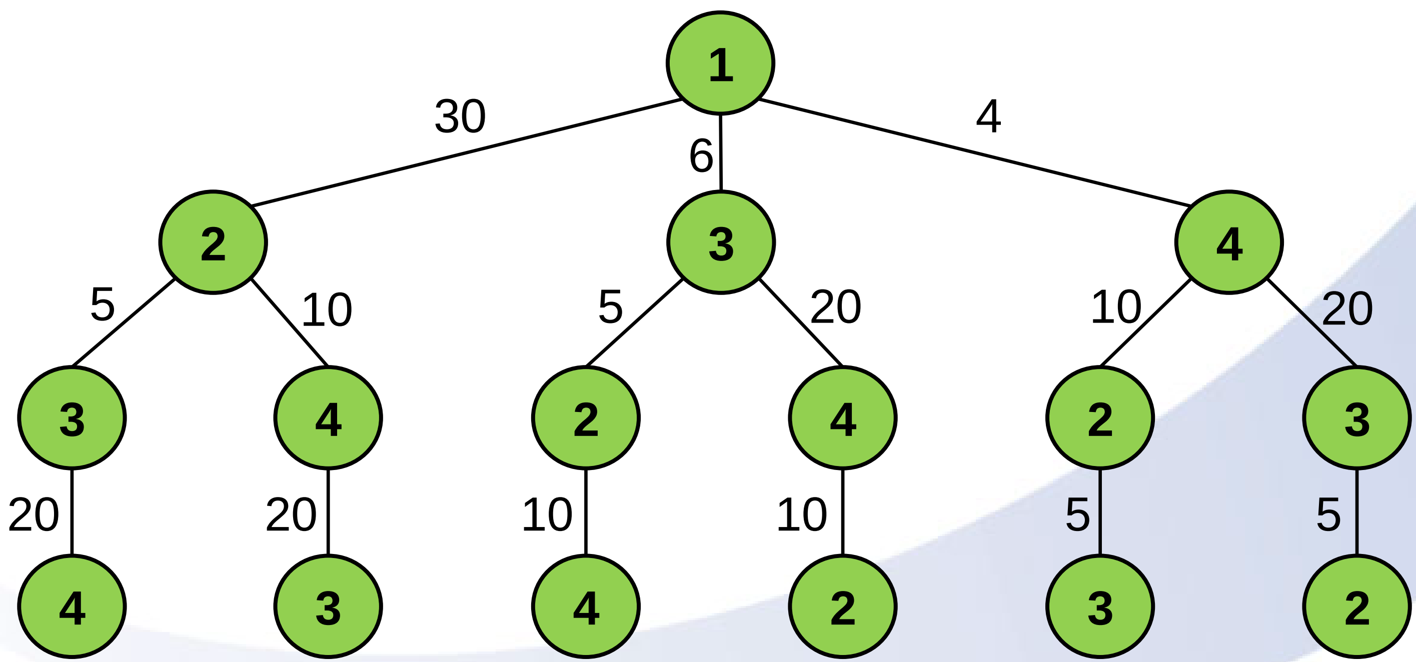
$$C=(c_{ij});\quad <i,j>\in E,\ c_{ij}>0;\quad <i,j>\notin E,\ c_{ij}=\infty.$$

- □G的一条周游路线：包含n个节点的有向环，
- □周游路线成本：此路线上所有边的成本和
- □求：具有最小成本的周游路线。

7.8 货郎担问题

- ■ 实例分析
  - □有n个村庄，每个村庄必须经过一次，也只能经过一次，求一条走遍全部村庄的最短路。

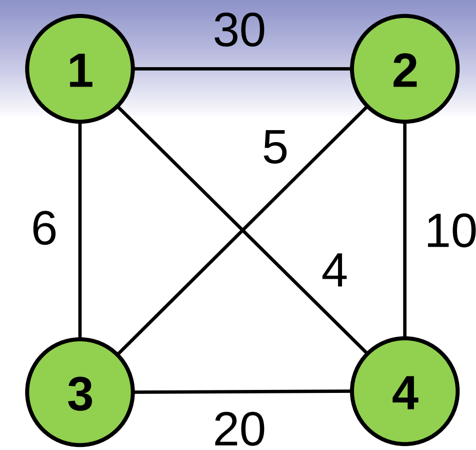


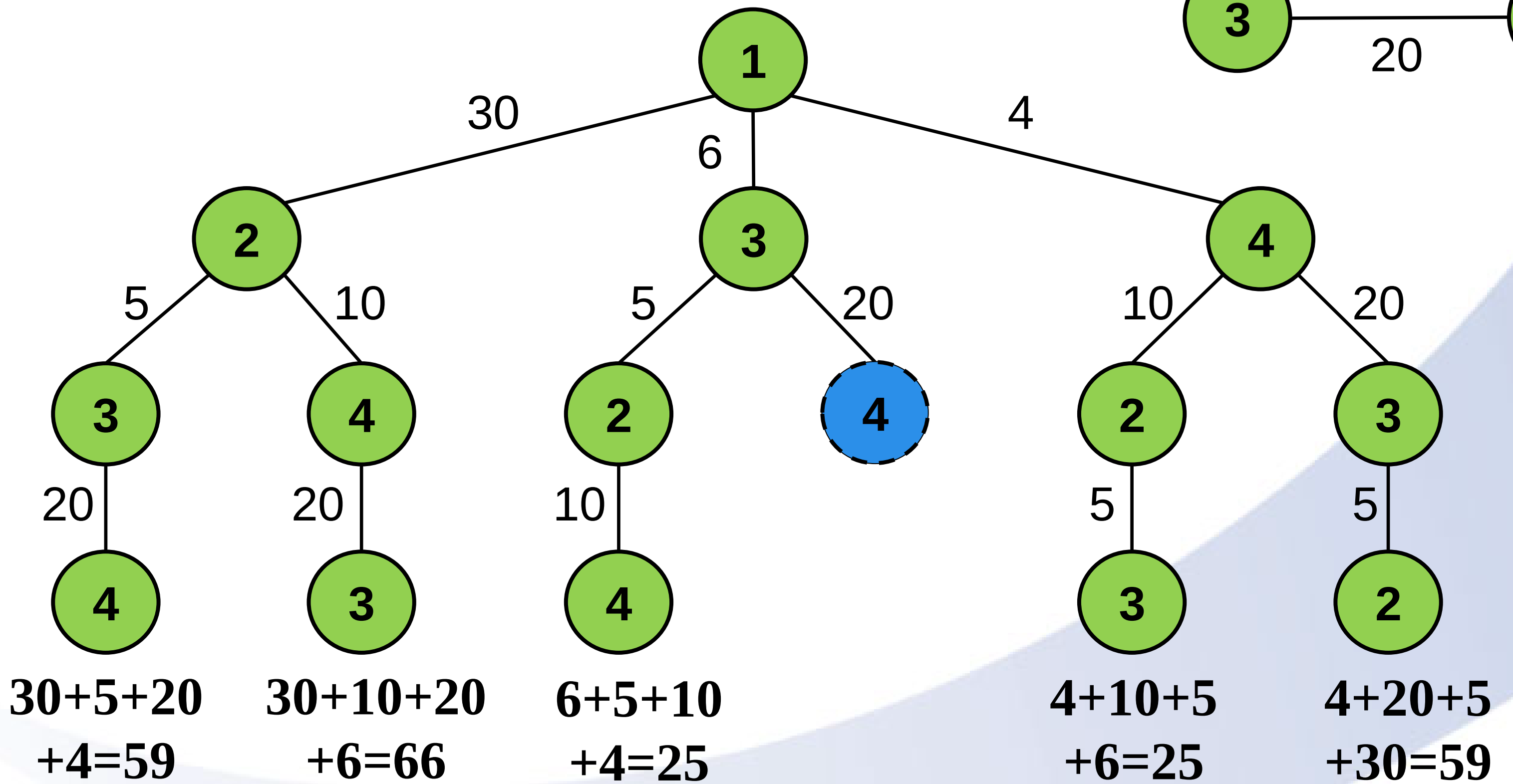


7.8 货郎担问题

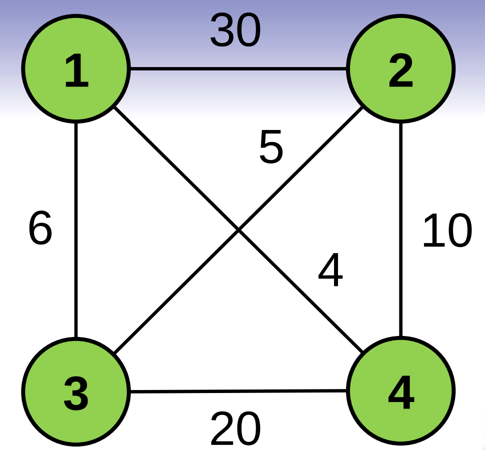
■ 实例分析

□FIFO分枝限界树

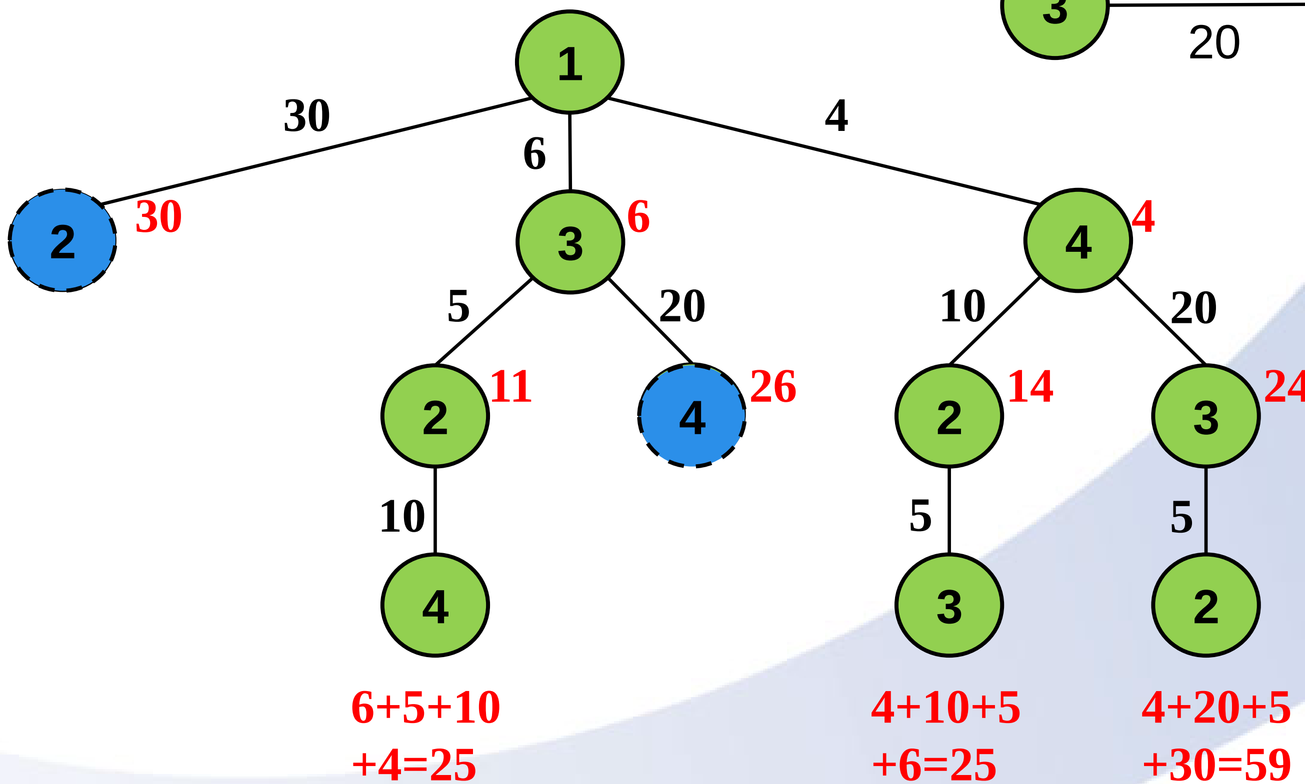




7.8 货郎担问题



- 实例分析
  - LC分枝 –限界树



7.8 货郎担问题

■ 分支限界法求解

□解空间表示

➢不失一般性，以节点1作为起点和终点，解空间为:

$$
\begin{cases}
S=\{\pi_1\pi_2\ldots\pi_n\pi_{n+1}\} \\
\pi_1=\pi_{n+1}=1 \\
\pi_i|_{i\in[2,n]} \in \{2,3,\ldots,n\}, \pi_i \neq \pi_j \\
<\pi_i,\pi_{i+1}>|_{\forall i\in[1,n]} \in E,\ \pi_1\ldots\pi_{n+1} \in S \\
|S|=(n-1)!
\end{cases}
$$

□目标函数

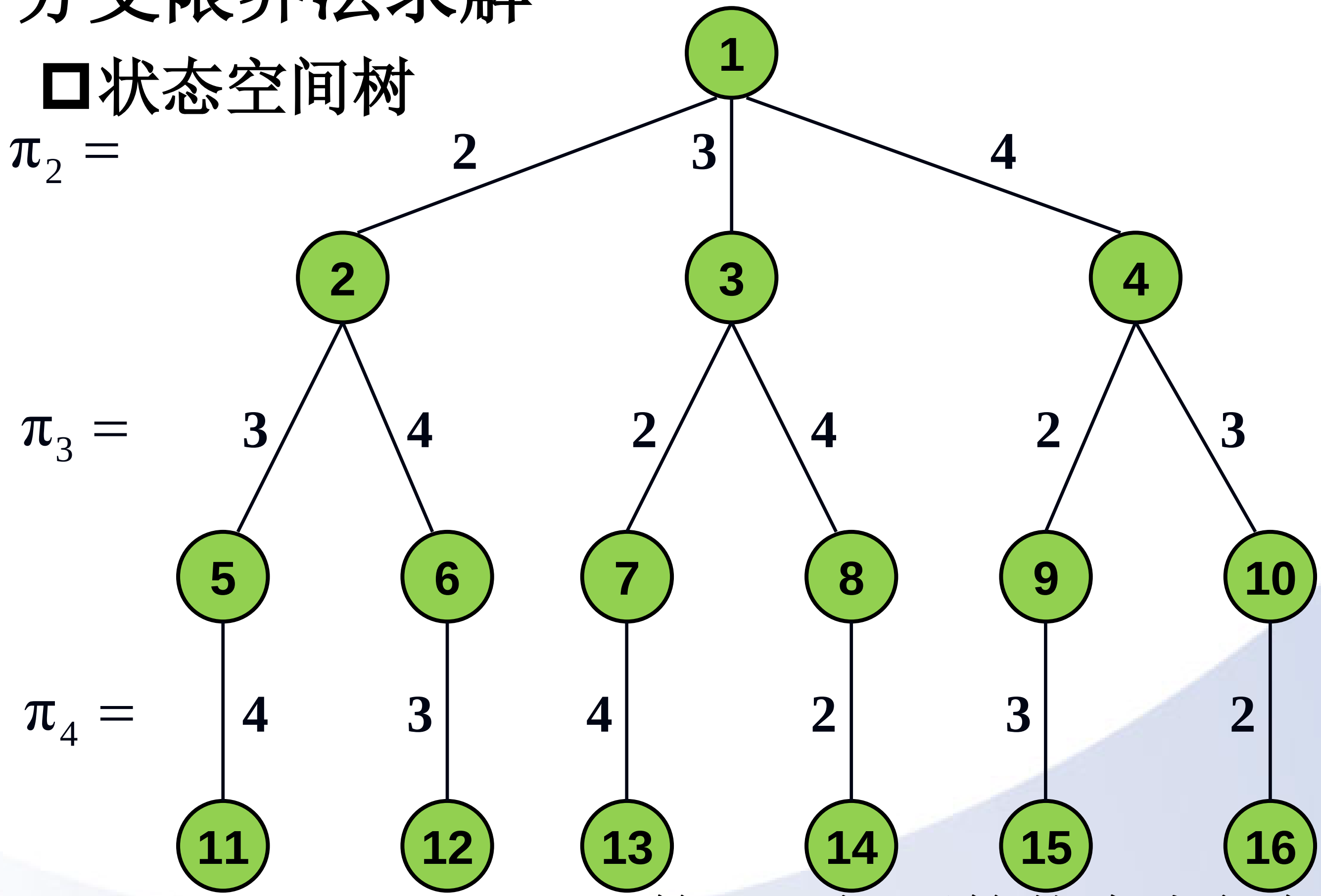
➢路径长度最小。

中国科学院大学 University of Chinese Academy of Sciences

7.8 货郎担问题

■ 分支限界法求解

□状态空间树



n=4, $\pi_1 = \pi_5 = 1$的TSP问题的状态空间树

7.8 货郎担问题

- 分支限界法求解
  - C(X)的计算

C(X)= { 由根到X 的路径确定的周游路线成本　　X是叶节点
　　　 子树X中最小成本叶节点的成本　　　　X不是叶节点

  - 归约矩阵
    - 已规约行(列): 如果矩阵的一行(列)中至少包含一个零且其余元素非负，则称此行(或列)已归约，
    - 归约矩阵: 如果一个矩阵的所有行和列均已归约，则称此矩阵为归约矩阵，
    - 归约的方法:对矩阵的一行(列)进行归约，可通过将该行(列)中的每个元素减去该行(列)的最小数进行，此最小数称为该行(列)的约数。

7.8 货郎担问题

■ 分支限界法求解

□归约矩阵

- ➢归约矩阵可通过逐行逐列归约一个代价矩阵而得到。
- ➢矩阵归约的过程可以理解为:
  - ✓对原图象进行某种处理，使得边上权值变小，但图的结构不变。
- ➢矩阵约数:
  - ✓所有行和所有列的约数之和称为矩阵约数：

$$L=\sum_{i=1}^{n} t_i+\sum_{j=1}^{n} r_j$$

中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

7.8 货郎担问题

■ 分支限界法求解

□ 归约矩阵

$$C=\begin{bmatrix}\infty & 20 & 30 & 10 & 11\\ 15 & \infty & 16 & 4 & 2\\ 3 & 5 & \infty & 2 & 4\\ 19 & 6 & 18 & \infty & 3\\ 16 & 4 & 7 & 16 & \infty\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{行规约}}\begin{bmatrix}\infty & 10 & 20 & 0 & 1\\ 13 & \infty & 14 & 2 & 0\\ 1 & 3 & \infty & 0 & 2\\ 16 & 3 & 15 & \infty & 0\\ 12 & 0 & 3 & 12 & \infty\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{得到规约矩阵}]{\text{列规约}}C'=\begin{bmatrix}\infty & 10 & 17 & 0 & 1\\ 12 & \infty & 11 & 2 & 0\\ 0 & 3 & \infty & 0 & 2\\ 15 & 3 & 12 & \infty & 0\\ 11 & 0 & 0 & 12 & \infty\end{bmatrix}\Rightarrow L=(10+2+2+3+4)+(1+3)=25$$

7.8 货郎担问题

- 分支限界法求解
  - 根的下界函数
    - ∵ 对G的每次周游只含有由i出发的n条边中的一条边，同样也只含有进入j的n条边中的一条。
    - ∴若对i行或者j列规约，即将此行或此列的元素减去t，则此次周游的成本减少t。
    - ∴ 原矩阵中的周游路线成本 = 规约矩阵的周游路线成本+矩阵约数。
    - ∴归约代价矩阵所代表的周游路径长度非负，故矩阵约数L≤原图的任意一条周游路径长度。
    - ∴可将L作为旅行商问题状态空间树根R的下界函数值。

7.8 货郎担问题

- 分支限界法求解
  - 非叶状态的下界函数
    - 为了得到C’(X)，对每个节点都定义一个规约矩阵；已知节点R的规约矩阵A，求儿子节点S(非叶节点)的规约矩阵的步骤：
      - ✓为保证这条周游路线采用边<i, j>，而不采用其他由i出发或者进入j的边，将A中i行j列置为∞；
      - ✓为了防止这条周游路线采用边<j, 1>从而构成环，将A_{j1}置为∞；
      - ✓对于那些不全为∞ 的行施行规约，得到S的规约矩阵B，设其约数为r, 得：$C'(S)=C'(R)+A_{ij}+r$

中国科学院大学 University of Chinese Academy of Sciences

7.8 货郎担问题

- 分支限界法求解
  - 叶状态的下界函数
    - 若S是叶状态结点，由于一个叶状态唯一确定一条周游路径，可用此周游路径作为结点S的代价值，即 $\hat{c}(X)=c(S)$
  - 上界函数
    - 对于树中任何状态结点X，令上界函数值u(X)=∞。

7.8 货郎担问题

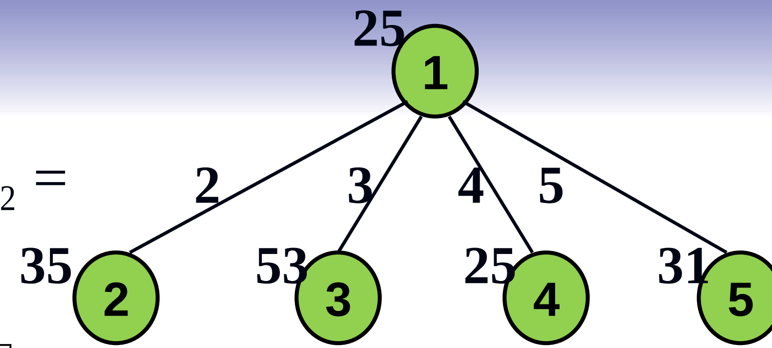
- 分支限界法求解
  - 分支限界法求解该问题的过程
    - ① 生成状态空间树的根结点，作为扩展结点E，并令u=∞
    - ② 若该结点为答案结点，则计算其代价，修改u，否则，进第3步
    - ③ 生成扩展节点E的孩子结点，并分别计算他们的下界函数值，作为优先权，进优先权队列，选择优先级最高(即下界函数值最小) 的结点继续扩展，重复2, 3
    - ④ 若优先权队列中的所有结点都下界函数值都大于u，则结束。

中国科学院大学 University of Chinese Academy of Sciences

7.8 货郎担问题

■ 实例

$\pi_2 =$



$\hat{c}(2)=25+10+0=35$

$\hat{c}(3)=25+17+11=53$

$\hat{c}(4)=25+0+0=25$

$\hat{c}(5)=25+1+5=31$

$$C=\begin{bmatrix} \infty & 20 & 30 & 10 & 11 \\ 15 & \infty & 16 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & \infty & 2 & 4 \\ 19 & 6 & 18 & \infty & 3 \\ 16 & 4 & 7 & 16 & \infty \end{bmatrix} \xrightarrow{L=25} A(1)=\begin{bmatrix} \infty & 10 & 17 & 0 & 1 \\ 12 & \infty & 11 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & \infty & 0 & 2 \\ 15 & 3 & 12 & \infty & 0 \\ 11 & 0 & 0 & 12 & \infty \end{bmatrix}$$

$$A(1)\xrightarrow{L=0} A(2)=\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 11 & 2 & 0 \\ 0 & \infty & \infty & 0 & 2 \\ 15 & \infty & 12 & \infty & 0 \\ 11 & \infty & 0 & 12 & \infty \end{bmatrix} \quad A(1)\xrightarrow{L=11} A(3)=\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 1 & \infty & \infty & 2 & 0 \\ \infty & 3 & \infty & 0 & 2 \\ 4 & 3 & \infty & \infty & 0 \\ 0 & 0 & \infty & 12 & \infty \end{bmatrix}$$

$$A(1)\xrightarrow{L=0} A(4)=\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 12 & \infty & 11 & \infty & 0 \\ 0 & 3 & \infty & \infty & 2 \\ \infty & 3 & 12 & \infty & 0 \\ 11 & 0 & 0 & \infty & \infty \end{bmatrix} \quad A(1)\xrightarrow{L=5} A(5)=\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 10 & \infty & 9 & 0 & \infty \\ 0 & 3 & \infty & 0 & \infty \\ 12 & 0 & 9 & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 0 & 12 & \infty \end{bmatrix}$$

7.8 货郎担问题

■ 实例

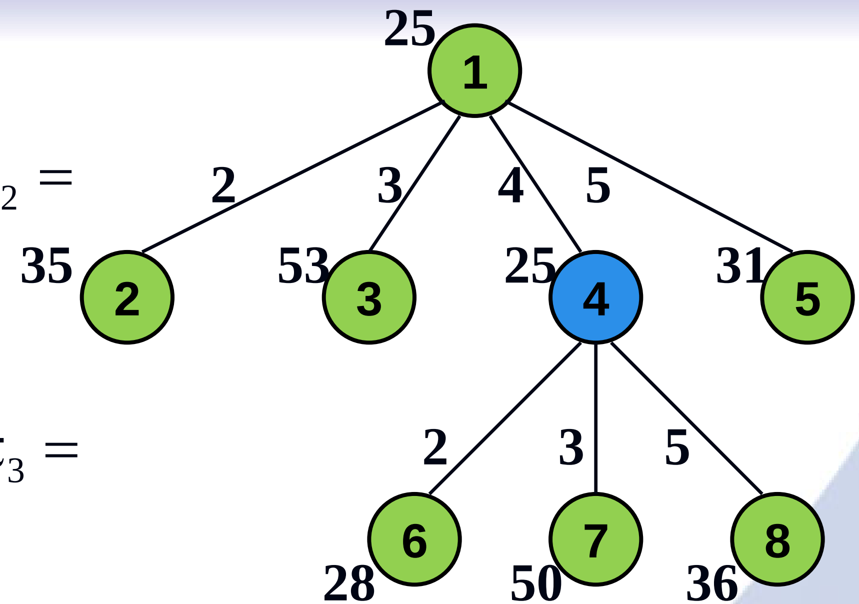
$$A(4)=\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 12 & \infty & 11 & \infty & 0 \\ 0 & 3 & \infty & \infty & 2 \\ \infty & 3 & 12 & \infty & 0 \\ 11 & 0 & 0 & \infty & \infty \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L=0} A(6)=\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 11 & \infty & 0 \\ 0 & \infty & \infty & \infty & 2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 11 & \infty & 0 & \infty & \infty \end{bmatrix},$$

$$\xrightarrow{L=13} A(7)=\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 1 & \infty & \infty & \infty & 0 \\ \infty & 1 & \infty & \infty & 0 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 0 & 0 & \infty & \infty & \infty \end{bmatrix} \xrightarrow{L=11} A(8)=\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 1 & \infty & 0 & \infty & \infty \\ 0 & 3 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 0 & \infty & \infty \end{bmatrix}$$

$\pi_2 =$

$\pi_3 =$



$\hat{c}(6)=25+3+0=28$

$\hat{c}(7)=25+12+13=50$

$\hat{c}(8)=25+0+11=36$

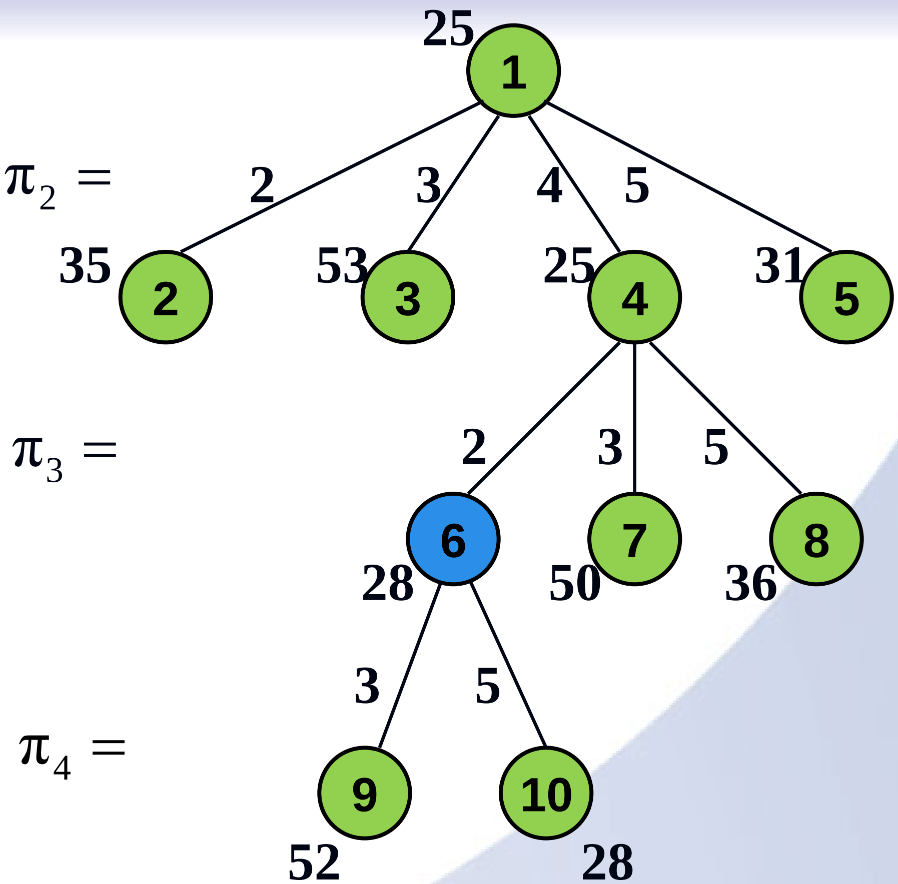
7.8 货郎担问题

■ 实例

$$A(6)=\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 11 & \infty & 0 \\ 0 & \infty & \infty & \infty & 2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 11 & \infty & 0 & \infty & \infty \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L=13} A(9)=\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 0 & \infty & \infty & \infty & \infty \end{bmatrix},$$

$$\xrightarrow{L=0} A(10)=\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 0 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 0 & \infty & \infty \end{bmatrix},$$

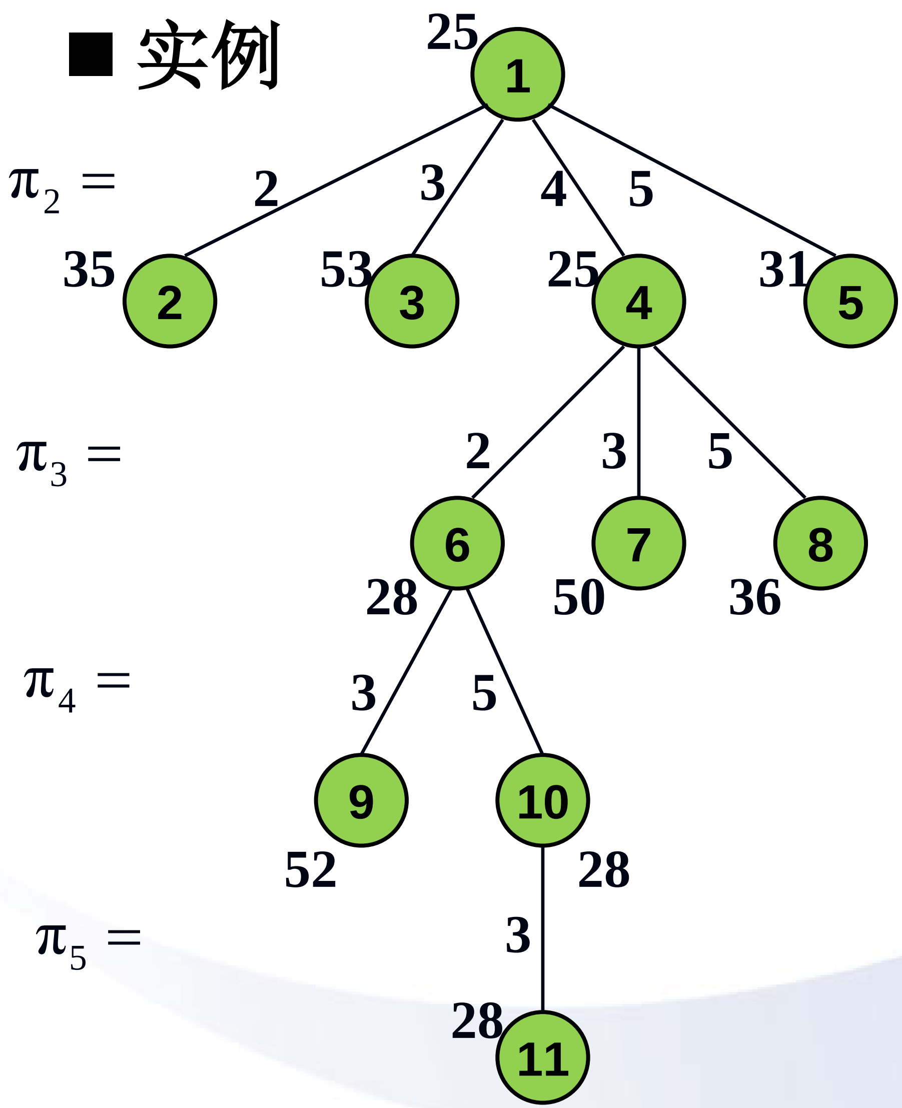


$\hat{c}(9)=28+11+13=52$

$\hat{c}(10)=28+0+0=28$

7.8 货郎担问题

■ 实例



最小成本周游路线：

1，4，2，5，3，1

$$C=\begin{bmatrix} \infty & 20 & 30 & 10 & 11 \\ 15 & \infty & 16 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & \infty & 2 & 4 \\ 19 & 6 & 18 & \infty & 3 \\ 16 & 4 & 7 & 16 & \infty \end{bmatrix}$$

总成本为：28

作业-课后练习25

- 问题描述
  - 用LC分枝限界算法求解下面的0-1背包问题，并画出所生成的状态空间树。
  ① $N= 5, M=12, (p_1, p_2, ..., p_5) = (10, 15, 6, 8, 4), (w_1, w_2, ..., w_5) = (4, 6, 3, 4, 2)$ 。
  - 用FIFO分枝限界算法求解下面的0-1背包问题，并画出所生成的状态空间树。
  ② $N= 5, M=15, (w_1, w_2, ..., w_5) = (p_1, p_2, ..., p_8) = (4, 4, 5, 8, 9)$。
- 要求
  - 作业提交到课程网站上

End