

《算法设计与分析》

第五章 动态规划

马丙鹏

2023年10月22日



中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

第五章 动态规划

- 5.1 一般方法
- 5.2 多段图问题
- 5.3 每对结点之间的最短路径
- 5.4 最优二分检索树
- 5.5 0/1背包问题
- 5.6 可靠性设计
- 5.7 货郎担问题
- 5.8 流水线调度问题

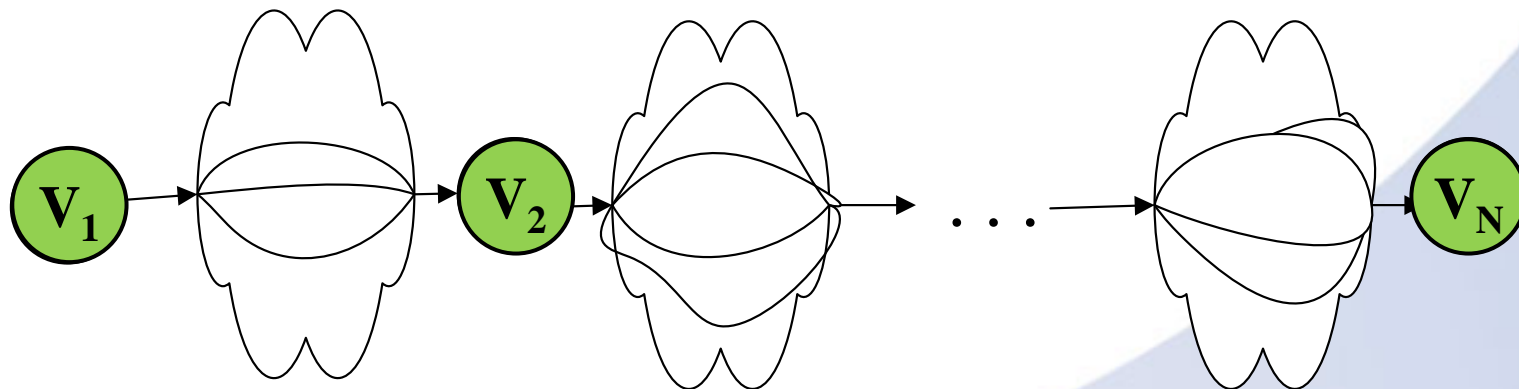


5.1 一般方法

■ 1. 多阶段决策问题

□ 多阶段决策过程:

- 事件的发展过程分为若干个相互联系的阶段：由初始状态开始，依次经过第一阶段、第二阶段、第三阶段、...，直至最后一个阶段结束。



5.1 一般方法

■ 1. 多阶段决策问题

□ 多阶段决策过程:

- 假设事件在初始状态后需要经过 n 个这样的阶段。
- 从 i 阶段发展到 $i+1$ 阶段($0 \leq i < n$)可能有多种不同的途径，而事件必须从中选择一条途径往前进展。
- 在两个阶段间选择发展途径的行为称为一次“决策”。
- 事件的发展过程之中需要做 n 次“决策”，这些“决策”就构成了事件整个发展过程的一个决策序列——这一过程称为多阶段决策过程。
- 对任意的 i ，阶段 i 以后的行为仅依赖于 i 阶段的状态，而与 i 阶段之前，过程如何达到这种状态的方式无关。



5.1 一般方法

■ 1. 多阶段决策问题

□ 最优化问题:

- 问题的每一阶段可能有多种可供选择的决策，每一决策都附有一定的“成本”。各阶段的决策构成一个决策序列。决策序列的成本是序列中所有决策的成本之和。决策序列不同，所导致的问题的结果可能不同。
- 设从阶段 i 到阶段 $i+1$ 有 p_i 种不同的选择，则从阶段1至阶段 n 共有 $p_1 p_2 \dots p_n$ 种不同的路径(每条路径对应一个决策序列)。
问：这些路径里面，哪一条的成本最小？
——如何求取最优决策序列？



5.1 一般方法

■ 1. 多阶段决策问题

□ 多阶段决策的最优化问题

- 求能够获得问题最优解的决策序列——最优决策序列。
- **可行解**：从问题开始阶段到最后阶段的一个合理的决策序列都是问题的一个可行解。
- **目标函数**：用来衡量可行解优劣的标准，通常以函数形式给出。
- **最优解**：能够使目标函数取极值的可行解。



5.1 一般方法

■ 2. 多阶段决策过程的求解策略

□ 问题的决策序列表示为：(x_1, x_2, \dots, x_n)，其中 x_i 表示第 i 阶段的决策：

$$\begin{array}{ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ S_0 \rightarrow & S_1 & \rightarrow S_2 & \rightarrow \dots & \rightarrow S_n \end{array}$$

□ 枚举法

- **穷举**可能的决策序列，从中选取可以获得最优解的决策序列，
- 若问题的决策序列由 n 次决策构成，每一阶段分别有 p_1, p_2, \dots, p_n 选择，则可能的决策序列将有 $p_1 p_2 \dots p_n$ 个。



5.1 一般方法

■ 2. 多阶段决策过程的求解策略

□ 动态规划

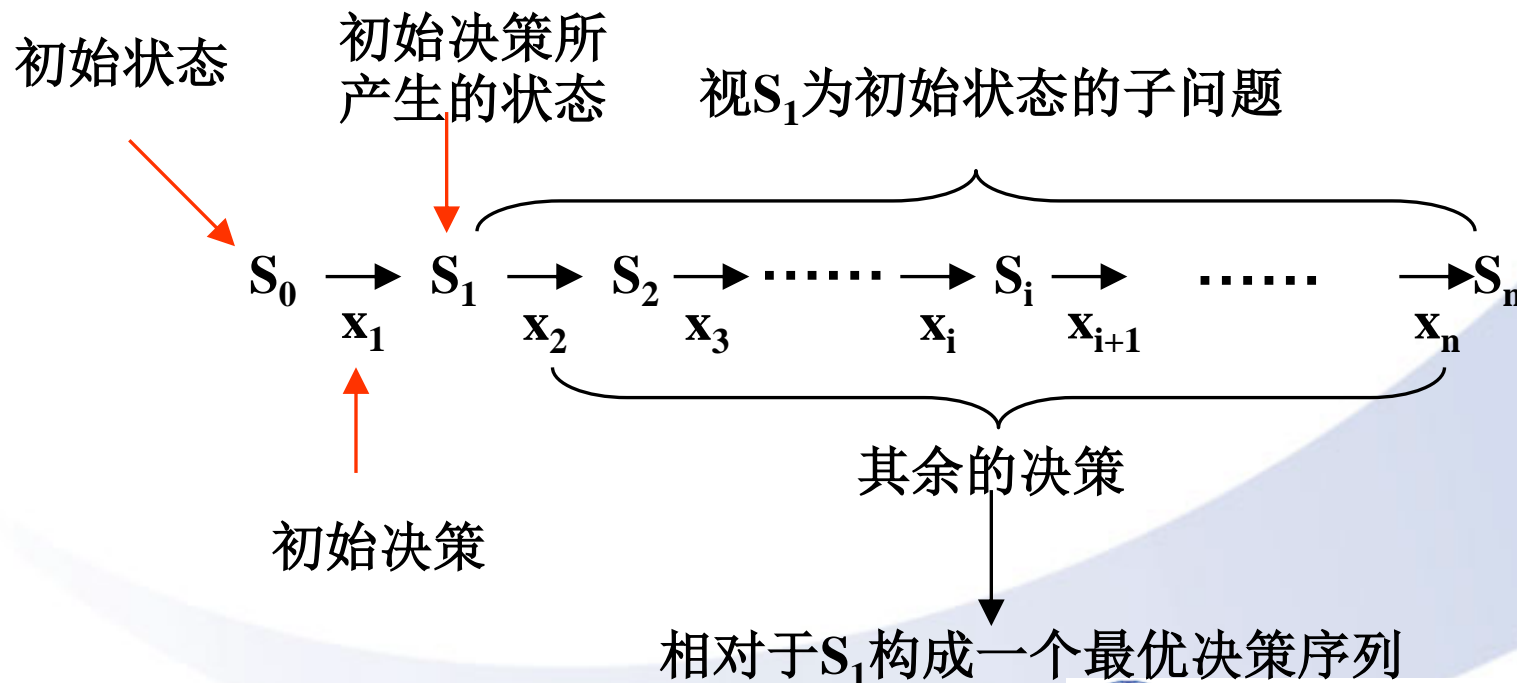
- 20世纪50年代初美国数学家R.E. **Bellman**等人在研究多阶段决策过程的优化问题时，提出了著名的**最优化原理**(principle of optimality)，把**多阶段**过程转化为一系列**单阶段**问题，创立了解决这类过程优化问题的新方法——**动态规划**。
- 动态规划(dynamic programming)是**运筹学**的一个分支，是求解**决策过程**(decision process)最优化的数学方法。



5.1 一般方法

■ 3. 最优性原理(Principle of Optimality)

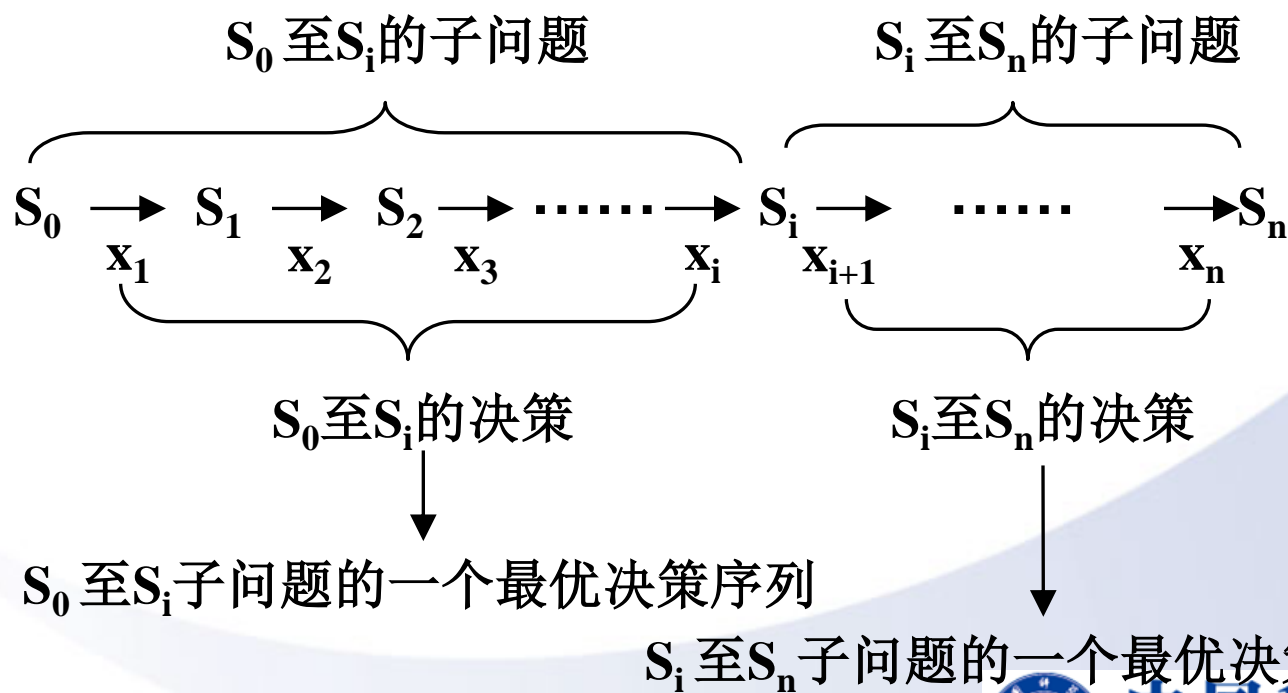
- 过程的最优决策序列具有如下性质：无论过程的初始状态和初始决策是什么，其余的决策都必须相对于初始决策所产生的状态构成一个最优决策序列。



5.1 一般方法

■ 3. 最优性原理(Principle of Optimality)

□ 过程的最优决策序列具有如下性质：如果整个序列是最优决策序列，则该序列中的任何一段子序列将是相对于该子序列所代表的子问题的最优决策子序列。



延伸：若全局是最优的，则局部亦是最优的



5.1 一般方法

■ 3. 最优性原理(Principle of Optimality)

□ 例：最短路径的性质

若 $v_1v_2v_3\cdots v_n$ 是从节点 v_1 到节点 v_n 的最短路径。则：
 $v_2v_3\cdots v_n$ 是从 v_2 到 v_n 的最短子路径；
 $v_3\cdots v_n$ 是从 v_3 到 v_n 的最短子路径；
.....

推广：

对 $v_1v_2v_3\cdots v_n$ 中的任意一段子序列：
 $v_pv_{p+1}\cdots v_q$ ($p \leq q, 1 \leq p, q \leq n$)，均代表从 v_p 至 v_q 的最短子路径。



5.1 一般方法

■ 3. 最优性原理(Principle of Optimality)

□ 利用动态规划求解问题的前提

① 证明问题满足最优性原理

- ✓ 如果对所求解问题证明满足最优性原理，则说明用动态规划方法有可能解决该问题。
- ✓ 所谓“问题满足最优性原理”即：问题的最优决策序列具有最优性原理所阐述的性质。

② 获得问题状态的递推关系式

- ✓ 获得各阶段间的递推关系式是解决问题的关键。

$$\begin{array}{ll} f(x_1, x_2, \dots, x_i) \rightarrow x_{i+1} & \text{向后递推} \\ f(x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \rightarrow x_{i-1} & \text{向前递推} \end{array} \quad \text{或}$$



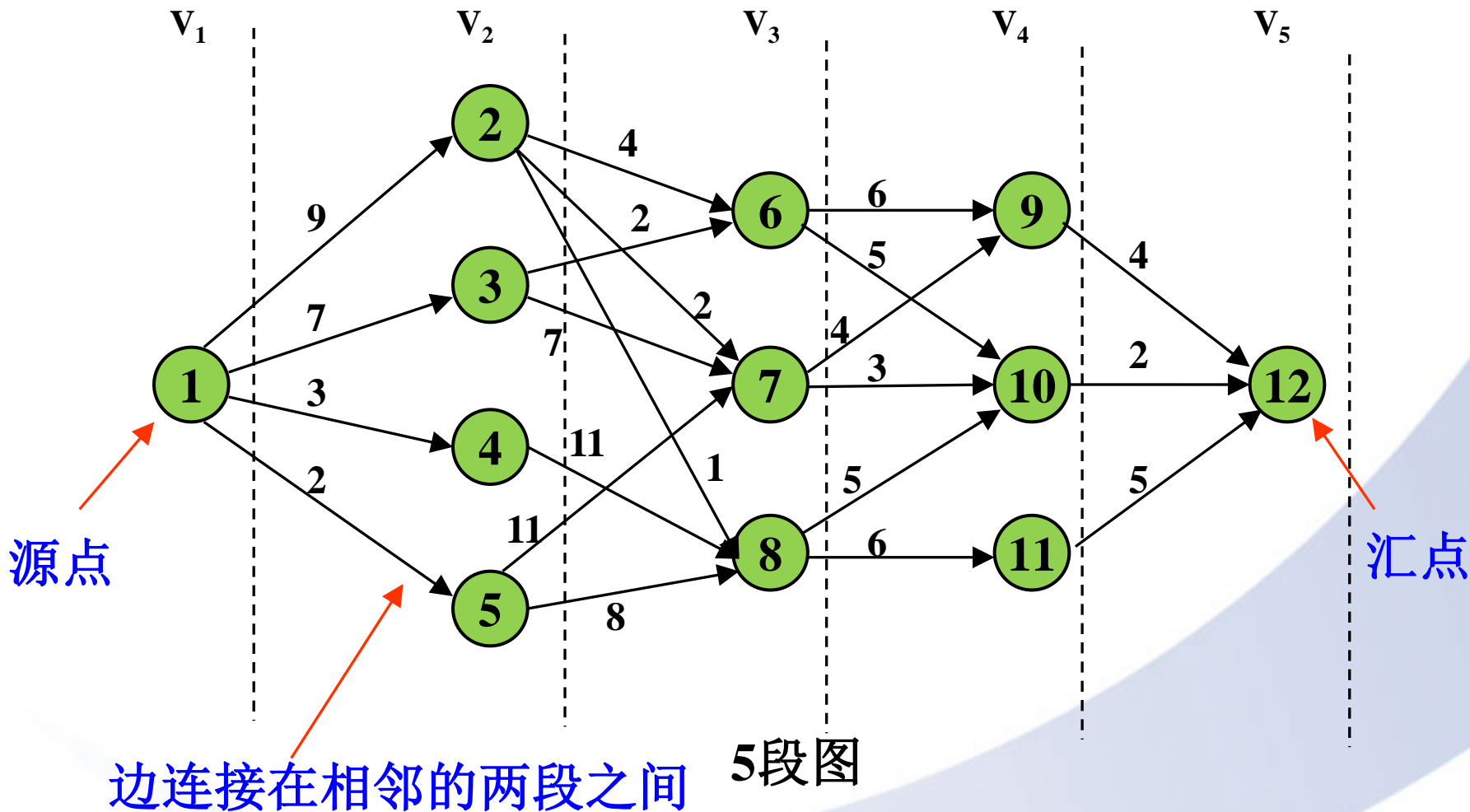
5.1 一般方法

例5.1 [多段图问题]多段图 $G=(V, E)$ 是一个有向图，且具有特性：

- **结点**：结点集 V 被分成 $k \geq 2$ 个不相交的集合 V_i ， $1 \leq i \leq k$ ，其中 V_1 和 V_k 分别只有一个结点 s (源点)和 t (汇点)。
- **段**：每一子集合 V_i 定义图中的一段——共 k 段。
- **边**：所有的边 (u, v) 均具有如下性质：若 $\langle u, v \rangle \in E$ ，则该边将是从小段 i 指向 $i+1$ 段，即若 $u \in V_i$ ，则 $v \in V_{i+1}$ ， $1 \leq i \leq k-1$ 。
- **成本**：每条边 (u, v) 均附有成本 $c(u, v)$ 。
- **s 到 t 的路径**：从第1段开始，至第2段、第3段、...、最后在第 k 段终止。路径的**成本**是这条路径上边的成本和。
- **多段图问题**：求由 s 到 t 的**最小成本路径**。



↓ 段是不相交的结点子集



5.1 一般方法

■ 3. 最优性原理(Principle of Optimality)

□ 多段图问题的多阶段决策过程:

➤ 生成从s到t的最小成本路径是在 $k-2$ 个阶段(除s和t外)进行某种决策的过程:

✓ 从s开始, 第 i 次决策决定 V_{i+1} ($1 \leq i \leq k-2$)中的哪个结点在从s到t的最短路径上。



5.1 一般方法

■ 3. 最优性原理(Principle of Optimality)

□ 最优性原理对多段图问题成立

假设 $s, v_2, v_3, \dots, v_{k-1}, t$ 是一条由 s 到 t 的最短路径。

➤ 初始状态: s

➤ 初始决策: $(s, v_2), v_2 \in V_2$

➤ 初始决策产生的状态: v_2

即 $v_2, v_3, \dots, v_{k-1}, t$ 构成从 v_2 至 t 的最小成本路径

则, 其余的决策: v_3, \dots, v_{k-1} 相对于 v_2 将构成一个最优决策序列——最优性原理成立。

反证: 若不然, 设 $v_2, q_3, \dots, q_{k-1}, t$ 是一条由 v_2 到 t 的更短的路径, 则 $s, v_2, q_3, \dots, q_{k-1}, t$ 将是比 $s, v_2, v_3, \dots, v_{k-1}, t$ 更短的从 s 到 t 的路径。与假设矛盾。

故, 最优性原理成立。



5.1 一般方法

■ 3. 最优性原理(Principle of Optimality)

□ 例5.2 [**0/1**背包问题] $\text{KNAP}(1, j, X)$

目标函数:
$$\sum_{1 \leq i \leq j} p_i x_i$$

约束条件:
$$\sum_{1 \leq i \leq j} w_i x_i \leq X$$

$x_i = 0 \text{ 或 } 1, p_i > 0, w_i > 0, 1 \leq i \leq j$

0/1背包问题: $\text{KNAP}(1, n, M)$



5.1 一般方法

■ 3. 最优性原理(Principle of Optimality)

□ 最优性原理对0/1背包问题成立:

设 y_1, y_2, \dots, y_n 是 x_1, x_2, \dots, x_n 的0/1值最优序列。

初始状态: $\text{KNAP}(1, n, M)$

初始决策: 决定 y_1 等于1还是等于0

若 $y_1=0$, $\text{KNAP}(2, n, M)$ 是初始决策产生的状态。则 y_2, \dots, y_n 相对于 $\text{KNAP}(2, n, M)$ 将构成一个最优序列。否则, y_1, y_2, \dots, y_n 将不是 $\text{KNAP}(1, n, M)$ 的最优解

若 $y_1=1$, $\text{KNAP}(2, n, M-w_1)$ 是初始决策产生的状态。则 y_2, \dots, y_n 相对于 $\text{KNAP}(2, n, M-w_1)$ 将构成一个最优序列。



5.1 一般方法

■ 3. 最优性原理(Principle of Optimality)

□最优性原理对0/1背包问题成立:

否则, 设存在另一0/1序列 z_1, z_2, \dots, z_n ,使得

$$\sum_{2 \leq i \leq n} p_i z_i \geq \sum_{2 \leq i \leq n} p_i y_i \quad \text{且} \quad \sum_{2 \leq i \leq n} w_i z_i \leq M - w_1$$

则序列 y_1, z_2, \dots, z_n 将是一个对于KNAP(1, n, M)具有更大效益值的序列。与假设矛盾。

故, 最优性原理成立。



5.1 一般方法

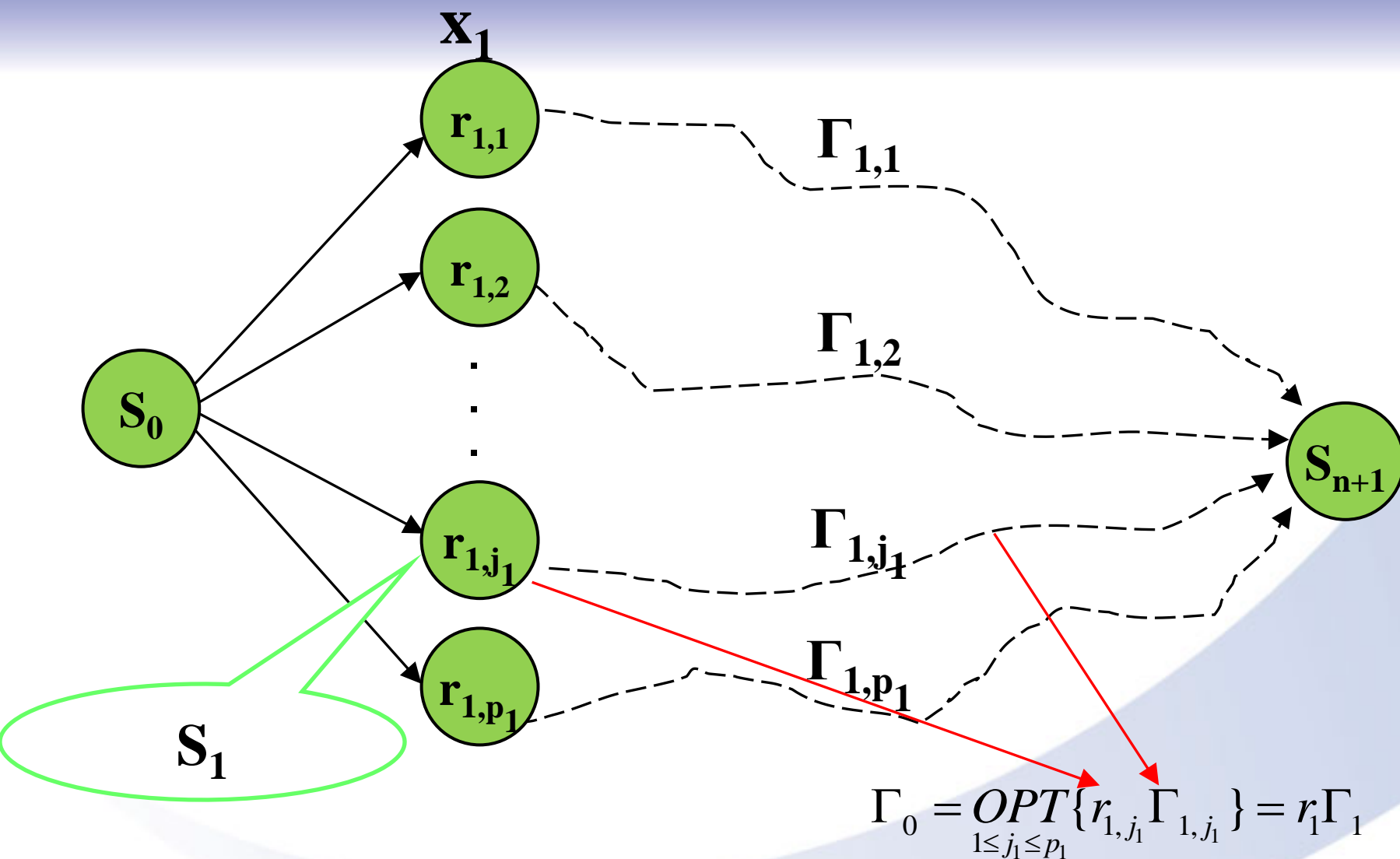
■ 4. 动态规划模型的基本要素

□ 最优决策序列的表示

- 设 S_0 : 问题的初始状态, 问题需要做 n 次决策, i 阶段的决策值记为 x_i , $1 \leq i \leq n$ 。
- 设 $X_1 = \{r_{1,1}, r_{1,2}, \dots, r_{1,p_1}\}$ 是 x_1 可选决策值的集合, S_{1,j_1} 是在选择决策值 r_{1,j_1} 之后所产生的状态——“初始决策”所产生的状态。
- 设 Γ_{1,j_1} 是相应于状态 S_{1,j_1} 的最优决策序列。
- 则, 相应于 S_0 的最优决策序列就是 $\{r_{1,j_1} \Gamma_{1,j_1} | 1 \leq j_1 \leq p_1\}$ 中最优的序列, 记为

$$\text{OPT}_{1 \leq j_1 \leq p_1} \{r_{1,j_1} \Gamma_{1,j_1}\} = r_1 \Gamma_1$$





5.1 一般方法

■ 4. 动态规划模型的基本要素

□ 最优决策序列的表示

- 若已经做了 $k-1$ 次决策, $1 \leq k-1 < n$, 设 x_1, x_2, \dots, x_{k-1} 的最优决策值是 r_1, r_2, \dots, r_{k-1} , 所产生的状态依次为 S_1, S_2, \dots, S_{k-1} 。 x_k 是基于 S_{k-1} 的决策。
- 设 $X_k = \{r_{k,1}, r_{k,2}, \dots, r_{k,p_k}\}$ 是 x_k 可能的决策值的集合, S_{k,j_k} 是在选择决策值 r_{k,j_k} 之后所产生的状态, $1 \leq j_k \leq p_k$ 。

就一个特定的
 r_{k,j_k} 而言



5.1 一般方法

■ 4. 动态规划模型的基本要素

□ 最优决策序列的表示

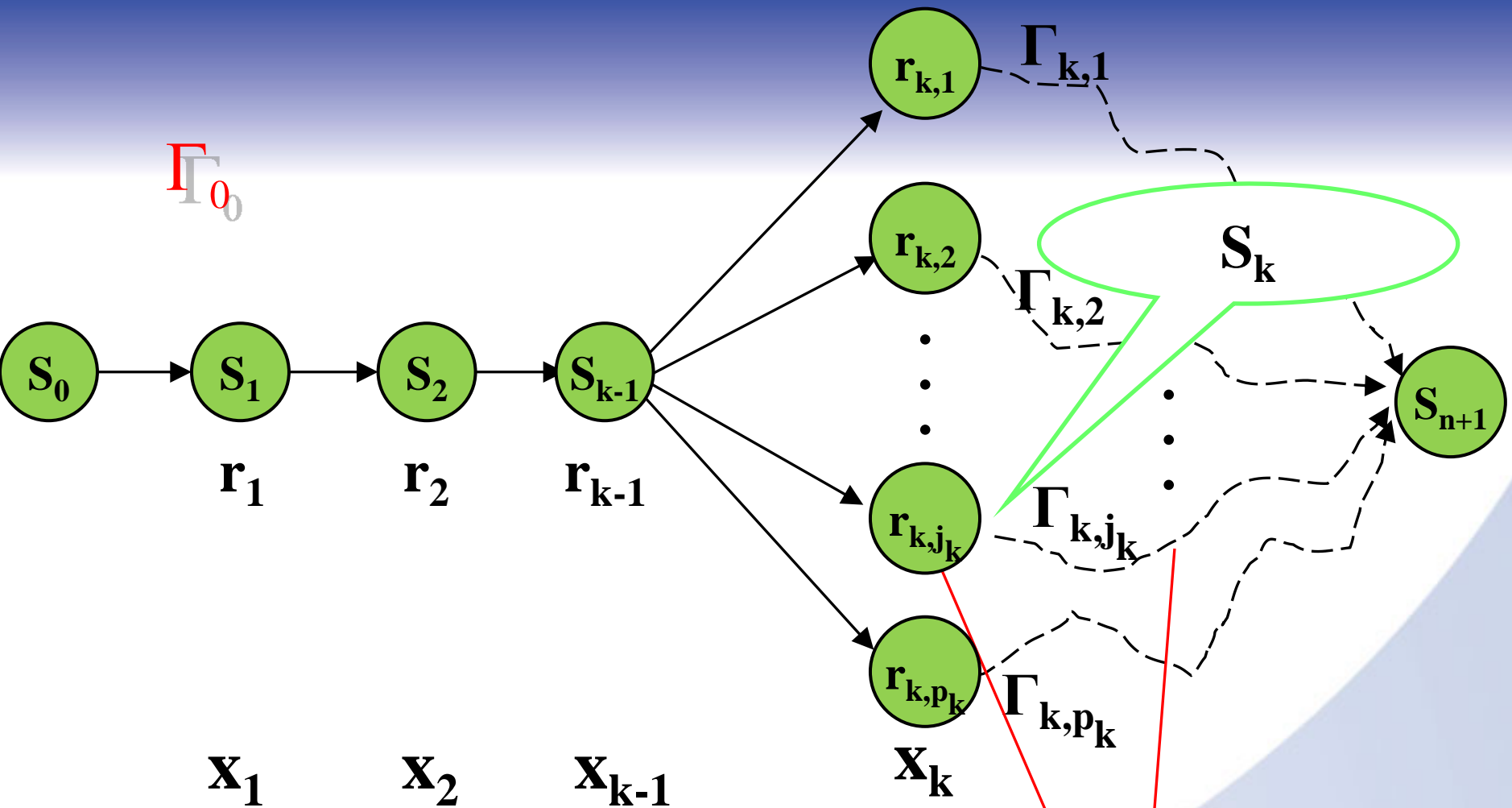
➤ Γ_{k,j_k} 是相应于状态 S_{k,j_k} 的最优决策子序列。

则，相应于 S_{k-1} 的最优决策序列是

$$OPT\{r_{k,j_k} \Gamma_{k,j_k}\}_{1 \leq j_k \leq p_k} = r_k \Gamma_k$$

相应于 S_0 的最优决策序列为 $r_1, \dots, r_{k-1}, r_k, \Gamma_k$





$$\Gamma_{k-1} = \underset{1 \leq j_k \leq p_k}{OPT} \{r_{k,j_k} \Gamma_{k,j_k}\} = r_k \Gamma_k$$

$$\Gamma_0 = r_1 r_2 \cdots r_k \Gamma_k$$



中国科学院大学

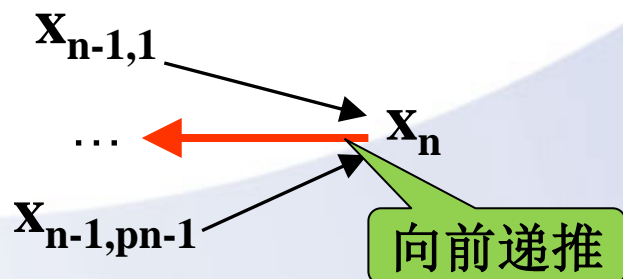
University of Chinese Academy of Sciences

5.1 一般方法

■ 5. 递推策略

□ 向前处理法

- 列出根据 x_{i+1}, \dots, x_n 的最优决策序列求取 x_i 决策值的关系式。
- 从最后一个阶段，逐步向前递推求出各阶段的决策值。
- 先给出 x_n 的决策，然后根据 x_n 求 x_{n-1} ，再根据 x_n, x_{n-1} 求 x_{n-2}, \dots 。决策序列 x_1, x_2, \dots, x_n 就是问题的最优解。



5.1 一般方法

■ 5. 递推策略

例5.4 利用向前处理法求解k段图问题

设 $v_{2,j_2} \in V_2, 1 \leq j_2 \leq p_2, |V_2|=p_2$;

$\Gamma_{v_{2,j_2}}$ 是由 v_{2,j_2} 到 t 的最短路径, 则 s 到 t 的最短路径是

$\{s \Gamma_{v_{2,j_2}} \mid v_{2,j_2} \in V_2, 1 \leq j_2 \leq p_2\}$ 中最短的那条路径。

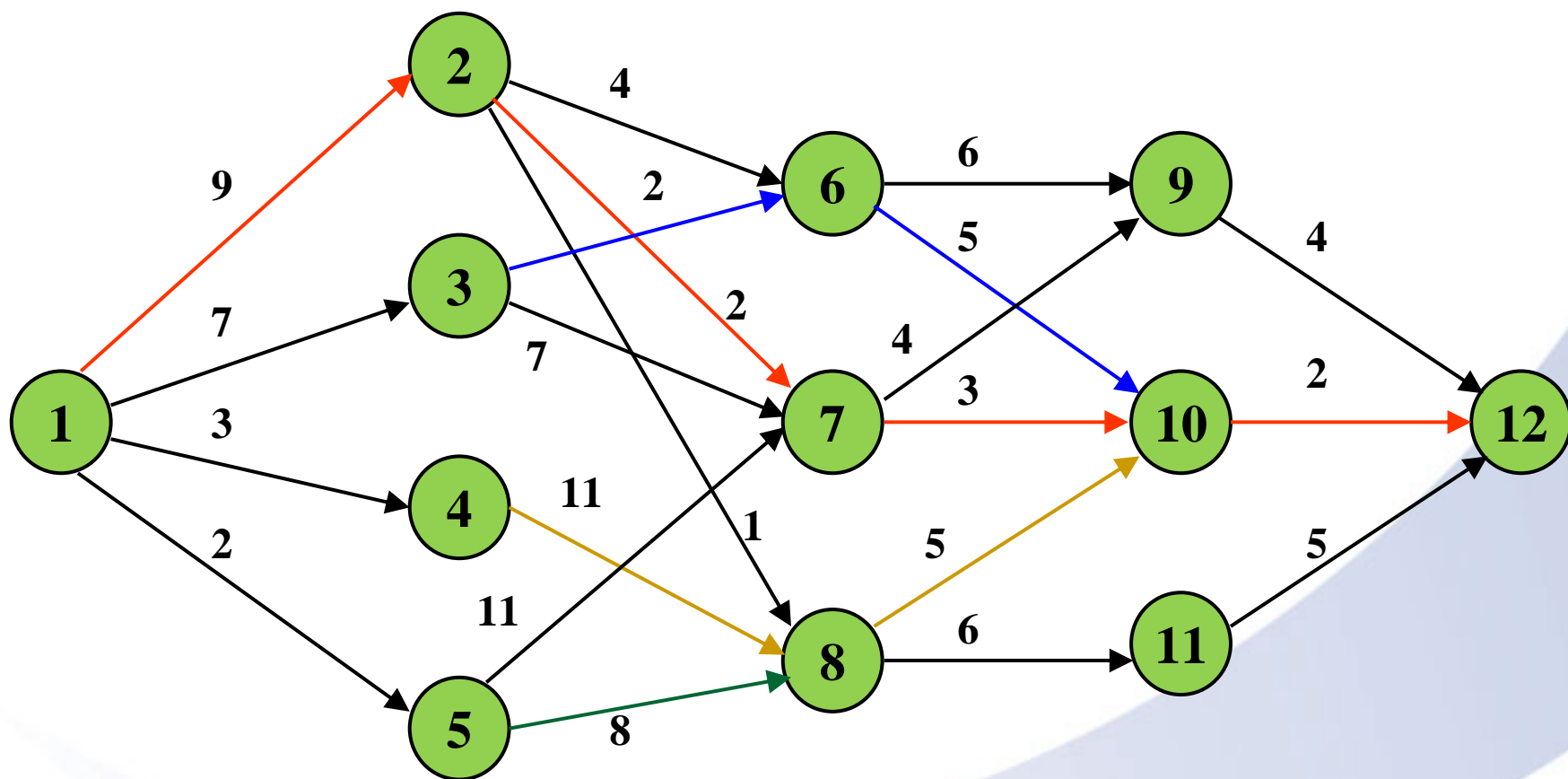
若 $s, v_2, v_3, \dots, v_i, \dots, v_{k-1}, t$ 是 s 到 t 的一条最短路径, v_i 是其中的一个中间点, 则 s, v_2, v_3, \dots, v_i 和 v_i, \dots, v_{k-1}, t 分别是由 s 到 v_i 和 v_i 到 t 的最短路径(最优性原理)

从 V_i 中的结点 j_i 到 t 的最短路径将是:

$$\min(\{v_{i,j_i} \Gamma_{v_{i+1,j_{i+1}}} \mid v_{i+1,j_{i+1}} \in V_{i+1}, 1 \leq j_{i+1} \leq p_{i+1}\})$$



V_1 V_2 V_3 V_4 V_5



5段图



5.1 一般方法

■ 5. 递推策略

例5.3 利用向前处理法求解0/1背包问题

设 $g_i(X)$ 是 $\text{KNAP}(i+1, n, X)$ 的最优解。

- $g_0(M)$: $\text{KNAP}(1, n, M)$ 的最优解。由于 x_1 的取值等于1或0, 可得:

$$g_0(M) = \max\{g_1(M), g_1(M-w_1)+p_1\}$$

最优解是 $g_0(M)$

- 对于某个 x_i , x_i 等于1或0, 则有:

$$g_i(X) = \max\{g_{i+1}(X), g_{i+1}(X-w_{i+1})+p_{i+1}\}$$

初始值:

$$g_n(X) = \begin{cases} 0 & X \geq 0 \\ -\infty & X < 0 \end{cases}$$



5.1 一般方法

■ 5. 递推策略

□ 向后处理法

- 列出根据 x_1, \dots, x_{i-1} 的最优决策序列求取 x_i 决策值的关系式。
- 从第一个阶段，逐步向后递推求出各阶段的决策值。决策序列 x_1, x_2, \dots, x_n 就是问题的最优解。

$$x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \dots \rightarrow x_n$$



5.1 一般方法

■ 5. 递推策略

例5.6 k段图问题(向后处理策略)

设 $v_{k-1,j_{k-1}} \in V_{k-1}$, $1 \leq j_{k-1} \leq p_{k-1}$, $|V_{k-1}| = p_{k-1}$;

$\Gamma_{v_{k-1,j_{k-1}}}$ 是由s到 $v_{k-1,j_{k-1}}$ 的最短路径, 则s到t的最短路径是

$\{ \Gamma_{v_{k-1,j_{k-1}}} t \mid v_{k-1,j_{k-1}} \in V_{k-1}, 1 \leq j_{k-1} \leq p_{k-1} \}$ 中最短的那条路径。

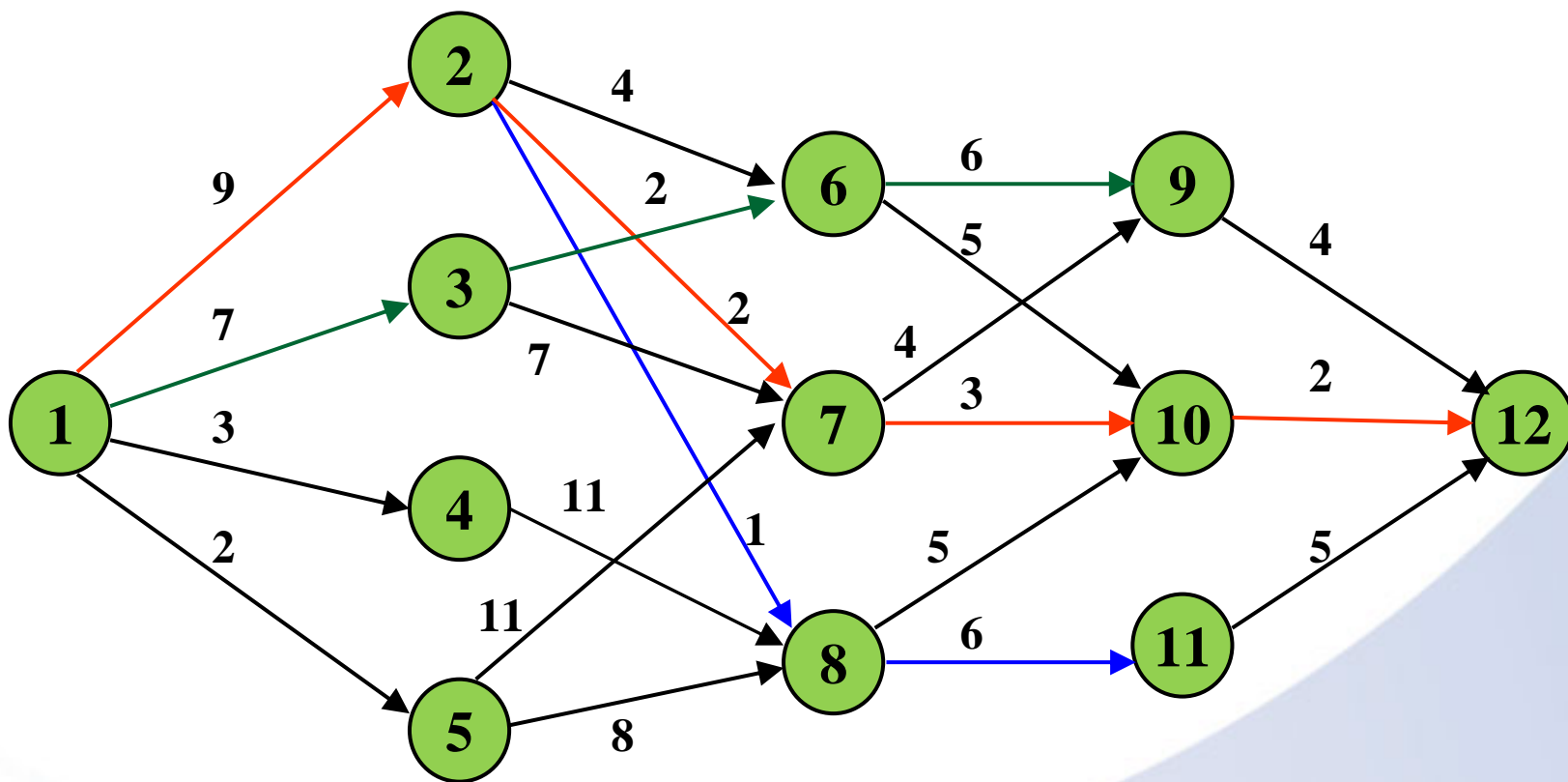
若s, $v_2, v_3, \dots, v_i, \dots, v_{k-1}, t$ 是s到t的一条最短路径, v_i 是其中的一个中间点, 则s, v_2, v_3, \dots, v_i 和 v_i, \dots, v_{k-1}, t 分别是由s到 v_i 和 v_i 到t的最短路径(最优性原理)

从s到 V_i 中的结点 j_i 的最短路径将是:

$$\min(\{ \Gamma_{v_{i-1,j_{i-1}}} v_{i,j_i} \mid v_{i-1,j_{i-1}} \in V_{i-1}, 1 \leq j_{i-1} \leq p_{i-1} \})$$



V_1 V_2 V_3 V_4 V_5



5段图



中国科学院大学

University of Chinese Academy of Sciences 31

5.1 一般方法

■ 5. 递推策略

例5.5 0/1背包问题(向后处理策略)

设 $f_i(X)$ 是 $\text{KNAP}(1, i, X)$ 的最优解。

则, $f_n(M) = \text{KNAP}(1, n, M)$

向后递推关系式:

$$f_i(X) = \max\{f_{i-1}(X), f_{i-1}(X-w_i)+p_i\}$$

初始值:

$$f_0(X) = \begin{cases} 0 & X \geq 0 \\ -\infty & X < 0 \end{cases}$$



End

