《算法设计与分析》

第十二章 线性规划

马丙鹏

2023年12月25日

中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

第十二章 线性规划

- 12.1 数学模型
- 12.2 图解法
- 12.3 标准型
- 12.4 基本概念
- 12.5 单纯形法

12.5 单纯形法

■ 2. 大M单纯形法

- □在实际问题中有些模型并不含有单位矩阵，为了得到一组基向量和初基可行解，在约束条件的等式左端加一组虚拟变量，得到一组基变量。
- □这种人为加的变量称为人工变量，构成的可行基称为人工基，用大M法或两阶段法求解，这种用人工变量作桥梁的求解方法称为人工变量法。
- □例12-20 用大M法解下列线性规划

$$\max Z = 3x_1 + 2x_2 - x_3$$

$$\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 10 \\ -2x_1 + 2x_2 - x_3 = -1 \\ x_1、x_2、x_3 \geq 0 \end{cases}$$

12.5 单纯形法

■ 2. 大M单纯形法

□例12-20 用大M法解下列线性规划

➢【解】首先将数学模型化为标准形式

$$\max Z = 3x_1 + 2x_2 - x_3$$

$$\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_5 = 10 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, \cdots, 5 \end{cases}$$

12.5 单纯形法

■ 2. 大M单纯形法

□例12-20 用大M法解下列线性规划

- 式中x_4，x_5为松弛变量，x_5可作为一个基变量，第一、三约束中分别加入人工变量x_6、x_7，目标函数中加入 $-Mx_6-Mx_7$ 一项，得到人工变量单纯形法数学模型

$$\max Z = 3x_1 + 2x_2 - x_3 - Mx_6 - Mx_7$$

$$\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 + x_6 = 4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_5 = 10 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_7 = 1 \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, \cdots, 7 \end{cases}$$

- 用单纯形法求解，见下表。

C_j		3	2	-1	0	0	−M	−M	b
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
−M	x_6	-4	3	1	-1	0	1	0	4
0	x_5	1	-1	2	0	1	0	0	10
−M	x_7	2	-2	[1]	0	0	0	1	1 →
λ_j		3-2M	2+M	-1+2M↑	−M	0	0	0	5M
−M	x_6	-6	[5]	0	-1	0	1		3 →
0	x_5	-3	3	0	0	1	0		8
-1	x_3	2	-2	1	0	0	0		1
λ_j		5-6M	5M↑	0	−M	0	0		1+3M
2	x_2	-6/5	1	0	-1/5	0			3/5
0	x_5	[3/5]	0	0	3/5	1			31/5 →
-1	x_3	-2/5	0	1	-2/5	0			11/5
λ_j		5↑	0	0	0	0			1
2	x_2	0	1	0	1	2			13
3	x_1	1	0	0	1	5/3			31/3
-1	x_3	0	0	1	0	2/3			19/3
λ_j		0	0	0	-5	-25/3			-152/3

12.5 单纯形法

- 2. 大M单纯形法
  - 例12-20 用大M法解下列线性规划
    - 最优解X＝(31/3, 13, 19/3, 0, 0)^T;
    - 最优值Z＝152/3
    - 注意：

    ① M是一个很大的抽象数，不需要给出具体的数值，可以理解为它能大于给定的任何一个确定数值

12.5 单纯形法

■ 2. 大M单纯形法

□例12-20 用大M法解下列线性规划

② 初始表中的检验数有两种算法，

✓第一种算法是利用第一、三约束将x_6、x_7的表达式代入目标涵数消去x_6和x_7，得到用非基变量表达的目标函数，其系数就是检验数；

✓第二种算法是利用公式计算，如

$$\lambda_1 = C_1 - C_B P_1 = 3 - (-\mathrm{M}, 0, -\mathrm{M})\begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= 3 - \left[(-\mathrm{M})\times(-4) + 0\times 1 + (-\mathrm{M})\times 2\right] = 3 - 2\mathrm{M}$$

12.5 单纯形法

■ 2. 大M单纯形法

□例12-21 求解线性规划

$$\min Z = 5x_1 - 8x_2$$
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1 - 2x_2 \ge 4 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

➢解加入松弛变量x_3、x_4化为标准型

$$\min Z = 5x_1 - 8x_2$$
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 - 2x_2 - x_4 = 4 \\ x_j \ge 0, j = 1,2,\cdots,4 \end{cases}$$

➢在第二个方程中加入人工变量x_5，目标函数中加上M x_5一项，得到

$$\min Z = 5x_1 - 8x_2 + Mx_5$$
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 - 2x_2 - x_4 + x_5 = 4 \\ x_j \ge 0, j = 1,2,\cdots,5 \end{cases}$$

12.5 单纯形法

■ 2. 大M单纯形法

□例12-20 用大M法解下列线性规划

➢用单纯形法计算如下表所示。

C_j		5	-8	0	0	M	b
C_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	[3]	1	1	0	0	6→
M	x_5	1	-2	0	-1	1	4
λ_j		5－M↑	－8+2M	0	M	0	－4M
5	x_1	1	1/3	1/3	0	0	2
M	x_5	0	－7/3	－1/3	－1	1	2
λ_j		0	-29/3+7/3M	-5/3+1/3M	M	0	-10-2M

12.5 单纯形法

- **2. 大M单纯形法**
  - 例12-20 用大M法解下列线性规划
    - 表中$\lambda_j \geq 0$，j=1, 2, …, 5，从而得到最优解X=(2, 0, 0, 0, 2)， Z=10+2M。
    - 但最优解中含有人工变量$x_5 \neq 0$说明这个解是伪最优解，是不可行的，因此原问题无可行解。

12.5 单纯形法

■ 3. 两阶段单纯形法

- 两阶段单纯形法与大M单纯形法的目的类似，将人工变量从基变量中换出，以求出原问题的初始基本可行解。
- 将问题分成两个阶段求解，第一阶段的目标函数是

$$\min w = \sum_{i=1}^{m} R_i$$

- 约束条件是加入人工变量后的约束方程，当第一阶段的最优解中没有人工变量作基变量时，得到原线性规划的一个基本可行解，第二阶段就以此为基础对原目标函数求最优解。
- 当第一阶段的最优解$w\neq0$时，说明还有不为零的人工变量是基变量，则原问题无可行解。

12.5 单纯形法

■ 3. 两阶段单纯形法

□例12-22用两阶段单纯形法求解例19的线性规划。

➢【解】标准型为

$$\max Z = 3x_1 + 2x_2 - x_3$$

$$\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_5 = 10 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_j \geq 0,\ j = 1, 2, \cdots, 5 \end{cases}$$

12.5 单纯形法

■ 3. 两阶段单纯形法

- □例12-22用两阶段单纯形法求解例19的线性规划。
  - ➢在第一、三约束方程中加入人工变量x_6、x_7后，第一阶段问题为

$$\min w = x_6 + x_7$$

$$\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 + x_6 = 4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_5 = 10 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_7 = 1 \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, \cdots, 7 \end{cases}$$

  - ➢用单纯形法求解，得到第一阶段问题的计算表如下：

C_j		0	0	0	0	0	1	1	b
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
1	x_6	-4	3	1	-1	0	1	0	4
0	x_5	1	-1	2	0	1	0	0	10
1	x_7	2	-2	[1]	0	0	0	1	1 →
λ_j		2	-1	-2↑	1	0	0	0	-5
1	x_6	-6	[5]	0	-1	0	1		3 →
0	x_5	-3	3	0	0	1	0		8
0	x_3	2	-2	1	0	0	0		1
λ_j		6	-5↑	0	1	0	0		-3
0	x_2	-6/5	1	0	- 1/5	0			3/5
0	x_5	3/5	0	0	3/5	1			31/5
0	x_3	- 2/5	0	1	- 2/5	0			11/5
λ_j		0	0	0	0	0			0

12.5 单纯形法

■ 3. 两阶段单纯形法

□例12-22用两阶段单纯形法求解例19的线性规划。

➢最优解为$X=(0,\frac{3}{5},\frac{11}{5},0,\frac{31}{5})$，最优值**$w$=0**。

➢第一阶段最后一张最优表说明找到了原问题的一组基可行解，将它作为初始基可行解，求原问题的最优解，即第二阶段问题为

$$\max Z=3x_1+2x_2-x_3$$

$$\begin{cases} -\frac{6}{5}x_1+x_2-\frac{1}{5}x_4=\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5}x_1+\frac{3}{5}x_4+x_5=\frac{31}{5} \\ -\frac{2}{5}x_1+x_3-\frac{2}{5}x_4=\frac{11}{5} \\ x_j\geq 0,\ j=1,2,\cdots,5 \end{cases}$$

12.5 单纯形法

➢用单纯形法计算得到下表

C_j		0	0	0	0	0	b
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
2	x_2	-6/5	1	0	- 1/5	0	3/5
0	x_5	[3/5]	0	0	3/5	1	31/5 →
-1	x_3	- 2/5	0	1	- 2/5	0	11/5
λ_j		5↑	0	0	0	0	1
2	x_2	0	1	0	1	2	13
3	x_1	1	0	0	1	5/3	31/3
-1	x_3	0	0	1	0	2/3	19/3
λ_j		0	0	0	-5	-25/3	-152/3

➢最优解X＝(31/3, 13, 19/3, 0, 0)^T;

➢最优值Z＝152/3

中国科学院大学 University of Chinese Academy of Sciences

$$\min Z = 5x_1 - 8x_2$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1 - 2x_2 \ge 4 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

12.5 单纯形法

- **3. 两阶段单纯形法**
  - 例12-23 用两阶段法求解例12-21的线性规划。
    - 【解】例12-21的第一阶段问题为

$$\min w = x_5$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 - 2x_2 - x_4 + x_5 = 4 \\ x_j \ge 0, j = 1, 2, \cdots, 5 \end{cases}$$

    - 用单纯形法计算如下表：

12.5 单纯形法

C_j		0	0	0	0	1	b
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	[3]	1	1	0	0	6 →
1	x_5	1	-2	0	-1	1	4
λ_j		-1↑	2	0	1	0	-4
0	x_1	1	1/3	1/3	0	0	2
-1	x_5	0	-7/3	-1/3	-1	1	2
λ_j		0	7/3	1/3	1	0	-2

➢ $\lambda_j \geq 0$, 得到第一阶段的最优解 $X=(2, 0, 0, 0, 2)^T$, 最优目标值 $w=2\neq 0$, x_5仍在基变量中, 从而原问题无可行解。

12.5 单纯形法

■ 3. 两阶段单纯形法

- 解的判断
  - 唯一最优解的判断：
    - ✓最优表中所有非基变量的检验数非零，则线规划具有唯一最优解
  - 多重最优解的判断:
    - ✓最优表中存在非基变量的检验数为零，则线则性规划具有多重最优解
  - 无界解的判断:
    - ✓某个$\lambda_k>0$且$a_{ik}\leq 0$ (i=1, 2, …, m)则线性规划具有无界解

中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

12.5 单纯形法

- 3. 两阶段单纯形法
  - 解的判断
    - 无可行解的判断：
      - ① 大M法求解时，最优解中含有不为零的人工变量，原问题无可行解
      - ② 两阶段法计算时，当第一阶段的最优值$w \neq 0$时，则原问题无可行解
    - 退化基本可行解的判断:
      - ✓存在某个基变量为零的基本可行解。

中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

12.5 单纯形法

■ 4. 计算公式

□设有线性规划

$$\max Z = CX$$

$$\begin{cases} AX = b \\ X \geq 0 \end{cases}$$

➢其中$\boldsymbol{A_{m\times n}}$且**r(*A*)=*m*,**

$$X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$$

$$C = (c_1, c_2, \cdots c_n)$$

$$b = (b_1, b_2, \cdots, b_m)^T$$

➢***X*≥0应理解为*X*大于等于零向量，即$x_j \geq 0$, *j*=1, 2…,n。**

中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

12.5 单纯形法

■ 4. 计算公式

- □不妨假设$A=(P_1, P_2, \ldots, P_n)$中前$m$个列向量构成一个可行基，记为$B=(P_1, P_2, \ldots, P_m)$。
- □矩阵A中后n-m列构成的矩阵记为$N=(P_{m+1}, \ldots, P_n)$,则A可以写成分块矩阵$A=(B, N)$。
- □对于基B，基变量为$X_B=(x_1, x_2, \ldots, x_m)^T$, 非基变量为$X_N=(x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots x_n)^T$。
- □则X可表示成

$$X=\begin{bmatrix} X_B \\ X_N \end{bmatrix}$$

- □同理将C写成分块矩阵$C=(C_B, C_N)$， $C_B=(C_1, C_2, \ldots, C_m)$, $C_N=(C_{m+1}, C_{m+2}, \ldots, C_N)$

12.5 单纯形法

■ 4. 计算公式

- □ 则 $AX=b$ 可写成

$$(B,\ N)\begin{bmatrix} X_B \\ X_N \end{bmatrix} = BX_B + NX_N = b$$

- □ 因为 $r(B)=m$（或 $|B|\neq 0$）所以 B^{-1} 存在，因此可有

$$BX_B = b - NX_N$$

$$X_B = B^{-1}(b - NX_n)$$

$$= B^{-1}b - B^{-1}NX_N$$

- □ 令非基变量 $X_N=0$，$X_B = B^{-1}b$，由 B 是可行基的假设，则得到基本可行解

$$X = (B^{-1}b, 0)^T$$

12.5 单纯形法

■ 4. 计算公式

□将目标函数写成

$$
\begin{aligned}
Z = (C_B, C_N)\begin{bmatrix} X_B \\ X_N \end{bmatrix} &= C_B X_B + C_N X_N \\
&= C_B(B^{-1}b - B^{-1}NX_N) + C_N X_N \\
&= C_B B^{-1}b + (C_N - C_B B^{-1}N)X_N
\end{aligned}
$$

$$
Z = C_B B^{-1}b + (C_N - C_B B^{-1}N)X_N
$$

12.5 单纯形法

■ 4. 计算公式

□令X_N=0, 得到下列五个计算公式:

1. $X_B = B^{-1}b$

2. $\bar{N} = B^{-1}N$

3. $\lambda_N = C_N - C_B B^{-1} N \quad \lambda = C - C_B B^{-1} A$

$$\lambda_j = c_j - \sum_i c_i \bar{a}_{ij} \quad 其中 \quad \bar{a}_{ij} = (B^{-1}N)_j$$

4. $Z_0 = C_B B^{-1} b$

5. $\pi = C_B B^{-1}$ π称为单纯形乘子

12.5 单纯形法

■ 4. 计算公式

- 上述公式可用下面较简单的矩阵表格运算得到，
- 设初始矩阵单纯形表12-16

表12-16

	X_B	X_N	b
X_B	B	N	b
C_j-Z_j	C_B	C_N	0

12.5 单纯形法

■ 4. 计算公式

□将B化为I（I为m阶单位矩阵）,C_B化为零,即求基本可行解和检验数。

□用B^{-1}左乘表中第二行,得到表12-17

表12-17

	X_B	X_N	b
X_B	I	$B^{-1}N$	$B^{-1}b$
C_j-Z_j	C_B	C_N	0

12.5 单纯形法

■ 4. 计算公式

□再将第二行左乘－ C_B后加到第三行,得到

表12-18

	X_B	X_N	b
X_B	I	$B^{-1}N$	$B^{-1}b$
$\lambda=C_j-Z_j$	0	$C_N-C_BB^{-1}N$	$-C_BB^{-1}b$

$\overline{N}$　　λ_N　　X_B　　$-Z_0$

中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

12.5 单纯形法

■ **4. 计算公式**

□五个公式的应用

➢【例12-24】线性规划

$$\max Z = x_1 + 2x_2 + x_3$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 15 \\ \dfrac{1}{3}x_1 + x_2 + 5x_3 + x_5 = 20 \\ x_j \geq 0,\ j = 1, \cdots, 5 \end{cases}$$

➢已知可行基

$$B_1 = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ \dfrac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

➢求(1)单纯形乘子π;

➢(2)基可行解及目标值;

➢(3)求λ_3;

➢(4)B_1是否是最优基,为什么;

➢(5)当可行基为 $B_2 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 时求λ_1及λ_3。

■ 4. 计算公式

□五个公式的应用

➢【解】(1)因为B_1由A中第一列、第二列组成,故x_1、x_2为基变量，x_3、x_4、x_5为非基变量,有关矩阵为

C_B =(c_1, c_2)=(1, 2)

C_N =(c_3, c_4, c_5)=(1, 0, 0)

$$B_1^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & 1\\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}$$

➢故单纯形乘子

$$\pi=C_B B^{-1}=(1,2)\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & 1\\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}=(\frac{1}{9},\frac{7}{3})$$

12.5 单纯形法

■ **4. 计算公式**

□五个公式的应用

➢(2)基变量的解为

$$X_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 1 \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ \frac{35}{3} \end{bmatrix}$$

➢故基本可行解为

$$X = (25, \frac{35}{3}, 0, 0, 0,)^T$$

➢目标函数值为

$$Z_0 = C_B B^{-1} b = C_B X_B = (1,2) \begin{bmatrix} 25 \\ \frac{35}{3} \end{bmatrix} = \frac{145}{3}$$

12.5 单纯形法

■ **4. 计算公式**

□五个公式的应用

➢**(3) 求λ_3**

$$P_3=\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}, C_B B^{-1}P_3=\pi P_3=(\frac{1}{9},\frac{7}{3})\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}=\frac{107}{9}$$

$$\lambda_3=c_3-C_B B^{-1}P_3=1-\frac{107}{9}=-\frac{98}{9}$$

12.5 单纯形法

■ 4. 计算公式

□五个公式的应用

- ➢**(4) 要判断B_1是不是最优基,亦是要求出所有检验数则否满足$\lambda_j \le 0$, j=1…,5。x_1, x_2是基变量,**
- ➢**故λ_1=0, λ_2=0, 而**$\lambda_3 = -\dfrac{98}{9} < 0$, **剩下来求$\lambda_4$, λ_5，由λ_N计算公式得**

$$(\lambda_4, \lambda_5) = (c_4, c_5) - C_B B^{-1}(P_4 P_5)$$

$$= (0,0) - (\frac{1}{9}, \frac{7}{3})\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = (-\frac{1}{9}, -\frac{7}{3})$$

- ➢**因$\lambda_j \le 0$, j=1…,5, 故B_1是最优基。**

12.5 单纯形法

■ 4. 计算公式

□五个公式的应用

➢**(5) 因B_2是A中第四列与第二列组成的, x_4、x_2是基变量x_1、x_3、x_5是非基变量，这时有**

$$C_B=(c_4,c_2)=(0,2),\ B^{-1}=\begin{bmatrix}1&3\\0&1\end{bmatrix},C_BB^{-1}=(0,2)$$

$$(\lambda_1,\lambda_3)=(c_1,c_3)-C_BB^{-1}(P_1P_3)$$

$$=(1,1)-(0,2)\begin{bmatrix}2&2\\\frac{1}{3}&5\end{bmatrix}=(\frac{1}{3},-9)$$

➢即

$$\lambda_1=\frac{1}{3},\lambda_3=-9$$

12.5 单纯形法

■ 5. 退化与循环

□基本可行解中存在基变量等于0时，称为退化基本可行解

□【例12-26】求解线性规划

$$\min Z = x_1 + 2x_2 + x_3$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 4 \\ 4x_1 - 9x_2 + 14x_3 = 16 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

➢解 用大M单纯形法，加入人工变量x_4、x_5，构造数学模型

$$\min Z = x_1 + 2x_2 + x_3 + \mathrm{M}x_4 + \mathrm{M}x_5$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 4 \\ 4x_1 - 9x_2 + 14x_3 + x_5 = 16 \\ x_j \geq 0,\ j = 1, \cdots, 5 \end{cases}$$

表12－19

	C_j		1	2	1	M	M	b	θ
	C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
(1)	M	x_4	1	-2	[4]	1	0	4	→ 1
	M	x_5	4	-9	14	0	1	16	8/7
	λ_j		1-5M	2+11M	1-18M↑	0	0	-20M	
(2)	1	x_3	[1/4]	-1/2	1	1/4	0	1	→ 4
	M	x_5	1/2	-2	0	-7/2	1	2	4
	λ_j		3/4-1/2M↑	5/2+2M	0	-1/4+9/2M	0	-1-2M	
(3)	1	x_1	1	-2	4	1	0	4	
	M	x_5	0	[-1]	-2	-4	1	0	→
	λ_j		0	4+M↑	-3+2M	-1+5M	0	-4	
(4)	1	x_1	1	0	8	9	-2	4	
	2	x_2	0	1	[2]	4	-1	0	→
	λ_j		0	0	-11↑	M-17	M-4	-4	
(5)	1	x_1	1	-4	0	1	2	4	
	1	x_3	0	1/2	1	2	-1/2	0	
	λ_j		0	15/2	0	M-17	M-3/2	-4	

12.5 单纯形法

- 5. 退化与循环
  - 【例12-26】求解线性规划
    - 不难看出，表12-19(3)~(5)的右端常数没有发生变化，表12-19(2)的最小比值相同，导致出现退化。
    - 若在表12-19(2)中选x_5出基便得到表 12-19(5)，或在表12-19(3)中选x_3进基也得到表12-19(5)。
    - 表12-19(3)和(5)的最优解从数值上看相同，但它们是两个基本可行解，对应于同一个极点。
    - 表12-19(3)的常数是零，可以选出基行任意非基变量的非零系数作主元素。

12.5 单纯形法

■ 5. 退化与循环

- □单纯形法迭代对于大多数退化解时是有效的，很少出现不收敛的情形.
- □1955年Beale提出了一个用单纯形法计算失效的模型

$$\min Z = -\frac{3}{4}x_1 + 15x_2 - \frac{1}{2}x_3 + 6x_4$$

$$\begin{cases} \frac{1}{4}x_1 - 6x_2 - x_3 + 9x_4 \le 0 \\ \frac{1}{2}x_1 - 9x_2 - \frac{1}{2}x_3 + 3x_4 \le 0 \\ x_3 \le 1 \\ x_j \ge 0, j = 1,2,3,4 \end{cases}$$

12.5 单纯形法

- 5. 退化与循环
  - 加入松弛变量后用单纯形法计算并且按字典序方法（按变量下标顺序）选进基变量，迭代6次后又回到初始表，继续迭代出现了无穷的循环，永远得不到最优解
  - 但该模型的最优解为X＝(1, 0, 1, 0)^T，Z＝-5/4.
  - 实际中几乎不会出现循环现象，如有相同的比值时，还是任意选择出基变量，不必考虑出现循环的后果。

作业-课后练习31

■ 分别用大 M 法和两阶段法求解下列线性规划

（1）$\max Z = 10x_1 - 5x_2 + x_3$

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + x_3 = 10 \\ -5x_1 + x_2 - 10x_3 \le 15 \\ x_j \ge 0,\ j = 1,2,3 \end{cases}$$

（2）$\min Z = 5x_1 - 6x_2 - 7x_3$

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 3x_3 \ge 15 \\ 5x_1 - 6x_2 + 10x_3 \le 20 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ x_j \ge 0,\ j = 1,2,3 \end{cases}$$

作业-课后练习32

■ 已知线性规划的最优基为 $B=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 2 & 5\end{bmatrix}$，试用矩阵公式求：

① 最优解

② 单纯形乘子

③ $\bar{N}_1$和$\bar{N}_3$

④ λ_1 和 λ_3

$$\max Z = 5x_1+8x_2+7x_3+4x_4$$

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2+3x_3+2x_4\le 20 \\ 3x_1+5x_2+4x_3+2x_4\le 30 \\ x_j\ge 0,\ j=1,2,3,4 \end{cases}$$

中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

End