

## Σημειώσεις για Εξετάσεις

### Περιοδικό Σήμα

$\forall t$  και  $\forall k \in \mathbb{N}$ :

$$x(t) = x(t + kT)$$

όπου  $T$  είναι η περίοδος:

Για περιοδικό σήμα διακριτού χρόνου με περίοδο  $N \in \mathbb{N}$  δειγμάτων ισχύει  $\forall n, k \in \mathbb{N}$ :

$$x[n] = x[n + kN]$$

Προσοχή στη διάγνωση της περιοδικότητας σημάτων διακριτού χρόνου. Π.χ. ένα ημίτονο διακριτού χρόνου είναι περιοδικό σήμα μόνο εάν η περίοδος του είναι θετικός ακέραιος αριθμός.

### Περιττό και Άρτιο Σήμα

Κάθε σήμα μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα ενός άρτιου  $x_e(t)$  και ενός περιττού  $x_o(t)$  σήματος.

$$x(t) = x_e(t) + x_o(t)$$

Όπου:

$$x_e(t) = \frac{1}{2}(x(t) + x(-t)) \quad x_o(t) = \frac{1}{2}(x(t) - x(-t))$$

### Σήμα Ενέργειας και Σήμα Ισχύος

Σήμα ενέργειας:  $0 < \mathcal{E}_x < \infty$

Σήμα ισχύος:  $0 < \mathcal{P}_x < \infty$

Ένα σήμα είναι είτε ενέργειας, είτε ισχύος είτε τίποτα από τα δύο.

Σήμα ενέργειας: Πεπερασμένη ενέργεια, μηδενική ισχύ.

Σήμα ισχύος: Πεπερασμένη ισχύς, άπειρη ενέργεια.

### Ενέργεια:

$$\mathcal{E}_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

Ισχύς (Ενέργεια ανά μονάδα χρόνου):

$$\mathcal{P}_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt$$

Όταν το  $x(t)$  περιοδικό με περίοδο  $T_0$ :

$$\mathcal{P}_x = \frac{1}{2T_0} \int_{-T_0}^{T_0} |x(t)|^2 dt$$

## Μιγαδικό Σήμα

Πολική μορφή:

$$x(t) = Ae^{j2\pi f_c t}$$

Με  $|x(t)| = A = \sqrt{x_I^2(t) + x_Q^2(t)}$  και  $\theta(t) = 2\pi f_c t = \tan^{-1} \left( \frac{x_Q(t)}{x_I(t)} \right)$

Με χρήση Ευλερ γίνεται:

$$x(t) = x_I(t) + x_Q(t)$$

Όπου:

$x_I(t) = A \cos(2\pi f_c t)$  η συμφασική συνιστώσα

$x_Q(t) = jA \sin(2\pi f_c t)$  η ορθογώνια συνιστώσα

Μπορούμε να πάρουμε τη συμφασική  $x_I(t)$  και την ορθογώνια  $x_Q(t)$  συνιστώσα κάνοντας χρήση του τύπου  $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$ . Εφαρμόζοντας αυτό στο σήμα  $x(t) = A(t) \cos(2\pi f_c t + \theta(t))$  παίρνουμε:

$$x(t) = \overbrace{A(t) \cos(\theta(t)) \cos(2\pi f_c t)}^{x_I(t)} - \overbrace{A(t) \sin(\theta(t)) \sin(2\pi f_c t)}^{x_Q(t)}$$

## Θόρυβος Σήματος

Ένα ενθόρυβο σήμα:

$$y(t) = x(t) + n(t)$$

Όπου  $n(t)$  είναι ο θόρυβος.

Η ποιότητα του συστήματος μπορεί να καθοριστεί από τον δείκτη απόδοσης συστήματος ΣΝΡ (Σιγναλ το Νοϊσε Ρατιο):

$$\text{ΣΝΡ} = \frac{\overbrace{E[x^2(t)]}^{\text{Ισχύς σήματος}}}{\underbrace{E[n^2(t)]}_{\text{Ισχύς θορύβου}}}$$

## Βασικές Συναρτήσεις και Ορισμοί

### Δ<sup>α</sup> τιμή

Δ<sup>α</sup> τιμή,  $R_s^{DC}$  τιμή ενός σήματος ορίζεται η μέση τιμή του σήματος στο χρόνο:

$$R_s^{DC} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) dt$$

Αν το σήμα είναι περιοδικό:

$$R_s^{DC} = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T s(t) dt$$

### PMΣ τιμή

$$R_s^{RMS} = \sqrt{\mathcal{P}_s}$$

### Διρας

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \infty, & t = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

$$\delta(t) = \delta(-t)$$

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1$$

$$\mathcal{F}\{1\} = \delta(f)$$

$$\mathcal{F}\{e^{-j2\pi f_0 t}\} = \delta(f - f_0)$$

## Χρήσιμος τύπος για χρήση σε ασκήσεις

Μπορεί να χρησιμοποιηθεί για υπολογισμό ολοκληρώματος ισχύος/ενέργειας ή για οτιδήποτε άλλο.

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos(\alpha) \cos(\beta)$$

## Συνέλιξη

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau)x(\tau) d\tau$$

Η συνέλιξη περιγράφει το σύστημα. Σημαίνει ότι πολλαπλασιάζω δύο συναρτήσεις, που τη μία την μετατοπίζω συνέχεια και ολοκληρώνω το αποτέλεσμα. Ικανοποιεί προσεταιριστική και αντιμεταθετική ιδιότητα.

## Συνάρτηση Ετεροσυσχέτισης

Για σήματα ενέργειας:

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t - \tau) dt$$

$$R_{yx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)x^*(t - \tau) dt$$

Ισχύει και η ιδιότητα:

$$R_{xy}(\tau) = x(\tau) * y^*(-\tau)$$

Για σήματα ισχύος:

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)y^*(t - \tau) dt$$

$$R_{yx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y(t)x^*(t - \tau) dt$$

Για περιοδικά σήματα ισχύος:

$$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)y^*(t - \tau) dt$$

$$R_{yx}(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} y(t)x^*(t - \tau) dt$$

Ιδιότητες:

$$R_{xy}(\tau) = R_{yx}^*(-\tau)$$

$$R_{xy}(0) = 0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t) dt = 0$$

Στην περίπτωση που  $R_{xy}(0) = 0$  τα σήματα  $y(t), x(t)$  είναι ορθογώνια.

## Συνάρτηση Αυτοσυσχέτισης

Για σήμα ενέργειας:

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t-\tau) dt$$

Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης χρησιμοποιείται και ως δείκτης της χρονικής μεταβολής του  $x(t)$ .

Η ενέργεια  $x(t)$  προκύπτει ως:

$$\mathcal{E}_x = R_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

Για τις τιμές του  $R_x(\tau)$  αποδεικνύεται ότι:

$$|R_x(\tau)| \leq R_x(0) = \mathcal{E}_x$$

## Σειρά Φουριερ Περιοδικών Σημάτων

Έστω το ακόλουθο σύνολο περιοδικών μιγαδικών σημάτων (ορθογώνια μεταξύ τους):

$$\mathcal{G} \triangleq \{e^{j2\pi k f_0 t}\}_{k=-\infty}^{\infty} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Ανάπτυξη σήματος  $x(t)$  με περίοδο  $T_0 = f_0^{-1}$  σε σειρά Φουριερ.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]e^{j2\pi k f_0 t}$$

$$x[k] = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t} dt \in \mathbb{C}$$

## Σειρά Φουριερ Μη Περιοδικών Σημάτων

$$X(f) \triangleq \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt \in \mathbb{C}$$

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(f)\} = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df$$

Οι συντελεστές της σειράς Φουριερ  $x[k]$  συνδέονται με το μετασχηματισμό Φουριερ ως εξής:

$$x[k] = \frac{1}{T_0} X\left(\frac{k}{T_0}\right)$$

## Θεώρημα Παρσεαλ

Η ισχύς ενός περιοδικού σήματος  $x(t)$ :

$$\mathcal{P}_x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]|^2$$

Η ενέργεια ενός μη περιοδικού σήματος  $x(t)$ :

$$\mathcal{E}_x = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df \left( = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \right)$$

Ο όρος  $|X(f)|^2$  ονομάζεται φασματική πυκνότητα ενέργειας του  $x(t)$ . Η φασματική πυκνότητα ενέργειας ενός σήματος ενέργειας  $x(t)$  με  $X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\}$  προκύπτει ως:

$$\mathcal{F}\{R_x(\tau)\} = |X(f)|^2$$

Για ένα περιοδικό σήμα ισχύος  $x(t)$  η φασματική πυκνότητα ισχύος προκύπτει ως:

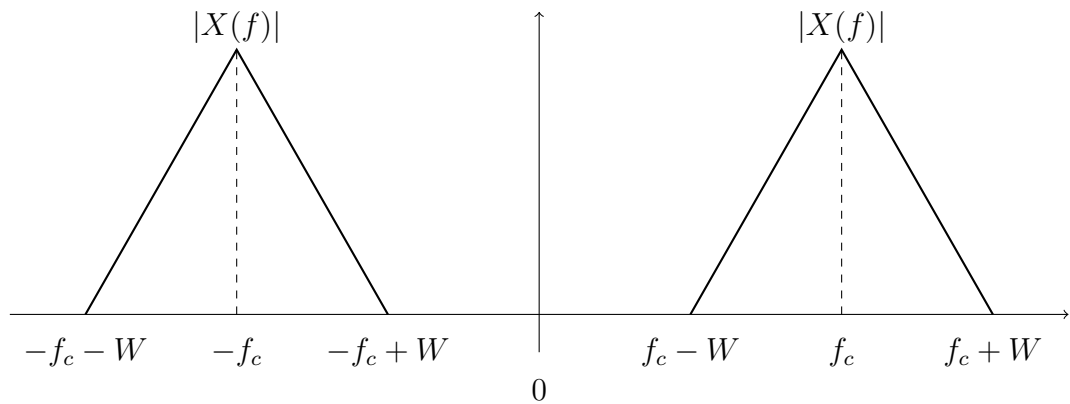
$$S_x(f) \triangleq \mathcal{F}\{R_x(\tau)\}$$

## Ζωνοπερατό Σήμα

Όταν το  $x(t)$  είναι ζωνοπερατό σήμα, το  $X(f)$  είναι συγκεντρωμένο γύρω από τη συχνότητα  $f_c$ .

$$X(f) = 0, \quad |f - f_c| \geq W$$

Αν  $W \ll f_c$  ονομάζεται σήμα στενής ζώνης.



## Σήμα Βασικής Ζώνης

Ένα σήμα βασικής ζώνης  $x(t)$  έχει το φάσμα του  $X(f)$  συγκεντρωμένο γύρω από τη μηδενική συχνότητα, δηλαδή  $X(f) = 0$ ,  $|f| \geq W$ .

## Μιγαδική Περιβάλλουσα

Κάθε φυσικά υλοποιήσιμο (πραγματικό) ζωνοπερατό σήμα μπορεί να γραφεί ως:

$$x(t) = \Re\{g(t)e^{j2\pi f_c t}\}$$

Το σήμα  $g(t)$  είναι το μιγαδικό σήμα πληροφορίας βασικής ζώνης ή το ισοδύναμο χαμηλοπερατό σήμα του  $x(t)$  ή η μιγαδική περιβάλλουσα.

$$g(t) = \overbrace{x_p(t)}^{\text{Προ-περιβάλλουσα}} e^{-j2\pi f_c t}$$

Έστω η ΙΧ αναπαράσταση το  $g(t)$ :

$$g(t) = x_I(t) + jx_Q(t)$$

Τότε προκύπτει:

$$x(t) = \Re\{g(t)e^{j2\pi f_c t}\} = x_I(t) \cos(2\pi f_c t) - x_Q(t) \sin(2\pi f_c t)$$

## Πολική Μορφή

$$\begin{aligned} g(t) &= V(t)e^{j\theta(t)} \\ V(t) &= \sqrt{x_I^2(t) + x_Q^2(t)} \\ \theta(t) &= \tan^{-1} \left( \frac{x_Q(t)}{x_I(t)} \right) \end{aligned}$$

## Διαμόρφωση

Ένα διαμορφωμένο κατά πλάτος σήμα AM έχει μιγαδική περιβάλλουσα:

$$g(t) = V(t) = A_c + m(t)$$

Με:

$$x_I(t) = A_c + m(t)$$

$$x_Q(t) = 0$$

## Τυχαίες Διαδικασίες ή Στοχαστικές Διαδικασίες

### Στασιμότητα Τυχαίων Διαδικασιών

#### Αυστηρά Στάσιμη (ΣΣΣ)

Η ΤΔ  $X(t)$  είναι αυστηρά στάσιμη αν  $\forall \tau$  οι ΤΔ  $X(t)$  και  $X(t + \tau)$  έχουν την ίδια στατιστική:

$$f_{X(t)}(\mathbf{a}) = f_{X(t+\tau)}(\mathbf{a})$$

#### Στάσιμη Υπό την Ευρεία Έννοια (ΩΣΣ)

Μια ΤΔ  $X(t)$  λέγεται στάσιμη υπό την ευρεία έννοια αν:

$$m_X(t) = m_X \quad \forall t$$

$$R_X(t_i, t_j) = R_X(t_i - t_j) = R_X(\tau)$$

Δηλαδή, η μέση τιμή της  $X(t)$  είναι σταθερή  $\forall t$  και η ΣΑΣ της εξαρτάται μόνο από τη διαφορά των δειγματοληπτημένων χρόνων και όχι από κάθε ζεύγος χρονικών στιγμών χωριστά.

Η αυτοσυνδιακύμανση είναι επίσης συνάρτηση μόνο της χρονικής μετατόπισης  $\tau$ , δηλαδή:

$$C_X(\tau) \triangleq C_X(t, t + \tau) = R_X(\tau) - m_X^2$$

Όταν μια ΤΔ είναι στάσιμη υπό την αυστηρή έννοια τότε είναι και στάσιμη υπό την ευρεία έννοια, το αντίστροφο δεν ισχύει.

## Φασματική Πυκνότητα Ισχύος

Δείχνει την κατανομή της ισχύος στις συχνότητες του σήματος. Προκύπτει από τον ΜΦ της ΣΑΣ του σήματος.



Για μία στάσιμη ΤΔ (ΣΣΣ ή ΩΣΣ), ορίζεται ως:

$$S_X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

$$R_X(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f) e^{j2\pi f\tau} df$$

## Φίλτρο

Έστω ότι η ΩΣΣ ΤΔ  $X(t)$  διέρχεται από ένα φίλτρο ΓΧΑ με κρουστική απόκριση  $h(t)$ .

Ισχύει για τη ΩΣΣ ΤΔ  $Y(t)$  της εξόδου:

$$Y(t) = X(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

Η αυτοσυσχέτιση της εξόδου:

$$R_Y(\tau) = E[Y(t)Y(t + \tau)]$$

Ισχύει επίσης:

$$R_Y(\tau) = R_X(\tau) * h(\tau) * h(-\tau)$$

## Τυχαίες Μεταβλητές

### Εργοδικότητα ως προς τη Μέση Τιμή

Όταν οι χρονικές μέσες τιμές των ΤΜ είναι ίσες μεταξύ τους:

$$E[X(t_i)] = m, \quad \forall i$$

### Εργοδικότητα ως προς την Αυτοσυσχέτιση

Όταν οι χρονικές αυτοσυσχετίσεις είναι ίσες μεταξύ τους:

$$R_{X(t_i)}(\tau) = r, \quad \forall i$$

## Σημαντικότητα

Η εργοδικότητα είναι πολύ σημαντική ιδιότητα διότι παρατηρώντας το  $X(t_i)$  για ένα  $t_i$  προκύπτει πληροφορία για ολόκληρη την ΤΔ  $X(t)$ .

## Λευκός Θόρυβος

### ΦΠ Λευκού Θορύβου

$$S_N(f) = \frac{N_0}{2}, \quad f \in (-\infty, \infty)$$

## Φίλτρα

Συνήθως, πρόκειται για σύστημα που ακυρώνει κάποιες από τις συχνότητες του σήματος εισόδου του επιτρέποντας τη διέλευση κάποιων άλλων.

### Βαθυπερατό Φίλτρο

### Υψιπερατό Φίλτρο

### Φίλτρο Απόρριψης Ζώνης

### Ζωνοπερατό Φίλτρο

## Περιοχές Συχνοτήτων στα Φίλτρα

Η περιοχή συχνοτήτων στην οποία επιτρέπεται η διέλευση αποτελεί τη ζώνη διέλευσης (πασσβανδ) του φίλτρου. Εκεί που ΔΕΝ επιτρέπεται η διέλευση ονομάζεται ζώνη απόκριψης ή ζώνη αποκοπής (στοπβανδ) του φίλτρου.

## Μπλόκ Διάγραμμα Δέκτη

$$\text{ΑΝΑ} = \text{Λοω Νοισε Αμπλιφιερ}$$

Το πρώτο ζωνοπερατό φίλτρο ξεφορτώνεται συχνότητες ανεπιθύμητες.

Ο πρώτος μίκτης συνδυάζει την είσοδο με το σήμα του τοπικού ταλαντωτή για να φέρουμε το σήμα στην επιθυμητή συχνότητα. Ο τοπικός ταλαντωτής χρησιμοποιείται και για συγχρονισμό.

Το στενό φάσμα καθαρίζει τη μίξη.

Ο δεύτερος ενισχυτής ενισχύει μετά το καθαρίσμα. Στην έξοδο του δεύτερου ενισχυτή:  $f_1 = \frac{I_{out}}{M}$

## Διαμόρφωση Πλάτους (ΑΜ)

### Συμβατικό ΑΜ

Αν  $m(t)$  είναι το σήμα πληροφορίας, τότε το διαμορφωμένο σήμα  $x(t)$  έχει τη μορφή:

$$x(t) = (A_c + m(t)) \cos(2\pi f_c t)$$

$A_c$  και  $f_c$  υποδηλώνουν το πλάτος και τη συχνότητα του φέροντος, το οποίο γενικώς έχει τη μορφή:

$$c(t) = A_c \cos(2\pi f_c t)$$

Από τον ορισμό του ζωνοπερατού σήματος  $x(t)$  και της μιγαδικής περιβάλλουσας  $g(t)$  ισχύει:

$$x(t) = \underbrace{A_c + m(t)}_{g(t) \triangleq V(t)e^{j\theta(t)} = x_I(t) + jx_Q(t)} \cos(2\pi f_c t)$$

Από όπου προκύπτει ότι:

$$x_I(t) = A_c + m(t), \quad x_Q(t) = 0$$

$$V(t) = \sqrt{x_I^2(t) + x_Q^2(t)} = |A_c + m(t)|$$

$$\theta(t) = \tan^{-1} \left( \frac{x_Q(t)}{x_I(t)} \right) = 0$$

Το  $V(t)$  ( $\equiv g(t)$ ) του  $x(t)$  περιέχει την επιθυμητή πληροφορία.

### Υπερδιαμόρφωση (AM)

Όταν ισχύει  $x_I(t) = A_c + m(t) < 0$  εμφανίζεται το φαινόμενο της υπερδιαμόρφωσης, δηλαδή παραμορφώνεται η περιβάλλουσα του  $x(t)$ . Στην περίπτωση αυτή, η περιβάλλουσα του  $x(t)$  δε μεταβάλλεται σύμφωνα με το  $m(t)$  (σκοπός επιθυμητής διαμόρφωσης), οδηγώντας σε μη αξιόπιστη ανίχνευση του  $m(t)$  στο δέκτη (στην περίπτωση δέκτη ασύμφωνης αποδιαμόρφωσης). Πρακτικά, όταν ισχύει  $x_I(t) = A_c + m(t) < 0$ , η πληροφορία μεταφέρεται ανεστραμμένη.

$$\mu = 2$$

### Υποδιαμόρφωση

$$\mu = 0.5$$

### Τέλεια Διαμόρφωση

$$\mu = 1$$

## Δείκτης Διαμόρφωσης

$$\mu = \frac{|\min m(t)|}{A_c}$$

Για να αποφευχθεί το φαινόμενο της υπερδιαμόρφωσης πρέπει:

$$A_c + \min m(t) \geq 0$$

Για  $\min m(t) > 0$  δεν υφίσταται ενδεχόμενο υπερδιαμόρφωσης μιας και  $A_c > 0$ .

Για  $\min m(t) < 0$  θα πρέπει να ισχύει για το  $\mu$ :

$$\mu \leq 1$$

## Φασματικό Περιεχόμενο Σήματος AM

Έστω το φασματικό περιεχόμενο του σήματος πληροφορίας  $m(t)$ :  $B = W$ , όχι  $2W$

Το φασματικό περιεχόμενο του διαμορφωμένου κατά AM σήματος (κάνοντας ΜΦ  $X(f) = \mathcal{F}\{(A_c + m(t)) \cos(2\pi f_c t)\}$ ) θα είναι:

Το εύρος ζώνης του  $x(t)$ :  $f_c + W - (f_c - W) = 2W$ .

Η διαδικασία της διαμόρφωσης διπλασιάζει το βανδωίδτη.

## Παραμόρφωση

Όταν το  $f_c < W$ , οι δύο πλευρές του φάσματος  $X(f)$  επικαλύπτονται.

Για την αποφυγή αυτού του φαινομένου στην πράξη χρειάζεται  $f_c \gg W$ .

## Ημιτονοειδές Σήμα Πληροφορίας

Έστω το σήμα πληροφορίας:  $m(t) = a \cos(2\pi f_m t)$ ,  $f_m \ll f_c$ . Το διαμορφωμένο σήμα προκύπτει:  $x(t) = (A_c + a \cos(2\pi f_m t)) \cos(2\pi f_c t)$ . Το αρχικό εύρος ζώνης είναι  $f_m - 0 = W$ . Το εύρος ζώνης του διαμορφωμένου είναι:  $(f_c + f_m) + (f_c - f_m) = 2f_m = 2W$ .

## Άνω Πλευρική Ζώνη

$$|f| > f_c$$

## Κάτω Πλευρική Ζώνη

$$|f| < f_c$$

## Ισχύς Σήματος AM

Έστω η περιβάλλουσα του  $x(t)$ :  $V(t) = |A_c + m(t)|$ .

Αν  $S_V(f)$  είναι η ΦΠΠ του  $V(t)$ , η ΦΠΠ του  $x(t) = V(t) \cos(2\pi f_c t)$  προκύπτει ως:

$$S_x(f) = \frac{1}{4}(S_V(f - f_c) + S_V(f + f_c))$$

Η ισχύς του  $x(t)$  προκύπτει ως:

$$\mathcal{P}_x = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) df = \dots = \frac{\mathcal{P}_V}{2}$$

Αν η  $\Delta^\circ$  τιμή του  $m(t)$  είναι μηδενική  $R_m^{\Delta^\circ} \triangleq 0$  τότε προκύπτει:

$$\mathcal{P}_x = \frac{A_c^2}{2} + \frac{\mathcal{P}_m}{2}$$

$$\mathcal{P}_V = \mathcal{P}_{A_c} + \mathcal{P}_m$$

## Συντελεστής Απόδοσης Ισχύος $\eta$

Έστω το σήμα πληροφορίας:

$$m(t) = \alpha \cos(2\pi f_m t) \Rightarrow \mathcal{P}_m = \frac{\alpha^2}{2}$$

Ο συντελεστής απόδοσης ισχύος ορίζεται ως:

$$\eta = \frac{\mathcal{P}_m}{\mathcal{P}_V} = \frac{\mathcal{P}_m}{A_c^2 + \mathcal{P}_m}$$

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα μπορούμε να καταλήξουμε και στο:

$$\eta = \frac{\mu^2}{2 + \mu^2}$$

Για  $\mu = 1$  έχουμε 33.3% απόδοση. Για  $\mu \rightarrow \infty$  έχουμε αύξηση της απόδοσης. Για  $\mu > 1$  το σήμα πληροφορίας έχει μεγαλύτερη ισχύ από το σήμα του φέροντος. ΔΕΝ το θέλουμε αυτό.

## Διαμορφωτής AM

Τάση εισόδου του κυκλώματος:

$$V_1(t) = m(t) + A_c \cos(2\pi f_c t)$$

Τάση εξόδου:

$$V_2(t) = d_1 V_1(t) + d_2 V_1^2(t) + \dots$$

Αν συνεχίσουμε τις πράξεις, στο άθροισμα θα υπάρχει η έκφραση:

$$2d_2 A_c \cos(2\pi f_c t) \left( \frac{d_1}{2d_2} + m(t) \right)$$

Για να απομονωθεί ο όρος αυτός από το  $V_2(t)$  χρησιμοποιείται ένα ζωνοπερατό φίλτρο με κεντρική συχνότητα  $f_c$  και εύρος ζώνης  $2W$ . Για να αποφύγουμε την παραμόρφωση (να απομακρυνθεί ο όρος  $d_2 m^2(t)$  που δημιουργείται στο άθροισμα), θα χρειάζεται να ισχύει  $f_c > 3W$ .

## Τεχνικές Αποδιαμόρφωσης

### Σύμφωνη

Γίνεται συγχρονισμός με τη φάση του φέροντος

- Ακρίβεια - κόστος κυκλωμάτων.
- Αποδιαμορφώνει κάθε AM σήμα.

### Ασύμφωνη

Δεν χρειάζεται γνώση της φάσης

- Φτηνή
- Δεν αποδιαμορφώνει τα πάντα (μόνο AM με συνολικό φέρον).

Στον ασύμφωνο αποδιαμορφωτή AM, όσο η περιβάλλουσα αυξάνεται η διόδος άγει και ο πυκνωτής φορτίζεται.

Ο ασύμφωνος αποδιαμορφωτής:

- Επιτυγχάνεται με τον ανιχνευτή περιβάλλουσας.
- Κοντά στην άνοδο της τάσης  $V_w \equiv x(t)$  σε μία θετική ημιπερίοδο.
- Η θετικά πολωμένη διόδος άγει και ο πυκνωτής φορτίζεται ως τη μέγιστη τιμή του.

- Όταν η τάση  $V_w(t)$  αρχίζει να λαμβάνει τιμές κάτω από τη μέγιστη τιμή:
- Η δίοδος πολώνεται αντίστροφα και σταματά να άγει. Αυτό συμβαίνει διότι η τάση στα άκρα είναι μεγαλύτερη από την τάση εισόδου.
- Ο πυκνωτής εκφορτίζεται με αργό ρυθμό μέσω της αντίστασης  $R$  σύμφωνα με τη σταθερά  $\tau = RC$ :  $V_{out}(t) = Ve^{-\frac{t}{\tau}} \approx V(1 - \frac{t}{\tau})$
- Η εκφόρτωση του πυκνωτή μεταξύ των θετικών κορυφών του  $V_w \equiv x(t)$  οδηγεί σε ριππλε.
- Αν το  $\tau$  πολύ μεγάλο: Αναξιόπιστη ανίχνευση, ο πυκνωτής αδυνατεί να παρακολουθήσει το  $V(t)$ .

- Γενικά πρέπει να ισχύει: 
$$W < \underbrace{\frac{1}{\tau}}_{f_c} \ll$$
  
Ο ρυθμός εκφόρτισης να είναι μεγαλύτερος από το ρυθμό μεταβολής της περιβάλλουσας

- Δεν ξεχνάμε το σκοπό: ΝΑ ΑΝΤΛΗΣΟΥΜΕ ΤΗΝ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΥΣΑ
- Απομάκρυνση του  $A_c$ : Ως σταθερός όρος έχει άπειρη περίοδο, άρα μηδενική συχνότητα:  $\frac{1}{\infty} = 0 \iff \frac{1}{\tau} = f$ .

## Διαμόρφωση AM - Οεριεω

- Με υπερδιαμόρφωση δεν μπορεί να γίνει κάτι χρησιμοποιώντας ασύμφωνο αποδιαμορφωτή.
- Ισχύς διαμορφωμένου:  $\mathcal{P}_x = \frac{A_c^2}{2} + \frac{P_m}{2}$
- Βασεβανδ  $\Rightarrow$  Πασσβανδ
- $f_c \gg W$  στον Διαμορφωτή Διόδου AM
- Το αν θα επιλέξουμε σύμφωνη ή ασύμφωνη διαμόρφωση εξαρτάται από το αν βρίσκουμε τη φάση και πηγαίνουμε με βάση αυτή.
- Σύμφωνη: Πολλαπλασιάζω με ένα φέρον που έχει τη σωστή φάση και ξεφορτώνομαι τις περιττές συχνότητες.
- Ασύμφωνη: Παρακολουθώ την περιβάλλουσα.
- Στον σύμφωνο αποδιαμορφωτή δεν έχουμε υπερδιαμόρφωση και δεν εμφανίζεται το πρόβλημα του αργού πυκνωτή. Όμως, είναι πιο περίπλοκος.

## Παραλλαγές Διαμόρφωσης ΑΜ

### Δουβλε-Σιδε Βανδ ωιτη Συμπρεσσεδ ἄρριερ (ΔΣΒ-ΑΜ-Σ<sup>α</sup>)

$$x(t) = A_c m(t) \cos(2\pi f_c t)$$

Το αποτέλεσμα αυτό αν περαστεί από ανιχνευτή περιβάλλουσα δεν μπορεί να αντλήσει το σήμα πληροφορίας διότι το αποτέλεσμα αυτό είναι η απόλυτη τιμή του σήματος πληροφορίας. Άρα, αν και δεν έχουμε αλλοίωση, τα αρνητικά γίνονται θετικά. Συνεπώς, χρειάζομαι και τη φάση για να προσδιορίζω αν είμαι σε ανεστραμμένο κομμάτι και πως να τα διαχειριστώ συνολικά.

Ο ΜΦ διαμορφωμένου κατά ΔΣΒ-ΑΜ-Σ<sup>α</sup> σήματος  $x(t)$ :

$$X(f) = \frac{A_c}{2} (M(f - f_c) + M(f + f_c))$$

Η ισχύς:

$$\mathcal{P}_x = \frac{A_c^2}{2} \mathcal{P}_m$$

Για το συντελεστή απόδοσης ισχύος ισχύει:  $\eta = 1$  Το βανδωιδτη είναι ακόμα  $2W$  (οπότε έχουμε σπατάλη).

Ο συνηθέστερος διαμορφωτής για ΔΣΒ-ΑΜ-Σ<sup>α</sup> είναι ο ισοσταθμισμένος διαμορφωτής.

### Σινγλε-Σιδε Βανδ - ΑΜ (ΣΣΒ-ΑΜ)

Σκοπός είναι να μειώσει το εύρος ζώνης και να μην έχουμε σπατάλη. Άνω κλάδος:

$$x_1(t) = A_c m(t) \cos(2\pi f_c t)$$

Κάτω κλάδος:

$$x_2(t) = A_c \widehat{m(t)} \sin(2\pi f_c t)$$

Με:

$$\widehat{m(t)} = \mathcal{H}\{m(t)\} = m(t) * h(t)$$

Τέλος, προστίθενται τα  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  για τη δημιουργία του σήματος ΛΣΣΒ-ΑΜ ή αφαιρούνται για τη δημιουργία του σήματος ΥΣΣΒ-ΑΜ.

Αποδεικνύεται ότι:

$$X(f) = A_c \begin{cases} M(f - f_c), & f > f_c \\ 0, & f < f_c \end{cases} + A_c \begin{cases} 0, & f > -f_c \\ M(f + f_c), & f < -f_c \end{cases}$$

Η ισχύς του  $x(t)$  είναι:

$$\mathcal{P}_x = A_c^2 \mathcal{P}_m$$



Ομοίως για διαμόρφωση ΛΣΣΒ-ΑΜ:

$$X(f) = A_c \begin{cases} 0, & f > f_c \\ M(f - f_c), & f < f_c \end{cases} + A_c \begin{cases} M(f + f_c), & f > -f_c \\ 0, & f < -f_c \end{cases}$$

Άρα αυτό που στέλνω θα έχει βανδωιδτη  $W$ . Η αποδιαμόρφωση είναι σύμφωνη, αφού γνωρίζουμε τέλεια τη φάση. Με τη χρήση κατάλληλου χαμηλοπερατού φίλτρου απομακρύνονται τα σήματα με συχνότητα:  $2f_c$ . ( $2f_c > f_c \gg$  Συχνότητα που έχει το σήμα).

## ΉΣΒ-ΑΜ

Καταργεί ένα μέρος της πλευρικής ζώνης και όχι ολόκληρη, δε δημιουργεί πρόβλημα στις χαμηλές συχνότητες του σήματος πληροφορίας. Καλύτερη φασματική απόδοση από το ΔΣΒ-ΑΜ-Σ", αλλά χειρότερη από το ΣΣΒ-ΑΜ.

## Διάταξη Διαμόρφωσης ΉΣΒ-ΑΜ

Χρησιμοποιείται φίλτρο ΉΣΒ όπου για  $K$  μια σταθερά:

$$H_v(f + f_c) + H_v(f - f_c) = K$$

Φάσμα διαμορφωμένου κατά ΉΣΒ-ΑΜ σήματος:

$$X(f) = \frac{A_c}{2} (M(f + f_c) + M(f - f_c)) H_v(f)$$

## Διαμόρφωση ΠΜ ή ΦΜ

Η διαμόρφωση γωνίας υπερτερεί της διαμόρφωσης ΑΜ στην ποιότητα του σήματος πληροφορίας καθώς επηρεάζεται λιγότερο από πηγές θορύβου.

Το διαμορφωμένο κατά ΠΜ ή ΦΜ σήμα ορίζεται ως:

$$x(t) = A_c \cos(\theta(t))$$

Με:

$$\theta(t) \triangleq 2\pi f_c t + \phi(t), \quad \phi(t) \triangleq f(m(t))$$

Αν μας δίνεται ο δείκτης διαμόρφωσης  $\beta$  μπορούμε να πούμε:

$\theta_i(t) = 2\pi f_c t + \beta \sin(2\pi f_m t)$ , με  $f_m$  η συχνότητα του σήματος που θέλουμε να διαμορφώσουμε

Στιγμιαία συχνότητα:

$$f_i(t) \triangleq \frac{1}{2\pi} \frac{d\theta(t)}{dt} = f_c + \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi(t)}{dt}$$

Με (στη διαμόρφωση φάσης μόνο):

$$\phi(t) = K_p m(t)$$

Όπου το  $K_p$  ονομάζεται ευαισθησία φάσης με μονάδα μέτρησης ραδιανς/όλτ.

Ο δείκτης διαμόρφωσης  $\beta_p$  εκφράζει τη μέγιστη μετατόπιση της φάσης στο διαμορφωμένο σήμα  $x(t)$ :

$$\beta_p \triangleq \Delta\phi_{\max} = K_p \max |m(t)|$$

Στη διαμόρφωση ΦΜ ο ρυθμός μεταβολής της φάσης μεταβάλλεται γραμμικά με το  $m(t)$  μέσω μιας σταθεράς  $K_f$  που ονομάζεται ευαισθησία συχνότητας της διαμόρφωσης με μονάδα μέτρησης το Ηζ/όλτ.

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = 2\pi K_f m(t)$$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της στιγμιαίας συχνότητας προκύπτει ότι:

$$f_i(t) = f_c + K_f m(t)$$

Από τον ορισμό του ρυθμού μεταβολής της φάσης προκύπτει ότι:

$$\phi(t) = 2\pi K_f \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau$$

Αν  $W$  είναι το εύρος ζώνης του  $m(t)$ , ο δείκτης διαμόρφωσης  $\beta_f$  εκφράζει τη μέγιστη μεταβολή της στιγμιαίας συχνότητας από την κεντρική συχνότητα  $f_c$ , κανονικοποιημένη ως προς το  $W$ :

$$\beta_f \triangleq \frac{\Delta f_{\max}}{W} = \frac{K_f \max |m(t)|}{W}$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta)$$

Το διαμορφωμένο κατά γωνία σήμα προκύπτει ως:

$$x(t) \triangleq \underbrace{A_c \cos(\phi(t))}_{x_I(t)} \cos(2\pi f_c t) - \underbrace{A_c \sin(\phi(t))}_{x_Q(t)} \sin(2\pi f_c t)$$

Ανάλογα με το είδος της διαμόρφωσης:

$$\phi(t) = \begin{cases} K_p m(t), & \text{PM} \\ 2\pi K_f \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau, & \text{FM} \end{cases}$$

Από τις  $x_I(t)$  και  $x_Q(t)$  προκύπτει ότι:

$$V(t) = \sqrt{x_I^2(t) + x_Q^2(t)} = A_c \quad \text{δεν εμπεριέχεται το } m(t)$$

$$\tan^{-1} \left( \frac{x_Q(t)}{x_I(t)} \right) = \tan^{-1}(\tan(\phi(t))) = \phi(t)$$

Η ισχύς του διαμορφωμένου κατά ΠΜ/ΦΜ σήματος  $x(t)$ :

$$\mathcal{P}_x^{PM} = \mathcal{P}_x^{FM} = \frac{A_c^2}{2}$$

Αν σε διαμορφωτή ΠΜ εισαχθεί το χρονικό ολοκλήρωμα του  $m(t)$ , τότε προκύπτει το διαμορφωμένο σήμα:

$$x(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + K_p \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau)$$

Για  $K_p = 2\pi K_f$  προκύπτει η διαμόρφωση ΦΜ:

$$x(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + 2\pi K_f \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau)$$

Αντιστρόφως, αν σε διαμορφωτή ΦΜ εισαχθεί η χρονική παράγωγος του  $m(t)$ , τότε προκύπτει το διαμορφωμένο σήμα:

$$x(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + 2\pi K_f \int_{-\infty}^t \frac{dm(\tau)}{d\tau} d\tau)$$

Για  $K_f = \frac{K_p}{2\pi}$  προκύπτει η διαμόρφωση ΦΜ:

$$x(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + K_p m(t))$$

**Για διαμόρφωση ΠΜ και ΦΜ, το ενεργό εύρος ζώνης ορίζεται:**

$$B = 2W(\beta + 1) \text{ με } \beta = \beta_p \text{ ή } \beta_f$$

$\beta$  ορίζεται ο δείκτης διαμόρφωσης.

Διακρίνουμε τη διαμόρφωση σε διαμόρφωση στενής (NB) και ευρείας ζώνης (WB). Εξαρτάται από το  $\beta$ . Αν  $\beta \ll 1$  τότε είναι στενής ζώνης, αλλιώς ευρείας ζώνης.

## Εύρεση ΩΒΦΜ σήματος

Το διαμορφωμένο κατά ΩΒΦΜ σήμα γράφεται:

$$x(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + \beta_f \sin(2\pi f_m t)) = \Re\{A_c e^{j(2\pi f_c t + \beta_f \sin(2\pi f_m t))}\} = \Re\{\underbrace{A_c e^{j\beta_f \sin(2\pi f_m t)}}_{=g(t)} e^{j2\pi f_c t}\}$$

Η μιγαδική περιβάλλουσα  $g(t)$  είναι περιοδική συνάρτηση με περίοδο  $T_m = \frac{1}{f_m}$ , συνεπώς, δύναται να αναπτυχθεί σε σειρά Φουριερ.

Το ανάπτυγμα σε σειρά Φουριερ της  $g(t)$ :

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n e^{jn2\pi f_m t}$$

Με:

$$g_n = A_c J_n(\beta_f)$$

$$J_n(\beta_f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j(\beta_f \sin(x) - nx)} dx$$

Άρα η μιγαδική περιβάλλουσα εκφράζεται ως:

$$g(t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta_f) e^{jn2\pi f_m t}$$

Οπότε το διαμορφωμένο σήμα θα είναι:

$$\begin{aligned} x(t) &= A_c \Re \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta_f) e^{jn2\pi f_m t} e^{j2\pi f_c t} \right\} \\ &= A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta_f) \Re \{ e^{j2\pi(f_c + n f_m)t} \} \\ &= A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta_f) \cos(2\pi(f_c + n f_m)t) \end{aligned}$$

Το αποτέλεσμα είναι ΣΟΣ. Θα προκύψει το ίδιο αποτέλεσμα στην περίπτωση διαμόρφωσης ΠΜ με  $m(t) = \alpha \sin(2\pi f_c t)$  και  $K_p = 2\pi K_f$ .

Το φάσμα του διαμορφωμένου κατά ΩΒΦΜ σήματος είναι φαινομενικά άπειρο. Ισχύει, όμως, ότι η περιβάλλουσα του  $J_n(\beta_f)$  φθίνει για κάθε σταθερή τιμή  $n$ . Για  $n > \beta_f$  η τιμή του  $J_n(\beta_f)$  είναι σχεδόν ίση με το μηδέν.

Ισχύει η ιδιότητα:

$$J_{-n}(\beta_f) = \begin{cases} J_n(\beta_f), & n \text{ άρτιος} \\ -J_n(\beta_f), & n \text{ περιττός} \end{cases}$$

Το ενεργό εύρος ζώνης διαμόρφωσης γωνίας ορίζεται:

$$B = 2f_m(\beta + 1) = \begin{cases} 2f_m(K_p\alpha + 1), & \text{PM} \\ 2f_m\left(\frac{K_f\alpha}{f_m}\right) + 1, & \text{FM} \end{cases}$$

Ο αριθμός των αρμονικών (δηλαδή των συνιστωσών  $A_c J_n(\beta_f) \delta(f \pm (f_c + n f_m))$ ) στο φάσμα του  $x(t)$  που εμφανίζονται στις θετικές του συχνότητες) που περιέχονται στο ενεργό εύρος ζώνης του  $x(t)$  προκύπτει ως:

$$N = \begin{cases} 2 \lfloor K_p\alpha \rfloor + 3, & \text{PM} \\ 2 \left\lfloor \frac{K_f\alpha}{f_m} \right\rfloor + 3, & \text{FM} \end{cases}$$

## Τεχνικές Διαμόρφωσης

### Άμεση Διαμόρφωση

Χρησιμοποιείται ταλαντωτής (°Ο) ο οποίος παράγει σήματα των οποίων η στιγμιαία συχνότητα μεταβάλλεται με τον επιθυμητό τρόπο.

Έστω ότι η είσοδος του °Ο είναι το σήμα  $m(t)$ . Τότε, η στιγμιαία συχνότητα της εξόδου του ταλαντωτή είναι:

$$f_i(t) = f_c + K m(t)$$

Όπου:

$f_c$  : Ονομαστική συχνότητα εξόδου του °Ο που αντιστοιχεί σε μηδενική τάση εισόδου. Πρόκειται γ

$K$  : Σταθερά που εξαρτάται από το °Ο.

Το σήμα εξόδου του °Ο είναι ένα διαμορφωμένο κατά ΦΜ σήμα:

$$x(t) = A_c \cos \left( 2\pi f_c t + 2\pi K \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau \right)$$

## Έμμεση Διαμόρφωση

Για την υλοποίηση του διαμορφωτή ΩΒΦΜ υλοποιείται πρώτα η διαμόρφωση ΝΒΦΜ η οποία έπειτα μετατρέπεται σε ευρείας ζώνης.

Ακολουθεί τα παρακάτω έξι βήματα:

1. Η διαμόρφωση ΝΒΦΜ επιτυγχάνεται χρησιμοποιώντας κύκλωμα διαμόρφωσης ΔΣΒ-ΑΜ-Σ<sup>+</sup>:

$$x_{NB\Phi M}(t) = A_c \cos(2\pi f_0 t + \beta_f \sin(2\pi f_m t))$$

Όπου  $f_0$  είναι μία αρχική συχνότητα.

2. Πολλαπλασιασμός συχνότητας με παράγοντα  $n_1$ :

$$x(t) = A_c \cos(n_1 2\pi f_0 t + n_1 \beta_f \sin(2\pi f_m t))$$

3. Στην έξοδο του μίκτη έχει πραγματοποιηθεί ετεροδύνωση, δηλαδή συχνοτική μετακίνηση του  $x(t)$  στη νέα συχνότητα  $f_{IF} = n_1 f_0 + f_1$ :

$$x(t) = A_c \cos(2\pi f_{IF} t + n_1 \beta_f \sin(2\pi f_m t))$$

4. Μετά γίνεται πάλι πολλαπλασιασμός συχνότητας με έναν παράγοντα  $n_2$ :

$$x(t) = A_c \cos(n_2 2\pi f_{IF} t + n_1 n_2 \beta_f \sin(2\pi f_m t))$$

5. Το τελικά διαμορφωμένο κατά ΩΒΦΜ σήμα έχει συχνότητα  $f_c \triangleq n_2(n_1 f_0 + f_1)$  και δείκτη διαμόρφωσης  $\beta_{f_{WB}} \sin(2\pi f_m t)$

6. Το ζωνοπερατό φίλτρο βοηθά την απομάκρυνση συχνοτήτων που δημιουργήθηκαν από τα μη γραμμικά στοιχεία:

$$x(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + \beta_{f_{WB}} \sin(2\pi f_m t))$$

## Αποδιαμόρφωση

Χρησιμοποιείται ανιχνευτής περιβάλλουσας με είσοδο  $y(t)$  που μπορεί να ανακτηθεί το αρχικό σήμα.

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

Απαραίτητη προϋπόθεση το  $A_c$  να είναι χρονικά αμετάβλητο.

## Μετατροπή Αναλογικού σε Ψηφιακό

Σήμα διακριτού χρόνου:

$$m[n] \triangleq m_s(nT_s)$$

## Θεώρημα - Κριτήριο Νψχυστ

Έστω το σήμα βασικής ζώνης  $m(t)$  για το οποίο ισχύει:

$$M(f) = 0, |f| > W$$

Αν  $m[n] = m(nT_s)$  είναι τα δείγματα του  $m(t)$  τα οποία λαμβάνει με συχνότητα  $f_s = T_s^{-1}$ , τότε είναι δυνατή η ακριβής ανάκτηση του  $m(t)$  από τα δείγματα  $m(nT_s)$ , αν ισχύει:

$$T_s = \frac{1}{f_s} \leq \frac{1}{2W} \Rightarrow f_s \geq 2W$$

Το δειγματοληπτημένο σήμα  $m_s(t)$  ορίστηκε ως:

$$m_s(t) = m(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$$

είναι συνεχές!

## Φάσμα

Το φάσμα του  $m_s(t)$  αποτελείται από άπειρα αντίγραφα του  $M(f)$ , καθένα από τα οποία είναι μετατοπισμένο κατά πολλαπλάσια του  $f_s$ .

Όταν δεν πληρείται το κριτήριο του Νψχυστ, αυτά τα πολλαπλά αντίτυπα έχουν οερλαπ.

## Ανακατασκευή Αναλογικού Σήματος

Ένας τρόπος ανακατασκευής είναι με χρήση χαμηλοπερατού φίλτρου εύρους ζώνης  $W_I$  που ικανοποιεί τη σχέση:

$$W \leq W_I \leq f_s - W$$

Οποιοδήποτε σήμα συνεχούς χρόνου με πεπερασμένο εύρος ζώνης δύναται να εκφραστεί ως άθροισμα άπειρων διαδοχικών συναρτήσεων  $\text{sinc}(\cdot)$  με βάρη τα δείγματα του σήματος αυτού.

## Δειγματοληψία Παλμού

Στην πράξη, δεν έχω Διρας, αλλά έχω παλμούς διάρκειας  $\tau$ . Καθώς  $\tau \rightarrow 0$ , πηγαίνω στη θεωρητική δειγματοληψία με Διρας.

Έτσι έχουμε:

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_p(t - nT_s)$$

όπου:

$$y_p = \begin{cases} 1, & t \in [-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}] \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

## Κβάντιση

Διαδικασία αντιστοίχισης των δειγμάτων της εξόδου του δειγματολήπτη σε ένα πεπερασμένο σύνολο επιπέδου πλάτους.

Αν τα επίπεδα πλάτους κβάντισης είναι ισαπέχοντα, τότε η κβάντιση καλείται ομοιόμορφη, αλλιώς ανομοιόμορφη.

Η κβάντιση είναι μη αντιστρέψιμη απεικόνιση  $f$  ενός σήματος (ντετερμινιστικού ή στοχαστικού)  $x(t)$ , που θεωρητικά οδηγεί σε απώλεια πληροφορίας,  $y(t) = f(x(t))$ . Είναι κρίσιμο η πληροφορία που χάνεται να είναι όσο το δυνατόν λιγότερο χρήσιμη για την ανάκτηση του αρχικού σήματος.

Πρέπει να ελαχιστοποιήσουμε κάποια μετρική παραμόρφωσης. Συνήθως, για ντετερμινιστικά σήματα είναι η τετραγωνική απόσταση μεταξύ αρχικού και κβαντισμένου σήματος:

$$d(x(t), y(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t) - y(t)|^2 dt$$

Το αντίστοιχο μέγεθος για στοχαστικά σήματα είναι η μέση τετραγωνική παραμόρφωση:

$$E[(X(t) - Y(t))^2] = R_{XY}(0)$$

## Ομοιόμορφη Κβάντιση

Αν  $L$  ο συνολικός αριθμός σταθμών, τότε θεωρούμε:

$$L = 2^R$$

Όπου  $R$  είναι ο αριθμός των βιτς ανά δείγμα στην έξοδο του ΑΔ<sup>ς</sup>.

Όλα τα διακριτά επίπεδα έχουν ίδιο εύρος  $\Delta$ .



Τα δύο επίπεδα στα άκρα του κβαντιστή, καλούνται επίπεδα υπερφόρτωσης. Το  $\Delta$  είναι το βήμα κβάντισης και υπολογίζεται:

$$\Delta = \frac{V_{pp}}{2R}$$

όπου  $V_{pp}$  είναι η πεακ-το-πεακ τιμή του αναλογικού σήματος, δηλαδή:

$$V_{pp} = \max - \min$$

### Μιδ-ρισε (ΣΟΣ)

Δεν διαθέτει μηδενικό επίπεδο. Τα επίπεδα χωρίζονται σε θετικά και αρνητικά και υπάρχει ανάμεσά τους συμμετρία. Συνάρτηση μεταφοράς κβαντιστή:

$$y = \left(n - \frac{1}{2}\right) \Delta$$

Όπου:

$$n = -\frac{L}{2} + 1, -\frac{L}{2} + 2, \dots, \frac{L}{2} - 1, \frac{L}{2}$$

δηλαδή, έχουμε  $\frac{L}{2}$  θετικά και  $\frac{L}{2}$  αρνητικά επίπεδα.

### Θόρυβος Κβαντιστή

Έστω η στοχαστική διαδικασία  $X$  με ΣΠΠ  $f_X(a)$ , δείγματα της οποίας εισάγονται σε ομοιόμορφο κβαντιστή.

Έστω  $I_k$  το  $k$ -οστό διάστημα του ομοιόμορφου κβαντιστή μιδ-ρισε, δηλαδή αν  $x \in I_k \triangleq [(k-1)\Delta, k\Delta]$ , τότε  $y = y_k \triangleq \left(k - \frac{1}{2}\right) \Delta$ .

Ο θόρυβος κβάντισης για το διάστημα  $I_k$ :

$$q = x - y_k \text{ με } |q| \leq \frac{\Delta}{2}.$$

Ο θόρυβος ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή:

$$f_Q(q) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta}, & q \in \left[-\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2}\right] \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

### ΣΧΝΡ

Η Μ.Τ. της τ.μ.  $Q$  του θορύβου είναι μηδέν λόγω ομοιόμορφης κατανομής σε συμμετρικό ως προς το μηδέν διάστημα.

$$SQNR = \frac{E[x^2]}{E[Q^2]} \iff SQNR = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_Q^2} = \frac{12\sigma_x^2}{\Delta^2}$$

με:

$$\sigma_x^2 = E[x^2 - \mu^2] \text{ ώστε } E[x^2] = \sigma_x^2$$

Όσα περισσότερα βιτς (P) έχει ο κβαντιστής, τόσο καλύτερο ΣΧΝΡ πετυχαίνω.

Για να πάρω τα επίπεδα υπερφόρτωσης αντί του  $V_{pp}$ , πρέπει η πιθανότητα του σήματος να πάρει τιμές έξω από αυτά να είναι μηδέν.

Θυμόμαστε:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$$

## Υπερτερόδυνος Δέκτης

Όσο πιο μεγάλες οι συχνότητες, τόσο πιο δύσκολο να φιλτράρω, διότι το φίλτρο χρειάζεται να έχει μεγάλο εύρος ζώνης. Ο υπερτερόδυνος δημιουργεί παρεμβολές σε συχνότητες που δεν το περιμένουμε.

## $L_0$ Φίλτρο

Διέρχονται στην αρχή διάφορα σήματα. Επιλέγεται το επιθυμητό βανδωιδτη με τη χρήση του φίλτρου και ενισχυτή μεταβλητής συχνότητας. Ωστόσο, δεν παρουσιάζει καλή επιλεκτικότητα.

Σημείωση για ασκήσεις: Δεν λαμβάνουμε υπόψιν τους ενισχυτές και θεωρούμε ότι τα φίλτρα είναι ιδανικά.

## Άνω και Κάτω Μετατροπή

Αν η  $f_{IF}$  είναι κάτω ή άνω της  $f_c$ .

## Έγχυση Υψηλής και Χαμηλής Ζώνης

Υψηλής ζώνης:  $f_I = f_c + f_{IF}$

Χαμηλής ζώνης:  $f_I = |f_c - f_{IF}|$

## Εικονικές Συχνότητες

Παρεμβολές από άλλα σήματα που βρίσκονται στις λεγόμενες εικονικές συχνότητες ή συχνότητες είδωλα.

$$f_{Im} = f_c + 2f_{IF}$$

Για την αποκοπή αυτών υπάρχει το  $L_0$  φίλτρο. Από αυτό το πρόβλημα μπορεί να μας γλιτώσει η επιλογή άνω ή κάτω έγχυσης.

**NOTE:** Στο ΦΜ και ΠΜ το εύρος ζώνης εξαρτάται από το δείκτη διαμόρφωσης (Κανόνας ἄρσον).

**ΣΟΣ:** 4ο κεφάλαιο