

HEC MONTRÉAL  
TITRES À REVENUS FIXES - FINA60201

TRAVAIL PRÉSENTÉ À :  
PASCAL FRANÇOIS

PRÉSENTÉ PAR :  
YAN-ALEXANDRE GIGUÈRE – 11352419  
HAROLD NASSER DIALLO – 11321834

PRÉSENTÉ LE : 28/04/2025

## Table des matières

<b>Mandat .....</b>	<b>3</b>
<b>Résumé exécutif.....</b>	<b>3</b>
<b>Première partie.....</b>	<b>4</b>
1. Construction de la série quotidienne de la dette .....	4
2. Construction de la série de capitalisation boursière .....	5
3. Approche itérative pour l'estimation de la valeur des actifs .....	5
4. Frontière de défaut .....	8
5. Structure par terme au 2 janvier 2025 .....	9
<b>Seconde partie .....</b>	<b>11</b>
1. Structure par terme des rendements et de l'écart de crédit .....	11
2. Modèle de Duffee .....	12
3. Calibrage .....	14
4. Évaluation d'obligation corporative par différences finies .....	16
5. Rendement à l'échéance .....	18

## Mandat

Dans le cadre de l'évaluation du risque de crédit et de la modélisation avancée des instruments à revenu fixe, ce travail porte sur la construction de la structure par terme des écarts de crédit et la valorisation d'obligations corporatives notées AA. L'étude se concentre sur le cas de la société Barrick Gold, notée A3, en mobilisant des données de marché quotidiennes et des informations comptables issues de Compustat et CRSP. L'approche combine des techniques issues des modèles structurels (modèle de Merton) pour estimer les probabilités implicites de défaut, avec une interpolation de la frontière de défaut sur un horizon allant jusqu'à 20 ans. L'objectif est de quantifier les écarts de crédit en utilisant comme taux sans risque les taux extraites des obligations zéro-coupon de la Fed de Saint-Louis, puis de tracer la structure par terme complète à une date de référence.

La seconde partie vise à modéliser de manière dynamique l'évolution des taux d'intérêt et des primes de risque de crédit à travers le modèle de Duffee (1999), un cadre factoriel affine sous la mesure risque-neutre. Après une calibration séquentielle aux courbes sans risque (taux zéro-coupon) puis aux courbes observées pour les obligations notées AA, le modèle permettra de générer une courbe de rendement théorique ajustée au risque de crédit. Cette structure sera utilisée pour évaluer une émission obligataire remboursable (callable bond), à l'aide d'un schéma explicite de différences finies bidimensionnel. L'analyse comparative entre les obligations remboursables et non remboursables permettra d'illustrer les implications pratiques du risque de remboursement anticipé dans un contexte de gestion d'actifs ou d'analyse du risque de crédit.

## Résumé exécutif

Dans la première partie de l'analyse, nous estimons la structure par terme des écarts de crédit pour Barrick Gold. La courbe obtenue est croissante et atteint environ 22 points de base pour une échéance de 20 ans, ce qui est cohérent avec le profil d'une entreprise de bonne qualité de crédit, mais qui présente tout de même un risque croissant à long terme.

Dans la seconde partie, nous évaluons une obligation corporative de qualité AA en utilisant un modèle à deux facteurs pour le taux sans risque et l'écart de crédit. La valeur obtenue par différences finies est ensuite utilisée pour calculer le rendement à l'échéance de l'obligation. Nous comparons ce rendement à celui d'une obligation similaire non remboursable, déterminé à l'aide d'une formule analytique. L'obligation remboursable présente un rendement légèrement supérieur, ce qui est attendu compte tenu de la possibilité de rachat.

## Première partie

Dans le cadre de l'analyse du risque de crédit de la société Barrick (notation Moody's A3), notre objectif est de construire la structure par terme des écarts de crédit au 2 janvier 2025 (premier jour de la bourse de 2025). Cette démarche repose sur une approche structurelle du risque de défaut inspirée du modèle de Merton (1974), qui considère l'entreprise comme un actif sous-jacent financé par dette et fonds propres. La méthode combine la valorisation des actifs de l'entreprise à partir de données de marché, l'estimation de la volatilité de ces actifs, la détermination de points de défaut à différents horizons temporels, et l'application finale du modèle de Merton pour extraire les écarts de crédit implicites.

Notre méthodologie s'articule autour de cinq étapes principales, intégrant des interpolations de données, des estimations par itérations successives et l'utilisation de courbes de taux sans risque extraites des obligations zéro-coupon de la Fed de Saint-Louis.

### 1. Construction de la série quotidienne de la dette

À partir de la base **Compustat Quarterly**, les séries trimestrielles de la dette à long terme ( $DLTTQ_t$ ) et de la dette du passif courant ( $DLCQ_t$ ) sont extraites pour la période du quatrième trimestre 2023 au quatrième trimestre 2024. Une interpolation linéaire est appliquée pour construire une série quotidienne du passif pondéré, définie par :

$$L_t = DLCQ_t + \frac{1}{2} DLTTQ_t$$

Cette série représente une approximation quotidienne du niveau d'endettement à court et moyen termes pertinent pour la modélisation du risque de défaut. Les résultats obtenus pour la dette totale trimestrielle sont dans le tableau ci-dessous.

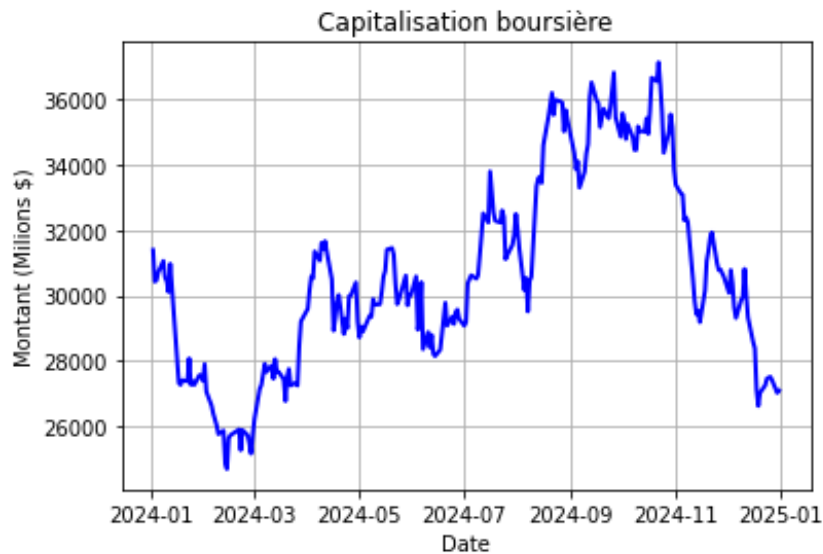
Trimestre	Dette du passif courant ( $DLCQ_t$ ) (M\$)	Dette à long-terme ( $DLTTQ_t$ ) (M\$)	Dette totale simplifiée ( $L_t$ ) (M\$)
2023 Q4	43.0	5 180.0	2633.0
2024 Q1	12.0	4 713.0	2368.5
2024 Q2	11.0	4 713.0	2367.5
2024 Q3	13.0	4 712.0	2369.0
2024 Q4	84.0	5 172.0	2670.0

## 2. Construction de la série de capitalisation boursière

Les séries chronologiques quotidiennes du cours de l'action et du nombre d'actions en circulation sont extraites de la base CRSP. Ces données permettent de calculer la capitalisation boursière quotidienne de Barrick Gold :

$$\text{Capitalisation}(t) = \text{Prix de l'action}(t) \times \text{Nombre d'actions en circulation}(t)$$

Ce calcul est essentiel pour l'estimation subséquente de la valeur totale des actifs de l'entreprise.



## 3. Approche itérative pour l'estimation de la valeur des actifs

Afin d'estimer la valeur des actifs de la firme ( $v$ ) ainsi que la volatilité de ces actifs ( $\sigma$ ), en partant de données de marché disponibles pour la capitalisation boursière. Nous adoptons une approche structurelle de type Merton, où la capitalisation boursière est assimilée à une option européenne de type call sur les actifs de la firme, avec un point de défaut correspondant à la dette exigible à un an.

### Formulation du modèle

Dans le cadre du modèle de Black-Scholes, la relation entre la capitalisation boursière ( $S$ ) et les actifs ( $v$ ) est exprimée par l'équation suivante :

$$S = v \Phi(d_1) - (std + 0.5 \times ltd) e^{-r} \Phi(d_2) \equiv f(v, \sigma)$$

où :

-  $std$  est la dette à court terme,

- $ltd$  est la dette à long terme,
- $r$  est le taux sans risque à un an,
- $\Phi(\cdot)$  est la fonction de répartition de la loi normale standard,

avec :

$$\begin{aligned}d_1 &= (\ln(v / (std + 0.5 \times ltd)) + (r + 0.5\sigma^2)) / \sigma \\d_2 &= d_1 - \sigma\end{aligned}$$

La capitalisation boursière ( $S$ ) est ainsi fonction de deux inconnues principales : la valeur des actifs ( $v$ ) et la volatilité des actifs ( $\sigma$ ).

### *Principe de l'estimation itérative*

Le système d'équations pour estimer simultanément  $v$  et  $\sigma$  repose sur deux relations :

- $f(v, \sigma) = S_{obs}$ , égalisant la valeur théorique du capital au capital observé.
- $g(v, \sigma)$ , reliant la volatilité observée de la capitalisation boursière  $\sigma_{S_{obs}}$  à la volatilité des actifs.

Avec :

$$\sigma_S = \left(\frac{v}{S}\right) \Phi(d^1) \sigma \equiv g(v, \sigma)$$

L'estimation est réalisée selon la procédure itérative suivante qui est une méthode qui a été popularisée par **KMV Moody's** pour leur modèle de risque de crédit.

1. Initialisation :

- Estimation initiale de  $\sigma$  par la volatilité historique annualisée de la capitalisation boursière et poser  $\sigma^{(0)} = \sigma$ ,
- Annualisation par multiplication par  $\sqrt{252}$ .

2. Inversion de la fonction  $f$  :

- À partir de chaque observation quotidienne  $S_{obs}$  et de l'estimation initiale  $\sigma^{(0)}$ , calcul de la valeur des actifs  $v^{(0)}$ .

$$v_j^{(0)} = f^{-1}(S_j^{obs}, \hat{\sigma}_0), \text{ for } j = 1, \dots, m.$$

3. Mise à jour de la volatilité :

Nous mettons à jour l'estimation de la volatilité des rendements des actifs,  $\sigma^1$ , en calculant l'écart-type des rendements logarithmiques :

$$\hat{\sigma}_1 = \text{écart-type} \left( \left\{ \ln \left( \frac{v_{j+1}}{v_j} \right) \right\}_{j=1, \dots, m-1} \right)$$

Nous utilisons ensuite cette volatilité recalculée pour réestimer les valeurs des actifs en inversant la fonction  $f$ , selon :

$$v_j^{(1)} = f^{-1}(S_j^{obs}, \hat{\sigma}_1), \quad \text{pour } j = 1, \dots, m$$

- Répétition jusqu'à convergence avec un critère  $|\sigma^{(n+1)} - \sigma^{(n)}| < \varepsilon$  (par exemple  $\varepsilon = 10^{-4}$ ).

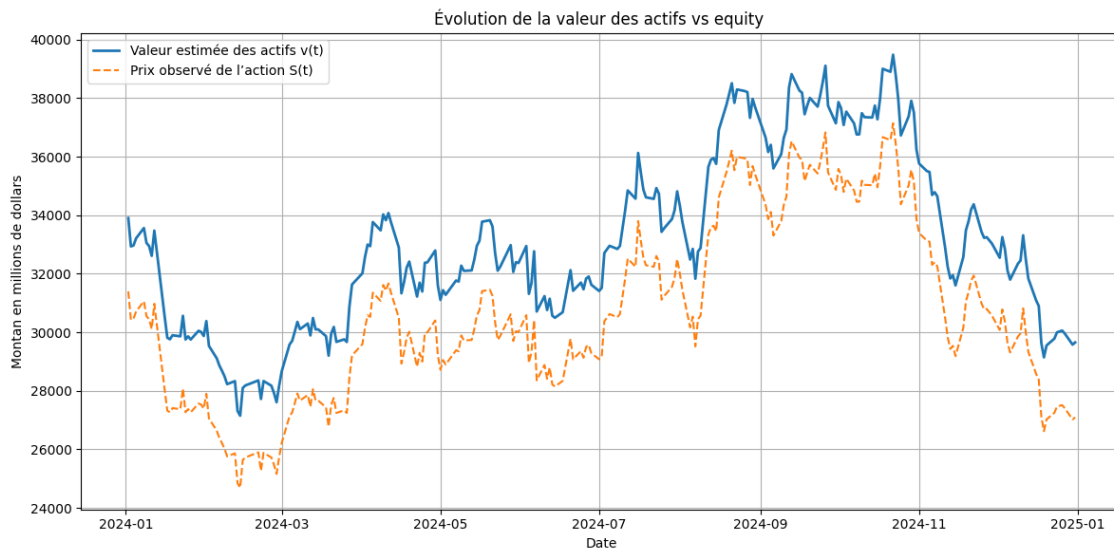
#### 4.Sortie finale :

- Les valeurs convergentes de  $\sigma$  et  $v$  sont retenues pour les analyses suivantes sont donnés par :

$$\hat{\sigma}_n \rightarrow \sigma$$

$$v_m^{(n)} = f^{-1}(S_m^{obs}, \hat{\sigma}_n) \rightarrow v$$

Toutes les volatilités utilisées dans ce processus sont exprimées annuellement, conformément aux standards financiers, en multipliant systématiquement les écarts-types calculés sur données journalières par  $\sqrt{252}$ . Ce traitement assure la comparabilité avec les rendements zéro-coupon utilisés pour la suite de l'analyse de crédit. Les résultats de cette estimation peuvent s'observer dans le graphique ci-dessous et dans le tableau suivant.



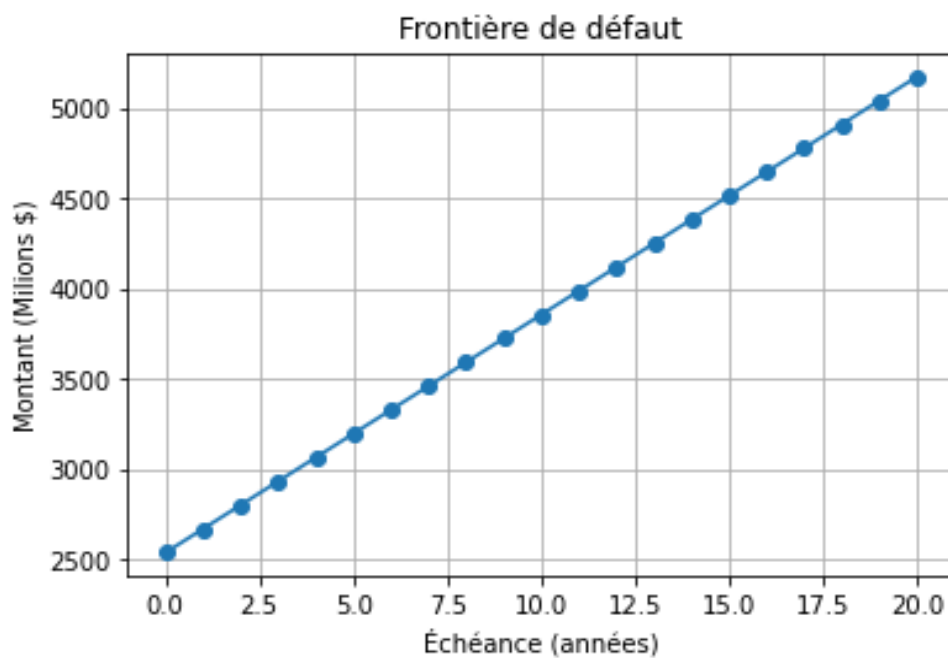
Nombre d'itérations	Valeur des actifs 2025 Q1 (M\$)	Volatilité annuelle	Epsilon (convergence)
2	29 655.966	0.312658	1.554312e-15

#### 4. Frontière de défaut

En supposant que :

- $L_t$  est le seuil de défaut pour un horizon d'un an,
- $DLTTQ_t$  est le seuil de défaut pour un horizon de vingt ans,

Une interpolation linéaire est réalisée entre ces deux points pour définir la frontière de défaut pour toutes les maturités intermédiaires entre 0 et 20 ans. Cette frontière modélise de manière cohérente l'évolution des exigences de remboursement en fonction de l'horizon temporel. Vous pouvez voir les valeurs sur le graphique de la frontière de défaut et le tableau.



Échéances	Montant (M\$)	Échéances	Montant (M\$)
0	2538.32	11	3986.84
1	2670.00	12	4118.53
2	2801.68	13	4250.21
3	2933.37	14	4381.89
4	3065.05	15	4513.58
5	3196.74	16	4645.26
6	3328.42	17	4776.95
7	3460.11	18	4908.63
8	3591.79	19	5040.32
9	3723.47	20	5172.00
10	3855.16		



## 5. Structure par terme au 2 janvier 2025

Le premier jour de bourse de 2025, nous appliquons le modèle de Merton pour calculer la structure par terme des écarts de crédit de Barrick Gold. En modélisant l'entreprise comme un actif financé par dette et fonds propres, et en considérant le risque de défaut comme la probabilité que la valeur des actifs tombe sous le niveau de dette exigible, nous utilisons l'analogie d'une option européenne dans le cadre de Black-Scholes. L'écart de crédit pour une maturité  $T$  est donné par la formule  $s(T) = -(1/T) \ln(D/M) - r$ , où  $D$  est la valeur actualisée du remboursement en tenant compte du risque de défaut,  $M$  est le montant nominal de la dette, et  $r$  est le taux sans risque observé. La valeur  $D$  est calculée selon :

$$D = Me^{-rT} \Phi(d_2) + v\Phi(d_1)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{v}{M}\right) + (r + 0.5\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma$$

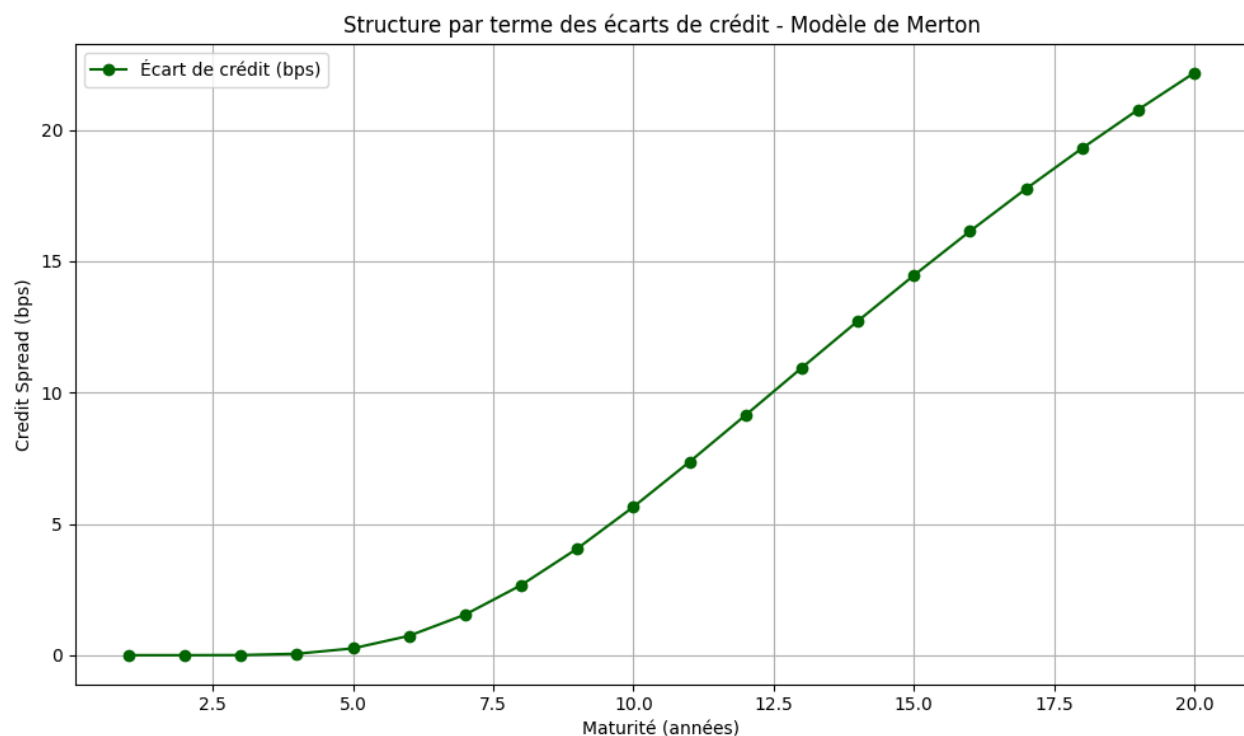
Où  $v$  est la valeur des actifs de la firme,  $\sigma$  est la volatilité des actifs et  $\Phi(\cdot)$  désigne la fonction de répartition de la loi normale standard. Les taux sans risque nécessaires, notés  $zcy(t)$ , sont estimés grâce aux données publiés par la Fed de Saint-Louis en utilisant la fonction de Nelson-Siegel. Les écarts de crédit sont ensuite tracés en fonction de la maturité pour visualiser la structure par terme de Barrick Gold à cette date de référence.

Échéances	Taux (%)	Échéances	Taux (%)
1	4.19	11	4.63
2	4.22	12	4.67
3	4.25	13	4.71
4	4.3	14	4.75
5	4.34	15	4.78
6	4.39	16	4.81
7	4.44	17	4.84
8	4.49	18	4.86
9	4.54	19	4.88
10	4.58	20	4.89

Tableau : Taux sans risque

Échéances	Écart de crédit (bps)	Échéances	Écart de crédit (bps)
1	0.0000	11	7.3603
2	0.0000	12	9.1407
3	0.0038	13	10.9398
4	0.0531	14	12.7221
5	0.2583	15	14.4627
6	0.7359	16	16.1453
7	1.5427	17	17.7608
8	2.6682	18	19.3045
9	4.0594	19	20.7762
10	5.6466	20	22.1774

Tableau : Structure à terme de l'écart de crédit



Pour ce qui concerne les résultats, tout d'abord, comme théoriquement attendu dans un cadre structurel sans saut (modèle de Merton classique), l'écart de crédit converge vers zéro pour les maturités très courtes. Cette propriété est conforme au fait que, dans un modèle de diffusion continue sans événements brusques, le risque de défaut instantané est nul : un défaut ne peut survenir qu'avec le passage du temps. Cela est cohérent avec les propriétés connues du TSCS : la structure doit tendre vers zéro à l'échéance immédiate.

En observant le profil de la courbe, on note que les écarts de crédit sont strictement croissants avec la maturité, passant de presque 0 point de base (bps) à court terme à environ 22 bps pour les maturités longues (20 ans). Ce comportement croissant est typique des entreprises ayant un niveau d'endettement modéré : en présence d'une structure de capital raisonnablement saine, la probabilité cumulée de défaut augmente avec le temps, rendant les spreads plus élevés à mesure que la maturité s'allonge. Ce phénomène est décrit dans la littérature comme une TSCS croissante pour des niveaux d'endettement faibles.

Cependant le modèle de Merton tend à sous-estimer les écarts de crédit à court terme, car il suppose une dynamique continue des actifs sans possibilité de défaut instantané. Or, les données de marché montrent des spreads positifs même à très courte maturité, ce que le modèle ne peut pas reproduire. Cette limitation peut être surmontée en introduisant des sauts dans la dynamique des actifs (modèle jump-diffusion), permettant ainsi de capturer un risque de défaut soudain à court terme.

## Seconde partie

Dans cette seconde partie, nous nous intéressons à la structure par terme des rendements obligataires d'entreprises de haute qualité (notées AAA, AA ou A), en particulier au 28 février 2025. Nous modélisons l'évolution du taux sans-risque et de l'écart de crédit par l'entremise du modèle de Duffee (1999) afin d'être outillé pour faire l'évaluation d'une émission d'obligations AA rachetable par schéma de différences finies.

### 1. Structure par terme des rendements et de l'écart de crédit

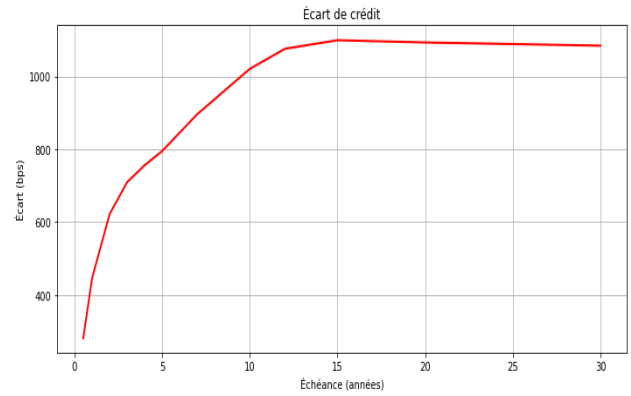
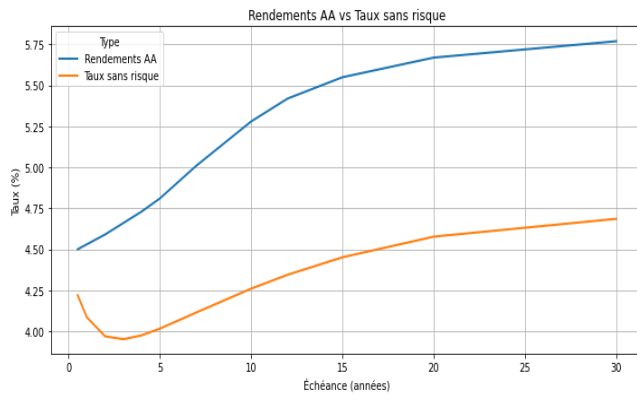
Dans un premier temps, les paramètres de la fonction Nelson-Siegel-Svensson (NSS) estimés par la Réserve fédérale de Saint-Louis ont été utilisés. La forme suivante permet d'obtenir une structure par terme de rendements zéro-coupons sans risque :

$$zcy(t) = a + b \frac{1 - e^{-\frac{t}{\tau}}}{\frac{t}{\tau}} + c \left( \frac{1 - e^{-\frac{t}{\tau}}}{\frac{t}{\tau}} - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) + d \left( \frac{1 - e^{-\frac{t}{\theta}}}{\frac{t}{\theta}} - e^{-\frac{t}{\theta}} \right)$$

À partir de ces données, nous avons construit les écarts de crédit pour différentes maturités et représenté graphiquement les courbes des taux sans risque, des rendements AA et des écarts de crédit.

Nous utilisons la relation suivante afin de définir l'écart de crédit:

$$CS(t) = y(t) - zcy(t)$$



## 2. Modèle de Duffee

Ce modèle à deux facteur permet à la fois de modéliser le taux court  $r_t$  et l'écart de crédit  $\lambda_t$ . Celui-ci est défini comme suit :

$$\begin{aligned} dr_t &= \kappa_r(\theta_r + r_t)dt + \sigma_r\sqrt{r_t} dW_t \\ ds_t &= \kappa_s(\theta_s + s_t)dt + \sigma_s\sqrt{s_t} dZ_t \end{aligned}$$

$$dW_t dZ_t = 0$$

$$\lambda_t = \alpha + \beta r_t + s_t$$

D'une part, la valeur d'une obligation zéro-coupon risquée peut être calculé à l'aide de la propriété martingale suivante :

$$D(0,T) = E \left[ \exp \left( - \int_0^T (r_u + \lambda_u) du \right) \right]$$

En utilisant la définition du modèle ci-haut, il est possible d'utiliser la forme analytique du modèle Cox-Ingersoll-Ross afin d'évaluer la valeur de la dette.

$$D(0,T) = E \left[ \exp \left( - \int_0^T ((1+\beta)r_u + \alpha + s_u) du \right) \right]$$

$$D(0,T) = e^{-\alpha T} P_{cir}((1+\beta)r, T) P_{cir}(s, T)$$

où :

$$P_{cir}(x, T) = a_{cir}(T) \exp[-b_{cir}(T)x]$$

D'autre part, le rendement risqué prend la forme suivante :

$$Y(T) = -\frac{1}{T} \ln D(0, T),$$

Ainsi, nous pouvons utiliser la formule suivante lors du calibrage sur les rendements corporatifs.

$$Y(T) = -\frac{1}{T} \ln(e^{-\alpha T} P_{cir}((1 + \beta)r, T) P_{cir}(s, T)),$$

$$Y(T) = -\frac{1}{T} \left[ -\alpha T + \ln(a_{cir,1}(T)) - b_{cir,1}(T)(1 + \beta)r + \ln(a_{cir,2}(T)) - b_{cir,2}(T)s \right].$$

où

$a_{cir,1}(T)$  est fonction de  $\kappa_t$ ,  $(1 + \beta)\theta_t$  et  $\sqrt{1 + \beta}\sigma_r$

$b_{cir,1}(T)$  est fonction de  $\kappa_t$  et  $\sqrt{1 + \beta}\sigma_r$

$a_{cir,2}(T)$  est fonction de  $\kappa_s$ ,  $\theta_s$  et  $\sigma_s$

$b_{cir,2}(T)$  est fonction de  $\kappa_s$  et  $\sigma_s$

### 3. Calibrage

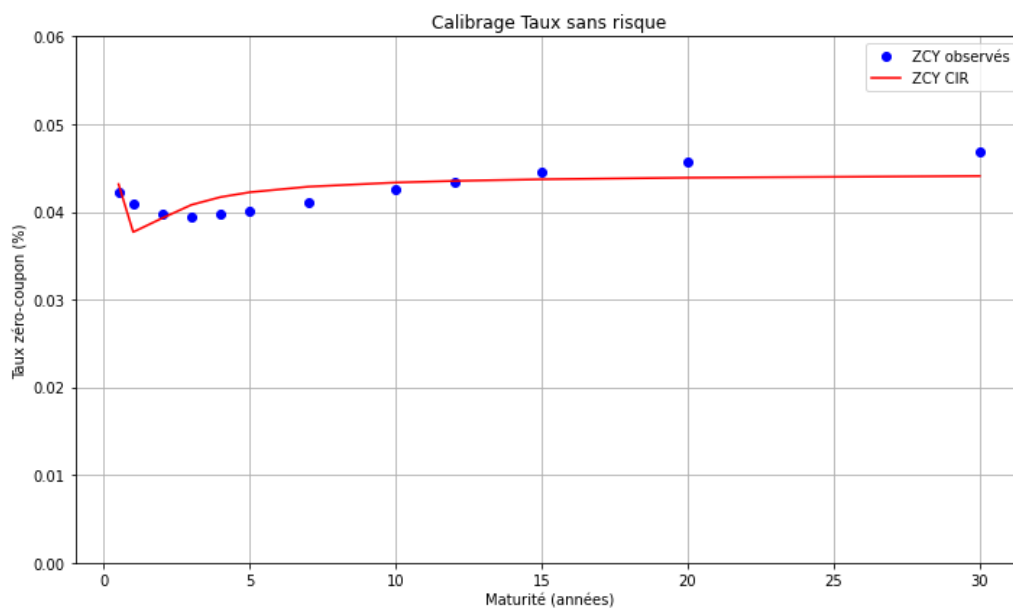
Le calibrage du modèle est fait en deux temps. D'entrée de jeu, un modèle Cox-Ingersoll-Ross est appliqué aux rendements zéro-coupons sans risque de la Fed de Saint-Louis. La fonction objective suivante est utilisée afin d'obtenir les paramètres :

$$\min_{r_0, \kappa_r, \theta_r, \sigma_r} \left[ \sum_{\text{Maturités}} (r_{f,cir} - r_f^{obs})^2 \right]$$

où  $r_{cir} = -\frac{1}{T} [\ln [a_{cir}(T)] - b_{cir}(T)r_0]$

$r_0$	$\kappa_r$	$\theta_r$	$\sigma_r$
0.024919	1.763928	0.044468	0.050552

La somme des erreurs est de 3.627e-05



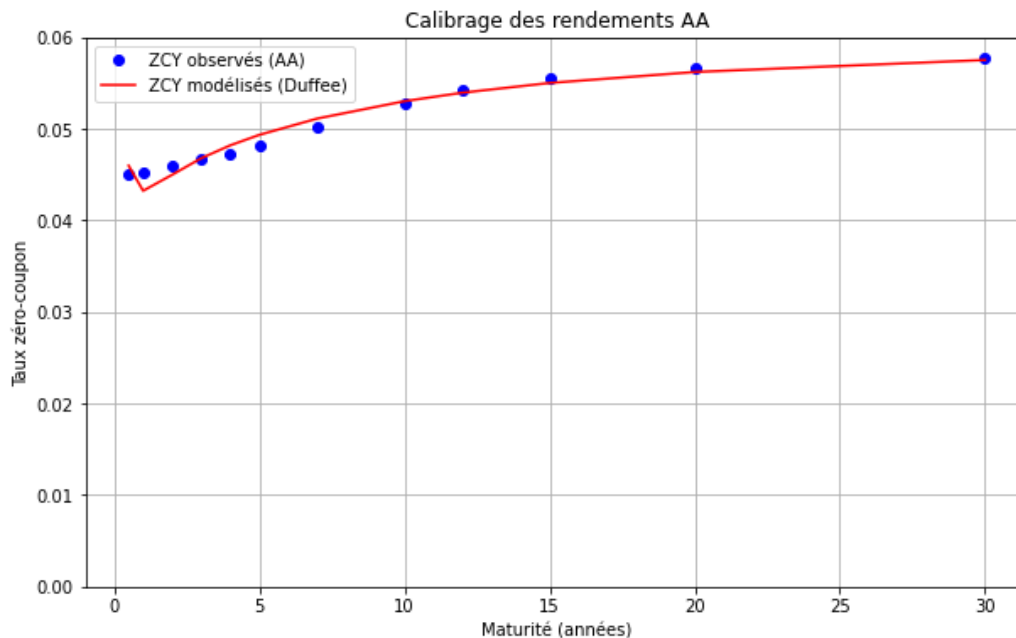
En utilisant les résultats de l'étape 1 pour  $r$ , on calibre maintenant l'écart de crédit et la prime de risque associée, en ajustant le modèle Duffee aux rendements zéro-coupon AA observés.

La fonction objective devient :

$$\min_{s_0, \kappa_s, \theta_s, \sigma_s, \alpha, \beta} \left[ \sum_{\text{Maturités}} (Y(T) - y^{obs})^2 \right]$$

$s_0$	$\kappa_s$	$\theta_s$	$\sigma_s$	$\alpha$	$\beta$
0.000155	0.199878	0.016213	0.039936	0.022102	-0.499917

Pour une fonction objective de : 1.012e-05



Le modèle calibré reproduit correctement la structure générale des taux zéro-coupon observés, particulièrement pour les maturités moyennes à longues (10 ans et plus). Toutefois, des écarts notables persistent aux maturités très courtes (0–2 ans), où le modèle sous-estime les rendements observés.

#### 4. Évaluation d'obligation corporative par différences finies

L'évaluation d'une obligation AA peut être formulée comme la résolution d'une équation différentielle partielle (EDP) qui modélise l'évolution du prix en fonction du temps et des facteurs de risque, notamment le taux sans risque et le spread de crédit.

La méthode des différences finies offre un cadre numérique pour résoudre cette EDP, en discrétisant l'espace des variables d'état et du temps.

Équation différentielle d'un actif contingent  $g(t, r_t, s_t)$  suivant le modèle de Duffee se traduit comme suit :

$$\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial r_t} \kappa_t(\theta_t + r_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial r_t^2} \sigma_r^2 r_t + \frac{\partial g}{\partial s_t} \kappa_s(\theta_s + s_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial s_t^2} \sigma_s^2 s_t = (r_t + \lambda_t)g,$$

Comme  $dW_t dZ_t = 0$ .

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{g_{i,j}^t - g_{i,j}^{t-1}}{\Delta t}, \frac{\partial g}{\partial r_t} = \frac{g_{i+1,j}^t - g_{i-1,j}^t}{\Delta r}, \frac{\partial^2 g}{\partial r_t^2} = \frac{g_{i+1,j}^t - 2g_{i,j}^t + g_{i-1,j}^t}{(\Delta r)^2}$$

$$\frac{\partial g}{\partial s_t} = \frac{g_{i,j+1}^t - g_{i,j-1}^t}{\Delta s}, \frac{\partial^2 g}{\partial s_t^2} = \frac{g_{i,j+1}^t - 2g_{i,j}^t + g_{i,j-1}^t}{(\Delta s)^2}$$

En utilisant une approche récursive partant de l'échéance et remontant jusqu'à aujourd'hui, le schéma explicite des différences finies prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} g_{i,j}^{t-1} = & g_{i,j}^t \left( 1 - \frac{\Delta t \sigma_r^2 i}{\Delta r} - \frac{\Delta t \sigma_s^2 j}{\Delta s} - \Delta t[(1 + \beta)\Delta r i + \alpha + \Delta s j] \right) \\ & + g_{i+1,j}^t \left( \frac{\Delta t(\kappa_r \theta_r + \sigma_r^2 i)}{2\Delta r} - \frac{\Delta t \kappa_r i}{2} \right) \\ & + g_{i-1,j}^t \left( \frac{\Delta t(\sigma_r^2 i - \kappa_r \theta_r)}{2\Delta r} + \frac{\Delta t \kappa_r i}{2} \right) \\ & + g_{i,j+1}^t \left( \frac{\Delta t(\kappa_s \theta_s + \sigma_s^2 j)}{2\Delta s} - \frac{\Delta t \kappa_s j}{2} \right) \\ & + g_{i,j-1}^t \left( \frac{\Delta t(\sigma_s^2 j - \kappa_s \theta_s)}{2\Delta s} + \frac{\Delta t \kappa_s j}{2} \right) \end{aligned}$$



### *Actif évalué*

Nous évaluons une obligation corporative de qualité AA. Cette obligation a une valeur nominale de 1,000,000\$ et verse des coupons semestriels correspondant à un taux de coupon annuel de 4% (soit 20,000\$ tous les 6 mois). Le remboursement du principal et du dernier coupon a lieu à l'échéance fixée à 5 ans.

### *Discrétisation de l'espace et du temps*

Le pas de temps est  $\Delta t = \frac{1}{400}$ , ce qui donne 401 points temporels sur un horizon de 5 ans. Le taux sans risque est discrétisé entre 0 et 10% avec un pas  $\Delta r = 0.1\%$ . Par sa part,  $s_t$  est discrétisé entre 0 et 1,8% avec un pas  $\Delta s = 0.05\%$ . Afin d'éviter l'instabilité de la grille, la discrétisation en  $s$  devait rester sous 41 points.

### *Conditions terminales et aux frontières*

La valeur de l'obligation lors de l'initialisation est la somme du nominal et du dernier coupon. Nous utilisons des conditions de Neumann (dérivée nulle aux bords), en copiant les valeurs adjacentes.

### *Récurrance temporelle*

À chaque date de paiement semestriel, nous ajoutons la valeur du coupon au prix de l'obligation. Le prix est plafonné à la valeur nominale pour respecter une contrainte naturelle de remboursement.

### *Calcul du prix initial et du taux de rendement*

Nous extrayons la valeur de l'obligation aujourd'hui en prenant la position correspondant aux taux initiaux estimés  $r_0$  et  $s_0$  sur la grille.

### *Résultat*

La valeur actuelle estimée de l'obligation remboursable est de 942 021,92 \$.

## 5. Rendement à l'échéance

Dans cette section, nous calculons et comparons les rendements à l'échéance d'une obligation corporative AA remboursable et d'une obligation non remboursable similaire.

Premièrement, nous avons évalué la valeur actuelle de l'obligation remboursable à l'aide de la méthode des différences finies explicites, telle que détaillée dans la question 4.

À partir de la valeur obtenue, nous avons ensuite déterminé le rendement à l'échéance de l'obligation remboursable en supposant une approche d'actualisation continue. Le rendement est trouvé en résolvant numériquement:

$$D(0,T) = \sum_{k=1}^N Ce^{-yt_k} + Me^{-yT}$$

Deuxièmement, pour l'obligation non remboursable, nous avons utilisé à la fois la solution analytique dérivée en question 3 et le modèle de différences finies. Cette solution repose sur l'hypothèse que l'obligation est évaluée sans possibilité de remboursement anticipé.

Obligation AA remboursable évalué par différences finies	Obligation AA non- remboursable évalué par différences finies	Obligation AA non- remboursable évalué avec formule analytique
5.27%	4.91%	4.93%

Les rendements obtenus par différences finies proviennent d'obligations avec paiement de coupons semestriels. L'obligation remboursable propose un rendement supérieur, ce qui est cohérent avec son option de remboursement avantageuse pour l'émetteur. La proximité entre le rendement de l'obligation non-remboursable en différences finies et celui de la formule analytique contribue à valider la justesse de la méthodologie employée.