Clase Práctica #1: Señales y Sistemas discretos en el Tiempo

Objetivo

- Clasificar y analizar sistemas discretos en el tiempo.
- Hallar la ecuación de diferencia partiendo de la representación gráfica del sistema.

Bibliografía

- *Oppenheim, Alan y Schaffer, Ronald. Discrete-Time Signal Processing. Capítulo 2.*
- *John G. Proakis, Dimitris G. Manolakis- Digital Signal Processing- Capítulo 2.*

Introducción

- Clasificación de los sistemas discretos

  Linealidad: El sistema se dice que es lineal si y solo si cumple con la condición de linealidad o superposición.
  Invariaza en el Tiempo: Un sistema se dice invariante en el tiempo cuando sus parámetros internos no varían con el tiempo, es decir al mismo estímulo se obtiene la misma respuesta independiente del instante en que se aplique.
  Con o Sin Memoria (Dinámico o Estático): Se dice que un sistema es Sin Memoria o Estático si para calcular la salida emplea solamente la muestra presente en la entrada del sistema y no muestras pasadas o futuras, de lo contrario se dice que es Con memoria o Dinámico.
  Causalidad: Se dice que un sistema es causal si y solo si para generar la salida en un instante n= requiere solamente la muestra del instante y/o muestras pasadas, en otras palabras, sin el sistema no requiere muestras futuras o adelantos para generar la salida, se dice causal.
  Estabilidad: Se dice que un sistema es estable en sentido BIBO (Bound Input Bound Output), cuando para una entrada acotada se produce una salida acotada
- Convolución de sistemas discretos
  Pasos:
  - Invertir con respecto al eje de las ordenadas una de las dos secuencias.
  - Sustituir la variable n por k.

- Desplazar la secuencia invertida, hasta que su última muestra quede encima de la primera muestra de la secuencia no invertida.
- Multiplicar y sumar las muestras solapadas.

Los sistemas discretos también pueden ser Caracterizados mediante su ecuación en diferencias. Separados por estas en dos grandes grupos: Sistemas Recursivos y No Recursivos.

$$y(n)=\sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)-\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k)$$

Recursivo

$$y(n)=\sum_{k=0}^{N} b_k x(n-k)$$

No Recursivo

Ejercicio 1 (2.7 (incisos a-f) -John G. Proakis)

Un sistema discreto en el tiempo puede ser:

(1) Estático o dinámico

(2) Lineal o no lineal

(3) Invariante o no invariante en el tiempo

(4) Causal o no causal

(5) Estable o inestable

Examine los siguientes sistemas con respecto a las propiedades anteriores

(a) y(n) = cos[x(n)] **EJERCICIO PROPUESTO PARA ESTUDIANTES**

(1) Estático, pues para obtener la salida solo se emplean muestras presentes.

(2) La salida es el coseno de la entrada: $y_1(n) = \cos[x_1(n)]$

$y_2(n) = \cos[x_2(n)]$

La respuesta del sistema a una combinación lineal de estas dos señales es:

$y(n) = \cos[ax_1(n) + bx_2(n)]$

$y(n) = \cos[ax_1(n)]\cos[bx_2(n)] - \mathrm{sen}[ax_1(n)]\mathrm{sen}[bx_2(n)]$

Por otro lado, una combinación lineal de las dos salidas genera la salida siguiente:

MI MD

$ay_1(n) + by_2(n)$ $\cos[ax_1(n) + bx_2(n)]$

$a\cos[x_1(n)] + b\cos[x_2(n)] \neq \cos[ax_1(n)]\cos[bx_2(n)] - \mathrm{sen}[ax_1(n)]\mathrm{sen}[bx_2(n)]$

Dado que las salidas son diferentes entonces el sistema es **NO LINEAL**

(3) Invariante en el tiempo, pues sus parámetros no varían en el tiempo

(4) Causal, pues para generar la salida se requiere la muestra en el instante y/o muestras pasadas.

(5) Estable, pues para una entrada acotada, la salida también será acotada

(b) $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n+1} x(k)$ **EJEMPLO RESUELTO POR PROFESOR**

(1) Dinámico, pues para obtener la salida se emplean muestras pasadas y futuras.

(2) La salida es la sumatoria de la entrada: $y_1(n) = \sum_{k=-\infty}^{n+1} x_1(k)$

$y_2(n) = \sum_{k=-\infty}^{n+1} x_2(k)$

La respuesta del sistema a una combinación lineal de estas dos señales es:

$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n+1} [ax_1(k) + bx_2(k)]$

$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n+1} ax_1(k) + bx_2(k)$

Por otro lado, una combinación lineal de las dos salidas genera la salida siguiente:

MI MD

$ay_1(n) + by_2(n)$ $\sum_{k=-\infty}^{n+1} ax_1(k) + bx_2(k)$

$a\sum_{k=-\infty}^{n+1} x_1(k) + b\sum_{k=-\infty}^{n+1} x_2(k) = a\sum_{k=-\infty}^{n+1} x_1(k) + b\sum_{k=-\infty}^{n+1} x_2(k)$

Dado que las salidas son iguales entonces el sistema es **LINEAL**

(3) Invariante en el tiempo, pues sus parámetros no varían en el tiempo

(4) No causal, pues para generar la salida se requieren muestras futuras.

(5) Inestable, pues para una entrada acotada, ejemplo u(k), la salida tiende a infinito, por lo que no es acotada.

(c) $y(n)=x(-n+2)$ **EJERCICIO PROPUESTO PARA ESTUDIANTES**

(1) Dinámico, pues para obtener la salida se emplean muestras pasadas y futuras.

(2) La salida es el adelanto de la entrada: $y_1(n) = x_1(-n+2)$

$y_2(n) = x_2(-n+2)$

La respuesta del sistema a una combinación lineal de estas dos señales es:

$y(n) = ax_1(-n+2) + bx_2(-n+2)$

Por otro lado, una combinación lineal de las dos salidas genera la salida siguiente:

MI		MD
$ay1(n) + by2(n)$		$ax_1(-n+2) + bx_2(-n+2)$
$ax_1(-n+2) + bx_2(-n+2)$	=	$ax_1(-n+2) + bx_2(-n+2)$

Dado que las salidas son iguales entonces el sistema es **LINEAL**

(3) Invariante en el tiempo, pues sus parámetros no varían en el tiempo

(4) No causal, pues para generar la salida se requiere adelantos.

(5) Estable, pues para una entrada acotada, la salida también será acotada

(d) $y(n) = Trun[x(n)]$, donde $Trun[x(n)]$ denota la parte entera de $x(n)$, obtenida por truncamiento.

(1) Estático, pues para obtener la salida solo se emplean muestras presentes.

(2) La salida es el truncamiento de la entrada: $y_1(n) = Trun[x_1(n)]$

$y_2(n) = Trun[x_2(n)]$

La respuesta del sistema a una combinación lineal de estas dos señales es:

$y(n) = Trun[\ ax_1(n) + bx_2(n)\ ]$

Ejemplo

$y = Trun[\ 3*3.8 + 4*2.4\ ]$

Por otro lado, una combinación lineal de las dos salidas genera la salida siguiente:

MI MD

$ay_1(n) + by_2(n)$ $\quad\quad$ $\text{Trun}[\, ax_1(n) + bx_2(n) \,]$

3*Trun[3.8] + 4*Trun[2.4] $\quad\quad$ Trun[2*3.8 + 4*2.4]

$17 \neq 21$

Dado que las salidas son diferentes entonces el sistema es **NO LINEAL**

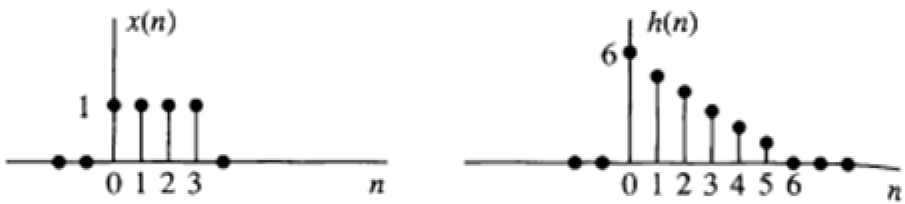
(3) Invariante en el tiempo, pues sus parámetros no varían en el tiempo

(4) Causal, pues para generar la salida se requiere la muestra en el instante y/o muestras pasadas.

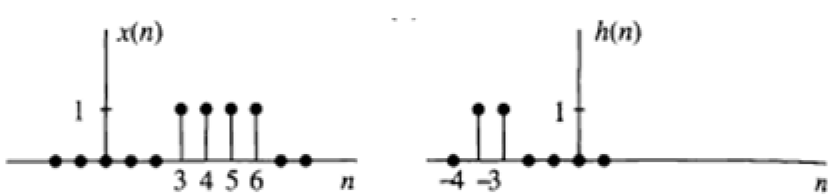
(5) Estable, pues para una entrada acotada, la salida también será acotada

Ejercicio 2 (2.17 John G. Proakis)

Calcula y traza la convolución x(n)∗h(n) y h(n)∗x(n) para los pares de señales siguientes:



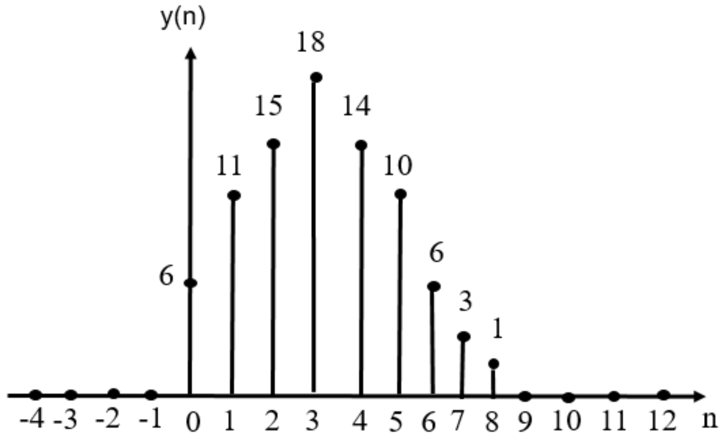
(a)



(c)

a) y(-4) = 0*0 = 0
   y(-3) = 0*0 + 0*0 = 0
   y(-2) = 0*6 + 0*0 + 1*0 = 0
   y(-1) = 0*5 + 0*6 + 1*0 + 1*0 = 0
   y(0) = 0*4 + 0*5 + 1*6 + 1*0 + 1*0 = 6
   y(1) = 0*3 + 0*4 + 1*5 + 1*6 +1*0 + 1*0 = 11

y(2) = 0*2 + 0*3 + 1*4 + 1*5 + 1*6 + 1*0 + 0*0 = 15
y(3) = 0*1 + 0*2 + 1*3 + 1*4 +1*5 + 1*6 + 0*0 = 18
y(4) = 0*0 + 0*1 + 1*2 + 1*3 +1*4 + 1*5 + 0*6 = 14
y(5) = 0*0 + 0*0 + 1*1 + 1*2 +1*3 + 1*4 + 0*5 = 10
y(6) = 0*0 + 0*0 + 1*0 + 1*1 +1*2 + 1*3 + 0*4 = 6
y(7) = 0*0 + 1*0 + 1*0 +1*1 + 1*2 + 0*3 = 3
y(8) = 1*0 + 1*0 + 1*0 + 1*1 + 0*2 = 1
y(9) = 1*0 + 1*0 + 1*0 + 0*1 = 0
y(10) = 1*0 + 1*0 + 0*0 = 0
y(11) = 1*0 + 0*0 = 0
y(12) = 0*0 = 0



c) y(-7) = 0*0 = 0
y(-6) = 0*0 + 0*1 = 0
y(-5) = 0*0 + 0*1 + 0*1 = 0
y(-4) = 0*0 +0*1 + 0*1 + 0*0 = 0
y(-3) = 0*0 + 0*1 + 0*1 + 0*0 + 0*0 = 0
y(-2) = 1*0 + 0*1 + 0*1 + 0*0 +0*0 + 0*0 = 0
y(-1) = 1*0 + 1*1 + 0*1 + 0*0 + 0*0 + 0*0 + 0*0 = 1
y(0) = 1*0 + 1*1 + 1*1 + 0*0 + 0*0 + 0*0 + 0*0 = 2
y(1) = 1*0 + 1*1 + 1*1 + 1*0 + 0*0 + 0*0 + 0*0 = 2
y(2) = 0*0 + 1*1 + 1*1 + 1*0 + 1*0 + 0*0 + 0*0 = 2
y(3) = 0*0 + 0*1 + 1*1 + 1*0 + 1*0 + 1*0 + 0*0 = 1
y(4) = 0*1 + 0*1 + 1*0 + 1*0 + 1*0 + 1*0 = 0
y(5) = 0*1 + 0*0 + 1*0 + 1*0 + 1*0 =0
y(6) = 0*0 + 0*0 + 1*0 + 1*0 = 0
y(7) = 0*0 + 0*0 + 1*0 = 0
y(8) = 0*0 + 0*0 = 0

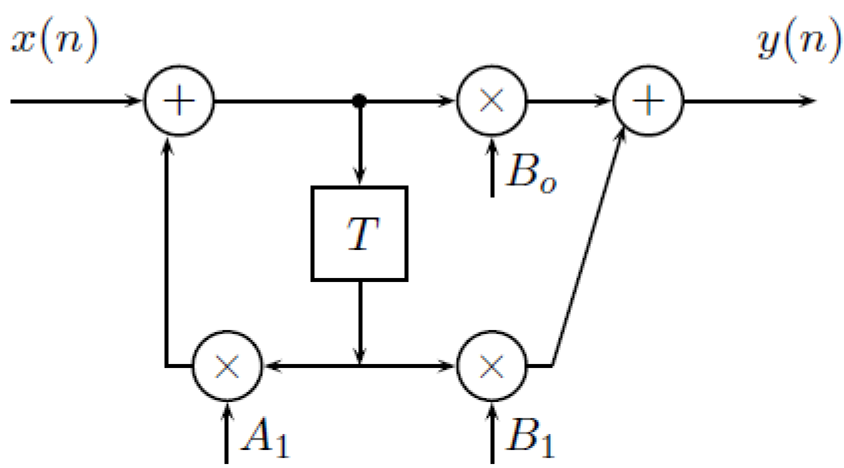
y(9) = 0*0 = 0

Ejercicio 3

Para los sistemas de las figuras I y II, obtenga:

a) La ecuación de diferencia.

Figura I



$$u(n) = x(n) + A_1 u(n-1)$$
$$y(n) = B_0 u(n) + B_1 u(n-1)$$

Despejar u(n-1) en la primera ecuación: $u(n-1) = \frac{u(n)-x(n)}{A1}$

Aplicar despeje en la segunda ecuación: $y(n) = B_0 u(n) + \frac{B_1}{A_1}[u(n) - x(n)]$

$$y(n) = \left(B_0 + \frac{B_1}{A_1}\right) u(n) - \frac{B_1}{A_1}\, x(n)$$

Despejar u(n) en la ecuación anterior $u(n) = \frac{A_1 y(n) + B_1\, x(n)}{A_1 B_0 + B_1}$

Sustituyendo la anterior en la segunda ecuación:

$$y(n) = \frac{B_0A_1y(n) + B_0B_1\,x(n)}{A_1B_0 + B_1} + \frac{B_1A_1y(n-1) + B_1^2\,x(n-1)}{A_1B_0 + B_1}$$

$$(A_1B_0 + B_1)y(n) = A_1B_0y(n) + B_1B_0x(n) + A_1B_1y(n-1) + B_1^2\,x(n-1)$$

$$y(n) = B_0x(n) + B_1x(n-1) + A_1y(n-1)$$