Taller 1 de Análisis Numérico

Harold Pinilla y David Suárez

22 de agosto de 2021

1. Introducción

El fin de este taller tiene el fin de poder conocer métodos para encontrar las raíces de una función f(x), en este caso vamos a trabajar sobre el método de posición falsa como el designado a trabajar como también el método de bisección, Algoritmo delta 2 de Aitken

2. Algoritmo de bisección

2.1. Introducción general del método

Es el método más elemental y antiguo para determinar las raíces de una ecuación. Está basado directamente en el teorema de Bolzano. Consiste en partir de un intervalo $[x_0, x_1]$ tal que $f(x_0) * f(x_1) < 0$, por lo que sabemos que existe, al menos, una raíz real. A partir de este punto se va reduciendo el intervalo sucesivamente hasta hacerlo tan pequeño como exija la precisión que hayamos decidido emplear.

2.2. Preguntas

2.2.1. Cuales son condiciones para aplicar el método y señalar donde quedan implementadas en su codificación

Las principales condiciones para aplicar el método de bisección son que la función a evaluar debe ser continua, también se debe recibir un intervalo [a,b] y dentro de este intervalo tiene que cumplirse el teorema de Bolzano que consiste en evaluar a y b en la función y debe cumplirse que $f(a) * f(b) < 0$ para asegurar que exista al menos una raíz. Dentro del código implementado en R, se supone que los ejercicios son continuos así que no se implementa su demostración dentro de este. El teorema de Bolzano se ve implementado en algunos condicionales if en donde se dice que debe tener signos contrarios en los puntos evaluados para que exista al menos una raíz.

2.2.2. Proporcione una explicación geométrica del algoritmo

La explicación geométrica de este algoritmo se basa principalmente en que se debe hallar el punto c intermedio entre el intervalo [a,b] de tal forma en que se vayan generando subintervalos en donde se aplique el teorema de Bolzano para comprobar si existen raices en esos intervalos. De esta manera el punto c que se haya principalmente se va a ir acercando cada vez más al valor real de la raíz que exista. El número de iteraciones depende de la precisión con la que se este trabajando.

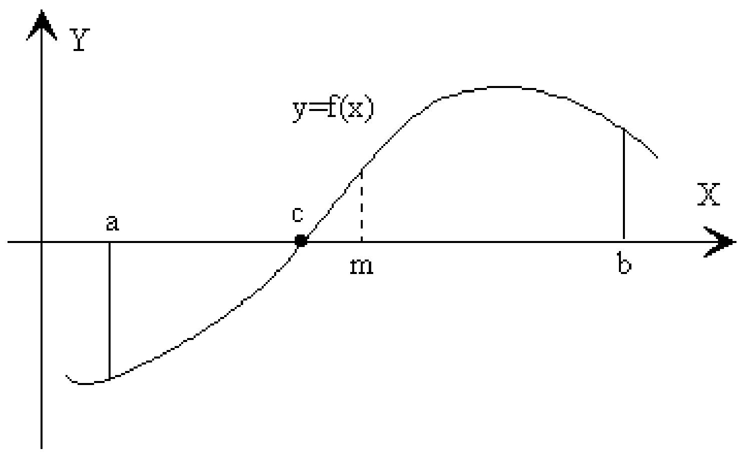

Figura 1: Explicación geométrica del método de bisección.

2.2.3. Realice un diagrama de flujo que muestre como se debe operar el algoritmo

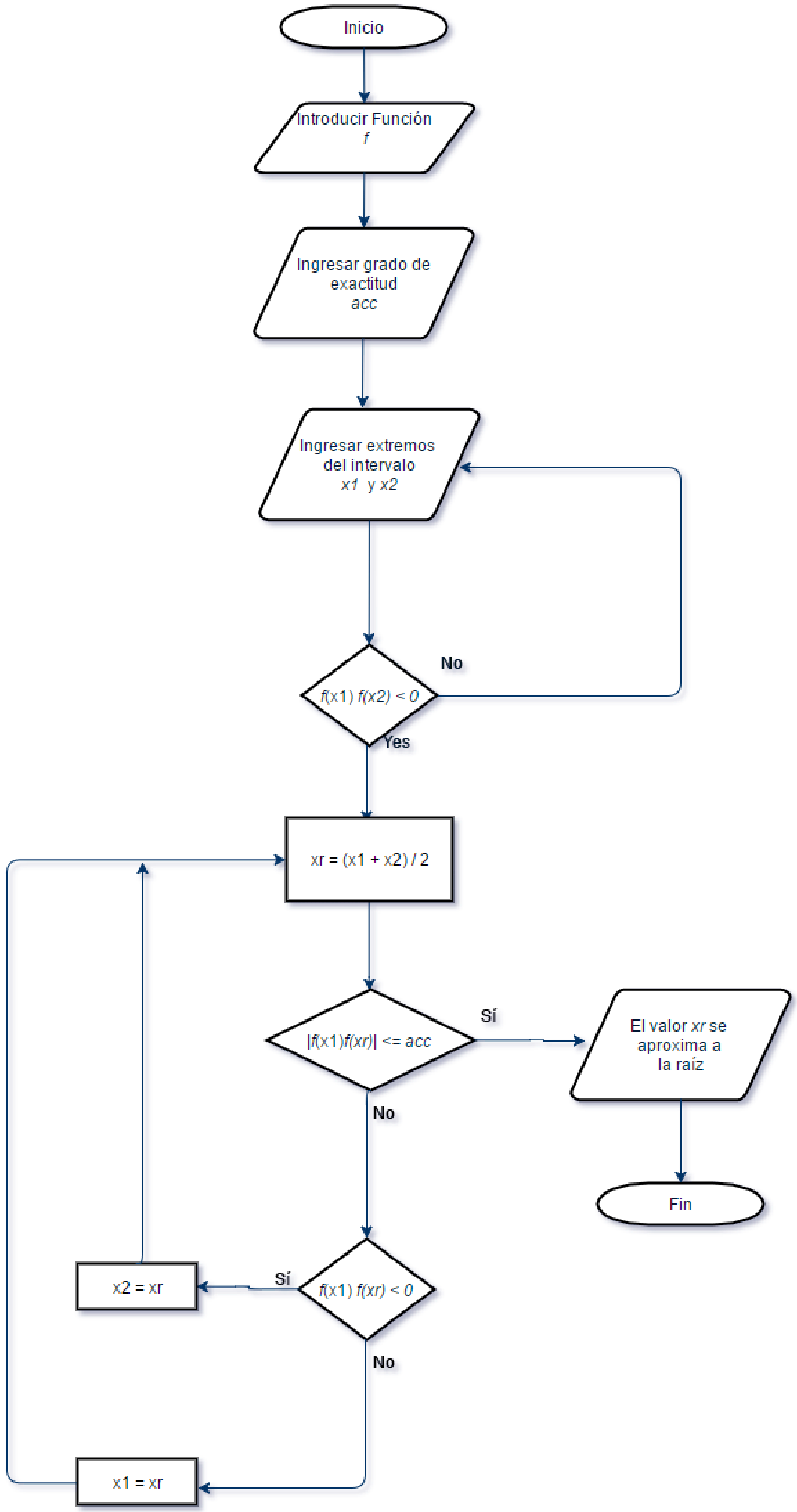

Figura 2: Diagrama de flujo del método de bisección.

2.2.4. Aplicar el método y determinar la solución incluyendo la validación del resultado

En las siguientes imágenes se tienen los resultados obtenidos en R al aplicar este método:

Punto 1:

Punto	Ejercicio	Intervalo	Tolerancia			
1	$f(x)$=cos^2(x)−x^2	[0,2]	10^-8	10^-16	10^-32	10^-56
		N° iteraciones:	27	52	52	52
		Valor raíz:	0.7390851303935051	0.7390851332151607	0.7390851332151607	0.7390851332151607
		Wolfram:	$x \approx$ 0.7390851332151606416553120876738734040134			

Figura 3: Aplicación del ejercicio N°1.

Punto 2:

Al aplicar este método en R, nos topamos con una dificultad ya que la función en cualquier intervalo siempre tiene un valor positivo en su imagen, esto hace que el teorema de Bolzano no se pueda cumplir ya que no se puede garantizar que exista al menos una raíz y como este método utiliza el teorema entonces no se pudo hallar una solución como tal. La única forma para hallar el valor de la raíz es cuando el intervalo inicia o termina en 0 ya que este es el valor de la raíz y el algoritmo hace la evaluación en este hallando la raíz.

Punto 3:

Punto	Ejercicio	Intervalo	Tolerancia			
3	$f(x)$=x^3-2x^2+(4/3)x-(8/27)	[0,1]	10^-8	10^-16	10^-32	10^-56
		N° iteraciones:	7	16	16	16
		Valor raíz:	0.6679687500000000	0.6666641235351562	0.6666641235351562	0.6666641235351562
		Wolfram:	$x \approx$ 0.66666666666666666666666666666666666666666667			
	$f(x)$=x^3-2x-5	[1,5 , 2,5]	10^-8	10^-15	10^-32	10^-56
		N° iteraciones:	26	50	Infinito	Infinito
		Valor raíz:	2,09455148130655	2,09455148154232	NA	NA
		Wolfram:	$x \approx$ 2.09455148154232659148238654057930296385730611			

Figura 4: Aplicación del ejercicio N°3.

Punto 4:

Punto	Ejercicio	Intervalo	Tolerancia			
4	$f(x)$=((gm)/c)*(1-e^-(c/m)*t)-v	[14,16]	10^-8	10^-16	10^-32	10^-56
		N° iteraciones:	25	49	49	49
		Valor raíz:	14,7802038282399	14.7802038316610567	14.7802038316610567	14.7802038316610567
		Wolfram:	$x \approx$ 14.7802038316610571101732666886958753585…			

Figura 5: Aplicación del ejercicio N°4.

Punto 5:

Punto	Ejercicio	Intervalo	Tolerancia			
5	f(t)=3sin^3(t)-1; g(t)=4sin(t)cos(t)	[0,2]	10^-8	10^-16	10^-32	10^-56
		N° iteraciones:	26	Infinito	Infinito	Infinito
		Valor raíz:	1.1864950209856033	NA	NA	NA

Figura 6: Aplicación del ejercicio N°5.

2.2.5. Evaluar la relación numero de iteraciones versus tolerancia deseada; perdida de significancia versus número de iteraciones en cada caso

En todos los ejercicios se pudó observar que cuando existe una mayor tolerancia el método requerirá de un mayor número de iteraciones ya que tiene que tener una mayor precisión el resultado que se quiere obtener. Debido a esto, en algunos casos no fué posible aplicar tolerancias mayores a $10^{-}15$ ya que cuando superaba esta tolerancia entreban en un bucle infinito ya que la máquina o la herramienta R no tienen la suficiente precisión para realizar estos cálculos. Especificamente, al utilizar Rstudio nos topamos con el inconveniente de que la herramienta dejaba ver hasta un máximo de 16 cifras decimales lo cual dificulta trabajar con cifras que requieren de una gran precisión.

2.2.6. Teniendo en cuenta los resultados anteriores, cómo se puede solucionar el problema de significancia, es remediable o está destinado al fracaso, en los casos (ejercicios) que se presente el problema

Hay unos ejercicios en donde se está destinado al fracaso ya que se cuentan con infinitos números decimales como es el caso del primer ejercicio del punto 3 ya que el valor exacto de la raíz encontrado con WolframAlpha es de 2/3 el cual tiene infinitos decimales. Ajustando la precisión de los valores en la herramienta R es posible acercarse un poco más al valor real pero nunca al valor exacto por lo cual la herramienta, para este caso, después de usar una tolerancia de $10^{-}16$ siempre nos arroja el mismo valor sin importar lo mucho que se aumente el valor de la tolerancia.

2.2.7. Qué pasa con el método cuando hay más de dos raíces, explique su respuesta, encontrar la multiplicidad

Este método evalua subintervalos cada vez que encuentra un valor c, estos subintervalos podrían ser [a,c] o [c,b] dependiendo de si cumplen o no con el teorema de Bolzano. Cuando existen multiples raices con este método no se pueden hallar ya que siempre va a encontrar el valor de solo una raíz. Esto se debe principalmente a que no es un método recursivo y solamente evalua un intervalo y se olvida de los demás si es que estos tenían más raices.

2.2.8. ¿Qué pasa con el método cuando la función es periódica, par o impar, estas características influyen?

Cuando las funciones son pares en el intervalo dado, este método no puede hallar el valor de las raíces ya que no se cumpliría con el teorema de Bolzano debido a que la función evaluada en los valores de ese intervalo no tendrían un cambio de signo y no se cumpliría con este teorema. En cambio, cuando la función es impar en el intervalo dado, el teorema de Bolzano garantiza que existe al menos una raíz en ese intervalo. Cuando una función es periodica y tiene multiples raíces en un intervalo dado, el metodo podría o bien no hallar una solución si la precisión no lo permite o bien podría hallar solamente una solución ya que no permite la multiplicidad.

2.2.9. Realice una gráfica que muestre cómo se comporta el método en cada caso con respecto a la tolerancia y al número de iteraciones

Punto 1:

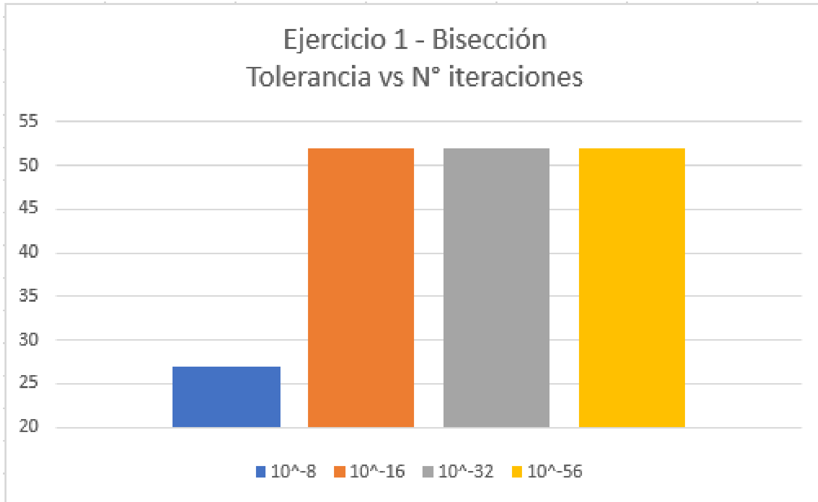

Figura 7: Tolerancia vs N° Iteraciones - ejercicio N°1.

Punto 2:

Como se menciono anteriormente, debido a que no cumple con el teorema de Bolzano no fue posible encontrar una raíz en ningún intervalo que no inicie o termine con 0.

Punto 3:

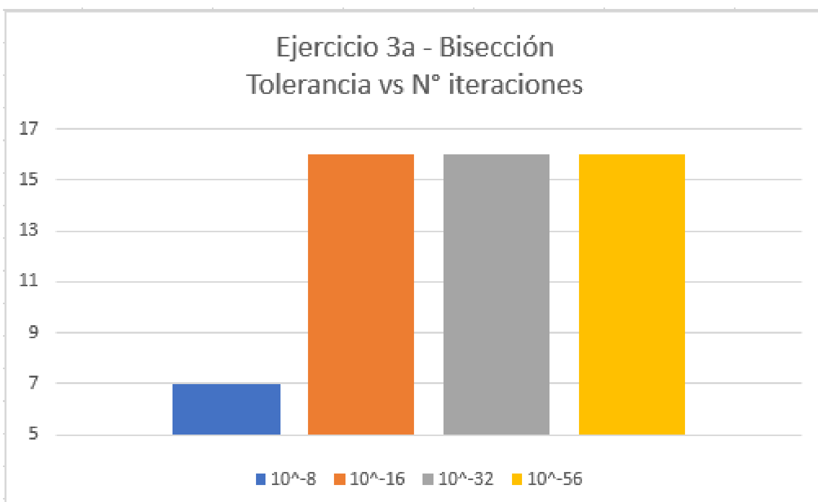

Figura 8: Tolerancia vs N° Iteraciones - ejercicio N°3a.

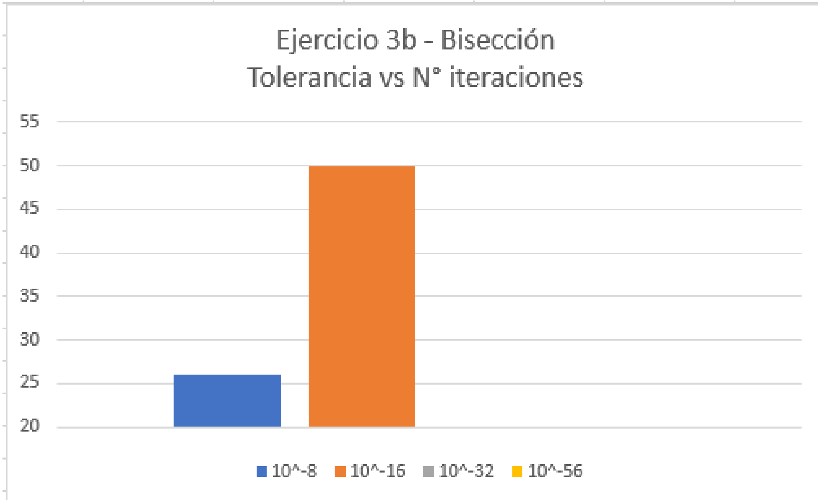

Figura 9: Tolerancia vs N° Iteraciones - ejercicio N°3b.

Punto 4:

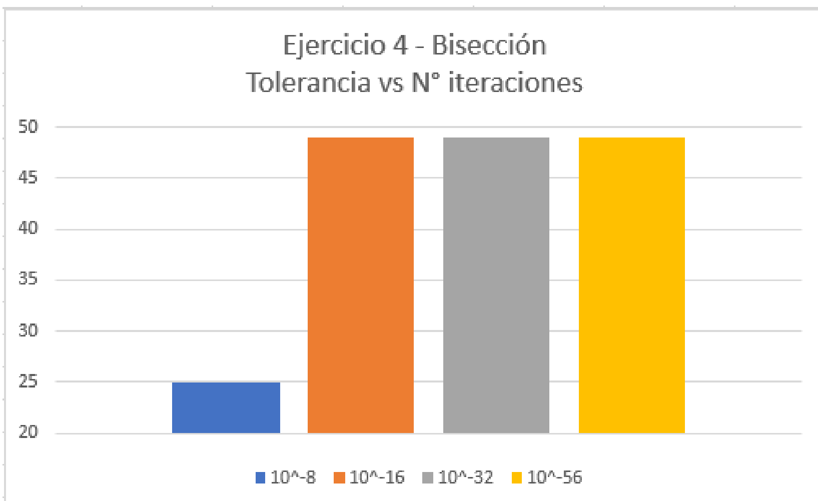

Figura 10: Tolerancia vs N° Iteraciones - ejercicio N°4.

Punto 5:

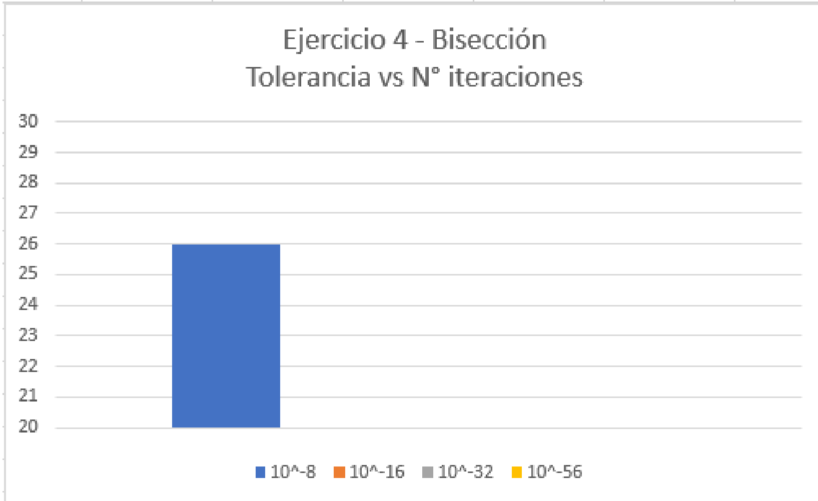

Figura 11: Tolerancia vs N° Iteraciones - ejercicio N°5.

2.2.10. Como se comporta el método con respecto a la solución con Taylor

Este método tiene una convergencia menor con respecto a la de Taylor ya que el método de bisección tiene una convergencia lineal, esto quiere decir que cada vez que se realiza una iteración el número de cifras decimales aumenta de manera constante. Por lo general, cuando se implementa una solución por medio de las series de Taylor se puede observar que estan convergen con mayor rápidez, y por lo tanto, con mayor eficiencia y eficacia que el método de bisección.

3. Algoritmo de la falsa posición

3.1. Introducción general del método

El método de la posición falsa intenta juntar la seguridad que proporciona el método de la bisección con la rápidez que tiene el método de la secante. En este método se parte de dos puntos los cuales están rodeando la raíz de $f(x) = 0$, esto quiere decir que son los dos puntos los cuales $f(a) * f(b)$ sean menores a 0. Después de esto se toma un punto c el cual es calculado tomando la intersección en el eje X entre una recta la cual une los puntos $f(a)$ y $f(b)$. Después de esto se asigna un nuevo intervalo el cual viene dado por una comparación entre ambos intervalos, $[a, c]$ y $[c, b]$, se toma aquel que cumpla $f(a) * f(c)$ o $f(c) * f(b)$ menor que 0.

3.2. Preguntas

3.2.1. Cuales son condiciones para aplicar el método y señalar donde quedan implementadas en su codificación

Las principales condiciones para aplicar el método de bisección son que la función a evaluar debe ser continua, también se debe recibir un intervalo [a,b] y dentro de este intervalo tiene que cumplirse el teorema de Bolzano que consiste en evaluar a y b en la función y debe cumplirse que $f(a) * f(b) < 0$ para asegurar que exista al menos una raíz. Dentro del código implementado en R, se supone que los ejercicios son continuos así que no se implementa su demostración dentro de este. El teorema de Bolzano se ve implementado en algunos condicionales if en donde se dice que debe tener signos contrarios en los puntos evaluados para que exista al menos una raíz.

3.2.2. Proporcione una explicación geométrica del algoritmo

La explicación geométrica de este algoritmo se basa principalmente en que se debe hallar un punto c que se puede hallar utilizando una fórmula que se extrae de una relación de triángulos que se puede hallar entre un triángulo principal con lados f(b)-f(a) y b-a y otro triángulo más interno que se forma entre los lados f(b) y b-c. Con estas relaciones se puede despejar el valor c dando como resultado una fórmula que al aplicarse e ir iterandose, se va acercando al valor real de la raíz que haya en el intervalo dado.

3.2.3. Realice un diagrama de flujo que muestre como se debe operar el algoritmo

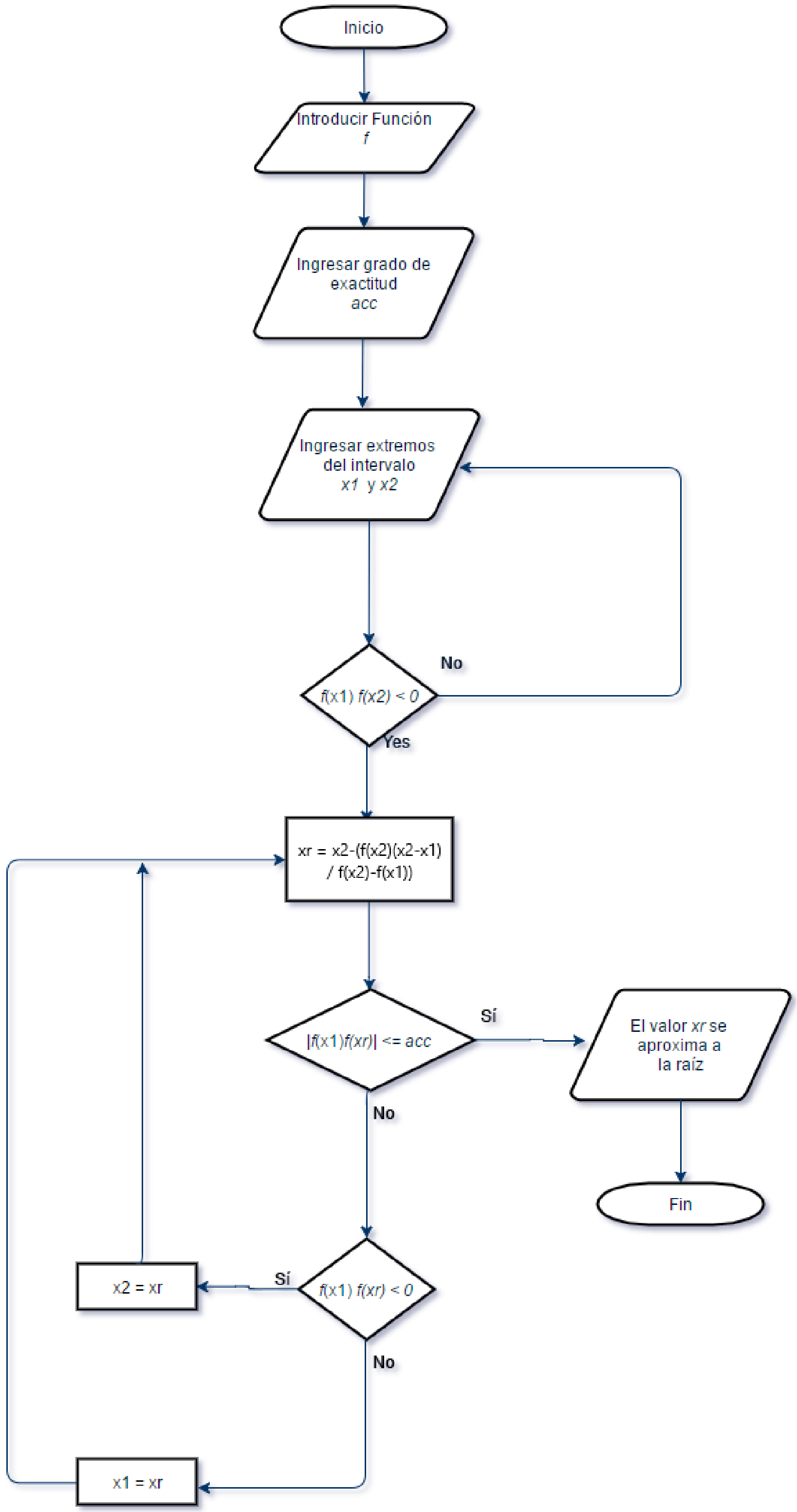

Figura 12: Diagrama de flujo método falsa posición.

3.2.4. Aplicar el método y determinar la solución incluyendo la validación del resultado

En las siguientes imágenes se tienen los resultados obtenidos en R al aplicar este método:

Punto 1:

Punto	Ejercicio	Intervalo	Tolerancia			
1	$f(x)$=cos^2(x)−x^2	[0,2]	10^-8	10^-15	10^-32	10^-56
		N° iteraciones:	12	21	Infinito	Infinito
		Valor raíz:	0.7390851323225129	0.7390851332151605	NA	NA
		Wolfram:	$x \approx$ 0.73908513321516064165531208767387340401 34			

Figura 13: Aplicación falsa posición punto 1.

Punto 2:

Al aplicar este método en R, nos topamos con una dificultad ya que la función en cualquier intervalo siempre tiene un valor positivo en su imagen, esto hace que el teorema de Bolzano no se pueda cumplir ya que no se puede garantizar que exista al menos una raíz y como este método utiliza el teorema entonces no se pudo hallar una solución como tal. La única forma para hallar el valor de la raíz es cuando el intervalo inicia o termina en 0 ya que este es el valor de la raíz y el algoritmo hace la evaluación en este hallando la raíz.

Punto 3:

Punto	Ejercicio	Intervalo	Tolerancia			
3	$f(x)$=x^3-2x^2+(4/3)x-(8/27)	[0,1]	10^-8	10^-16	10^-32	10^-56
		N° iteraciones:	Infinito	Infinito	Infinito	Infinito
		Valor raíz:	NA	NA	NA	NA
		Wolfram:	$x \approx$ 0.6666666666666666666666666666666666666666667			
	$f(x)$=x^3-2x-5	[1,5 , 2,5]	10^-8	10^-15	10^-32	10^-56
		N° iteraciones:	12	21	Infinito	Infinito
		Valor raíz:	2.0945514810680281	2.0945514815423265	NA	NA
		Wolfram:	$x \approx$ 2.09455148154232659148238654057930296385730611			

Figura 14: Aplicación falsa posición punto 3.

Punto 4:

Punto	Ejercicio	Intervalo	Tolerancia			
4	$f(x)$=((gm)/c)*(1-e^-(c/m)*t)-v	[14,16]	10^-8	10^-16	10^-32	10^-56
		N° iteraciones:	5	11	11	11
		Valor raíz:	14.7802038326281266	14.7802038316610567	14.7802038316610567	14.7802038316610567
		Wolfram:	$x \approx$ 14.7802038316610571101732666886958753585…			

Figura 15: Aplicación falsa posición punto 4.

Punto 5:

Punto	Ejercicio	Intervalo	Tolerancia			
5	f(t)=3sin^3(t)-1; g(t)=4sin(t)cos(t)	[0,2]	10^-8	10^-16	10^-32	10^-56
		N° iteraciones:	Infinito	Infinito	Infinito	Infinito
		Valor raíz:	NA	NA	NA	NA
		Wolfram:	NA			

Figura 16: Aplicación falsa posición punto 5.

3.2.5. Evaluar la relación numero de iteraciones versus tolerancia deseada; perdida de significancia versus número de iteraciones en cada caso

En todos los ejercicios se pudó observar que cuando existe una mayor tolerancia el método requerirá de un mayor número de iteraciones ya que tiene que tener una mayor precisión el resultado que se quiere obtener. Debido a esto, en algunos casos no fué posible aplicar tolerancias mayores a $10^{-}15$ ya que cuando superaba esta tolerancia entreban en un bucle infinito ya que la máquina o la herramienta R no tienen la suficiente precisión para realizar estos cálculos. Especificamente, al utilizar Rstudio nos topamos con el inconveniente de que la herramienta dejaba ver hasta un máximo de 16 cifras decimales lo cual dificulta trabajar con cifras que requieren de una gran precisión.

3.2.6. Teniendo en cuenta los resultados anteriores, cómo se puede solucionar el problema de significancia, es remediable o está destinado al fracaso, en los casos (ejercicios) que se presente el problema

En correlación con el método anterior, existe un mayor número de ejercicios en donde se está destinado al fracaso ya que se cuentan con infinitos números decimales como es el caso del primer ejercicio del punto 3 ya que el valor exacto de la raíz encontrado con WolframAlpha es de 2/3 el cual tiene infinitos decimales. Ajustando la precisión de los valores en la herramienta R es posible acercarse un poco más al valor real pero nunca al valor exacto por lo cual la herramienta, para este caso, después de usar una tolerancia de $10^{-}16$ siempre nos arroja el mismo valor sin importar lo mucho que se aumente el valor de la tolerancia. Igualmente, al aplicar este método en el ejercicio 5 también está destinado al fracaso ya que para todas las tolerancias aplicadas se obtuvo un bucle infinito ya que no tiene la suficiente precisión para acercarse lo suficiente al valor real.

3.2.7. Que pasa con el método cuando hay más de dos raíces, explique su respuesta, encontrar la multiplicidad

Este método funciona de manera muy similar al método de bisección en donde se evaluan subintervalos cada vez que encuentra un valor c, estos subintervalos podrían ser [a,c] o [c,b] dependiendo de si cumplen o no con el teorema de Bolzano. Cuando existen multiples raices con este método no se pueden hallar ya que siempre va a encontrar el valor de solo una raíz. Esto se debe principalmente a que no es un método recursivo y solamente evalua un intervalo y se olvida de los demás si es que estos tenían más raices.

3.2.8. ¿Qué pasa con el método cuando la función es periódica, par o impar, estas características influyen?

Al igual que ocurre con el método de bisección, cuando las funciones son pares en el intervalo dado, este método no puede hallar el valor de las raíces ya que no se cumpliría con el teorema de Bolzano debido a que la función evaluada en los valores de ese intervalo no tendrían un cambio de signo y no se cumpliría con este teorema. En cambio, cuando la función es impar en el intervalo dado, el teorema de Bolzano garantiza que existe al menos una raíz en ese intervalo. Cuando una función es periodica y tiene multiples raíces en un intervalo dado, el metodo podría o bien no hallar una solución si la precisión no lo permite o bien podría hallar solamente una solución ya que no permite la multiplicidad.

3.2.9. Realice una gráfica que muestre cómo se comporta el método en cada caso con respecto a la tolerancia y al número de iteraciones

Punto 1:

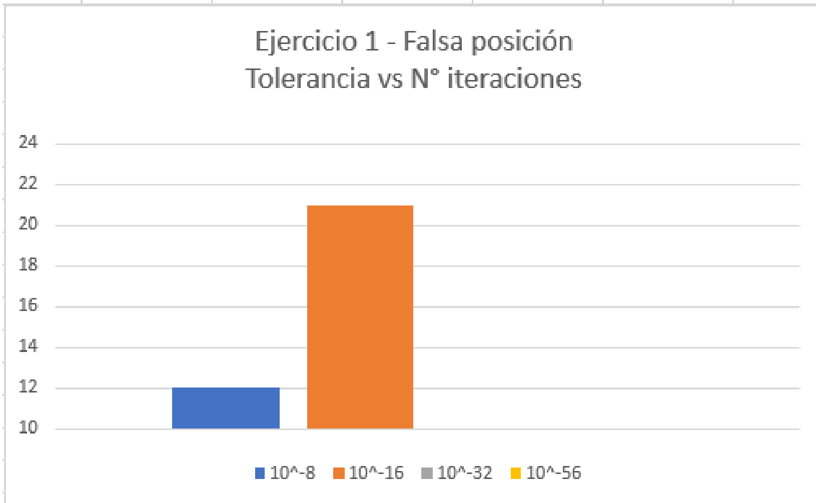

Figura 17: FP. Tolerancia vs N° Iteraciones - ejercicio N°1.

Punto 2:

Como se menciono anteriormente, debido a que no cumple con el teorema de Bolzano no fue posible encontrar una raíz en ningún intervalo que no inicie o termine con 0.

Punto 3:
Al primer ejercicio de este punto no se le pudo encontrar ninguna raíz con este método.

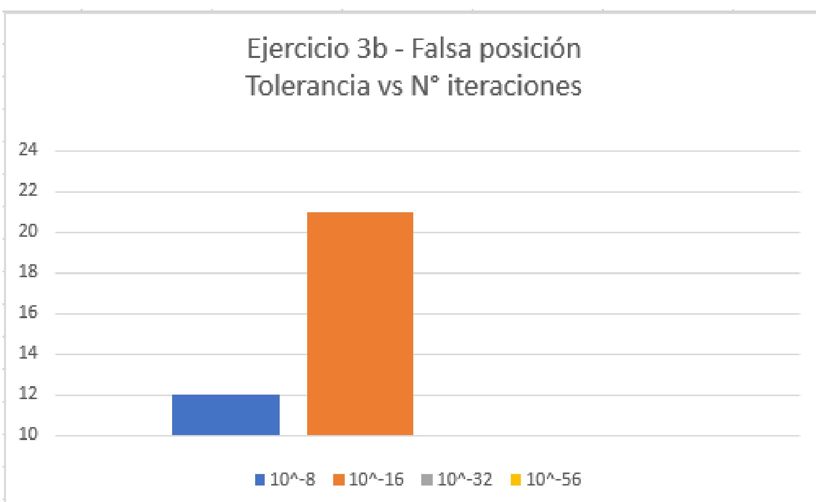

Figura 18: FP. Tolerancia vs N° Iteraciones - ejercicio N°3b.

Punto 4:

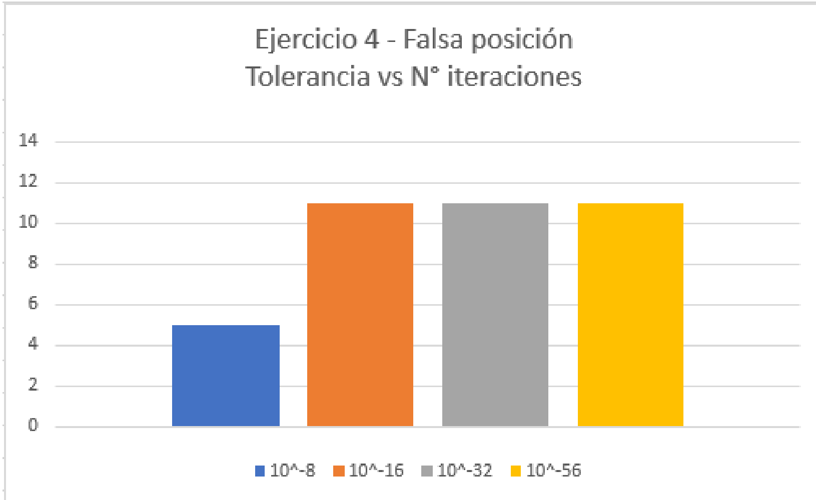

Figura 19: FP. Tolerancia vs N° Iteraciones - ejercicio N°4.

Punto 5:

A este ejercicio no se le pudo encontrar ninguna raíz con este método.

3.2.10. Cada ejercicio debe ser comparado con el método de bisección

Este método funciona de manera similar al método de bisección, cambia en la manera de encontrar el valor c en el intervalo [a,b] ya que en este no se encuentra el valor intermedio si no que hay que aplicar una fórmula como la descrita en la explicación geométrica anteriormente explicada en este método. Otro de los factores en los que cambia con respecto al método de bisección es que el método de la falsa posición tiene una convergencia superlineal en contraste con la convergencia del método de bisección que tiene una convergencia lineal. La convergencia lineal aumenta las cifras decimales de manera constante mientras que la convergencia superlineal lo hace de manera incremental.

3.2.11. Como se comporta el método con respecto a la solución con Taylor

Aunque el método de Taylor generalmente es muy rápido y efectivo se podría implementar una mejora considerable, pues si tomara un promedio de las dos pendientes existentes en x_0–x_n se podría tener un valor más aproximado en menos tiempo. básicamente la posición falsa si tiene esta pequeña mejora, ya que al trazar la línea recta entre $x_0 y x_n$ y al conocer cual está más cercano a la raíz se puede optimizar el tiempo y la exactitud del método

4. Algoritmo de Aikten

$$\hat{x}_{n+2} = x_{n+2} - \frac{(x_{n+2} - x_{n+1})^2}{x_{n+2} - 2\,x_{n+1} + x_n}$$

Figura 20: Ecuación Aikten con metodo de stefenssen

4.1. Introducción general del metodo

En analisis numerico se utiliza el metodo de Aikten para poder acelerar la convergencia de todas las sucesiónes que converjan linealmente, independiente de su origen. Cuando se aplica el método de Aitken a una sucesión obtenida mediante una iteración de punto fijo se conoce como método de Steffensen.

4.1.1. Cuales son condiciones para aplicar el método y señalar donde quedan implementadas en su codificación

Cuando hablamos del algoritmo de Aikten tenemos que entender que este metodo consiste en acelerar las diferentes sucesiones en cada Xn siempre y cuando cumpla con las condiciones de la siguiente imagen:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\hat{x}_n - \ell}{x_n - \ell} = 0.$$

Figura 21: Limite Aikten

Para que se pueda continuar esta sucesión se requiere mantener un caso de convergencia lineal para que así se pueda desarrollar la aceleración por medio del metodo.

4.1.2. Realice un diagrama de flujo que muestre como se debe operar el algoritmo

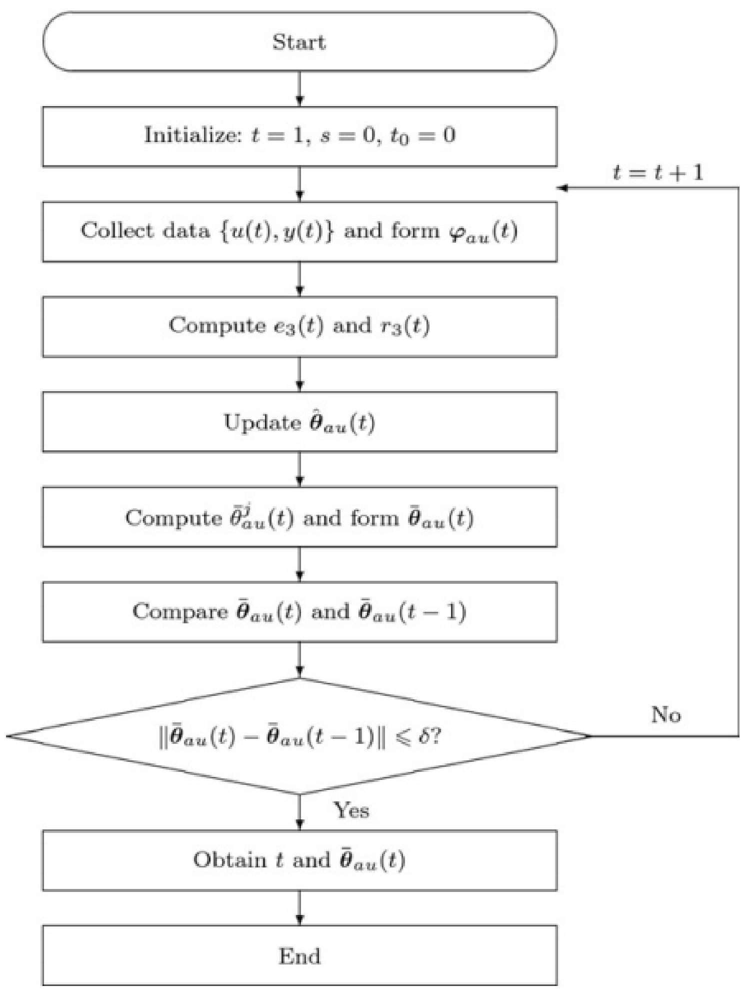

Figura 22: Diagrama de flujo del método de Aitken.

4.1.3. Evaluar la relación numero de iteraciones versus tolerancia deseada; perdida de significancia versus número de iteraciones en cada caso

Presenta una convergencia rápida y no requiere, como en el caso del método de la secante, la evaluación de derivada alguna. Tiene convergencia cuadrática como el método de Newton.

4.1.4. Teniendo en cuenta los resultados anteriores, cómo se puede solucionar el problema de significancia, es remediable o está destinado al fracaso, en los casos (ejercicios) que se presente el problema

Los ejercicios que tienen raices con decimales infinitos están destinados al fracaso ya que las aproximaciones nunca se van a acercar lo sufiente al valor real debido a las limitaciones de la máquina (epsilon) y a las limitaciones de las herramientas utilizadas (R y python).

4.1.5. Que pasa con el método cuando hay más de dos raíces, explique su respuesta, encontrar la multiplicidad

En el caso del metodo cuando se encuentran más de dos raices se da que por cada valor el cual es evaluado y que se ingresa, permite hayar la raiz que se encuentre proxima al numero ingresado, por esto se tendrán que realizar varias iteraciones con un respectivo rango para poder definir las raices que existentes en este.

4.1.6. ¿Qué pasa con el método cuando la función es periódica, par o impar, estas características influyen?

Las funciones periodicas si tienen su influencia sobre el metodo de Aitken ya que la raíz depende del valor dado y su raiz mas cercana al valor, y también esta tiene su influencia en ser par o impar ya que al no tener tantas iteraciones no se encontraría la raiz de las funciones

4.1.7. Cada ejercicio debe ser comparado con el método de bisección

Al comparar este método con el de bisección pudimos observar que la convergencia es mucho mayor en comparación, este método es más eficiente y eficaz y le ayuda a métodos como el de bisección a que aumenten su velocidad de convergencia haciendo que requieran de menos iteraciones para hallar el valor de las raices dentro de un intervalo dado

4.1.8. Como se comporta el método con respecto a la solución con Taylor

Las series de Taylor en este caso podrían ser más óptimas y tener más rápidez que el método de Aitken pues Taylor tiene una ventaja muy favorable y es que tiene un orden de convergencia que puede trabajar cuadráticamente mientras que Aitken, aunque en la mayoría de casos es muy rápido, se necesita encontrar una segunda derivada, lo cual puede limitar su uso y su velocidad dependiendo del ejercicio. Aunque los dos están un poco más encaminadas a la solución de problemas generales, Taylor llevará la ventaja al tener más cifras significativas en cada iteración. Esto podría reflejarse en duplicar la aproximación a la raíz respecto al método de Aitken.