Pontificia Universidad JAVERIANA Bogotá

Facultad de Ciencias

Departamento de Matemáticas

eherrera@javeriana.edu.co

Taller Integración y Ecuaciones Diferenciales

Análisis Numérico

1. **Integración**
   a. **G1:** Teniendo en cuenta que en la regla de los trapecios el error de truncamiento está dado por:

$$-\frac{h^2}{12}(b-a)f''(z), \quad a \le z \le b$$

Estime el número mínimo de trapecios para aproximar $\int_0^2 \sin 2x dx$ donde la respuesta tenga un error absoluto menor de 0.0001.

   b. **G2**: Aplique lo anterior (numeral a), para aproximar $\int_0^2 \sqrt{x} sinx dx$ y evaluar el error de truncamiento y el error relativo
   c. **G3**: Dados los siguientes puntos:

$$(0.1, 1.8), (0.2, 2.6), (0.3, 3.0), (0.4, 2.8), (0.5, 1.9)$$

   Utilicé la fórmula de Simpson para encontrar una aproximación del área bajo la curva y calculé su error de truncamiento. Qué resultado se obtendría si primero interpola con Lagrange y luego calcula la integral compare los resultados con respecto al área
   d. **G6**: Con la fórmula de Simpson integrar iterativamente $\int_0^2 \sqrt{1+cos^2 x} dx$ hasta que el error de truncamiento sea menor de 0.00001, cuantas iteraciones realizo y calcular el error comparado con la solución de la integral con la solución exacta.
   e. **G4**: Desarrolle una implementación en R y/o Python que permita utilizar la regla de Simpson calcular el área entre dos curvas y aplicarla para encontrar el área entre las curvas dadas por:

$$f(x) = 4 + \cos(x+1)\, ;\, g(x) = e^x sinx$$

   Utilice una tolerancia 10^-8
   f. **G5**: Teniendo en cuenta que las fórmulas de Simpson y de Trapecios, pertenecen al grupo donde los nodos están igualmente espaciados ósea partición regular; lo cual no siempre arroja las mejores aproximaciones. Por lo tanto, la fórmula de la cuadratura de Gauss con dos puntos es una alternativa, la regla está dada en la siguiente expresión.

$$A = \int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}\right)dt = \frac{b-a}{2}\left[f\left(-\frac{b-a}{2}\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{b+a}{2}\right) + f\left(\frac{b-a}{2}\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{b+a}{2}\right)\right]$$

Facultad de Ciencias

Departamento de Matemáticas

eherrera@javeriana.edu.co

Impleméntela y aplíquela para aproximar $\int_1^2 xe^x dx$ y utilice la misma fórmula de cuadratura de Gauss, pero particione la integral de la siguiente manera:

$$\int_1^2 xe^x dx = \int_1^{1.5} xe^x dx + \int_{1.5}^2 xe^x dx$$

Que puede decir acerca de la solución en comparación de la solución propuesta en la parte h, hay una mejora y de cuanto es

i. **G1-G2**: Realice una revisión de la librería en R y/o Python para el caso de las integrales impropias. ¿Es posible para estas integrales utilizar la regla de Simpson? Y aplique para encontrar para aproximar las siguientes integrales y compárela con la solución que obtiene utilizando GeoGebra o Wolfram Alpha

$$\int_1^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^3} dx \ ; \ \int_0^1 \frac{sinx}{x} \mathrm{dx}$$

j. **G3-G4**: Utilice el siguiente código de la regla de Simpson en dos direcciones (para integrales dobles) para resolver el siguiente problema:
Un lago tiene una forma que aproximadamente es rectangular. Las dimensiones son 200 metros de ancho por 400 metros de largo. Se realiza una partición (grilla) para estimar aproximadamente la profundidad en metros en cada cuadricula de la malla como se muestra en la siguiente tabla de datos. Utilice los datos para estimar el volumen aproximado de agua que contiene el lago

X / Y	0	100	200	300	400
0	0	0	4	6	0
50	0	3	5	7	3
100	1	5	6	9	5
150	0	2	3	5	1
200	0	0	1	2	0

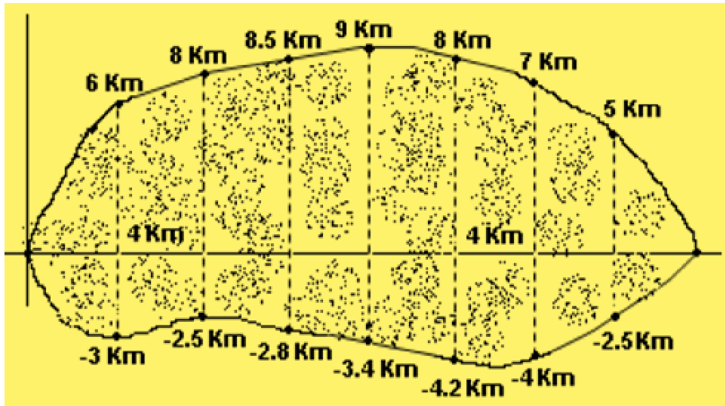
```
from sympy import*
from simpson import*
def simpson2(f,ax,bx,ay,by,mx,my):
    x=Symbol('x')
    dy=(by-ay)/my
    v=ay
    r=[]
    for i in range (0,my+1):
        def g(x): return f(x,v)
        u=simpson(g,ax,bx,mx)
        r=r+[u]
        v=v+dy
    s=0
    for i in range(1,my):
        s=s+2*(2-(i+1)%2)*r[i]
    s=dy/3*(r[0]+s+r[my])
    return s
```

k. **G5-G6**: En el siguiente gráfico se muestra delineada la zona de derrame de petróleo ocurrido en Caño Limón, donde las mediciones han sido obtenidas a distancias de 4Km. Con la fórmula de Simpson encuentre una aproximación del área total de afectación.

Facultad de Ciencias

Departamento de Matemáticas

eherrera@javeriana.edu.co



1. **TODOS**: Genere una tabla, donde se pueda aproximar los valores de la distribución binomial a una normal, con una corrección por continuidad de 0.05 y para cuando $\rho = 0.5$ y $n = 1000$. Compare los valores aproximados con los valores exactos de la binomial.

2. Ecuaciones Diferenciales

I. Dado el siguiente problema de valor inicial:

$$y' = -\alpha\, y \quad ; \qquad y(0) = y_0$$

G1: Aplicando Euler utilice un α en el intervalo de [-10,10] con dos cifras significativas y un valor de y_0= valor aleatorio entre [0,1] utilice mínimo para α y y_0 mínimo 5 valores. Teniendo en cuenta lo anterior encuentre el valor de α donde la solución es creciente y donde es decreciente. Finalmente compare numérica y gráficamente, la solución aproximada con la solución exacta en cada punto y en general ósea un error total promedio

G6: Aplicando Runge_Kutta de orden 4 y utilice un α en el intervalo de [0,10] con dos cifras significativas y un valor de y_0= valor aleatorio entre [0,1] utilice mínimo para α y y_0 mínimo 5 valores. Teniendo en cuenta lo anterior encuentre el valor de α donde la solución es creciente y donde es decreciente. Finalmente compare numérica y gráficamente, la solución aproximada con la solución exacta en cada punto y en general ósea un error total promedio

II. Considere el problema de valor inicial

$$y' = t\exp(3t) - 40y,\ t \in [1,2],\ y(1) = 10.$$

Facultad de Ciencias

Departamento de Matemáticas

eherrera@javeriana.edu.co

a. **G2**: Utilice Euler para aproximar las soluciones en t=0.4;0.01;1.55 y estime el error de truncamiento. Finalmente compare numérica y gráficamente, la solución aproximada con la solución exacta en cada punto y en general ósea un error total promedio

b. **G3**: Utilice Taylor de orden cuatro para aproximar las soluciones en t=0.4;0.01;1.55 y estime el error de truncamiento. Finalmente compare numérica y gráficamente, la solución aproximada con la solución exacta en cada punto y en general ósea un error total promedio

c. **G4**: Utilice Runge-Kutta de orden 4 para aproximar las soluciones en t=0.4;0.01;1.55 y estime el error de truncamiento. Finalmente compare numérica y gráficamente, la solución aproximada con la solución exacta en cada punto y en general ósea un error total promedio

III. Teniendo en cuenta el sistema de Lorentz con a=8/3; b=10 y c=28 simule una solución del sistema utilizando

$$x'(t) = ax + yz$$
$$y'(t) = b(y - z)$$
$$z'(t) = -xy + cy - z$$

a. **G5**: Euler
b. **G6**: Runge- Kutta de orden 4
c. **TODOS**: Taylor de orden 3

Para t= 100 días con h=0.5, grafique la solución y de una explicación de la línea fase

IV. Dado el sistema de ecuaciones diferenciales que corresponden a una muestra estudio del sistema depredador presa de capturas de linces y conejos entre los años 1900 y 1920:

$$\begin{cases} x'(t) = 0.4x(t) - 0.018x(t)y(t) & ; \quad x(0) = 30 \\ \\ y'(t) = -0.8y(t) + 0.023x(t)y(t) & ; \quad y(0) = 4 \end{cases}$$

Utilizando:

Pontificia Universidad JAVERIANA Bogotá

Facultad de Ciencias

Departamento de Matemáticas

eherrera@javeriana.edu.co

a. **G1 Y G6**: Euler
b. **G2 y G3** y G4: Runge- Kutta de orden 4
c. **G5 y G4**: Taylor de orden 3

Encuentre la solución numérica del sistema de ecuaciones diferenciales con una evolución por año

Realice la gráfica que nos muestra la evolución de las presas

Compare la solución con los datos reales y evalúe el error total promedio y el error local, en que año se produce el mayor error

AÑO
2000

Conejos	Linces
30	4
47.2	6.1
70.2	9.8
77.4	35.2
36.3	59.4
20.6	41.7
18.1	19
21.4	13
22	8.3
25.4	9.1
27.1	7.4

Conejos	Linces
40.3	8
57	12.3
76.6	19.5
52.3	45.7
19.5	51.1
11.2	29.7
7.6	15.8
14.6	9.7
16.2	10.1
24.7	8.6
-	-

GRUPOS

AYALA URQUIZA LUIS FELIPE	G1	Cuestas Merchán Samy Felipe	G2
Flechas Barreto JavierEsteban		Hernández Guerrero Camilo	
Rios Romero Manuel Alejandro		Mendieta Hernández Juan Camilo	
Otálora Jarro Andrés Felipe		Escobar Triana Carlos Eduardo	
Avila Santos Miguel Angel	G3	Santander Alvarez Pablo	G4
Esposito Albornoz Jorge Luis		Barragan Sanchez Nicolas	
Herrera Guaitero Juan Sebastián		De Souza Lessa Lacerda Gabriel	
Martínez Amado Juan Andres			
Bolívar Calderón Johanna Lisette	G5	Burgos Algarin Heyling	G6
Fonseca Triviño Richard		Olarte Vargas Fabian Andres	
Anteliz Bonilla David Alfonso		Rosero quenguan Johan Mateo	
Pinilla Salinas Harold Duvan		VASQUEZ RENDON ANDRES FELIPE	
Cano Castro Abril		Suarez Barragan David Santiago	

REGLAS

- Cada grupo debe entregar el día de hoy hasta 9am dos de los puntos asignados, el resto de los ejercicios tienen plazo hasta noviembre 7 del 2021 hora local (Bogotá) 5 pm.
- Se realizará un seguimiento a la asistencia durante 7_8:40 am
- Durante la realización del taller puede hacer preguntas (entre 7-8: 15 am), pero de cómo se soluciona, que debe aplicar etc. Es decir, no se resuelven dudas acerca de la solución del taller

Productos:

- Un documento donde este consignados las respuestas, explicaciones, procedimientos, tablas y gráficos de los ejercicios asignados
- La implementación en R y/o Python
- **Donde**

Cada grupo debe subir sus productos en el repositorio de cada miembro del grupo en la carpeta de talleres (incluye la entrega de hoy 5 de noviembre y 7 de noviembre)

Evaluación:

Los estudiantes no presentes el día de la realización del taller no tendrá validez la nota sin excepción (es decir la nota del taller 4 es cero)

Todos los ejercicios serán calificados con el mismo porcentaje

Este taller es la cuarta nota de la categoría talleres que tiene un porcentaje del 15% de la nota final