
Modèles et méthodes d'optimisation - Devoir 2

GOYENS Florentin

TAETER Harold

17th November 2014

Question 1

Dans la première partie du travail, nous implémentons la version standard du modèle, qui ne tient pas encore compte de la robustesse. Le code AMPL est joint au rapport.

Approximation du problème posé

L'approximation s'effectue en deux endroits. Dans un premier temps, les valeurs $d_i(\theta)$ sont calculées numériquement car on ne dispose pas d'une formule exacte pour l'intégrale. Cela constitue une première approximation mineure. Nous avons utilisé MATLAB et sa fonction `quad`. **On exprime cela comme une fonction de Bessel ??**.

Une seconde erreur, plus remarquable, vient de la relaxation du problème. Les contraintes $|D(\theta) - 1| \leq \varepsilon \forall \theta \in [\theta_P 90^\circ]$ et $|D(\theta)| \leq \varepsilon \forall \theta \in [0\theta_S]$ cachent en fait une infinité de contraintes puisqu'il faut les appliquer pour tous les angles dans les intervalles considérés. On relâche le problème en choisissant un nombre fini de contraintes, on applique les conditions sur un sous ensemble discret des intervalles $[\theta_P 90^\circ]$ et $[0\theta_S]$. En pratique, nous avons sélectionné toutes les valeurs entières des angles. **TODO : vérifier de la manière la plus précise possible que cela est une assez bonne approximation.**

Solution du cas de base

Variation des paramètres θ_P et θ_S

On s'attend logiquement à une moins bonne approximation lorsque les deux valeurs se rapprochent. En effet, cela augmente le nombre de contraintes et donc réduit l'espace admissible pour minimiser ε . Plus graphiquement, on réduit la largeur de la bande de transition de l'échelon du diagramme et cela rend plus difficile le passage de la valeur 0 à la valeur 1. La figure ?? montre ce phénomène. Il est visible que les oscillations sont plus grandes lorsque l'on rapproche les paramètres. Pour le quantifier, on dresse la table des valeurs optimales de la bande ε .

θ_S [°]	θ_P [°]	ε^*
40	50	0.01716135157
42	48	0.0736852368
43	47	
44	45	0.1180329256
40	45	
40	42	
48	50	

Calcul

todo : parler du temps calcul (ampl/matlab) et des solveurs.

Question 2

Il s'agit ici de se donner une idée de la robustesse de la solution du modèle linéaire. On va donc supposer ici que les facteurs x_i sont entachés d'une erreur relative ξ_i . On a donc le véritable diagramme exprimé comme $\hat{D}(\theta) = \sum_{i=1}^N (1 + \xi_i)x_i d_i(\theta)$. On va supposer que les ξ_i sont ici distribués aléatoirement de manière uniforme sur un intervalle $[-\tau, \tau]$, indépendamment les uns des autres. La démarche consiste donc à résoudre le modèle de la première question et d'utiliser ensuite les x_i calculés pour se donner une idée de la fonction \hat{D} .

Il est demandé d'examiner les diagrammes d'antenne pour $\tau = 0.001$ et pour $\tau = 0.01$. On se rend très vite compte qu'en plottant $\hat{D}(\theta)$, on obtient des résultats sensiblement différents de ceux de la question précédente. **Ces résultats sont présentés sur les figures....** Pour les erreurs relatives à priori pas trop élevées, on se retrouve avec des résultats complètement aberrants. La solution du modèle linéaire est donc très peu robuste. **+ tenter de l'expliquer intuitivement**

Question 3

A la lumière des résultats présentés précédemment, il est clair qu'on va chercher à établir une version plus robuste du problème. On se propose ici de présenter une première formulation. Gardant en tête que les valeurs x_i vont être entachées d'erreurs, on a le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{aligned} \min \quad & \epsilon \\ \text{s.c.} \quad & \sum_{i=1}^N (1 + \xi_i)x_i d_i(\theta) - 1 \leq \epsilon, \quad \theta \in [\theta_P, 90^\circ], \\ & \sum_{i=1}^N (1 + \xi_i)x_i d_i(\theta) - 1 \geq -\epsilon, \quad \theta \in [\theta_P, 90^\circ], \\ & \sum_{i=1}^N (1 + \xi_i)x_i d_i(\theta) \leq \epsilon, \quad \theta \in [0^\circ, \theta_S], \\ & \sum_{i=1}^N (1 + \xi_i)x_i d_i(\theta) \geq -\epsilon, \quad \theta \in [0^\circ, \theta_S], \end{aligned}$$

dans lequel les données ξ_i sont des réalisations d'une variable aléatoire.

Afin de nous débarrasser de ces valeurs aléatoires, nous allons reformuler nos contraintes en nous plaçant dans le pire cas.

Occupons-nous tout d'abord de la première contrainte :

$$\sum_{i=1}^N (1 + \xi_i)x_i d_i(\theta) - 1 \leq \epsilon, \quad \theta \in [\theta_P, 90^\circ].$$

Celle-ci peut se réécrire

$$\sum_{i=1}^N \xi_i x_i d_i(\theta) \leq 1 + \epsilon - \sum_{i=1}^N x_i d_i(\theta), \quad \theta \in [\theta_P, 90^\circ].$$

Le terme $\sum_{i=1}^N \xi_i x_i d_i(\theta)$ est responsable de la différence entre le véritable diagramme et celui calculé sur base du problème linéaire. Le pire cas consiste donc à choisir les ξ_i qui maximisent

ce terme. On va minimiser l'erreur qu'on peut obtenir dans le pire des cas. Afin de se placer dans cette situation, on écrit la contrainte de la manière suivante :

$$\left(\max_{\xi_i} \sum_{i=1}^N \xi_i x_i d_i(\theta) \right) \leq 1 + \epsilon - \sum_{i=1}^N x_i d_i(\theta), \quad \theta \in [\theta_P, 90^\circ],$$

tout en gardant à l'esprit que

$$-\tau \leq \xi_i \leq \tau, \quad \forall i.$$

Cette contrainte peut donc être vue comme un problème d'optimisation et donc transformée en utilisant le principe de dualité forte. Après application de ce principe¹, la contrainte se réécrit :

$$\left(\min_{y_i} \tau \sum_{j=1}^{2N} y_j \right) \leq 1 + \epsilon - \sum_{i=1}^N x_i d_i(\theta), \quad \theta \in [\theta_P, 90^\circ],$$

$$\begin{pmatrix} y_1 - y_{N+1} & y_2 - y_{N+2} & \dots & y_N - y_{2N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 d_1(\theta) & x_2 d_2(\theta) & \dots & x_N d_N(\theta) \end{pmatrix}, \quad \theta \in [\theta_P, 90^\circ],$$

$$y_i \geq 0, \quad \forall i.$$

En d'autres termes, il existe $y \in \mathbb{R}_+^{2N}$ tel que

$$\tau \sum_{j=1}^{2N} y_j = 1 + \epsilon - \sum_{i=1}^N x_i d_i(\theta), \quad \theta \in [\theta_P, 90^\circ],$$

$$\begin{pmatrix} y_1 - y_{N+1} & y_2 - y_{N+2} & \dots & y_N - y_{2N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 d_1(\theta) & x_2 d_2(\theta) & \dots & x_N d_N(\theta) \end{pmatrix}, \quad \theta \in [\theta_P, 90^\circ].$$

On ajoute donc les variables y_i dans le modèle et on peut alors reformuler la contrainte de départ de la manière mentionnée ci-dessus. En effectuant la démarche ci-dessus pour les quatre sortes de contraintes du modèle de départ, on se retrouve avec un modèle plus robuste puis qu'il se base toujours sur le pire cas.

Question 4

Le principal problème de la formulation développée précédemment est qu'elle est trop conservatrice. En effet, on supposait qu'on se trouvait toujours dans le pire cas. Cependant, il est très peu probable que cela se réalise. On va donc plutôt considérer la condition suivante :

$$\sum_{i=1}^{2N} \xi_i^2 \leq \gamma^2$$

où $\gamma > 0$ est un paramètre ajustable.

On va ici chercher un γ qui permettra de satisfaire cette contrainte avec une probabilité de plus de 99.99%.

1. Je ne suis pas sur que tout ce qui était écrit sur la feuille de flo était ok. Après dualité forte, on a $\min d_i^T x_i \leq c_i$. Ça devrait pas être un \geq ? Et on maximisait sur a_i , maintenant on minimise sur x , un peu bizarre. A la fin, on met $d_i^T x_i = c_i$, est-ce que c'est bien un $=$? (et quel intérêt de mettre un indice à c ?)