STŘEDOŠKOLSKÁ ODBORNÁ ČINNOST

Obor č. 1: Matematika a statistika

Medúzy a posloupnosti průměrů

Zdeněk Pezlar
Jihomoravský kraj

Brno 2022

STŘEDOŠKOLSKÁ ODBORNÁ ČINNOST

Obor č. 1: Matematika a statistika

Medúzy a posloupnosti průměrů

On Jellyfish and Sequences of Means

Autor: Zdeněk Pezlar
Škola: Gymnázium Brno, třída Kapitána Jaroše, p. o.
Kraj: Jihomoravský
Vedoucí: Mgr. Vojtěch Suchánek
Konzultant: Mgr. Marek Sýs Phd.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou práci SOČ vypracoval samostatně a použil jsem pouze prameny a literaturu uvedené v seznamu bibliografických záznamů. Prohlašuji, že tištěná verze a elektronická verze soutěžní práce SOČ jsou shodné. Nemám závažný důvod proti zpřístupňování této práce v souladu se zákonem č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon) v platném znění.

V Brně dne: ..... Podpis: .....

jihomoravský kraj

Poděkování

Tom pozdravuje.

Abstrakt

V naší práci podáme lehký úvod do studia isogenií eliptických křivek bez předchozího studia algebraické geometrie. V práci rovněž diskutujeme několik vybraných protokolů a poskytujeme úvod do studia algebraické teorie čísel. Pomocí jejího studia pak podrobněji studujeme okruhy endomorfismů supersingulárních křivek. Práce je obohacena o implementace některých zmíněných protokolů, přičemž poskytujeme první implementaci velmi slibného protokolu SITH.

Klíčová slova

isogenie; eliptická křivka; okruh endomorfismů; grupa tříd ideálů; kvantový počítač; Diffie-Hellman; SIDH; CSIDH; SITH

Abstract

We provide a gentle introduction to the study of elliptic curve isogenies without any assumed knowledge in algebraic geometry. We then discuss several chosen protocols and give a brief introduction to algebraic number theory. After that, we apply the gained knowledge on the study of endomorphism rings of supersingular curves. The thesis is accompanied by a couple of implemented protocols, providing the first ever implementation of the very promising protocol SITH.

Key words

isogeny; elliptic curve; endomorphism ring; ideal class group; quantum computer; Diffie-Hellman; SIDH; CSIDH; SITH

Obsah

Úvod

Mějme pro začátek dvě kladná reálná čísla a, b. Jejich *aritmetický* a *geometrický průměr* splňují elementární nerovnost:

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}.$$

Uvažme rekurentní posloupnost dvojic kladných čísel takovou, že každá dvojice je tvořená právě těmito dvěma průměry, tedy $a_0 = a, b_0 = b$ a:

$$(a_{n+1}, b_{n+1}) = \left(\frac{a_n + b_n}{2}, \sqrt{a_n b_n}\right).$$

Platí tedy $a_n \geqslant b_n$ pro kladné n. Pro n jdoucí k nekonečnu a_n i b_n konvergují ke společné limitě, tzv. *aritmetickému geometrickému průměru* čísel a, b. Tento průměr studoval již Carl Friedrich Gauss [?] a ukázal, že tato na první pohled nevinná posloupnost je spojena s eliptickými integrály. Později se dokonce ukázalo, že tuto posloupnost můžeme využít k rychlému počítání čísla π i evaluování funkcí jako e^x či $\arcsin(x)$.

Co se ale na posloupnost podívat v jiném světle, konkrétně nad konečnými tělesy? V jistých tělesech můžeme definovat jednoznačně „konzistentní“ odmocninu z čísla a tak adaptovat naši posloupnost. Tentokrát posloupnost již ne vždy nekonverguje, zato však tvoří možná zajímavější struktury. Pokud sestavíme orientované grafy popisující naši posloupnost pro všechny dvojice (a, b) nad naším tělesem, získáme grafy, které vypadají následovně:
-IMG-
Tento graf nazveme *medúzou*. Už to, že grafy tvoří takovéto struktury je pozoruhodné, medúzy ale zde zdaleka nekončí. Ukážeme, že svým způsobem popisují *třídy isomorfismů eliptických křivek* nad naším tělesem, ?.

Na tomto místě končí článek [?], na kterém je práce založená. My jsme se rozhodli uvážit v potaz i podobné posloupnosti užívající průměry nad konečnými tělesy. Ukážeme, že jedna z nich je s AG posloupnosti téměř shodná, druhá se však liší. Grafy těchto posloupností charakterizujeme a ukážeme, že jsou ještě zajímavější, než pouhé medúzy. Ve finální části práce i tuto posloupnost propojíme s teorií dynamických systémů a eliptických křivek.

Kapitola 1

AG posloupnost nad reálnými čísly

Nejprve se budeme zabývat posloupností dvojic kladných reálných čísel, přičemž každá další je tvořena aritmetickým a geometrickým průměrem té předchozí. I v tomto jednoduchém prostředí narazíme na posloupnost v místech, kde bychom vůbec nehledali.

1.1 Seznámení s posloupností

Definice 1.1.1. Ať a, b jsou dvě kladná reálná čísla. Pak definujme *AG posloupnost* jako posloupnost $(a_n, b_n)_{n=0}^{\infty}$ tak, že $(a_0, b_0) = (a, b)$ a:

$$(a_{n+1}, b_{n+1}) = \left(\frac{a_n + b_n}{2}, \sqrt{a_n b_n} \right).$$

Jednotlivá čísla a_i a b_i nazveme *složkami* prvku (a_i, b_i) této posloupnosti.

Toto značení ponechme po zbytek sekce. První vlastnosti, které si všimněme, je monotónnost obou složek $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ a $(b_n)_{n=0}^{\infty}$. Z *AG* nerovnosti je totiž platné $a_n \geqslant b_n$ a proto:

$$b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \geqslant b_n,$$

posloupnost $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ je proto rostoucí (pokud $a_0 \neq b_0$, tak ostře rostoucí). Obdobně můžeme psát:

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \leqslant a_n,$$

posloupnost $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ je tedy naopak klesající. Protože průměry dvou čísel leží mezi nimi, obě posloupnosti jsou shora svírané prvkem a a zdola b. Libovolná ohraničená monotónní posloupnost konverguje, víme tedy, že obě posloupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ a $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergují. Abychom získali nějakou představu o jejich limitách, ukážeme si pár příkladů.

Pokud si zvolíme $a = b = 5$, tak jsou obě hodnoty konstantní, to příliš zajímavě není. Zvolme si tedy například trochu zážívnější dvojici $a = 2, b = 8$. Pak můžeme psát:

a_i	b_i
2	8
5	4
4.5	4.472135955000...
4.486067977500...	4.486046343664...
4.486057160582...	4.486057160569...
4.486057160575...	4.486057160575...
4.486057160575	4.486057160575...
4.486057160575	4.486057160575...
⋮	⋮

GRAF

V tomto případě prvky *AG* posloupnosti zdárně konvergují ke společné hodnotě. Spočítejme si ještě pro jistotu jednu posloupnost, tentokrát pro dvojici $a = 1$ a $b = \sqrt{2}$. Tuto dvojici vůbec nevolíme náhodně. Vrátíme se k ní ještě za chvíli, její *AG* posloupnost lze použít k rychlému počítání čísla π.

a_i	b_i
1	1.414213562373...
1.207106781187...	1.189207115003...
1.198156948095...	1.198123521493...
1.198140234794...	1.198140234677...
1.198140234736...	1.198140234736...
1.198140234736...	1.198140234736...
1.198140234736...	1.198140234736...
⋮	⋮

Složky *AG* posloupnosti vždy konvergují ke společné hodnotě.

Věta 1.1.2. *Ať $(a_n, b_n)_{n=0}^{\infty}$ je AG posloupnost. Pak limity čísel a_n a b_n pro n jdoucí do nekonečna existují a jsou si navzájem rovné.*

Důkaz. Existenci limit jsme si ukázali výše. Jelikož platí:

$$0 \leqslant a_n - b_n = 2\left(a_n - \frac{a_n + b_n}{2}\right) = 2(a_n - a_{n+1})$$

a navíc díky existence limity $\lim_{n\to\infty} a_n - a_{n+1} = 0$, je posloupnost $(a_n - b_n)_{n=0}^{\infty}$ sevřena mezi dvěma posloupnostmi s nulovou limitou, konstantně nulovou posloupností a $(a_n - a_{n+1})_{n=0}^{\infty}$, má ji proto nulovou též. □

Definice 1.1.3. Tuto společnou limitu nazvěme *aritmeticko-geometrickým průměrem*, zkráceně *AG-průměrem*, čísel a, b. Toto číslo značme $\mathrm{AG}(a, b)$.

Následující věta shrnuje základní vlastnosti *AG* posloupnosti.

Věta 1.1.4. *Mějme $a, b, k \in \mathbb{R}^+$. Pro AG posloupnost platí:*

(i) $\mathrm{AG}(a, a) = a$,

(ii) $\mathrm{AG}(ka, kb) = k\,\mathrm{AG}(a, b)$,

(iii) $\mathrm{AG}(a, b) = \mathrm{AG}(a_1, b_1) = \mathrm{AG}(a_2, b_2) = \dots$,

(iv) $\mathrm{AG}(1 - x, 1 + x) = \mathrm{AG}(a, b)$, *kde* $x = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - b^2}$.

Vraťme se zpět k příkladům, které jsme uvedli na začátku. Třetí iterace *AG* posloupnosti čísel 2 a 8 se s limitou shoduje už na čtyřech desetinných místech. Ta následující dokonce na desíti. Opravdu, *AG* posloupnost konverguje velmi rychle.

Věta 1.1.5. *Ať $(a_n, b_n)_{n=0}^{\infty}$ je AG posloupnost. Pak složky $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ a $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergují ke společné limitě kvadraticky.*

Tzv. *řád konvergence* nám říká, jak přesně jak rychle posloupnost konverguje. Přesná definice řádu σ posloupnosti x_i konvergující k limitě L je, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a nějakou konstantu C platí:

$$\frac{|x_{n+1} - L|}{|x_n - L|^{\sigma}} \leqslant C.$$

Pro $\sigma = 2$ získáme *kvadraticky konvergentní posloupnost*. U takové posloupnosti se tak v každém dalším kroku se obě čísla *přibližně* rovnají limitě na dvakrát více desetinných míst.

Důkaz. Zaveďme pomocné posloupnosti $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ a $(\varepsilon_i)_{n=0}^{\infty}$ splňující $x_i = \frac{a_i}{b_i} = 1 + \varepsilon_i$ pro každé i. Platí $\varepsilon_i \geqslant 0$ pro každé i. Pak pro libovolné n platí:

$$x_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2\sqrt{a_n b_n}} = \frac{\sqrt{\frac{a_n}{b_n}} + \sqrt{\frac{b_n}{a_n}}}{2} = \frac{\sqrt{x_n} + \frac{1}{\sqrt{x_n}}}{2},$$

takže:

$$\begin{aligned} 1 + \varepsilon_{n+1} = x_{n+1} &= \frac{\sqrt{x_n} + \frac{1}{\sqrt{x_n}}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{1 + \varepsilon_n} + \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon_n}}}{2}. \end{aligned}$$

Taylorova řada funkce $\sqrt{x}$ v bodě 1 je $1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + O(x^3)$ a Taylorova řada funkce $\sqrt{x}^{-1}$ je $1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} + O(x^3)$. Proto pro n dostatečně velké a tedy ε_n dostatečně malé platí:

$$1 + \varepsilon_{n+1} = 1 + \frac{\varepsilon_n^2}{8} + O(\varepsilon_n^3),$$

řád konvergence $\frac{a_i}{b_i} \to 1$ je tedy kvadratický. □

Prozatím může vypadat, že tato posloupnost leží na uzavřeném ostrůvku vzdálená od jiných oblastní matematiky. Toto zdání však nemůže být dál od pravdy. Zamysleme se přímo nad samotným průměrem, limity posloupnost. Pro čísla 2 a 8 získáváme průměr $4.48605716\ldots$. Jak takové číslo určit uzavřeně? K nalezení odpovědi budeme muset nakouknout do sféry tzv. „eliptických integrálů“.

1.2 Eliptické integrály

Definice 1.2.1. Definujme *eliptický integrál prvního druhu* jako následující určitý integrál:

$$K(t) := \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - t^2 \sin^2 \theta}}.$$

Tento integrál a tzv. eliptický integrál „druhé druhu“ mají mnoho využití, například v počítání délky oblouku na elipse, ve světě fyziky zase například pomáhají najít periodu kmitu kyvadla [?].

Taktéž jsou intimně spojené s *AG* posloupností, umožní nám totiž přesně vyjádřit hodnotu $AG(a, b)$.

Věta 1.2.2. *(Gauss) Pro $x < 1$ platí:*

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\mathrm{AG}(1, x)} = K\left(\sqrt{1 - x^2}\right)$$

Pokud definujeme:

$$I(a, b) := \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}},$$

tak snadno uvidíme, že $I(a, b) = \frac{1}{a} K(x)$, kde $x = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - b^2}$. Takové x jsme už ale někde viděli, konkrétně ve větě 1.1.4 iv). Gaussovu větu poté můžeme díky části ii) věty 1.1.4 přepsat na:

$$\frac{\pi}{2} \frac{1}{\mathrm{AG}(a, b)} = I(a, b).$$

Skutečnosti, že se $\frac{1}{AG(1,\sqrt{2})}$ a $\frac{2}{\pi} I(1, \sqrt{2})$ shodují na 11 místech, si mladý Gauss všiml ve svém deníků již ve svých dvaadvaceti letech. [Pi and AGM] Metoda, kterou pak celou větu dokázal spočívá v důkazu výsledku $I(a, b) = I(a_1, b_1)$, ke kterému dojde po několika přiměřeně bolestných krocích, neboli jak Gauss sám pravil:

> *„After the development has been made correctly“*

Důkazem tohoto výsledku jsme hotovi, protože pak v limitním případě $I(a, b) = I(\mathrm{AG}(a, b), \mathrm{AG}(a, b)) = \frac{1}{\mathrm{AG}(a,b)} I(1, 1) = \frac{1}{\mathrm{AG}(a,b)} \cdot \frac{\pi}{2}$. Plný důkaz hledejte na [Pi and AGM].

Jelikož *AG* posloupnost konverguje kvadraticky, tato spojitost nám může pomoci počítat právě eliptické integrály velmi rychle. K čemu jinému nám ale rychlá konvergence této posloupnosti může být k užitku?

1.3 Rychlé výpočty elementárních funkcí

AG posloupnost může být využita například při počítání elementárních funkcí. Motivace použití rekurzivně definovaných posloupností může poskytnout například Newtonova metoda pro počítání odmocniny v kvadratickém čase:

Věta 1.3.1. *(Newton) Ať $N > 1$ je dané. Pak posloupnost $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ splňující $x_0 = N$:*

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{N}{x_n}\right)$$

konverguje kvadraticky k $\sqrt{N}$.

Důkaz existence a hodnoty limity, ani řádu konvergence není obtížný. Nešlo by obdobně využít i *AG* posloupnost? Ukáže se, že ano.

Totiž přirozený logaritmus je „přirozeně“ spojen s eliptickými integrály [Borw, Pi and AGM]:

$$K(\sqrt{1-x^2}) = \left(1 + O(x^2)\right) \ln\left(\frac{4}{x}\right),$$

kde onen chybový člen lze jednoduše odhadnout []. Pro x dostatečně malé nám pak ke spočítání logaritmu velkého čísla postačí použít kvadraticky konvergující *AG* posloupnost. Dá se jednoduše ukázat, že platí vztahy:

$$\arccos(x) = \arctan\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right),$$
$$\arctan(x) = \mathrm{Im}(\log(1+ix)).$$

Pomocí nich a *komplexního AG*, o kterém budeme mluvit dále, pak již můžeme spočítat inverzní funkce k základním goniometrickým funkcím a proto i je samotné.

1.4 Posloupnosti s ostatními průměry

Aritmetický a geometrický průměr nám vygenerovaly posloupnost, která skýtá překvapivě mnoho praktických aplikací. S takovým úspěchem pro jednu dvojici průměrů se pak jenom nabízí vzít v potaz i nějaké další. Zapojíme proto do práce i harmonický průměr, který je pro dvě čísla definován následovně:

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b}.$$

Definice 1.4.1. Ať a, b jsou dvě kladná reálná čísla. Pak definujme *HG posloupnost* $(a_n, b_n)_{n=0}^{\infty}$ tak, že $(a_0, b_0) = (a, b)$ a:

$$(a_{n+1}, b_{n+1}) = \left(\frac{2a_nb_n}{a_n + b_n}, \sqrt{a_nb_n}\right).$$

Obdobně definujeme *AH posloupnost* $(a_n, b_n)_{n=0}^{\infty}$ tak, že $(a_0, b_0) = (a, b)$ a:

$$(a_{n+1}, b_{n+1}) = \left(\frac{a_n + b_n}{2}, \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n} \right).$$

Kvůli nerovnostem panujícím mezi průměry můžeme imitovat důkaz věty 1.1.2, čímž získáme, že obě posloupnosti konvergují k hodnotám $HG(a, b)$, resp. $AH(a, b)$. Abychom tyto posloupnosti porovnali s AG posloupností, spočítejme průměry pro $a = 2$ a $b = 8$. První posloupnost vypadá následovně:

a_i	b_i
2	8
3.2	4
3.555555555555 . . .	3.577708763999 . . .
3.566597760054 . . .	3.566614959874 . . .
3.566606359943 . . .	3.566606359954 . . .
3.566606359948 . . .	3.566606359948 . . .
3.566606359948 . . .	3.566606359948 . . .
3.566606359948 . . .	3.566606359948 . . .
⋮	⋮

$$(a_{n+1}, b_{n+1}) = \left(\frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}, \sqrt{a_n b_n} \right) = \left(\left(\frac{\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n}}{2} \right)^{-1}, \sqrt{a_n^{-1} b_n^{-1}}^{-1} \right)$$

Nyní přichází čas pro AH posloupnost. Bude mít něco společného s předchozími dvěma posloupnostmi? Podívejme se, jak se posloupnost chová s počátečními prvky $a_0 = 2$ a $b_0 = 8$:

a_i	b_i
2	8
5	3.2
4.1	3.902439024390 . . .
4.001219512195 . . .	3.998780859494 . . .
4.000000185845 . . .	3.999999814155 . . .
4.000000000000 . . .	4.000000000000 . . .
4.000000000000 . . .	4.000000000000 . . .
4.000000000000 . . .	4.000000000000 . . .
⋮	⋮

AH posloupnost 2 a 8 tedy konverguje zjevně k číslu 4. Tento úkaz vysvětlí jednoduché pozorování, totiž že součin obou složek je přes všechny prvky posloupnosti konstantní. Platí:

$$a_1 b_1 = \frac{a+b}{2} \cdot \frac{2ab}{a+b} = ab.$$

Jelikož opět obě složky posloupnosti konvergují ke stejné hodnotě $AH(a,b)$, ta musí splňovat $AH(a,b)^2 = ab$, tedy $AH(a,b) = \sqrt{ab}$. Tento trend, kdy se *AH* drasticky liší od předchozích dvou, bude v jistém smyslu držet i v pozdějších částech práce, kdy posloupnosti uvažujeme nad konečnými tělesy. Adaptace *AG* a *GH* posloupností budou velmi spřízněné, zatímco *AH* s nimi má velmi málo společného.

Samozřejmě můžeme místo těchto třech průměrů uvažovat libovolné *mocninné průměry* a všechny takové posloupnosti budou konvergovat, to díky platným nerovnostem mezi těmito průměry. Pro mnohem více o teorii s těmito posloupnostmi vřele doporučuji knihu [AG and pi].

Na konec této sekce ještě zmiňme, že se nemusíme zastavit pouze na dvou průměrech. Zobecněná *AGH* posloupnost pro tři proměnné byla zběžně studovaná v ?, v [?] byly též studovány ještě posloupnosti čtyř a dokonce šesti čísel. Nyní se ale obraťme list a podívejme se více na vlastnosti *AG* posloupnosti v kontextu teorie čísel.

Kapitola 2

AG posloupnost nad konečnými tělesy

Když jsme nyní zodpovědně prozkoumali *AG* posloupnost nad reálnými čísly, zamysleme se, jaké informace nám *AG* může poskytnout z pohledu teorie čísel - konečně se podíváme na posloupnost nad konečnými tělesy. I v konečném případě tato posloupnost skýtá hluboká propojení se zdánlivě nesouvisejícími odvětvími matematiky, konkrétně s *eliptickými křivkami*. O nich ale až později.

2.1 Základní poznatky

Hned ze začátku narážíme na první problém. Ne vždy totiž není součin $a, b \in \mathbb{F}_q$ čtvercem v $\mathbb{F}_q$ a i pokud je, jak rozlišíme tu správnou odmocninu? Kvůli tomuto problému se prozatím zaměříme na tělesa $\mathbb{F}_q$ s $q = p^k \equiv -1 \pmod 4$, pak v $\mathbb{F}_q$ neexistuje odmocnina z -1. V každé nenulové dvojici $(x, -x)$ se proto nachází právě jeden čtverec a tak si vždy můžeme zvolit korektní odmocninu, aby byla posloupnost korektně definovaná i dále.

Poznámka. Ve skutečnosti jsme na tento problém narazili i nad reálnými čísly, tehdy ale jsou všechna kladná čísla čtverci, tedy je správná volba odmocniny intuitivní.

Definice 2.1.1. Definujme „zobecněný Legendreho symbol“ ϕ_q nad $\mathbb{F}_q$ tak, že $\phi_q(0) = 0$ a pro x nenulové je $\phi_q(x)$ rovno 1, pokud x je v $\mathbb{F}_q$ čtvercem, a -1 jinak.

Tento zobecněný Legendreho symbol je podobně jako ten klasický multiplikativním charakterem na $\mathbb{F}_q$, tj. platí $\phi_q(a)\phi_q(b) = \phi_q(ab)$ pro $a, b \in \mathbb{F}_q$.

Definice 2.1.2. Ať a, b jsou různé prvky $\mathbb{F}_q^\times$ splňují $\phi_q(ab) = 1$. Pak definujeme $AG_{\mathbb{F}_q}(a, b)$ jako posloupnost $(a_n, b_n)_{n=0}^\infty$ s $(a_0, b_0) = (a, b)$ a:

$$(a_{n+1}, b_{n+1}) = \left(\frac{a_n + b_n}{2}, \sqrt{a_n b_n} \right),$$

přičemž b_{n+1} volíme tak, že $\phi_q(a_{n+1}b_{n+1}) = 1$.

Všimněme si, že naše posloupnost je dobře definovaná. Aritmetický průměr by nám dělal problém, jen pokud by součet $a_{n+1} + b_{n+1}$ byl nulový. To by znamenalo:

$$a_n + b_n = -2\sqrt{a_n b_n}, \qquad \text{takže po umocnění} \qquad (a_n - b_n)^2 = 0.$$

Díky tomu, že odmocniny z čísla jsou navzájem opačná čísla a $\phi_q(-1) = -1$, víme, že pro $a_n b_n \neq 0$ je právě jedno z čísel $\sqrt{a_n b_n}$ a $-\sqrt{a_n b_n}$ čtvercem, mi si b_{n+1} zvolíme tak, aby součin $a_{n+1}b_{n+1}$ byl čtvercem. Můžeme tak pokračovat psát posloupnost i nadále.

Navíc, podmínka $a_i, b_i \in \mathbb{F}_q^\times$ je zachovaná i nadále. Pokud by totiž bylo jedno z čísel a_{n+1}, b_{n+1} nulové, jistě to musí být a_{n+1} a tak muselo být $a_n = -b_n$, to je ale ve sporu s volbou $\phi_q(a_n b_n) = 1$.

Posloupnost budeme vizualizovat jako orientovaný graf, kde hrana vede právě mezi po sobě jdoucími členy posloupnosti.

Definice 2.1.3. Definujme *roj* (angl. *swarm*) $AG_{\mathbb{F}_q} = (V, E)$ jako orientovaný graf, kde $(a, b) \in V$, právě pokud platí $\phi_q(ab) = 1$, a $\big((a, b), (c, d)\big) \in E$, právě pokud platí $(c, d) = (a_1, b_1)$.

Pracujeme s orientovanými grafy, přesto se domluvme, že každou slabě souvislou komponentu souvislosti nazveme jednoduše komponentou souvislosti.

Úmluva. Ať G je orientovaný graf a $V \subseteq G$ je komponenta slabé souvislosti. Pak budeme o V říkat, že je komponenta souvislosti.

Příklad 2.1.4. Pojďme si udělat představu o grafu, se kterým pracujeme, konkrétně se podívejme na $AG_{\mathbb{F}_7}$. Zvolme dvojici $(1, 2) \in AG_{\mathbb{F}_q}$ a pišme posloupnost $AG_{\mathbb{F}_q}(1, 2)$:

$$(1, 2) \mapsto (5, 3) \mapsto (4, 1) \mapsto (6, 5) \mapsto (2, 4) \mapsto (3, 6) \mapsto (1, 2),$$

vrchol $(1, 2)$ je proto členem cyklu délky 6. Pokud máme v grafu orientovanou hranu $(a, b) \mapsto (c, d)$, tak jistě vede hrana i mezi (b, a) a (c, d), proto například vede hrana z $(2, 1)$ do $(5, 3)$ a podobně. Lze ukázat, že tyto vrcholy mimo cyklus již předchůdce nemají, proto komponenta obsahující vrchol $(1, 2)$ vypadá následovně:

Tento příklad - cyklus a listy připojené ke každému členu cyklu - je typický. Pro ilustraci se podívejme na .

Začněme zlehka, konkrétně z kolika vrcholů a hran je vlastně náš graf tvořen.

Věta 2.1.5. *Graf $AG_{\mathbb{F}_q}$ čítá $(q-1)(q-3)/2$ vrcholů a stejný počet hran.*

Důkaz. Uspořádaná dvojice (a, b) náleží do $AG_{\mathbb{F}_q}$, právě pokud platí $\phi_q(ab) = 1$, tedy buď jsou a, b obě čtverci v $\mathbb{F}_q$, nebo ani jedno. Počet uspořádaných dvojic různých nenulových čtverců je roven $(q-1)/2 \cdot (q-3)/2$ a stejný počet přispívají dvojice nečtverců. Dohromady získáme $2 \cdot (q-1)(q-3)/4$ vyhovujících dvojic. Protože z každého vrcholu vychází právě jedna orientovaná hrana, počet hran je roven počtu vrcholů. □

Grafy z příkladu jsou tvořeny z několika komponent souvislosti, které mají všechny velmi specifický tvar, tj. cyklus, kde z každého jeho vrcholu vychází hrana délky jedna. Tento tvar je typický a libovolná komponenta jej tvoří.

Definice 2.1.6. Souvislý orientovaný graf G nazveme *medúzou*, pokud je tvořen jediným cyklem H a pro každý vrchol $V \in H$ existuje unikátní předchůdce mimo cyklus, který sám nemá předchůdce.

Nejprve si charakterizujme, které vrcholy mají v $AG_{\mathbb{F}_q}$ předchůdce, poté již bude popis celého grafu nasnadě.

Lemma 2.1.7. *Vrchol $(a, b) \in AG_{\mathbb{F}_q}$ má předchůdce, právě pokud platí $\phi_q(a^2 - b^2) = 1$.*

Důkaz. Nejprve předpokládejme (a, b) má předchůdce (c, d), platí tedy:

$$a = \frac{c+d}{2}, \quad b = \sqrt{cd}.$$

Potom:

$$a^2 - b^2 = \left(\frac{c+d}{2}\right)^2 - cd = \left(\frac{c-d}{2}\right)^2$$

je čtverec. Naopak ať $a^2 - b^2$ je čtverec a x je nějaká jeho odmocnina. Pak uvažme vrchol $(a - x, a + x)$, jeho následník je:

$$\left(\frac{a - x + a + x}{2}, \sqrt{a^2 - x^2}\right) = (a, b)\,,$$

kde b je ta „správná“ odmocnina. □

Věta 2.1.8. *Roj $AG_{\mathbb{F}_q}$ je tvořen z několika medúz.*

Důkaz. Graf je určen zobrazením $(u, v) \longmapsto (u_1, v_1) \longmapsto \ldots$ na konečné množině, takže každá taková posloupnost jednou vstoupí v cyklus, který bude mít délku větší než 1.

Dejme tomu, že (c, d) je členem nějaké cyklu, předchozí člen v cyklu je (C, D), platí $C + D = 2c$ a $CD = d^2$, tedy (C, D) jsou kořeny polynomu $x^2 - 2c + d^2$. Takový polynom má nad $\mathbb{F}_q$ právě dva kořeny, C a D. Všichni předkové vrcholu (c, d) v $AG_{\mathbb{F}_q}$ jsou proto (C, D) a (D, C). Díky $q \equiv -1 \pmod 4$ je $\phi_q(-1) = -1$, proto díky předchozímu lemmatu má právě jeden z těchto dvou vrcholů předchůdce, ten je jistě taky součástí cyklu. Každý vrchol, který není členem cyklus, proto nemá předchůdce a $AG_{\mathbb{F}_q}$ je proto medúzou. □

Pojďme si nyní charakterizovat, jaké různé medúzy můžeme v celém grafu najít. Podle analogu bodu *ii*) věty 1.1.4 můžeme přenásobit všechny vrcholy dané medúzy nějakým $k \in \mathbb{F}_q$ a získat novou medúzu, kterou nazveme jejím *přítelem*. Příklady takových medúz jsou na TOM PŘÍKLADU NA ZAČÁTKU.

Definice 2.1.9. Ať $M \subseteq AG_{\mathbb{F}_q}$ je medúza a (a, b) její prvek. Potom nazveme libovolnou medúzu obsahující prvek (ka, kb) pro $k \in \mathbb{F}_q$ *přítelem* medúzy M.

Kolik přátel má daná medúza? Na to zodpovídá následující tvrzení:

Věta 2.1.10. *Ať $(a, b) \in AG_{\mathbb{F}_q}$ leží v cyklu medúzy M a i je první index takový, že existuje $k \in \mathbb{F}_q$ splňující $(a_i, b_i) = (ka, kb)$. Pak má medúza M právě:*

$$\frac{q-1}{\mathrm{ord}_q(k)}$$

přátel.

Důkaz. Je zřejmé, že všechny ostatní prvky cyklu (a_i, b_i) splňující $a_i/b_i = a/b$ jsou ve tvaru $(a_i, b_i) = (k^x a_i, k^x b_i)$. Navíc, pokud přenásobíme všechny prvky M jedním z prvků podgrupy $\mathbb{F}_q^\times \leqslant O_k$ generované k, pouze otočíme medúzu.

Přesněji, máme danou akci grup $\mathbb{F}_q \times AG_{\mathbb{F}_q} \longrightarrow AG_{\mathbb{F}_q}$, která pro $k \in \mathbb{F}_q$ zobrazí prvek (a, b) na (ka, kb). Nosná množina O_k je pak stabilizátorem pro libovolný prvek medúzy M. To znamená, že existuje bijekce mezi množinou prvků $k \in \mathbb{F}_q$, které zobrazí M na medúzu s ní spřátelenou, a faktorgrupou $\mathbb{F}_q/O_k$, která má $\frac{q-1}{\mathrm{ord}_q(k)}$ prvků. □

Pro taxonomické účely se nám hodí tyto spřátelené medúzy uskupit dohromady, zaveďme proto pojem *hejno*.

Definice 2.1.11. Ať $H \subseteq AG_{\mathbb{F}_q}$ je medúza a $H_1, \ldots, H_k$ jsou všichni její přátelé. Pak $H \cup H_1 \cup \cdots \cup H_k$ nazvěme *hejnem medúz*.

2.2 Vlastnosti grafů

Ohledně medúz je hned několik hodnot, které má cenu zkoumat. Kolik je pro dané p dohromady medúz? Kolik existuje různých hejn? A na jaké délky cyklů můžeme narazit? Pojďme se na tyto hodnoty podívat trochu podrobněji.

Nejdůležitější hodnotou je pro nás počet medúz v celém hejnu. Tuto hodnotu studovali autoři původního článku [?] a pomocí eliptických křivek budeme moci uvést odhady na tato čísla.

Definice 2.2.1. Ať $q \equiv 3 \pmod 4$ je mocnina prvočísla. Pak označme $d(\mathbb{F}_q)$ počet všech medúz v grafu $AG_{\mathbb{F}_q}$. Navíc, označme $s(\mathbb{F}_q)$ počet všech hejn v grafu $AG_{\mathbb{F}_q}$.

V článku, ze kterého vycházíme, se $d(\mathbb{F}_q)$ nazývá *jellyfish number*, číslo $s(\mathbb{F}_q)$ není zmíněno vůbec a obecně hejna medúz nejsou nijak značena a jsou zmíněna pouze okrajově. Protože víme z příkladu ?, že délky cyklů se přes prvočísla mohou tak lišit, tak nás nepřekvapí, že i celkový počet medúz se chová poměrně různorodě. Pro představu uveďme malou tabulku pro prvočísla $p < 100$.

p	$d(\mathbb{F}_p)$	$s(\mathbb{F}_p)$
3	0	0
7	1	1
11	3	2

19	8	2
23	5	3
31	10	3
43	7	4
47	4	3
59	7	4
67	30	6
71	25	5
79	18	7
83	6	4

Tato náhodná povaha $d(\mathbb{F}_q)$ se nese i dál, na následujícím grafu vidíme jednotlivé hodnoty pro prvočísla $p < 10^5$:

I po sobě jdoucí prvočísla mohou mít disproporcionálně různé počty medúz. Na příklad pro prvočíslo 1619 je počet medúz roven $d(\mathbb{F}_{1619}) = 56$ a hned o dům dál u prvočísla 1627 nalezneme v grafu enormní počet $d(\mathbb{F}_{1627}) = 2227$ medúz, skoro čtyřicetkrát více.

Autoři původního článku ukázali, že pro libovolně malé $\varepsilon > 0$ a q dostatečně velké platí:

$$d(\mathbb{F}_q) \geqslant \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)\sqrt{q},$$

pomocí teorie eliptických křivek, o kterých se budeme bavit v pozdější části práce. V závěru práce spekulují, zda je tento odhad asymptoticky optimální a navrhují odhad $d(\mathbb{F}_q) \geqslant O(\sqrt{q}\log\log q)$. ???

Samozřejmě krom

2.3 HG posloupnost

V první kapitole jsme si ukázali, že pokud místo aritmetického a geometrického průměru zvolíme jinou dvojici průměrů, získáme posloupnosti úzce propojené s AG posloupností. Co tedy se podívat na jejich obdoby v konečných tělesech?

Nejprve zapojme do práce geometrický a harmonický průměr, kde samozřejmě definujeme harmonický průměr dvou nenulových čísel s nenulovým součtem jako:

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b},$$

kde $\frac{1}{a}$ je multiplikativní inverze čísla a. Definujme pak HG-posloupnost nad konečným tělesem.

Definice 2.3.1. Ať a, b jsou různé prvky $\mathbb{F}_q^\times$ splňují $\phi_q(ab) = 1$. Pak definujeme $HG_{\mathbb{F}_q}(a,b)$ jako posloupnost $(a_n, b_n)_{n=0}^\infty$ s $(a_0, b_0) = (a, b)$ a:

$$(a_{n+1}, b_{n+1}) = \left(\frac{2}{\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n}}, \sqrt{a_n b_n}\right),$$

přičemž b_{n+1} volíme tak, že $\phi_q(a_{n+1}b_{n+1}) = 1$.

Definice 2.3.2. Definujme *roj* $HG_{\mathbb{F}_q}$ jako orientovaný graf, jehož vrcholy jsou uspořádané dvojice (a, b) prvků nad $\mathbb{F}_q^\times$, jejichž součin je čtverec. Všechny orientované hrany vedou mezi vrcholem (a, b) a (a_1, b_1).

PRIKLADY, GRAF.

Při porovnání předchozího příkladu se můžeme dovtípit, že tato posloupnost je pouze přestrojená AG posloupnost. V tomto přesvědčení nás může utvrdit počet hran a vrcholů i kritérium, kdy vrchol má předchůdce.

Věta 2.3.3. *Graf* $HG_{\mathbb{F}_q}$ *čítá* $(q-1)(q-3)/2$ *vrcholů a stejný počet hran.*

Důkaz. Analogický k důkazu věty 2.1.5. □

Lemma 2.3.4. *Vrchol* $(a, b) \in HG_{\mathbb{F}_q}$ *má předchůdce, právě pokud platí* $\phi_q(b^2 - a^2) = 1$.

Důkaz. Nejprve předpokládejme (a, b) má předchůdce (c, d), platí tedy:

$$a = \frac{2cd}{c+d}, \quad b = \sqrt{cd}.$$

Potom:

$$b^2 - a^2 = cd - \left(\frac{2cd}{c+d}\right)^2 = cd\left(\frac{c-d}{c+d}\right)^2$$

je čtverec, protože pracujeme pouze s dvojicemi, jejichž součin je čtvercem. Naopak ať $b^2 - a^2$ je čtverec a x je nějaká jeho odmocnina. Pak uvažme vrchol $\left(\frac{b^2+bx}{a}, \frac{b^2-bx}{a}\right)$, jeho následník je:

$$\left(\frac{2b^2(b+x)(b-x)}{a^2\left(\frac{b^2+bx}{a} + \frac{b^2-bx}{a}\right)}, \sqrt{\frac{b^2(b^2-x^2)}{a^2}}\right) = \left(\frac{2b^2 \cdot a^2}{2a \cdot b^2}, b\right) = (a, b)\,.$$

□

Porovnejme toto lemma

Důsledek 2.3.5. *Graf* $GH_{\mathbb{F}_q}$ *je tvořen z několika medúz.*

Důkaz. Analogický k důkazu věty 2.1.8. □

Rozdíl mezi oběma grafy je ten, že vrchol (a, b) pro a, b je součástí cyklu v *právě jednom* z grafů $AG_{\mathbb{F}_q}$ a $HG_{\mathbb{F}_q}$. To nám napovídá, jaké bude konkrétní propojení těchto dvou grafů.

Věta 2.3.6. *Platí isomorfismus grafů* $AG_{\mathbb{F}_q} \cong HG_{\mathbb{F}_q}$.

Důkaz. Uvažme zobrazení $\psi : AG_{\mathbb{F}_q} \longrightarrow HG_{\mathbb{F}_q}$ určené předpisem $\psi((a,b)) = (1/a, 1/b)$. Ukážeme, že toto zobrazení definuje mezi grafy isomorfismus. Opravdu, uvažme orientovanou hranu v grafu $AG_{\mathbb{F}_q}$:

$$(a,b) \longmapsto \left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right),$$

poté v grafu $HG_{\mathbb{F}_q}$ má $\psi((a,b))$ hranu:

$$\psi((a,b)) = \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right) \longmapsto \left(\frac{2/ab}{1/a+1/b}, \sqrt{\frac{1}{ab}}\right) = \left(\frac{2}{a+b}, \frac{1}{\sqrt{ab}}\right) = \psi\left(\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right)\right).$$

Jelikož ψ se zjevně bijekce mezi $AG_{\mathbb{F}_q}$ a $HG_{\mathbb{F}_q}$, definuje mezi grafy isomorfismus. □

Kapitola 3

AH posloupnost

Zatím jsme pracovali s dvěma dvojicemi průměrů z trojice - aritmetický, geometrický a harmonický. Co se proto podívat i na tu poslední? Tentokrát již ze začátku nebude pracovat pouze nad konečným tělesem, ale i s bodem v nekonečnu. Přesto se můžeme ptát, jak souvisí tato posloupnost a její grafy s předchozími dvěma, obzvláště ve spojení s eliptickými křivkami.

K této ani *HG* posloupnosti nad konečnými tělesy neexistuje podle nejlepšího svědomí autora žádná literatura. Strávíme nějaký čas nad tvary grafů - případ *AH* posloupnosti je totiž na dvakrát tolik zajímavý, jako ty předchozí.

3.1 Základní poznatky

Definice 3.1.1. Ať K je těleso. Pak definujeme $\mathbb{P}^1(K)$ jako $K \cup \{\infty\}$, kde ∞ je *bod v nekonečnu*. Ten splňuje:

(i) $\infty + m = \infty$,

(ii) $\infty \times 0 = 1$,

(iii) $\infty \cdot m = \infty$ pro $m \neq 0$.

Definice 3.1.2. Ať $a, b \in \mathbb{F}_q^\times$ jsou různé. Pak definujeme $AH_{\mathbb{F}_q}(a, b)$ jako posloupnost $(a_n, b_n)_{n=0}^{\infty}$ s $(a_0, b_0) = (a, b)$ a:

$$(a_{n+1}, b_{n+1}) = \left(\frac{a_n + b_n}{2}, \frac{2}{\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n}} \right).$$

Všimněme si, že prvek $(a, -a)$ pro $a \in \mathbb{F}_q$ se zobrazí na $(0, \infty)$, $(0, \infty)$ se zobrazí na $(\infty, 0)$ a $(\infty, 0)$ se zobrazí sám na sebe.

Pokud $\phi_q(2) \neq 1$, tak se každý *afinní* prvek zobrazí opět na afinní prvek. Ať je naopak pro nějaká (a_0, b_0) a n nezáporné $1/a_{n+1} + 1/b_{n+1} = 0$, pak i $a_{n+1} + b_{n+1} = 0$. Muselo pak

být:

$$\begin{aligned}
\frac{a_n + b_n}{2} + \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n} &= 0, \\
(a_n + b_n)^2 + 4a_n b_n &= 0, \\
\left(\frac{a_n}{b_n} + 1\right)^2 + \frac{4a_n}{b_n} &= 0, \\
\left(\frac{a_n}{b_n}\right)^2 + \frac{6a_n}{b_n} + 1 &= 0.
\end{aligned}$$

Poznamenejme, že $b_n \neq 0$. Tato kvadratická rovnice má kořen nad $\mathbb{F}_q$, právě pokud 2 je v $\mathbb{F}_q$ čtvercem. Pro tělesa, kde 2 je čtvercem, se některé prvky mohou zobrazit do nekonečna. My se nejprve zaměříme na tělesa $\mathbb{F}_q$ s $q \equiv \pm 3 \pmod 8$.

Definice 3.1.3. Definujme *roj* $AH_{\mathbb{F}_q}$ jako orientovaný graf, jehož vrcholy jsou uspořádané dvojice (a, b) prvků nad $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q^\times)$. Všechny orientované hrany vedou mezi vrcholem (a, b) a (a_1, b_1).??????????????????????,

PRIKLAD
Na příkladu vidíme, že pro $q \equiv \pm 3 \pmod 8$ při vizualizaci AH posloupnosti získáme krom medúz i tzv. *vulkány hloubky* 2. V případě $q \equiv \pm 1 \pmod 8$ jsou tyto vulkány dokonce ještě hlubší a některé obsahují $(\infty, 0)$. Tato terminologie není vybraná autorem, setkáme se s ní v kontextu eliptických křivek.

Definice 3.1.4. Souvislý orientovaný graf V nazveme *vulkánem hloubky* k, pokud je dělen do $k + 1$ stupňů $V_0, \ldots, V_k$ a:

(i) V_0 je cyklus, kde každý jeho člen má unikátního předchůdce mimo cyklus,

(ii) pro $0 < i < k$ má každý vrchol $W \in V_i$ unikátního následníka ve V_{i-1} a dva předchůdce ve V_{i+1},

(iii) každý prvek V_k je listem.

Všimněme si, že medúza je pouze vulkánem hloubky 1. Předtím, než ukážeme, že grafy AH posloupnosti pro $q = \pm 3 \pmod 8$ nabývají těchto tvarů, se pozastavme nad spojením AH posloupnosti s dvěma předchozími, které jsme studovali. I když větší vulkány AG posloupnost nikdy netvoří, pro například $p \equiv -1 \pmod 4$ získáme v některých případech AH posloupnosti též medúzy. Klíčové rozdělení bude na prvky (a, b), kde $\phi_q(ab)$ je fixní. Hned uvidíme, že toto číslo je pro jednotlivé souvislé komponenty stejné a dokážeme silnější tvrzení. Určeme nyní počty (afinních) dvojic v jednotlivých takových skupinách.

Věta 3.1.5. *Buď $q = p^k$ mocnina prvočísla. Pak:*

(i) počet afinních prvků $(a, b) \in AH_{\mathbb{F}_q}$ takových, že $\phi_q(ab) = 1$, je $(q - 1)(q - 3)/2$,

(ii) počet afinních prvků $(a, b) \in AH_{\mathbb{F}_q}$ *takových, že* $\phi_q(ab) = -1$*, je* $(q-1)^2/2$*,*

(iii) počet hran v celém grafu vycházejících z afinních vrcholů je $(q-1)(q-2)$*.*

Důkaz. V případě, kdy ab je v $\mathbb{F}_q$ nenulovým čtvercem, leží v roji $AH_{\mathbb{F}_q}$ právě dvojice (a, b), až na případ, kdy $a = b$. Pokud je součin dvou prvků čtverec, tak jsou buď oba čtverce, nebo ani jeden. Počet dvojic nenulových prvků (a, b), jejichž součin je čtverec, spočítáme tedy součtem počtů dvojic různých čtverců, resp. nečtverců. Toto je $(q-1)/2 \cdot (q-3)/2 + (q-1)/2 \cdot (q-3)/2 = (q-1)(q-3)/2$.

V případě, kdy ab není v $\mathbb{F}_q$ nenulovým čtvercem, leží v roji $AH_{\mathbb{F}_q}$ právě dvojice (a, b). Takové dvojice mají jedno složku, která je čtvercem, a druhou, která není. Vyhovující počet je proto $(q-1)/2 \cdot (q-1)/2 + (q-1)/2 \cdot (q-1)/2 = (q-1)^2/2$. Konečně, z každého afinního vrcholu vychází právě jedna hrana, proto počet hran je:

$$\frac{(q-1)(q-3)}{2} + \frac{(q-1)^2}{2} = (q-1)(q-2).$$

□

Grafy $AH_{\mathbb{F}_q}$ a $AG_{\mathbb{F}_q}$ jsou velmi odlišné. Na příkladu ? vidíme, že komponenty roje $AG_{\mathbb{F}_q}$ mohou mít mnohonásobně více prvků, než je q. Zato v případě AH posloupnosti počet prvků značně omezí stejný invariant, jako v reálném případě - součin jednotlivých složek prvků.

Lemma 3.1.6. *Uvažme roj* $AH_{\mathbb{F}_q}$ *a nějakou jeho komponentu souvislosti* V*. Pak je přes všechny afinní dvojice* $(a, b) \in V$ *součin* ab *invariantní.*

Důkaz. Stačí nám ukázat, že pro vrchol (a, b) a jeho následníka platí $a_1 b_1 = ab$, jelikož (a_1, b_1) má právě dva předchůdce, (a, b) a (b, a). A opravdu:

$$a_1 b_1 = \frac{a+b}{2} \cdot \frac{2ab}{a+b} = ab.$$

□

Důsledek 3.1.7. *Každá komponenta souvislosti v roji* $AH_{\mathbb{F}_q}$ *obsahuje nejvýše* $q-1$ *afinních vrcholů.*

Důkaz. Pro dané $k \in \mathbb{F}_q$ je nad $\mathbb{F}_q$ jistě $q-1$ dvojic se součinem k, konkrétně $\left(a, \frac{k}{a}\right)$ pro $a \in \mathbb{F}_q^\times$. Podle předchozího lemmatu 3.1.6 mají všechny prvky jedné souvislé komponenty stejný součin prvků, je jich proto nejvýše $q-1$. □

Poznamenejme, že ze všech $q-1$ dvojic prvků s daným součinem ne nutně všechny leží v roji, například v tělese $\mathbb{F}_{11}$ pro součin roven čtyřem nevyhovuje dvojice $(2, 2)$. Lemma, které jsme zmínili před chvílí, nám též umožní adaptovat větu 2.1.10, tentokrát je totiž počet přátel grafů k dané souvislé komponentě velmi omezený.

Definice 3.1.8. Ať $(a, b) \in AH_{\mathbb{F}_q}$ leží v souvislé komponentě V. Potom nazveme libovolnou souvislou komponentu obsahující prvek (ka, kb) pro $k \in \mathbb{F}_q$ přítelem V.

Věta 3.1.9. *Ať $(a, b) \in AH_{\mathbb{F}_q}$ leží v souvislé komponentě V, která obsahuje pouze afinní vrcholy. Pak počet přátel V je roven:*

(i) $q - 1$, *pokud* $(-a, -b)$ *neleží ve* V,

(ii) $(q - 1)/2$, *pokud* $(-a, -b)$ *leží ve* V.

Důkaz. Důkaz je prakticky stejný, jako důkaz věty 2.1.10, tentokrát ale pokud pro $k \neq 1$ leží (a, b) a (ka, kb) ve stejné komponentě, podle lemmatu 3.1.6 musí platit $ab = k^2ab$, tj. $k = -1$. Nosná množina grupy O_k sestrojené analogicky k důkazu věty 2.1.10 je proto podmnožinou $\{1, -1\}$ a dojdeme k tomu, že V má právě $\frac{q-1}{\mathrm{ord}_q(\pm 1)} \in \left\{q - 1, \frac{q-1}{2}\right\}$ přátel. □

V případě, že komponenta obsahuje body v nekonečnu, pak předchůdci prvku $(0, \infty)$ jsou $(\pm a, \mp a)$, tedy tato komponenta má $(q - 1)/2$ přátel. Poznamenejme, že ve zdánlivé většině grafů $AH_{\mathbb{F}_q}$ se vyskytují komponenty s $q - 1$ přáteli, stejně jako jiné komponenty, které mají přátel pouze $(q - 1)/2$.

Definice 3.1.10. Ať $H \subseteq AH_{\mathbb{F}_q}$ je souvislá komponenta roje a $H_1, \ldots, H_k$ jsou všichni její přátelé. Pak $H \cup H_1 \cup \cdots \cup H_k$ nazvěme *hejnem*.

3.2 Struktura grafů

AH posloupnost se od *AG* posloupnosti na několika místech principiálně liší, přesto se na jednom místě shodují. Jejich grafy mají pozoruhodně pravidelnou strukturu. V pozdějších částech práce tuto strukturu do jisté míry vysvětlíme. Bez dalšího otálení proto pojďme opravdu dokázat, že grafy $AH_{\mathbb{F}_q}$ mají tu strukturu, kterou jim připisujeme. Nejprve klasifikujeme, kdy má prvek předchůdce.

Lemma 3.2.1. *Afinní vrchol $(a, b) \in AH_{\mathbb{F}_q}$ má předchůdce, právě pokud $\phi_q(a^2 - ab) = 1$.*

Důkaz. Nejprve předpokládejme, že (a, b) má předchůdce (c, d), platí tedy:

$$a = \frac{c + d}{2}, \quad b = \frac{2cd}{c + d}.$$

Potom:

$$a(a - b) = \frac{c + d}{2}\left(\frac{c + d}{2} - \frac{2cd}{c + d}\right) = \left(\frac{c - d}{2}\right)^2$$

je čtverec. Naopak ať $a(a - b)$ je čtverec a x je nějaká jeho odmocnina. Podle definice roje nemůže platit $a^2 \neq a(a - b)$, tedy v $AH_{\mathbb{F}_q}$ leží vrchol $(a - x, a + x)$. Jeho následník je:

$$\left(\frac{a - x + a + x}{2}, \frac{2(a - x)(a + x)}{a - x + a + x}\right) = (a, b)\,.$$

□

Díky tomuto tvrzení dokážeme poskytnout parciální odpověď na otázku, jak vypadají komponenty souvislosti v $AH_{\mathbb{F}_q}$. Prozatím se zaměříme na případy $q \equiv 3, 5 \pmod 8$, lemma 3.2.1 nám rozdělí práci pro tyto dva případy.

Důsledek 3.2.2. *Uvažme afinní vrchol $(a, b) \in AH_{\mathbb{F}_q}$. Potom:*

(i) pokud $\phi_q(-ab) = -1$, tak má právě jeden z vrcholů (a, b) a (b, a) v $AH_{\mathbb{F}_q}$ předchůdce,

(ii) pokud $\phi_q(-ab) = 1$, tak mají v $AH_{\mathbb{F}_q}$ předchůdce buď oba vrcholy (a, b) a (b, a), nebo ani jeden.

Důkaz. Pokud $\phi_q(-ab) = -1$, tak součin čísel:

$$a(a-b) \cdot b(b-a) = -ab(a-b)^2$$

čtverec není, tak je právě jedno z čísel $a(a-b)$ a $b(b-a)$ čtvercem, tedy díky lemmatu 3.2.1 má právě jeden z vrcholů předchůdce. Pokud naopak $\phi_q(-ab) = 1$, tak jsou buď obě čísla čtverci, nebo ani jedno, což koresponduje s počty předchůdců příslušných vrcholů. □

V případě $q \equiv 3 \pmod 8$ není -1 v $\mathbb{F}_q$ čtvercem a proto a, b s $\phi_q(ab) = 1$ má právě jeden z vrcholů (a, b), (b, a) předchůdce. Pokud ab není čtverec, tak buď oba vrcholy mají předchůdce, nebo ani jeden. Pro $q \equiv 5$ je tato situace prohozena.

Jádro celé charakterizace grafu $AH_{\mathbb{F}_q}$ pro $q \equiv \pm 3 \pmod 8$ spočívá v následujícím tvrzení:

Lemma 3.2.3. *Ať $q \equiv 3, 5 \pmod 8$ je mocnina prvočísla. Dejme tomu, že v $AH_{\mathbb{F}_q}$ máme sled vrcholů $A \longmapsto B \longmapsto C \longmapsto D$, kde $B = (a, b)$ je bod splňující $\phi_q(-ab) = 1$. Potom každý jiný sled vrcholů v $AH_{\mathbb{F}_q}$ splňující $X \longmapsto Y \longmapsto Z \longmapsto D$ také splňuje $Z = C$.*

Důkaz. Bez újmy na obecnosti pišme $B = (1, b)$, pak požadujeme $\phi_q(-b) = 1$. Fakt, že B má předchůdce (jímž je A) díky lemmatu 3.2.1 znamená, že existuje $x \in \mathbb{F}_q$ splňující $1 - b = x^2$. Nyní si spočítejme body C, D:

$$(1, b) \longmapsto \underbrace{\left(\frac{b+1}{2}, \frac{2b}{b+1}\right)}_{C} \longmapsto \left(\frac{b^2+6b+1}{4(b+1)}, \frac{4b(b+1)}{b^2+6b+1}\right) = D.$$

Předchůdce D různý od C je roven:

$$E : \left(\frac{2b}{b+1}, \frac{b+1}{2}\right).$$

Tento bod má sám předchůdce podle důsledku 3.2.2. Ať (X, Y) a (Y, X) jsou dva předchůdci D, ti splňují soustavu:

$$\frac{X+Y}{2} = \frac{2b}{b+1},$$

$$\frac{2XY}{X+Y} = \frac{b+1}{2} \Rightarrow XY = b.$$

Čísla X, Y jsou tedy kořeny kvadratické rovnice $U^2 - \frac{4b}{b+1}U + b = 0$ nad $\mathbb{F}_q$. Tyto kořeny spočítáme explicitně:

$$\{X, Y\} = \left\{ \frac{2b + \sqrt{-b}(b-1)}{b+1}, \frac{2b - \sqrt{-b}(b-1)}{b+1} \right\},$$

při nějaké volbě odmocniny z $-b$, která dle předpokladů leží v $\mathbb{F}_q$. Konečně ukážeme, že (X, Y) nemá předchůdce, z toho podle důsledku 3.2.2 plyne, že i (Y, X) nemá předchůdce. K tomu nám díky lemmatu 3.2.1 stačí ověřit, že číslo $X(X-Y)$, které je rovno:

$$\begin{aligned}
\frac{2b + \sqrt{-b}(b-1)}{b+1} \cdot \left(\frac{2b + \sqrt{-b}(b-1)}{b+1} - \frac{2b - \sqrt{-b}(b-1)}{b+1} \right) = \\
\frac{2b + \sqrt{-b}(b-1)}{(b+1)^2} \cdot 2\sqrt{-b}(b-1) = \\
\frac{2(b-1)}{(b+1)^2} \cdot [2\sqrt{-b}b - b(b-1)] = \\
\frac{2b(b-1)}{(b+1)^2} \cdot [2\sqrt{-b} - (b-1)] = \frac{2b(b-1)}{(b+1)^2}(1 - \sqrt{-b})^2,
\end{aligned}$$

není v $\mathbb{F}_q$ čtvercem. Díky existenci $x \in \mathbb{F}_q$ splňujícího $x^2 = 1 - b$ pišme:

$$\begin{aligned}
\phi_q(2b(b-1)) &= \phi_q(2) \cdot \phi_q(b) \cdot \phi_q(b-1) = -1 \cdot \phi_q(b) \cdot \phi_q(-x^2) \\
&= -1 \cdot \phi_q(-b) \cdot \phi_q(x^2) = -1 \cdot 1 \cdot 1 = -1.
\end{aligned}$$

Dohromady máme $\phi_q(X(X-Y)) = 1 \cdot (-1) = -1$, tedy oba předchůdci E nemají předchůdce. Pokud proto existuje sled čtyř prvků končících v D, pak předposlední člen nutně musí být C. □

Poznámka. Nad tělesy, kde $\phi_q(2) = 1$, lemma neplatí.

Nyní dokážeme hlavní větu této sekce.

Věta 3.2.4. *Ať $q \equiv 3, 5 \pmod 8$ je mocnina prvočísla. Pak roj $AH_{\mathbb{F}_q}$ vypadá následovně:*

(i) Pokud $q \equiv 3 \pmod 8$, tak:

- *sjednocení komponent souvislosti obsahujících prvky (a, b) splňující $\phi_q(ab) = 1$ je tvořeno medúzami,*
- *sjednocení komponent souvislosti obsahujících prvky (a, b) splňující $\phi_q(ab) = -1$ je tvořeno vulkány hloubky 2.*

(ii) Pokud $q \equiv 5 \pmod 8$, tak:

- *sjednocení komponent souvislosti obsahujících prvky* (a, b) *splňující* $\phi_q(ab) = 1$ *je tvořeno vulkány hloubky* 2,
- *sjednocení komponent souvislosti obsahujících prvky* (a, b) *splňující* $\phi_q(ab) = -1$ *je tvořeno medúzami.*

Důkaz. Ukážeme, že komponenty souvislosti obsahující body (a, b) splňující $\phi_q(-ab) = -1$ tvoří medúzy a komponenty souvislosti obsahující (a, b) pro něž je naopak $\phi_q(-ab) = 1$ tvoří vulkány hloubky 2.

Pokud platí $\phi_q(-ab) = -1$ čtverec, tak podle důsledku 3.2.2 má právě jeden z vrcholů (a, b) a (b, a) předchůdce. Jako v případě AG posloupnosti tedy vyberme libovolný vrchol (a, b), $a \neq b$, a hledejme další členy posloupnosti $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots$, dokud nedojdeme do cyklu. Ať (c, d) je členem cyklu a jeho předchůdci jsou vrcholy (C, D), (D, C). Víme, že jeden z těchto dvou nemá předchůdce a ten druhý proto musí být členem cyklu. Komponenta souvislosti obsahující (c, d) je tedy medúzou.

Nyní přijde ta zajímavější část, tedy že pokud $\phi_q(-ab)$ je rovno jedné, tak komponenta souvislosti obsahující libovolný vrchol $V = (a, b)$ je vulkán. Stejně jako v případě AG posloupnosti pišme sled následníků vrcholu V:

$$(a, b) \longmapsto (a_1, b_1) \longmapsto (a_2, b_2) \longmapsto \ldots$$

Máme nekonečně definovanou posloupnost na konečné množině vrcholů, jednou proto vstoupí do cyklu, který má délku větší než jedna. Dejme tomu, že (c, d) je člen cyklu, potom mu můžeme psát nekonečnou posloupnost předků ležících v cyklu. Ať je tedy (C, D) předchůdce (c, d) neležící v cyklu. V důkaze lemmatu 3.2.3 jsme si ukázali, že (C, D) má dva rodiče a ti již rodiče nemají. Toto platí pro každý člen (c, d) libovolného cyklu. Tím tedy získáváme, že každá komponenta souvislosti v tomto případě tvoří vulkány hloubky 2. □

Tato charakterizace byla poměrně pracná, přesto je pouze polovina války vyhrána. Zaprvé, co když uvážíme konečná tělesa $\mathbb{F}_q$, kde $q = p^k$ a $p \equiv 1, 7 \pmod 8$? Nebo sice platí $p \equiv 3, 5 \pmod 8$, ale $k = 2t$ je sudé? V takových případě je $\phi_q(2) = 1$ a navíc každý list v grafu $AH_{\mathbb{F}_{p^t}}$ má v grafu $AH_{p^k} = AH_{p^{2t}}$ předchůdce. Na příklad rozšiřme příklad ? nad tělesem $\mathbb{F}_{p^2}$, pak graf vypadá následovně:

OBR–

Vulkán má tedy o jedna vyšší hloubky. V případě rozšíření lichého stupně jsou grafy shodné. Při rozšíření sudého stupně můžeme získat alespoň jednoduché odhady na hloubku binárního stromu, který je připojen ke členu cyklu. Důkaz, že všechny listy mají stejnou hloubku přes všechny takové stromy, tedy že graf je opět vulkánem, je již nad možnosti základní teorie čísel.

Důsledek 3.2.5. *Buď* $q = p^m$ *a* $V \subseteq AH_{\mathbb{F}_q}$ *vulkán hloubky* h *a* (a, b) *nějaký jeho prvek. V grafu* $AH_{\mathbb{F}_{q^k}}$ *leží* (a, b) *ve stromu zakořeněném v cyklu. Potom výška tohoto stromu je alespoň* $h + v_2(k)$.

Důkaz. Postupujme indukcí podle $v_2(k)$. Případ k lichého pokrývá věta 3.2.4. Ať nyní věta platí pro nějaké $\ell \geqslant 0$ a všechna k s $v_2(k) = \ell$. Pokud (a, b) je list v $\mathbb{F}_{q^k}$ pro nějaké k, pak platí $\phi_{q^k}(a(a-b)) = -1$ a tedy $a(a-b)$ je čtvercem v $\mathbb{F}_{q^{2k}}$. Vrchol (a, b) má proto dva předchůdce $(a \pm x, a \mp x) \in AH_{\mathbb{F}_{q^{2k}}}$ a výšla stromu obsahujícího (a, b) má v $AH_{\mathbb{F}_{q^{2k}}}$ hloubku alespoň o jedna delší, než v $AH_{\mathbb{F}_{q^k}}$. Snadno pak získáme dokazované tvrzení. □

Uveďme si zde známé lemma z olympiádní matematiky, tzv. *Lifting the Exponent lemma*, které hodnotu $v_2(k)$ ukotví k číslu $p^k - 1$.

Věta 3.2.6. *(LTE lemma) Ať p je liché a k sudé. Pak platí:*

$$v_2(p^k - 1) = v_2(p - 1) + v_2(p + 1) + v_2(k) - 1.$$

[citation needed] Důsledek výše spolu s větou 3.2.4 pak ukazuje, že hloubka vulkánu je určitým způsobem spojena s $v_2(q-1)$. Toto propojení plně prozkoumáme až ke konci práce i pro tělesa s charakteristikou $p \equiv \pm 1 \pmod 8$ pomocí eliptických křivek.

3.3 Vlastnosti grafů

I v případě AH posloupnosti se můžeme dívat na empirická data ohledně jednotlivých parametrů.

Definice 3.3.1. Ať q je mocnina prvočísla. Pak označme $D(\mathbb{F}_q)$ počet všech souvislých komponent v grafu $AG_{\mathbb{F}_q}$, které obsahují alespoň jeden afinní prvek. Navíc, označme $S(\mathbb{F}_q)$ počet všech hejn v grafu $AH_{\mathbb{F}_q}$, které obsahují alespoň jeden afinní prvek.

???

Věta 3.3.2. *Platí řetězec nerovností:*

$$q - 1 \geqslant \frac{D(\mathbb{F}_q)}{S(\mathbb{F}_q)} \geqslant \frac{q-1}{2}.$$

Důkaz. Tato věta je přímým důsledkem věty 4.3.1, jelikož každé hejno přispívá buď $\frac{q-1}{2}$ nebo $q - 1$ medúzami do počtu $D(\mathbb{F}_q)$. □

Lepší odhady zdánlivě nenajdeme, dále uveďme grafy $AH_{\mathbb{F}_p}$ pro $p = A$ a B, kde každá medúza je reprezentantem svého hejna a má vždy buď $q - 1$ nebo $\frac{q-1}{2}$ přátel.

3.4 Dynamické systémy

AH posloupnost se od dvou, které jsme studovali před chvílí, liší také tím, že nemusíme nijak svévolně vybírat tu „správnou“ odmocninu. Tato posloupnost je tím mnohem jednodušeji studovatelná, protože je udaná zobrazeními, která jsou pouze lomenými funkcemi.

V AH posloupnosti zobrazíme prvek $(x, 1)$ na $\left(\frac{x+1}{2}, \frac{2x}{x+1}\right)$. Jaké poznatky můžeme vytěžit, kdybychom i tento prvek znovu normalizovali na $\left(\frac{(x+1)^2}{4x}, 1\right)$? Poté se zabýváme iterací zobrazení:

$$x \longmapsto \frac{(x+1)^2}{4x}$$

a jejím chováním na $\mathbb{F}_q$. Toto je přesně úkolem oblasti matematiky studující *dynamické systémy* lomených funkcí nad konečnými tělesy.

Dynamické systémy byly přes poslední dekády hojně zkoumány, i přesto se o nich ví poměrně málo. Přehledový článek z roku 2013 [?] dává do kontextu, kolik jejich struktury je nám zatím neznámo, dokonce i pouhé očekávané chování dynamického systému.

Obecný kecy.

Většina vyřešených dynamických systémů se zabývá buď pouze aditivní strukturou $\mathbb{F}_q$ [] a nebo pouze jeho multiplikativní strukturou. Například systém daný zobrazením $x \longmapsto g \cdot x$ tvoří cykly délky $\mathrm{ord}(g)$. My se zabýváme systémem, kde obě struktury kombinujeme, a proto se nemůžeme divit, že znalosti o této posloupnosti nepřijdou zdarma.

Jak přesně ale souvisí náš systém s *AH* posloupností?

Definice 3.4.1.

–říct, že cyklus v AH je ekvivalentně s cyklem Dynamic system–

Pomocí dynamických systémů a vlastností konečných těles můžeme novým způsobem dokázat důsledek 3.2.5. Stačí nám ukázat, že pro $z \in \mathbb{F}_q$ leží každý předchůdce prvku $(z, 1) \in AH_{\overline{\mathbb{F}_q}}$ po normalizaci v $\mathbb{F}_{q^2}$.

Věta 3.4.2. *Ať* $q \equiv \pm 3 \pmod 8$ *je mocnina prvočísla a* $x \in \overline{\mathbb{F}_q}$ *je prvek splňující:*

$$\frac{(x+1)^2}{4x} \in \mathbb{F}_q.$$

Potom $x \in \mathbb{F}_{q^2}$.

Důkaz. Číslo $z \in \overline{\mathbb{F}}_q$ leží v tělese $\mathbb{F}_q$, právě pokud je kořenem polynomu $z^q - z \in \mathbb{F}_q[x]$. Protože q je mocninou charakteristiky tělesa $\mathbb{F}_q$, tak pro libovolná $a, b \in \overline{\mathbb{F}}_q$ platí kvůli binomické větě $(a+b)^q = a^q + b^q$. Speciálně:

$$\frac{(x+1)^2}{4x} = \left(\frac{(x+1)^2}{4x}\right)^q = \frac{(x^2+2x+1)^q}{4x^q} = \frac{x^{2q}+2x^q+1}{4x^q},$$
$$x^{q+1} + 2x^q + x^{q-1} = x^{2q} + 2x^q + 1,$$
$$0 = (x^{q+1} - 1)(x^{q-1} - 1).$$

Buď tedy platí $x^{q+1} = 1$ nebo $x^{q-1} = 1$. Umocněním těchto dvou vztahů na exponent po řadě $q-1$ a $q+1$ získáme, že v každém případě platí $x^{q^2-1} = 1$, tj. $x \in \mathbb{F}_{q^2}$. □

– že se může hodit přejít do R a pak zpátky, viz Silverman –

Věta 3.4.3. *Buď $q \equiv \pm 3 \pmod 8$ mocnina prvočísla. Potom pro $d \in \{1, 2\}$ existuje v grafu ? vulkán hloubky d, jehož cyklus má délku alespoň $\log_2((q-1)\cdot(q-3)) - d - 2$.*

Důkaz. Označme $f : \mathbb{F}_q \longrightarrow \mathbb{F}_q : f(x) = \frac{(x+1)^2}{4x}$ lomenou funkci stupně dva. Potom n-násobná aplikace $f^{(n)}(x) = \underbrace{f(f(\dots f}_{n}(x)))$ má stupeň 2^n. Prvek $x \in ?$ tak leží v cyklu délky $D \mid n$, právě pokud $f^{(n)}(x) = x$.

Představme si, že vynásobíme lomenou funkci $f^{(n)}(x) - x$ jmenovatelem $f^{(n)}(x)$, poté získáme polynom ležící v $\mathbb{F}_q[x]$ stupně 2^n, který má nad $\mathbb{F}_q$ nejvýše 2^n kořenů. Existuje proto nejvýše 2^n prvků $x \in ?$ ležících v cyklu délky n. Počet prvků ? ležících v cyklu délky nejvýše n je proto roven nejvýše:

$$2 + 2^2 + \cdots + 2^n < 2^{n+1}. \tag{3.1}$$

Zvolme nyní $d \in \{1, 2\}$ a uvažme komponentu $V \subseteq AH_{\mathbb{F}_q}$ složenou ze všech vulkánů hloubky d. Ke každému členu cyklu $v \in V$ je připojen binární strom hloubky d s 2^d prvky, proto ve V je právě $|V|/2^d$ prvků ležících v cyklech. Díky větě 3.1.5 je toto číslo alespoň:

$$\frac{(q-1)(q-3)}{2^{d+1}}.$$

Označme konečně N nejvyšší délku cyklu, který ve V najdeme. Podle nerovnosti (4.3.1) musí platit:

$$2^{N+1} > \frac{(q-1)(q-3)}{2^{d+1}},$$

což jsme chtěli. □

Kapitola 4

Propojení s eliptickými křivkami

Je pozoruhodné, že tak jednoduchá věc, jako *AG* či *HG* posloupnost, generuje nad konečnými tělesy tak pravidelné grafy jako medúzy. Toto není vůbec náhoda, podobné grafy totiž popisují mnohem složitější struktury, konkrétně grafy isogenií eliptických křivek nad konečnými tělesy.

4.1 Rychlý úvod do eliptických křivek

V této sekci rychle a svižně probereme základy teorie eliptických křivek nad konečnými tělesy. Pro podrobnější text nemohu nedoporučit svou SOČ [], další excelentní cizojazyčné zdroje jsou [],[],[].

Po celou dobu se pohybujeme v tzv. *projektivní prostoru*, tedy množině tříd nenulových vektorů $(a_0 : \cdots : a_n) \in \overline{K}^{n+1}$, kde dva vektory považujeme za shodné, pokud jsou vzájemně skalárními násobky. Tyto třídy nazveme *body*.

Definice 4.1.1. Ať $A, B, \lambda \in \mathbb{F}_q$ jsou taková, že $4A^3+27B^2 \neq 0$ a $\lambda \neq 0, 1$. Pak definujeme *eliptickou křivku ve Weierstrassově tvaru* jako množinu bodů $(x, y) \in \mathbb{F}_q$ splňujících vztah:

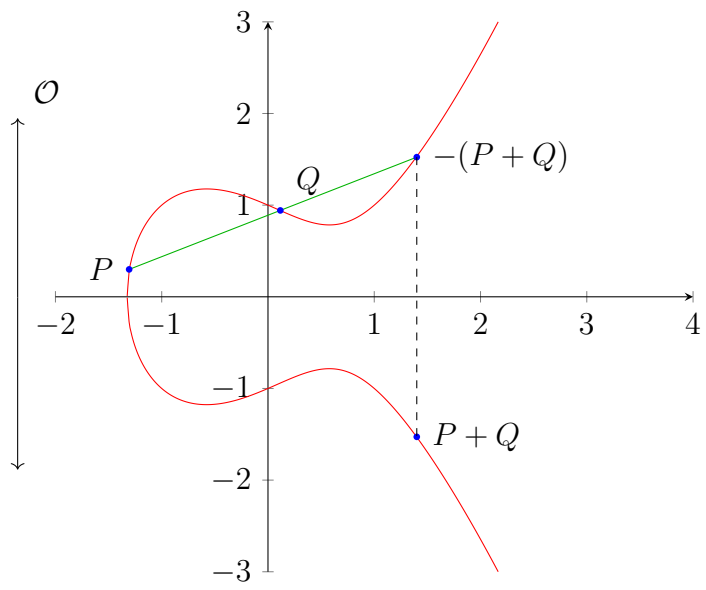
$$y^2 = x^3 + Ax + B,$$

spolu s tzv. *bodem v nekonečnu* O. Dále definujeme *eliptickou křivku v Legendrově tvaru* jako množinu $(x, y) \in \mathbb{F}_q$ splňujících:

$$y^2 = x(x - 1)(x - \lambda),$$

opět s bodem v nekonečnu.

Pokud definujeme sčítání na křivce tak, že součet každých tří kolineárních (ne-nutně různých) bodů je O, pak body na eliptické křivky tvoří grupu. V případě, že přímka PQ pro P, Q body na E degeneruje v tečnu, pak poslední průsečík této přímky s E bude dvojnásobek bodu P. Díky asociativitě sčítání na křivky můžeme pak jednoznačně definovat n-násobek bodu $[n]P = \underbrace{P + \cdots + P}_{n}$. Definujeme $[0]P = O$.



Obrázek 4.1: Sčítání na eliptické křivce.

–Obrázek–

Grupa bodů definovaných nad konečným tělesem je isomorfní direktnímu součinu $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$ pro vhodná celá m, n [já]. Pokud označíme $E(\mathbb{F}_q)$ množinu bodů na E definovaných nad $\mathbb{F}_q$ (včteně O), tak zmiňme důležitou *Hasseho větu*, která značně ukotví počet prvků této křivky. Ta tvrdí, že:

$$|q + 1 - \#E(\mathbb{F}_q)| \leqslant 2\sqrt{q}.$$

Důležité pro nás jsou zobrazení mezi křivkami, která zachovají jejich grupovou strukturu.

Definice 4.1.2. Ať E_1, E_2 jsou eliptické křivky nad tělesem K. Surjektivní homomorfismus grup $\phi : E_1(\overline{K}) \longrightarrow E_2(\overline{K})$ tvaru $\phi : (x : y : z) \longmapsto (u(x, y, z) : v(x, y, z) : w(x, y, z))$ pro polynomy $u, v, w \in K[x]$ nazveme *isogenií*. Pod jádrem $\ker \phi$ isogenie ϕ rozumíme jejímu jádru jako homomorfismu grup.

Obzvláště důležité isogenie jsou *isomorfismy*, tzn. invertibilní isogenie - isogenie dané lineárními zobrazeními $(x, y) \longmapsto (ax + by + c, dx + ey + f)$. Je jednoduché ukázat, že pro křivky ve Weierstrassově tvaru jsou isomorfismy dané zobrazením $(x, y) \longmapsto (u^2x, u^3y)$ pro $u \in \overline{K}$. Každá Legendreho křivka má nejvýše 6 křivek s ní isomorfních a je jednoduché najít jejich koeficienty [?].

I když ne všechny isogenie jsou invertibilní, ke každé isogenii $\phi : E \longrightarrow E'$ najdeme její *duální isogenii* $\widehat{\phi} : E' \longrightarrow E$. Můžeme proto říci, že „být isogenní“ je relace ekvivalence na množině křivek nad daným tělesem. Jak ale zjistit, kdy jsou dvě křivky isogenní? Částečný výsledek nám může poskytnout věta připisovaná *Sato a Tatovi*:

Věta 4.1.3. *(Sato-Tate) Buďte E, E' eliptické křivky nad $\mathbb{F}_q$. Pak jsou tyto křivky isogenní nad $\mathbb{F}_q$, právě pokud platí $\#E(\mathbb{F}_q) = \#E'(\mathbb{F}_q)$.*

Problém, kdy jsou dvě křivky isogenní pod isogenií daného stupně, je již obtížnější.

4.2 Okruhy endomorfismů

Endomorfismus na křivce E definujme jako isogenii $\phi : E \longrightarrow E$, přičemž připusťme, že $[0]$ je na E endomorfismem. Pak se sčítáním $(\phi + \psi)P = \phi P + \psi P$ a skládáním $\phi \circ \psi = \phi(\psi)$ tvoří endomorfismy na křivce okruh.

Definice 4.2.1. Buď E eliptická křivka definovaná nad $\mathbb{F}_q$. Pak označme $\mathrm{End}(E)$ okruh všech endomorfismů na E definovaných nad $\mathbb{F}_q$ s operacemi sčítáním a skládáním.

Definice 4.2.2. Buď $\phi \in \mathrm{End}(E)$. Pak definujeme jeho stopu jako:

$$\mathrm{Tr}\,\phi = \phi + \widehat{\phi}.$$

Je přímočaré ukázat, že stopa je aditivní funkce. Dále je známé, že $\phi + \widehat{\phi}$ je v okruhu endomorfismů celým číslem a navíc každý endomorfismus stupně n je nad $\mathrm{End}(E)$ kořenem kvadratické rovnice $x^2 - \mathrm{Tr}\,\phi x + n \in \mathbb{Z}[x]$.

4.3 AG posloupnost ve světle eliptických křivek

Nyní aplikujeme teorii eliptických křivek na *AG* posloupnost. Konkrétně ukážeme, že medúzy, které tvoří *AG* posloupnosti, můžeme propojit s grafy isogenií Legendreho křivek.

Uvažme nějakou dvojici $(a, b) \in AG_{\mathbb{F}_q}$. Tuto dvojici ztotožníme s dvojicemi (ka, kb) pro $k \in \mathbb{F}_q^\times$ pomocí podílu $\frac{b}{a} = \lambda$. Budeme se dále zabývat pouze tímto podílem. Kvůli přítomnosti odmocniny se budeme dívat na druhou mocninu tohoto podílu při přechodu z jedné dvojice na druhé:

$$\lambda^2 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 \longmapsto \left(\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\right)^2 = \frac{4ab}{(a+b)^2} = \frac{4\lambda}{(\lambda+1)^2}.$$

Chceme najít nějaké médium, ve kterém bude toto zobrazení přirozené. Autoři článku [?], na kterém je práce založena, našli velmi elegantní pohled na posloupnost pomocí Legendreho křivek. Konkrétně, pro každý podíl $\lambda = \frac{b}{a}$ definujeme Legendreho křivku:

$$E_{(a,b)} = E_{\lambda^2} : y^2 = x(x-1)\left(x - \frac{b^2}{a^2}\right).$$

Věta 4.3.1. *Graf je skoro graf isogenií.*

Pointou této definice samozřejmě je zjistit, jaký vztah spolu má dvojice (a, b) a (a_1, b_1).

Věta 4.3.2. *Mějme v grafu $AG_{\mathbb{F}_q}$ orientovanou hranu $(a,b) \longmapsto (a_1,b_1)$. Pak existuje mezi křivkami $E_{(a,b)}$ a $E_{(a_1,b_1)}$ isogenie stupně dvě definovaná nad $\mathbb{F}_q$. Tato isogenie má předpis:*

$$\phi(x,y) = \left(\frac{(ax+b)^2}{x(a+b)^2}, y\frac{a(ax+b)(ax-b)}{x^2(a+b)^3} \right).$$

Důkaz. ϕ je opravdu isogenií, protože je daná lomenými funkcemi nad $\mathbb{F}_q$ (a tedy i ponechává bod v nekonečnu), postačí nám tedy ukázat, že zobrazuje jednotlivé křivky na sebe. Pokud $(x,y) \in E_{(a,b)}$ splňuje $(a,b) \neq (0,0)$, tak nám stačí ukázat, že $\phi(x,y) \in E_{(a_1,b_1)}$. To je pouze otázka výpočtu:

$$\begin{aligned}
\frac{(ax+b)^2}{x(a+b)^2} \cdot \left(\frac{(ax+b)^2}{x(a+b)^2} - 1 \right) \left(\frac{(ax+b)^2}{x(a+b)^2} - \frac{b_1^2}{a_1^2} \right) = \\
\frac{(ax+b)^2}{x(a+b)^2} \cdot \left(\frac{(ax+b)^2}{x(a+b)^2} - 1 \right) \left(\frac{(ax+b)^2}{x(a+b)^2} - \frac{4ab}{(a+b)^2} \right) = \\
\frac{(ax+b)^2}{x(a+b)^2} \cdot \frac{(x-1)(a^2x-b^2)}{x(a+b)^2} \cdot \frac{(ax-b)^2}{x(a+b)^2} = \\
x(x-1)\left(x - \frac{b^2}{a^2}\right) \cdot a^2 \cdot \frac{(ax-b)^2(ax+b)^2}{x^2(a+b)^6} = \left(y \cdot \frac{a(ax-b)(ax+b)}{x(a+b)^3} \right)^2.
\end{aligned}$$

Isogenie ϕ proto zobrazí $E_{(a,b)}$ na $E_{(a_1,b_1)}$. □

Jádro takové isogenie (ve smyslu homomorfismu grup) je grupa $\{(0,0), O\}$. To potvrzuje, že AG posloupnost nezobrazí žádnou dvojici na jinou dvojici s nulovou složkou.

něco svulkánama.

–

Pojďme nyní využít tento nový náhled na AG posloupnost a osvětleme zdánlivě náhodné velikosti a počty medúz. Díky větě 4.3.1 je počet skupin přátel mezi medúzami, které tvoří roj $AG_{\mathbb{F}_q}$, roven počtu různých vulkánů v grafu isogenií. O počtu vulkánů v ?? je toho známo málo, v našem případě je možné poskytnout netriviální dolní odhad na počet vulkánů.

Věta 4.3.3. *(Griffin, Ono, Saika, Tsai) Pro každé $\varepsilon > 0$ a dostatečně velké $q \equiv 3 \pmod 4$ platí:*

$$s(\mathbb{F}_q) \geqslant \left(\frac{1}{2} - \varepsilon \right) \sqrt{q}.$$

Nástin důkazu.

Kapitola 5

Eliptické křivky a AH posloupnost

V procesu studia AH posloupnosti jsem se pokusil propojit tuto posloupnost s teorií obklopující eliptické křivky, podobně jako autoři původního článku ? udělali s AG posloupností. Přímo adaptovat jejich postup, tedy přiřadit vrcholům grafu křivky, podle nejlepšího mínění autora není možné, protože komponenty $AH_{\mathbb{F}_q}$ mají velmi jednoduché invarianty a mají velmi málo prvků. To by znamenalo, že bychom museli vybírat ideály s malými řády v grupě tříd ideálů.

Ne, *AH* posloupnost můžeme popsat trochu jednodušeji. Přesto se ale vrátíme do světa eliptických křivek.

5.1 Motivace

Pro tuto sekci proto sledujme trochu pozorněji časovou osu studia dynamických systémů, mnohé z nich vedly směrem isogenií přímo na křivkách, tzv. *endomorfismů*.

Vraťme se hned čtyři dekády nazpět, kdy Miller a Koblitz stáli u zrodu kryptografie pomocí eliptických křivek. Pro strukturovanější úvod do studia šifrování pomocí eliptických křivek a konkrétněji isogenií opět skromně doporučuji konzultovat mou práci []. Při studiu šifrování ryze nad eliptickými křivkami, tedy se zabýváme pouze skalárními isogeniemi $[n]P$, hledáme křivky, které obzvláště elegantní vzorce pro násobení, zpravidla hledáme jednoduché vzorce pro $[2]P$ a $[3]P$. Právě Neal Koblitz zjistil, že pro eliptickou křivku (ne ve Weiestrassově tvaru):

$$E : y^2 + xy = x^3 + 1$$

nad konečným tělesem charakteristiky 2 mají body velmi pěkné dvojnásobky:

?

Mohou nám však pomoci studovat i dynamiku funkce $x + \frac{1}{x}$ nad tělesy $\mathbb{F}_{2^n}$. V [?] je totiž ukázáno, že pro bod $P = (x, y) \in E$ a $\pi : (x, y) \longmapsto (x^2, y^2)$ Frobeniův automorfismus platí:

$$P + \pi(P) = \left(x + \frac{1}{x}, x^2 + y + 1 + \frac{1}{x^2} + \frac{y}{x^2} \right).$$

Pokud se tedy zaobíráme čistě x-ovou souřadnicí, endomorfismus $1 + \pi$ zobrazí x na prvek $x + \frac{1}{x}$. Ugolini [,,,] hojně studoval podobná propojení jistých dynamických systémů a eliptických křivek, nejprominentněji právě zobrazení $x \longmapsto x + \frac{1}{x}$ nad tělesy s charakteristikou $2, 3$ a 5. V těchto případech grafy asociované s tímto zobrazením též tvoří vulkány a pomocí eliptických křivek dokážeme podrobněji určit jejich vlastnosti. Tyto články byly hlavní inspirací pro tuto kapitolu.

5.2 Singulární Montgomeryho křivka

Ve snaze adaptovat postup popsaný výše jsem hledal křivky, na nichž existuje endomorfismus ϕ zobrazující bod $P : (x, y)$ na bod s x-ovou složkou $\frac{(x+1)^2}{4x}$. U křivek ve Weierstrassově ani Legendrově tvaru se mi takové zobrazení najít nepodařilo.

Hledaný endomorfismus jsem nakonec nalezl u křivek v *Montgomeryho tvaru* $By^2 = x^3 + Ax^2 + x$ pro $A, B \in \mathbb{F}_q$. Tyto křivky mají několik praktických výhod, proto se například používají v šifrovacím protokolu CSIDH, pro více informací doporučuji konzultovat mou předchozí práci [já].

První z takových výhod je, že třída isomorfismů Montgomeryho křivky závisí *pouze* na hodnotě parametru A. Další výhodou je, že lomené funkce udávající zobrazení [2] a [3] mají na Montgomeryho křivkách jednoduší tvary, což umožňuje pro rychlejší výpočty. Konkrétně pro bod $P = (x, y)$ je jeho dvojnásobek roven:

$$[2]P = \left(\frac{(x^2-1)^2}{4x(x^2+Ax+1)}, y\frac{(x^2-1)(x^4+2Ax^3+6x^2+2Ax+1)}{8x^2(x^2+Ax+1)^2} \right),$$

viz [karaskova]. Co by se stalo, pokud bychom zvolili $A = -2$? Pro takovou hodnotu A dostaneme pro $x \neq 1$:

$$[2]P = \left(\frac{(x+1)^2}{4x}, y\frac{x^2-1}{8x^2} \right). \tag{5.1}$$

x-ová souřadnice dvojnásobku bodu (x, y) přesně emuluje dynamický systém založený na AH posloupnosti! Toto pozorování otevírá cestu studiu AH posloupnosti pomocí eliptických křivek.

Problém ale nastává právě s hodnotou $A = -2$, pro ni je totiž křivka rovna:

$$y^2 = x(x-1)^2.$$

Tuto křivku budeme ve zbytku sekce studovat. Ve skutečnosti není tato křivka eliptická, v bodě $(1, 0)$ je singulární a nelze v něm spočítat tečnu. Všechny ostatní body při klasicky definovaném sčítání opět tvoří grupu, tentokrát je ale opravdu jednodušší, než na klasické eliptické křivce.

Definice 5.2.1. Uvažme křivku $E : y^2 = x(x-1)^2$ nad tělesem $\mathbb{F}_q$. Definujeme $E(\mathbb{F}_q)$ jako grupu bodů $(x, y) \in \mathbb{F}_q^2$ splňující $y^2 = x(x-1)^2$ a $x \neq 1$ spolu s bodem v nekonečnu O.

Ihned vidíme, že pokud (x, y) leží na E, tak x je čtvercem v $\mathbb{F}_q$. Díky tomuto pozorování můžeme parametricky vyjádřit všechny body na E a charakterizovat, kdy tři body leží na přímce.

Lemma 5.2.2. *Prvky grupy $E(\mathbb{F}_q)$ můžeme vyjádřit parametricky jako:*

$$E(\mathbb{F}_q) = \{(t^2, t^3 - t) | t \in \mathbb{F}_q \setminus \{\pm 1\}\} \cup \{O\}.$$

Důkaz. Pokud (x, y) patří do $E(\mathbb{F}_q)$, tak $x \neq 1$ a platí $x = \left(\frac{y}{x-1}\right)^2$, tedy buď $(x, y) = (0, 0)$, nebo je $\phi_q(x) = 1$. Ať $x \neq 0$, potom existuje $t \in \mathbb{F}_q^\times$ takové, že $x = t^2$. Potom y splňuje:

$$y^2 = x(x-1)^2 = \left[t(t^2-1)\right]^2.$$

Tomuto vztahu vyhovují právě dvě hodnoty y a to $\pm t(t^2-1) \in \{t^3 - t, (-t)^3 + t\}$. Všechny body ležící na $E(\mathbb{F}_q)$ jsou proto tvaru $(t^2, t^3 - t)$. Ukážeme, že krom $t \in \{\pm 1\}$ je každý takový bod unikátní. Opravdu, dejme tomu, že různé prvky $s, t \in \mathbb{F}_q$ splňují $(s^2, s^3 - s) = (t^2, t^3 - t)$. Platí:

$$s(s^2 - 1) = t(t^2 - 1) = t(s^2 - 1).$$

Jistě platí $st \neq 0$, proto platí $s^2 = 1 = t^2$, bod $(1, 0)$ ale na $E(\mathbb{F}_q)$ neleží. Docházíme k tomu, že prvky $E(\mathbb{F}_q) \setminus \{O\}$ můžeme jednoznačně přiřadit prvkům $\mathbb{F}_q \setminus \{\pm 1\}$. □

Okamžitým důsledkem této věty je, počet prvků na E je $|E(\mathbb{F}_q)| = q - 1$.

Věta 5.2.3. *Uvažme dva body $P = (a^2, a^3 - a), Q = (b^2, b^3 - b) \in E(\mathbb{F}_q)$ takové, že $P \neq \pm Q$. Potom:*

$$P + Q = \left(\left(\frac{ab+1}{a+b}\right)^2, \left(\frac{ab+1}{a+b}\right)^3 - \frac{ab+1}{a+b} \right).$$

Důkaz. Dle předpokladu je $-(P + Q)$ afinní bod, označme jej $R = (c^2, c^3 - c)$ pro $c \in \mathbb{F}_q$. Potom $P + Q + R = O$ a tak P, Q a R leží na přímce. Proto platí:

$$0 = \begin{vmatrix} a^2 & a^3 - a & 1 \\ b^2 & b^3 - b & 1 \\ c^2 & c^3 - c & 1 \end{vmatrix} = (a - b)(b - c)(c - a)(ab + ac + bc + 1),$$

tedy jelikož a, b, c jsou různé, tak platí $ab + ac + bc = -1$. Proto platí $c = -\frac{ab+1}{a+b}$ a tedy $P + Q = (c^2, -c^3 + c)$. □

Důkaz výše neplatí pro $P = Q$, tento případ je pokryt rovnicí (5.1). Díky této charakterizaci můžeme přesně zjistit, jak vypadá grupa bodů na E.

Věta 5.2.4. *Ať q je lichá mocnina prvočísla. Potom platí:*

$$E(\mathbb{F}_q) \cong \mathbb{F}_q^\times.$$

Důkaz. Z lemmatu 5.2.2 implicitně plyne, že obě grupy mají stejný počet prvků, totiž $q-1$. Definujme nyní zobrazení $\psi : E \longrightarrow \mathbb{F}_q^\times$ dané $\psi(O) = 1$ a pro bod $(a^2, a^3 - a) \in E(\mathbb{F}_q)$:

$$\psi(a^2, a^3 - a) = \frac{a+1}{a-1}.$$

Ukážeme, že zachovává operaci mezi oběma grupami. Nejprve, pokud pro nějaké body $P, Q \in E$ platí $P+Q = O$, tak existuje $a \in \mathbb{F}_q$ takové, že $P = (a^2, a^3-a)$ a $Q = (a^2, -a^3+a)$. Pak:

$$\phi(a^2, a^3 - a) \cdot \phi(a^2, -a^3 + a) \cdot \phi(O) = \frac{a+1}{a-1} \cdot \frac{-a+1}{-a-1} \cdot 1 = 1.$$

Dále, ať $P = (a^2, a^3 - a), Q = (b^2, b^3 - b)$ a $R = (c^2, c^3 - c)$ jsou ne všechny stejné afinní body ležící na přímce, pak dle věty 5.2.3, resp. rovnice (5.1), pokud se dva body z P, Q, R rovnají, platí $ab + ac + bc = -1$. Stačí nám ověřit, že za této podmínky platí:

$$\frac{a+1}{a-1} \cdot \frac{b+1}{b-1} \cdot \frac{c+1}{c-1} = 1,$$

což je triviální. Konečně, ψ je invertibilní, jelikož každému $a \in \mathbb{F}_q^\times$ přiřadíme bod:

$$\left(\left(\frac{a+1}{a-1} \right)^2, \left(\frac{a+1}{a-1} \right)^3 - \frac{a+1}{a-1} \right).$$

Protože $\frac{x+1}{x-1}$ je involucí, tak ψ bod výše zobrazí na a. Zobrazení ψ proto definuje isomorfismus mezi oběma grupami. □

Podívejme se, kdy v grupě $E(\mathbb{F}_q^k)$ leží bod s x-ovou souřadnicí $a \in \mathbb{F}_q^\times$. Leží-li bod $(a, -)$ v $E(\mathbb{F}_q)$, potom podle lemmatu 5.2.2 platí $\phi_q(a) = 1$. Je-li naopak a čtvercem v $\mathbb{F}_q$, tak podle lemmatu 5.2.2 existuje bod $P \in E(\mathbb{F}_q)$, jehož x-ová souřadnice je a. Speciálně pro $a \in \mathbb{F}_q$, které není čtvercem, leží bod $(a, -) \in E(\mathbb{F}_{q^2})$. Tyto poznatky shrnuje následující tvrzení.

Věta 5.2.5. *Nechť $a \in \mathbb{F}_q$. Potom:*

- *pokud $\phi_q(a) = 1$ nebo $a = 0$, pak existuje bod $(a, -) \in E(\mathbb{F}_q)$,*
- *pokud $\phi_q(a) = -1$, pak existuje bod $(a, -) \in E(\mathbb{F}_{q^2})$.*

5.3 Aplikace na AH posloupnost

Studium iterací zobrazení $x \longmapsto \frac{(x+1)^2}{4x}$ na konečném tělese nás zavedlo k jedné singulární křivce. Jelikož grupa bodů na takové křivce má velmi jednoduchou strukturu, získáme mnoho informací o AH posloupnosti.

Definice 5.3.1. Označme $G_{\mathbb{F}_q} = (E(\mathbb{F}_q), F)$ orientovaný graf takový, že pro libovolné body $P, Q \in E$ platí $(P, Q) \in F$ právě pokud $[2]P = Q$.

Nejprve si určeme, kdy pro bod $P = (x, y) \in E(\mathbb{F}_q)$ existuje v grafu $G_{\mathbb{F}_q}$ předchůdce, tj. kdy existuje bod $Q \in E(\mathbb{F}_q)$ takový, že $[2]Q = P$.

Věta 5.3.2. *Uvažme bod $P = (x, y) \in E(\mathbb{F}_q)$. Pak existuje bod $Q \in E(\mathbb{F}_q)$ splňující $[2]Q = P$, právě pokud ?.*

Důkaz. Nejprve připusťme, že existuje bod Q vyhovující zadání.

Věta 5.3.3. *Ať $P, Q \in E(\mathbb{F}_q)$ jsou body takové, že $[2]Q = P$. Potom existuje unikátní bod $R \neq Q$ splňující $[2]R = P$ a je to právě bod splňující $Q + R = (0, 0)$.*

Důkaz. Připusťme, že existuje bod $R \neq Q$ splňující $[2]R = P = [2]Q$, platí pak $[2](R - Q) = O$. Jelikož bod $R - Q$ není O, pak leží v 2-torzi a je proto roven $(0, 0)$. □

Věty ? a ? nám říkají, že každý vrchol $P \in G_{\mathbb{F}_q}$ má buď dva předchůdce, nebo ani jednoho. Zamysleme se nyní, jak může souvislá komponenta grafu $G_{\mathbb{F}_q}$ vypadat - díky výsledkům z kapitoly (((3))) budeme ukazovat, že grafy *vždy* tvoří vulkány. Jak ale rozlišíme, v jakém stupni vulkánu daný bod leží?

Víme, že vrchol $P \in V_i$ má následníka $[2]P$ ležícího ve V_{i-1}. Laicky řečeno násobení bodu dvojkou jej přemístí o stupeň výše. Veličina, kterou můžeme pomocí endomorfismu $[2]$ vhodně kontrolovat, je řád bodu P, přesněji *jeho 2-valuace*. Abychom toto ověřili, podívejme se znovu na příklad ?. Body (a, b), jejichž součin je ?, tvoří medúzy a opravdu podle věty 5.2.5 NĚCO. Naopak u vulkánu hloubky 2 si k bodům připišme jejich řády:

–OBR–

Opravdu, bod na levelu V_2 má řád dělitelný čtyřmi, body levelu V_1 mají řády sudé a nedělitelné čtyřmi, každý prvek V_0 má řád lichý. Zformalizujme si to:

Věta 5.3.4. *Graf z bodů tvoří vulkány.Navíc bod leží v levelu podle v2 ordu.*

Věta 5.3.5. *Hloubka je v2 q+-1*

Konečně jsme splnili slib z kapitoly 3, že pomocí eliptických křivek plně charakterizujeme, jaký tvar mají komponenty souvislosti v roji $AH_{\mathbb{F}_q}$. Pojďme toto propojení maximálně využít ve zkoumání dalších vlastností roje $AH_{\mathbb{F}_q}$.

– X = q-1 nebo q2-1 nebo tak –

Věta 5.3.6. *Nechť $k \mid X$ je liché číslo. Potom počet bodů $P \in E(\mathbb{F}_q)$ takových, že k nejmenší číslo $\ell \in \mathbb{N}$ splňující $[2^\ell]P = P$, je $\phi(k)$.*

Tato věta má jeden roztomilý důsledek, můžeme totiž pomocí ní dokázat novým způsobem jedno známé tvrzení.

Důsledek 5.3.7.

$$X = \sum_{k \mid X} \phi(k)$$

Tento vztah platí bezpodmínečně pro libovolné n:

$$n = \sum_{k|n} \phi(k).$$

Důkaz tohoto obecného tvrzení lze ? například pomocí tzv. Mobiovy inverzní formule [IR]. Blabla.

Podívejme se na nějaké $k \mid q-1$, podle věty 5.3.6 existuje $\phi(k)$ bodů, jejichž cykly jsou ?. Díky tomu můžeme vyjádřit přesně počet vulkánů obsahující tyto body.

Důsledek 5.3.8. *Nechť $k \mid X$ je liché číslo. Potom počet všech vulkánů $V \subseteq AH_{\mathbb{F}_q}$ s délkou cyklu rovné k je:*

$$\frac{\phi(k)}{\mathrm{ord}_k(2)}.$$

Věta 5.3.9. *Platí:*

$$s(\mathbb{F}_q) = \sum_{\substack{k|X \\ 2\nmid k}} \frac{\phi(k)}{\mathrm{ord}_k(2)}.$$

Najit Bound na SwarmNumber a teda na MedusaNumber
to je cely?

Závěr

zu ende

Carl Friedrich Gauss aritmeticko-geometrický průměr ve svém mládí studoval hojně, v jeho deníku o této posloupnosti nalezneme hned destíku zmínek této posloupnosti mezi roky 1799 a 1800. Věnoval se i zobecnění posloupnosti nad komplexními čísly. Jak to zobecnit nad konečnýma tělesama - - p adický?

Použitá značení

$a \mid b$	a dělí b
$\frac{1}{a}$	multiplikativní inverze a, tj. a^{-1}
$\nu_p(n)$	p-adická valuace n
$\left(\frac{a}{p}\right)$	Legendreův symbol a vzhledem k p
$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$	množina přirozených, celých, racionálních, reálných, komplexních čísel
$\mathbb{Z}_d$	okruh zbytků modulo d
$\mathbb{F}_q$	konečné těleso s q prvky
$\overline{K}$	algebraický uzávěr tělesa K
$K^\times$	multiplikativní podrupa tělesa K
$\mathbb{P}^n(K)$	projektivní prostor nad K o dimenzi $n+1$
$E(K)$	množina bodů křivky E nad K
$\#E(K)$	počet bodů na křivce E nad konečným tělesem K
$\mathcal{O}, O$	bod v nekonečnu křivky E
$[n]_E, [n]$	násobení n na křivce E
π, π_E	Frobeniův endomorfismus
$\widehat{\phi}$	isogenie duální k ϕ
$\deg \phi$	stupeň isogenie ϕ
$\ker \phi$	jádro isogenie ϕ
$\#\ker \phi$	velikost jádra isogenie ϕ
$\langle G \rangle$	podgrupa generovaná množinou G
E/G	obraz E v separabilní isogenii s jádrem G
$E/\mathfrak{a}$	obraz E v isogenii generované ideálem $\mathfrak{a}$
$E[n]$	n-torze křivky E
$\mathrm{End}(E)$	okruh endomorfismů E
$\mathrm{Ell}_\mathcal{O}$	množina eliptických křivek nad $\mathbb{F}_p$ s okruhem endomorfismů $\mathrm{End}(E) \cong \mathcal{O}$

$M \otimes_R N$	tenzorový součin R-modulů M a N
$\mathrm{End}^0(E)$	algebra endomorfismů E
$\mathrm{Tr}\,\phi, \mathrm{Tr}\,\alpha$	stopa endomorfismu ϕ, stopa $\alpha \in \mathrm{End}^0(E)$
$\mathrm{N}\,\alpha$	norma $\alpha \in \mathrm{End}^0(E)$
$\widehat{\alpha}$	Rosatiho involuce $\alpha \in \mathrm{End}^0(E)$
$j(E)$	j-invariant křivky E
$G_\ell(\overline{\mathbb{F}}_p)$	graf supersingulárních j-invariantů nad $\overline{\mathbb{F}}_p$ spojených isogeniemi stupně ℓ
$R[x]$	okruh polynomů s koeficienty nad okruhem R
$K(a_1, \ldots, a_n)$	nejmenší nadtěleso K obsahující prvky $a_1, \ldots, a_n$
$[K : L]$	stupeň rozšíření tělesa K nad L
$\alpha(x)$	lineární transformace $x \mapsto \alpha x$ působící na $\mathbb{Q}(\theta)$
M_α	matice odpovídající $\alpha(x)$
$\mathrm{Tr}\,M$	stopa matice M
$\det M$	determinant matice M
$Tr_K(\alpha)$	stopa prvku α v K
$N_K(\alpha)$	norma prvku α v K
$\mathcal{O}_K$	okruh celých algebraických čísel tělesa K
$Cl(\mathcal{O})$	grupa tříd ideálů pořádku $\mathcal{O}$
$h_\mathcal{O}$	řád grupy $Cl(\mathcal{O})$
(a)	hlavní ideál generovaný prvkem a
$\frac{\mathfrak{a}}{m}$	lomený ideál $\frac{\mathfrak{a}}{m}$
$N_\mathcal{O}(\mathfrak{a})$	norma ideálu $\mathfrak{a} \subseteq \mathcal{O}$, tj. $\lvert\mathcal{O}/\mathfrak{a}\rvert$
$\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$	součet ideálů $\mathfrak{a}$ a $\mathfrak{b}$
$\mathfrak{ab}, \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$	součin ideálů $\mathfrak{a}$ a $\mathfrak{b}$
$\mathfrak{a}\vert\mathfrak{b}$	ideál $\mathfrak{a}$ dělí ideál $\mathfrak{b}$
G/H	faktorgrupa G podle H
$\deg f$	stupeň polynomu, lomené funkce f
f'	derivace f
$f\vert_M$	zúžení f na množinu M
$\phi\vert_\ell$	zúžení isogenie ϕ na ℓ-torzi
$f \in O(g)$	f roste asymptoticky nejvýše stejně rychle jako g

Literatura

[1] De Feo, Luca: *Mathematics of Isogeny Based Cryptography*. Université de Versailles & Inria Saclay, 2017. Dostupné z: https://arxiv.org/abs/1711.04062.