

基于太阳影子定位问题的拟合模型

摘要

本文主要运用天文学的经纬度理论知识以及三角函数关系等几何知识,利用 Matlab, Excel等软件,对一定条件下的太阳影子定位的相关参数及其变化等问题进行数据整合及问题求解,得到了比较科学的结果。

问题一中:首先根据杆长,影长以及太阳高度角建立基本模型,通过运用 Bougers算法求得已知日期的太阳赤纬角,再结合已知的经纬度及Lamm提出的算法对太阳时角进行求解,进而得到太阳高度角。运用通过Matlab的基本程序编写便可拟合出一段时间内影长—北京时间(length-time)变化曲线。

问题二中:基于问题一得到的影长—北京时间(length-time)变化曲线,通过合理推测得到不同日期、时刻、经纬度的杆的length-time曲线应与问题一中曲线的变化规律基本一致,因此我们整合题中给定数据结合问题一所得结论拟合相应曲线,通过寻找最小值点即当地时间为正午的点的方法求出相应参数,再逆推得到目标经纬度。

问题三中:通过分析题干,发现此问与第二问相比只缺少了日期这个条件,可以依然使用问题二所建立的模型进行求解,将日期设为参数带入,推算出最可能的点。

问题四中:我们借助Matlab查找附件4中符合影子颜色的像素点的最值,提取数据进行筛检,舍掉偏离点后对数据进行拟合,得到了与问题二类似的数据。因此我们依然使用问题二所构建的模型对该问题进行求解,推算可能的地点。

关键词 Bougers 算法 Lamm 算法 影长 北京时间 拟合

一、问题的重述

如何确定视频的拍摄地点和拍摄日期是视频数据分析的重要方面，太阳影子定位技术就是通过分析视频中物体的太阳影子变化来确定视频拍摄的地点和日期的一种方法。

1. 建立影子长度关于各个参数的变化规律的数学模型，并应用建立的模型画出 2015 年 10 月 22 日北京时间 9:00-15:00 之间天安门广场（北纬 39 度 54 分 26 秒, 东经 116 度 23 分 29 秒）3 米高的直杆的太阳影子长度的变化曲线。

2. 根据某固定直杆在水平地面上的太阳影子顶点坐标数据，建立数学模型确定直杆所处的地点。将模型应用于附件 1 的影子顶点坐标数据，来求出若干个可能的地点。

3. 根据某固定直杆在水平地面上的太阳影子顶点坐标数据，建立数学模型确定直杆所处的地点和日期。将模型分别应用于附件 2 和附件 3 的影子顶点坐标数据，来求出若干个可能的地点与日期。

4. 附件 4 为一根直杆在太阳下的影子变化的视频，并且已通过某种方式估计出直杆的高度为 2 米。请建立确定视频拍摄地点的数学模型，并应用模型来求出若干个可能的拍摄地点。若拍摄日期未知，根据视频确定出拍摄地点与日期。

二、问题的分析

如何确定视频的拍摄地点和拍摄日期是视频数据分析的重要方面，太阳影子定位技术就是通过分析视频中物体的太阳影子变化，确定视频拍摄的地点和日期的一种方法。建立一个可由影子长度及方向的变化来推测地点日期的模型，经分析可知，影子长度及方向的直接影响因素为太阳高度角，间接因素有太阳赤纬角、太阳时角，太阳方位角、时间以及当地经纬度。

在此引入太阳高度角、太阳赤纬角、太阳时角、太阳方位角的概念：太阳高度角是指太阳光的入射方向和地平面之间的夹角，专业上讲太阳高度角是指某地太阳光线与通过该地与地心相连的地表切线的夹角；太阳赤纬角，是地球赤道平面与太阳和地球中心的连线之间的夹角；太阳时角即从观测点天球子午圈沿天赤道量至太阳所在时圈的角距离。太阳方位角即太阳所在的方位，指太阳光线在地

平面上的投影与当地经线的夹角，可近似地看作是竖立在地面上的直线在阳光下的阴影与正南方的夹角。方位角以目标物正北方向为零，顺时针方向逐渐变大，其取值范围是 $0—360^{\circ}$ 。因此太阳方位角一般是以目标物的 北方向为起始方向，以太阳光的入射方向为终止方向，按顺时针方向所测量的角度。^[1]

考虑到空气的折射率约为1.00027，对太阳高度角影响不大，故在以下问题讨论忽略太阳光折射情况。

对于问题1，建立一个影子长度的模型，并利用建立的模型画出天安门广场的旗杆在特定时间内的变化曲线。影长与杆长之比与太阳高度角成正相关，而太阳高度角则与上述间接因素有关，并且天安门广场所在地的时间与标准北京时间有时差，故可以根据上述步骤导出影子长度的变化与其影响因素的函数并由此画出的函数图像即为影长变化曲线。

对于问题2，题目给出了某杆的20组x、y坐标，坐标系以直杆底端为原点，水平地面为x、y平面，并且直杆垂直于地面。若要求出该点的经纬度，先利用平方和公式求出影长，可使用最小二乘法的影长-北京时间二次曲线拟合数据，此时影子指向正北方向，太阳方位角为 0° ，当地时间为正午12点，最低点所对应的时刻为北京时间，求出对应的北京时间与正午12点的差，利用第一问模型可以求出最低点经度值。根据日晷的制作原理可以利用地平式日晷的公式求出纬度，经过合理推算找到适合题目的那个点。

对于问题3，与第二问相似，附件2、3只给出了对应北京时间下的一组x、y坐标，求日期和经纬度。先找到日期与经度的关系，将日期用经度表示，后利用第二问所述方法，将用经度表示的日期带入，画出图像求出经纬度及日期。

对于问题4，附件所给视频为一段40分钟左右的监控，反映了一个杆长为2米的杆的影子由于时间因素而变化的情况，经测算视频约为6万帧左右，应等时间隔提取关键帧，定位杆底部与顶部坐标，由于透视对影长的影响，应在计算时考虑并加以修正，得到视频中杆长与真实杆长的比例，利用第二问的方法反推求出经纬度，并推测地点。

三、模型的假设与符号说明

3.1、模型的假设

- (1) 假设太阳光为平行光，大气对太阳光的折射影响过小，忽略不计。
- (2) 确定日期内一天的太阳高度角视为恒定不变。
- (3) 不考虑杆的宽度对影长变化的影响。
- (4) 附件 4 中忽略透视对杆长的影响。

3.2、符号说明

h 太阳高度角 (elevation)
 δ 太阳赤纬角 (declination angle)
 θ 太阳方位角 (azimuth)
 ω 太阳时角 (hour angle)
 L 当地经度 (longitude)
 W 当地纬度 (latitude)
 l 杆长
 m 影长
 ST 当地时间
 eot 时差

四、模型的建立与求解

4.1 问题（1）的模型建立与求解

依据对问题1的分析，杆长与影长之比等于太阳高度角的正切值，经整理可得式

(1)

$$m = \frac{l}{\sqrt{\frac{1}{1 - \sin^2(h)} - 1}} \quad (1)$$

而根据Bougers在1985年提出式（2）作为赤纬角的算法^[2]：

$$\delta = 0.3723 + 23.2567 \sin(wt) + 0.1149 \sin(2wt) - 0.1712 \sin(3wt) - 0.7580 \cos(wt) + 0.3656 \cos(2wt) + 0.0201 \cos(3wt) \quad (2)$$

其中, $w = \frac{360}{365.2422}$ $t = n - 0.5 - n_0$ (世界时0时算起)

n 是所求日期在一年中的日子数

$$n_0 = 78.801 + [0.2422(year - 1969)] - INT[0.25(year - 1969)]$$

计算太阳时角, 应用公式 (3)

$$\omega = (ST - 12) \times 15 \quad (3)$$

$$ST = \text{北京时间} + (L - 120) \times 4 \div 60 + eot(N)$$

根据Lamm在1981年提出的时差方程^[3]:

$$eot(N) = \sum_{k=0}^5 A_k \cos\left(\frac{2\pi kN}{365.25}\right) + B_k \sin\left(\frac{2\pi kN}{365.25}\right)$$

N 为从每一个闰年开始为1至4年的天数, 即最后一天为第1461天, A_k , B_k 的值见

下表

k	A_k / h	B_k / h
0	2.0870e-4	0
1	9.2869e-3	-1.2229e-1
2	-5.2258e-2	-1.5698e-1
3	-1.3077e-3	-5.1602e-3
4	-2.1867e-3	-2.9823e-3
5	-1.5100e-4	-2.3463e-4

利用上述模型, 可以推导出于2015年10月22日北纬39度54分26秒, 东经116度23分29秒的旗杆影长与时刻的曲线, 具体步骤如下:

经过简单计算, N 为660, n 为295, 利用Matlab算出 $eot(660)$ 为0.0365, 赤纬

角 δ 为 -11.0403°

联立 (1) (2) (3) 利用Matlab求出北京时间9:00-15:00的旗杆影长变化曲线如图1所示:

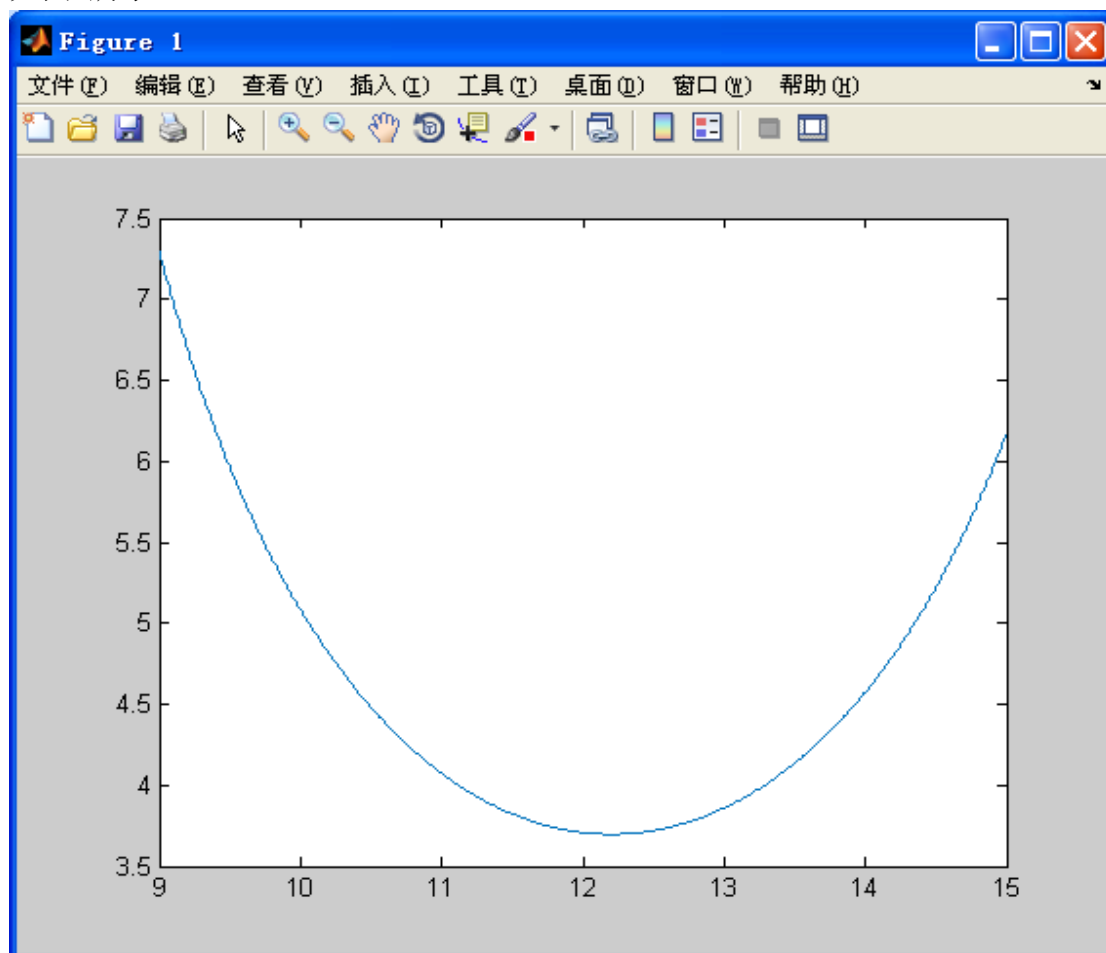


图1

4.2问题（2）的模型建立与求解

首先求出各对应时刻的影长:

根据已知条件, 计算出影长如表1

表1: 2015年4月18日时间-影长关系表

北京时间	14:42	14:45	14:48	14:51	14:54	14:57	15:00
x坐标(米)	1.0365	1.0699	1.1038	1.1383	1.1732	1.2087	1.2448
y坐标(米)	0.4973	0.5029	0.5085	0.5142	0.5198	0.5255	0.5311
影长(米)	1.1496	1.1822	1.2153	1.2491	1.2832	1.3180	1.3534

北京时间	15:03	15:06	15:09	15:12	15:15	15:18	15:21
x坐标(米)	1.2815	1.3189	1.3568	1.3955	1.4349	1.4751	1.516
y坐标(米)	0.5368	0.5426	0.5483	0.5541	0.5598	0.5657	0.5715
影长(米)	1.3894	1.4262	1.4634	1.5015	1.5402	1.5799	1.6201

北京时间	15:24	15:27	15:30	15:33	15:36	15:39	15:42
x坐标(米)	1.5577	1.6003	1.6438	1.6882	1.7337	1.7801	1.8277
y坐标(米)	0.5774	0.5833	0.5892	0.5952	0.6013	0.6074	0.6135
影长(米)	1.6613	1.7033	1.7462	1.7901	1.8350	1.8809	1.9279

利用Matlab进行最小二乘法的拟合，拟合出来的图像如图2所示：

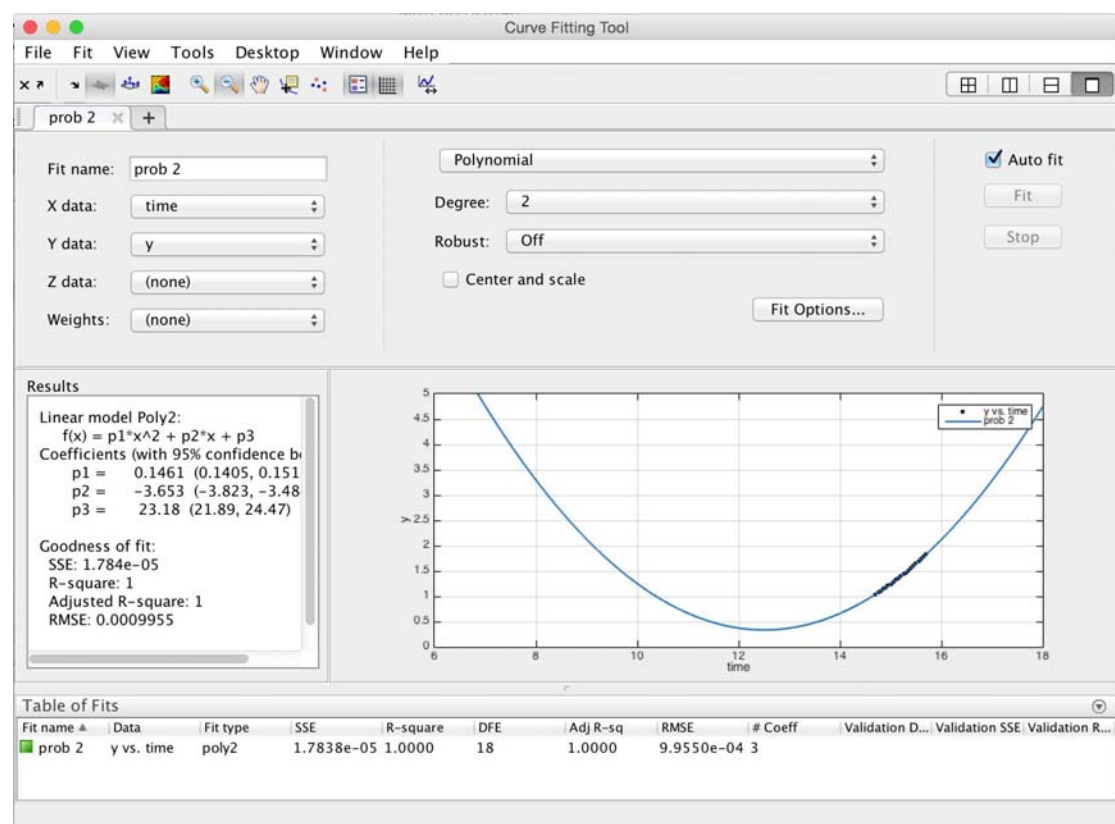


图2

由于拟合误差过大，故使用拟合所求出的范围来算经度：

即p1在（0.1405, 0.1517） p2在（-3.823, -3.484） p3在（21.89, 24.47）

根据问题（1）中公式，求出经度在（105° E, 119.4° E）

$$\tan(\theta) = \frac{\Delta x}{\Delta y}。$$

日晷的制作方法的公式^[4]：

$$\tan(\theta) = \tan\left(\frac{\pi}{12}ST\right) \sin(W)$$

$$ST = \text{北京时间} + (L - 120) \times 4 \div 60 + eot(N) \quad (N \text{为} 473)$$

经简单计算， $eot(473) = 0.1189$

$$W = \arcsin \frac{\tan(\theta)}{\tan\left(\frac{\pi}{12}ST\right)}$$

求得纬度范围为（14.18° N, 25.12° N）

综上所述，求得范围在经度（105° E, 119.4° E）维度（14.18° N, 25.12° N），即在此范围内的所有点均可能成立。

4.3题（3）的模型建立与求解

根据问题（1）的公式可以整合出日期与经度的关系。

问题3-1：

首先求出各对应时刻的影长：

根据已知条件，计算出影长如表2-1：

表2-1：题设时间-影长关系表（1）

北京时间	12:41	12:44	12:47	12:50	12:53	12:56	12:59
x坐标(米)	-1.2352	-1.2081	-1.1813	-1.1546	-1.1281	-1.1018	-1.0756
y坐标(米)	0.173	0.189	0.2048	0.2203	0.2356	0.2505	0.2653
影长(米)	1.2473	1.2228	1.1989	1.1754	1.1524	1.1299	1.1078

北京时间	13:02	13:05	13:08	13:11	13:14	13:17	13:20
x坐标(米)	-1.0496	-1.0237	-0.998	-0.9724	-0.947	-0.9217	-0.8965
y坐标(米)	0.2798	0.294	0.308	0.3218	0.3354	0.3488	0.3619
影长(米)	1.0863	1.0651	1.0444	1.0243	1.0046	0.9855	0.9668

北京时间	13:23	13:26	13:29	13:32	13:35	13:38	13:41
x坐标(米)	-0.8714	-0.8464	-0.8215	-0.7967	-0.7719	-0.7473	-0.7227
y坐标(米)	0.3748	0.3876	0.4001	0.4124	0.4246	0.4366	0.4484
影长(米)	0.9486	0.9309	0.9138	0.8971	0.8810	0.8655	0.8505

利用Matlab进行最小二乘法的拟合，拟合出来的图像如下图：

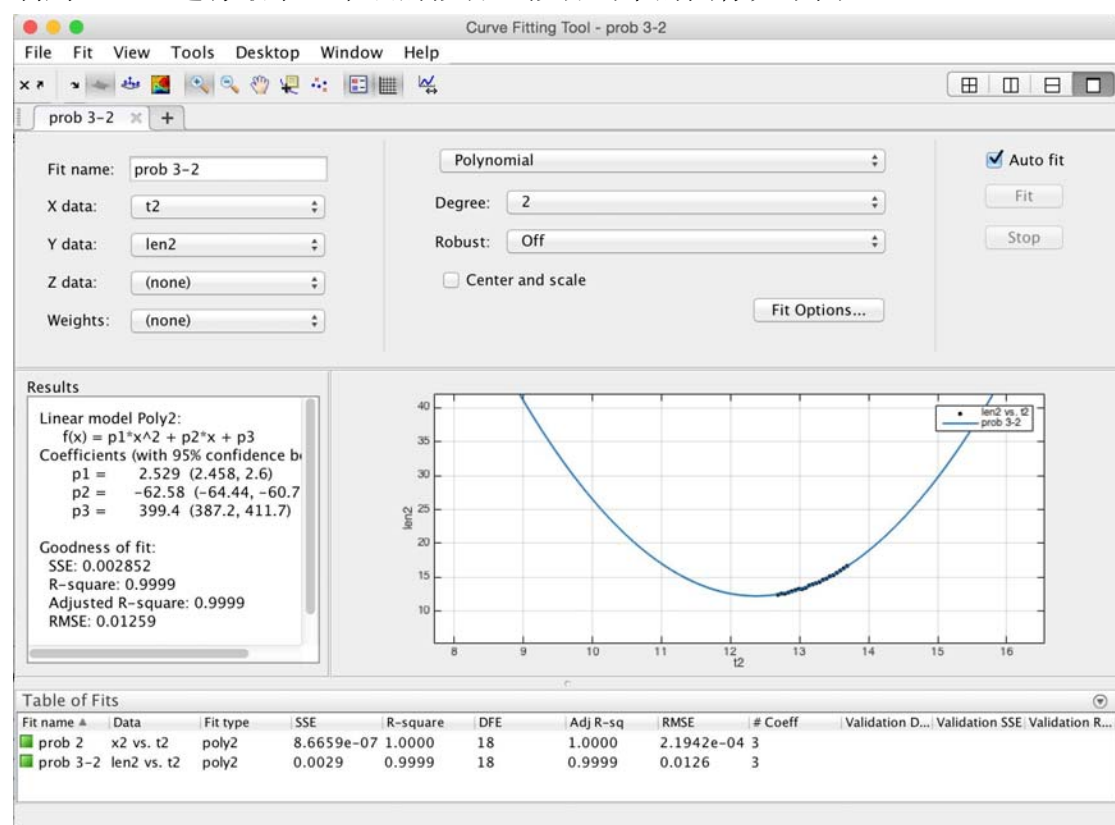


图3

利用问题（2）的模型可以算得位置为（41.1° N, 85.2° E）即新疆维吾尔自治区巴音郭楞蒙古自治州尉犁县，日期10月。

问题3-2

首先求出各对应时刻的影长，根据已知条件，计算出影长如表2-2

表2-2：题设时间-影长关系表（2）

北京时间	13:09	13:12	13:15	13:18	13:21	13:24	13:27
x坐标(米)	1.1637	1.2212	1.2791	1.3373	1.396	1.4552	1.5148
y坐标(米)	3.336	3.3299	3.3242	3.3188	3.3137	3.3091	3.3048
影长(米)	3.5331	3.5468	3.5618	3.5781	3.5958	3.6149	3.6354

北京时间	13:30	13:33	13:36	13:39	13:42	13:45	13:48
x坐标(米)	1.575	1.6357	1.697	1.7589	1.8215	1.8848	1.9488
y坐标(米)	3.3007	3.2971	3.2937	3.2907	3.2881	3.2859	3.284
影长(米)	3.6572	3.6805	3.7052	3.7313	3.7589	3.7881	3.8187

北京时间	13:51	13:54	13:57	14:00	14:03	14:06	14:09
x坐标(米)	2.0136	2.0792	2.1457	2.2131	2.2815	2.3508	2.4213
y坐标(米)	3.2824	3.2813	3.2805	3.2801	3.2801	3.2804	3.2812
影长(米)	3.8508	3.8846	3.9199	3.9569	3.9955	4.0358	4.0779

利用MATLAB进行最小二乘法的拟合，拟合出来的图像如图4：

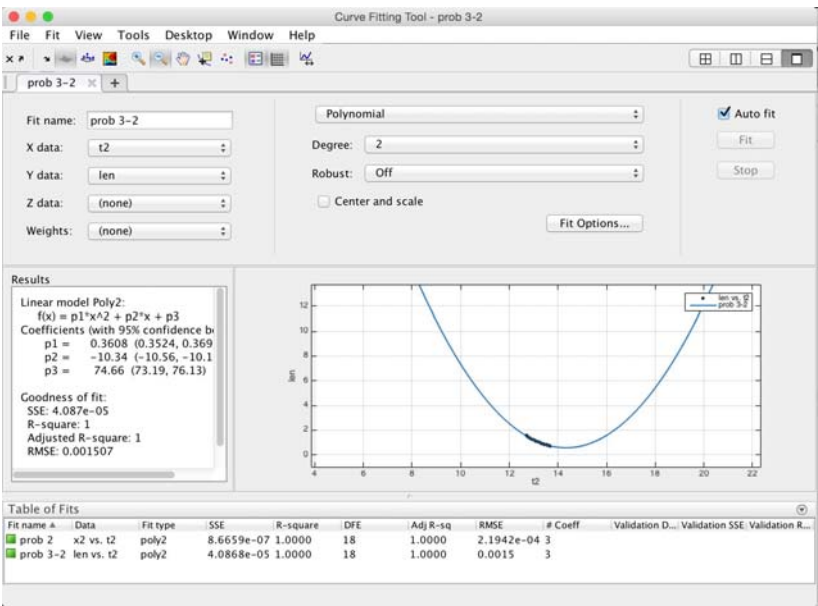


图4

利用问题（2）的模型可以算得位置为（27.7° N, 107.4° E）即贵州省遵义市湄潭县黄家坝镇牛场村、日期12月。

4. 4题（4）的模型建立与求解

首先每隔1500张取一关键帧，选取40张。

由于透视对影长有一定影响且影响不可忽略，故在计算前应对视频中测得影长还原。

由于花坛底部与地面裂缝平行，故可以延伸找到消失点，如图点B即为消失点



图5

分别连接B点与影端和杆底部，并过坡底座平行于影子的线

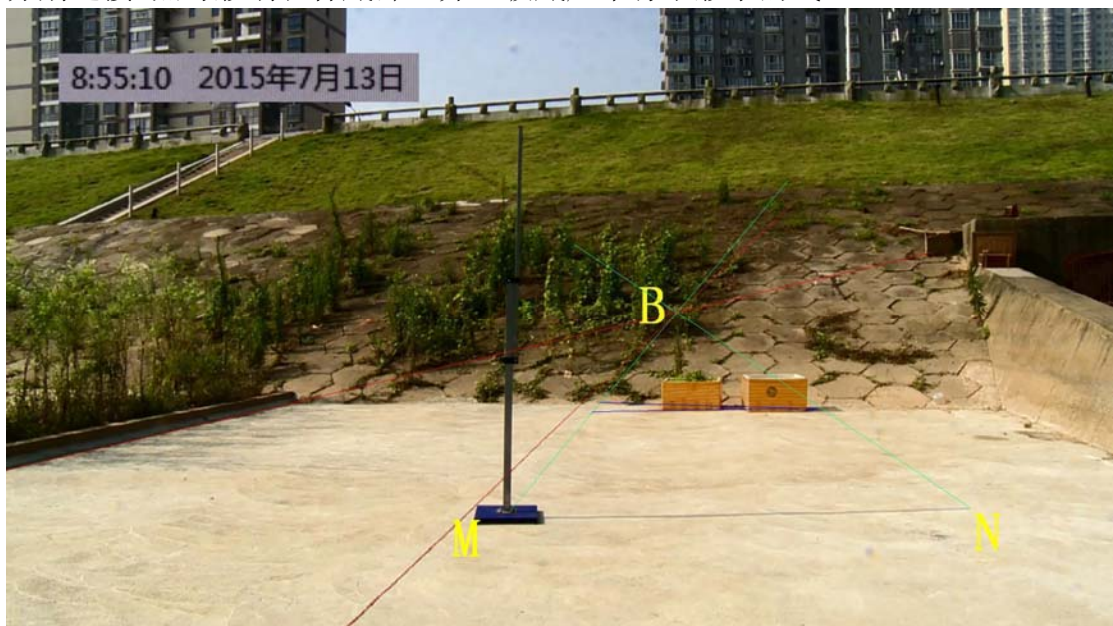


图6

由透视画法可以计算出原长=测得值*（1+sin(∠BMN)）

定位杆的端点及底部，粗略划出顶点所在的大致矩形区域，并对该区域遍历，查找符合影子颜色的像素点，找到最值，提取数据进行筛检，将偏离点舍掉后对2-25号点进行拟合，拟合出的结果如下图：

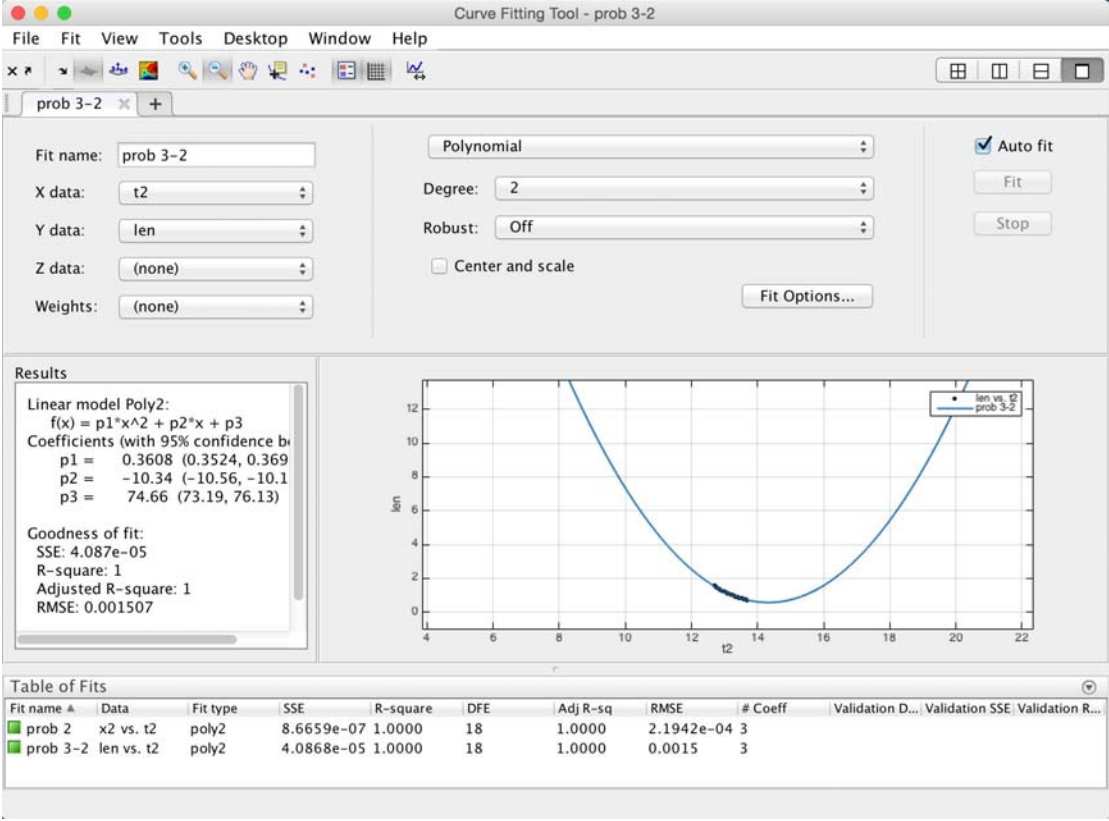


图7

利用问题（2）的模型可以算得位置为（40.3° N, 113.4° E），具体位置大约在山西省大同市新荣区。

五、模型的评价与改进方向

本题的实质是在日期，时间，经纬度，影长这几个变量之中，运用构建具体模型的方法解决一个或多个变量空缺时求多个解并运用一定方法进行结果分析的过程，运用MATLAB软件进行最小二乘法的二次函数拟合，运用公式来进行太阳影子定位经纬度。本文构建的模型可以很好地利用多个公式并整合大量数据，使用计算机软件快速且准确地根据影子变化推测出其所在经纬度。

由于拟合会出现很大误差，所以不同点之间测算出的经纬度会有较大偏差，今后的改进方向为寻求更加精准的方法测算出当地时间为正午的影子长度来计

算其所在经纬度。

完善本题模型之后，会极大地推动太阳能发展与利用，地质的探索，相信会对绿色和谐社会做出巨大贡献的！

附录

参考文献

- 【1】 《中学生科学辞典》编写组. 《中学生科学辞典》. 郑州: 河南人民出版社, 1983。
- 【2】 BOURGES B. Improvement in solar declination computation [J]. Solar Energy. 35(4):367-369. 1985。
- 【3】 LAMM L O. A new analytic expression for the equation of time [J]. Solar Energy. 6(5):465. 1981。
- 【4】 广西壮族自治区测绘地理信息局. 日晷的制作
<http://www.gxch.gov.cn/knowledge/tropic/huabeigui/9.htm>. [引用日期 2015-09-13]

软件及源程序

本次所使用软件为Mathworks的Matlab软件

```
f1:
function [ f ] = f1( t )
    delta=-11.0403;
    phi=39.907222222222;
    f=sin(phi)*sin(delta)+cos(phi)*cos(delta)*cos(t);
end

f2:
function [ f ] = f2( f1 )
    f=3./(sqrt(1./(1-f1.*f1)-1));
end

eot:
function [ e ] = eot( t )
    e=0;
    a=[2.087e-4;9.2869e-3;-5.2258e-2;-1.3077e-3;-2.1867e-3;-1.51e-4];
    b=[0;-1.2229e-1;-1.5698e-1;-5.1602e-3;-2.9823e-3;-2.3463e-4];
    pi=3.1415926;
    for i=1:1:6
        e=e+(a(i)*cos(pi*2*i*t/365.25)+b(i)*sin(pi*2*i*t/365.25));
    end
end
```

pos:

```
function [ e ] = eot( t )  
    e=0;  
    a=[2.087e-4;9.2869e-3;-5.2258e-2;-1.3077e-3;-2.1867e-3;-1.51e-4];  
    b=[0;-1.2229e-1;-1.5698e-1;-5.1602e-3;-2.9823e-3;-2.3463e-4];  
    pi=3.1415926;  
    for i=1:1:6  
        e=e+(a(i)*cos(pi*2*i*t/365.25)+b(i)*sin(pi*2*i*t/365.25));  
    end  
end
```

lat:

```
function [ wei ] = lat( x,y,t )  
%UNTITLED7 Summary of this function goes here  
% Detailed explanation goes here  
pi=3.1415926;  
wei=180*asin(y/x./t*15/180*pi)/pi;  
  
end
```

time:

```
function [ ti ] = time( l,t,n )  
    st=t+(l-120)/15+eot(n);  
    w=(st-12)*15;  
    ti=w/180*3.1415926;  
end
```