Universidad Nacional de Ingeniería

Facultad de Ingeniería Eléctrica y Electrónica

”Laboratorio 1 de Análisis de Señales y Sistemas”

Curso: Análisis de Señales y Sistemas

Código del Curso: EE410-M

Docente: Manuel Arevalo Villanueva

Integrantes: Gian Carlos Chancavilcas Osores - 20191108K

Carlos Ricardo Cueva León - 20191032D

Julio Cesar Luna Yabarrena - 20130346I

Harold Alessander Jhon Zambrano Quispe - 20191351B

2021-I

INDICE

1 MARCO TEÓRICO

a. CONVOLUCIÓN DISCRETA

Convolución es un valor que se extiende a todos los sistemas que son invariantes linear del tiempo (LTI - Linear Time Invariant). La idea de convolución discreta es la misma que la de convolución continua. Por esta razón, puede ser de gran ayuda el ver las dos versiones para que usted entienda la extrema importancia del concepto. Recuerde que la convolución es un instrumento poderoso al determinar el resultado de un sistema después de saber la una entrada arbitraria y la respuesta al impulso del sistema.

SUMA DE CONVOLUCIÓN

Como ya ha sido mencionado, la suma de convolución provee una manera matemáticamante concisa para expresar el resultado de un sistema LTI, basado en una entrada arbitraria para una señal discreta y también el saber la respuesta del sistema. La suma de convolución es expresada como:

$$\boxed{y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]}$$

b. TRANSFORMADA Z

Para aplicar la transformada Z se debe utilizar la definición.

$$\boxed{\mathcal{Z}\{f[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{f[n]}{Z^n}}$$

Con la siguiente definición se podrá obtener algunos resultados notables

- $\mathcal{Z}\{\delta[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\delta[1]}{Z^n} = 1$

- $\mathcal{Z}\{r^n u[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{r^n u[n]}{Z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{Z^n} = \frac{z}{z-r}$
  Donde $|r| \leq 1$ además $r \in \mathrm{C}$

- $\mathcal{Z}\{r^n nu[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{r^n nu[n]}{Z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n n}{Z^n} = \frac{z}{(z-r)^2}$
  Donde $|r| \leq 1$ además $r \in \mathbf{C}$

De igual manera se puede demostrar algunas propiedades como

- $\mathcal{Z}\{C_1 f_1[n] + C_2 f_2[n]\} = C_1 \mathcal{Z}\{f_1[n]\} + C_2 \mathcal{Z}\{f_2[n]\} = C_1 F_1(z) + C_2 F_2(z)$

- $\mathcal{Z}\{f[n-k]\} = \frac{\mathcal{Z}\{f[n]\}}{z^k} = \frac{F(z)}{z^n}$

c. TRANSFORMADA DE LAPLACE

DEFINICIÓN DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Sea $F(t)$ una función de t definida para $t > 0$. La transformada de Laplace de $F(t)$, denotado por $\mathcal{L}F(t)$, se define como:

$$\boxed{\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt}$$

En general, $f(s)$ existe cuando $s > \alpha$ donde α es cierta constante.
Donde: $\mathcal{L}$ se llama el **operador de la transformada de Laplace**

DEFINICIÓN DE LA TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE

Si la transformada de Laplace de una función $F(t)$, es $f(s)$. es decir $\mathcal{L}F(t) = f(s)$,entonces $F(t)$ se llama una **transformada inversa de Laplace** de (s) y se expresa por:

$$\boxed{F(t) = \mathcal{L}^{-}\{f(s)\}}$$

Donde: $\mathcal{L}^{-}$ se llama el **operador de la transformada inversa de Laplace**

2 PROBLEMAS

1. **Sea $f(t) = u(t) - u(t-3)$ la señal pulso rectangular , $g(t) = e^{-2t}u(t), 0 \leq t \leq 5$ la amortiguacion exponencial y sea $h(t)$ la señal pulso triangular definida asi :**

$$h(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t \leq 0 \\ t & si \quad 0 < t < 1 \\ 2-t & si \quad 1 < t < 2 \\ 0 & si \quad t < 2 \end{cases}$$

Usando el MATLAB grafique las señales en tiempo continuo $f(t), g(t), h(t)$
Encuentre en terminos de de t y de la señal escalon unitario las siguientes convoluciones: $f(t)*g(t), f(t)*h(t), g(t)*h(t)$
Usando el matlab y el comando *conv* grafique las convoluciones $f(t)*f(t),\ f(t)*g(t),\ g(t)*g(t),\ g(t)*h(t),\ h(t)*h(t)$**.**

Solución:

función f(t)=u(t)-u(t-3)=rectpuls(t-1.5)

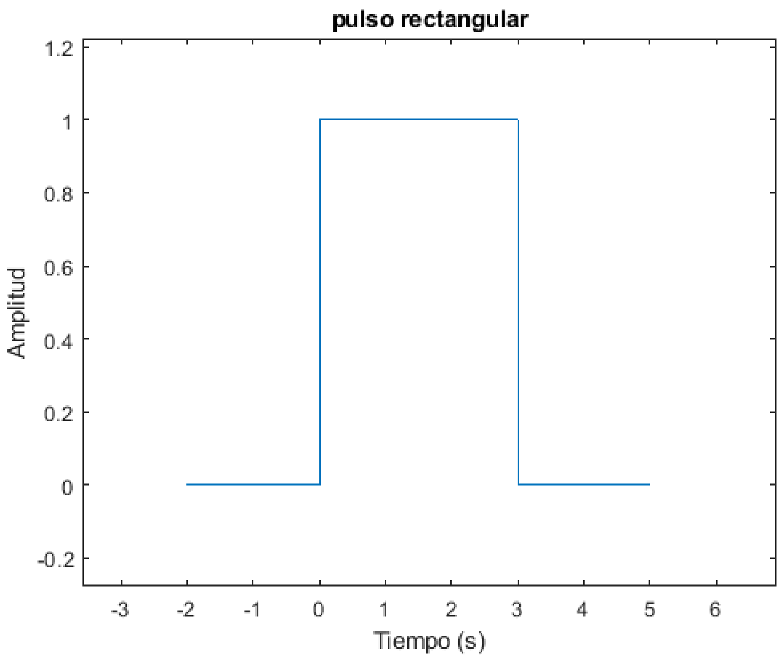


Figure 1: grafica de la funcion f(t)

funcion $g(t) = e^{-2t}u(t)$

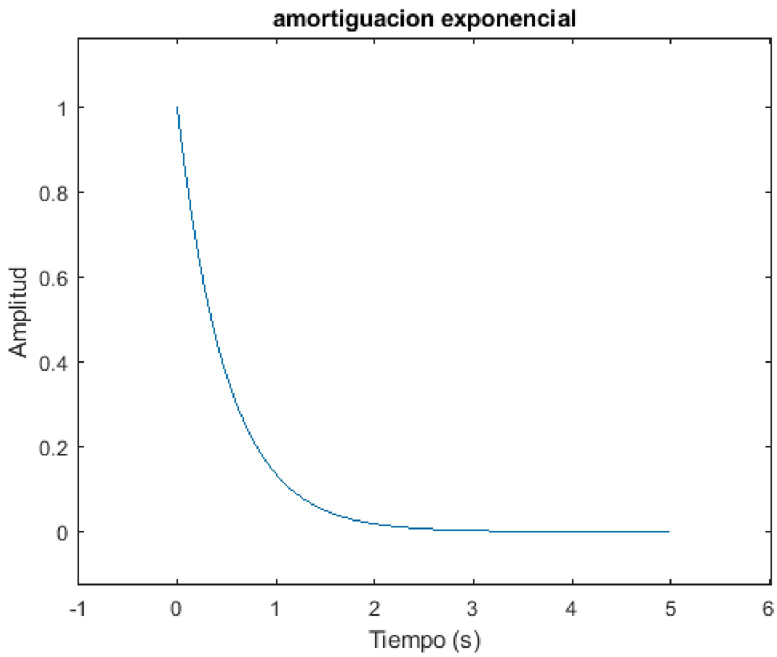


Figure 2: grafica de la funcion g(t)

funcion $h(t) = \ tripuls(t-1)\ = u_1(t) - 2u_1(t-1) + u_1(t-2)$

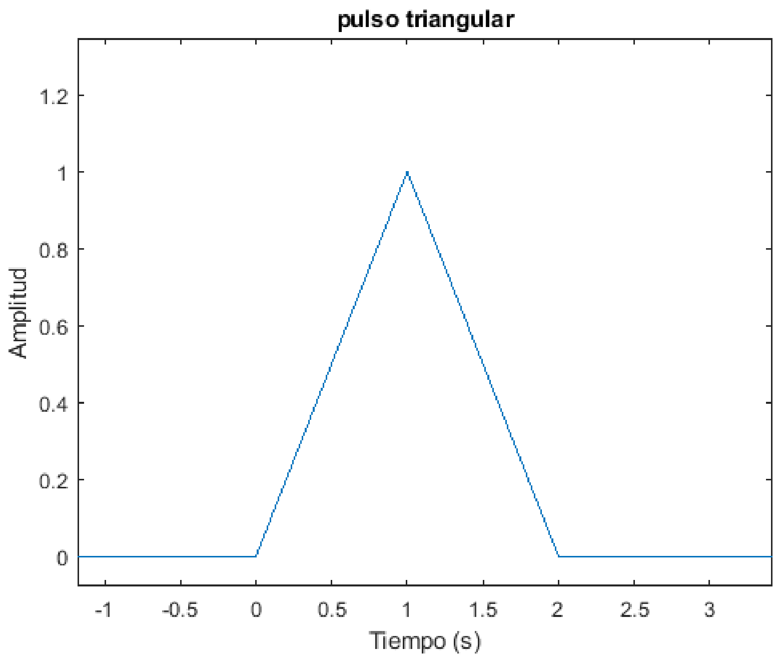


Figure 3: grafica de la funcion g(t)

Ahora hallaremos las convoluciones de $f(t) * g(t), f(t) * h(t), g(t) * h(t)$

$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) f(t-\tau) d\tau$

Para $t < 0$

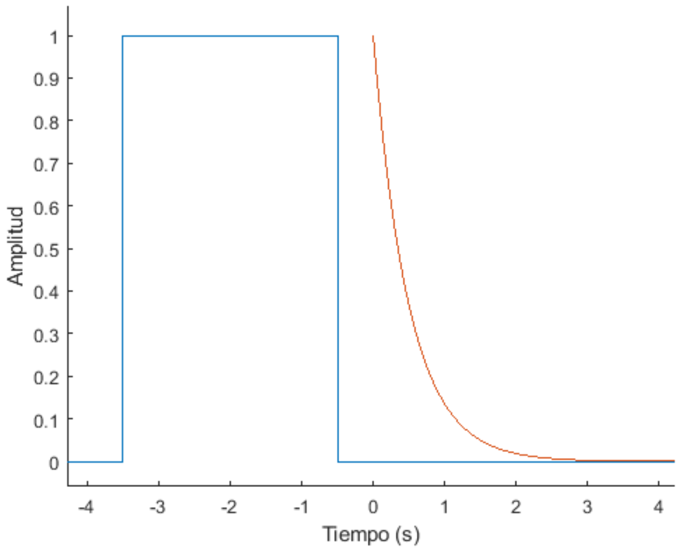


Figure 4: para valores de $t < 0$

Vemos que las graficas no se interceptan , por lo tanto $\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) f(t-\tau) d\tau = 0$

Para $0 < t < 3$

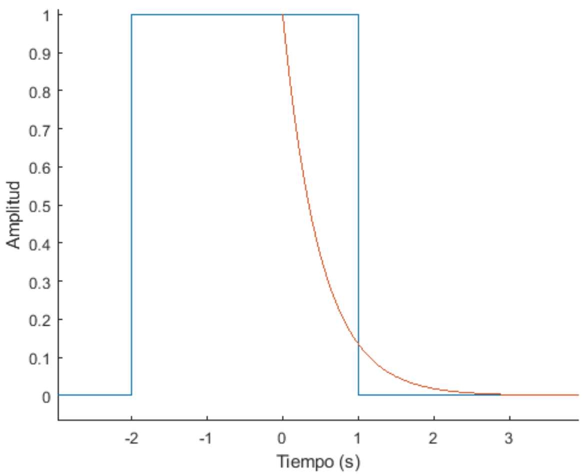


Figure 5: grafica en $0 < t < 3$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) f(t-\tau) d\tau = \int_{0}^{t} e^{-2t}.1 d\tau = \frac{1}{2} - \frac{e^{-2t}}{2}$$

Para $3 < t < 5$

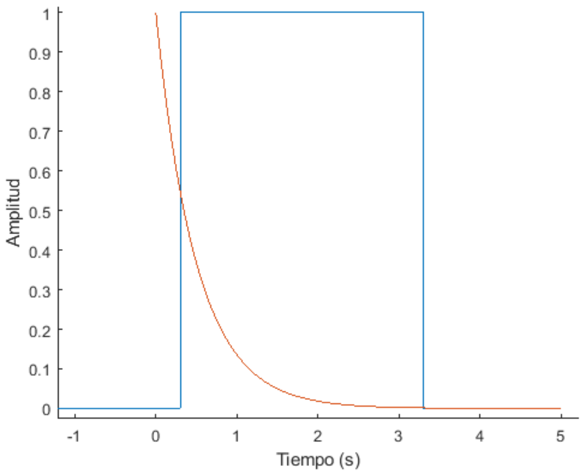


Figure 6: grafica en $3 < t < 5$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)f(t-\tau)d\tau = \int_{-3+t}^{t} e^{-2t}.1d\tau = \frac{e^{-2t+6}}{2} - \frac{e^{-2t}}{2}$$

Para $5 < t < 8$

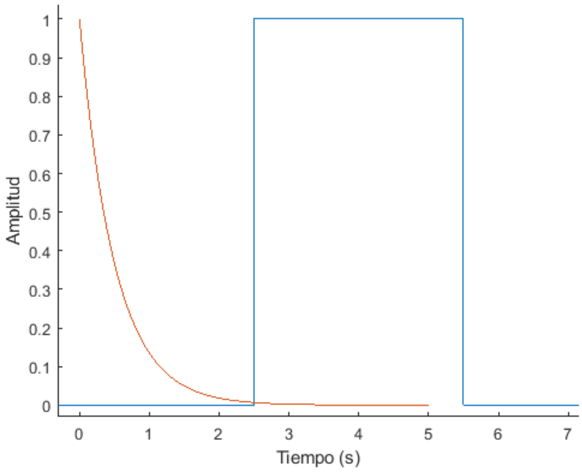


Figure 7: grafica en $5 < t < 8$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)f(t-\tau)d\tau = \int_{-3+t}^{5} e^{-2t}.1d\tau = \frac{e^{-2t+6}}{2} - \frac{e^{-10}}{2}$$

Para $8 < t$

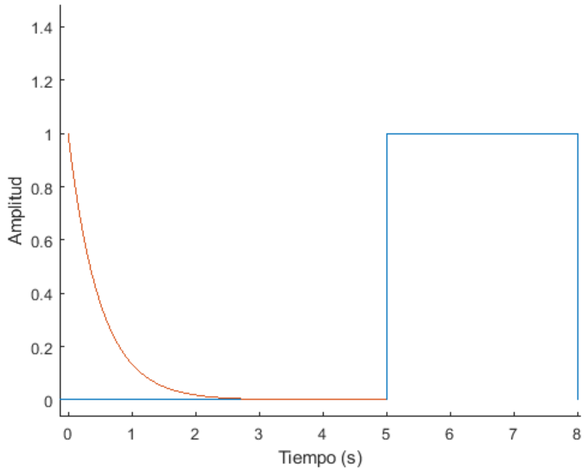


Figure 8: grafica en $5 < t < 8$

$\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) f(t-\tau) d\tau = \int_{8}^{\infty} e^{-2t}.1 d\tau = 0$

la grafica de $f(t) * g(t)$ es

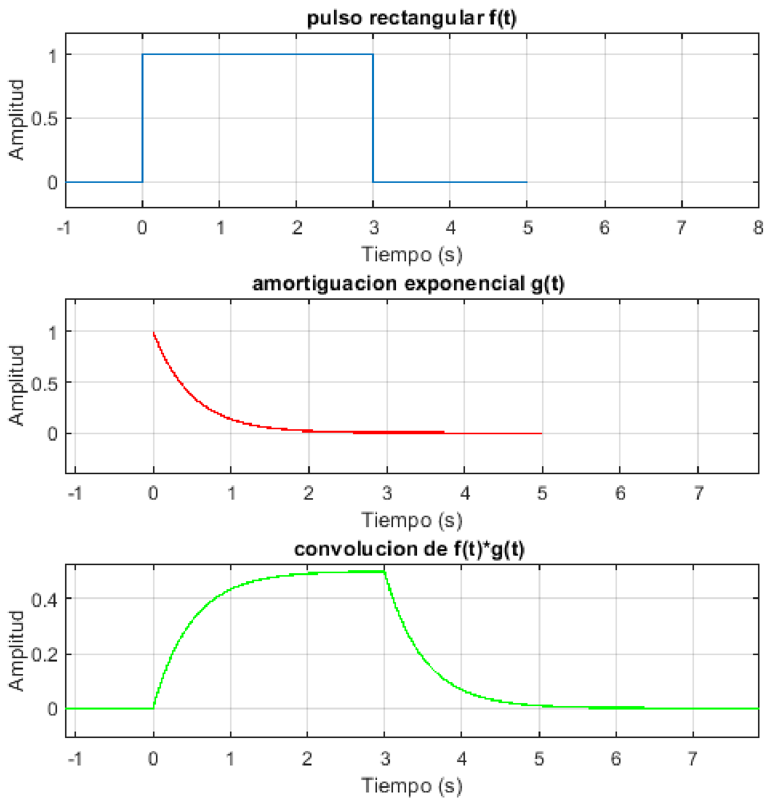


Figure 9: convolucion de $f(t) * g(t)$

$f(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) f(t-\tau) d\tau$

sabemos que :

$$u_n(t) * u_m(t) = u_{n+m+1}(t)$$
$$u_n(t-a) * u_m(t-b) = u_{n+m+1}(t-a-b)$$

$$f(t) = rectpuls(t-1.5) \ = u_0(t) - u_0(t-3)$$
$$h(t) = tripuls(t-1) \ = u_1(t) - 2u_1(t-1) + u_1(t-2)$$

$$f(t) * h(t) = (u_0(t) - u_0(t-3)) * (u_1(t) - 2u_1(t-1) + u_1(t-2))$$
$$f(t) * h(t) \ = u_2(t) - 2u_2(t-1) + u_2(t-2) - u_2(t-3) + 2u_2(t-4) - u_2(t-5)$$

la grafica de $f(t) * h(t) es$

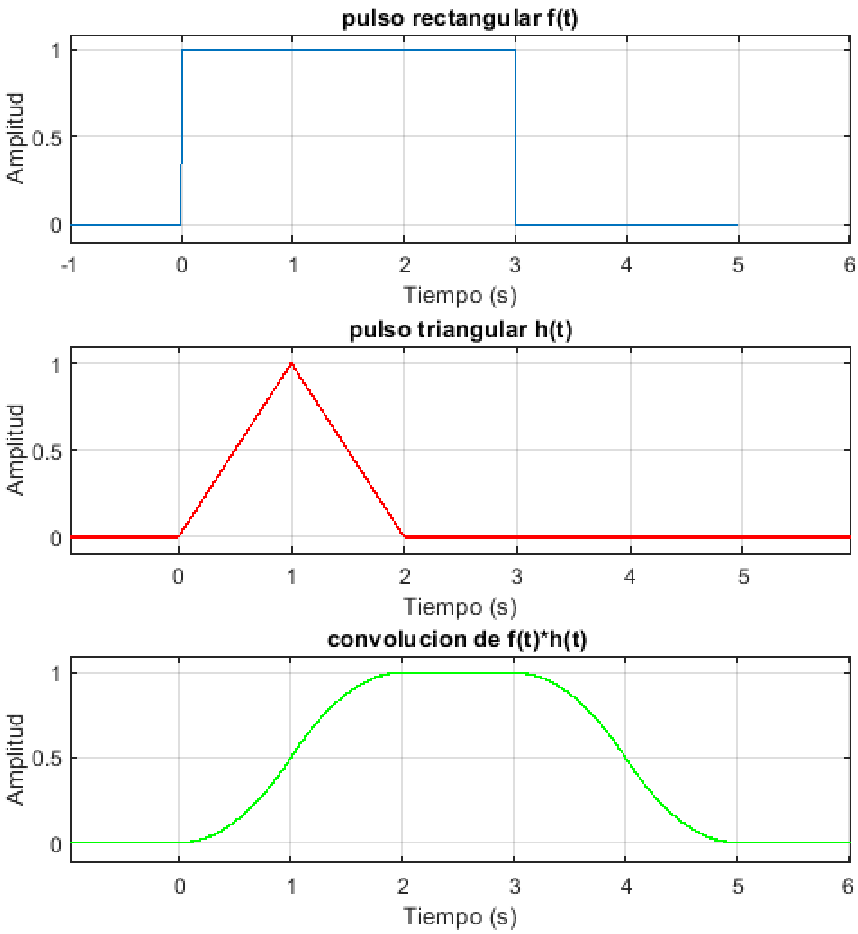


Figure 10: convolucion de $f(t) * h(t)$

la grafica de $g(t) * h(t)$

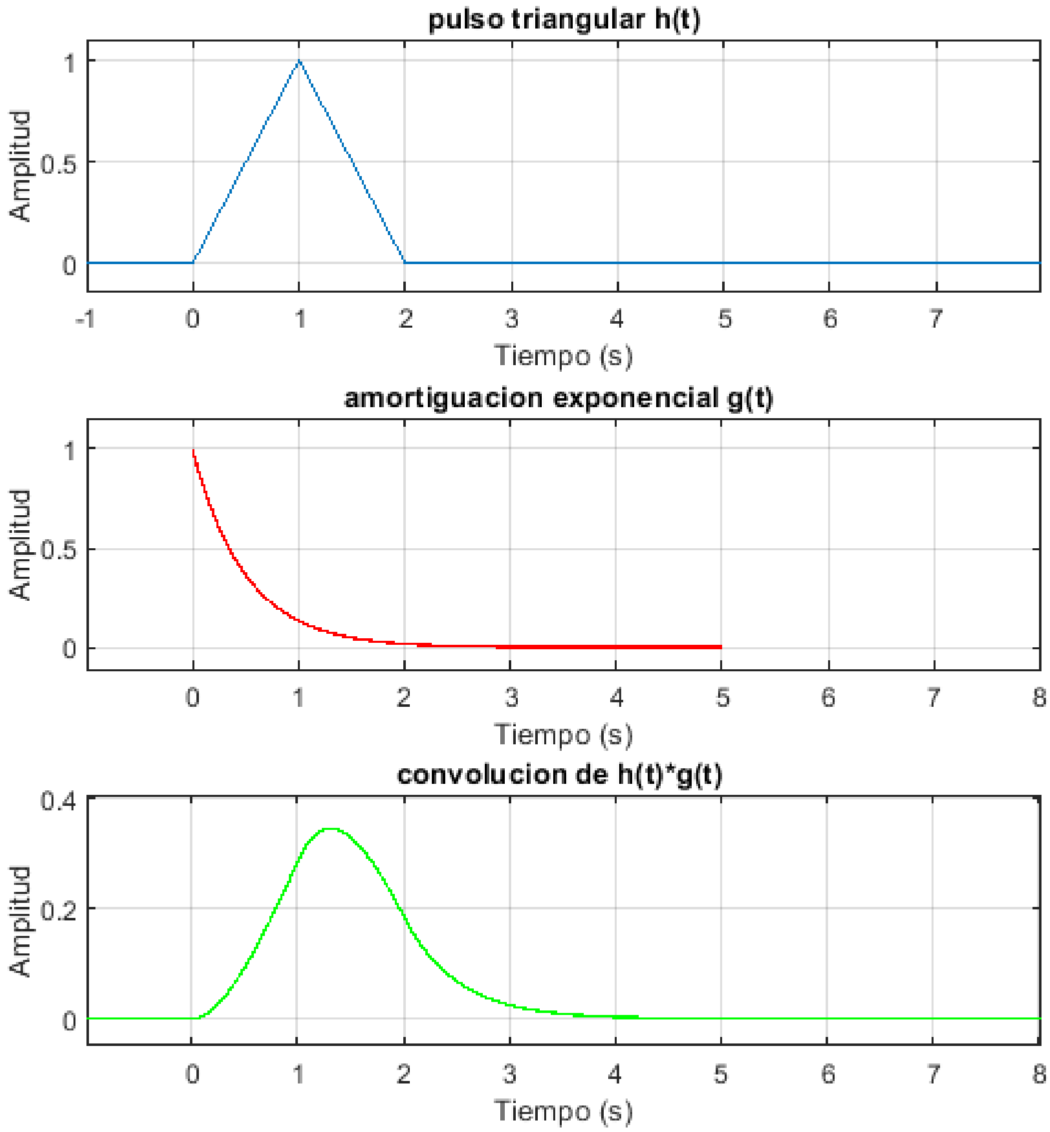


Figure 11: convolucion de $f(t) * h(t)$

Ahora usando **matlab** y el comando *conv* hallaremos las convoluciones de $f(t)*f(t)$, $f(t)*g(t)$, $g(t)*g(t)$, $g(t)*h(t)$, $h(t)*h(t)$

$f(t)*f(t)$

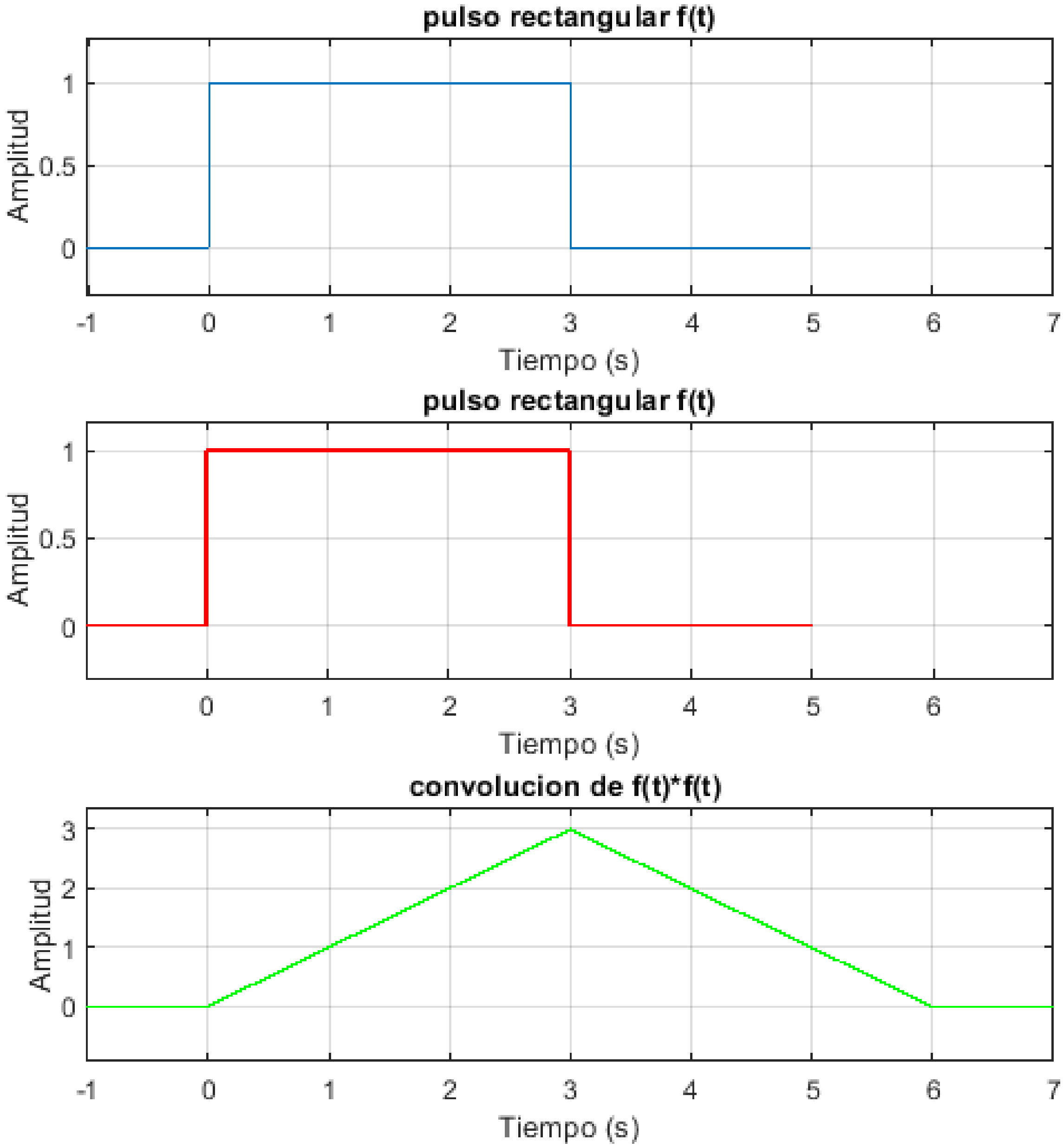


Figure 12: convolucion de $h(t)*h(t)$

$f(t) * g(t)$

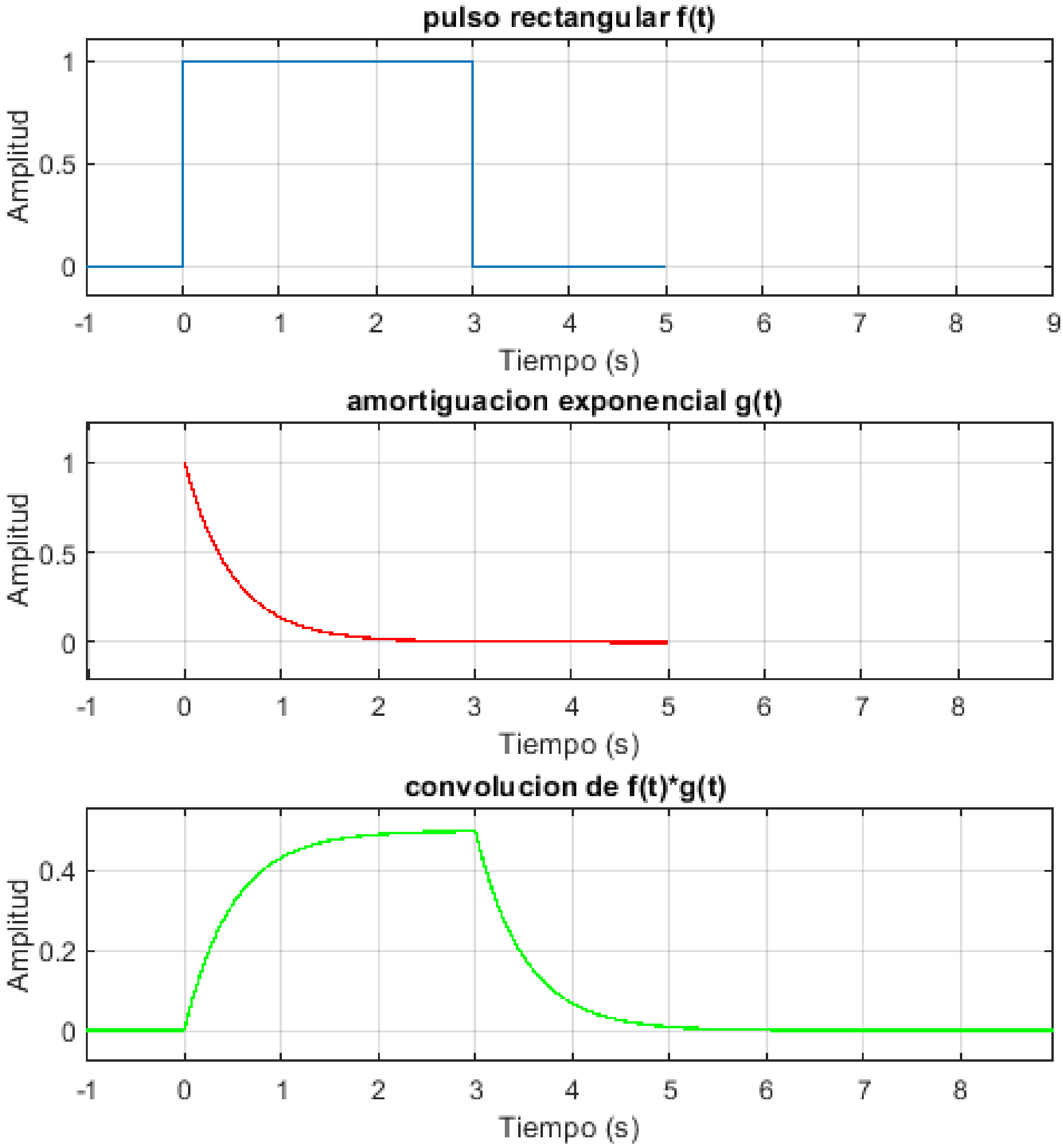


Figure 13: convolucion de $f(t) * h(t)$

$g(t) * g(t)$

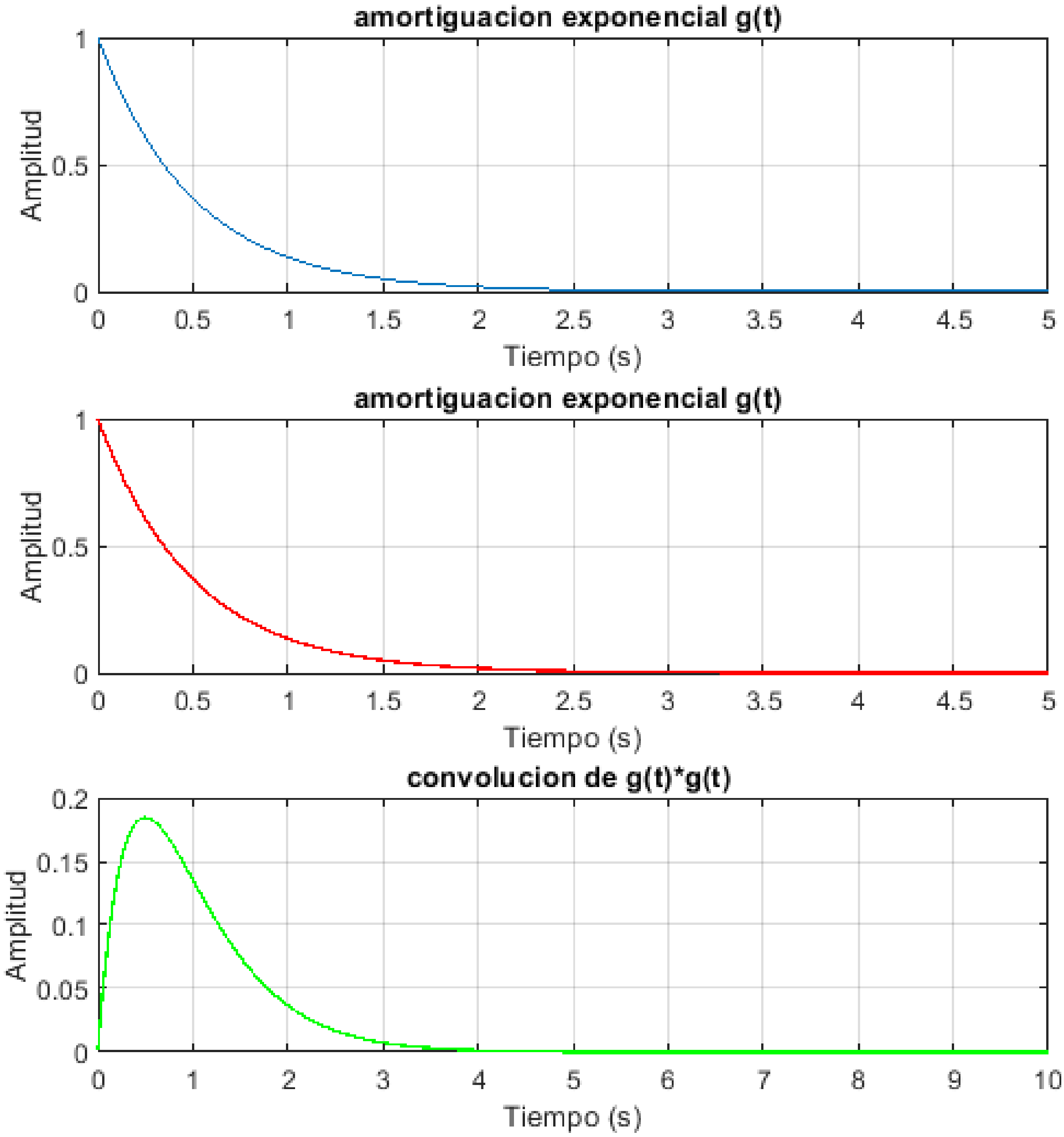


Figure 14: convolucion de $g(t) * g(t)$

$g(t) * h(t) = h(t) * g(t)$

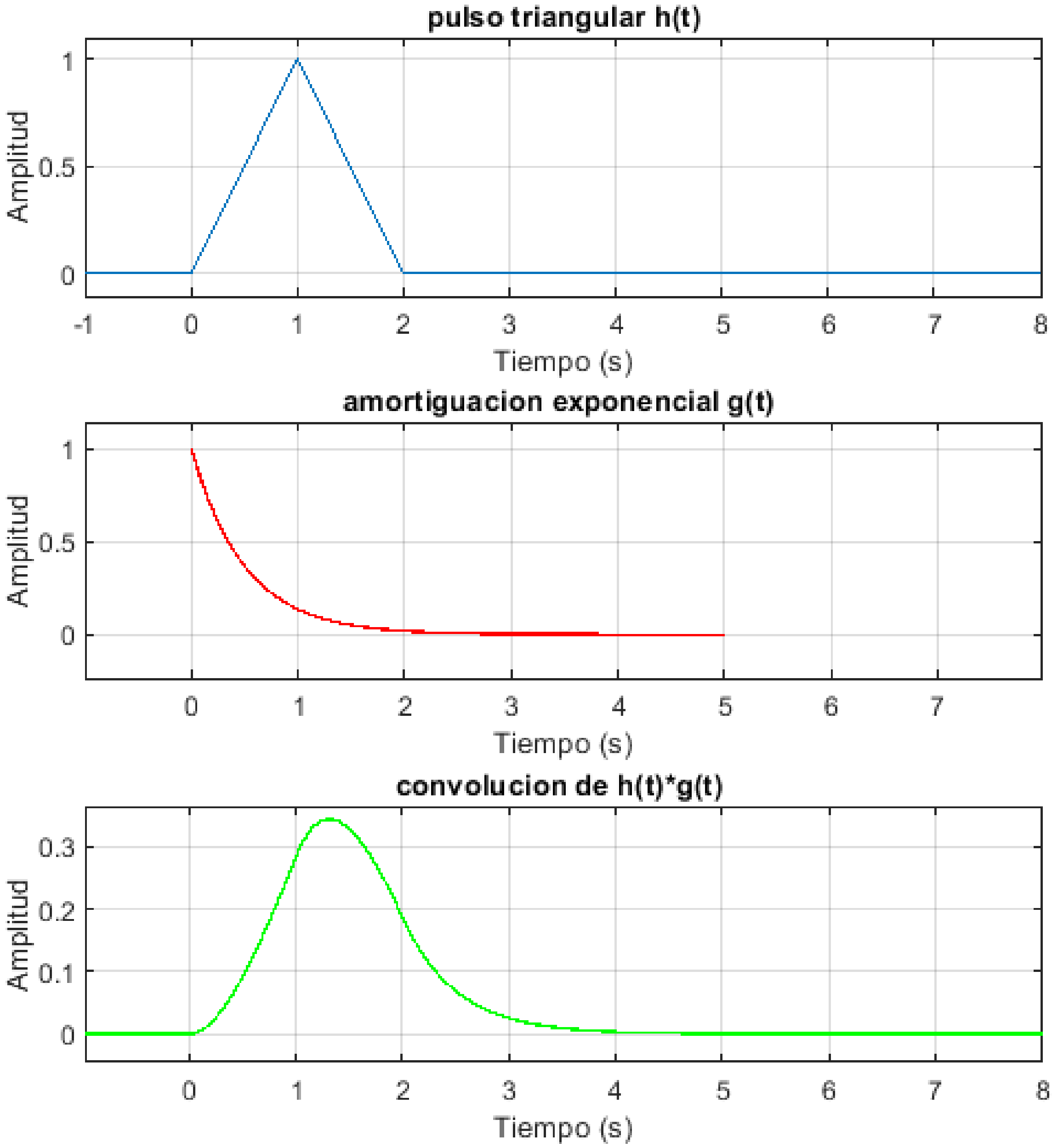


Figure 15: convolucion de $g(t) * g(t)$

$h(t) * h(t) = h(t) * h(t)$

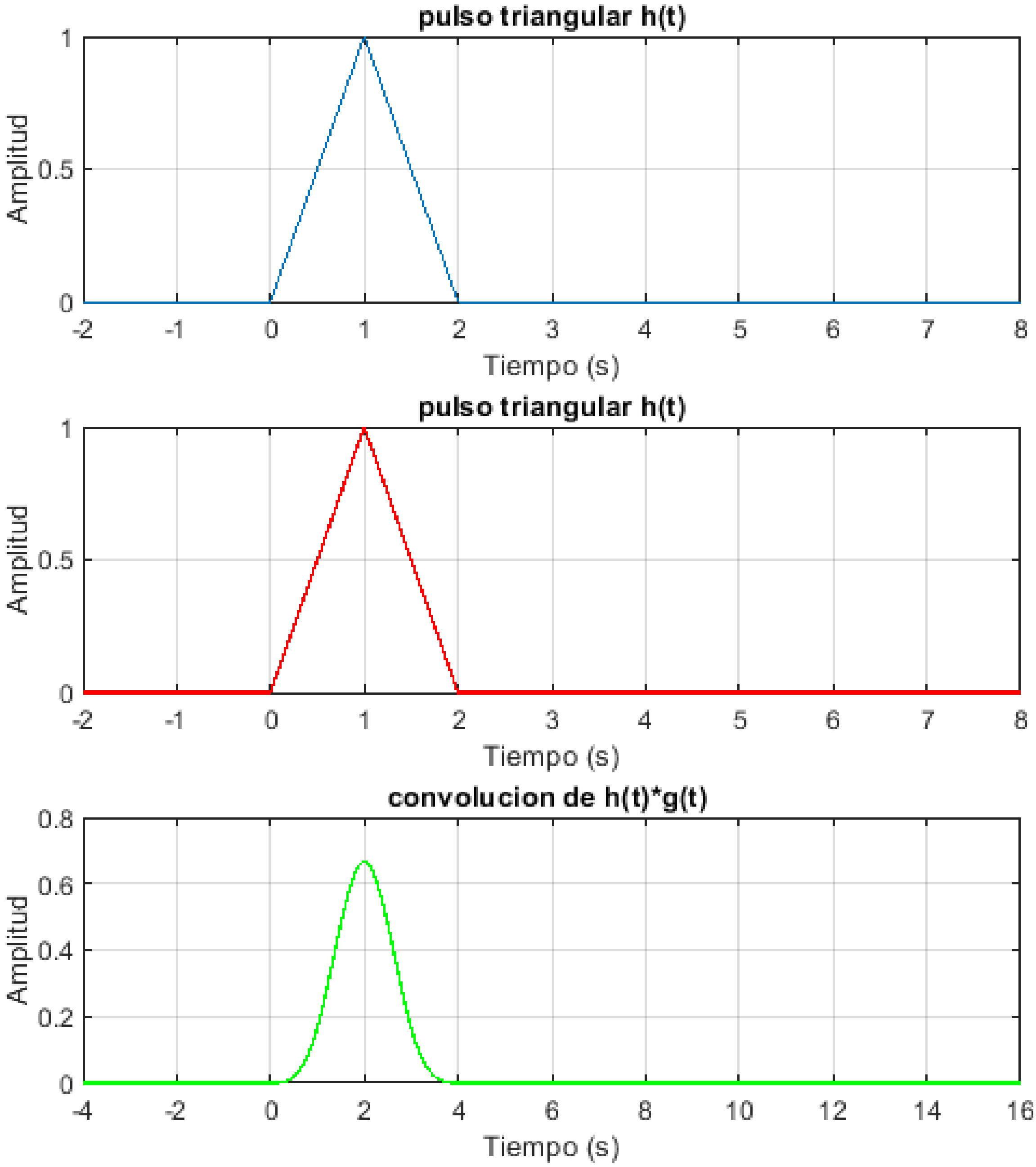


Figure 16: convolucion de $h(t) * g(t)$

2. **Sea $f[n] = 3$, $0 \leq n \leq 2$, un pulso cuadrado , $g[n] = [1,2,3,2,1]$ un pulso triangular , sea $h[n] = (\frac{1}{2})^n$, $0 \leq n \leq 8$ una amortiguación exponencial**

a) **Usando el MATLAB grafique las señales en tiempo discreto f[n],g[n] y h[n].**
•Para la gráfica $f[n] = 3$, $0 \leq n \leq 2$, se utilizo la función stem de MATLAB para realizar un pulso cuadrado consideramos en un intervalo de $[-8, 8]$.

```
clear clc
n=-8:8;
x=[0 0 0 0 0 0 0 0 3 3 3 0 0 0 0 0 0];
stem (n,x,'filled','-','LineWidth',2);
xlabel('n');
ylabel('f(n)');
title('PULSO CUADRADO','LineWidth',2 )
```

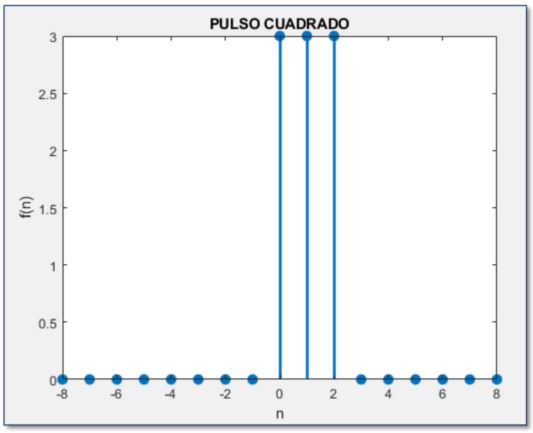


Figure 17: Código en Matlab y gráfica de f[n]

•Para la gráfica $g[n] = [1,2,3,2,1]$, $-2 \leq n \leq 2$, se utilizo la función stem de MATLAB para realizar un pulso rectangular consideramos en un intervalo de $[-8, 8]$.

```
clear clc
n=-8:8;
x=[0 0 0 0 0 0 1 2 3 2 1 0 0 0 0 0 0];
stem (n,x,'filled','-','LineWidth',2);
xlabel('n');
ylabel('g(n)');
title('PULSO TRIANGULAR','LineWidth',2 )
```

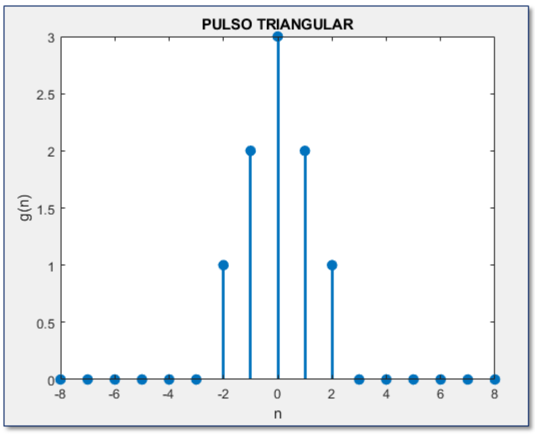


Figure 18: Código en Matlab y gráfica de g[n]

•Para la grafica $h[n] = (\frac{1}{2})^n$, se utilizo la funcion stem de MATLAB para realizar la amortiguación exponencial $[-8,8]$ con paso 1.

```
clear clc
n=-8:1:8;
y=(0.5.^n).*stepfun(n,0)-(0.5.^n).*stepfun(n,9);
stem (n,y,'filled','-','LineWidth',2);
axis([-8 8 -4 4]);
xlabel('n');
ylabel('h(n)');
title('AMORTIGUACION EXPONENCIAL','LineWidth',2 )
```

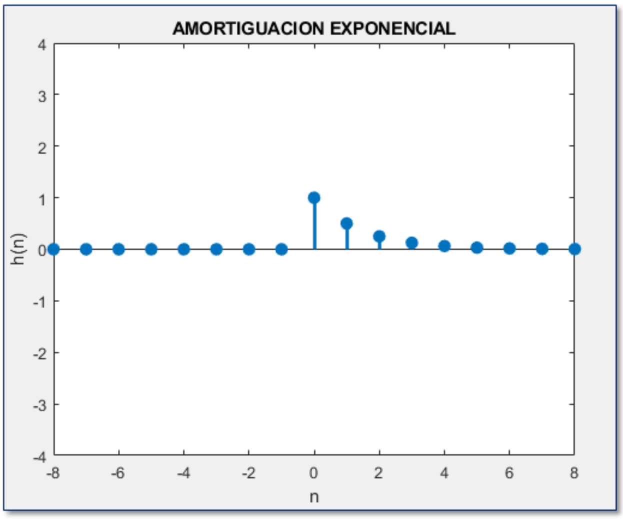


Figure 19: Código en Matlab y gráfica de h[n]

b) Encuentre en términos de n y la señal escalón unitario las siguientes convoluciones:
Como nos piden la convolución de dos señales discretas por conocimiento previo:

$$\boxed{y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]}$$

• Hallamos la convolución de $f[n] * g[n]$ con la formula previa hallada.

$$n < -2 \rightarrow y[n] = 0$$

$$n = -2 \rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]g[n-k] = f[0]g[-2] = (3)(1) = 3$$

$$n = -1 \rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]g[n-k] = f[0]g[-1] + f[1]g[-2] = 9$$

$$n = 0 \rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]g[n-k] = f[0]g[n] + f[1]g[-1] + f[2]g[-2] = 18$$

$$n = 1 \rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]g[n-k] = f[0]g[1] + f[1]g[0] + f[2]g[-1] = 21$$

$$n = 2 \rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]g[n-k] = f[0]g[2] + f[1]g[1] + f[2]g[0] = 18$$

$$n=3 \rightarrow y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]g[n-k]=f[1]g[2]+f[2]g[1]=9$$

$$n=4 \rightarrow y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]g[n-k]=f[2]g[2]=3$$

$$n>4 \rightarrow y[n]=0$$

$$y[n]=f[n]*g[n]=\begin{cases} 0 & \text{si } n<-2 \\ 3 & \text{si } n=-2 \\ 9 & \text{si } n=-1 \\ 18 & \text{si } n=0 \\ 21 & \text{si } n=1 \\ 18 & \text{si } n=2 \\ 9 & \text{si } n=3 \\ 3 & \text{si } n=4 \\ 0 & \text{si } n>4 \end{cases}$$

Expresamos en n y escalón unitario la señal:

$$\boxed{y[n]=3u[n+2]+6u[n+1]+9u[n]+3u[n-1]-3u[n-2]-9u[n-3]-6u[n-4]-3u[n-5]}$$

- Hallamos la convolución de $f[n]*h[n]$ con la formula previa hallada.

$$f[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]h[n-k]$$

$$n<0 \rightarrow y[n]=0$$

$$n=0 \rightarrow y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]h[n-k]=f[0]h[0]=3$$

$$n=1 \rightarrow y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]h[n-k]=f[0]h[1]+f[1]h[0]=\frac{9}{2}$$

$$n=2 \rightarrow y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]h[n-k]=f[0]h[2]+f[1]h[1]+f[2]h[0]=\frac{21}{4}$$

$$n=3 \rightarrow y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]h[n-k]=f[0]h[3]+f[1]h[2]+f[2]h[1]=\frac{21}{8}$$

$$n=4 \rightarrow y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]h[n-k]=f[0]h[4]+f[1]h[3]+f[2]h[2]=\frac{21}{16}$$

$$n=5 \rightarrow y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]h[n-k]=f[0]h[5]+f[1]h[4]+f[2]h[3]=\frac{21}{32}$$

$$n = 6 \rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]h[n-k] = f[0]h[6] + f[1]h[5] + f[2]h[4] = \frac{21}{64}$$

$$n = 7 \rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]h[n-k] = f[0]h[7] + f[1]h[6] + f[2]h[5] = \frac{21}{128}$$

$$n = 8 \rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]h[n-k] = f[0]h[8] + f[1]h[7] + f[2]h[6] = \frac{21}{256}$$

$$n = 9 \rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]h[n-k] = f[1]h[8] + f[2]h[7] = \frac{9}{256}$$

$$n = 10 \rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]h[n-k] = f[2]h[8] = \frac{3}{256}$$

$$n > 10 \rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]h[n-k] = 0$$

$$y[n] = f[n] * h[n] = \begin{cases} 0 & \text{si } n < 0 \\ 3 & \text{si } n = 0 \\ \frac{9}{2} & \text{si } n = 1 \\ \frac{21}{4} & \text{si } n = 2 \\ \frac{21}{8} & \text{si } n = 3 \\ \frac{21}{16} & \text{si } n = 4 \\ \frac{21}{32} & \text{si } n = 5 \\ \frac{21}{64} & \text{si } n = 6 \\ \frac{21}{128} & \text{si } n = 7 \\ \frac{21}{256} & \text{si } n = 8 \\ \frac{9}{256} & \text{si } n = 9 \\ \frac{3}{256} & \text{si } n = 10 \\ 0 & \text{si } n > 10 \end{cases}$$

Expresamos en n y escalón unitario la señal:

$$\boxed{y[n] = (0.5)^n(3u[n] + 6u[n-1] + 12u[n-2] - 12u[n-9]) - (0.5)^8(6u[n-10] - 3u[n-11])}$$

- Hallamos la convolución de $g[n] * h[n]$ con la formula previa hallada.

$$g[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g[k]h[n-k]$$

$$n < -2 \rightarrow y[n] = 0$$

$$n = -2 \rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g[k]h[n-k] = g[-2]h[0] = 1$$

$$n = -1 \rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g[k]h[n-k] = g[-1]h[0] + g[-2]h[1] = \frac{5}{2}$$

$$n=0 \rightarrow y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} g[k]h[n-k]=g[-2]h[2]+g[-1]h[1]+g[0]h[0]=\frac{17}{4}$$

$$n=1 \rightarrow y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} g[k]h[n-k]=g[-2]h[3]+g[-1]h[2]+g[0]h[1]+g[1]h[0]=\frac{33}{8}$$

$$n=2 \rightarrow y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} g[k]h[n-k]=g[-2]h[4]+g[-1]h[3]+g[0]h[2]+g[1]h[1]+g[2]h[0]=\frac{49}{16}$$

$$n=3 \rightarrow y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} g[k]h[n-k]=g[-2]h[5]+g[-1]h[4]+g[0]h[3]+g[1]h[2]+g[2]h[1]=\frac{49}{32}$$

$$n=4 \rightarrow y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} g[k]h[n-k]=g[-2]h[6]+g[-1]h[5]+g[0]h[4]+g[1]h[3]+g[2]h[2]=\frac{49}{64}$$

$$n=5 \rightarrow y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} g[k]h[n-k]=g[-2]h[7]+g[-1]h[6]+g[0]h[5]+g[1]h[4]+g[2]h[3]=\frac{49}{128}$$

$$n=6 \rightarrow y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} g[k]h[n-k]=g[-2]h[8]+g[-1]h[7]+g[0]h[6]+g[1]h[5]+g[2]h[4]=\frac{49}{256}$$

$$n=7 \rightarrow y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} g[k]h[n-k]=g[-1]h[8]+g[0]h[7]+g[1]h[6]+g[2]h[5]=\frac{3}{32}$$

$$n=8 \rightarrow y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} g[k]h[n-k]=g[0]h[8]+g[1]h[7]+g[2]h[6]=\frac{11}{256}$$

$$n=9 \rightarrow y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} g[k]h[n-k]=g[1]h[8]+g[2]h[7]=\frac{1}{64}$$

$$n=10 \rightarrow y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} g[k]h[n-k]=g[2]h[8]=\frac{1}{256}$$

$$n>10 \rightarrow y[n]=0$$

$$y[n]=g[n]*h[n]=\begin{cases} 0 & \text{si } n<-2 \\ 1 & \text{si } n=-2 \\ \frac{5}{2} & \text{si } n=-1 \\ \frac{17}{4} & \text{si } n=0 \\ \frac{33}{8} & \text{si } n=1 \\ \frac{49}{16} & \text{si } n=2 \\ \frac{49}{32} & \text{si } n=3 \\ \frac{49}{64} & \text{si } n=4 \\ \frac{49}{128} & \text{si } n=5 \\ \frac{49}{256} & \text{si } n=6 \\ \frac{3}{32} & \text{si } n=7 \\ \frac{11}{256} & \text{si } n=8 \\ \frac{1}{64} & \text{si } n=9 \\ \frac{1}{256} & \text{si } n=10 \\ 0 & \text{si } n>10 \end{cases}$$

Expresamos en n y escalón unitario la señal:

$$y[n] = (0.5)^n(u[n+2] + 4u[n+1] + 12u[n] + 16u[n-1] + 16u[n-2] - 49u[n-7])$$
$$+(0.5)^5(3u[n-7] - 3u[n-8]) + (0.5)^8(11u[n-8] - 11u[n-9])$$
$$+(0.5)^6(u[n-9] - u[n-10]) + (0.5)^8(u[n-10] - u[n-11])$$

c) Usando el comando conv en MATLAB grafique las convoluciones

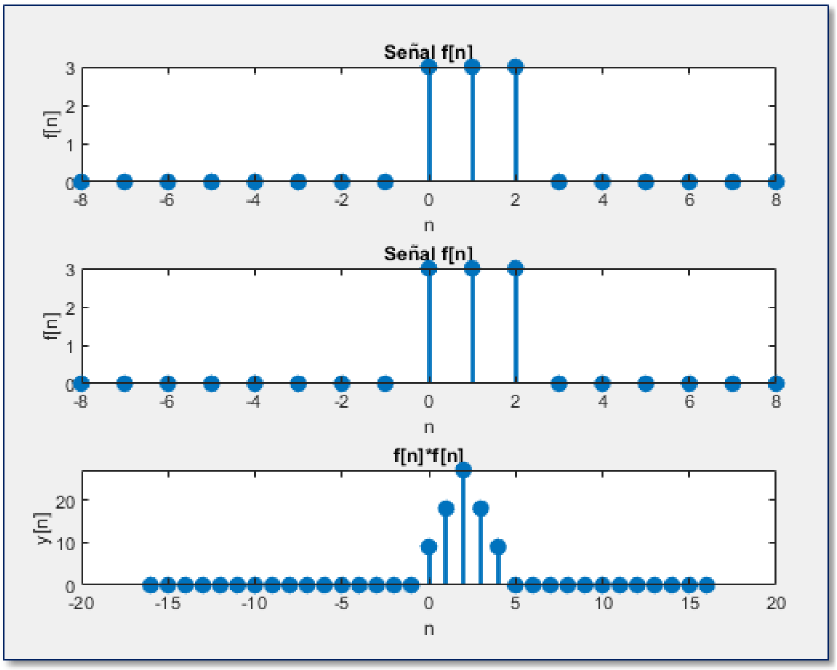
$$f[n]*f[n], f[n]*g[n], f[n]*h[n], g[n]*g[n], g[n]*h[n], h[n]*h[n]$$

Graficando

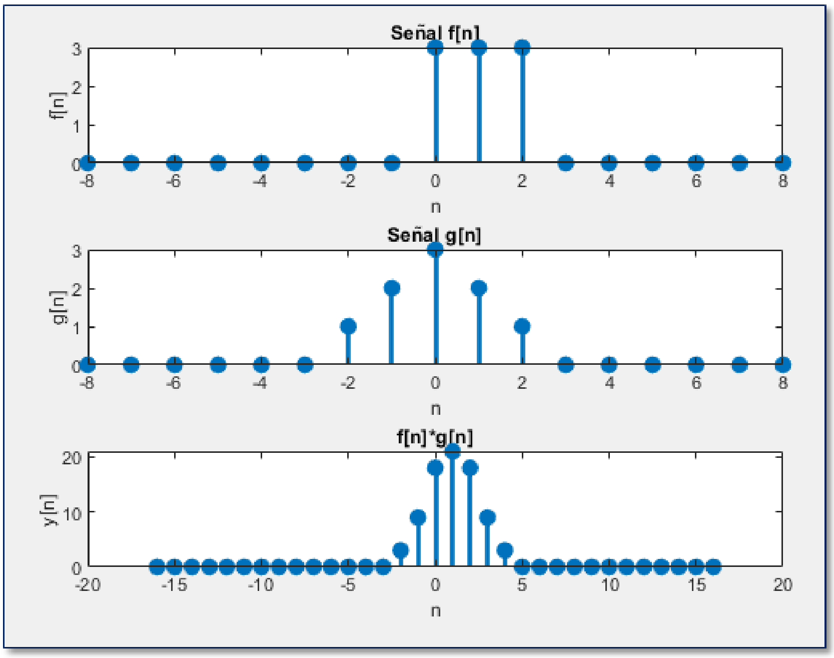
Como el algoritmo es igual para todos, solo bosquejamos las gráficas:

```
%Convolucion de f*f
clear clc
x= [0 0 0 0 0 0 0 0 3 3 3 0 0 0 0 0 0]
nx=[-8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8]
h= [0 0 0 0 0 0 0 0 3 3 3 0 0 0 0 0 0]
nh=[-8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8]
hmin=min(nh)
xmin=min(nx)
smin=abs(hmin)+abs(xmin)
%la funcion convolucion
y=conv(x,h)
Ly=length(y)

ny=-1*smin:1:Ly-smin-1

subplot(3,1,1)
stem(nx,x,'filled','-','LineWidth',2)
title('Señal f[n]')
subplot(3,1,2)
stem(nh,h,'filled','-','LineWidth',2)
title('Señal f[n]')
subplot(3,1,3)
stem(ny,y,'filled','-','LineWidth',2)
title('f[n]*f[n]')
```

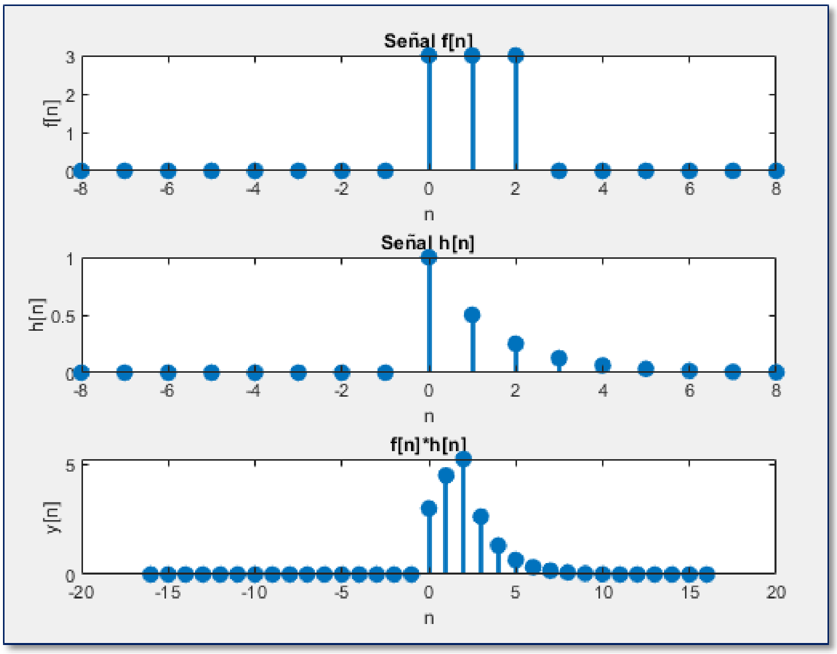
$$Convolucion: f[n]*f[n]$$



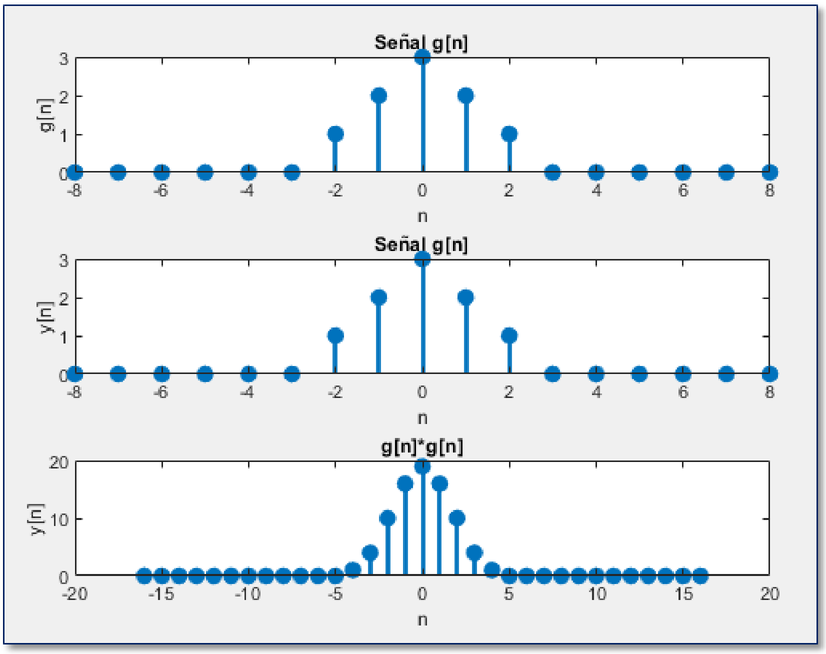
$$Convolucion : f[n] * g[n]$$



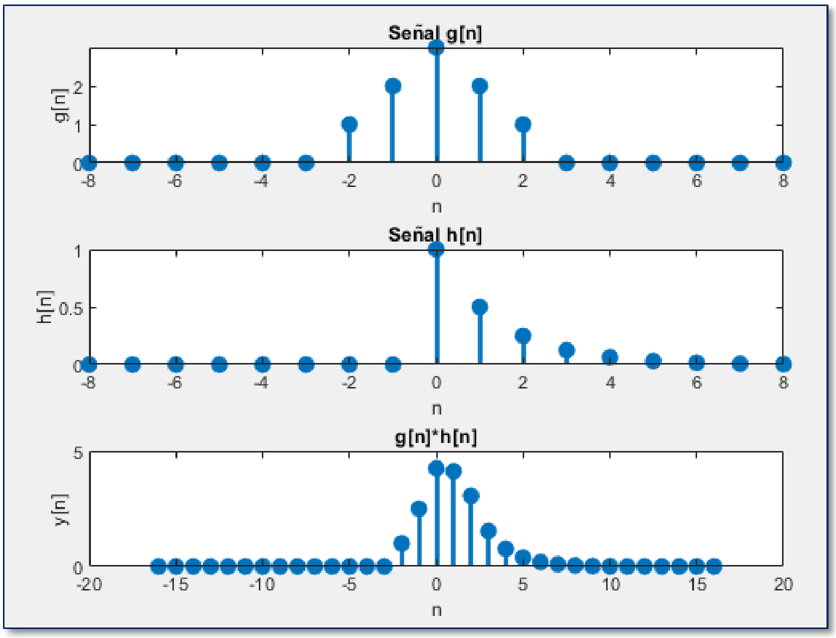
$$Convolucion : f[n] * h[n]$$



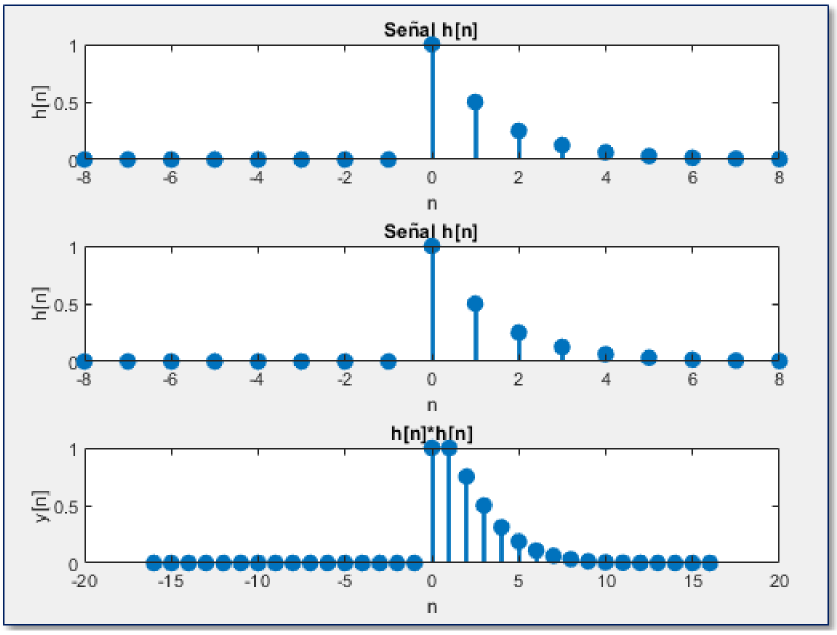
$Convolucion : g[n] * g[n]$



$Convolucion : g[n] * h[n]$



$$Convolucion : h[n] * h[n]$$



3. Considere un sistema causal LTI cuya entrada X[n] y salida Y[n] satisfacen

$$6Y[n]-5Y[n-1]+Y[n-2]=6X[n]-4X[n-1]$$

a) Usando la Transformada Z encuentre un diagrama de bloques para dichos sistema. Usando el Simulink y el diagrama de bloques encuentre la respuesta del sistema al impulso $X_1[n]=\delta[n]$, al escalón unitario $X_2(t)=u[n]$, y $X_3(t)=(\frac{1}{2})^2 u[n]$.

- **Realizando el diagrama de bloques del sistema causal LTI**

1er paso: Aplicando la transformada Z

$$\mathcal{Z}\{6y[n]-5y[n-1]+y[n-2]=6x[n]-4x[n-1]\}$$

$$6Y(z)-5z^{-1}Y(z)+z^{-2}Y(z)=6X(z)-4z^{-1}X(z)$$

$$[6-5z^{-1}+z^{-2}]Y(z)=[6-4z^{-1}]X(z)$$

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{6-4z^{-1}}{6-5z^{-1}+z^{-2}}=\frac{2z(3z-2)}{6z^2-5z+1}=2z[\frac{3z-2}{(3z-1)(2z-1)}]=2z[\frac{3}{3z-1}-\frac{1}{2z-1}]$$

Función transferencia:

$$\boxed{H(z)=2(\frac{z}{z-1/3})-(\frac{z}{z-1/2})}$$

Donde se sabe que la entrada de $x_m[n]$ se relaciona con la salida $y_m[n]$ por medio de:

$$x_m[n]*h[n]=y_m[n]$$

o con la transformada Z

$$X_m(z)H(z)=Y_m(z)$$

2do paso: Realizando el diagrama de bloques

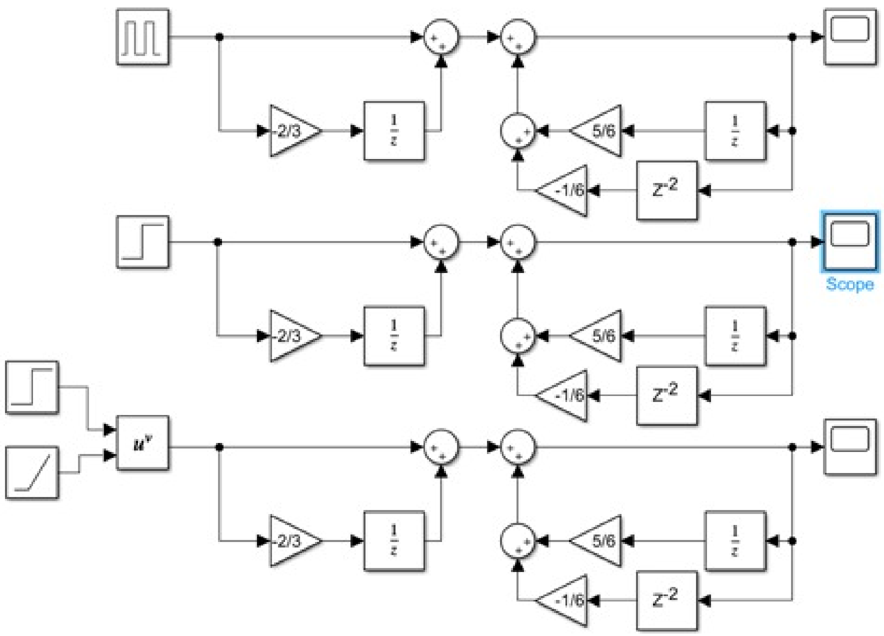


Figure 20: Diagrama de bloque del sistema causal LTI, con las entradas pedidas

•Respuesta al impulso$(x_1(t) = \delta[n])$

Si $x_1[n] = \delta[n]$ entonces $X_1(z) = 1$; por lo que, $Y_1(z) = H(z) = 2(\frac{z}{z-1/3}) - (\frac{z}{z-1/2})$

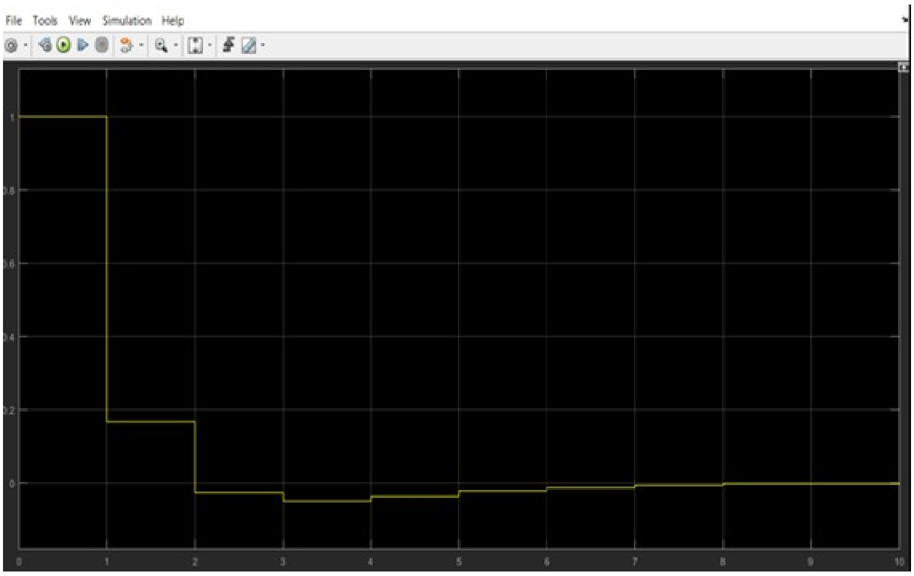


Figure 21: Gráfica de la respuesta al impulso

•Respuesta al escalón$(x_2(n) = u[n])$

si $x_2[n] = u[n]$ entonces $X_2(z) = \frac{z}{z-1}$; por lo que, $Y_2(z) = \frac{z}{z-1}H(z) = 2z[\frac{3z^2-2z}{(z-1)(3z-1)(2z-1)}]$

$$Y_2(z) = z[\frac{2}{2z-1} - \frac{3}{3z-1} + \frac{1}{z-1}] = \frac{z}{z-1/2} - \frac{z}{z-1/3} + \frac{z}{z-1}]$$

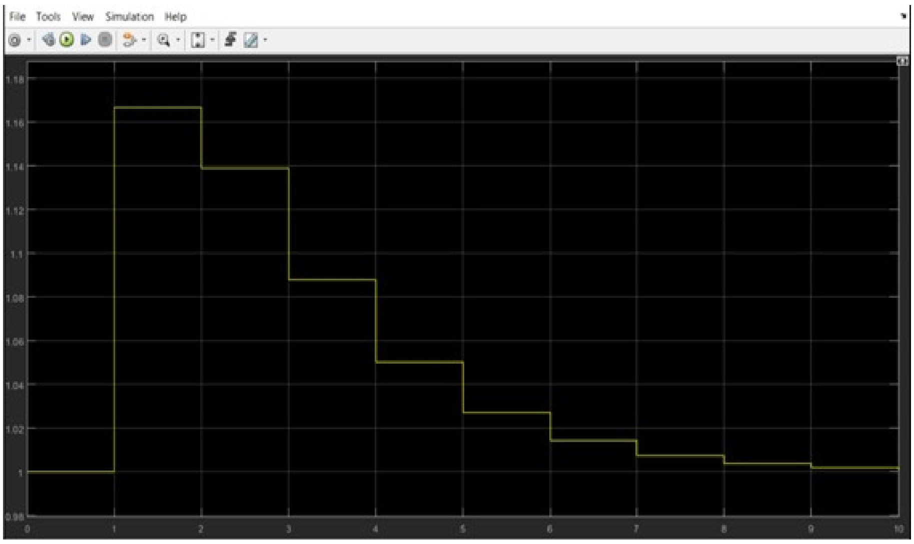


Figure 22: Gráfica de la respuesta al escalón

•**Respuesta a** $x_3[n] = (\frac{1}{2})^n u[n]$

si $x_3[n] = (\frac{1}{2})^n u[n]$ entonces $X_3(z) = \frac{2z}{2z-1}$; por lo que, $Y_3 = \frac{2z}{2z-1} H(z) = 4z[\frac{3z^2-2z}{(3z-1)(2z-1)^2}]$

$$Y_3(z) = z[-\frac{12}{3z-1} + \frac{10}{2z-1} - \frac{2}{(2z-1)^2}] = -4\frac{z}{z-1/3} + 5\frac{z}{z-1/2} - \frac{1}{2}\frac{z}{(z-1/2)^2}$$

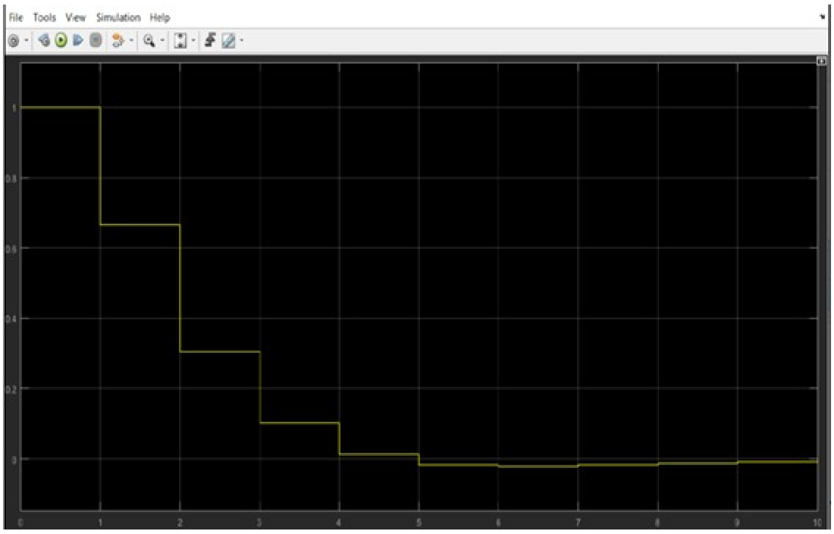


Figure 23: Gráfica de la respuesta a $x_3[n] = (\frac{1}{2})^n u[n]$

b) Encuentre las respuestas de la parte (a) en función de n.
1er paso: Aplicando la transformada inversa de Z

•**Respuesta al impulso**$(x_1(t) = \delta[n])$

$$\mathcal{Z}^{-1}\{Y_1(z) = 2(\frac{z}{z-1/3}) - (\frac{z}{z-1/2})\}$$

Entonces obtenemos la siguiente respuesta:

$$\therefore \boxed{y_1[n] = [2(\frac{1}{3})^n - (\frac{1}{2})^n]u[n]}$$

•**Respuesta al escalón**$(x_2(n) = u[n])$

$$\mathcal{Z}^{-1}\{Y_2(z) = \frac{z}{z-1/2} - \frac{z}{z-1/3} + \frac{z}{z-1}\}$$

Entonces obtenemos la siguiente respuesta:

$$\therefore \boxed{y_2[n] = [(\frac{1}{2})^n - (\frac{1}{3})^n + 1]u[n]}$$

•**Respuesta a** $x_3[n]$

$$\mathcal{Z}^{-1}\{Y_3(z) = -4\frac{z}{z-1/3} + 5\frac{z}{z-1/2} - \frac{1}{2}\frac{z}{(z-1/2)^2}\}$$

Entonces obtenemos la siguiente respuesta:

$$\therefore \boxed{y_3[n] = [-4(\frac{1}{3})^n + 5(\frac{1}{2})^n - (\frac{1}{2})^n n]u[n]}$$

4. **Considere un sistema causal LTI cuya entrada X(t) y salida Y(t) satisfacen**

$$Y^{''}(t) + 2Y^{'}(t) + Y(t) = 2X^{'}(t) + X(t)$$

a) **Usando la Transformada de Laplace encuentre un diagrama de bloques para dichos sistema. Usando el Simulink y el diagrama de bloques encuentre la respuesta del sistema al impulso** $X_1(t) = \delta(t)$ **, al escalón unitario** $X_2(t) = u(t)$ **, y a la amortiguación** $X_3(t) = exp(-2t)$**.**

- **Realizando el diagrama de bloques del sistema causal LTI**

1er paso: Calculando la función de transferencia del sistema.

$$Y^{''}(t) + 2Y^{'}(t) + Y(t) = 2X^{'}(t) + X(t)$$

Aplicando la transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\{Y^{''}(t)\} + 2\mathcal{L}\{Y^{'}(t)\} + \mathcal{L}\{Y(t)\} = 2\mathcal{L}\{X^{'}(t)\} + \mathcal{L}\{X(t)\} \tag{1}$$

Importante: Transformada de Laplace que aplicaremos en (1)

$$\mathcal{L}\{Y^{''}(t)\} = s^2 f(s) - sF(0) - F^{'}(0)$$
$$\mathcal{L}\{Y^{'}(t)\} = sf(s) - F(0)$$

Para este sistema causal LTI, consideraremos que $F(0) = 0$ y $F^{'}(0) = 0$; por lo tanto, obtendremos lo siguiente:

$$\mathcal{L}\{Y^{''}(t)\} = s^2 f(s) \tag{2}$$

$$\mathcal{L}\{Y^{'}(t)\} = sf(s) \tag{3}$$

Aplicando la transfomadas de Laplace (3) y (2) en la EDO (1)

$$s^2 y(s) + 2sy(s) + y(s) = 2sx(s) + x(s)$$

$$y(s) + \frac{2y(s)}{s} + \frac{y(s)}{s^2} = \frac{2x(s)}{s} + \frac{x(s)}{s^2}$$

$$y(s) = \frac{2x(s)}{s} + \frac{x(s)}{s^2} - \frac{2y(s)}{s} - \frac{y(s)}{s^2} \tag{4}$$

$$\boxed{h(s) = \frac{y(s)}{x(s)} = \frac{2s+1}{s^2+2s+1}} \tag{5}$$

2do paso:
Realizando el diagrama de bloques del sistema en Simulink, a partir de la ecuación (4)

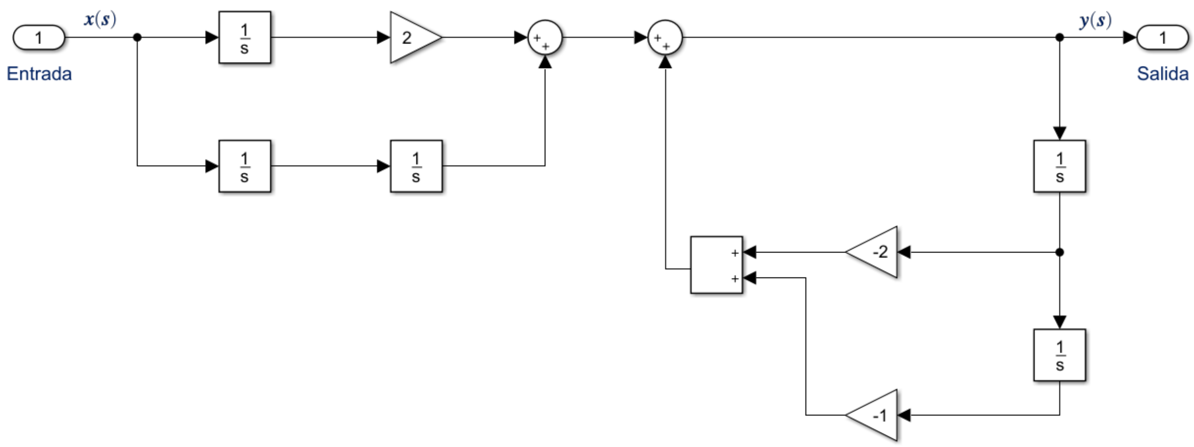


Figure 24: Diagrama de bloque del sistema causal LTI

Verificando si nuestro diagrama de bloque es correcta.

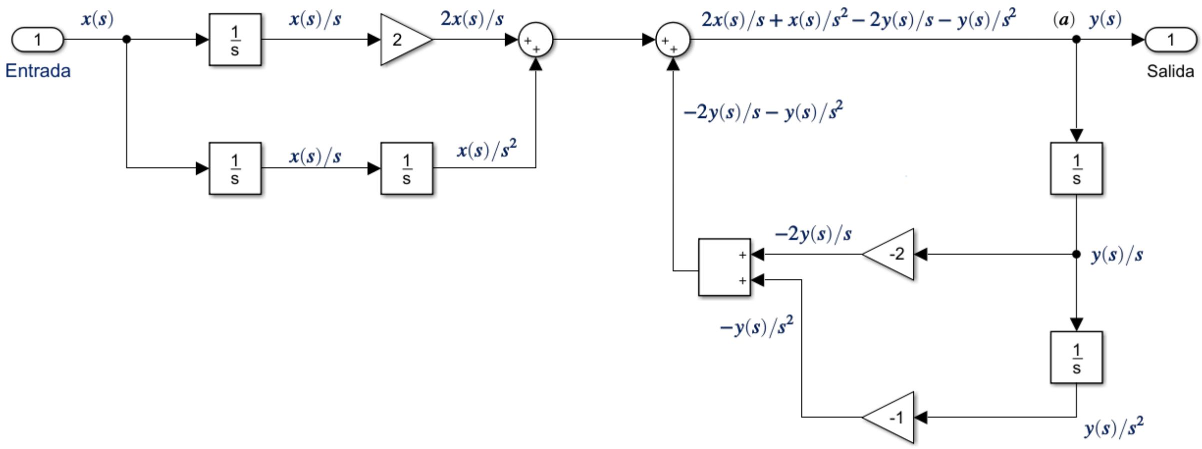


Figure 25: Verificacióndel diagrama de bloque del sistema causal LTI

Del diagrama de bloques de la figura (25) en (a), se verifica la ecuación (4)

$$y(s) = \frac{2x(s)}{s} + \frac{x(s)}{s^2} - \frac{2y(s)}{s} - \frac{y(s)}{s^2}$$

- **Respuesta al impulso**$(X_1(t) = \delta(t))$

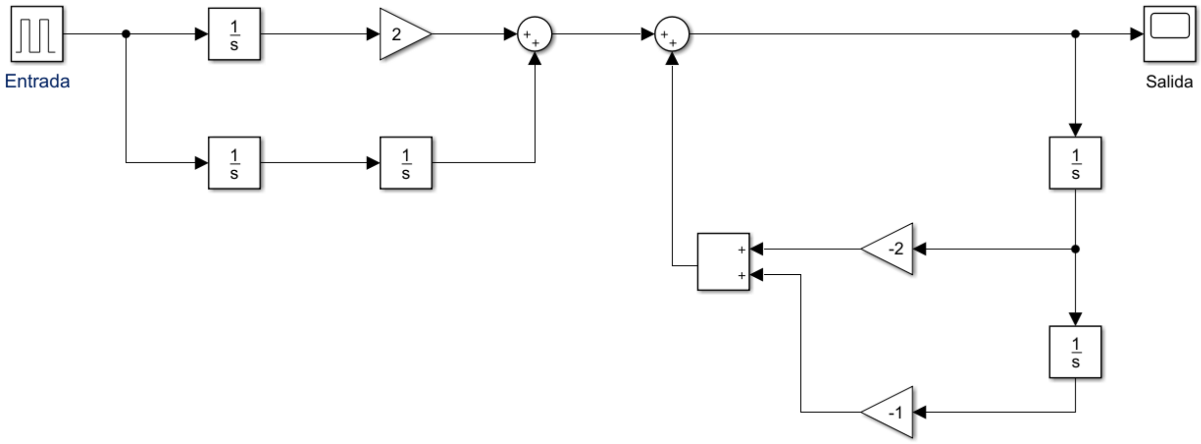


Figure 26: Diagrama de bloques con entrada de un impulso

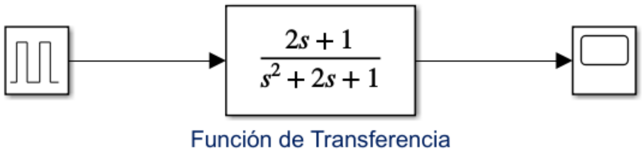


Figure 27: Otro diagrama de bloques con entrada de un impulso

Se puede verificar que en ambos diagramas de bloques se obtiene como respuesta, la siguiente señal con respecto al tiempo.

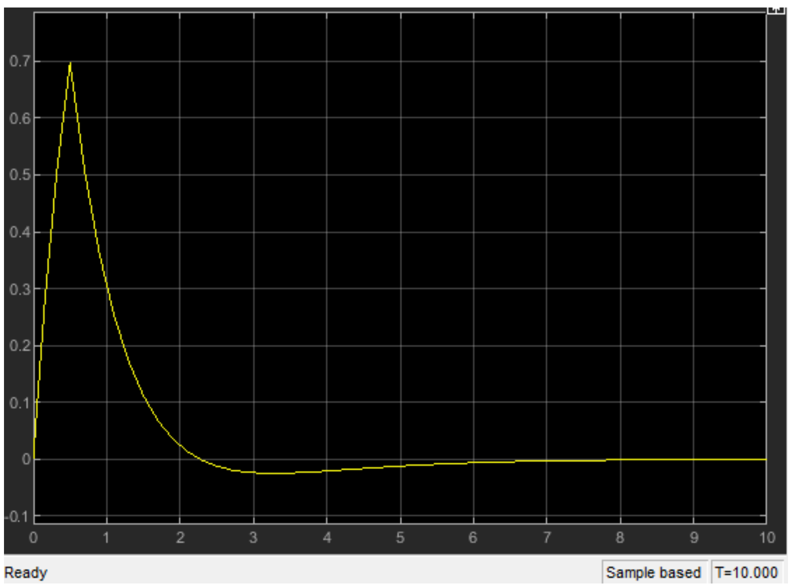


Figure 28: Gráfica de la respuesta al impulso

• **Respuesta al escalón**$(X_2(t) = u(t))$

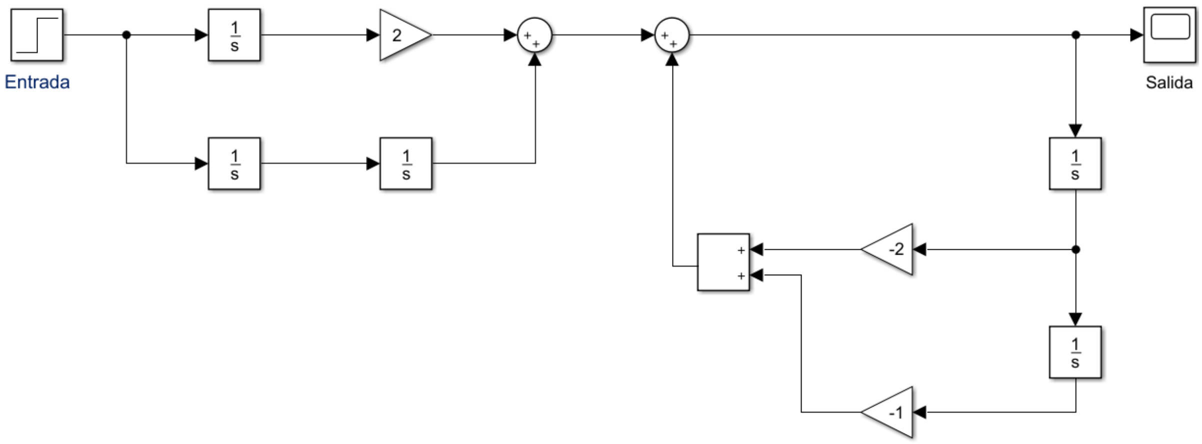


Figure 29: Diagrama de bloques con entrada de un escalón

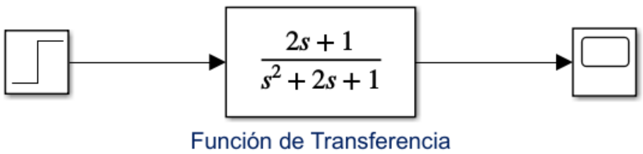


Figure 30: Otro diagrama de bloques con entrada de un escalón

Se puede verificar que en ambos diagramas de bloques se obtiene como respuesta, la siguiente señal con respecto al tiempo.

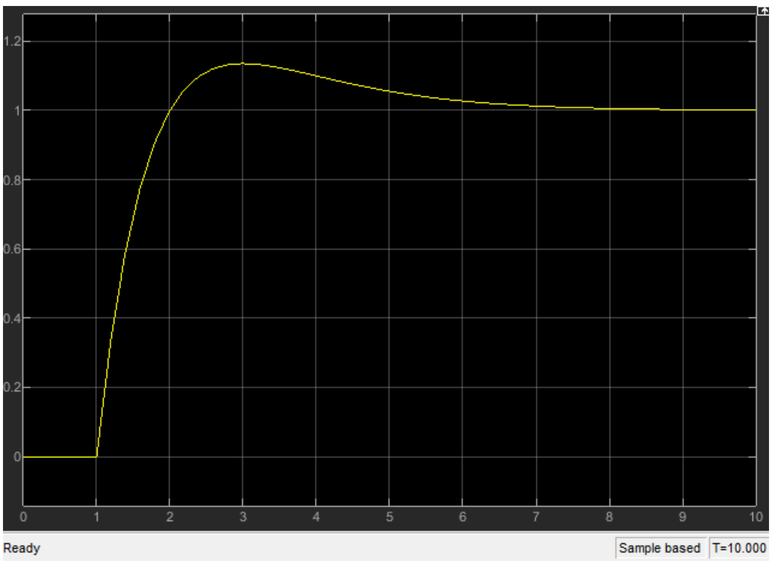


Figure 31: Gráfica de la respuesta al escalón

- **Respuesta a la amortiguación**($X_3(t) = e^{-2t}$)

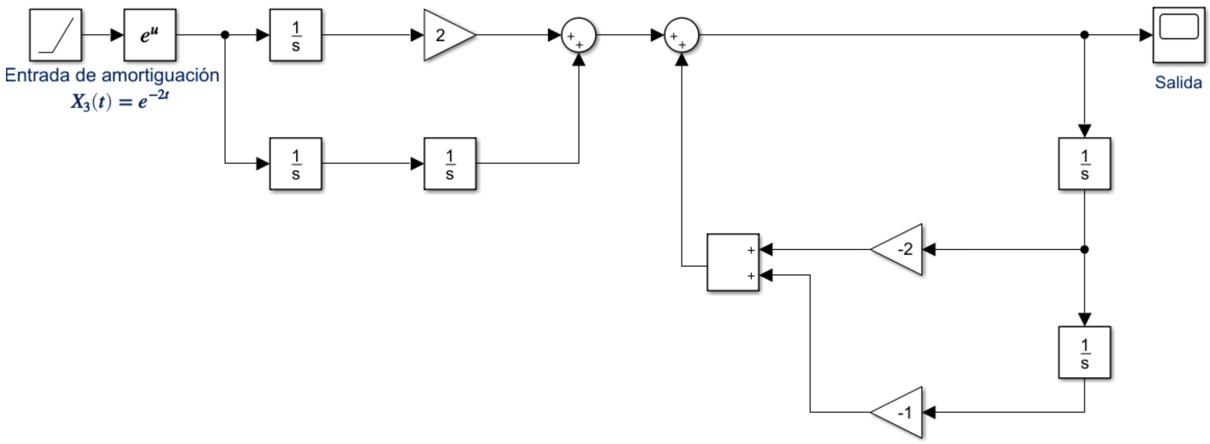


Figure 32: Diagrama de bloques con entrada de una amortiguación

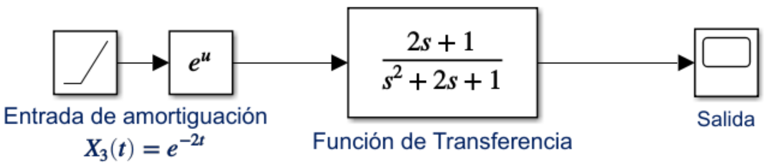


Figure 33: Otro diagrama de bloques con entrada de una amortiguación

Se puede verificar que en ambos diagramas de bloques se obtiene como respuesta, la siguiente señal con respecto al tiempo.

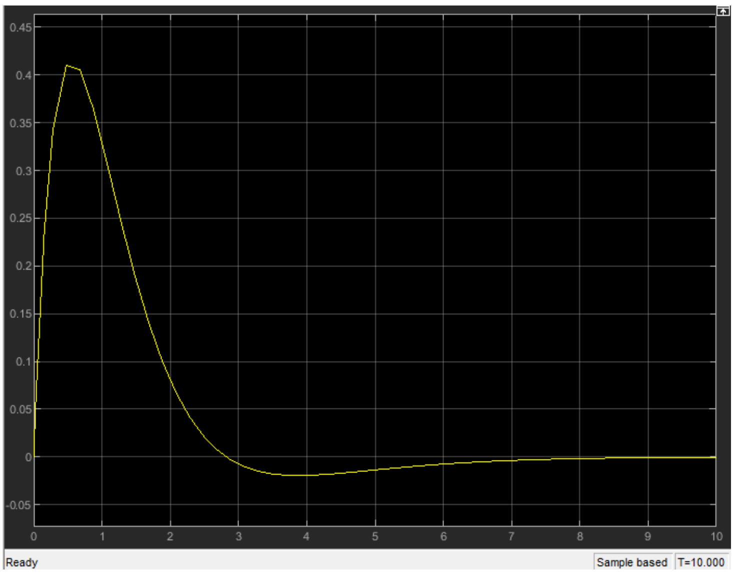


Figure 34: Gráfica de la respuesta a la amortiguación

Importante:

Como en el programa de Simulink no se encuentra específicamente una entrada de amortiguación $X_3(t) = e^{-2t}$). Entonces, nosotros debemos realizar los siguientes pasos:
1er paso: Arrastrar al menú principal de Simulink los bloques de e^u y la función rampa, que se encuentran en la librería de Simulink. Visualizar las siguientes imágenes:

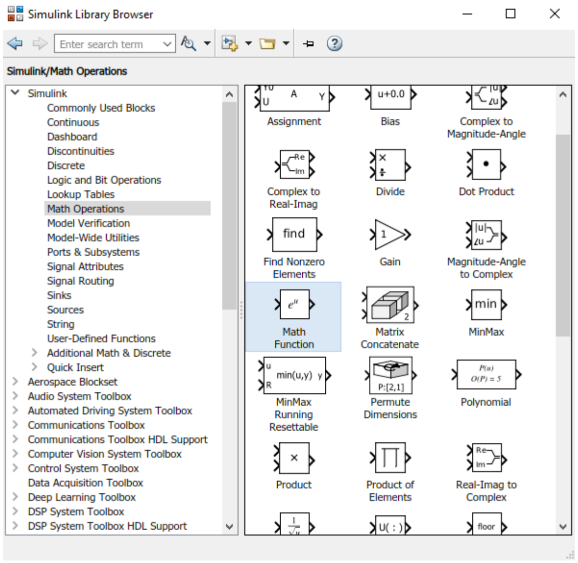


Figure 35: Localización de e^u en la librería de Simulink

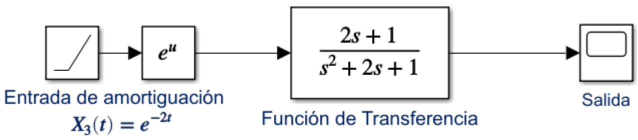


Figure 36: Como debe quedar el diagrma de bloque del sistema

2do paso: Configurar nuestra función rampa, para obtener e^{-2t} como entrada. Donde el u de e^u sera la función -2t.Luego debemos darle click a la función rampa, se nos abrirá una ventana (Visualizar (37))en el cual ingresaremos la pendiente de la recta -2t en la opción "Slope".

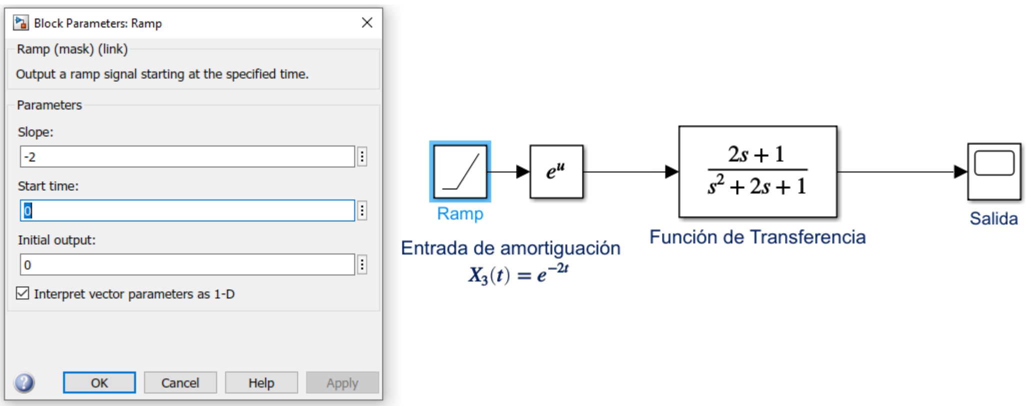


Figure 37: Configuración de nuestra función rampa

Finalmente: Ya estará lista nuestra entrada de amortiguación $X_3(t) = e^{-2t}$.

b) **Encuentre las respuestas de la parte (a)en términos de t**

•**Respuesta al impulso**($X_1(t) = \delta(t)$)

$$x_1(s) = \mathcal{L}^{-}\{\delta(t)\} = 1$$

A partir de la función de transferencia(5)aplicaremos lo anterior.

$$\frac{y_1(s)}{x_1(s)} = \frac{2s+1}{s^2+2s+1}$$

$$\frac{y_1(s)}{1} = \frac{2}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2}$$

Aplicando transformada inversa de Laplace

$$\mathcal{L}^{-}\{y_1(s)\} = 2\mathcal{L}^{-}\{\frac{1}{s+1}\} - \mathcal{L}^{-}\{\frac{1}{(s+1)^2}\}$$

$$Y_1(t) = 2e^{-t} - te^{-t}$$

Para $t \geq 0$, el $u(t) = 1$, y para $t < 0$, el $u(t) = 0$
Como el tiempo (t) es mayor igual a 0. Entonces, obtendremos la siguiente respuesta del sistema

Respuesta al impulso:

$$\therefore \boxed{Y_1(t) = (2e^{-t} - te^{-t})u(t)}$$

•**Respuesta al escalón**($X_2(t) = u(t)$)

$$x_2(s) = \mathcal{L}^{-}\{u(t)\} = \frac{1}{s}$$

A partir de la función de transferencia (5) aplicaremos lo anterior.

$$\frac{y_2(s)}{x_2(s)} = \frac{2s+1}{(s^2+2s+1)} \rightarrow y_2(s) = \frac{2s+1}{(s^2+2s+1)(s)}$$

$$y_2(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{(s+1)^2} - \frac{1}{s+1}$$

Aplicando transformada inversa de Laplace

$$\mathcal{L}^{-}\{y_2(s)\} = \mathcal{L}^{-}\{\frac{1}{s}\} + \mathcal{L}^{-}\{\frac{1}{(s+1)^2}\} - \mathcal{L}^{-}\{\frac{1}{s+1}\}$$

$$Y_2(t) = 1 - te^{-t} - e^{-t}$$

Para $t \geq 0$, el $u(t) = 1$, y para $t < 0$, el $u(t) = 0$
Como el tiempo (t) es mayor igual a 0. Entonces, obtendremos la siguiente respuesta del sistema

Respuesta al escalón:

$$\therefore \boxed{Y_2(t) = (1 - te^{-t} - e^{-t})u(t)}$$

•**Respuesta a la amortiguación**$(X_3(t) = e^{-2t})$

$$y_3(s) = \mathcal{L}^{-}\{e^{-2t}\} = \frac{1}{s+2}$$

A partir de la función de transferencia(5)aplicaremos lo anterior.

$$\frac{y_3(s)}{x_3(s)} = \frac{2s+1}{(s^2+2s+1)} \to y_2(s) = \frac{2s+1}{(s^2+2s+1)(s+2)}$$

$$y_3(s) = -\frac{1}{(s+1)^2} + \frac{3}{s+1} - \frac{3}{s+2}$$

Aplicando transformada inversa de Laplace

$$\mathcal{L}^{-}\{y_3(s)\} = -\mathcal{L}^{-}\{\frac{1}{(s+1)^2}\} + \mathcal{L}^{-}\{\frac{3}{s+1}\} - \mathcal{L}^{-}\{\frac{3}{s+2}\}$$

$$Y_3(t) = -te^{-t} + 3e^{-t} - 3e^{-2t}$$

Para $t \geq 0$, el $u(t) = 1$, y para $t < 0$, el $u(t) = 0$
Como el tiempo (t) es mayor igual a 0. Entonces, obtendremos la siguiente respuesta del sistema

Respuesta a la amortiguación:

$$\therefore \boxed{Y_3(t) = (-te^{-t} + 3e^{-t} - 3e^{-2t})u(t)}$$

3 CONCLUSIONES

b. PREGUNTA 2

• Finalmente logre verificar los conceptos previos vistos en clases mediante el Software MATLAB .Como sabemos es un programa matemático que nos facilito los cálculos numéricos y gráficas. Fue de gran ayuda para comprobar y darnos una idea de la gráfica que se pueden generar entre la convolución de dos señales discretas vistos en la pregunta dos.

c. PREGUNTA 3

• La transformada inversa de la función de transferencia del sistema es la respuesta al impulso del sistema.
• Si en la respuesta del sistema el índice de la exponencial negativa (o suma de exponenciales negativas) es menor que la positiva (o suma de positiva), entonces la gráfica se va a ir por debajo del valor final para luego volver al valor final y ser cuasi constante.
• El valor final no necesariamente se va hacia el 0, si no depende de las condiciones iniciales, en específico sólo se reducen al 0 los que representan potencias menores que uno.

d. PREGUNTA 4

• El tiempo siempre es positivo; por ello, colocamos u(t) a nuestras respuestas ante una señal(impulso,escalón,amortiguador,...) ,ya que la función escalón se define de la siguiente manera.

$$t \geq 0 \rightarrow u(t) = 1$$

$$t < 0 \rightarrow u(t) = 0$$

• La función de transferencia debido a la transformada de Laplace, es importante, ya que me permite graficar la respuesta ante una entrada (impulso,escalón,...), donde la gráfica será de la señal de salida respecto al tiempo. Cabe resaltar, que al realizar el diagrama de bloques en el programa de Simulink y darle una entrada, podremos visualizar nuestra gráfica de salida por medio de un "Scope" o un "osciloscopio".Debemos tener presente que la función de transferencia que proviene de una transformada z , Laplace y entre otras, es importante, ya que nos permite visualizar como nuestra señal de salida varia en el tiempo.

4 BIBLIOGRAFIA

- Antonio Artés Rodríguez,Fernando Pérez González. (2012). Comunicaciones digitales.
- López, H. I. (2009). Método Alternativo para Calcular la Convolución de Señales en Tiempo Continuo.
- Oviedo, U. d. (2006). Simulación de sistemas de control continuos con MATLAB Y SIMULINK.
- Miranda, J. (1983). MANUAL DE CALCULO diferencial é integral.