Universidad Nacional de Ingeniería

Facultad de Ingeniería Eléctrica y Electrónica

Especialidad de Ingeniería de Telecomunicaciones

"Laboratorio 1 de Análisis de Señales y Sistemas"

Curso: Análisis de Señales y Sistemas

Código del Curso: EE410-M

Docente: Manuel Arevalo Villanueva

Integrantes: Gian Carlos Chancavilcas Osores - 20191108K

Julio Cesar Luna Yabarrena - 20130346I

Harold Alessander Jhon Zambrano Quispe - 20191351B

2021-I

1 INTRODUCCIÓN

hOLA

2 MARCO TEÓRICO

3) CONVOLUCIÓN DISCRETA:

Convolución es un valor que se extiende a todos los sistemas que son invariantes linear del tiempo (LTI - Linear Time Invariant). La idea de convolución discreta es la misma que la de convolución continua. Por esta razón, puede ser de gran ayuda el ver las dos versiones para que usted entienda la extrema importancia del concepto. Recuerde que la convolución es un instrumento poderoso al determinar el resultado de un sistema después de saber la una entrada arbitraria y la respuesta al impulso del sistema.

SUMA DE CONVOLUCIÓN

Como ya ha sido mencionado, la suma de convolución provee una manera matemáticamante concisa para expresar el resultado de un sistema LTI, basado en una entrada arbitraria para una señal discreta y también el saber la respuesta del sistema. La suma de convolución es expresada como:

$$\boxed{y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]}$$

3 2. **Sea $f[n] = 3$, $0 \leq n \leq 2$, un pulso cuadrado , $g[n] = [1, 2, 3, 2, 1]$ un pulso triangular , sea $h[n] = (\frac{1}{2})^n$, $0 \leq n \leq 8$ una amortiguación exponencial**

a) **Usando el MATLAB grafique las señales en tiempo discreto f[n],g[n] y h[n].**
•Para la grafica $f[n] = 3$, $0 \leq n \leq 2$, se utilizo la funcion stem de MATLAB para realizar un pulso cuadrado consideramos en un intervalo de $[-8, 8]$.

```
clear clc
n=-8:8;
x=[0 0 0 0 0 0 0 0 3 3 3 0 0 0 0 0 0];
stem (n,x,'filled','-','LineWidth',2);
xlabel('n');
ylabel('f(n)');
title('PULSO CUADRADO','LineWidth',2 )
```

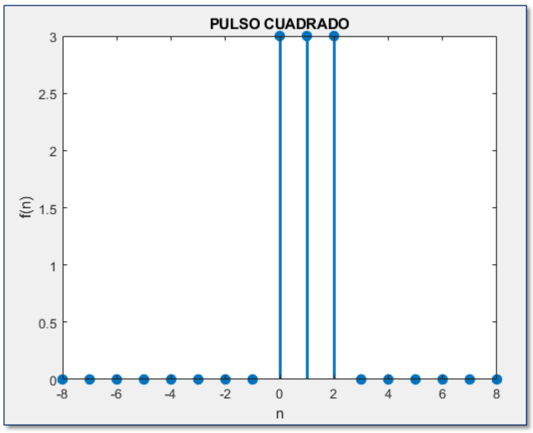


Figure 1: Código en Matlab y gráfica de f[n]

•Para la gráfica $g[n] = [1, 2, 3, 2, 1]$, $-2 \leq n \leq 2$, se utilizo la función stem de MATLAB para realizar un pulso rectangular consideramos en un intervalo de $[-8, 8]$.

```
clear clc
n=-8:8;
x=[0 0 0 0 0 0 1 2 3 2 1 0 0 0 0 0 0];
stem (n,x,'filled','-','LineWidth',2);
xlabel('n');
ylabel('g(n)');
title('PULSO TRIANGULAR','LineWidth',2 )
```

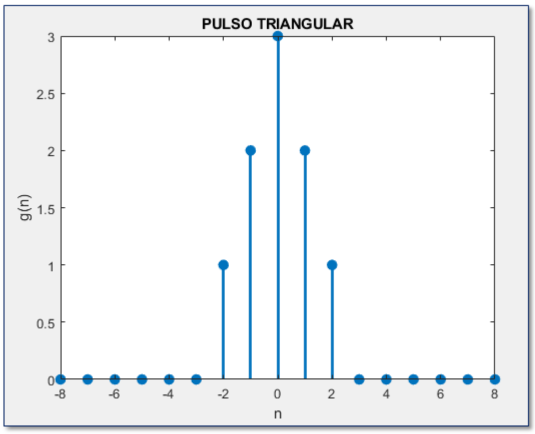


Figure 2: Código en Matlab y gráfica de g[n]

•Para la grafica $h[n] = (\frac{1}{2})^n$, se utilizo la funcion stem de MATLAB para realizar la amortiguación exponencial $[-8, 8]$ con paso 1.

```
clear clc
n=-8:1:8;
y=(0.5.^n).*stepfun(n,0)-(0.5.^n).*stepfun(n,9);
stem (n,y,'filled','-','LineWidth',2);
axis([-8 8 -4 4]);
xlabel('n');
ylabel('h(n)');
title('AMORTIGUACION EXPONENCIAL','LineWidth',2 )
```

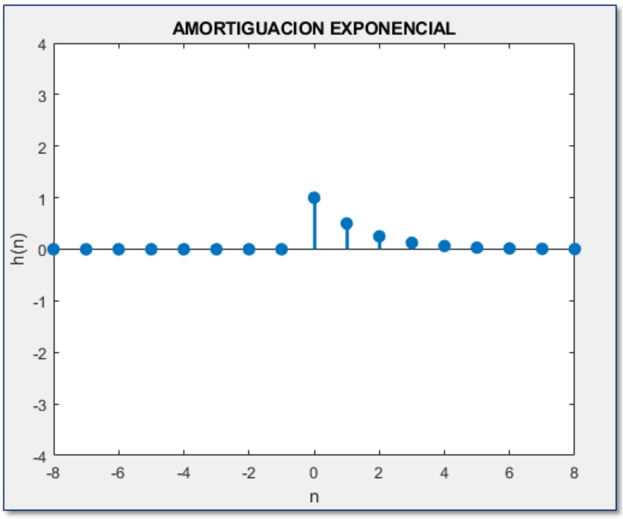


Figure 3: Código en Matlab y gráfica de h[n]

b) Encuentre en términos de n y la señal escalón unitario las siguientes convoluciones:
Como nos piden la convolución de dos señales discretas por conocimiento previo:

$$\boxed{y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]}$$

• Hallamos la convolución de $f[n] * g[n]$ con la formula previa hallada.

$$n < -2 \rightarrow y[n] = 0$$

$$n = -2 \rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]g[n-k] = f[0]g[-2] = (3)(1) = 3$$

$$n = -1 \rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]g[n-k] = f[0]g[-1] + f[1]g[-2] = 9$$

$$n = 0 \rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]g[n-k] = f[0]g[n] + f[1]g[-1] + f[2]g[-2] = 18$$

$$n = 1 \rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]g[n-k] = f[0]g[1] + f[1]g[0] + f[2]g[-1] = 21$$

$$n = 2 \rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]g[n-k] = f[0]g[2] + f[1]g[1] + f[2]g[0] = 18$$

$$n = 3 \rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]g[n-k] = f[1]g[2] + f[2]g[1] = 9$$

$$n = 4 \rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]g[n-k] = f[2]g[2] = 3$$

$$n > 4 \rightarrow y[n] = 0$$

$$y[n] = f[n] * g[n] = \begin{cases} 0 & \text{si } n < -2 \\ 3 & \text{si } n = -2 \\ 9 & \text{si } n = -1 \\ 18 & \text{si } n = 0 \\ 21 & \text{si } n = 1 \\ 18 & \text{si } n = 2 \\ 9 & \text{si } n = 3 \\ 3 & \text{si } n = 4 \\ 0 & \text{si } n > 4 \end{cases}$$

Expresamos en n y escalón unitario la señal:

$$\boxed{y[n] = 3u[n+2] + 6u[n+1] + 9u[n] + 3u[n-1] - 3u[n-2] - 9u[n-3] - 6u[n-4] - 3u[n-5]}$$

- Hallamos la convolución de $f[n] * h[n]$ con la formula previa hallada.

$$f[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]h[n-k]$$

$$n < 0 \rightarrow y[n] = 0$$

$$n = 0 \rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]h[n-k] = f[0]h[0] = 3$$

$$n = 1 \rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]h[n-k] = f[0]h[1] + f[1]h[0] = \frac{9}{2}$$

$$n = 2 \rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]h[n-k] = f[0]h[2] + f[1]h[1] + f[2]h[0] = \frac{21}{4}$$

$$n = 3 \rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]h[n-k] = f[0]h[3] + f[1]h[2] + f[2]h[1] = \frac{21}{8}$$

$$n = 4 \rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]h[n-k] = f[0]h[4] + f[1]h[3] + f[2]h[2] = \frac{21}{16}$$

$$n = 5 \rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]h[n-k] = f[0]h[5] + f[1]h[4] + f[2]h[3] = \frac{21}{32}$$

$$n=6 \rightarrow y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]h[n-k]=f[0]h[6]+f[1]h[5]+f[2]h[4]=\frac{21}{64}$$

$$n=7 \rightarrow y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]h[n-k]=f[0]h[7]+f[1]h[6]+f[2]h[5]=\frac{21}{128}$$

$$n=8 \rightarrow y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]h[n-k]=f[0]h[8]+f[1]h[7]+f[2]h[6]=\frac{21}{256}$$

$$n=9 \rightarrow y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]h[n-k]=f[1]h[8]+f[2]h[7]=\frac{9}{256}$$

$$n=10 \rightarrow y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]h[n-k]=f[2]h[8]=\frac{3}{256}$$

$$n>10 \rightarrow y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]h[n-k]=0$$

$$y[n]=f[n]*h[n]=\begin{cases} 0 & \text{si } n<0 \\ 3 & \text{si } n=0 \\ \frac{9}{2} & \text{si } n=1 \\ \frac{21}{4} & \text{si } n=2 \\ \frac{21}{8} & \text{si } n=3 \\ \frac{21}{16} & \text{si } n=4 \\ \frac{21}{32} & \text{si } n=5 \\ \frac{21}{64} & \text{si } n=6 \\ \frac{21}{128} & \text{si } n=7 \\ \frac{21}{256} & \text{si } n=8 \\ \frac{9}{256} & \text{si } n=9 \\ \frac{3}{256} & \text{si } n=10 \\ 0 & \text{si } n>10 \end{cases}$$

Expresamos en n y escalón unitario la señal:

$$\boxed{y[n]=(0.5)^n(3u[n]+6u[n-1]+12u[n-2]-12u[n-9])-(0.5)^8(6u[n-10]-3u[n-11])}$$

- Hallamos la convolución de $g[n]*h[n]$ con la formula previa hallada.

$$g[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} g[k]h[n-k]$$

$$n<-2 \rightarrow y[n]=0$$

$$n=-2 \rightarrow y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} g[k]h[n-k]=g[-2]h[0]=1$$

$$n=-1 \rightarrow y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} g[k]h[n-k]=g[-1]h[0]+g[-2]h[1]=\frac{5}{2}$$

$$n=0 \to y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} g[k]h[n-k]=g[-2]h[2]+g[-1]h[1]+g[0]h[0]=\frac{17}{4}$$

$$n=1 \to y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} g[k]h[n-k]=g[-2]h[3]+g[-1]h[2]+g[0]h[1]+g[1]h[0]=\frac{33}{8}$$

$$n=2 \to y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} g[k]h[n-k]=g[-2]h[4]+g[-1]h[3]+g[0]h[2]+g[1]h[1]+g[2]h[0]=\frac{49}{16}$$

$$n=3 \to y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} g[k]h[n-k]=g[-2]h[5]+g[-1]h[4]+g[0]h[3]+g[1]h[2]+g[2]h[1]=\frac{49}{32}$$

$$n=4 \to y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} g[k]h[n-k]=g[-2]h[6]+g[-1]h[5]+g[0]h[4]+g[1]h[3]+g[2]h[2]=\frac{49}{64}$$

$$n=5 \to y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} g[k]h[n-k]=g[-2]h[7]+g[-1]h[6]+g[0]h[5]+g[1]h[4]+g[2]h[3]=\frac{49}{128}$$

$$n=6 \to y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} g[k]h[n-k]=g[-2]h[8]+g[-1]h[7]+g[0]h[6]+g[1]h[5]+g[2]h[4]=\frac{49}{256}$$

$$n=7 \to y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} g[k]h[n-k]=g[-1]h[8]+g[0]h[7]+g[1]h[6]+g[2]h[5]=\frac{3}{32}$$

$$n=8 \to y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} g[k]h[n-k]=g[0]h[8]+g[1]h[7]+g[2]h[6]=\frac{11}{256}$$

$$n=9 \to y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} g[k]h[n-k]=g[1]h[8]+g[2]h[7]=\frac{1}{64}$$

$$n=10 \to y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} g[k]h[n-k]=g[2]h[8]=\frac{1}{256}$$

$$n>10 \to y[n]=0$$

$$y[n]=g[n]*h[n]=\begin{cases} 0 & \text{si } n<-2 \\ 1 & \text{si } n=-2 \\ \frac{5}{2} & \text{si } n=-1 \\ \frac{17}{4} & \text{si } n=0 \\ \frac{33}{8} & \text{si } n=1 \\ \frac{49}{16} & \text{si } n=2 \\ \frac{49}{32} & \text{si } n=3 \\ \frac{49}{64} & \text{si } n=4 \\ \frac{49}{128} & \text{si } n=5 \\ \frac{49}{256} & \text{si } n=6 \\ \frac{3}{32} & \text{si } n=7 \\ \frac{11}{256} & \text{si } n=8 \\ \frac{1}{64} & \text{si } n=9 \\ \frac{1}{256} & \text{si } n=10 \\ 0 & \text{si } n>10 \end{cases}$$

Expresamos en n y escalón unitario la señal:

$$y[n] = (0.5)^n(u[n+2] + 4u[n+1] + 12u[n] + 16u[n-1] + 16u[n-2] - 49u[n-7])$$
$$+(0.5)^5(3u[n-7] - 3u[n-8]) + (0.5)^8(11u[n-8] - 11u[n-9])$$
$$+(0.5)^6(u[n-9] - u[n-10]) + (0.5)^8(u[n-10] - u[n-11])$$

c) **Usando el comando conv en MATLAB grafique las convoluciones**

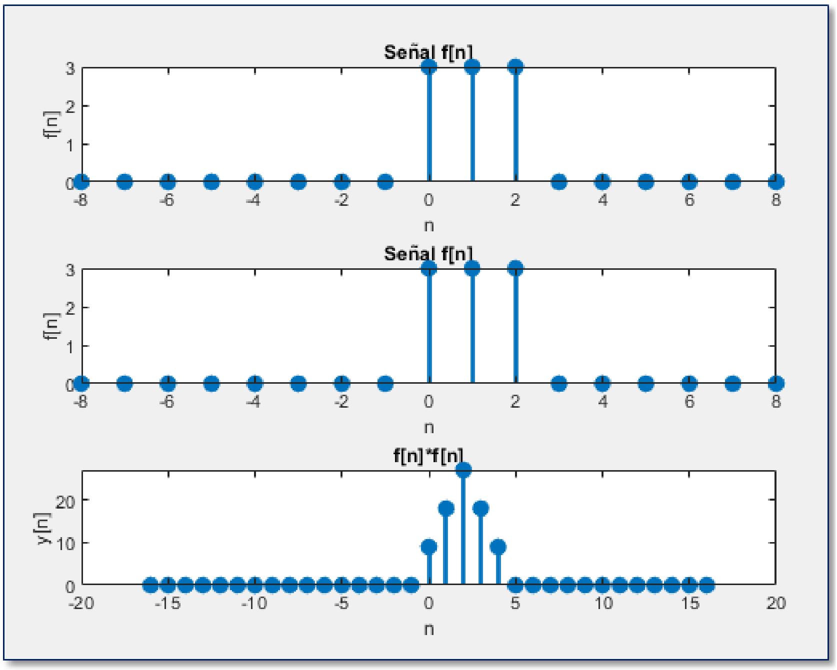
$$f[n]*f[n], f[n]*g[n], f[n]*h[n], g[n]*g[n], g[n]*h[n], h[n]*h[n]$$

Graficando

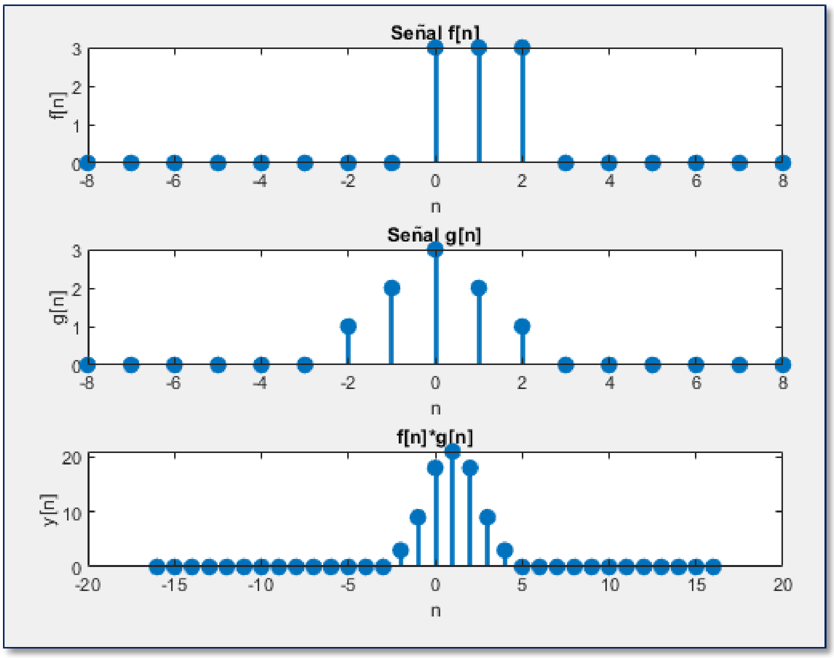
Como el algoritmo es igual para todos, solo bosquejamos las gráficas:

```
%Convolucion de f*f
clear clc
x= [0 0 0 0 0 0 0 0 3 3 3 0 0 0 0 0 0]
nx=[-8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8]
h= [0 0 0 0 0 0 0 0 3 3 3 0 0 0 0 0 0]
nh=[-8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8]
hmin=min(nh)
xmin=min(nx)
smin=abs(hmin)+abs(xmin)
%la funcion convolucion
y=conv(x,h)
Ly=length(y)

ny=-1*smin:1:Ly-smin-1

subplot(3,1,1)
stem(nx,x,'filled','-','LineWidth',2)
title('Señal f[n]')
subplot(3,1,2)
stem(nh,h,'filled','-','LineWidth',2)
title('Señal f[n]')
subplot(3,1,3)
stem(ny,y,'filled','-','LineWidth',2)
title('f[n]*f[n]')
```

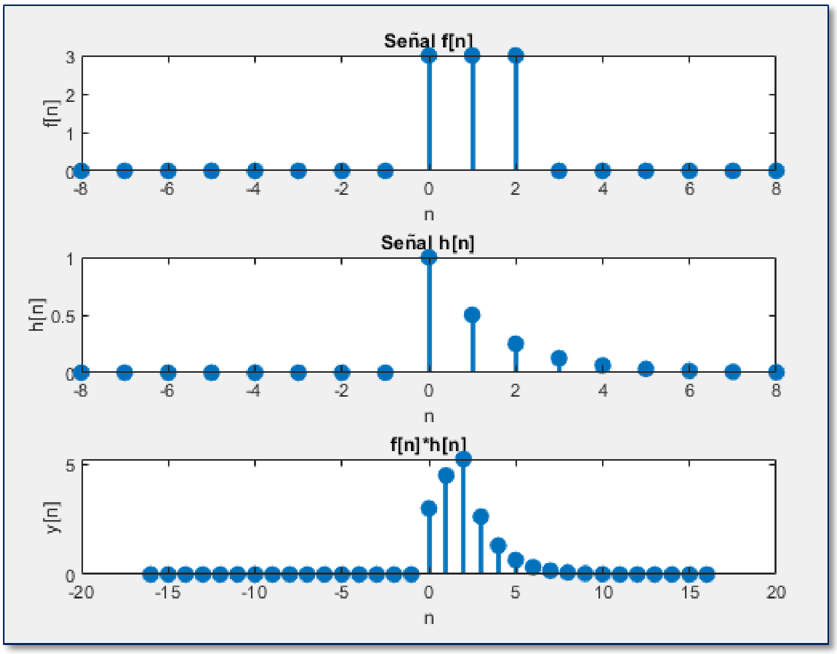
$$Convolucion: f[n]*f[n]$$



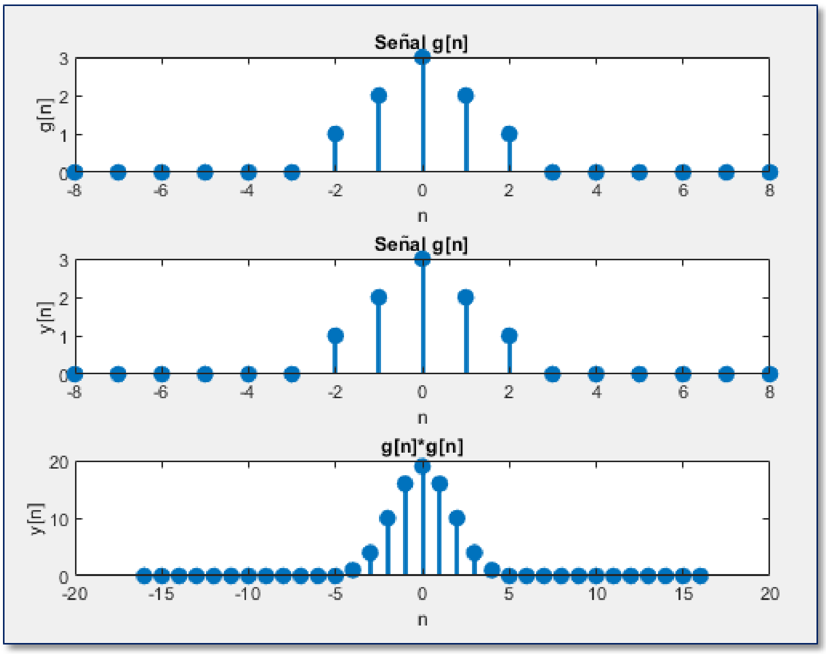
$$Convolucion : f[n] * g[n]$$



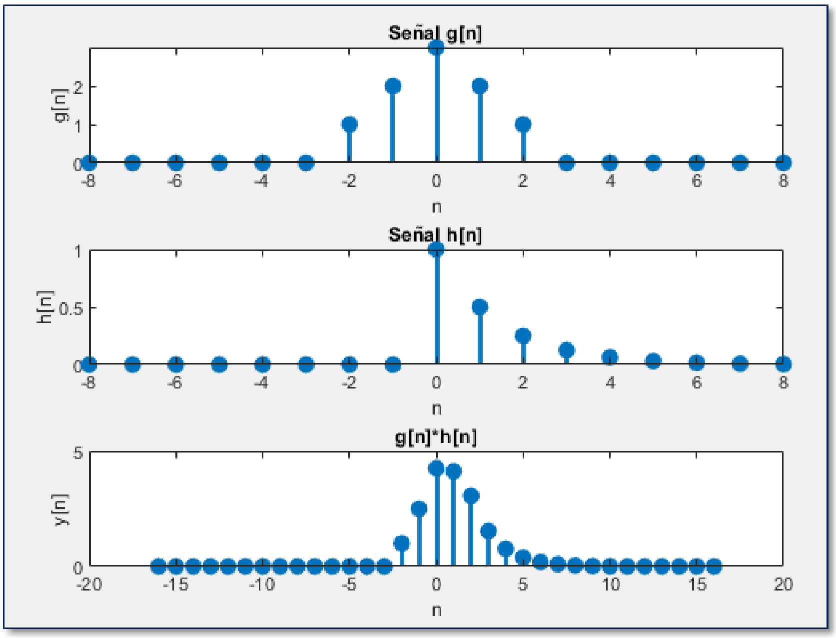
$$Convolucion : f[n] * h[n]$$



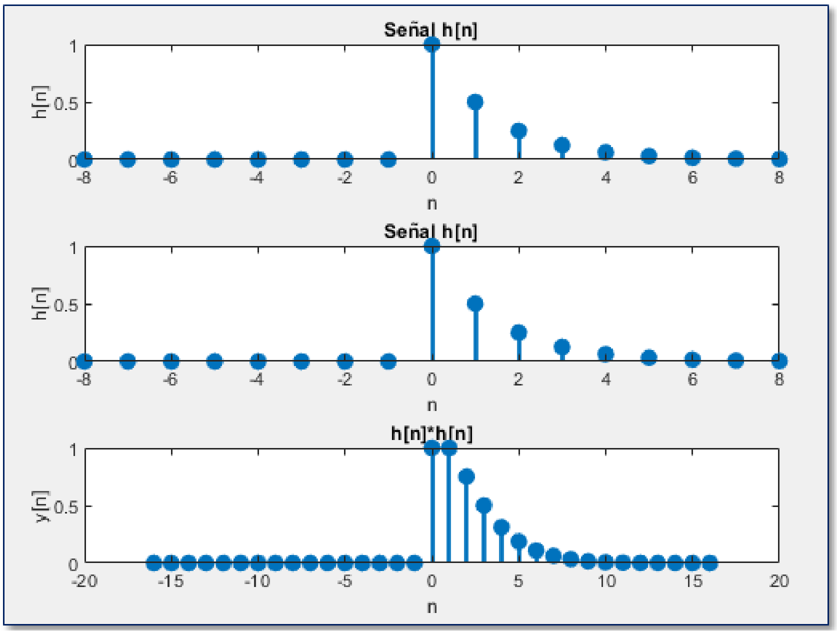
$$Convolucion: g[n] * g[n]$$



$$Convolucion: g[n] * h[n]$$



$$Convolucion: h[n] * h[n]$$



4 4.Considere un sistema causal LTI cuya entrada X(t) y salida Y(t) satisfacen

$$Y^{''}(t) + 2Y^{'}(t) + Y(t) = 2X^{'}(t) + X(t)$$

a) **Usando la Transformada de Laplace encuentre un diagrama de bloques para dichos sistema. Usando el Simulink y el diagrama de bloques encuentre la respuesta del sistema al impulso $X_1[n] = \delta(t)$, al escalón unitario $X_2(t) = u[n]$, y a la amortiguación $X_3(t) = exp(-2t)$.**

Solución:

• Realizando el diagrama de bloques del sistema causal LTI

1er paso: Calculando la función de transferencia del sistema.

$$Y^{''}(t) + 2Y^{'}(t) + Y(t) = 2X^{'}(t) + X(t)$$

Aplicando la transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\{Y^{''}(t)\} + 2\mathcal{L}\{Y^{'}(t)\} + \mathcal{L}\{Y(t)\} = 2\mathcal{L}\{X^{'}(t)\} + \mathcal{L}\{X(t)\} \tag{1}$$

Importante: Transformada de Laplace que aplicaremos en (1)

$$\mathcal{L}\{Y^{''}(t)\} = s^2 f(s) - sF(0) - F^{'}(0)$$
$$\mathcal{L}\{Y^{'}(t)\} = sf(s) - F(0)$$

Para este sistema causal LTI, consideraremos que $F(0) = 0$ y $F^{'}(0) = 0$; por lo tanto, obtendremos lo siguiente:

$$\mathcal{L}\{Y^{''}(t)\} = s^2 f(s) \tag{2}$$

$$\mathcal{L}\{Y^{'}(t)\} = sf(s) \tag{3}$$

Aplicando la transfomadas de Laplace (3) y (2) en la EDO (1)

$$s^2 y(s) + 2sy(s) + y(s) = 2sx(s) + x(s)$$

$$y(s) + \frac{2y(s)}{s} + \frac{y(s)}{s^2} = \frac{2x(s)}{s} + \frac{x(s)}{s^2}$$

$$y(s) = \frac{2x(s)}{s} + \frac{x(s)}{s^2} - \frac{2y(s)}{s} - \frac{y(s)}{s^2} \tag{4}$$

$$\boxed{h(s) = \frac{y(s)}{x(s)} = \frac{2s+1}{s^2+2s+1}} \tag{5}$$

2do paso:
Realizando el diagrama de bloques del sistema en Simulink, a partir de la ecuación (4)

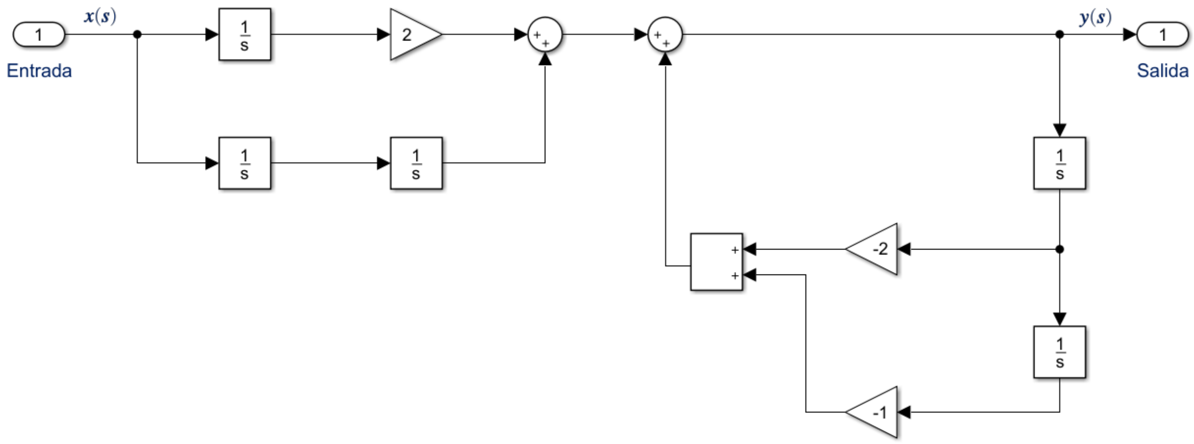


Figure 4: Diagrama de bloque del sistema causal LTI

Verificando si nuestro diagrama de bloque es correcta. Del diagrama de bloques de la

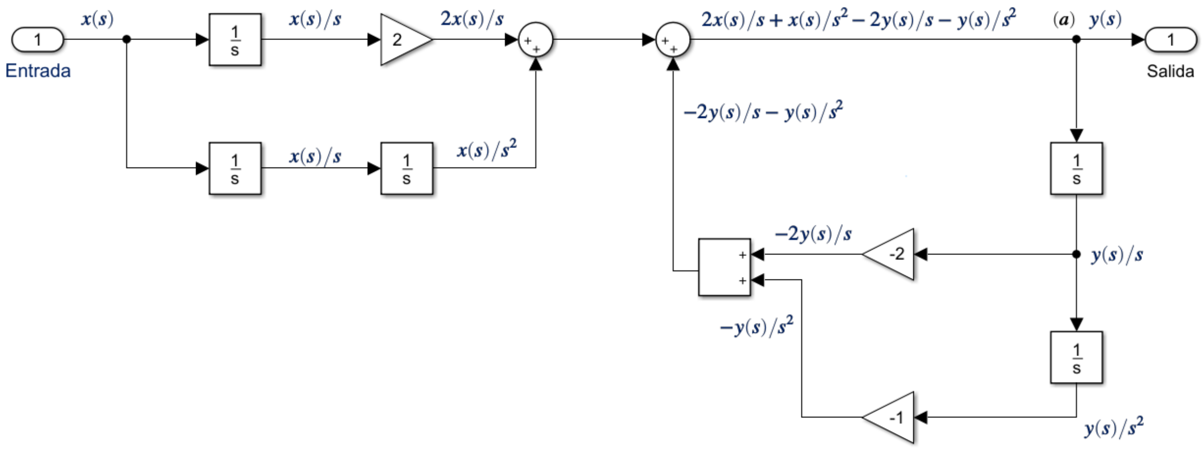


Figure 5: Verificacióndel diagrama de bloque del sistema causal LTI

figura (5) en (a), se verifica la ecuación (4)

$$y(s) = \frac{2x(s)}{s} + \frac{x(s)}{s^2} - \frac{2y(s)}{s} - \frac{y(s)}{s^2}$$

- **Respuesta al impulso**$(X_1(t) = \delta(t))$

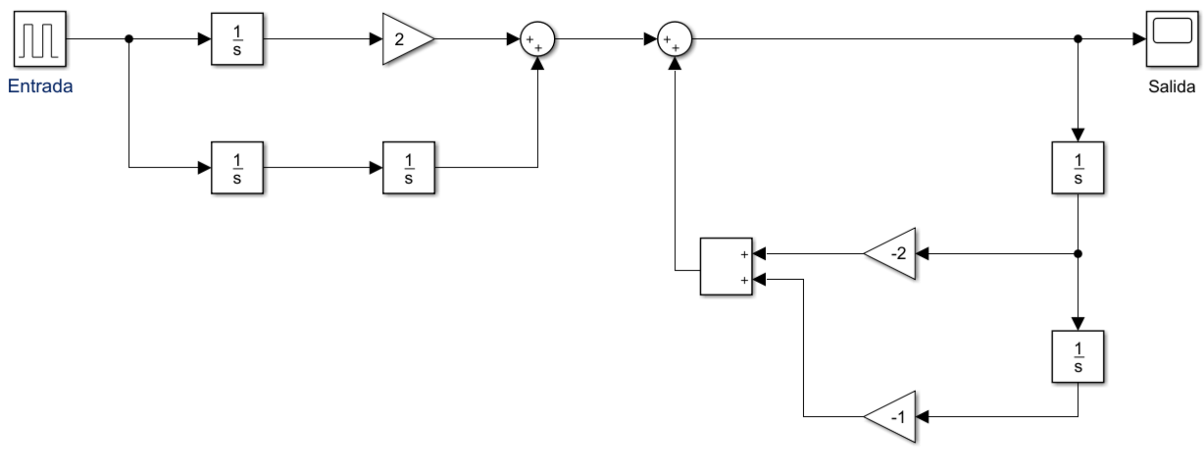


Figure 6: Diagrama de bloques con entrada de un impulso

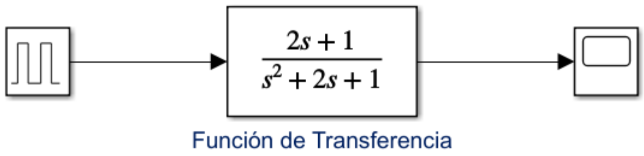


Figure 7: Otro diagrama de bloques con entrada de un impulso

Se puede verificar que en ambos diagramas de bloques se obtiene como respuesta, la siguiente respuesta con respecto al tiempo.

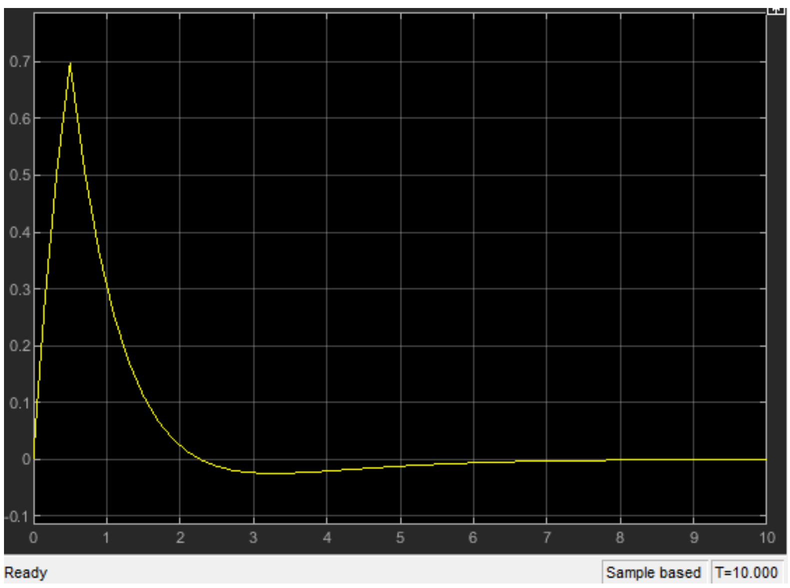


Figure 8: Otro diagrama de bloques con entrada de un impulso

- **Respuesta al escalón**$(X_2(t) = u(t))$

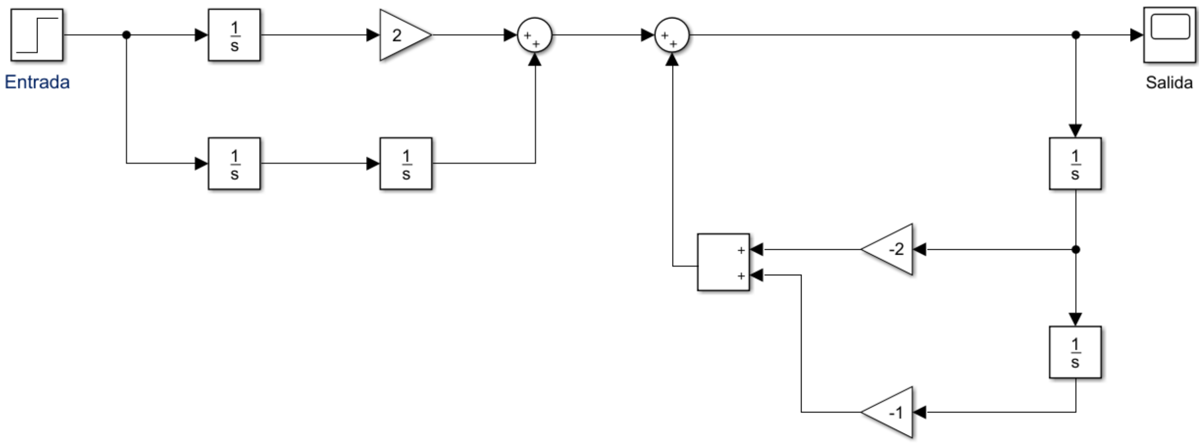


Figure 9: Diagrama de bloques con entrada de un escalón

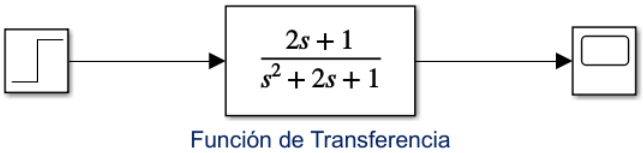


Figure 10: Otro diagrama de bloques con entrada de un escalón

Se puede verificar que en ambos diagramas de bloques se obtiene como respuesta, la siguiente respuesta con respecto al tiempo.

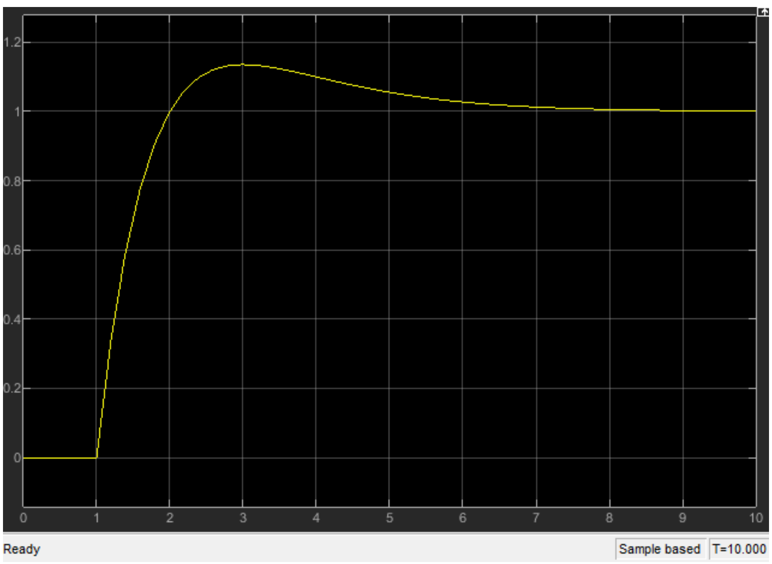


Figure 11: Otro diagrama de bloques con entrada de un escalón

b) Encuentre las respuestas de la parte (a)en términos de t

•Respuesta al impulso$(X_1(t) = \delta(t))$

$$y_1(s) = \mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$$

A partir de la función de transferencia(5)aplicaremos lo anterior.

$$\frac{y_1(s)}{x_1(s)} = \frac{2s+1}{s^2+2s+1}$$

$$\frac{y_1(s)}{1} = \frac{2}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2}$$

Aplicando transformada inversa de Laplace

$$\frac{\mathcal{L}^{-}\{y_1(s)\}}{1} = 2\mathcal{L}^{-}\{\frac{1}{s+1}\} - \mathcal{L}^{-}\{\frac{1}{(s+1)^2}\}$$

$$Y_1(t) = 2e^{-t} - te^{-t}$$

Para $t \geq 0$, el $u(t) = 1$, y para $t < 0$, el $u(t) = 0$
Como el tiempo (t) es mayor igual a 0. Entonces, obtendremos la siguiente respuesta del sistema

Respuesta al impulso:

$$\therefore \boxed{Y_1(t) = (2e^{-t} - te^{-t})u(t)}$$

•Respuesta al escalón$(X_2(t) = u(t))$

$$y_2(s) = \mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s}$$

A partir de la función de transferencia(5)aplicaremos lo anterior.

$$\frac{y_2(s)}{x_2(s)} = \frac{2s+1}{(s^2+2s+1)(s)}$$

$$\frac{y_2(s)}{\frac{1}{s}} = \frac{1}{s} + \frac{1}{(s+1)^2} - \frac{1}{s+1}$$

Aplicando transformada inversa de Laplace

$$\frac{\mathcal{L}^{-}\{y_2(s)\}}{\frac{1}{s}} = \mathcal{L}^{-}\{\frac{1}{s}\} + \mathcal{L}^{-}\{\frac{1}{(s+1)^2}\} - \mathcal{L}^{-}\{\frac{1}{s+1}\}$$

$$Y_2(t) = 1 - te^{-t} - e^{-t}$$

Para $t \geq 0$, el $u(t) = 1$, y para $t < 0$, el $u(t) = 0$
Como el tiempo (t) es mayor igual a 0. Entonces, obtendremos la siguiente respuesta del sistema

Respuesta al escalón:

$$\therefore \boxed{Y_2(t) = (1 - te^{-t} - e^{-t})u(t)}$$

5 Conclusiones