常见的几个博弈

第一种：巴什博弈

游戏玩法: 有一堆物品共n个,两人轮流取物，一次最少取一个最多取m个。取走最后一个的胜。

思路：当n<=m时 显然先手胜。 n=m+1时 无论先手怎么取 后手都能取完,所以此时的状态为平衡态。谁面临这个状态必输。 已知n%(m+1)!=0时 先手显然可以取走n%(m+1)的余数让对手变为平衡态。 至此，规律已经出来了： N%(m+1)==0 后手胜,否则先手胜。

试题传送门： HDU-Brave_Game

第二种：威佐夫博弈

两堆物品,两人轮流取,一次可从一堆取至少 1个至多全部，或从两堆取相同数，取最后一个的人获胜。

思路：第i个必败态的bi=ai+i。 且第i个必败态的ai为前面为出现的最小自然数。 根据beatty序列可证明：

An 的通项公式为 an=$[\frac{(\sqrt{5}+1)}{2} * n]$(取整)

Bn=an+n;

因此可以通过两堆物品数的差值 t 的绝对值判断

这里的 t 也就是公式的中的 n

看【$\frac{(\sqrt{5}+1)}{2} * |t|$】(这里是向上取整) 是否等于两堆物品中较小那个

因为$\frac{(\sqrt{5}+1)}{2}$这里的值是小于实际值的,所以要向上取整。

约为 1.618（黄金分割比）

试题传送门：Matches Game

第三种：尼姆博弈

给任意堆物品,每堆物品数任意个,双方轮流取，一次只能从一堆中最少取一个，最多取全部,取走最后一个物品人获胜。

用括号(k1,k2,k3......kn)表示每堆的数目 当为一堆是(k) 可知k=0为必败态， K>0为必胜态。 两堆：(k1,k2) k1=k2=0为必败态 K1,k2其中一个为0,另一个非0为必胜态。 K1,k2都非0，1.(1,1) 可知为必败态。 2.(1,2)可以通过先手拿一个转化为（1，1）必败态，所以(1,2)为必胜态。 同理可知(2,2)必败态,(k,k)为必败态。 只要后手拿先手之前拿的另一堆相同的数目始终保持两堆相同,直到先手方拿光一堆,此时状态为

(K,0)所以后手必胜。 所以(k,k)为必败态。 三堆(k1,k2,k3)如果存在两堆相同， 则先手可以通过拿令一堆使后手处于必败态,所以此时(k,k,k3)为必胜态。 K3=k也是必胜态。 2：当k1,k2,k3都不相同。可以猜想谁先把状态变为必败态，谁就赢。 ---至此可以猜想规律与异或和有关。 因为两个数相同异或和为0 而两个数相同正好为必败态。 三个相同异或和为该数本身不是0. 可以知道将所有堆物品数进行异或和 若结果为0则为必败态，后手胜。 否则先手胜。

试题传送门：取石子游戏

第四种：奇偶性博弈

Alice 和 Bob 在玩游戏。

他们有 n 堆石子，第 i 堆石子有 a_i 个，保证初始时 $a_i \leq a_{i+1}(1 \leq i < n)$。现在他们轮流对这些行操作，每次操作人可以选择满足 $a_i > a_{i-1}$（a_0 视为 0）的一堆石子，并从中取走一个。谁最后不了谁输。Alice 先手，他们都使用最优策略，请判断最后谁会取得胜利。

首先证明：只要有石子就一定能取。 首先只有一堆石子肯定能取。 假设有两堆石子,且两堆石子数之和大于0,若这两堆石子不能再取，则说明 A2<=A1, A1<0, 则推出 A1+A2<0,与假设矛盾，所以两堆石子肯定能取。依次类推。N堆石子，只要有石子，就肯能取。所以答案只与石子总数的奇偶性有关。石子数为奇数肯定先手赢。反之后手赢。下面上代码。

```
xxxxxxxxxx
#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;
int main(){
      int n,ans=0,x;
      cin>>n;
      while(n--)
            cin>>x,ans=(ans+x)%2;//对2取模奇数永远为1，偶数永远为0 防止爆int
      puts(ans?"Alice":"Bob");
      return 0;
}
```

小明和小红经常玩一个博弈游戏。给定一个n×n的棋盘，一个石头被放在棋盘的左上角。他们轮流移头。每一回合，选手只能把石头向上，下，左，右四个方向移动一格，并且要求移动到的格子之前不访问过。谁不能移动石头了就算输。

假如小明先移动石头，而且两个选手都以最优策略走步，问最后谁能赢？

本题也是奇偶性博弈，因为从左上角开始走，所以只剩n^2-1个格子。由于双方都是采取最优策略。所以不可能出现一个人把另一个人围住的情况(另一个人会在之前掉头走别的路)所以最后整个地图肯定会被走完。所以题目转化为谁能走最后一格谁就赢。由于可走的格子有n^2-1个,所以当 n^2-1为奇数先手赢，反之后手赢。 即 n^2 为偶数先手赢，反之后手赢。 即 n为偶数先手赢，反之后手赢。 （奇数*奇数=奇数，偶数 *偶数=偶数）下面上代码。

```
xxxxxxxxxx
#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;
int main(){
      int n;
      while(cin>>n&&n)
            puts(n&1?"Bob":"Alice");
      return 0;
}
```

例题3：

题目传送门P3150 本题也是奇偶性博弈。看题目数据范围 m有1e9之大，显然是找规律。让我们来简单找找规律。 m=1 必败态 m=2 只能分成 1，1 所以是必胜态 m=3 只能分成 1，2 由于2是必胜态 所以 3是必败态。 m=4 能分成1，3或2，2 显然 分成1，3 后手必败。所以m=4是必胜态。 依次类推： m=5,必败，m=6必胜。 到这里我们已经发现了规律那就是奇数为必败态，偶数为必胜态，根据这个猜想直接下结论就OK。下面是代码。

```cpp
#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;
int main(){
      int t,n;
      cin>>t;
      while(t--){
            cin>>n;
            puts(n&1?"zs wins":"pb wins");
     }
      return 0;
}
```