莫比乌斯反演定理的证明。

ps :初学给自己做个笔记，怕以后忘了。

前置知识：莫比乌斯函数μ的两个性质：

1. $\sum\limits_{d|n}\mu(d)=[n==1]$

2. $\sum\limits_{d|n}\dfrac{\mu(d)}{d}=\dfrac{\varphi(n)}{n}$ （这里证明用不到）

定理：若有定义在N^+上的函数$F(n),f(n)$满足关系：

$F(n)=\sum\limits_{d|n}f(d)$，则有：$f(n)=\sum\limits_{d|n}\mu(d)F(\dfrac{n}{d})$

证明：我们只需证上述等式右边等于左边即可。

```
$\sum\limits_{d|n}\mu(d)F(\dfrac{n}{d})$
```

=$\sum\limits_{d|n}\mu(d)\sum\limits_{e|\frac{n}{d}}f(e)$ （定义) (1)

=$\sum\limits_{d|n}\sum\limits_{e|\frac{n}{d}}\mu(d)f(e)$ （分配律) (2)

=$\sum\limits_{e|n}\sum\limits_{d|\frac{n}{e}}\mu(d)f(e)$ （e,d的地位是可交换的) (3)

=$\sum\limits_{e|n}f(e)\sum\limits_{d|\frac{n}{e}}\mu(d)$ （结合律) (4)

=$f(n)$ （μ性质1) (5)

证毕。

如果这里还是看不懂请看下面。

对于$(2)\rightarrow(3)$的解释：

因为$e|\dfrac{n}{d}\Leftrightarrow ed|n$

可以理解为对每个n的因子d求出所有满足$ed|n$的e,即二元组(d,e)的个数。

举个例子：$n=6.$

$d=1,e=\{1,2,3,6\}$

$d=2,e=\{1,3\}$

$d=3,e=\{1,2\}$

$d=6,e=\{1\}$

因为e,d都是n的因子，所以地位等价。

即条件可以改为$d|\dfrac{n}{e}\Leftrightarrow de|n$

每个n的因子e求出所有满足$de|n$的e,即二元组(e,d)的个数。

$e=1, d=\{1,2,3,6\}$

$e=2, d=\{1,3\}$

$e=3, d=\{1,2\}$

$e=6, d=\{1\}$

$(4) \rightarrow (5)$**的解释：**

显然当$\frac{n}{e} \neq 1$时，$\sum_{d \mid \frac{n}{e}} \mu(d)=0$。

只有当$\frac{n}{e}=1 \rightarrow e=n$时，$\sum_{d \mid \frac{n}{e}} \mu(d)=1$

即$\sum_{e \mid n} f(e) \sum_{d \mid \frac{n}{e}} \mu(d)$=$f(n) \times 1=f(n)$。

卷积证明见置顶回答