prufer序列与Cayley公式(学习笔记)

给定n个结点有标号的无根树，与长度为$n-2$的prufer序列为一一映射。 又因为序列的每个数有n种选择，所以n个结点有标号无根树的不同个数有: n^{n-2}种。 与此对应：因为根有n种选择，所以n个结点有标号有根树的不同个数有：n^{n-1}种。

推广：n个结点度数依次为：$d_1,d_2,d_3\dots d_n$的无根树有：$\frac{(n-2)!}{[(d_1-1)!\times(d_2-1)!\cdots\times(d_n-1)!]}$,其中prufer编码中的数字i恰好出现d_i-1次。 且需要满足：$\sum\limits_{i=1}^{n}d[i]-1=n-2$。 此外需要注意特判$n==1$的情况，$d[i]==0$ 只有唯一解，否则无解。

该公式的乘法形式为：组合数的形式。每次从剩下的数中选出$d[i]-1$个。 即公式为： n个组合数相乘 $C(n-2,d[1]-1)$

$C(n-2-(d[1]-1),d[2]-1)$

$C(n-2-(d[1]-1)-(d[2]-1),d[3]-1)$

$\dots$

$C(d[n]-1,d[n]-1)$

证明传送门

P4981 父子(Cayley定理)

题目传送门

思路：显然是用$Cayley$定理易得，n个结点有标号有根树的个数为：n^{n-1}种。。接下来写下快速幂就行了。

时间复杂度：$O(logn)$

```
#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;
typedef long long ll;
const ll mod=1e9+9;
ll ksm(ll a,ll n){
    ll ans=1;
    while(n){
        if(n&1) ans=ans*a%mod;
        a=a*a%mod;
        n>>=1;
```

```
	}
	return ans;
}
int main(){
	ll t,n;
	scanf("%lld",&t);
	while(t--){
		scanf("%lld",&n);
		printf("%lld\n",ksm(n,n-1));
	}
	return 0;
}
```