

30. $\neg p \rightarrow (q \rightarrow r)$ and $q \rightarrow (p \vee r)$

$$\neg p \rightarrow (q \rightarrow r)$$

$$q \rightarrow (p \vee r)$$

$$p \vee (q \rightarrow r)$$

$$\neg q \vee (p \vee r)$$

$$p \vee (\neg q \vee r)$$

$$p \vee \neg q \vee r$$

$$p \vee \neg q \vee r$$

hence proved!

31. $p \leftrightarrow q$ and $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

Using logical equivalence:

$$p \leftrightarrow q \Rightarrow (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q).$$

$$[p \vee (\neg p \wedge \neg q)] \wedge [q \vee (\neg p \wedge \neg q)]$$

$$[(\neg p \vee p) \wedge (\neg q \vee p)] \wedge [(\neg p \vee q) \wedge (q \vee \neg q)]$$

$$[T \wedge (\neg q \vee p)]$$

$$[(\neg p \wedge q) \wedge T]$$

$$(\neg q \vee p) \wedge (\neg p \vee q).$$

$$(q \rightarrow p) \wedge (p \rightarrow q) \text{ hence proved!}$$

Date: _____

32. $p \leftrightarrow q$ and $\neg p \leftrightarrow \neg q$.

$p \leftrightarrow q$.

$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$.

$(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$.

$[(\neg p \vee q) \wedge \neg q] \vee [f(p \vee q) \wedge p]$

$[(\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg q \vee q)] \vee [(\neg p \wedge p) \vee (q \wedge p)]$

$[(\neg p \wedge \neg q) \vee T] \vee [F \vee (q \wedge p)]$

$(\neg p \wedge \neg q) \vee (q \wedge p)$.

$((\neg p \wedge \neg q) \vee q) \wedge ((\neg p \wedge \neg q) \vee p)$

$((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee q)) \wedge ((\neg p \vee p) \wedge (\neg q \vee p))$

$((\neg p \vee q) \wedge T) \wedge (T \wedge (\neg q \vee p))$

$(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p) \rightarrow \text{Note}$

$(\neg p \vee \neg(\neg q)) \wedge (\neg q \vee \neg p)$

E

R

D

Date:

$$\neg p \leftrightarrow \neg q$$

$$(\neg p \rightarrow \neg q) \wedge (\neg q \rightarrow \neg p).$$

$$(p \vee \neg q) \wedge (\neg q \vee \neg p).$$

$$(\neg q \vee p) \wedge (\neg p \vee q) \text{ hence proved!} \rightarrow \text{Note.}$$

33. $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$ is a tautology.

$$\neg [(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r)] \vee (\neg p \vee r)$$

$$[\neg(\neg p \vee q) \vee \neg(\neg q \vee r)] \vee (\neg p \vee r)$$

$$(p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg r) \vee (\neg p \vee r)$$

$$[(p \vee q) \wedge (p \vee \neg r)] \vee [\neg q \vee (q \wedge \neg r)] \vee (\neg p \vee r)$$

$$[(p \vee q) \wedge (p \vee \neg r)] \vee [\neg q \vee q] \vee [\neg q \vee \neg r] \vee (\neg p \vee r)$$

$$[(p \vee q) \wedge (p \vee \neg r)] \wedge [\neg q \vee \neg r] \vee (\neg p \vee r)$$

$$\{ [(p \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg r)] \wedge (p \vee \neg r) \} \vee (\neg p \vee r)$$

$$\{ [(p \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg r)] \vee (\neg p \vee r) \} \wedge [(p \vee \neg r) \vee (\neg p \vee r)]$$

Date: _____

$$[(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg r)] \vee (\neg p \vee r) \wedge T$$

$$(p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee r)$$

$$(p \vee \neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg q \vee \neg r) \vee (\neg p \vee r)$$

$$T \wedge ((\neg q \vee \neg r) \vee \neg p) \vee (\neg q \vee \neg r \vee r)$$

$T \wedge T \Rightarrow$ Tautology proved!

34. $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \rightarrow (q \vee r)$ is a tautology!

$$\checkmark \neg ((p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)) \vee (q \vee r)$$

$$\checkmark (\neg (p \vee q) \vee \neg (\neg p \vee r)) \vee (q \vee r)$$

$$\checkmark ((\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg r)) \vee (q \vee r)$$

$$\checkmark (((\neg p \wedge p) \wedge (\neg q \vee q)) \wedge ((\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg r \vee r))) \vee (q \vee r)$$

$$\checkmark ((\neg p \wedge p) \wedge (\neg q \vee q)) \wedge ((\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg r \vee r)) \vee (q \vee r)$$

$$((\neg q \vee \neg p) \wedge ((\neg p \vee \neg r) \wedge (\neg q \vee \neg r))) \vee (qr)$$

~~$(\neg p \wedge (\neg q \vee \neg r)) \vee (\neg r \wedge (\neg q \vee \neg p))$~~

~~$((\neg p \wedge \neg q) \wedge (\neg p \wedge \neg r)) \vee (\neg r \wedge \neg q) \vee r$~~

Applying associative law & distributive law.

~~$(\neg q \wedge \neg p \wedge \neg q \wedge (\neg p \wedge \neg r)) \wedge (\neg q \wedge \neg r \wedge \neg q)$~~

$$[((\neg q \vee \neg p) \wedge ((\neg p \vee \neg r) \wedge (\neg q \vee \neg r))) \vee q]_{vr}$$

$$((\neg q \vee \neg p) \vee q) \wedge (((\neg p \vee \neg r) \wedge ((\neg q \vee \neg r) \vee q))]_{vr}$$

$$[(\neg q \vee q \vee \neg p) \wedge (\neg p \vee \neg r) \vee q \wedge (\neg q \vee \neg r \vee q)]_{vr}$$

↓

T

↓

T

$$[T \wedge (\neg p \vee \neg r) \wedge T]_{vr}$$

$$(\neg p \vee \neg r)_{vr}$$

$$(\neg p \vee \neg r) \vee (r_{vr})$$

∴ X T \Rightarrow Tautology
proved!

Date: _____

35. Show that they are not logically equivalent.

$$(p \rightarrow q) \rightarrow \text{ and } p \rightarrow (q \vee \neg r)$$

By truth table.

38. The dual replace the logical operators:

\wedge by \vee

\vee by \wedge

T by F

F by T.

$$(a) p \vee \neg q$$

$$p \wedge \neg q$$

$$(b) p \wedge (q \vee r \wedge T)$$

$$p \vee (q \wedge (r \vee F))$$

$$(c) (p \vee \neg q) \wedge (q \vee T)$$

$$(p \wedge \neg q) \vee (q \wedge F)$$