# 组 合 数 学
# Combinatorial Mathematics

| | |
|---|---|
| 组合存在定理 | 基本计数公式 |
| 递推方程 | 生成函数 |
| 容斥原理 | **Polya**定理 |

# 组合数学的主要内容

研究离散个体满足约束条件下的配置问题

- 组合存在性
  - 偏序集分解定理
  - Ramsey定理
  - 相异代表系存在定理
- 组合计数
  - 基本计数公式
  - 计数方法
  - 计数定理
- 组合枚举：生成算法、组合设计
- 组合优化：最短路经、最小生成树、网络流

# 组合数学的主要技巧

## 重要的组合思想

- 一一对应
- 数学归纳法
- 上下界逼近的处理方法

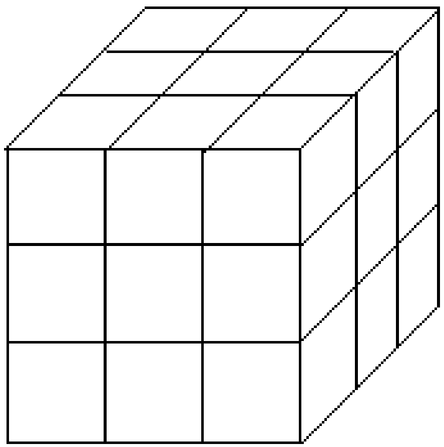
# 一一对应

**例1** 3×3×3的立方体至少需要多少次才能切成27个小立方体？

**解：** 6次

切割 ↔ 中心立方体的面

次数至少等于面数



**例2** $n$个选手两人一组比赛决出冠军，需要多少次比赛？

**解：** $n$-1次，比赛 ↔ 淘汰，比赛次数=淘汰人数

# 组合计数模型与一一对应

- 计数方法：计数模型与实际问题的对应

- 计数模型：
  - 选取问题
  - 不定方程非负整数解问题
  - 非降路径问题
  - 整数拆分问题
  - 放球问题
  - ……

# 数学归纳法

- 描述一个与自然数相关的命题 $P(n)$

  归纳基础：例如 $P(0)$ 真；

  归纳步骤：例如 $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

- 第一数学归纳法：

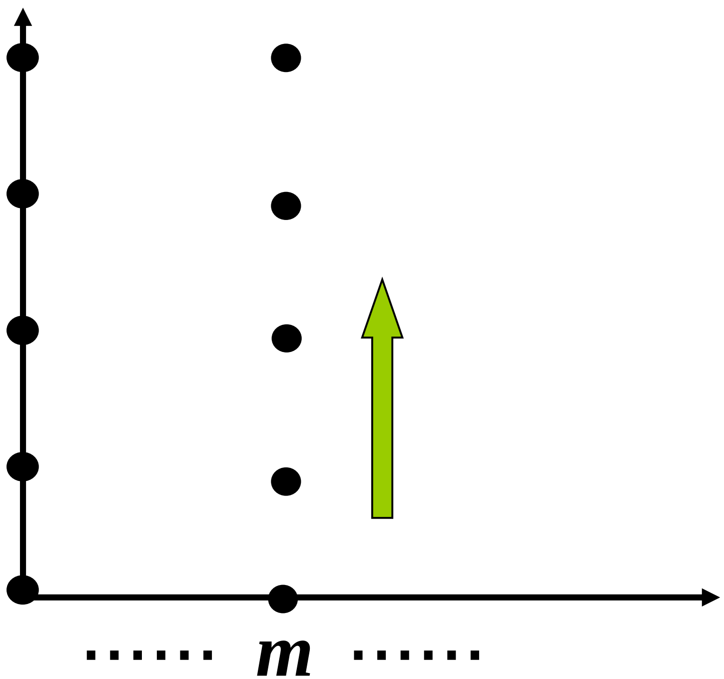
  $n=0$为真；假设对$n$为真，证对$n+1$为真

- 第二数学归纳法：

  $n=0$为真；假设对一切小于$n$ 的 $k$ 为真, 证明对 $n$ 为真

# 数学归纳法的推广

- 证明命题$P(m, n)$
  针对$m, n$两个自然数
  任意给定$m$（或 $n$）对$n$ (或 $m$) 归纳



# 多重归纳

**归纳基础**

$\langle 0, n' \rangle$为真，

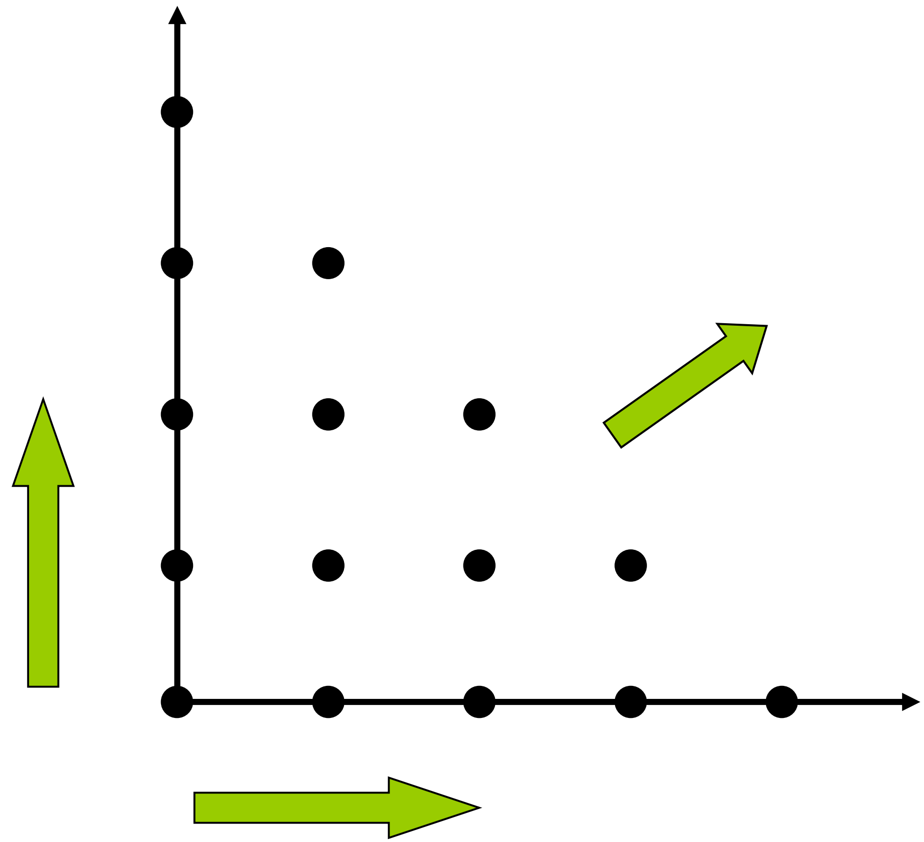
$\langle m', 0 \rangle$为真

**归纳步骤**

假设$\langle m-1, n \rangle$，

$\langle m, n-1 \rangle$为真，

证$\langle m, n \rangle$为真



# 上下界逼近

确定某个值（或阶）

步骤

- 证明这个值的上界
- 证明这个值的下界
- 如果上界与下界相等，则结束
- 否则改进上界或者下界，使得它们逐渐逼近

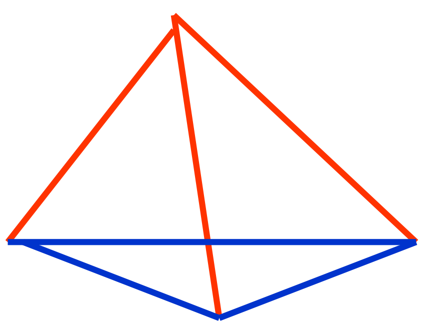
# 实例

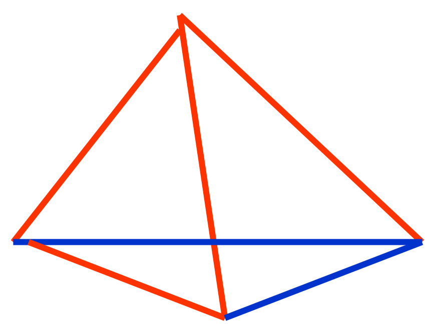
$K_n$：$n$个顶点的无向完全图

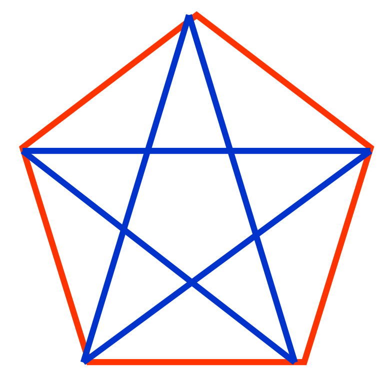
用红、蓝两色任意对$K_n$的边涂色，$n$至少是多少才能出现一个红色三角形，或一个蓝色的三角形?

证明

- 上界$n≤6$. 某顶点关联的边至少有3条同色







反例

- 下界$n>5$. $n=5$ 不可能做到.
- $n=6$.

# 第二十章 组合存在性定理

- 有限偏序集的分解定理

  若最大链长度为$n$, 则偏序集最少可分解成$n$条不相交的反链

  若最大反链长度为 $n$，则偏序集最少可分解为$n$条不相交的链（p. 52-53）

- **Ramsey定理：**鸽巢原理的推广

- 相异代表系存在定理：**Hall**定理（完美匹配存在条件）的推广

# 主要内容

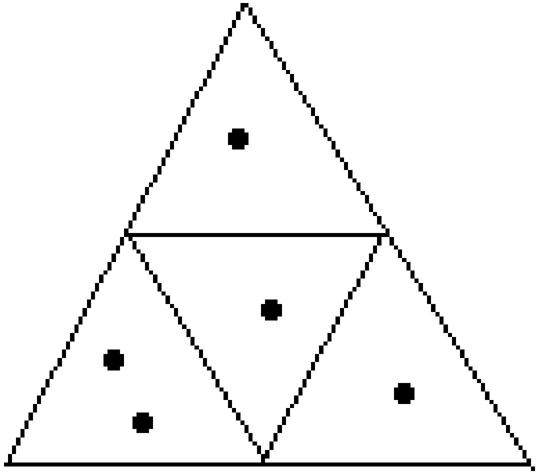
- 鸽巢原理
  - 简单形式
  - 一般形式
- Ramsey定理
  - 简单形式
  - 小Ramsey数的相关结果
  - 一般形式
  - 关于Ramsey数的若干已知结果

# 鸽巢原理的简单形式

鸽巢原理：$n$+1个物体放到$n$个盒子里，则存在一个盒子至少含有2个或者2个以上的物体.

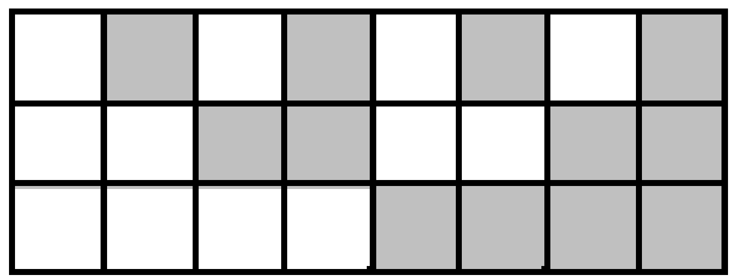
应用实例

例1 边长为2的正三角形中 5个点，则存在2个点距离小于1.



# 应用实例

**例2** 3×9的方格用黑、白两色涂色，则存在两列涂色方案相同.



**例3** 空间9个格点，证明所有两点连线的中点中有一个是格点.

**证**：若$(x, y, z)$与$(x', y', z')$的奇偶性相同，则连线中点为格点. 奇偶模式共8种.

# 应用实例(续)

**例4** 设有 3 个7 位二进制数

$$A: a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7$$

$$B: b_1b_2b_3b_4b_5b_6b_7$$

$$C: c_1c_2c_3c_4c_5c_6c_7$$

证明存在整数$i$和$j$，$1 \le i < j \le 7$, 使得下列之一必然成立：

$$a_i = a_j = b_i = b_j,$$

$$a_i = a_j = c_i = c_j,$$

$$b_i = b_j = c_i = c_j$$

# 应用实例(续)

$$a_i = a_j = b_i = b_j$$

$$a_i = a_j = c_i = c_j$$

$$b_i = b_j = c_i = c_j$$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *A* | 0 | 1 | 0 | 1 | × | × | 1 |
| *B* | 0 | 1 | × | × | 0 | 1 | 1 |
| *C* | × | × | 0 | 1 | 0 | 1 | × |

证 $a_i$, $b_i$, $c_i$中，必有两个相同，每个同为0或1，有6种选择。例如$a_i=b_i=0$，记为1-2-0，同样$a_i=c_i=1$, 记为1-3-1，这6种选择为：

1-2-0, 1-2-1, 1-3-0, 1-3-1, 2-3-0, 2-3-1

7列数6种选择，由鸽巢原理必有两列相等，这两列中含有一个四角数字相同的矩形，这四角的数字满足要求。

# 应用实例(续)

例5 从1到2$n$的正整数中，任取$n$+1个数，至少有一对数，其中一个数是另一个数的倍数。

证 $a_i = 2^{\alpha_i} r_i, i = 1, 2, \ldots, n+1$，$r_i$为奇数，1到2$n$只有$n$个奇数，故存在$r_i, r_j$使得$r_i = r_j, i < j$. 于是$a_i = 2^{\alpha_i} r_i, a_j = 2^{\alpha_j} r_j$.

若$a_i > a_j$，则$\frac{a_i}{a_j} = 2^{\alpha_i - \alpha_j}$故$a_i$是$a_j$的倍数。

# 应用实例(续)

例6 $\boldsymbol{n+1}$个$\leq \boldsymbol{2n}$的正整数中，必有两个数互素。

证 相邻的数互素，若不然，$\boldsymbol{p}$是$\boldsymbol{k}$与$\boldsymbol{k+1}$的公因子，且$\boldsymbol{1<p<k}$. 那么$\boldsymbol{k=pq_i}$，$\boldsymbol{k+1=pq_j}$，因此$\boldsymbol{pq_i+1=pq_j}$，于是$\boldsymbol{p(q_j-q_i)=1}$，矛盾。

构造$\boldsymbol{n}$个组：$\{\boldsymbol{1,2}\},\{\boldsymbol{3,4}\},\ldots,\{\boldsymbol{2n-1,2n}\}$，

$\boldsymbol{n+1}$个数必有2个取自同一个组。

# 应用实例(续)

例7 设$a_1, a_2, \ldots, a_m$是正整数序列，则至少存在整数$k$和$l$使得$1 \leq k \leq l \leq m$，使得和$a_k + a_{k+1} + \cdots + a_l$是$m$的倍数.

证 设 $S_1 = a_1$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$\ldots$$

$$S_m = a_1 + a_2 + \cdots + a_m$$

$S_i$除以$m$的余数为$r_i, i = 1, 2, \ldots, m$, 若存在$r_j = 0$, 则命题得证；否则由鸽巢原理有$r_i = r_j, i < j$. 因此$S_j - S_i$被$m$整除。取$k = i + 1, l = j$, 命题得证。

# 应用实例(续)

例8 设4, 44, … , 44 … 4, 是1997个数的序列，证明存在一个数被1996整除.

证 设这1997个数分别为$a_1, a_2, \ldots, a_{1997}$, 除以1996的余数依次为$i_1, i_2, \ldots, i_{1997}$. 由鸽巢原理，必有$i_k = i_j, k < j$. 于是，$a_j - a_k$ 被1996整除，且

$$a_j - a_k = 44 \ldots 400 \ldots 0 = a_{j-k} \times 10^k.$$

其中含 $j - k$个4，$k$个0.

$1996 = 4 \times 499$，499为素数，必有$a_{j-k}$被499整除，而同时$a_{j-k}$被4整除，因此$a_{j-k}$被1996整除。

# 鸽巢原理的一般形式

鸽巢原理 设$q_1, q_2, \ldots, q_n$是给定正整数，若把$q_1 + q_2 + \cdots + q_n - n + 1$个物体放入$n$个盒子里，则或第一个盒子至少包含了$q_1$个物体，或者第二个盒子至少包含了$q_2$个物体，…, 或者第$n$个盒子至少包含了$q_n$个物体。

说明:

- 证明用反证法
- 这是存在这种配置的最小个数
- 令$q_1 = q_2, = \cdots = q_n = 2$, 则变成简单形式

推论 若$n(r-1) + 1$个物体放到$n$个盒子里，则存在一个盒子至少包含了$r$个物体. 令$q_1 = q_2, = \cdots = q_n = r$即可。

# 鸽巢原理的算术平均形式

设$m_1, m_2, \ldots, m_n$ 是$n$个正整数，如果它们的算术平均

$$\frac{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}{n} > r - 1$$

则存在 $m_i \geq r$.

证：令$m_1, m_2, \ldots, m_n$ 是放入盒子的物体数，则

$$(m_1 + m_2 + \cdots + m_n) > (r-1)n$$

$$\Leftrightarrow m_1 + m_2 + \cdots + m_n \geq (r-1)n+1$$

满足鸽巢原理条件。

# 顶函数与底函数

**顶函数(Ceiling function)，底函数(Floor function)**

定义 对于实数$x$，

顶函数$\lceil x \rceil$：大于或等于$x$的最小整数

底函数$\lfloor x \rfloor$：小于或等于$x$的最大整数

有时将底函数记作 $[x]$

性质：

(1) $x-1 < \lfloor x \rfloor \le x \le \lceil x \rceil < x+1$

(2) $\lfloor x+m \rfloor = \lfloor x \rfloor + m$, $\lceil x+m \rceil = \lceil x \rceil + m$， $m$为整数

(3) $\lceil m/2 \rceil + \lfloor m/2 \rfloor = m$ , $m$为整数

# 鸽巢原理的函数形式

设 $f: A \to B$, $|A|=m$, $|B|=n$, 若$m \geq n$, 则存在至少$\lceil m/n \rceil$个元素$a_1, a_2, \ldots, a_{\lceil m/n \rceil}$使得

$$f(a_1) = f(a_2) = \cdots = f(a_{\lceil m/n \rceil})$$

证：令$B = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$, $m_i$表示函数值为$y_i$的自变量个数，$i=1, 2, \ldots, n$.

$$\frac{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}{n} = \frac{m}{n} > \left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil - 1$$

必存在某个$m_i \geq \lceil m/n \rceil$.

# 鸽巢原理应用

例9 $a_1, a_2, \dots, a_{n^2+1}$是实数序列，证明可以选出 $n+1$ 个数的子序列$a_{k_1}, a_{k_2}, \dots, a_{k_{n+1}}$使得其为递增子序列或递减子序列.

证 假设没有长为$n+1$的递增子序列，设$m_k$表示从 $a_k$ 开始的最长递增子序列长度，则$1 \le m_k \le n$, 而 $m_1, m_2, \dots, m_{n^2+1}$中必存在$\lceil (n^2+1)/n \rceil = n+1$个$m_k$取值相等。设 $m_{k_1} = m_{k_2} = \cdots = m_{k_{n+1}} = l$. 若$a_{k_i} \le a_{k_{i+1}}$, 则从前者开始的递增子序列长度为$l+1$, 矛盾。$a_{k_1} > a_{k_2} > \cdots > a_{k_{n+1}}$是长为 $n+1$的递减子序列.

# Ramsey定理

- Ramsey定理的简单形式
  - 两个简单命题
  - Ramsey定理
  - 小Ramsey数的有关结果
  - Ramsey数的性质
  - Ramsey定理的推广
- Ramsey定理的一般形式
  - Ramsey定理
  - 关于一般Ramsey数的结果
- Ramsey定理的应用

# Ramsey定理的简单形式

两个简单的命题

命题1 用红蓝两色涂色$K_6$的边，则或有一个红色$K_3$，或有一个蓝色$K_3$.

$R(3,3) = 6$

任意六个人中要么至少三个人认识，要么至少三个不认识。

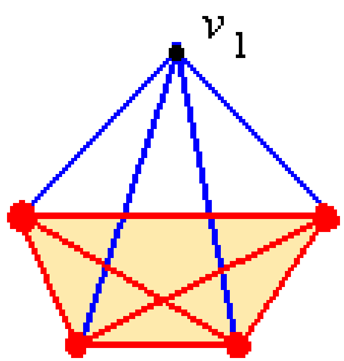
命题2 用红蓝两色涂色 $K_9$ 的边，则或有一个红色 $K_4$，或有一个蓝色$K_3$.

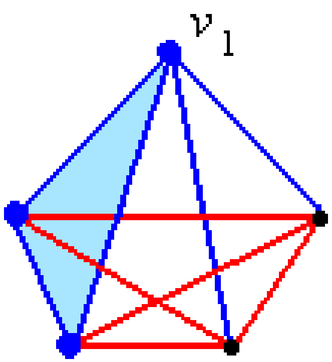
# 命题2的证明

用红蓝两色涂色$K_9$的边，则或有一个红色$K_4$，或有一个蓝色$K_3$.

证：断言：存在一个顶点至少关联4条蓝边或者6条红边. 否则蓝边数$< 4$, 红边数$< 6$，则蓝边总数至多$\lfloor (3 \times 9) / 2 \rfloor = 13$，红边总数至多$\lfloor (5 \times 9) / 2 \rfloor = 22$，总共35条边，与$K_9$边数为36矛盾。

设$v_1$关联4条蓝边，若对应4个顶点没有蓝边，则构成红$K_4$；有1条蓝边，则构成蓝$K_3$ .

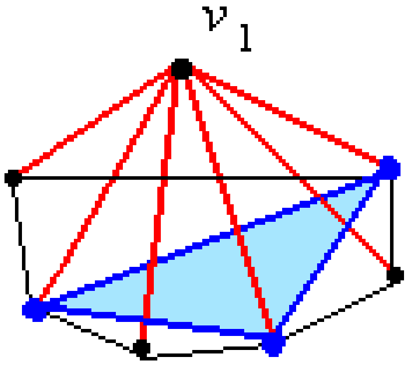


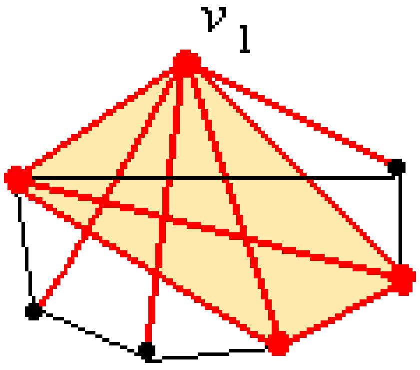



# 命题2的证明

用红蓝两色涂色$K_9$的边，则或有一个红色$K_4$，或有一个蓝色$K_3$.

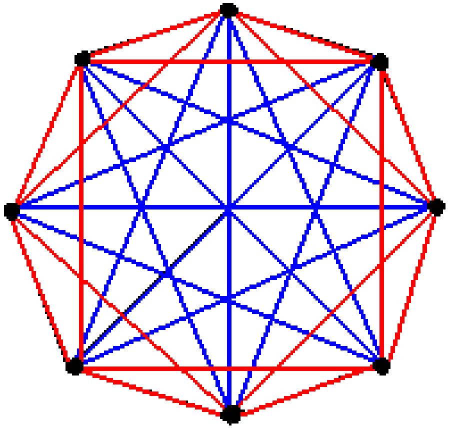
设$v_1$关联6条红边，对应6个顶点必有蓝$K_3$或红$K_3$.




对于$K_8$，存在一种涂色方案，既没有蓝色三角形，也没有红色完全四边形.

$R(3,4)=9.$



# Ramsey(1903–1930)定理

**定理** 设 $p, q$为正整数，$p, q \geq 2$，则存在最小正整数 $R(p, q)$，使得当$n \geq R(p, q)$时，用红蓝两色涂色$K_n$的边，则或存在一个蓝色的$K_p$，或存在一个红色的 $K_q$.

核心思想是：“任何一个足够大的结构中必定包含一个给定大小的规则子结构”

**证明思路：** 归纳法

归纳基础 $R(p, 2) \leq p$, $R(2, q) \leq q$,

归纳步骤 $R(p-1, q)$，$R(p, q-1)$ 存在

$$\Rightarrow R(p,q) \leq R(p-1, q) + R(p, q-1)$$

# 证明

证：采用数学归纳法。

设$p$为任意正整数，$q=2$。用红蓝两色涂色$K_p$的边：

若没有一条红边，则存在一个蓝色的完全$p$边形；

若有一条红边，则构成一个完全红2边形，因此

$R(p,2)\leq p$。同理可证 $R(2,q)\leq q$。

假设对正整数 $p',q'$命题为真，其中$p'\leq p,q'\leq q,p'+q'<p+q$，则$R(p-1,q),R(p,q-1)$ 存在.

令

$$n\geq R(p-1,q)+R(p,q-1).$$

# 证明

用红、蓝两色涂色$K_n$的边，则$v_1$或关联$R(p-1,q)$条蓝边或关联$R(p,q-1)$条红边。否则，$v_1$至多关联$R(p-1,q)-1+R(p,q-1)-1=R(p-1,q)+R(p,q-1)-2$条边，与$n \geq R(p-1,q)+R(p,q-1)$矛盾。

**Case 1.** $v_1$关联 $R(p-1,q)$ 条蓝边；

**Case 2.** $v_1$关联 $R(p,q-1)$ 条红边。

对于case 1，由归纳假设这$R(p-1,q)$个顶点中或含有一个蓝色的完全 $p-1$ 边形，或含有一个红色的完全$q$边形。

# 证明

若为前者，则这个$p-1$边形加上$v_1$构成一个蓝色的完全$p$边形，命题为真；若为后者，命题也为真。

对于case 2可以类似分析。

因此，

$$R(p,q) \leq R(p-1,q) + R(p,q-1)，p \geq 3，q \geq 3$$

定义 对于任意给定的两个正整数$a$和$b$，$a,b \geq 2$，最小的正整数$R(a,b)$，使得当$n \geq R(a,b)$时，对$K_n$任意进行红、蓝两种着色，$K_n$中均有蓝色$K_a$或红色$K_b$，称$R(a,b)$为Ramsey数。

# 小Ramsey数的值

http://en.wikipedia.org/wiki/Ramsey's_theorem#Ramsey_numbers

| p \ q | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 3 | | 6 | 9 | 14 | 18 | 23 | 28 | 36 | 40-42 (43) |
| 4 | | | 18 | 25 | 36-41 | 49-61 | (56) 59-84 | 73-115 | 92-149 |
| 5 | | | | 43-48(49) | 58-87 | 80-143 | 101-216 | (126)133-316 | (144)149-442 |
| 6 | | | | | 102-165 | (113)115-298 | (132)134-495 | (169)183-780 | (179)204-1171 |
| 7 | | | | | | 205-540 | 217-1031 | (241)252-1713 | (289)292-2826 |
| 8 | | | | | | | 282-1870 | (317)329-3583 | (331)343-6090 |
| 9 | | | | | | | | 565-6588 | 581-12677 |
| 10 | | | | | | | | | 798-23556 |

# Ramsey数的性质

(1) $R(a, b)=R(b, a)$, $R(a, 2)=R(2, a)=a$

(2) $R(a, b)\leq R(a-1, b) + R(a, b-1)$, $a\geq 3$， $b\geq 3$.

性质 (2) 给出上界

$$9 = R(3,4) \leq R(2,4) + R(3,3) = 4 + 6 = 10$$

$$18 = R(4,4) \leq R(3,4) + R(4,3) = 9 + 9 = 18$$

$$25 = R(4,5) \leq R(3,5) + R(4,4) = 14 + 18 = 32$$

$$R(3,10) \leq R(2,10) + R(3,9) = 10 + 36 = 46$$

$$R(3,10) \leq 43$$

# Ramsey数的性质

推论　对任意正整数$a \geq 2$，$b \geq 2$，有

$$R(a,b) \leq \binom{a+b-2}{a-1} = \frac{(a+b-2)!}{(a-1)!(b-1)!}$$

证：对$a+b$作归纳。当$a+b \leq 5$时，$a=2$或$b=2$，由前面定理知推论成立。假设对一切满足$5 \leq a+b < m+n$的$a, b$推论成立，从而有

$$R(m,n) \leq R(m,n-1) + R(m-1,n)$$

$$\leq \binom{m+n-3}{m-1} + \binom{m+n-3}{m-2} = \binom{m+n-2}{m-1}$$

所以，对任意的正整数$a \geq 2$，$b \geq 2$，推论均成立。

# Ramsey定理的推广

(1) $R(p,q)$的图表示

$K_n$的顶点集$V$

$K_n$的边集$E$

用2色涂色$K_n$的边

存在蓝色完全$p$边形

存在红色完全$q$边形

$R(p,q)$的集合表述:

集合$S$

$S$的2元子集的集合$T$

将$T$划分成$E_1, E_2$

存在$S$的$p$子集其所有2元子集$\in E_1$

存在$S$的$q$子集其所有2元子集$\in E_2$

集合表述具有更强的表达能力!

(2) 将2元子集推广到$r$元子集

(3) 将$T$划分成 $E_1, E_2, \dots, E_k$

# 推广的Ramsey定理

定理2 对于任意给定的正整数 $p,q,r,(p,q\geq r)$，存在一个最小的正整数 $R(p,q;r)$，使得当$|S|\geq R(p,q;r)$时，将$S$的$r$元子集族任意划分成 $E_1,E_2$，则：

或者$S$有 $p$元子集$A_1$，$A_1$的所有$r$元子集属于$E_1$;

或者$S$有$q$元子集 $A_2$，$A_2$的所有$r$元子集属于$E_2$.

# 推广的Ramsey定理

**定理3** 设 $r, k \geq 1, q_i \geq r, i = 1, 2, \ldots, k$, 是给定正整数，则存在一个最小的正整数 $R(q_1, q_2, \ldots, q_k; r)$，使得当 $n \geq R(q_1, q_2, \ldots, q_k; r)$时, 将 $n$元集 $S$ 的所有 $r$元子集划分成 $k$ 个子集族 $E_1, E_2, \ldots, E_k$，那么

存在$S$的$q_1$元子集$A_1$, 其所有$r$元子集属于$E_1$;

或者存在$S$的$q_2$元子集$A_2$，$A_2$的所有$r$元子集属于$E_2$;

…

或者存在$S$的$q_k$元子集$A_k$, 其所有$r$元子集属于$E_k$.

# 关于一般Ramsey数的说明

$R(q_1, q_2, \dots, q_k; r)$

**(1) 条件：$r, k \geq 1, q_i \geq r, i = 1, 2, \dots, k$, 都是给定正整数**

**(2) 当 $r = 2$时，可以简记为 $R(q_1, q_2, \dots, q_k)$**

**(3) Ramsey定理断定Ramsey数的存在性.**

**Ramsey数的确定是一个很困难的问题.**

**(4) $r = 1$, 是鸽巢原理,**

$$R(q_1, q_2 \dots, q_k; 1) = q_1 + q_2 + \cdots + q_k - k + 1$$

**$r = 2, k = 2$, 是简单的Ramsey定理。**

**结果：9个(不含$q = 2$)Ramsey数的精确值，部分上界、下界 $r = 2, k = 3$，只有一个精确值$R(3, 3, 3) = 17$.**

# 几个Ramsey数的上下界

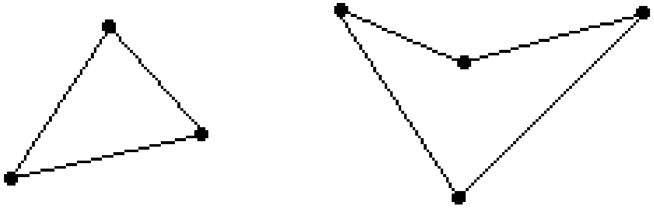
| | |
|---|---|
| $51 \le R(3,3,3,3) \le 62$ | $65 \to 62$ |
| $162 \le R(3,3,3,3,3) \le 307$ | $322 \to 307$ |
| $538 \le R(3,3,3,3,3,3) \le 1838$ | $500 \to 538$ |
| $30 \le R(3,3,4) \le 31$ | $32 \to 31$ |
| $45 \le R(3,3,5) \le 57$ | $59 \to 57$ |
| $55 \le R(3,4,4) \le 79$ | $81 \to 79$ |
| $93 \le R(3,3,3,4) \le 153$ | $84 \to 93$, $159 \to 153$ |
| $128 \le R(4,4,4) \le 236$ | $242 \to 236$ |

# Ramsey定理的应用

例10 对于任意$m\geq3$, $m\in Z^+$, 存在正整数$N(m)$，使得当$n\geq N(m)$时，若平面的$n$个点没有三点共线，则其中总有$m$个点构成一个凸 $m$ 边形的顶点。

实例： $m=3$, $N(m)=N(3)=3$,

$m=4$, $N(m)=N(4)=5$,



需证：$N(m)\leq R(5, m; 4)$

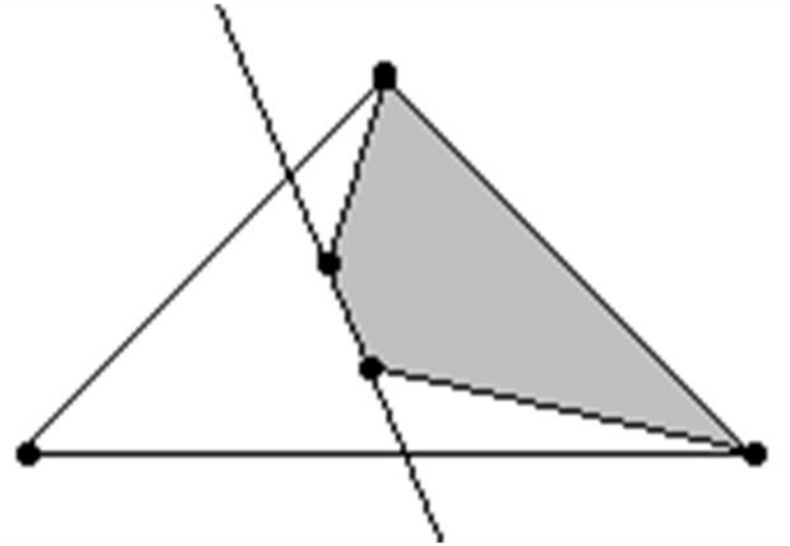
引理1 平面上任给5点，没有3点共线，则必有4点是凸4边形的顶点。

引理2 平面上$m$个点，若没有3点共线且任4点都是凸4边形的顶点，则这$m$个点构成凸$m$边形的顶点。

# 引理1的证明

引理1 平面上任给5点，没有3点共线，则必有4点是凸4边形的顶点。

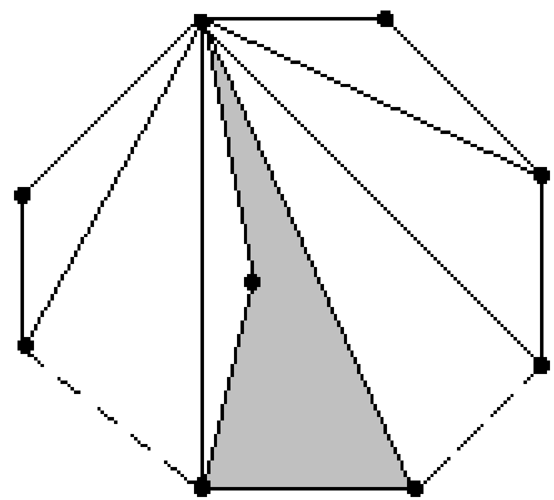
证 做最大的凸多边形$T$。如果$T$是4边形或5边形，则命题为真。如果为3多边形，则3边形内存在2点，与过这2点的直线一侧的另外2点构成凸4边形。



# 引理2的证明

引理2 平面上$m$个点，若没有3点共线且任4点都是凸4边形的顶点，则这$m$个点构成凸$m$边形的顶点。

证：假设最大的凸多边形是$p$边形，$p<m$. 则必有点落入这个多边形内部. 将这个多边形划分成三角形，必有点落入某个三角形，这个三角形的顶点与内部的点构成凹4边形，与已知矛盾。



# 命题证明

任意 $m \geq 3$，存在正整数 $N(m)$，使得当 $n \geq N(m)$ 时，若平面的 $n$ 个点没有三点共线，则其中总有$m$个点构成一个凸 $m$ 边形的顶点

证 不妨设$m>3$，令$n \geq R(5, m; 4)$，$S$为$n$个点的集合。将$S$的所有的4元子集划分成两个子集族。如果构成凹4边形，放到$T_1$，如果构成凸4边形，则放到$T_2$.

根据Ramsey数定义，或有5个点，其所有4元子集都构成凹4边形；或有$m$个点，其所有的4子集都构成凸4边形。

若为前者，与引理1矛盾。若为后者，根据引理2，这$m$个点构成凸$m$边形的顶点。

# 组合存在性定理的应用

例11 最少连接缆线问题

条件：15台工作站和10台服务器，每个工作站可以用一条电缆直接连到某个服务器，同一时刻每个服务器只能接受一个工作站的访问。

目标：任何时刻，任意选10台工作站，保证这组工作站可以同时访问不同的服务器。

问题：达到这个目标需要的最少缆线数目$N$是多少？

方案1：每个工作站都连到每个服务器，需要

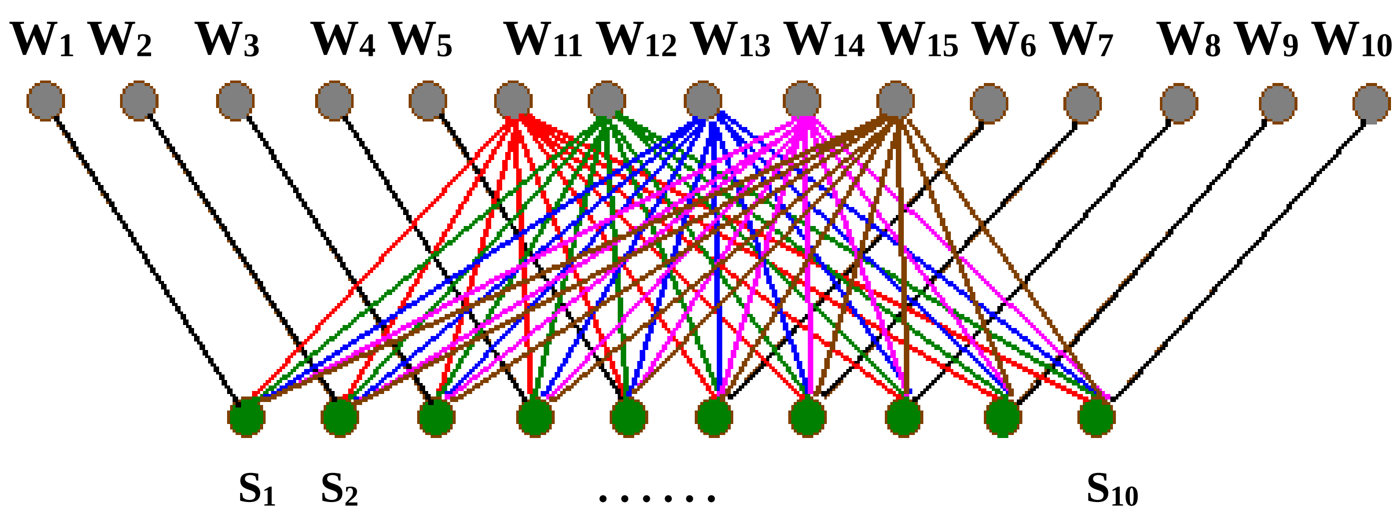
$10\times 15=150$，缆线数$N\le 150$.

# 例11的解决方案

方案2 将工作站标记为$W_1, W_2, \ldots, W_{15}$, 服务器标记为$S_1, S_2, \ldots, S_{10}$.

对于$k$=1,2,…,10，我们连接$W_k$到$S_k$, 剩下5个工作站的每一个都连接到10个服务器。

总共60条直接连线。



# 方案的最优性

满足目标要求：任取10个工作站. 如果恰好为$W_1$, $W_2$,…, $W_{10}$，$W_i$访问$S_i$，$i$=1,…10, 满足要求; 如果$W_1$-$W_{10}$中只选中$k$个工作站，不妨设为$W_1$-$W_k$, 剩下的10–$k$个选自$W_{11}$-$W_{15}$. 那么$W_i$访问$S_i$，$i$=1,…,$k$. 还剩下10–$k$个服务器空闲，恰好分配给10–$k$个工作站.

结论：$N \le 60$.

证明 $N \ge 60$.

假设在工作站和服务器之间缆线至多59条，那么某个服务器将至多连接$\lfloor 59/10 \rfloor = 5$工作站。若选择剩下的10个工作站作为一组，则只有9个空闲的服务器，必有2个工作站连接同一服务器，与题目要求矛盾。

# 例12 电路板排列问题

电路板集合：$\boldsymbol{B} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots, \boldsymbol{n}\}$

连接块集合：$\boldsymbol{L} = \{\boldsymbol{N}_{\mathbf{1}}, \boldsymbol{N}_{\mathbf{2}}, \boldsymbol{N}_{\boldsymbol{i}}, \ldots, \boldsymbol{N}_{\boldsymbol{m}}\}$

$\boldsymbol{N}_{\boldsymbol{j}} \subseteq \boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{N}_{\boldsymbol{j}}$中所有电路板用一根导线连接

排列：$\boldsymbol{X} =< \boldsymbol{x}_{\mathbf{1}}, \boldsymbol{x}_{\mathbf{2}}, \ldots, \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{n}} >$

排列密度**density**($X$)：跨越相邻电路板插槽的最大连线数

求具有最小排列密度**density($X$)**的排列。

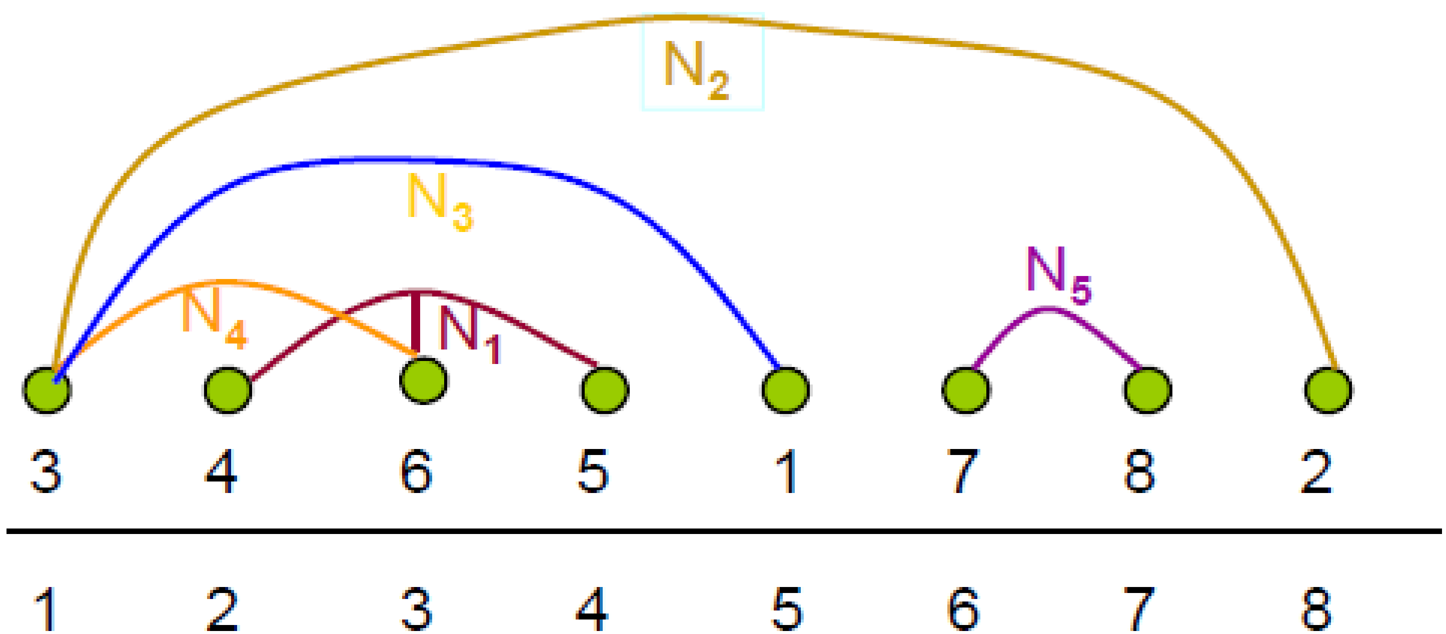
# 实例：方案1

$B = \{1, 2, \ldots, 8\}, L = \{N_1, N_2, \ldots, N_5\},$

$N_1 = \{4, 5, 6\}, N_2 = \{2, 3\}, N_3 = \{1, 3\},$

$N_4 = \{3, 6\}, N_5 = \{7, 8\}$

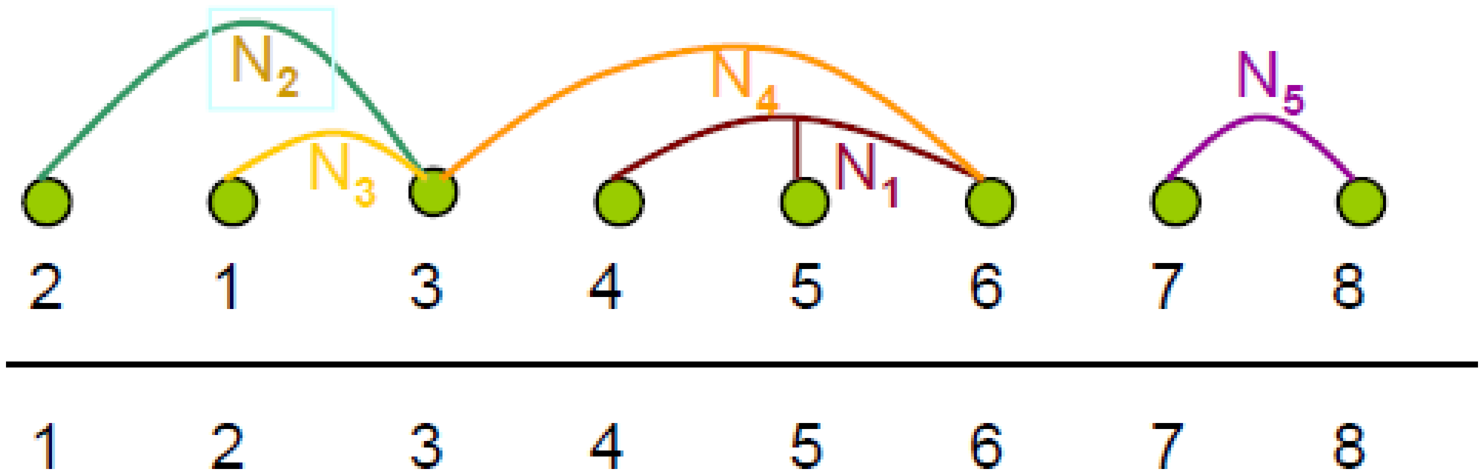
排列$X_2 =< 3, 4, 6, 5, 1, 7, 8, 2 >$, $\mathbf{density}(X_2) = 4$



# 方案2

$B=\{1, 2, \dots, 8\}, L=\{N_1, N_2, \dots, N_5\},$
$N_1=\{4,5,6\}, N_2=\{2,3\}, N_3=\{1,3\}, N_4=\{3,6\}, N_5=\{7,8\}$

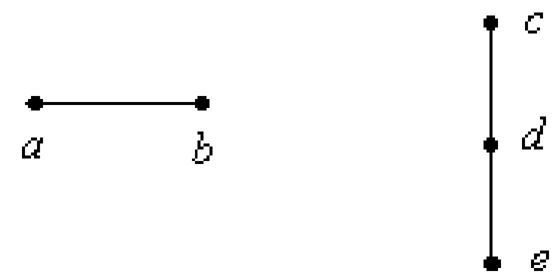
排列$X_1 =< 2, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8 >$, $\text{density}(X_1) = 2$




因为3出现在3个连接块中，以横跨电路板2-3为一边，3-4为另一边。根据鸽巢原理，无论怎样排列，都存在某一边至少有2条线，因此$\text{density}(X) \geq 2$，这是一个最优方案。

# 例13 通信抗噪音编码问题

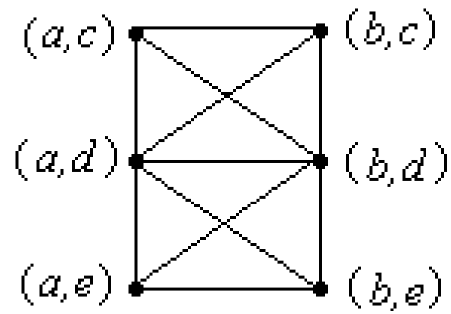
例13 通信噪音干扰




混淆图$G=<V,E>$，$V$为有穷字符集，

$\{u,v\} \in E \Leftrightarrow u$和$v$易混淆.

$\beta_0(G)$：点独立数，最大不混淆字符集大小




编码是字符串的集合

$xy$与$uv$混淆$\Leftrightarrow$ $x$与$u$混淆且$y$与$v$混淆

$\vee\, x = u$且$y$与$v$混淆

$\vee\, x$与$u$混淆且$y = v$

$V_1 \times V_2$的混淆图是两个混淆图$G$与$H$的正规积$G \cdot H$

定理 $\beta_0(G \cdot H) \leq R(\beta_0(G)+1, \beta_0(H)+1)-1$

实例：设$|G|=5, \beta_0(G)=3$, 则$\beta_0(G \cdot G) \leq R(\beta_0(G)+1, \beta_0(G)+1)-1$

$= R(4,4)-1 = 17$

# Ramsey定理的应用和推广

- 应用
  - 数论、代数、几何、拓扑学、集合论、逻辑等；
  - 信息论、理论计算机科学
- 推广（超图、有向图、无限…）
- V. Rosta, Ramsey theory applications, Electronic Journal of Combinatorics, 2004.
- Applications of Ramsey Theory to Computer Science: http://www.cs.umd.edu/~gasarch/ramsey/ramsey.html