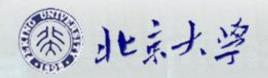
课程总结



考试范围

数学基础:

估计函数的阶、递推方程求解、求和技术

算法设计技术:

分治策略、动态规划、贪心法、回溯与分支限界、线性规划、平摊分析、网络流、近似算法、随机算法、在线算法, 理解给定例题的算法并能简单应用

算法分析技术:

能估计简单伪码程序的基本运算次数(最坏或平均)简单问题的计算复杂度估计

计算复杂性理论:

NP完全理论的基本概念、几个基本NP完全问题的定义、简单的归约

算法设计技术解题说明

北京大学

指明所用的设计技术,用一段简单文字说明算法设计思想. 如果题目没有要求,可以不写伪码.

- 使用分治策略,说明划分子问题的方法,递归计算的 结束条件,给出最坏情况下的时间复杂度的递推方程 及初值并求解.
- 使用动态规划,需要说明子问题边界、优化函数及其 迭代计算的递推方程,并根据需要给出标记函数及解 的追踪方法,给出最坏情况下的时间复杂度估计.
- 使用回溯技术需要说明搜索树、解向量、判定是否回 溯的约束条件等,给出最坏情况下时间复杂度估计.
- 熟悉网络流、线性规划的基本模型及主要算法,并能简单应用

函数的阶

• 阶的概念

$$f(n)=O(g(n))$$

$$f(n)=O(g(n)) \Leftrightarrow f(n)=O(g(n)) \land g(n)=O(f(n))$$

• 阶的高低

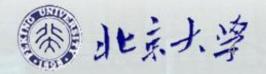
指数级: 2ⁿ, 3ⁿ, n!, ...

多项式级: $n, n^2, n \log n, n^{1/2}, \dots$

logn的多项式级: logn, log^2n ,...

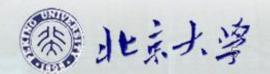
• 注意:

阶反映的是大的 $n(n>n_0)$ 的情况,可以忽略有限项. 连续趋势,不允许在不同的值之间抖动.





- 迭代归纳法——求和技术
- 递归树——树的生成,各结点工作量的求和方法
- 主定理——条件判定和一些常用方程的解 熟悉常用递推方程的解



常用的求和公式

• 有限项等比级数的求和

$$a_1(1+q+q^2+...+q^k) = \frac{a_1(1-q^{k+1})}{1-q}$$

• 无限等比序列的收敛值

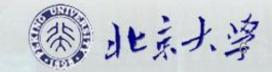
$$a_1(1+q+q^2+...) = \frac{a_1}{1-q}, \quad q < 1$$

• 调和级数的估计值

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \dots = O(\log n)$$

• 对数函数和的估计值

$$\log 1 + \log 2 + ... + \log n = O(n \log n)$$



主定理

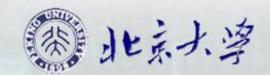
设 $a \ge 1, b > 1$ 为常数,f(n)为函数,T(n)为非负整数 T(n) = aT(n/b) + f(n),

则有以下结果:

1.
$$f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon}), \varepsilon > 0, \quad \text{MLT}(n) = \Theta(n^{\log_b a})$$

3.
$$f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon}), \varepsilon > 0$$
, 且对于某个常数 $c < 1$ 和 所有的充分大的 n 有 $af(n/b) \le cf(n)$, 那么 $T(n) = \Theta(f(n))$

注意: case3. 不存在 $\varepsilon > 0$,使得 $n \log n = \Omega(n^{1+\varepsilon})$



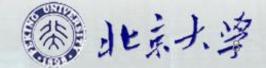
重要结果

$$f(n) = af(\frac{n}{b}) + d(n)$$

当d(n)为常数时

$$f(n) = \begin{cases} O(n^{\log_b a}) & a \neq 1 \\ O(\log n) & a = 1 \end{cases}$$

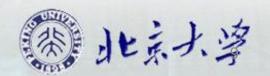
$$f(n) = \begin{cases} O(n) & a < b \\ O(n \log n) & a = b \\ O(n^{\log_b a}) & a > b \end{cases}$$



算法设计技术

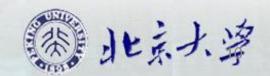
- 分治策略
- 动态规划
- 贪心法
- 回溯和分支限界
- 线性规划模型
- 平摊分析

- 网络流模型
- 近似算法
- 随机算法
- 在线算法



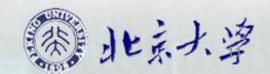
分治策略

- 分治策略的适用条件
- 子问题的划分**
 - 均衡划分原则
 - 子问题类型与原问题相同
- 递归算法分析——递推方程**
- 减少子问题的技术(了解)
- 典型问题: 搜索、排序、选择



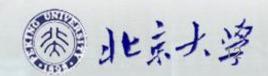
动态规划

- 适用条件
 - 优化问题、多阶段决策、优化原则、子问题重叠
- 关于目标函数的递推方程**
- 自底向上的计算
- 表格存储
- 解的追踪
- 典型问题:矩阵链相乘、最长公共子序列、背包、 最大子段和、图像压缩、最优二分检索树等



贪心法

- 适用条件
 - 组合优化、多步判断、贪心选择性质
- 局部优化策略的确定
- 贪心选择性质的证明**
- 近似解的估计(了解)
- 典型问题:活动选择、最优装载、最小延迟调度、 最优前缀码、最小生成树、单源最短路径

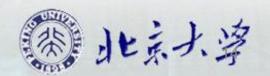


回溯和分支限界

- 适用条件
 - 搜索问题、多步判断、多米诺条件
- 解向量的确定
- 分支条件的确定**
 - 约束条件
 - 代价函数的确定(了解)
- 搜索树节点数的估计
 - Monte Carlo方法
- 典型问题: n后放置、背包问题、货郎问题、最大团问题、圆排列问题等

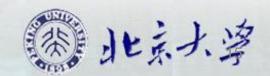
线性规划

- 线性规划模型
- 标准形
- 单纯形法
- 对偶性
- 整数线性规划的分支限界算法



平摊分析

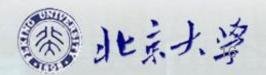
- 平摊分析的概念
- 平摊分析的三种方法
 - 聚集分析
 - 记账法
 - 势能法
- 动态表及其上的平摊分析



网络流

网络流:

- 流网络的建模: 源点s与汇点t、流f满足的容量条件 与守恒条件、最大s-t 流
- 最大流算法及其时间复杂度
- 最大流-最小割定理
- 简单应用



近似算法

- 近似算法及其近似比
- 多机调度问题
 - 贪心的近似算法
 - 改进的贪心近似算法
- 货郎问题
 - 最邻近法
 - 最小生成树法
 - 最小权匹配法
- 背包问题
 - 一个简单的贪心算法
 - 多项式时间近似方案
 - 伪多项式时间算法与完全多项式时间近似方案

北京大学



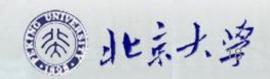
Las Vegas 型随机算法

随机快速排序 随机选择 随机 *n* 后放置

Monte Carlo型随机算法

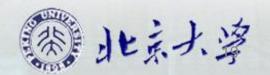
主元素测试 串相等测试 模式匹配 素数测试

随机算法的分类与局限性



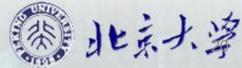
在线算法

- K服务问题
- 竞争比
- LRU算法
- K服务问题竞争比的下界



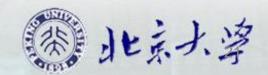
算法分析技术

- 评价算法的因素
 - 正确性、工作量、占用空间、简单性、最优性
- 算法的两种复杂度
 - 最坏情况下复杂度、平均情况下复杂度
- 问题下界的分析技术
 - 直接计数工作量
 - 决策树
 - 根据算法构造最坏情况下的输入
 - 归约
- 检索、排序、选择问题的下界分析结果



计算复杂性理论

- P、NP、NPC、NP-hard 的基本概念
- · 基本NPC问题的定义: SAT、HC、TSP、VC、独立集、团、子集和、背包、双机调度
- · NPC问题的证明
 - (1) 证明*∏*∈NP;
 - (2) 找到一个已知的NP完全问题 Π' , 并证明 $\Pi' \leq_p \Pi$.



期末考试

- 期末考试占总成绩的40%, 小班成绩占60%
- 时间: 6月8日周一上午8:30-10:30
- 形式: 在线考试(具体考试细节另行通知)
- 带学生证(如学生证丢失,可用身份证代替)
- 开卷考试
- 答疑: <u>发邮件至ttjiang@pku.edu.cn</u>

