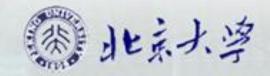
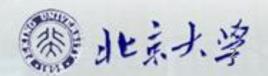
## 单元1.6 基本的集合恒等式

第一编 集合论 第一章 集合 1.4 基本的集合恒等式



#### 内容提要

- (1) 集合恒等式
  - -13组最基本的集合恒等式
- (2) 半形式化方法
  - 推导集合等式和包含式



## 集合恒等式(①~④)

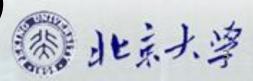
设E是全集,A,B,C为E的任意子集。

- ① 幂等律 A∪A=A, A∩A=A
- ② 交换律 AUB=BUA, AMB=BMA
- ③ 结合律 (A∪B)∪C = A∪(B∪C)

 $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ 

④ 分配律 A∪(B∩C) = (A∪B)∩(A∪C)

 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ 



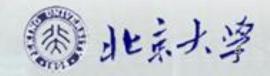
## 集合恒等式 (5~6)

⑤ 德•摩根律

$$^{\sim}(A \cap B) = ^{\sim}A \cup ^{\sim}B$$

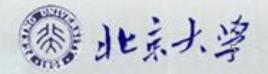
$$E-(A\cap B) = (E-A)\cup(E-B)$$

⑥ 吸收律 A∪(A∩B) = A,A∩(A∪B) = A



# 基本的等值式(⑦~(13))

⑦ 零律 
$$A \cup E = E$$
,  $A \cap \emptyset = \emptyset$ 



#### 推广到集族的情况

设 $\{A_{\alpha}\}_{\alpha \in S}$ 为集族,B为一集合:

$$B \cup (\bigcap \{A_{\alpha}\}_{\alpha \in S}) = \bigcap_{\alpha \in S} (B \cup A_{\alpha})$$

$$B \cap (\bigcup \{A_{\alpha}\}_{\alpha \in S}) = \bigcup_{\alpha \in S}^{\alpha \in S} (B \cap A_{\alpha})$$

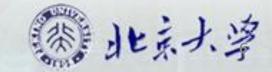
#### 德●摩根律

$$\sim (\bigcup \{A_{\alpha}\}_{\alpha \in S}) = \bigcap (\sim A_{\alpha})$$

$$\sim (\bigcap \{A_{\alpha}\}_{\alpha \in S}) = \bigcup_{\alpha \in S}^{\alpha \in S} (\sim A_{\alpha})$$

$$B - (\bigcup \{A_{\alpha}\}_{\alpha \in S}) = \bigcap_{\alpha \in S} (B - A_{\alpha})$$

$$B - (\bigcap \{A_{\alpha}\}_{\alpha \in S}) = \bigcup_{\alpha \in S}^{\alpha \in S} (B - A_{\alpha})$$



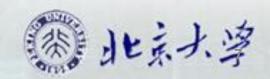
#### 例1.3

由定义证明下面的恒等式:

(1) 分配律: A∪(B∩C) = (A∪B)∩(A∪C)

(2) 零律: A∩Ø = Ø

(3) 排中律: A∪~A = E

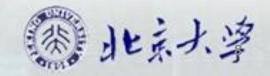


### 分配律的证明

(1) 对于任意的x,

 $x \in A \cup (B \cap C)$ 

- $\Leftrightarrow x \in A \lor x \in (B \cap C)$
- $\Leftrightarrow x \in A \lor (x \in B \land x \in C)$
- $\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \land x \in (A \cup C) \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C),$
- 因而,A∪(B∩C)=(A∪B)∩(A∪C)。 □



# 零律的证明

(2) 对于任意的x,

$$x \in A \cap \emptyset$$

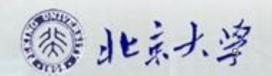
$$\Leftrightarrow x \in A \land x \in \emptyset$$

$$\Leftrightarrow x \in A \land 0$$

$$\Leftrightarrow 0$$

(命题逻辑零律)

$$\Leftrightarrow x \in \emptyset$$
,



### 排中律的证明

(3) 对于任意的x,

 $x \in A \cup A$ 

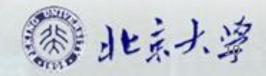
 $\Leftrightarrow x \in A \lor x \in A$ 

 $\Leftrightarrow x \in A \lor x \notin A$ 

 $\Leftrightarrow x \in A \lor \neg x \in A$ 

⇔1 (命题逻辑排中律)

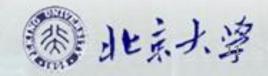
**⇔ x∈E**, 因而,A∪~A = E。□



#### 例1.8

设4,3为集族,试证明:

- (1) 若 A⊆B ,则 ∪A⊆∪B;
- (2) 若  $A \in B$  ,则  $A \subseteq \cup B$  ;
- (3) 若  $A \neq \emptyset$ 且  $A \subseteq B$  ,则  $\cap B \subseteq \cap A$  ;
- (4) 若  $A \in B$  ,则  $\cap B \subseteq A$  ;
- (5) 若 *A*≠Ø,则 ∩*A*⊆∪*A*。



## 集族性质(1)(2)的证明

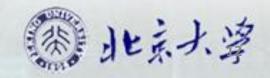
(1) 对于任意的x,

$$x \in \bigcup A$$

- $\Leftrightarrow \exists A(A \in \mathcal{A} \land x \in A)$
- ⇒  $\exists A(A \in \mathcal{B} \land x \in A)$  (已知 $\mathcal{A}\subseteq \mathcal{B}$ )
- $\Leftrightarrow$  x  $\in$   $\cup$   $\mathcal{B}$

所以, $\cup A \subseteq \cup B$ 。

(2) 若  $A \in B$ ,由广义并集定义可知  $A \subseteq \bigcup B$ 。



# 集族性质(3)的证明

(3) 由A≠Ø,知B≠Ø,故∩A与∩B均有意义。 对于任意的x,

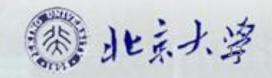
$$x \in \cap \mathcal{B}$$

$$\Leftrightarrow \forall y (y \in \mathcal{B} \rightarrow x \in y)$$

$$\Rightarrow \forall y (y \in \mathcal{A} \to x \in y) \qquad (\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B})$$

$$\Leftrightarrow x \in \cap A$$

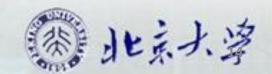
所以,
$$\cap \mathcal{B} \subseteq \cap \mathcal{A}$$
。



#### 例1.9

集合幂集运算具有下列性质:

- (1) A⊆B 当且仅当 P(A)⊆P(B);
- (2)  $P(A-B) \subseteq (P(A)-P(B)) \cup \{\emptyset\}$ .



## 幂集性质(1)的证明

(1) 先证必要性。

对于任意的x,

$$x \in P(A)$$

$$\Leftrightarrow x \subset A$$

$$\Rightarrow x \subseteq B \quad (A \subseteq B)$$

$$\Leftrightarrow x \in P(B)$$
,

再证充分性。

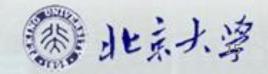
对于任意的y,

$$\Leftrightarrow \{y\} \in P(A)$$

$$\Rightarrow \{y\} \in P(B) (P(A) \subseteq P(B))$$

$$\Leftrightarrow$$
 y  $\in$  B

所以,A⊆B。



## 幂集性质(2)的证明

对于任意的集合x,

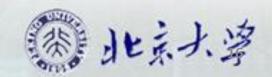
若x=Ø,x∈P(A)∪P(B) 且x∈(P(A)-P(B))∪{Ø}。若x≠Ø,x∈P(A-B)

 $\Leftrightarrow x \subseteq A - B \Rightarrow x \subseteq A \land x \not\subseteq B$ 

 $\Leftrightarrow x \in P(A) \land x \notin P(B)$ 

 $\Leftrightarrow x \in (P(A)-P(B))$ 

综上所述,可知 P(A-B) ⊆ (P(A)-P(B))∪{Ø}。



#### 小结

- (1) 集合恒等式
  - 13组最基本的集合恒等式
- (2) 半形式化方法
  - 推导集合等式和包含式

