拓展资源-序数、集合论公理、集合论悖论

第一编 集合论 第6章 序数

北京大学

内容提要

- 序数
- 集合论公理
- 集合论悖论
- 3x+1猜想

良序

- 良序:任何非空子集都有最小元的偏序
- 良序集的计数过程: $<A,<>$

$$t_0 = \min(A),$$

$$t_1 = \min(A-\{t_0\}),$$

$$t_2 = \min(A-\{t_0,t_1\}),$$

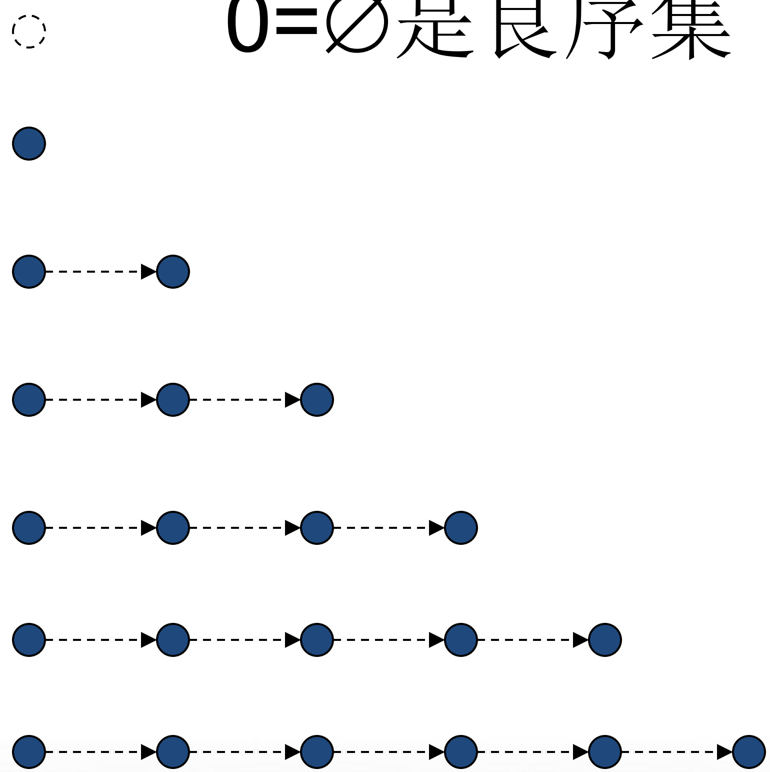
$$\ldots\ldots$$

$$t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < \ldots$$

序数: 0, 1, 2, …

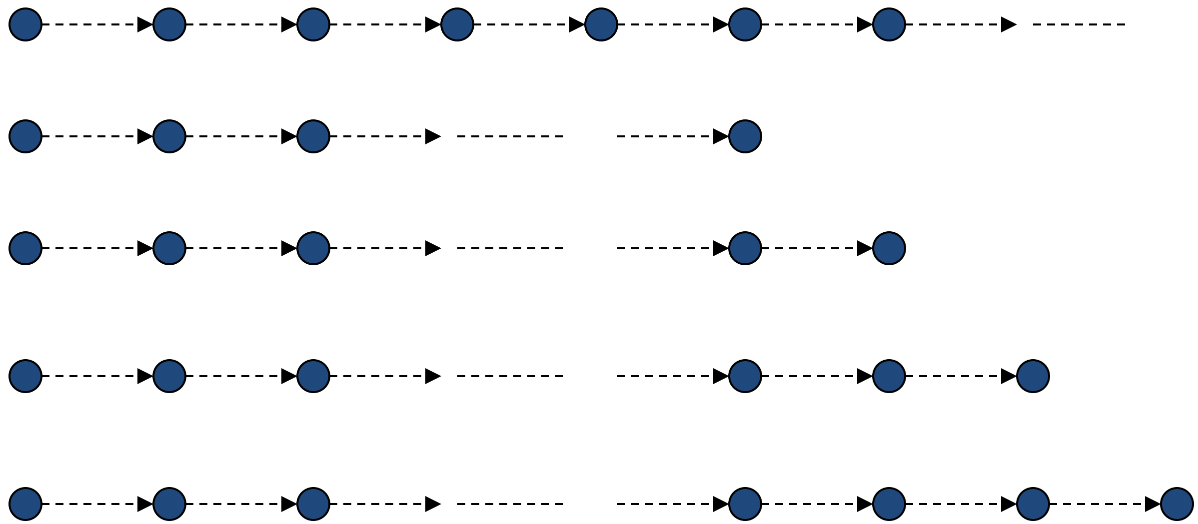
0=∅是良序集

- 0
- 1
- 2
- 3
- 4
- 5
- 6
- …

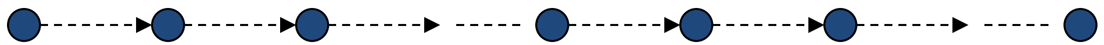
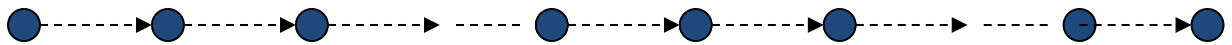
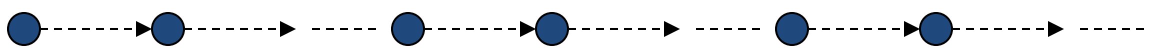
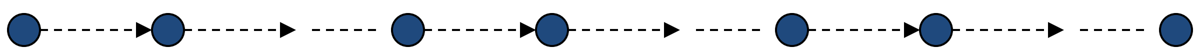


序数: ω, ω+1, ω+2, …

- ω
- $\omega+1$
- $\omega+2$
- $\omega+3$
- $\omega+4$
- ……

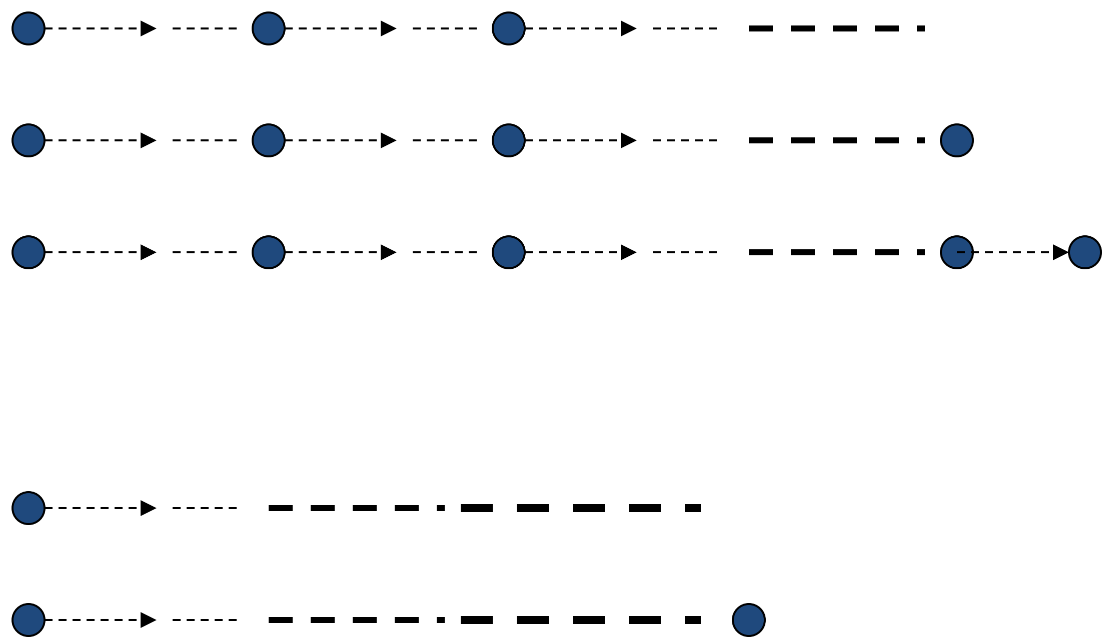


序数: 2ω, …, 3ω, …

- $\omega+\omega=2\omega$ 
- $2\omega+1$ 
- $2\omega+2$ 
- …
- 3ω 
- $3\omega+1$ 
- …

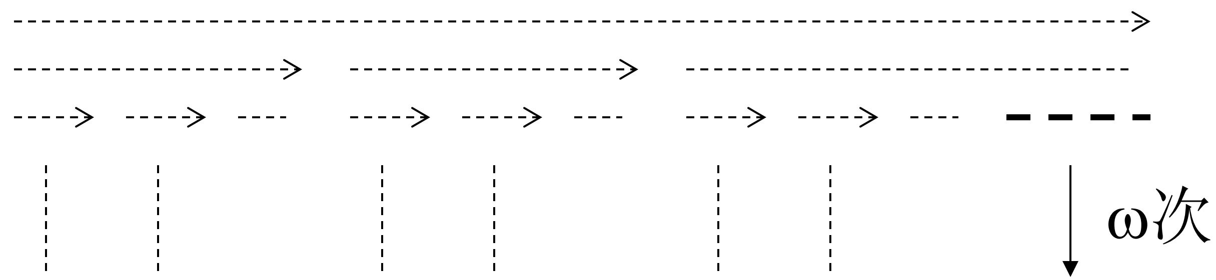
序数: ω^2, ω^2+1, …, ω^3, …

- $\omega\omega=\omega^2$
- ω^2+1
- ω^2+2
- …
- ω^3
- ω^3+1
- …

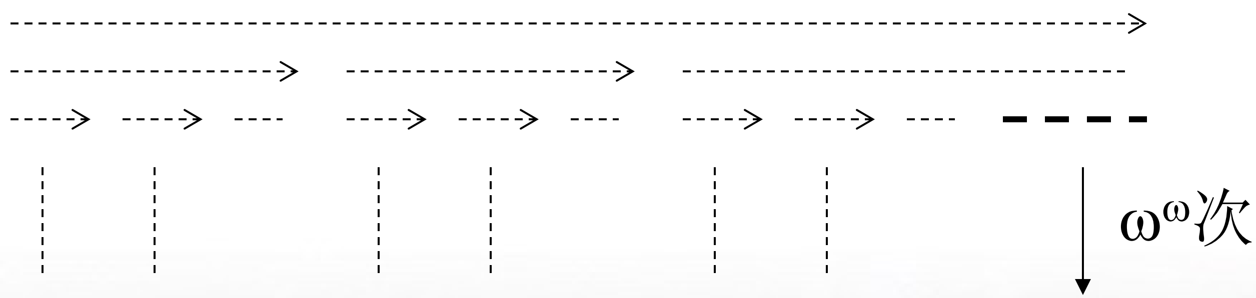


序数: $\omega^{\omega}, \cdots, \omega^{\omega^{\omega}}, \cdots$

- ω^{ω}



- ……
- $\omega^{\omega^{\omega}}$



- ……

三类序数

- 0
- 后继序数: 1,2,…,ω+1,ω+2,… (有头有尾)
- 极限序数: ω, 2ω, ω^2, ω^ω,… (有头无尾)

序数的定义

- 0 是序数
- 若集合 x 是序数，则 x^+ 是序数
- 若集合 x 的元素都是序数，则 $\cup x$ 是序数

- 只有应用上述规则得到的才是序数

序数的性质

- 序数都是传递集

- 序数具有三歧性：

$x \in y$, $x = y$, $y \in x$

序数的大小

- 若 x 和 y 都是序数且 $x \in y$，则 $x<y$
- 对任意序数 x，$x = \{ y \mid y<x \}$

序数与基数

- 基数:

$$0,1,2,\cdots,\aleph_0,2^{\aleph_0},2^{2^{\aleph_0}},2^{2^{2^{\aleph_0}}},\cdots$$

- 序数:

$$0,1,2,\cdots,\omega,\omega+1,\cdots,2\omega,\cdots,\omega^2,\cdots,\omega^\omega,\cdots,\omega^{\omega^\omega},\cdots$$

- 可数序数: 与N等势的序数

$$0,1,2,\cdots,\omega,\omega^\omega,\omega^{\omega^\omega},\cdots$$

ZF系统

- 外延公理: $A=B \Leftrightarrow \forall x(x\in A \leftrightarrow x\in B)$
- 无序对公理: a,b是集合 $\Rightarrow$ {a,b}是集合
- 子集公理: A是集合 $\Rightarrow$ $\{x\in A \mid P(x)\}$是集合

(定义 $A\cap B = \{ x\in A \mid x\in B \}$)

- 并集公理: $\mathcal{A}$是集族 $\Rightarrow$ $\cup\mathcal{A}$是集合

(配合无序对公理, 定义 $A\cup B = \cup\{A,B\}$)

ZF系统(续)

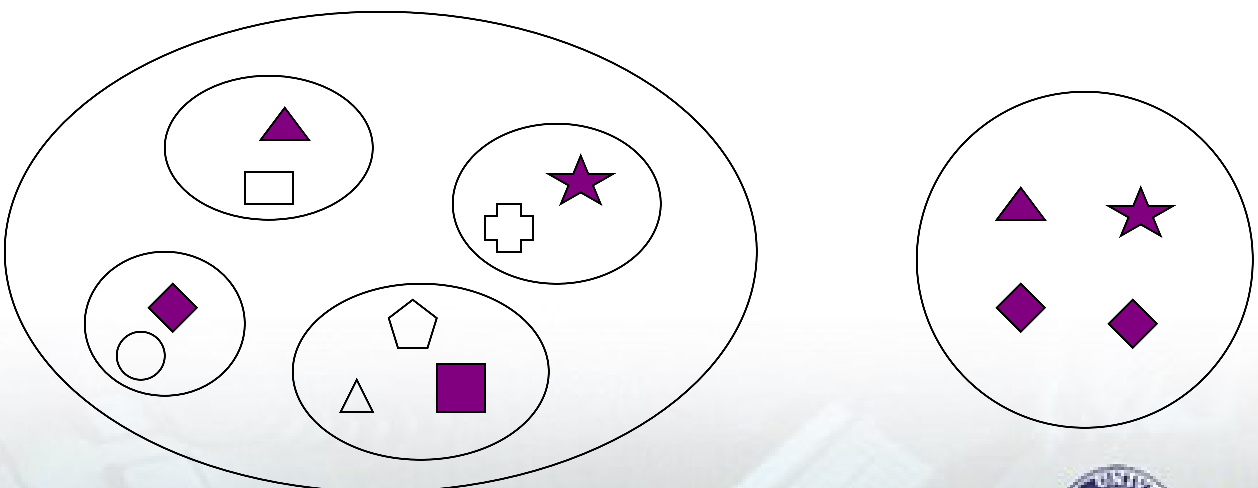
- 幂集公理: A是集合 $\Rightarrow$ P(A)是集合
- 空集公理: $\varnothing$是集合
- 正则公理: A是非空集合 $\Rightarrow$ A有基础元素(基础元素: 不属于A中其他元素的元素).

(用途: 防止 $A \in A$)

- 替换公理: f是A上函数 $\Rightarrow$ $\{ f(a) \mid a \in A \}$是集合
- 无穷公理: N是集合

ZFC系统

- ZF系统+选择公理(Choice axiom)
- 选择公理: $\mathcal{A}$是元素互不相交的非空集族,可以从$\mathcal{A}$的每个元素中选择一个元素,组成一个集合



选择公理的等价形式(部分)

- 广义选择公理: 任何非空集族都有选择函数 ($f:\mathcal{A}\to\cup\mathcal{A}$, $f(X)\in X$)
- 良序原理: 任何集合都可良序化
- Zorn引理: 链总有上界的非空偏序集存在极大元
- Hausdorff极大原理: 任何链都包含于极大链
- 三歧性原理:

  A,B是集合 $\Rightarrow |A|\le|B| \vee |B|\le|A|$

北京大学

连续统假设(CH)

- Georg Cantor(1845~1918), 最早提出

$$\neg\exists\kappa(\aleph_0 < \kappa < 2^{\aleph_0})$$

- David Hilbert(1862~1943),1900年, 著名的23个问题之一
- Kurt Gödel(1906~1978),1938年,相容性
- Paul Cohen(1934~), 1963年, 独立性
- 集合论公理系统: ZF, ZFC, ZFC+CH

ZFC+CH系统

- ZF+C+CH
- ZF: Zermelo-Fraenkel公理(9条)
- C: 选择公理
- CH: 连续统假设

罗素悖论

- $X=\{x \mid x\neq\varnothing\}$, $\{a\}\neq\varnothing$, $\{a\}\in X$, $X\neq\varnothing$, $X\in X$
- $\varnothing\notin\varnothing$, $\{a\}\notin\{a\}$, $\exists x(x\notin x)$
- $S = \{ x \mid x\notin x \}$

$$S\in S\ ?$$

$$S\in S \Rightarrow S\notin S$$

$$S\notin S \Rightarrow S\in S$$

北京大学

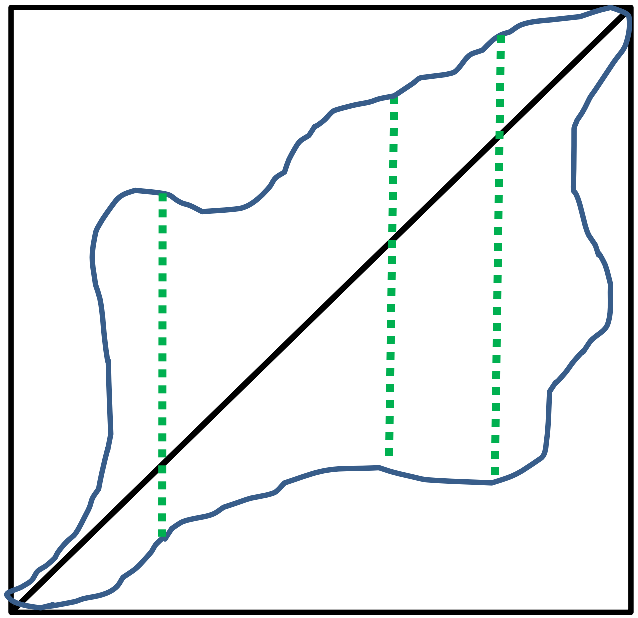
序数悖论

- On = { x | x 是序数}
- On 是类，不是集合
- 若 On 是集合，则 On 是序数，On^+ 是序数，于是 $On \in On^+$ 且 $On^+ \in On$，矛盾！

思考题

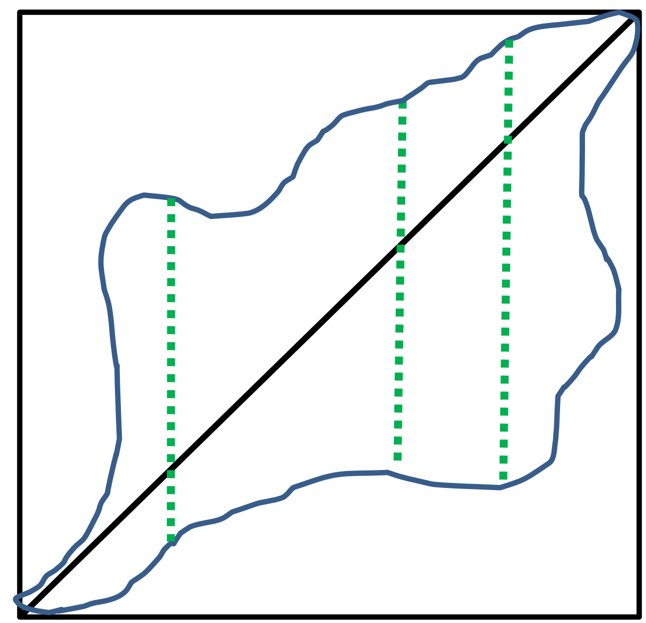
- $S \subset [0,1]^2$
- $\forall x, \forall y, (x,y) \in S \vee (y,x) \in S$
- $\forall x, \{y \mid (x,y) \in S\}$ 可数

- 这样的 集合 S 存在吗？



思考题

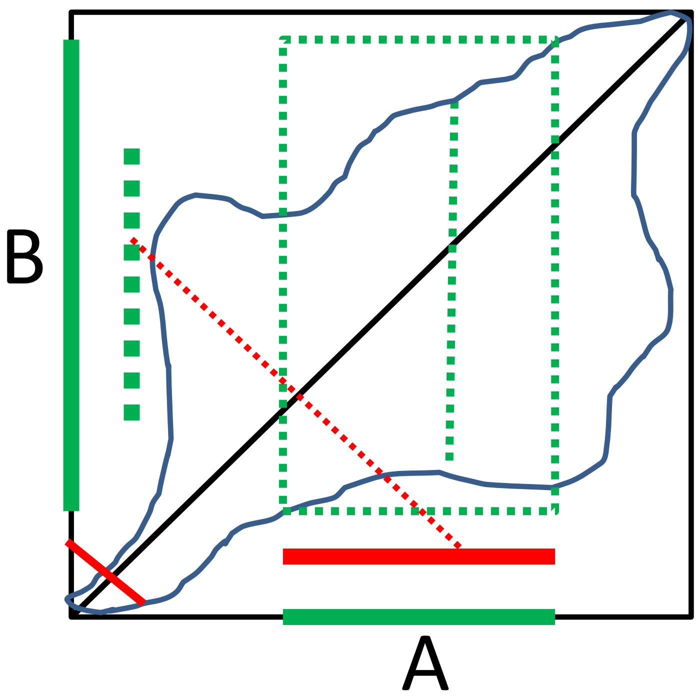
- $S \subset [0,1]^2$
- $\forall x, \forall y, (x,y)\in S \vee (y,x)\in S$
- $\forall x, \{y \mid (x,y)\in S\}$ 可数



- 这样的 集合 S 存在吗？
- 若CH不成立，则不存在

思考题

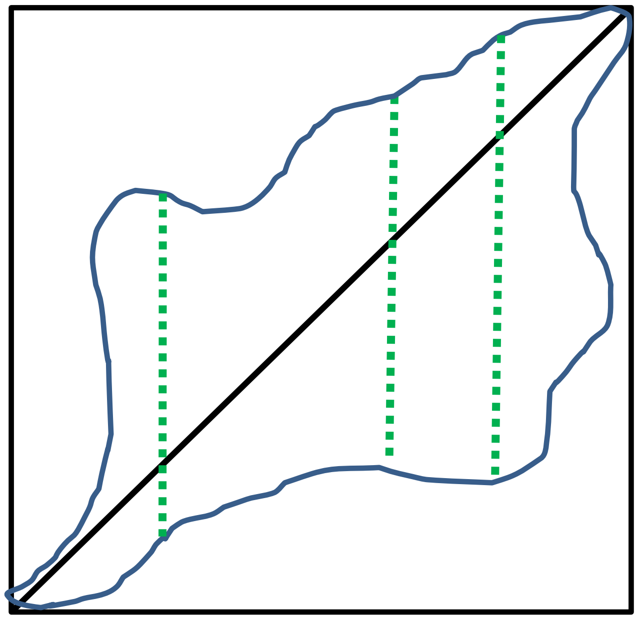
- $S \subset [0,1]^2$
- $\forall x, \forall y, (x,y)\in S \vee (y,x)\in S$
- $\forall x$, $\{y \mid (x,y)\in S\}$ 可数



- 若CH不成立，则不存在 S
- $\aleph_0 < |A| < \aleph_1$
- $B = \{ y \mid x\in A \wedge (x,y)\in S \}$
- $\exists y_0 \notin B$, $|(\{y_0\}\times A)\cap S| = \aleph_0 < |A\times\{y_0\}| = \aleph_1$

思考题

- $S \subset [0,1]^2$
- $\forall x, \forall y, (x,y) \in S \vee (y,x) \in S$
- $\forall x, \{y \mid (x,y) \in S\}$ 可数



- 这样的 集合 S 存在吗？
- 若CH和AC成立，则存在

思考题

- $S \subset [0,1]^2$
- $\forall x, \forall y, (x,y)\in S \vee (y,x)\in S$
- $\forall x$, $\{y \mid (x,y)\in S\}$ 可数

- 若CH和AC成立，则存在S
- [0,1]有良序<，使得

  $\forall x, \{ y \mid y \leq x \}$ 可数，$S = \{ (x,y) \mid y \leq x \}$