23.3 Burnside引理

- 不动置换类和轨道
- Burnside引理
- Burnside引理的应用

不动置换类和轨道

不动置换类：设$N = \{1, 2, \ldots, n\}$, G为N上置换群，

$$Z_k = \{\sigma \mid \sigma \in G, \sigma(k) = k\}$$

称Z_k为k的不动置换类。

可以证明Z_k是G的子群。

N, G定义如上，R是N上的二元关系，$\forall x, y \in N$,

$$xRy \Leftrightarrow \exists\sigma\,(\sigma \in G, \sigma(x) = y)$$

$$\forall k \in N, E_k = \{l \mid l \in N, kRl\} = \{\sigma(k) \mid \sigma \in G\}$$

称E_k为k的轨道。

可以证明R为N上等价关系，且k的轨道就是k的等价类。

实例

例1 $N=\{1, 2, 3, 4\}$， $G=\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6, \sigma_7, \sigma_8\}$

$\sigma_1=(1)$ $\sigma_2=(1\ 2\ 3\ 4)$ $\sigma_3=(1\ 3)(2\ 4)$

$\sigma_4=(1\ 4\ 3\ 2)$ $\sigma_5=(1\ 2)(3\ 4)$ $\sigma_6=(1\ 4)(2\ 3)$

$\sigma_7=(1)(3)(2\ 4)$ $\sigma_8=(2)(4)(1\ 3)$

$Z_1= Z_3=\{\sigma_1, \sigma_7\}$, $Z_2=Z_4=\{\sigma_1, \sigma_8\}$

$E_1=E_2=E_3=E_4=\{1, 2, 3, 4\}$

$S_3=\{(1), (1\ 2), (1\ 3), (2\ 3), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$,

$Z_1=\{(1), (2\ 3)\}$, $E_1=\{1, 2, 3\}$,

$|S_3|=6$, $|Z_1|=2$, $|E_1|=3$, $6=2\times 3$.

不动置换类与轨道的关系

定理1 $N=\{1,2,\dots,n\}$, G为N上置换群，则$\forall k\in N$,
$|Z_k|\cdot|E_k|=|G|$.

$Z_k=\{\sigma\in G \mid \sigma(k)=k\}$

$E_k=\{\sigma(k) \mid \sigma\in G\}$

证： Z_k是子群，根据Lagrange定理

$$|G|=|Z_k|\,[G:Z_k]$$

下面证明 $[G:Z_k]=|E_k|$.

令S是Z_k的所有左陪集的集合，

定义 $f: S\to E_k, f(\sigma Z_k)=\sigma(k)$,

良定义及单射性：

$\sigma Z_k=\tau Z_k \Leftrightarrow \sigma^{-1}\tau\in Z_k \Leftrightarrow \sigma^{-1}\tau(k)=k$

$\Leftrightarrow \sigma^{-1}(\tau(k))=k \Leftrightarrow \sigma(k)=\tau(k)$

满射性：$\forall t\in E_k, \exists\sigma\in G$，使得$\sigma(k)=t$,

因此 $f(\sigma Z_k)=\sigma(k)=t$.

Burnside引理

引理 设$N=\{1,2,\dots,n\}$, G是N上置换群。令$G=\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_g\}$, $c_1(\sigma_k)$是σ_k的轮换表示中1-轮换的个数，M为不同的轨道个数，则

$$M = \frac{1}{|G|}\sum_{k=1}^{g} c_1(\sigma_k)$$

History: The lemma is not Burnside's.

William Burnside stated and proved this lemma, attributing it to Frobenius 1887, in his 1897 book on finite groups. But even prior to Frobenius, the formula was known to Cauchy in 1845.

证明

$Z_k = \{\sigma \in G \mid \sigma(k)=k\}$

证：$c_1(\sigma_k)$是σ_k的作用下保持不变的N中元素数。做下表

$G \backslash N$	1	2	……	n	$c_1(\sigma_k)$
$\sigma_1=(1)$	S_{11}	S_{12}	……	S_{1n}	$c_1(\sigma_1)$
σ_2	S_{21}	S_{22}	……	S_{2n}	$c_1(\sigma_2)$
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$		$\cdot$	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$		$\cdot$	$\cdot$
$\cdot$					$\cdot$
σ_g	S_{g1}	S_{g2}	……	S_{gn}	$c_1(\sigma_g)$
合 计	$\|Z_1\|$	$\|Z_2\|$	……	$\|Z_n\|$	$\sum_{k=1}^{g} c_1(\sigma_k) = \sum_{j=1}^{n} \|Z_j\|$

$$S_{kl}=1 \Leftrightarrow \sigma_k(l)=l$$

证明（续）

$E_k=\{\sigma(k)\ |\sigma\in G\}$

$|Z_k|\cdot|E_k|=|G|$

$$\sum_{k=1}^{g} c_1(\sigma_k) = \sum_{k=1}^{g}\sum_{j=1}^{n} S_{kj} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{g} S_{kj} = \sum_{j=1}^{n} |Z_j|$$

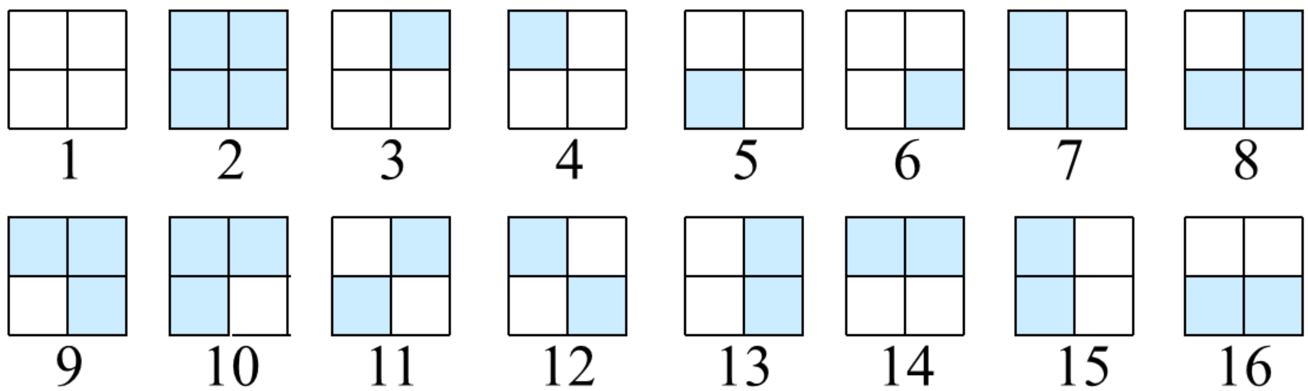
$$\frac{1}{|G|}\sum_{k=1}^{g} c_1(\sigma_k) = \frac{1}{|G|}\sum_{j=1}^{n} |Z_j| = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{|E_j|} = M$$

$$\{i_1, i_2, \dots, i_l\} = E_{i_1} = E_{i_2} = \cdots = E_{i_l}$$

$$\Rightarrow \left|E_{i_1}\right| = l\text{且}\sum_{j=i_1}^{i_l} \frac{1}{|E_j|} = 1$$

Burnside引理的应用

例2 用2色涂色2×2方格棋盘，则方案数为16



作用在16个方案上的置换群 $G = \{ \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4 \}$,

$\sigma_1=(1)$

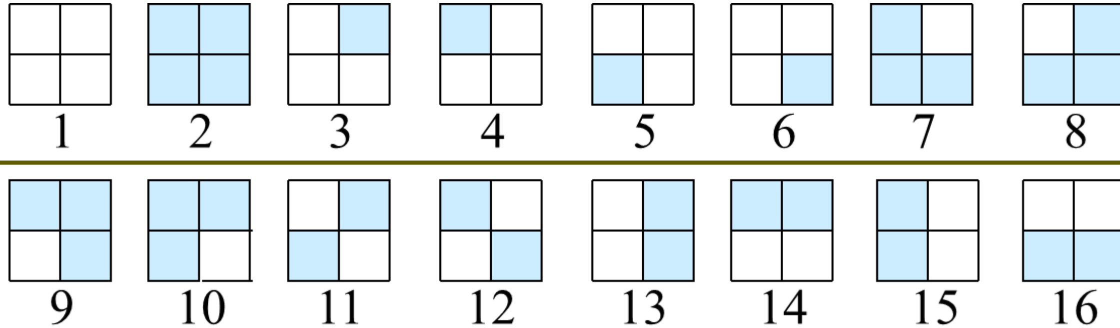
$\sigma_2=(1)\,(2)\,(3\;4\;5\;6)\,(7\;8\;9\;10)\,(11\;12)\,(13\;14\;15\;16)$

$\sigma_3=(1)\,(2)\,(6\;5\;4\;3)\,(10\;9\;8\;7)\,(11\;12)\,(16\;15\;14\;13)$

$\sigma_4=(1)\,(2)\,(3\;5)\,(4\;6)\,(7\;9)\,(8\;10)\,(11)\,(12)\,(13\;15)\,(14\;16)$

$$M=\frac{1}{4}(16+2+2+4)=6$$

例2 用2色涂色2×2方格棋盘，则方案数为16



若还考虑翻转，则作用在16个方案上的置换群

$G = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6, \sigma_7, \sigma_8\}$,

$\sigma_1=(1)$

$\sigma_2=(1)\ (2)\ (3\ 4\ 5\ 6)\ (7\ 8\ 9\ 10)\ (11\ 12)\ (13\ 14\ 15\ 16)$

$\sigma_3=(1)\ (2)\ (6\ 5\ 4\ 3)\ (10\ 9\ 8\ 7)\ (11\ 12)\ (16\ 15\ 14\ 13)$

$\sigma_4=(1)\ (2)\ (3\ 5)\ (4\ 6)\ (7\ 9)\ (8\ 10)\ (11)\ (12)\ (13\ 15)\ (14\ 16)$

$\sigma_5=(1)\ (2)\ (3\ 4)\ (5\ 6)\ (7\ 8)\ (9\ 10)\ (11\ 12)\ (13\ 15)\ (14)\ (16)$

$\sigma_6=(1)\ (2)\ (3\ 6)\ (4\ 5)\ (7\ 10)\ (8\ 9)\ (11\ 12)\ (13)\ (14\ 16)\ (15)$

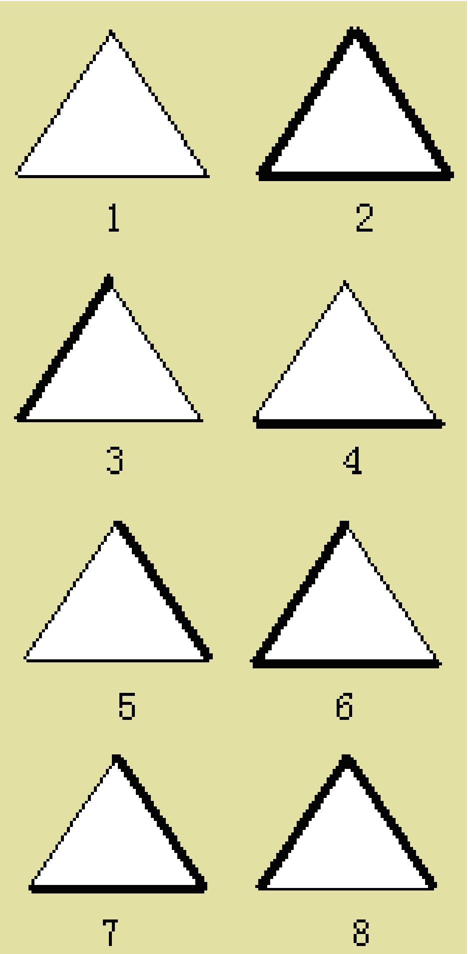
$\sigma_7=(1)\ (2)\ (3)\ (4\ 6)\ (5)\ (7)\ (8\ 10)\ (9)\ (11)\ (12)\ (13\ 14)\ (15\ 16)$

$\sigma_8=(1)\ (2)\ (3\ 5)\ (4)\ (6)\ (7\ 9)\ (8)\ (10)\ (11)\ (12)\ (13\ 16)\ (14\ 15)$

$$M = \frac{1}{8}(16+2+2+4+4+4+8+8) = 6$$

应用—图的同构

例3 3个顶点的不同构的图的个数



$G = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6\}$

$\sigma_1=(1)$ 0度

$\sigma_2=(1)\ (2)\ (3\ 4\ 5)\ (6\ 7\ 8)$ 120度

$\sigma_3=(1)\ (2)\ (3\ 5\ 4)\ (6\ 8\ 7)$ 240度

$\sigma_4=(1)\ (2)\ (3\ 5)\ (4)\ (6\ 7)\ (8)$ 翻180度

$\sigma_5=(1)\ (2)\ (4\ 5)\ (3)\ (6\ 8)\ (7)$ 翻180度

$\sigma_6=(1)\ (2)\ (3\ 4)\ (5)\ (7\ 8)\ (6)$ 翻180度

$$M = \frac{1}{6}(8+2+2+4+4+4) = 4$$

应用—立方体涂色

例4 用6种颜色涂色立方体使得各个面颜色不同的方案数.

解：以过一对面的轴

旋转0度：1个

旋转90度，270度：6个

旋转180度：3个

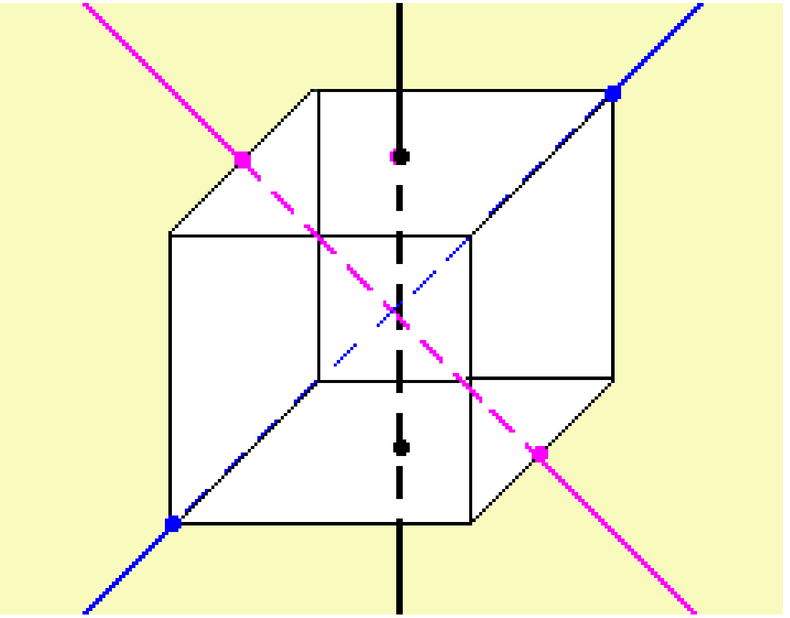
以过一对顶点的轴

旋转120度，240度：8个

以过一对棱的轴

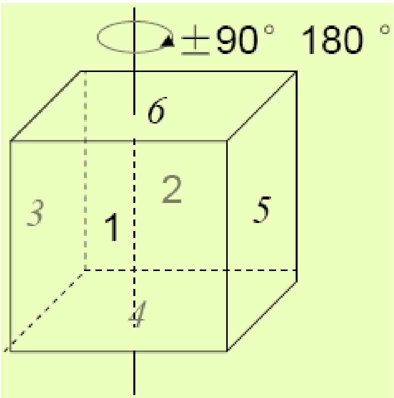
旋转180度：6个

$|G|=24$, $M=1/24 \cdot 6! =30$



上述置换中只有恒等置换包含**6!**个**1-**轮换，其他置换都不包含**1-**轮换！

应用—立方体涂色（续）



不动

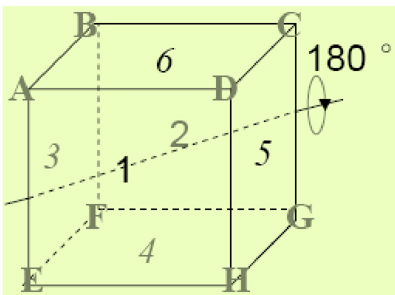
$g_1 = (1)(2)(3)(4)(5)(6)$

过而12, 35, 46中心的轴，90°, 180°, 270°

$g_2 = (1)(2)(3\ 4\ 5\ 6)$ $g_3 = (1)(2)(3\ 5)(4\ 6)$ $g_4 = (1)(2)(3\ 6\ 5\ 4)$

$g_5 = (3)(5)(1\ 4\ 2\ 6)$ $g_6 = (3)(5)(1\ 2)(4\ 6)$ $g_7 = (3)(5)(1\ 6\ 2\ 4)$

$g_8 = (4)(6)(1\ 5\ 2\ 3)$ $g_9 = (4)(6)(1\ 2)(3\ 5)$ $g_{10} = (4)(6)(1\ 3\ 2\ 5)$

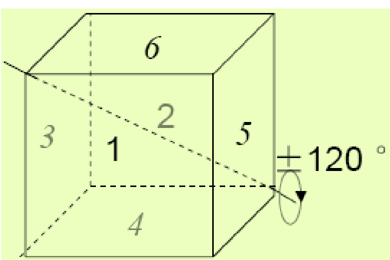


过边BF-DH,AE-CG,AB-HG,EF-DC,EH-BC,AD-FG中点的轴

$g_{11} = (1\ 5)(2\ 3)(4\ 6)$ $g_{12} = (1\ 3)(2\ 5)(4\ 6)$ $g_{13} = (1\ 2)(3\ 6)(4\ 5)$

$g_{14} = (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)$ $g_{15} = (1\ 4)(2\ 6)(3\ 5)$ $g_{16} = (1\ 6)(2\ 4)(3\ 5)$

对角线BH,CE,DF,AG, 120°, 240°



$g_{17} = (1\ 4\ 5)(2\ 6\ 3)$ $g_{18} = (1\ 5\ 4)(2\ 3\ 6)$

$g_{19} = (1\ 4\ 3)(2\ 6\ 5)$ $g_{20} = (1\ 3\ 4)(2\ 5\ 6)$

$g_{21} = (1\ 5\ 6)(2\ 3\ 4)$ $g_{22} = (1\ 6\ 5)(2\ 4\ 3)$

$g_{23} = (1\ 3\ 6)(2\ 5\ 4)$ $g_{24} = (1\ 6\ 3)(2\ 4\ 5)$

应用—立方体涂色（另解）

6种颜色，染到6个方位中。因为允许旋转，所以染色所考虑的不是每种颜色的绝对方位，而是它们的相对位置。分步染色：

（1）先染一个方位，即确定一个起点：

因为不考虑绝对位置，所以谁做第一个、染什么颜色，都一样。所以，这一步只有1种结果。不妨先确定“上”，剩下的就是确定另外5个方位和5种颜色。

（2）染“下”：

因为“上”确定了，所以“下”也就确定了，所以只需考虑颜色：可选的颜色有5种；

（3）染“前后左右”：

4种颜色的排列；不过这4个方位是循环的，因此这是个环排列。结果就是：

$P(4,4)/4=6$；

所以，最终结果为：$1\times5\times6=30$种。

Review 1

不动置换类：设$N=\{1,2,\dots,n\}$, G为N上置换群，

$$Z_k=\{\sigma\mid\sigma\in G,\sigma(k)=k\}$$

称Z_k为k的不动置换类。

可以证明Z_k是G的子群。

N,G定义如上，R是N上的二元关系，$\forall x,y\in N$,

$$xRy\Leftrightarrow\exists\sigma\,(\sigma\in G,\sigma(x)=y)$$

$$\forall k\in N, E_k=\{l|l\in N,kRl\}=\{\sigma(k)|\sigma\in G\}$$

称E_k为k的轨道。

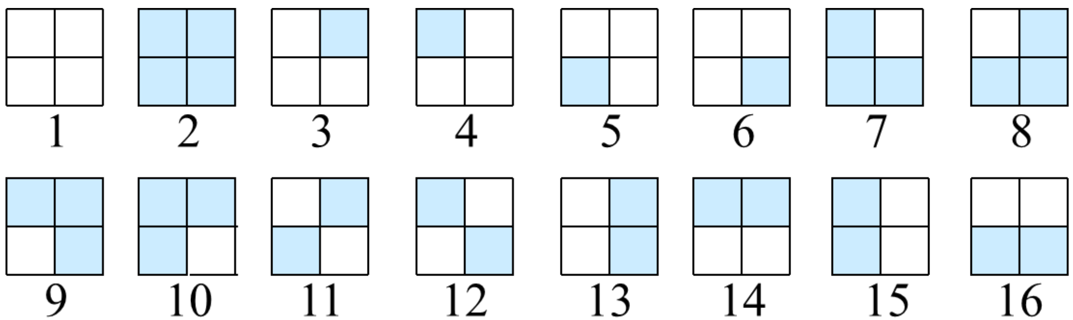
可以证明R为N上等价关系，且k的轨道就是k的等价类。

Review 2

定理1 $N=\{1,2,\ldots,n\}$, G为N上置换群，则$\forall k\in N$, $|Z_k|\cdot|E_k|=|G|$.

$Z_k=\{\sigma\in G \mid \sigma(k)=k\}$

$E_k=\{\sigma(k) \mid \sigma\in G\}$



Burnside引理 设$N=\{1,2,\ldots,n\}$, G是N上置换群。令$G=\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_g\}$, $c_1(\sigma_k)$是σ_k的轮换表示中1-轮换的个数，M为不同的轨道个数，则

$$M=\frac{1}{|G|}\sum_{k=1}^{g} c_1(\sigma_k)$$

23.4 Polya定理

从上节例子中可以看出这类计数问题包含三个要素:

(1) 被染色物体(如格子数*n*、形状等)

(2) 颜色的数量*m*

(3) 置换群

利用Burnside引理首先要列出所有m^n种可能的染色方案，然后找出在每个置换下保持不变的方案数。

显然当m或n很大的时候，这个方法会非常繁琐。

$$M=\frac{1}{|G|}\sum_{k=1}^{g}c_1(\sigma_k)$$

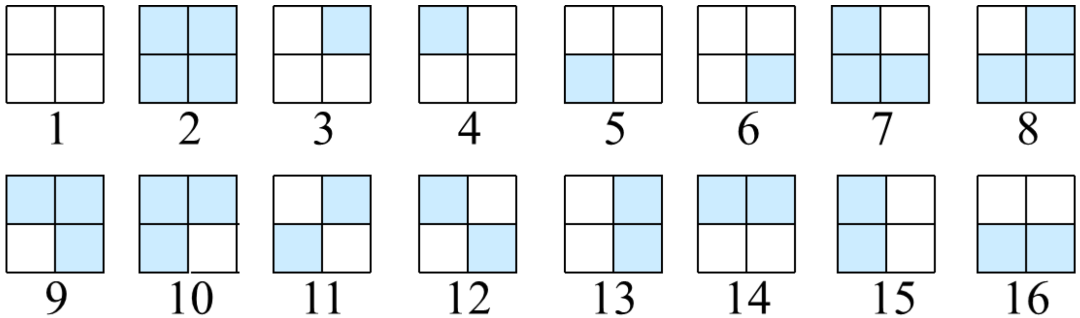
我们希望找到其它的方法来计算$c_1(\sigma_k)$。

23.4 Polya定理

定理 设$N= \{1, 2, \ldots , n\}$, 令$G=\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots , \sigma_g\}$为$N$上置换群, 用$m$种颜色涂色$N$中的元素，$c(\sigma_k)$是$\sigma_k$的轮换表示中轮换的个数，则在$G$作用下不同的涂色方案数为

$$M = \frac{1}{|G|}\sum_{k=1}^{g} m^{c(\sigma_k)}$$

应用



例5 考虑例2，群$G=\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4\}$

$\sigma_1=(1)(2)(3)(4)$ 旋转0度

$\sigma_2=(1\ 2\ 3\ 4)$ 旋转90度

$\sigma_3=(1\ 3)(2\ 4)$ 旋转180度

$\sigma_4=(1\ 4\ 3\ 2)$ 旋转270度

$$M=\frac{1}{4}\left(2^4+2^1+2^2+2^1\right)=6$$

Polya定理证明思路

(1) 令$\overline{G}=\{\tau_{\sigma_k}|\sigma_k\in G\}, \tau_{\sigma_k}(f)=f\sigma_k$， f为方案

(2) 证明$|G|=|\overline{G}|$

(3) 证明$c_1(\tau_{\sigma_k})=m^{c(\sigma_k)}$

(4) 证明$M=\frac{1}{|\overline{G}|}\sum_{k=1}^{g}c_1(\tau_{\sigma_k})=\frac{1}{|G|}\sum_{k=1}^{g}m^{c(\sigma_k)}$

证明

设$R=\{r_1,r_2,\ldots,r_m\}$是m种颜色。每种染色方案正好对应于一个映射：$f: N\rightarrow R$，因此所有染色方案的集合为$R^N=\{ f \mid f: N\rightarrow R \}$. 易见，$| R^N |=m^n$

(1) 令$\overline{G}=\{\tau_{\sigma_k} | \sigma_k \in G\}, \tau_{\sigma_k}(f)=f\sigma_k$，$f$为染色方案

不难证明$\overline{G}$是个有限群。

(2) 证明$|G|=|\overline{G}|$：令$\varphi: G\rightarrow \overline{G}, \sigma_k \mapsto \tau_{\sigma_k^{-1}}, \forall \sigma_k \in G$

证明（续）

(3) 证明$c_1(\tau_{\sigma_k}) = m^{c(\sigma_k)}$：设$\sigma_k$的轮换表达式为

$$\sigma_k = \underbrace{(\ldots\ldots)(\ldots\ldots)\ldots(\ldots\ldots)}_{c(\sigma_k)\text{个轮换}}$$

如果属于同一个子轮换的数字被染上同样的颜色，这样的染色方案在τ_{σ_k}的作用下是不变的，所以它属于τ_{σ_k}的不变元素集；

如果有一种染色方案使得σ_k的某个子轮换中出现了不同的颜色，则在该轮换中必有两个位置相邻的数字具有不同的颜色，于是在τ_{σ_k}的作用下必得到不同的染色方案。

证明（续）

因此，在τ_{σ_k}作用下不变的染色方案数等于对σ_k的同一子轮换染同色的方案数，即$c_1(\tau_{\sigma_k}) = m^{c(\sigma_k)}$.

(4) 代入Burnside引理得

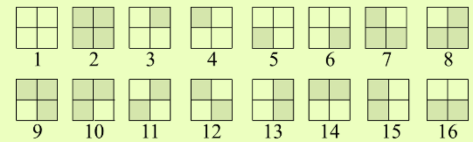
$$M = \frac{1}{|\overline{G}|}\sum_{k=1}^{g} c_1(\tau_{\sigma_k}) = \frac{1}{|G|}\sum_{k=1}^{g} m^{c(\sigma_k)}$$

Burnside引理 vs. Polya定理

引理 设$N=\{1,2,\dots,n\}$，G是N上置换群. 令$G=\{\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_g\}$，$c_1(\sigma_k)$是$\sigma_k$的轮换表示中1-轮换的个数，$M$为不同的轨道个数，则

$$M=\frac{1}{|G|}\sum_{k=1}^{g}c_1(\sigma_k)$$

例2 用2色涂色2×2方格棋盘，则方案数为16



作用在16个方案上的置换群 $G=\{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4\}$,

$\sigma_1=(1)$

$\sigma_2=(1)(2)(3\ 4\ 5\ 6)(7\ 8\ 9\ 10)(11\ 12)(13\ 14\ 15\ 16)$

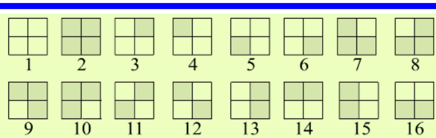
$\sigma_3=(1)(2)(6\ 5\ 4\ 3)(10\ 9\ 8\ 7)(11\ 12)(16\ 15\ 14\ 13)$

$\sigma_4=(1)(2)(3\ 5)(4\ 6)(7\ 9)(8\ 10)(11)(12)(13\ 15)(14\ 16)$

$M=\frac{1}{4}(16+2+2+4)=6$

定理 设$N=\{1,2,\dots,n\}$，令$G=\{\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_g\}$为$N$上置换群，用$m$种颜色涂色$N$中的元素，$c(\sigma_k)$是$\sigma_k$的轮换表示中轮换的个数，则在$G$作用下不同的涂色方案数为

$$M=\frac{1}{|G|}\sum_{k=1}^{g}m^{c(\sigma_k)}$$



例5 考虑例2，群$G=\{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4\}$

$\sigma_1=(1)(2)(3)(4)$	旋转0度
$\sigma_2=(1\ 2\ 3\ 4)$	旋转90度
$\sigma_3=(1\ 3)(2\ 4)$	旋转180度
$\sigma_4=(1\ 4\ 3\ 2)$	旋转270度

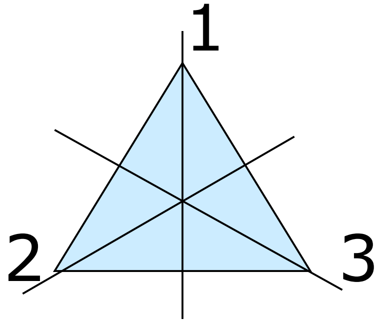
$M=\frac{1}{4}(2^4+2^1+2^2+2^1)=6$

与Burnside引理的区别

- Burnside引理的群作用于方案集合
  Polya定理的群作用于元素的集合
- 如果有n个元素，m种颜色，将有m^n种方案。一般使用Polya定理的群要简单得多
- 一般情况使用Polya定理，但在某些特殊情况只能直接计数不变的方案，使用Burnside引理更合适

应用

例6 等边三角形的三个顶点用红黄蓝三种颜色来着色，有多少种不同的方案？



保持不变的置换群包括：

(1) 沿中心旋转0，120，240度；

(2) 沿三条中线的翻转。

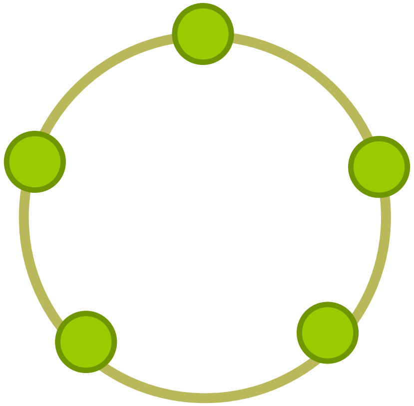
$$\boldsymbol{G = \{(1)(2)(3), (123), (321), (1)(23), (2)(13), (3)(12)\}.}$$

因此由**Polya**定理可知不同的方案数为：

$$\boldsymbol{M = \frac{1}{6}\left(3^3 + 3^1 + 3^1 + 3^2 + 3^2 + 3^2\right) = 10}$$

应用

例7 用3种颜色染色装有5颗珠子的手镯，如果只考虑手镯的旋转，问有多少种染色方案?



解：m=3, N={1, 2, 3, 4, 5},

$G=\{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4,\sigma_5\}$，其中$\sigma_1=(1)(2)(3)\ (4)\ (5)$，不动，$\sigma_2=(12345)$，逆时针72度，$\sigma_3=(13524)$，逆时针144度，$\sigma_4=(14253)$，逆时针216度，$\sigma_5=(15423)$，逆时针288度。

由Polya定理可知不同的方案数为：

$$M=\frac{1}{5}\left(3^5+3^1+3^1+3^1+3^1\right)=51.$$

应用—Fermat小定理

例8 Fermat小定理： 设p为素数，则$p|(n^p-n)$

证： 考虑p个珠子的手镯，用n种颜色的珠子穿成.

考虑旋转，则

$G=\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p\}$

$\sigma_1=(\bullet)(\bullet)\ldots(\bullet)$

$\sigma_2=(\bullet\ \bullet\ \ldots\ \bullet)$

$\ldots$

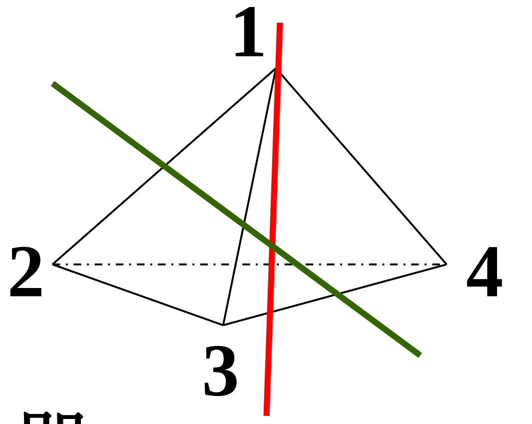
$\sigma_p=(\bullet\ \bullet\ \ldots\ \bullet)$

$$M=\frac{1}{p}\left[n^p+(p-1)n^1\right]=\frac{1}{p}(n^p-n+pn)$$

$$p|(n^p-n)$$

例 对正四面体的四个顶点用4种不同的颜色来着色，有多少种不同的方案？

使正四面体重合的置换群包括：



(1) 保持不变；

(2) 沿过顶点和对面中心点的直线旋转120，240度；

(3) 沿过对边中点的直线旋转180度。即

$G=\{(1)(2)(3)(4),(1)(234),(1)(432),(2)(134),$
$(2)(431),(3)(124),(3)(421),(4)(123),(4)(321),$
$(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}$

因此由Polya定理可知不同的方案数为：

$$L=(4^4+11\cdot 4^2)/12=36.$$

例 对立方体的六个面用红蓝两种颜色来着色，有多少种不同的方案？

使立方体的六个面保持不变的置换群包括：

(1) 不变置换： (1)(2)(3)(4)(5)(6)；

(2) 沿对面中心轴转动90，270度：

(1)(2345)(6)， (1)(5432)(6) (同类共6个)；

(3) 沿对面中心轴转动180度：

(1)(24)(35)(6) (同类共3个)；

(4) 沿对边中点轴转动180度：

(16)(25)(43) (同类共6个)；

(5) 沿对角线轴转动120，240度：

(346)(152)，(643)(251) (同类共8个)。

故

$$L=\left(2^6+6\cdot 2^3+3\cdot 2^4+6\cdot 2^3+8\cdot 2^2\right)\Big/24=10.$$

例 求用6种颜色涂色立方体，使得各个面颜色不同的方案数。

利用前题结论，用m种颜色染色不同的方案数为：

$$L_m = \frac{1}{24}(m^6 + 3m^4 + 12m^3 + 8m^2),$$

即：$L_1=1, L_2=10, L_3=57, L_4=240, L_5=800, L_6=2226$。

设刚好用m种颜色的方案数为N_m，则：

$$N_m = L_m - \sum_{k=1}^{m-1} C(m,k) N_k,$$

其中$N_1=L_1=1$。

由L_1=1, L_2=10, L_3=57, L_4=240, L_5=800, L_6=2226有

$$N_1 = L_1 = 1;$$

$$N_2 = L_2 - C(2,1)N_1 = 10 - 2 = 8;$$

$$N_3 = L_3 - C(3,1)N_1 - C(3,2)N_2 = 57 - 3 - 24 = 30;$$

$$N_4 = L_4 - C(4,1)N_1 - C(4,2)N_2 - C(4,3)N_3$$
$$= 240 - 4 - 48 - 120 = 68;$$

$$N_5 = L_5 - C(5,1)N_1 - C(5,2)N_2 - C(5,3)N_3$$
$$- C(5,4)N_4$$

$$N_6 = L_6 - C(6,1)N_1 - C(6,2)N_2 - C(6,3)N_3$$
$$- C(6,4)N_4 - C(6,5)N_5$$
$$= 2226 - 6 - 120 - 600 - 1020 - 450 = 30.$$

不如利用
Burnside引理
方便!

例 对立方体的八个顶点用两种颜色着色，有多少种不同的方案？

使立方体的八个顶点保持不变的置换群包括：

(1) 不变置换： (1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)；

(2) 沿对面中心轴转动90，270度：

(1234)(5678)， (4321)(8765)　(同类共6个)；

(3) 沿对面中心轴转动180度：

(13)(24)(57)(68)　(同类共3个)；

(4) 沿对边中点轴转动180度：

(17)(26)(35)(48)　(同类共6个)；

(5) 沿对角线轴转动120，240度：

(2)(136)(8)(475), (2)(631)(8)(574)　(同类共8个)。

故

$$L=\left(2^8+6\cdot 2^2+3\cdot 2^4+6\cdot 2^4+8\cdot 2^4\right)/24=23.$$