Ch-22 组合计数方法

22. 1 递推方程的公式解法

定义 22. 2 k 阶常系数线性齐次递推方程

$$H(n) - a_1H(n-1) - a_2H(n-2) - \cdots - a_kH(n-k) = 0 \qquad (22.1)$$
$$n \geq k,\ a_1, a_2, \cdots, a_k \text{ 是常数},\ a_k \neq 0$$

定义 22. 3 方程

$$x^k - a_1x^{k-1} - a_2x^{k-2} - \cdots - a_k = 0 \qquad (22.2)$$

称为递推方程 (22. 1) 的**特征方程**，其 k 个根 $q_1, q_2, \cdots, q_k$ 称为特征方程的**特征根**，其中 $q_i(i = 1, 2, \cdots, k)$ 是复数。

定理 22. 1 设 q 是一个非零复数，则 $H(n) = q^n$ 是递推方程 (22.1) 的一个解当且仅当 q 是它的一个特征根。

定理 22. 2 设 $h_1(n)$ 和 $h_2(n)$ 是递推方程 (22. 1) 的两个解，c_1 和 c_2 是任意常数，则 $c_1h_1(n) + c_2h_2(n)$ 也是递推方程 (22. 1) 的解。

由定理 (22. 1) 和定理 (22. 2) 可知，如果 $q_1, q_2, \cdots, q_k$ 是递推方程 (22. 1) 的特征根，且 $c_1, c_2, \cdots, c_k$ 是任意常数，则

$$H(n) = c_1q_1^n + c_2q_2^n + \cdots + c_kq_k^n$$

是递推方程 (22. 1) 的解。

定义 22. 4 如果对于递推方程 (22. 1) 的每个解 $h(n)$ 都可以选择一组常数 $c_1', c_2', \cdots, c_k'$ 使得

$$h(n) = c_1'q_1^n + c_2'q_2^n + \cdots + c_k'q_k^n$$

成立，则称 $c_1q_1^n + c_2q_2^n + \cdots + c_kq_k^n$ 为**通解**，其中 $c_1, c_2, \cdots, c_k$ 为任意常数。

定理 22. 3 设 $q_1, q_2, \cdots, q_k$ 是递推方程 (22. 1) 的不相等的特征根，则

$$H(n) = c_1q_1^n + c_2q_2^n + \cdots + c_kq_k^n$$

是递推方程 (22. 1) 的通解。

引理 1 设

$$f_0(x) = x^n - a_1x^{n-1} - a_2x^{n-2} - \cdots - a_{k-1}x^{n-k+1} - a_kx^{n-k},$$

$\forall\, i \in \mathbb{Z}^+$，令 $f_t(x) = xf_{t-1}'(x)$，其中 $f_{t-1}'(x)$ 是 $f_{t-1}(x)$ 的微商，则

$$f_t(x) = n^tx^n - a_1(n-1)^tx^{n-1} - \cdots - a_k(n-k)^tx^{n-k}$$

引理 2 设 $f_t(x)$ 为引理 1 中的 n 次多项式，若 q 是 $f_t(x)$ 的 e 重根，则 q 是 $f_{t+1}(x)$ 的 $e-1$ 重根。

定理 22.4 设有 k 阶递推方程

$H(n)-a_1H(n-1)-a_2H(n-2)-\cdots-a_kH(n-k)=0,\quad a_k\neq 0,\ n\geq k$

若 q 是递推方程的 e 重特征根，则 $q^n,nq^n,n^{e-1}q^n$ 都是递推方程的线性无关的解。

定理 22.5 设 $q_1,q_2,\cdots,q_t$ 是递推方程

$H(n)-a_1H(n-1)-a_2H(n-2)-\cdots-a_kH(n-k)=0,\quad a_k\neq 0,\ n\geq k$

的不相等的特征根，且 q_i 的重数为 e_i，$i=1,2,\cdots,t$，令

$$H_i(n)=(c_{i1}+c_{i2}n+\cdots+c_{ie_i}n^{e_i-1})q_i^n,$$

则 $H(n)=\sum_{i=1}^{t}H_i(n)$ 是递推方程的通解。

对于**常系数线性非齐次递推方程**，其一般形式为

$$\begin{cases}H(n)-a_1H(n-1)-a_2H(n-2)-\cdots-a_kH(n-k)=f(n)\\ n\geq k,\quad a_k\neq 0,\quad f(n)\neq 0.\end{cases}\tag{22.6}$$

定理 22.6 设 $\overline{H}(n)$ 是递推方程 (22.6) 所对应的常系数线性齐次递推方程

$$\begin{cases}H(n)-a_1H(n-1)-a_2H(n-2)-\cdots-a_kH(n-k)=0\\ n\geq k,\quad a_k\neq 0\end{cases}\tag{22.7}$$

的通解，$H^*(n)$ 是递推方程 (22.6) 的一个特解，则

$$H(n)=\overline{H}(n)+H^*(n)$$

是递推方程 (22.6) 的通解。

- 若 $f(n)$ 为 n 的 t 次多项式，一般 $H^*(n)$ 也为 n 的 t 次多项式

  而当原递推方程中的特征根为 1 时，$H^*(n)$ 为 n 的 $t+1$ 次多项式
- 若 $f(n)$ 为指数函数 $\alpha\cdot\beta^n$，若 β 不是特征根，则特解为 $H^*(n)=P\beta^n$

  若 β 是 e 重特征根，则特解为 $H^*(n)=Pn^e\beta^n$

22.2 递推方程的其他解法

换元法 通过换元转化成常系数线性递推方程

迭代归纳法 迭代得到递推方程的解后用归纳法验证

- **错位排列** $D_n=n!\left[1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right]$

差消法 将全部历史递推方程的阶数降低后求解（快速排序）

尝试法 先确定阶数后待定系数法尝试

22.3 生成函数的定义和性质

定义 22.5 设 $a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots$ 是一个数列，做形式幂级数

$$A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots,$$

称 $A(x)$ 是数列 $a_0, a_1, \cdots$ 的**生成函数**，将数列记作 $\{a_n\}$

定义 22.6 牛顿二项式系数 对任何实数 r 和整数 n 有

$$\binom{r}{n} = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 1 & n = 0 \\ \dfrac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{n!} & n > 0 \end{cases}$$

定理 22.7 牛顿二项式定理 设 α 是一个实数，则对一切 x 和 y 满足 $\left|\dfrac{x}{y}\right| < 1$ 有

$$(x+y)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n y^{\alpha - n}$$

- 当 $\alpha = m$，$m \in \mathbb{Z}^+$ 时，即为二项式定理
- 当 $\alpha = -m$, $m \in \mathbb{Z}^+$时，有
$$\binom{\alpha}{n} = (-1)^n \binom{m+n-1}{n}$$

$$(1+x)^{-m} = \frac{1}{(1+x)^m} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{m+n-1}{n} x^n,\ |x| < 1 \tag{22.8}$$

数列 $\left\{\binom{\alpha}{n}\right\}$ 的生成函数是 $A(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = (1+x)^\alpha$

数列 $\left\{\binom{m+n-1}{n}\right\}$ 的生成函数是

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n-1}{n} x^n = \frac{1}{(1-x)^m} \tag{22.9}$$

- 当 $m = 1$ 时，$A(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$
- 当 $m = 2$ 时，$A(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n = \dfrac{1}{(1-x)^2}$
- 当 $m = 3$ 时，$A(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(n+2)(n+1)}{2} x^n = \dfrac{1}{(1-x)^3}$

用 $-x$ 替换 (22.9) 式中的 x 得

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{m+n-1}{n} x^n = \frac{1}{(1+x)^m}$$

- 当 $m = 1$ 时，$A(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \dfrac{1}{1+x}$

设数列 $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$ 的生成函数分别是 $A(x),B(x),C(x)$.

1. 若 $b_n=\alpha a_n$，则 $B(x)=\alpha A(x)$
2. 若 $c_n=a_n+b_n$，则 $C(x)=A(x)+B(x)$
3. 若 $c_n=\sum\limits_{i=0}^{\infty}a_ib_{n-i}$，则 $C(x)=A(x)\cdot B(x)$
4. 若 $b_n=\begin{cases}0, & n<l,\\ a_{n-l}, & n\geq l,\end{cases}$ 则 $B(x)=x^l\cdot A(X)$
5. 若 $b_n=a_{n+l}$，则 $B(x)=\dfrac{A(x)-\sum\limits_{n=0}^{l-1}a_nx^n}{x^l}$
6. 若 $b_n=\sum\limits_{i=0}^{n}a_i$，则 $B(x)=\dfrac{A(x)}{1-x}$
7. 若 $b_n=\sum\limits_{i=n}^{\infty}a_i$，且 $A(1)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ 收敛，则
$$B(x)=\frac{A(1)-xA(x)}{1-x}$$
8. 若 $b_n=\alpha^na_n$，则 $B(x)=A(\alpha x)$
9. 若 $b_n=na_n$，则 $B(x)=xA'(x)$
10. 若 $b_n=\dfrac{a_n}{n+1}$，则 $B(x)=\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x A(x)\,\mathrm{d}x$

22.4 生成函数与组合计数

设多重集 $S=\{\infty\cdot a_1,\infty\cdot a_2,\cdots,\infty\cdot a_k\}$，$S$ 的 r-组合数为 a_r，为方程 $x_1+x_2+\cdots+x_k=r$ 的非负整数的解的个数。令数列 $\{a_r\}$ 的生成函数为 $A(y)$，$A(y)=(1+y+y^2+\cdots)^k=\dfrac{1}{(1-y)^k}=\sum\limits_{r=0}^{\infty}\dbinom{k+r-1}{r}y^r$，得到 $a_r=\dbinom{k+r-1}{r}$.

- 带限制条件：$x_1+x_2+\cdots+x_k=r$，$l_i\leq x_i\leq n_i$
$$\begin{aligned}G(y)=&(y^{l_1}+y^{l_1+1}+\cdots+y^{n_1})(y^{l_2}+y^{l_2+1}+\cdots+y^{n_2})\\&\cdots(y^{l_k}+y^{l_k+1}+\cdots+y^{n_k})\end{aligned}$$
- 带系数：$p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_kx_k=r$，$x_i\in\mathbb{N}$
$$\begin{aligned}G(y)=&(1+y^{p_1}+y^{2p_1}+\cdots)(1+y^{p_2}+y^{2p_2}+\cdots)\\&\cdots(1+y^{p_k}+y^{2p_k}+\cdots)\end{aligned}$$

正整数的拆分

	有序	无序
不允许重复	$4=4,\ 4=1+3,\ 4=3+1$	$4=4,\ 4=1+3$
允许重复	$4=4,\ 4=1+3,\ 4=3+1$ $4=2+2,\ 4=2+1+1$ $4+1+2+1,\ 4=1+1+2$ $4=1+1+1+1$	$4=4,\ 4=1+3$ $4=2+2$ $4+1+2+1$ $4=1+1+1+1$

无序拆分 将 N 无序拆分成正整数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = N$

不允许重复：$G(y) = (1 + y^{\alpha 1})(1 + y^{\alpha 2}) \cdots (1 + y^{\alpha n})$

允许重复：$G(y) = \prod_{i=1}^{n}(1 + y^{\alpha i} + y^{2\alpha i} + \cdots) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(1 - y^{\alpha i})}$

定理 22.13 把 N 有序剖分成 r 各部分且允许重复的方案数是 $\binom{N-1}{r-1}$.

- 把 N 进行任意的允许重复的有序剖分的方案数是

$$\sum_{r=1}^{N} \binom{N-1}{r-1} = 2^{N-1}$$

22.5 指数生成函数与多重集的排列问题

定义 22.7 设 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 是一个数列，它的**指数生成函数**记作 $A_e(x)$

$$A_e(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}$$

定理 22.14 设数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的指数生成函数分别为 $A_e(x)$ 和 $B_e(x)$，则

$$A_e(x) \cdot B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{x^n}{n!}$$

其中，$c_n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} a_k b_{n-k}$.

- 设 $\{a_n\}$ 是一个数列，如果 $b_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} a_k$，则

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} b_k$$

定理 22.15 设多重集 $S = \{n_1 \cdot a_1, n_2 \cdot a_2, \cdots, n_k \cdot a_k\}$. 对任意的非负整数 r，令 a_r 为 S 的 r-排列数，设数列 $\{a_r\}$ 的指数生成函数为 $A_e(x)$，则

$$A_e(x) = f_{n_1}(x) f_{n_2}(x) \cdots f_{n_k}(x)$$

其中

$$f_{n_i}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n_i}}{n_i!}, \qquad t = 1, 2, \cdots, k.$$

22. 6 Catalan 数与 Stirling 数

Catalan 数

$$\begin{cases} h_n = \sum_{k=1}^{n-1} h_k h_{n-k} & n \geq 2 \\ h_1 = 1 \end{cases} \quad \text{解得：} h_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1} \tag{22. 16}$$

- 通过不在内部相交的对角线把凸 $n+1$ 边形划分成三角形的方案数为 h_n
- 从 $(0,0)$ 点到 (n,n) 点除端点外不接触对角线的非降路径数为 $2h_n$
- 从 $(0,0)$ 点到 (n,n) 点不穿过对角线的非降路径数为 $2h_{n+1}$
- 由 n 个结点构成的二叉树种数为 h_{n+1}
- n 对括号的合法匹配为 h_n
- n 个元素的合法的出栈方案数为 h_n

第一类 Stirling 数

将多项式 $x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)$ 展开式中的 x^r 的系数**绝对值**记作 $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}$，则展开式可写为 $\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} x^n - \begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} x^{n-1} + \begin{bmatrix} n \\ n-2 \end{bmatrix} x^{n-2} - \cdots \pm \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}$. 称 $\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix}, \cdots, \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}$ 这些数为**第一类 Stirling 数**。具有以下性质

$$\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = 0, \quad \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = (n-1)!, \quad \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1, \quad \begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} = \binom{n}{2}, \quad \sum_{r=1}^{n} \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = n!$$

满足递推方程：$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = (n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ r-1 \end{bmatrix}, \qquad n > r \geq 1.$

设 S_n 为 n 元对称群，则 S_n 中含有 r 个不相交轮换的置换恰为 $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}$ 个。

第二类 Sirtling 数

把 n 个不同的球放入 r 个相同的盒子里，且没有空盒，则放球方案数记为 $\begin{Bmatrix} n \\ r \end{Bmatrix}$，称为**第二类 Stirling 数**。

$$\begin{Bmatrix} n \\ 0 \end{Bmatrix} = 0, \quad \begin{Bmatrix} n \\ 1 \end{Bmatrix} = 1, \quad \begin{Bmatrix} n \\ 2 \end{Bmatrix} = 2^{n-1} - 1, \quad \begin{Bmatrix} n \\ n-1 \end{Bmatrix} = \binom{n}{2}, \quad \begin{Bmatrix} n \\ n \end{Bmatrix} = 1$$

满足递推方程：$\begin{Bmatrix} n \\ r \end{Bmatrix} = r\begin{Bmatrix} n-1 \\ r \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} n-1 \\ r-1 \end{Bmatrix}, \qquad n > r \geq 1.$

1. 把 n 个不同的球放入 m 个相同的盒子里，允许空盒，则放球方案数为

$$\begin{Bmatrix} n \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} n \\ 2 \end{Bmatrix} + \cdots + \begin{Bmatrix} n \\ m \end{Bmatrix}.$$

2. n 个不同的球恰好放入 m 个不同的盒子里，放球方案数为 $m!\left\{{n \atop m}\right\}$.

$$\sum_{\substack{\text{满足 } n_1+n_2+\cdots+n_m=n \\ \text{的非负整数解}}} \binom{n}{n_1\ n_2\ \cdots\ n_m} = m!\left\{{n \atop m}\right\}$$

3. n 个不同的球放入 m 个不同的盒子里，允许空盒，放球方案数为

$$m^n = \binom{m}{1}\left\{{n \atop 1}\right\}\cdot 1! + \binom{m}{2}\left\{{n \atop 2}\right\}\cdot 2! + \cdots + \binom{m}{m}\left\{{n \atop m}\right\}\cdot m!$$

4.
$$\left\{{n+1 \atop r}\right\} = \binom{n}{0}\left\{{0 \atop r-1}\right\} + \binom{n}{1}\left\{{1 \atop r-1}\right\} + \cdots + \binom{n}{n}\left\{{n \atop r-1}\right\}$$

球标号	盒标号	空盒	放球方案数	对应的组合问题
否	否	否	$P_m(n) - P_{m-1}(n)$	n 无序分拆成 m 部分
否	否	是	$P_m(n)$	n 无序分拆
否	是	否	$\binom{n-1}{m-1}$	$x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n$ 的正整数解
否	是	是	$\binom{n+m-1}{m-1}$	$x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n$ 的非负整数解
是	否	否	$\left\{{n \atop m}\right\}$	第二类 Stirling 数定义
是	否	是	$\sum_{k=1}^{m}\left\{{n \atop k}\right\}$	第二类 Stirling 数性质
是	是	否	$m!\left\{{n \atop m}\right\}$	第二类 Stirling 数性质
是	是	是	$m^n = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\left\{{n \atop k}\right\}k!$	乘法法则

函数计数：$|A| = n, |B| = m$

1. A 到 B 的关系：2^{mn}
2. A 到 B 的函数：m^n
3. A 到 B 的单射函数：$P(m, n)$
4. A 到 B 的满射函数：$m!\left\{{n \atop m}\right\}$
5. A 到 B 的双射函数：$m = n, P(n, n) = n!\left\{{n \atop m}\right\} = n!$
6. A 到 B 的等价关系：$\sum_{m=1}^{n}\left\{{n \atop m}\right\}$