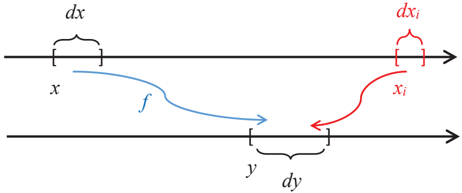
- 离散型: 伯努利、二项、泊松、几何.
- 连续型: 均匀、指数、正态.
- 分布函数: $F(x) = P(X \leqslant x)$, $F'(x) = p(x)$.
  $G(x) = P(X > x)$.
- $Y = f(X)$.



§2.6 随机变量的数学期望

1. 离散型(数学)期望

期望(expectation)的含义: 均值(mean).

- 时间平均: 大量观测值的算术平均.

  独立地进行大量重复试验, 得到X 的观测值$a_1, a_2, \cdots, a_n$.

  则观测值的平均值为$\frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n)$.

- 空间平均: 所有可能值的加权平均(总和).

  假设X 为离散型, 分布列为$P(X = x_k) = p_k, \forall k$. 那么,

  $a_1 + \cdots + a_n = \sum_k x_k n_k$, $n_k = \{m : 1 \leqslant m \leqslant n, a_m = x_k\}$.

  根据概率的频率含义, $\frac{n_k}{n} \approx p_k$. 因此,

$$\frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n) \approx \sum_k x_k p_k.$$

定义 (离散型数学期望)

假设X 是离散型, 分布列为$P(X=x_k)=p_k$, $\forall k$. 若$\sum_k x_k^{\pm} p_k$ 不全为∞, 则称$\sum_k x_k p_k$ 为X 的数学期望, 记为EX.

$x^+ = x \vee 0$, $x^- = (-x) \vee 0$.

- 充分条件: $\sum_k |x_k| p_k < \infty$, 此时称期望存在.
- 期望本质上是分布的数字特征, 即,
  若$F_X = F_Y$, 则$EX = EY$.
- Bernoulli 分布的期望: $E1_A = P(A)$.

例1: 求泊松分布的数学期望.

- 由于$X \geqslant 0$, 所以$\sum_k x_k p_k$ 有意义.
- $EX = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda.$

非负整数值随机变量的期望公式: 若X 取非负整数,
则$EX = \sum_{n=1}^{\infty} P(X \geqslant n) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X > n).$

- $EX = \sum_{k=1}^{\infty} kP(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{k} P(X = k) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} P(X = k) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X \geqslant n).$

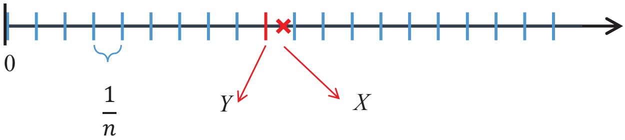
例2: 求几何分布的数学期望.

- $P(X \geqslant n) = P(X > n-1) = (1-p)^{n-1}$,
  故$EX = \sum_{n=1}^{\infty} (1-p)^{n-1} = \frac{(1-p)^0}{1-(1-p)} = \frac{1}{p}.$
- 自习其他离散型分布的数学期望.

2. 一般随机变量的数学期望.

先假设$X \geqslant 0$.

- 令Y 可取值$\frac{k}{n}$, $k = 0, 1, \cdots$, 使得:
  当$\frac{k}{n} < X \leqslant \frac{k+1}{n}$ 时$Y = \frac{k}{n}$; $X = 0$ 时, $Y = 0$.
  则Y 是离散型.



- $|X - Y| \leqslant \frac{1}{n}$, 因此直观上$|EX - EY| \leqslant \frac{1}{n}$.
- $EY = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{\infty} P(X > \frac{k}{n}) \approx \int_0^{\infty} P(X > x)dx$.

定义 (数学期望)

若$X \geqslant 0$, 记$EX = \int_0^\infty P(X > x)dx$, 并称之为$X$ 的数学期望.
若$EX^\pm$ 不全为∞, 则称$EX := EX^+ - EX^-$ 为X 的数学期望.

- 期望是分布的特征, 期望存在指$EX^\pm < \infty$, 即$E|X| < \infty$.
- 对离散型随机变量, 两种定义一致.
- 对连续型随机变量, $EX = \int xp(x)dx$, (定理6.1).
  前提是$\int_{-\infty}^0 (-x)p(x)dx$ 与$\int_0^\infty xp(x)dx$ 不同时为∞.

例3: 求指数分布随机变量X的数学期望.

- $EX=\int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x}dx=\ldots,$
  $EX=\int_0^\infty P(X>x)dx=\int_0^\infty e^{-\lambda x}dx=\frac{1}{\lambda}.$
- $\int_0^\infty xp(x)dx=\int_0^\infty xdF(x)=-\int_0^\infty xdG(x)=\int_0^\infty G(x)dx.$

例4: 求正态分布、柯西分布的期望.

- $X\sim N(0,1)$, $p(x)=p(-x)$, 因此$EX=\int xp(x)dx=0.$
  同理, $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, 则$p(\mu+x)=p(\mu-x)$, 因此$EX=\mu.$
- 柯西分布
  $p(x)=\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$, $p(x)=p(-x).$
  但是, $\int_0^\infty xp(x)dx=\infty$, 因此$EX$ 不存在!

3. 数学期望的性质

由期望的时间平均含义:

- 线性(定理6.3). $E(aX) = aEX$, $E(X+Y) = EX + EY$.
- 单调性(定理6.3). 若$X \geqslant Y$, 则$EX \geqslant EY$.
- 若$X \geqslant 0$ 且$EX = 0$, 则$X = 0$.

推导: $P(X > \frac{1}{n}) = 0$, (否则$EX \geqslant \int_0^{\frac{1}{n}} P(X > x)dx \geqslant \frac{1}{n} P(X > \frac{1}{n})$), 于是$P(X > 0) = 0$.

故$P(X = 0) = P(X \geqslant 0) - P(X > 0) = 1$.

4. 随机变量函数的期望.

由期望的空间平均含义(定理6.5):

- 离散型: $Ef(X) = \sum_k f(x_k) p_k$.
- 连续型: $Ef(X) = \int f(x) p(x) dx$.

- 自习定理6.2, 推论6.1, 6.2. 例6.1, 6.2. 跳过定理6.4.

§2.7 随机变量的方差及其他数字特征

定义 (方差)

假设EX 存在(且有限), $E(X-EX)^2$ 存在, 则称$E(X-EX)^2$ 为X 的方差, 记为$\mathrm{var}(X)$. 称$\sqrt{\mathrm{var}(X)}$ 为标准差.

- $\mathrm{var}(X) = EX^2 - (EX)^2$.
- 方差的含义: 随机变量的分散程度.

  例: 若$\mathrm{var}(X)=0$, 则$X=EX$.

  例: 正态分布$N(\mu,\sigma^2)$ 的方差为σ^2.
- 标准化: $X^* = \frac{X-EX}{\sqrt{\mathrm{var}(X)}} = \frac{X-\mu}{\sigma}$.
- $E(X-x)^2 \geqslant E(X-\mu)^2$.

  推导: $X-x = X-\mu+\mu-x$.

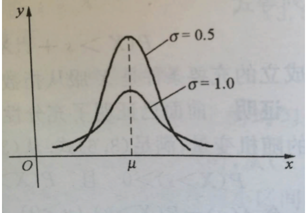


图 2.3.2

定义 (矩)

假设$E|X|^k < \infty$, 则称EX^k 为X 的k 阶矩.

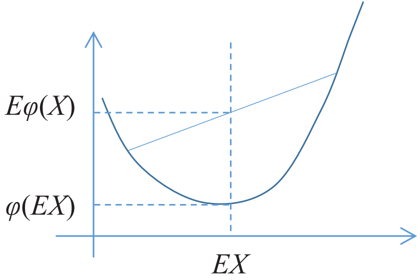
例5: 泊松分布的方差、矩.

- $p_k = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$.
- $k(k-1)p_k = \lambda^2 \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}e^{-\lambda}$, $k \geqslant 2$.
- $EX(X-1) = \lambda^2$, 从而

  $\mathrm{var}(X) = EX^2 - (EX)^2 = EX(X-1) + EX - (EX)^2 = \lambda$.
- $EX(X-1)\cdots(X-n+1) = \lambda^n$.
- $1, x, x^2, \ldots, x^n$

  $1, x, x(x-1), \ldots, x(x-1)\cdots(x-n+1)$.

- Jensen不等式: $E\varphi(X) \geqslant \varphi(EX)$, $\forall \varphi$ 凸.



- 高阶矩存在$\Rightarrow$ 低阶矩存在.

推导: 若$k > \ell$, 令$\varphi(x) = |x|^{k/\ell}$ 凸. $E|X|^k = E\varphi(|X|^\ell) \geqslant \varphi(E|X|^\ell)$.

- 方差存在当且仅当二阶矩存在. $\mathrm{var}(X) = EX^2 - (EX)^2$.
- 自习定义7.3, 7.4, 7.5, 7.6, 表2.7.1. 跳过定理7.1.