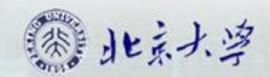
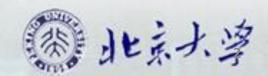
#### 单元1.3 谓词逻辑预备知识

第一编集合论第一章集合1.1预备知识(下)



# 内容提要

- 一阶谓词逻辑中的
  - 个体、谓词、量词等基本概念
  - 几个重要的等值式
  - 推理定律



# 个体

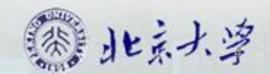
将可以独立存在的客体(具体事务或抽象概念)称为个 体或个体词,并用a,b,c,...表示个体常元,用x,y,z,...表示 个体变元。(个体的函数还是个体,例如,设a.b是数, f(a,b)可以表示a和b的运算结果,如a+b、a•b等。) 将个体变元的取值范围称为个体域,个体域可以是有穷 或无穷集合。人们称由宇宙间一切事务组成的个体域为 全总个体域。

然归来大学

#### 谓词

将表示个体性质或彼此之间关系的词称为谓词, 常用F,G,H,...表示谓词常元或谓词变元,用F(x)表示 "x具有性质F",用F(x,y)表示"x和y具有关系F"。 例如,若F(x)表示"x是黑色的",a表示黑板, 则F(a)表示"黑板是黑色的";

若F(x,y)表示"x大于y",则F(5,2)表示"5大于2"。



#### 量词、全称量词

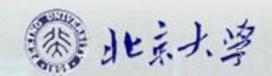
称表示数量的词为量词。

全称量词是自然语言中的"所有的"、"一切的"、 "任意的"、"每一个"、"都"等的统称,

用符号"∀"表示。

用∀x表示个体域里的所有x;

用∀xF(x)表示个体域里所有x都有性质F。



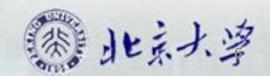
## 存在量词

存在量词是自然语言中的"有一个"、"至少有一个"、"存在着"、"有的"等的统称,

用符号"3"表示。

用∃x表示存在个体域里的x;

用∃xF(x)表示在个体域里存在x具有性质F。



# 命题符号化

一阶逻辑中命题符号化的两个基本公式:

个体域中所有有性质F的个体都有性质G,应符号化为

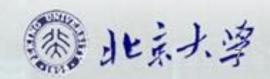
 $\forall x (F(x) \rightarrow G(x)), 其中$ 

**F(x)**: x具有性质**F**, **G(x)**: x具有性质**G**。

个体域中存在有性质F同时有性质G的个体,应符号化为

∃x ( F(x) ∧ G(x) ),其中

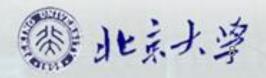
**F(x)**: x具有性质**F**, **G(x)**: x具有性质**G**。



# 例

将下面命题符号化

- ① 人都吃饭;
- ②有人喜欢吃糖;
- ③ 男人都比女人跑得快(这是假命题)。 使用全总个体域。



# 解12

① 人都吃饭;

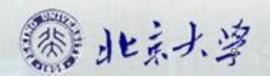
令F(x): x是人, G(x): x吃饭。

命题符号化为 ∀x(F(x)→G(x))。

②有人喜欢吃糖;

令F(x): x是人, G(x): x喜欢吃糖。

命题符号化为∃x(F(x)∧G(x))。



# 解3

③ 男人都比女人跑得快(这是假命题)。

令 F(x): x是男人, G(y): y是女人,

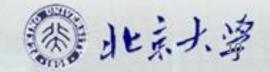
H(x,y): x比y跑得快。

命题符号化为

$$\forall x ( F(x) \rightarrow \forall y ( G(y) \rightarrow H(x,y) ) )$$

等值形式为

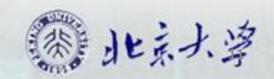
$$\forall x \ \forall y \ (F(x) \land G(y) \rightarrow H(x,y))$$



# 一阶谓词逻辑公式及其分类

一阶谓词逻辑公式也简称为公式,它的形成规则类似于命题逻辑公式,只需加上一条,即若A是公式,则∀x A及∃x A也都是公式。

在公式∀x A和∃x A中,称x为指导变元,称A为相应 量词的辖域。在∀x和∃x的辖域中,x的所有出现都 称为是约束出现,A中不是约束出现的变元称为自 由出现。



#### 例

$$\forall x ( F(x) \rightarrow \exists y ( G(y) \land H(x,y,z) ) )$$

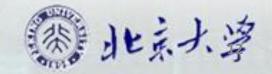
∀x的辖域为 ( F(x) → ∃y ( G(y) ∧ H(x,y,z) ) ),

∃y的辖域为 ( G(y) ∧ H(x,y,z) ) ,

除z是自由出现的变元外,其他变元都是约束出现的。

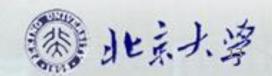
$$\forall x (F(x) \rightarrow \exists y (G(y) \land H(x,y,z)))$$

$$\forall x ( F(x) \rightarrow \exists y ( G(y) \land H(x,y,z) ) )$$



#### 解释

对于给定的公式A,如果指定A的个体域为已知的D,并用特定的个体常元取代A中的个体常元,用特定函数取代A中的函数变元,用特定的谓词取代A中的谓词变元,则就构成了A的一个解释。 给定的一个公式A可以有多种解释。



# 例

给定公式A为 $\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$ ,有多种解释。

解释①:取个体域为实数集合,

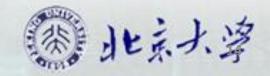
F(x): x是有理数, G(x): x能表示成分数,

A解释为"有理数都能表示成分数",这是真命题。

解释②:取个体域为全总个体域,

F(x): x是人, G(x): x长着黑头发,

A解释为"人都长着黑头发",这是假命题。



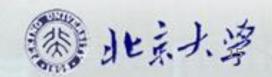
# 永真、永假、可满足、等值式

若A在任何解释下都为真,则称A为永真式。

若A在任何解释下都为假,则称A为永假式。

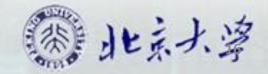
若A至少存在一个成真的解释,则称A为可满足式。

若A→B是永真式,则称A与B是等值的,记为A⇔B, 并称A⇔B为等值式。



# 基本等值式①②

- ① 在有限个体域D= $\{a_1,a_2,...,a_n\}$ 中消去量词等值式:
  - (1)  $\forall x A(x) \Leftrightarrow A(a_1) \land A(a_2) \land ... \land A(a_n)$
  - (2)  $\exists x A(x) \Leftrightarrow A(a_1) \lor A(a_2) \lor ... \lor A(a_n)$
- ② 量词否定等值式:
  - $(1) \neg \forall x A(x) \Leftrightarrow \exists x \neg A(x)$
  - $(2) \neg \exists x A(x) \Leftrightarrow \forall x \neg A(x)$



## 基本等值式③

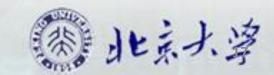
③量词辖域收缩与扩张等值式(B中不含x):

(1) 
$$\forall x(A(x)\lor B)\Leftrightarrow \forall xA(x)\lor B$$
, (2)  $\forall x(A(x)\land B)\Leftrightarrow \forall xA(x)\land B$ 

$$(3) \forall x(A(x) \rightarrow B) \Leftrightarrow \exists xA(x) \rightarrow B, (4) \forall x(B \rightarrow A(x)) \Leftrightarrow B \rightarrow \forall xA(x)$$

(5) 
$$\exists x(A(x)\lor B)\Leftrightarrow \exists xA(x)\lor B$$
, (6)  $\exists x(A(x)\land B)\Leftrightarrow \exists xA(x)\land B$ 

$$(7) \exists x(A(x) \rightarrow B) \Leftrightarrow \forall xA(x) \rightarrow B, (8) \exists x(B \rightarrow A(x)) \Leftrightarrow B \rightarrow \exists xA(x)$$



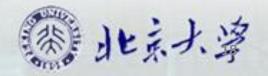
# 基本等值式④

- ④ 量词分配等值式
- (1)  $\forall x(A(x) \land B(x)) \Leftrightarrow \forall xA(x) \land \forall xB(x)$

说明:全称量词对 "∧"有分配律,但 全称量词对 "∨"不适合分配律。

(2)  $\exists x(A(x)\lor B(x)) \Leftrightarrow \exists xA(x)\lor \exists xB(x)$ 

说明:存在量词对 "√"有分配律,但 存在量词对 "∧"不适合分配律。

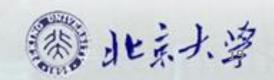


# 前束范式

若公式A具有形式 $Q_1x_1Q_2x_2...Q_kx_k$ B,则称A为前束范式,其中 $Q_i$ (1 $\leq$ i $\leq$ k)为 $\forall$ 或 $\exists$ ,B中不含量词。

求前束范式时用基本等值式和换名规则。

换名规则:将公式A中某量词辖域中出现的某个约束出现的个体变元及相应的指导变元 $x_i$ ,都改成公式A中没有出现过的 $x_i$ ,所得公式A' $\Leftrightarrow$ A。



# 例

 $\forall xF(x) \lor \neg \exists xG(x,y)$ 

 $\Leftrightarrow \forall xF(x)\lor \forall x\neg G(x,y)$ 

(量词否定等值式)

 $\Leftrightarrow \forall xF(x)\lor \forall z\neg G(z,y)$ 

(换名规则)

 $\Leftrightarrow \forall x(F(x) \lor \forall z \neg G(z,y))$ 

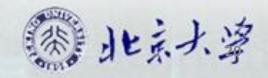
(辖域扩张等值式)

 $\Leftrightarrow \forall x \forall z (F(x) \lor \neg G(z,y))$ 

(辖域扩张等值式)

 $\Leftrightarrow \forall x \forall z (G(z,y) \rightarrow F(x))$ 

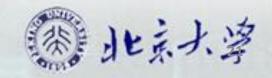
(蕴涵等值式)



#### 重要的推理定律

- (1)  $\forall x A(x) \lor \forall x B(x) \Rightarrow \forall x (A(x) \lor B(x))$
- (2)  $\exists x(A(x) \land B(x)) \Rightarrow \exists xA(x) \land \exists xB(x)$
- $(3) \ \forall x(A(x) \rightarrow B(x)) \ \Rightarrow \ \forall xA(x) \rightarrow \forall xB(x)$
- $(4) \ \forall x(A(x) \rightarrow B(x)) \Rightarrow \exists xA(x) \rightarrow \exists xB(x)$

说明:在使用以上4条推理定律时,千万注意,别将 它们当成等值式用,这样会犯错误的。



## 小结

逻辑符号: 个体词 a,b,c,...、谓词 F(x), G(x,y),H(x,y,z),...、

量词∀∃

逻辑概念: 公式、解释、永真式、永假式、可满足式、

等值式、等值演算、推理定律、前束范式

逻辑规则: 换名规则

