单元10.2 欧拉公式与平面图的判断

第二编 图论　第十一章 平面图

11.2 欧拉公式、11.3 平面图的判断

内容提要

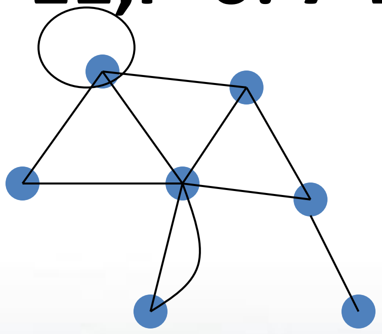
- 欧拉公式 (平面图的必要条件)
- 库拉图斯基定理(平面图的充要条件)

欧拉公式

- 欧拉公式: 设G是连通平面图, 则

$$n\text{-}m+r=2$$

  其中r是G的面数.
- 例: n=7,m=11,r=6: 7-11+6=2. #



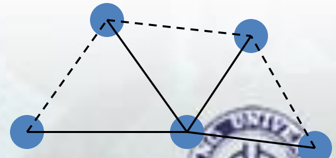
欧拉公式(推广形式)

- 欧拉公式: 设G是平面图, 则

$$n-m+r=1+p$$

其中r是G的面数, p是G的连通分支数

- 证明:(破圈法)任选一个回路,删除回路上1边,m’=m-1,这边分隔的2个面合并,r’=r-1, 所以n-m+r=n-m’+r’. 到最后无回路时是森林, m’’=n-p, r’’=1, 即n-m+r=n-m’’+r’’=1+p. #



定理11.8

- **定理11. 8** 设G是连通平面图, G的各面的次数至少是l (≥3), 则

$$m \le (n-2)l/(l-2)$$

- **证明** r=2+m-n,

$$2m=\Sigma^{r}_{i=1}\deg(R_i)\ge l\bullet r=l\bullet(2+m-n),$$

所以 $m\le(n-2)l/(l-2)$. #

定理11.9

定理11. 9 设平面图G有p个连通分支, G的各面的次数至少是l (≥3), 则

$$m \le (n-p-1)l/(l-2).\quad \#$$

推论

推论 K_5和$K_{3,3}$都不是平面图.

证明 (反证) 假设K_5和$K_{3,3}$都是平面图.

(1) K_5是简单图, 所以$l=3$,

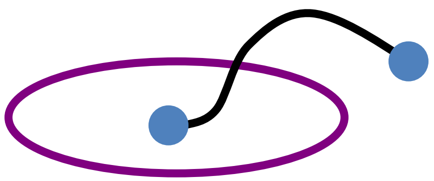
$10=m\le(n-2)l/(l-2)=(5-2)3/(3-2)=9$, 矛盾!

(2) $K_{3,3}$是偶图,无奇圈, 所以$l=4$,

$9=m\le(n-2)l/(l-2)=(6-2)4/(4-2)=8$, 矛盾! #

Jordan定理

- Jordan曲线把平面分为2部分，连接内部与外部点的任意曲线必然与Jordan曲线相交.



- **Jordan曲线**: 自身不相交的封闭曲线

定理11.10

定理11. 10 设n(≥3)阶简单平面图G有m条边, 则

$$m \leq 3n-6.$$

证明 G是简单图, 所以$l \geq 3$,

$$m \leq (n-p-1)l/(l-2) \leq (n-2)3 = 3n-6,$$

其中$p \geq 1$, $l/(l-2)$在$l=3$时达到最大值. #

定理11.11

定理11. 11　设**n(≥3)**阶简单极大平面图**G**有**m**条边, 则 **m=3n-6.**

证明 **G**是极大平面图, 所以 **2m=3r.**

G一定连通, 所以 **r=2+m-n. #**

定理11.12

定理11. 12　设G是简单平面图, 则$\delta(G)\le 5$.

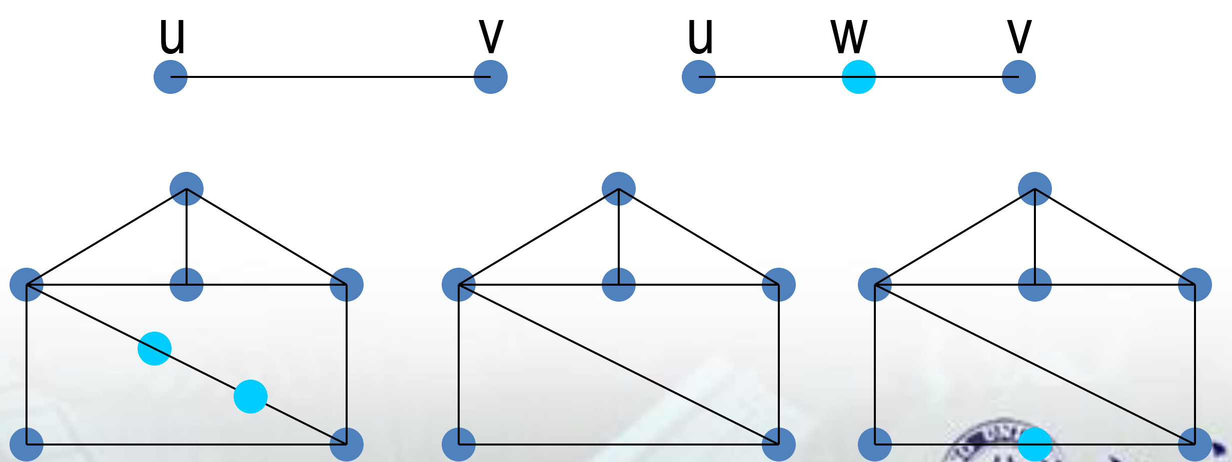
证明　(反证) 设$n\ge 6$并且$\delta\ge 6$, 则

$$2m=\Sigma d(v)\ge n\delta\ge 6n \Rightarrow m\ge 3n,$$

与 $m\le 3n-6$ 矛盾. #

同胚

- 插入2度顶点: 把(u,v)变成(u,w),(w,v)
- 删除2度顶点: deg(w)=2, 把(u,w),(w,v)变成(u,v)
- 同胚: 反复插入或删除2度顶点后同构

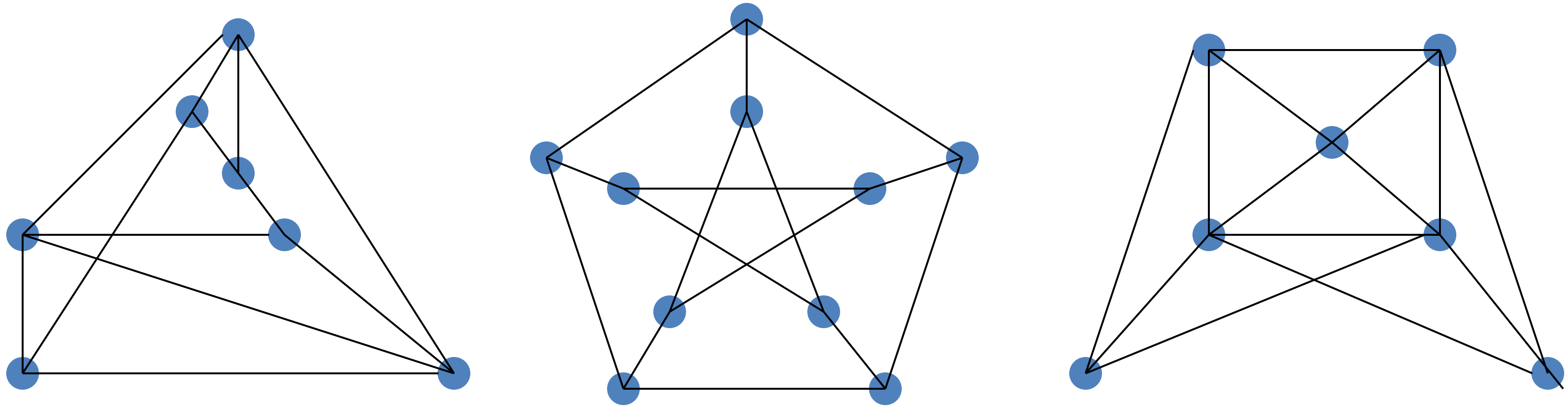


Kuratowski定理

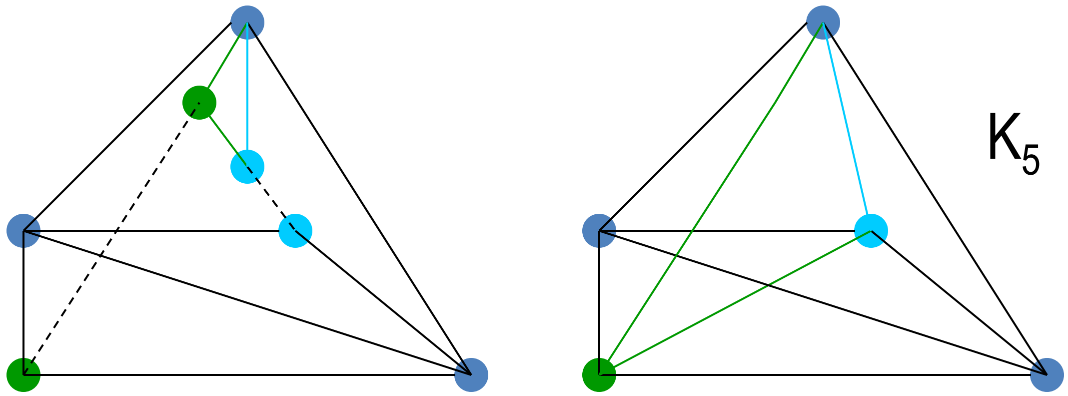
定理11. 13　图G是平面图 $\Leftrightarrow$ G没有与K_5或$K_{3,3}$同胚的子图

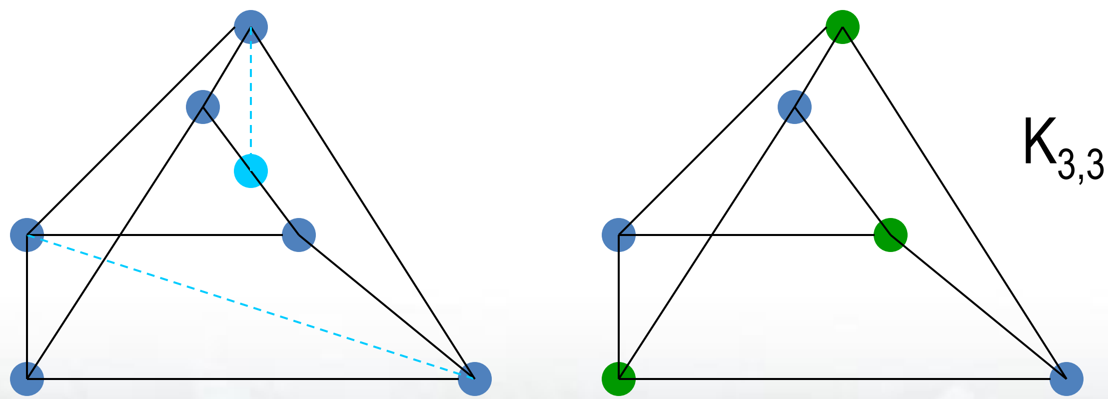
定理11. 14　图G是平面图 $\Leftrightarrow$ G没有可以边收缩到K_5或$K_{3,3}$的子图

例11.3

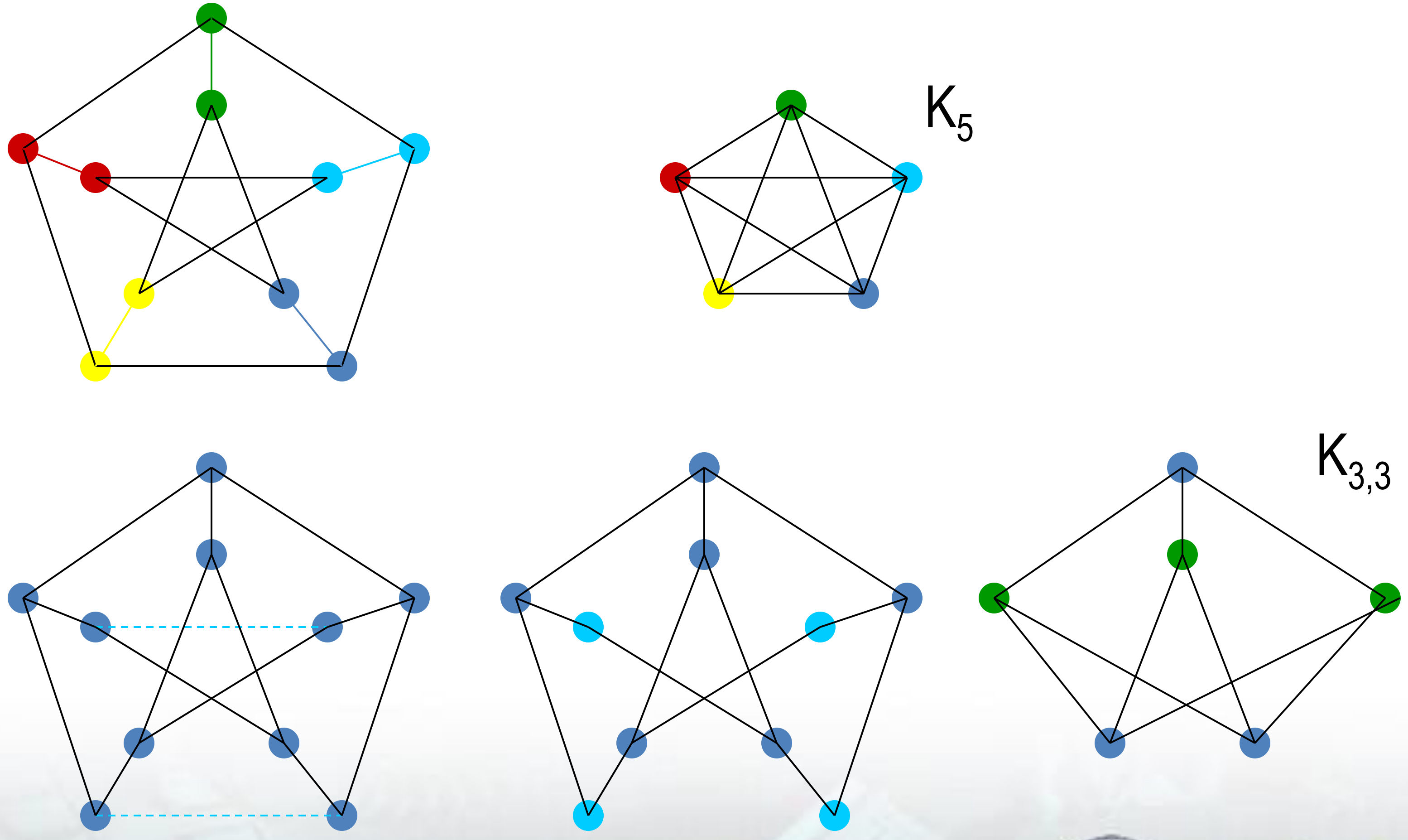


例11.3(1)

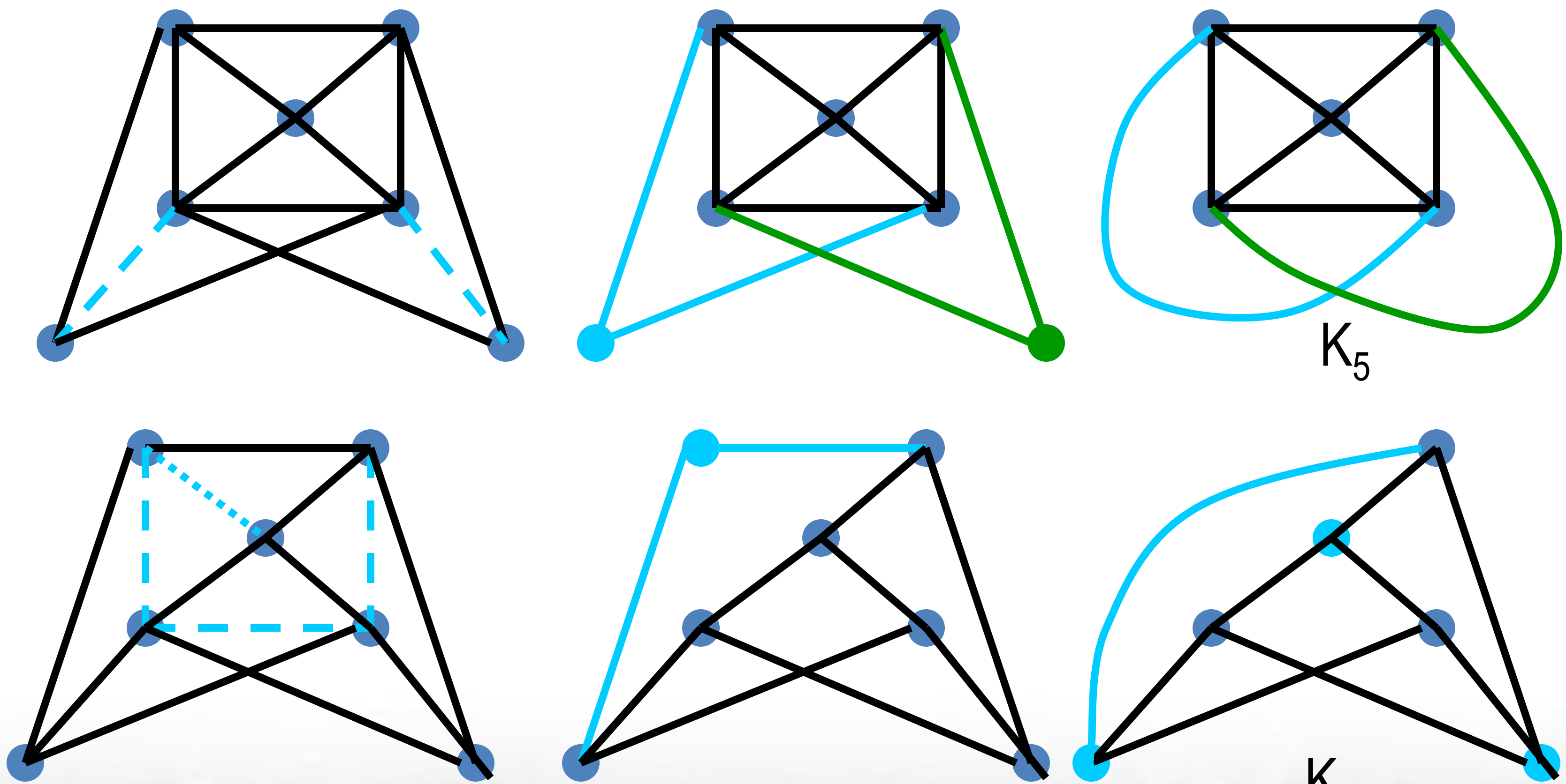




例11.3(2)

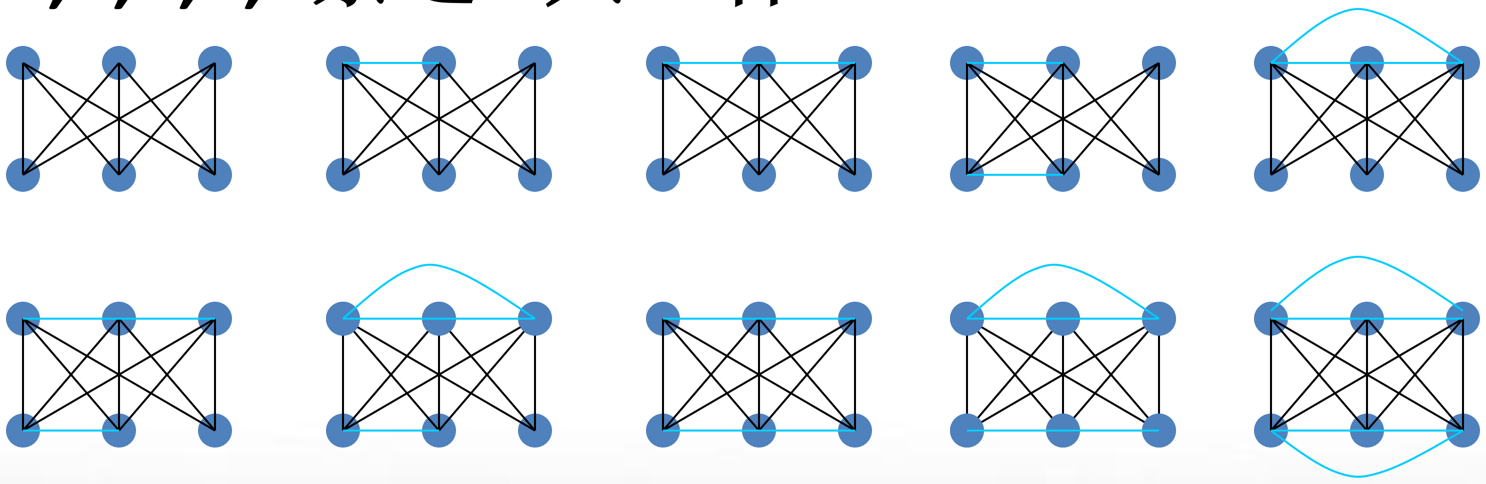


例11.3(3)



例11.6

- K_6的含$K_{3,3}$的非同构子图有哪些?
- 解: K_6有15条边, $K_{3,3}$有9条边, 分别给$K_{3,3}$加0,1,2,3,4,5,6条边: 共10种. #



小结

- 欧拉公式
- Kuratowski定理