复习.

- 矩估计. 样本矩= 真实矩.
- 无偏估计. $E_\theta T(\vec{X}) = g(\theta), \forall\theta.$
- 最小方差无偏估计UMVUE.

  (1) 无偏: $E_\theta T(\vec{X}) = g(\theta)$,

  (2) 最小方差: $\mathrm{var}_\theta T(\vec{X}) \leqslant \mathrm{var}_\theta \tilde{T}(\vec{X}), \forall\theta.$
- 指数族. $p_\theta(x) = S(\theta)h(x)\exp\{\sum_{k=1}^m C_k(\theta)T_k(x)\}.$

  若干条件下, $\phi(T_1(\vec{X}), \cdots, T_m(\vec{X}))$ 为UMVUE.

  正态总体时, $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ 和$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 分别是μ, σ^2 的UMVUE.

§7.5 估计的相合性, §7.6 估计的渐近分布

以$g(\theta)$ 的估计$\hat{\theta}_n = T(X_1, \cdots, X_n)$ 为例.

- $\hat{\theta}_n$ 具有<u>相合性</u> 指:
$$\hat{\theta}_n \xrightarrow{P_\theta} g(\theta)(n \to \infty), \forall \theta.$$
数据加大, 估计变精确.
    - LLN: 样本矩$\xrightarrow{P_\theta}$ 总体矩. 矩估计具有相合性(定理5.2).
    - 例5.2. $X \sim U[0, \theta]$. 最大似然估计$\hat{\theta}_n = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} X_i$ 相合.
    事实上,
    $P_\theta(|\hat{\theta}_n - \theta| \geqslant \varepsilon) = P(\hat{\theta}_n \leqslant \theta - \varepsilon) = P(X \leqslant \theta - \varepsilon)^n \to 0.$
- $\hat{\theta}_n$ 是<u>渐近正态</u> 的指: $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} Z \sim N(0, \sigma^2(\theta)), \forall \theta.$
    - 例6.1 总体$X \sim N(\mu, \sigma^2)$. $\hat{\mu}_n = \bar{X}$.
    CLT: $\sqrt{n}(\bar{X} - \mu) = \sigma \frac{S_n - ES_n}{\sqrt{n\sigma^2}} \xrightarrow{d} Z \sim N(0, \sigma^2)$, 渐近正态.

§7.7 置信区间和置信限

- 目标: 给出两个统计量$\bar{T} = \bar{T}(\vec{X})$, $\underline{T} = \underline{T}(\vec{X})$, 使得

$$P_\theta(\underline{T} \leqslant g(\theta) \leqslant \bar{T}) \geqslant 1 - \alpha;$$

或找出统计量$\bar{T} = \bar{T}(\vec{X}) \quad (\underline{T} = \underline{T}(\vec{X}))$,

$$P_\theta(g(\theta) \leqslant \bar{T}) \geqslant 1 - \alpha \quad (P_\theta(\underline{T} \leqslant g(\theta)) \geqslant 1 - \alpha).$$

- 置信区间$[\underline{T}, \bar{T}]$, 或置信上限$\bar{T}$(下限$\underline{T}$).
- 置信度(置信水平) $1 - \alpha$. 概率的主观置信度含义.
  α: 犯错概率.

定义7.2. 枢轴量 指$h=h(X_1,\cdots,X_n,g(\theta))$ 的分布与θ 无关.

即有恒定的分布函数F 使得$P_\theta(h\leqslant x)=F(x),\ \forall\theta.$

枢轴量h vs 统计量$T=T(\vec{X})$:

- 从定义的角度: T 只含数据, h 含数据和待估量$g(\theta)$.
- 从概率的角度: T 的分布依赖于θ;
  h 的分布不依赖于θ, 可依赖于n.
- 从统计的角度: T 的值视为已知, 完全由数据确定;
  h 的值视为未知, 依赖于θ, 而θ 未知.

枢轴量法:

- 利用h (根据置信度) 选取a,b, 使得: $P(a\leqslant h\leqslant b)\geqslant 1-\alpha$.
- 将$a\leqslant h\leqslant b$ 化为$\underline{T}\leqslant g(\theta)\leqslant \bar{T}$,
  于是$P_\theta(\underline{T}\leqslant g(\theta)\leqslant \bar{T})\geqslant 1-\alpha$.

例7.2+7.3. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 其中σ^2 已知(例如, $X \sim N(\mu, 1)$).
求: μ 的置信度为$1-\alpha$ 的(1) 置信区间, (2) 置信上限.

- 取$h = h(\vec{X}, \mu) = S_n^* = \frac{n\bar{X} - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma} \sim N(0,1)$.
- (1) 查表取x 使得$P(|Z| \leqslant x) = 1-\alpha$.
  于是$P(|\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma}| \leqslant x) = 1-\alpha$.
- 概率论角度: $\bar{X} \in [\mu - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}x, \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}x]$,
  随机点$\bar{X}$ 落在确定区间中, 事件, 计算概率.
  统计学角度: $\mu \in [\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}x, \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}x]$,
  已知区间(可由数据得到)覆盖未知点μ.
- (2) 上限: 找$\bar{\mu}$使得$P(\mu \leqslant \bar{\mu}) = 1-\alpha$. 故查表取$y$ 使得$P(Z \geqslant -y) = 1-\alpha$, 于是$P(\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma} \geqslant -y) = 1-\alpha$,
  $P(\mu \leqslant \bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}y) = 1-\alpha$, $\bar{\mu} = \bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}y$.

例7.4. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 其中σ^2 未知. 求: μ 的置信度为$1-\alpha$ 的置信区间.

- $\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma} \sim N(0,1)$ 仍然成立.
- 不是枢轴量!

  枢轴量只能含数据和待估量, 不含(其他未知的)讨厌参数σ^2.

  用$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma}$ 给出的区间, 端点含σ^2, 不是统计量.
- 用统计量$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = \hat{\sigma}^2$ 代替σ.

  将证明

$$h(\vec{X}, \mu) := \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sqrt{S^2}}$$

  是枢轴量, 其分布是$t(n-1)$.
- 取x 使得$P(|h| \leqslant x) = 1-\alpha$ (附表2), 得到$[\bar{X} - \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}x, \bar{X} + \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}x]$.

目标: $h(\vec{X},\mu)=\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sqrt{S^2}}=\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}}$ 是枢轴量.

- $\chi^2(n)$, $\underline{\text{自由度为}n}$ 的$\underline{\chi^2\text{分布}}$ 指$Z_1^2+\cdots+Z_n^2$ 的分布, 其中$Z_1,\cdots,Z_n\sim$ i.i.d. $N(0,1)$.
- $t(n)$, $\underline{\text{自由度为}n}$ 的$\underline{t\text{分布}}$ 指$\frac{Z}{\sqrt{\frac{1}{n}T_n}}$ 的分布,
  其中$Z\sim N(0,1)$, $T_n\sim\chi^2(n)$, 且Z,T_n 相互独立.
- **定理7.1.** 存在$Z_1,\cdots,Z_n\sim N(0,1)$ i.i.d. 使得
  分子$\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)=\sigma Z_1$,
  分母中的$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2=\sigma^2(Z_2^2+\cdots Z_n^2)$.
  于是$h(\vec{X},\mu)\sim t(n-1)$.

定理7.1的证明. 令$Y_i = X_i^*$, 即$X_i = \mu + \sigma Y_i$,
则$Y_1, \cdots, Y_n \sim$ i.i.d. $N(0,1)$.

- 分子$\sqrt{n}(\bar{X} - \mu) = \sigma \sqrt{n} \bar{Y}$.
  分母中的$\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \sigma^2 \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2$.
- 取正交矩阵$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{n}} \\ * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & * \end{pmatrix}$. 令$Z_i = \sum_k a_{ik} Y_k$.
- $\vec{Z} \stackrel{d}{=} \vec{Y}$: $EZ_i = EY_i = 0$,
  $EZ_iZ_j = \sum_{k,\ell} a_{ik} a_{j\ell} EY_kY_\ell = \sum_k a_{ik} a_{jk} = 1_{\{i=j\}} = EY_iY_j$.
- $Z_1 = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_i Y_i = \sqrt{n}\bar{Y}$, $\frac{1}{n}\sum_i (Y_i - \bar{Y})^2 = \frac{1}{n}\sum_i Y_i^2 - \bar{Y}^2$, 即

$$\sum_i (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum_i Z_i^2 - Z_1^2 = Z_2^2 + \cdots + Z_n^2.$$

总结: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. 求μ 的置信度为$1-\alpha$ 的置信区间.

- 若σ^2 已知, 取$h_1 = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma}$,
  得到$[\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}x, \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}x]$, $P(|Z| > x) = \alpha$.
- 若σ^2 未知, 取$h_2 = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sqrt{S^2}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\hat{\sigma}}$,
  得到$[\bar{X} - \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}y, \bar{X} + \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}y]$, 其中$P(|T_{n-1}| > y) = \alpha$.
- 若σ^2 已知, h_2 仍然是枢轴量, 但不如h_1 好:
  (1) 以$\alpha = 0.2$ 为例. 附表2表明y_{n-1} 单调下降, 故$y_n \geqslant y_\infty$.
  而$y_\infty = x$, 因为$T_{n-1} \overset{d}{=} \frac{Z_1}{\sqrt{\frac{1}{n-1}(Z_2^2+\cdots Z_n^2)}} \overset{d}{\to} Z_1$.
  (2) σ 是确定的, 但$\hat{\sigma}$ 是随机的.
  (3) 用h_2 相当于少用了σ^2 的信息, 因此估计不精确.

例7.5. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. 试求σ^2 的置信度为$1-\alpha$ 的置信上限.

- $(n-1)S^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \sigma^2 \sum_{i=2}^n Z_i^2$.
  故$h(\vec{X}, \sigma^2) := \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$.
- 希望σ^2 小, 因此$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ 大. 从而, 取x 使
  得$P(\chi^2(n-1) \geqslant x) = 1-\alpha$.
  于是$P(\sigma^2 \leqslant \frac{(n-1)S^2}{x} =: \overline{\sigma^2}) = 1-\alpha$.
- 一般来说, 目标是估计σ^2 的上限.

例7.1. $X \sim \text{Exp}(\lambda)$. 求$\lambda$的置信度为$1-\alpha$ 的置信区间.

- $P(X > x) = e^{-\lambda x}$, $EX = \frac{1}{\lambda}$.
  指数分布乘以常数后还是指数分布: $P(X > ax) = e^{-a\lambda x}$.
  利用期望调参数: $\frac{1}{a}\lambda X \sim \text{Exp}(a)$ $(\because \frac{1}{a}\lambda EX = \frac{1}{a})$.
  取$a = 1$, $\lambda X \sim \text{Exp}(1)$; 取$a = \frac{1}{2}$, $2\lambda X \sim \text{Exp}(\frac{1}{2})$.
- Z_1, Z_2 i.i.d.$\sim N(0,1)$, 则$Z_1^2 + Z_2^2 \sim \text{Exp}(\frac{1}{2})$. 因为
  $R = \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}$ 有密度函数$re^{-\frac{r^2}{2}}$, $r > 0$. (第八次课)
  R^2 的密度为$p(x) \overset{r=\sqrt{x}}{=} re^{-\frac{r^2}{2}}\frac{dr}{dx} = re^{-\frac{r^2}{2}}\frac{1}{2r} = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}$, $x > 0$.
- $2\lambda\bar{X} = \frac{1}{n}(2\lambda X_1 + \cdots + 2\lambda X_n) =: h$ 为枢轴量.
  其中$\sum_{i=1}^n 2\lambda X_i \overset{d}{=} Z_1^2 + \cdots + Z_{2n}^2 = \chi_{2n}^2$ 服从$\chi^2(2n)$.
- 取a, b 使得$P(\chi_{2n}^2 < a) = P(\chi_{2n}^2 > b) = \frac{1}{2}\alpha$, (附表3)
  知$P(a \leqslant 2\lambda n\bar{X} \leqslant b) = 1-\alpha$, 置信区间$[\frac{a}{2n\bar{X}}, \frac{b}{2n\bar{X}}]$.