第八章、假设检验

- 第十六次课

  §8.1 问题的提法

  §8.2 N-P引理和似然比检验

- 第十七次课

  §8.3 单参数模型中的检验

  §8.4 广义似然比检验和关于正态总体参数的检验

- 第十八次课

  §8.4 广义似然比检验和关于正态总体参数的检验(续)

  §8.6 拟合优度检验

§8.1 问题的提法

例1.1. 200件产品, b 件次品. 不合格率$p = \frac{b}{200} \leqslant 3\%$.

- 抽查10件, 观察次品数(例如: $x = 2$).
- 与估计不同之处.

  估计: 输出$\hat{p}$ 的值.

  检验: 回答"$p \leqslant 3\%$" 是否成立.

  (例如: $\frac{x}{10} = 20\%$ 太大, 不成立).

例1.2. 纸币长度$X \sim N(\mu, \sigma^2)$. 要求: $\mu = 155\text{mm}$.

- 测量10张纸币的长度, 得到数据$x_1, \cdots, x_{10}$.
- 与估计不同之处.

  估计: 输出点估计$\bar{x}$ 或区间估计$[\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon]$.

  检验: 回答是否接受"$\mu = 155\text{mm}$".

检验与估计相同之处.

- 模型: $X \sim F_\theta$, $\theta \in \Theta$. 对θ 做出一些判断.
- 方法: 抽样, 产生数据$X_1, \cdots, X_n \sim$ i.i.d. F_θ.

检验与估计不同之处.

- 原假设$H_0 : \theta \in \Theta_0$.
  例如: $H_0 : p = \frac{b}{200} \leqslant 3\%$ 或$H_0 : \mu = 155$.
- 备择假设$H_1 : \theta \in \Theta_1 = \Theta \backslash \Theta_0$.
- 检验问题. $H_0 : \theta \in \Theta_0 \leftrightarrow H_1 : \theta \in \Theta_1$.
- 回答接受 H_0, 还是拒绝 H_0.

检验方法.

- 给出一个否定域 $\mathcal{W}$.
  若$\vec{x} \in \mathcal{W}$, 则拒绝(否定) H_0; 若$\vec{x} \notin \mathcal{W}$, 则接受$H_0$.
- 否定域$\mathcal{W}$ = 检验方法= 是否拒绝H_0 的判断依据.
  先定好检验方法再处理数据. 不可以根据数据选择否定域.
- 第一类错误(以真当假, 错杀好人): H_0 为真, 拒绝H_0;
  犯错概率$P_\theta(\vec{X} \in \mathcal{W})$, $\theta \in \Theta_0$.
- 第二类错误(以假当真, 错放坏人): H_0 为假, 接受H_0.
  犯错概率$P_\theta(\vec{X} \notin \mathcal{W})$, $\theta \in \Theta_1$.
- 两类错误的对立: 数据量不增加, 则不能指望都小.
- 目标: 选择$\mathcal{W}$, 首先保证第一类错误概率$\leqslant \alpha$, 然后尽量减小第二类错误的概率.

- (显著性)水平α: $P_\theta(\vec{X} \in \mathcal{W}) \leqslant \alpha$, $\forall\theta \in \Theta_0$.
  不希望“H_0 为真”被错判为“H_0 为假”.
  故, 首先控制以真当假的犯错率.
- 一致最大功效(Uniformly Most Powerful, UMP)否定域:
  (1) 水平为α, 保证第一类错误概率$\leqslant \alpha$.
  (2) 若$\widetilde{\mathcal{W}}$ 也是水平为α 的否定域,
  则$P_\theta(\vec{X} \notin \mathcal{W}) \leqslant P_\theta(\vec{X} \notin \widetilde{\mathcal{W}})$, $\forall\theta \in \Theta_1$.
  尽量减小第二类错误的概率. (某种意义下最优).
- 功效函数$P_\theta(\vec{X} \in \mathcal{W})$.
  (2) 即$P_\theta(\vec{X} \in \mathcal{W}) \geqslant P_\theta(\vec{X} \in \widetilde{\mathcal{W}})$, $\forall\theta \in \Theta_1$. $\mathcal{W}$ 的功效最大.

- 无偏否定域$\mathcal{W}$: 若对任意$\theta_0 \in \Theta_0$ 和$\theta_1 \in \Theta_1$均有

$$P_{\theta_0}(\vec{X} \in \mathcal{W}) \leqslant \alpha \leqslant P_{\theta_1}(\vec{X} \in \mathcal{W}),$$

则称$\mathcal{W}$ 为检验问题(Θ_0, Θ_1)的水平为α的无偏否定域.

- 最优无偏否定域:

(1)$\mathcal{W}$是水平为α的无偏否定域;

(2)对任意其他水平为α的无偏否定域$\widetilde{\mathcal{W}}$, 均有

$$P_{\theta_1}(\vec{X} \in \widetilde{\mathcal{W}}) \leqslant P_{\theta_1}(\vec{X} \in \mathcal{W}), \quad \theta_1 \in \Theta_1.$$

原假设的选择.

- $P_\theta(\vec{X} \in \mathcal{W}) \leqslant \alpha,\ \theta \in \Theta_0$.
  即, 不希望H_0 为真被错判为H_0 为假.
- **例1.6.** 药品检验. 药效$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 已知.
  若$\mu \geqslant \mu_0$, 则药有效. 否则, 药无效.
- 保护患者: 不希望把无效药错判为有效药.
  $H_0: \mu \leqslant \mu_0 \leftrightarrow H_1: \mu > \mu_0$.
- 保护药厂: 不希望把有效药错判为无效药.
  $H_0: \mu \geqslant \mu_0 \leftrightarrow H_1: \mu < \mu_0$.

拒绝vs 接受H_0.

水平为$\alpha = 0.05$ 的否定域$\mathcal{W}$: $P_\theta(\vec{X} \in \mathcal{W}) \leqslant \alpha$, $\theta \in \Theta_0$.

- 拒绝H_0: $\vec{X} \in \mathcal{W}$.
  拒绝理由: 小概率事件不发生.
  $P_{\theta_0}(\vec{X} \in \mathcal{W}) = \alpha$, 因此$\vec{X} \in \mathcal{W}$ 是小概率事件.
- 拒绝H_0 = 有证据表明H_0 不成立.
  类似于反证法, "有矛盾, 故假设不成立." 强烈的否定!
- 接受H_0: $\vec{X} \notin \mathcal{W}$.
  $P_{\theta_0}(\vec{X} \notin \mathcal{W}) = 1 - \alpha$, 大. 但是, $P_{\theta_1}(\vec{X} \notin \mathcal{W})$ 可能也很大.
- 接受= 不拒绝= 没有证据表明H_0 不成立.
  接受≠ 有证据表明H_0 成立, 需进一步检验. 微弱的肯定.

§8.2 N-P引理和似然比检验

$X \sim F_\theta$, $\Theta = \{\theta_0, \theta_1\}$. $H_0 : \theta = \theta_0 \leftrightarrow H_1 : \theta = \theta_1$.

定理2.1. Neyman-Pearson 引理(以连续型为例):

- 似然函数$L(\vec{x}, \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta)$.
- 似然比: $\frac{L(\vec{x},\theta_1)}{L(\vec{x},\theta_0)}$, 大了则$H_0$ 不合理.
- 否定域类型: $\mathcal{W} = \mathcal{W}_{\lambda_0} = \{\vec{x} : L(\vec{x}, \theta_1) > \lambda_0 L(\vec{x}, \theta_0)\}$.
- 依据水平选λ_0: $P_{\theta_0}(\vec{X} \in \mathcal{W}) = \int_{\mathcal{W}} L(\vec{x}, \theta_0) = \alpha$.
- 则$\mathcal{W} = \mathcal{W}_{\lambda_0}$ 是水平为α 的UMP 否定域.
- 似然比否定域= 似然比检验.

N-P引理的证明. $\mathcal{W} = \{\vec{x} : L(\vec{x},\theta_1) > \lambda_0 L(\vec{x},\theta_0)\}$.

- 水平为α: $P_{\theta_0}(\vec{X} \in \mathcal{W}) = P_{\theta_0}(\vec{X} \in \widetilde{\mathcal{W}}) = \alpha$,
- 需验证第二类错误的概率$\underline{P_{\theta_1}(\text{接受}H_0)}$, $\mathcal{W}$ 的比$\widetilde{\mathcal{W}}$ 的小.
  即$P_{\theta_1}(\vec{X} \notin W) \leqslant P_{\theta_1}(\vec{X} \notin \widetilde{W})$,
  即$P_{\theta_1}(\vec{X} \in W) \geqslant P_{\theta_1}(\vec{X} \in \widetilde{W})$,
  即$P_{\theta_1}(\vec{X} \in W \backslash \widetilde{W}) \geqslant P_{\theta_1}(\vec{X} \in \widetilde{W} \backslash W)$.
  (扣除$\mathcal{W} \cap \widetilde{\mathcal{W}}$ 的概率)
- 左边$= \int_{W\backslash\widetilde{W}} L(\vec{x},\theta_1)d\vec{x} \geqslant \lambda_0 \int_{W\backslash\widetilde{W}} L(\vec{x},\theta_0)d\vec{x}$
  右边$= \int_{\widetilde{W}\backslash W} L(\vec{x},\theta_1)d\vec{x} \leqslant \lambda_0 \int_{\widetilde{W}\backslash W} L(\vec{x},\theta_0)d\vec{x}$
- $\int_{W\backslash\widetilde{W}} L(\vec{x},\theta_0)d\vec{x} = \int_{\widetilde{W}\backslash W} L(\vec{x},\theta_0)d\vec{x}$
  即$P_{\theta_0}(\vec{X} \in W \backslash \widetilde{W}) = P_{\theta_0}(\vec{X} \in \widetilde{W} \backslash W)$
  $(= \alpha - P_{\theta_0}(\vec{X} \in \widetilde{W} \cap W))$.

例2.1. $X \sim N(\mu, 1)$. 求假设检验问题$H_0 : \mu = 0 \leftrightarrow H_1 : \mu = 2$ 的水平为$\alpha = 0.05$ 的UMP 否定域.

- 似然函数: $L(\vec{x}, \theta_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n x_i^2}$,
  $L(\vec{x}, \theta_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (x_i-2)^2}$,
- 似然比: $\frac{L(\vec{x},\theta_1)}{L(\vec{x},\theta_0)} = e^{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \left(x_i^2-(x_i-2)^2\right)}$
- 否定域类型: 似然比$> \lambda$, 即$\sum_{i=1}^n \left(x_i^2 - (x_i - 2)^2\right) > \lambda$,
  即$\sum_{i=1}^n \left(4x_i - 4\right) > \lambda$, 即$W$ 的类型为$\{\vec{x} : \bar{x} > \lambda\}$.
- 直观: H_1 的均值大, 因此$\bar{x}$ 大就否定H_0.
- 根据水平α 选择λ. $P_{\theta_0}(\bar{X} > \lambda) = \alpha$.
  在假设H_0 下, $\bar{X} \sim N(0, \frac{1}{n})$, 即$\sqrt{n}\bar{X} \sim N(0, 1)$.
  $P_{\theta_0}(\bar{X} > \lambda) = P(Z > \lambda\sqrt{n}) = 0.05$, 查表得$\lambda\sqrt{n} = 1.65$.
  从而$\mathcal{W} = \{\vec{x} : \bar{x} > 1.65/\sqrt{n}\}$.