- 复习:

  概率$P(\cdot): B \mapsto P(B)$.

  条件概率: $P(\cdot|A): B \mapsto \frac{1}{P(A)}P(AB)$.

  乘法公式: $P(AB) = P(A)P(B|A)$.

  两个事件独立: $P(AB) = P(A)P(B)$,

  $$P(B|A) = P(B) = P(B|\bar{A}).$$

- 今天讲授:

  §1.5 条件概率、独立性(续)

  §1.6 全概公式、逆概公式

  §1.7 独立试验序列

例: 甲乙玩石头剪子布. A =甲出剪刀, B =乙出布, C =甲赢.

- $0 :=$ 石头 $\quad 2 :=$ 剪子 $\quad 5 :=$ 布.

  $(0,0) \quad (0,2)_C \quad (0,5)_B$
- $(2,0)_A \quad (2,2)_A \quad (2,5)_{A,B,C}$

  $(5,0)_C \quad (5,2) \quad (5,5)_B$
- $P(A) = P(B) = P(C) = 1/3$,

  $P(AB) = P(AC) = P(BC) = 1/9$. 故$A, B, C$ 两两独立.
- $P(C|AB) = 1$.
- A, B, C 不相互独立.

§1.6 全概公式和逆概公式

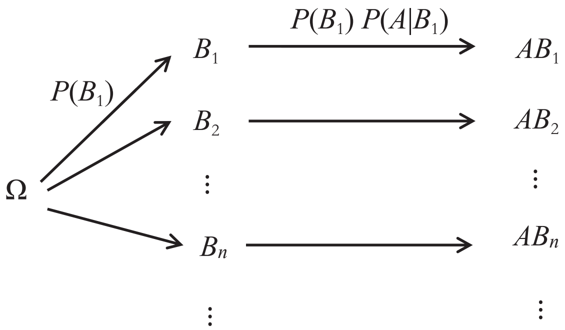
1. 全概公式

假设B_i 是Ω 的一个可数分割(划分、完备事件组), 则

$$P(A) = \sum_i P(B_i)P(A|B_i).$$

推导: $P(A) \overset{\text{可列可加}}{=} \sum_i P(AB_i) \overset{\text{乘法公式}}{=} \sum_i P(B_i)P(A|B_i).$

- 分情况讨论!



例6.4 现有n 个球, n_1个红, n_2个黑. 从中任取m个, 再从这m个中任取r个, 求: 这r个中恰有r_1个红球, r_2个黑球的概率

- 关键是m个球中有多少红球, 多少黑球,
- $B_{m_1}=$ 这m个球中恰有m_1个红球, m_2个黑球.
  $P(B_{m_1})=C_{n_1}^{m_1}C_{n_2}^{m_2}/C_n^m$, $P(A|B_{m_1})=C_{m_1}^{r_1}C_{m_2}^{r_2}/C_m^r$.
- $P(AB_{m_1})=C_{n_1}^{m_1}C_{n_2}^{m_2}C_{m_1}^{r_1}C_{m_2}^{r_2}/(C_n^mC_m^r)$.
  $P(A)=\sum_{m_1}P(AB_{m_1})$.

- $$\begin{aligned} & C_n^m C_m^r \\ = & \frac{n!}{(n-m)!(m-r)!r!} \\ = & C_n^r C_{n-r}^{n-m}. \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd}
 & n \arrow[dl] \arrow[drr] & & & \\
n-m & + & & m \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
n-m & + & m-r & + & r \\
 & n-r \arrow[ul] \arrow[ur] & & + & r \arrow[u] \\
 & & & n \arrow[ull] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

- 分子$= C_{n_1}^{r_1} C_{n_1-r_1}^{n_1-m_1} C_{n_2}^{r_2} C_{n_2-r_2}^{n_2-m_2} = C_{n_1}^{r_1} C_{n_2}^{r_2} \mathbf{C_{n_1-r_1}^{n_1-m_1}} \mathbf{C_{n_2-r_2}^{n_2-m_2}}$.
  因为$(n_1-m_1)+(n_2-m_2)=n-m$, 所以,
  分子对m_1 求和$= C_{n_1}^{r_1} C_{n_2}^{r_2} \mathbf{C_{n-r}^{n-m}}$,
- 分母$= C_n^r C_{n-r}^{n-m}$. $P(A) = \sum_{m_1} P(AB_{m_1}) = C_{n_1}^{r_1} C_{n_2}^{r_2} / C_n^r$.
- **注:** $P(A)$等于n_1 红, n_2 黑中选出r_1 红, r_2 黑的概率.

例5 $n(\geqslant 3)$ 扇门, 其中m 扇后有奖, $1 \leqslant m \leqslant n-2$. 先猜其中一扇门, 然后主持人在剩余的$n-1$ 扇门中打开一扇空门并让再选一次. 下面哪个策略好?

策略1: 坚持最初猜的**旧门**. (获奖概率为$\frac{m}{n}$);

策略2: 在最初猜的旧门和主持人开的空门外随机猜一扇**新门**.

- $A =$ 旧门有奖; $B =$ 新门有奖. $P(A)$ vs $P(B)$.
- $\omega = (i, j, k)$, $j \neq i$ 且$j > m$; $k \neq i$ 且$k \neq j$.

  $A = \{\omega : i \leqslant m\}$, $B = \{\omega : k \leqslant m\}$.
- $(1, m+1, 2) \to \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-m} \cdot \frac{1}{n-2}$,

  $(n, m+1, 2) \to \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-m-1} \cdot \frac{1}{n-2}$. 非古典概型!
- $P(A) = \frac{m}{n}$, $P(B|A) = \frac{m-1}{n-2}$, $P(B|\bar{A}) = \frac{m}{n-2}$,

  故$P(B) = \frac{m}{n}\frac{m-1}{n-2} + \frac{n-m}{n}\frac{m}{n-2} = \frac{m}{n}\frac{n-1}{n-2} > \frac{m}{n}$, 策略2好.

2. 逆概公式(Bayes公式)

假设B_i 是Ω 的一个可数分割(完备事件组), 则

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_i P(B_i)P(A|B_i)}.$$

推导: $P(B_i|A) \overset{\text{条件概率}}{=} \frac{P(AB_i)}{P(A)} \overset{\text{乘法公式、全概公式}}{=} \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_i P(B_i)P(A|B_i)}.$

- 先验概率 vs 后验概率
- 自习例6.5, 6.6, 6.7.

例6.8 某艾滋病检测法的灵敏度如下:
假阴性的概率为0.05 (将感染者报告为健康);
假阳性的概率为0.01 (将健康者报告为感染).
已知某地区有0.001比例人群被艾滋病感染, 检测出甲被感染.
求: 甲感染艾滋病的概率.

- 显: $A=$ 甲检测出被感染, $\bar{A}=$ 甲检测出健康;
- 隐: $B=$ 甲被感染, $\bar{B}=$ 甲健康.
- 计算$P(B|A)$.
- (1) $P(B)=0.001$(先验概率), $P(\bar{B})=0.999$.

  (2) $P(A|B)=1-0.05$, $P(A|\bar{B})=0.01$.

  (3) 乘法公式: $P(AB)=0.001\times 0.95$,

  $P(A\bar{B})=0.999\times 0.01$.

  (4) 条件概率的定义: $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(AB)+P(A\bar{B})}\approx 0.087$(后验概率).

例6.8(续) 某艾滋病检测法的灵敏度如下:

假阴性的概率为0.05 (将感染者报告为健康);

假阳性的概率为0.01 (将健康者报告为感染).

已知某地区有0.001比例人群被艾滋病感染, 检测出甲被感染. **若甲复查再次被检测出感染.**

求: 甲感染艾滋病的概率.

- 显: $A_i =$ 甲检测出被感染, $\bar{A}_i =$ 甲检测出健康, $i = 1, 2$;
- 隐: $B =$ 甲被感染, $\bar{B} =$ 甲健康.
- 计算$P_{A_1}(B|A_2)$ $(= P(B/A_1A_2))$.
- (1) $P_{A_1}(B) = 0.087$(先验概率), $P_{A_1}(\bar{B}) = 0.913$.

  (2) $P_{A_1}(A_2|B) = 1 - 0.05$, $P_{A_1}(A_2|\bar{B}) = 0.01$.

  (3) 乘法公式: $P_{A_1}(A_2B) = 0.087 \times 0.95$,

  $P_{A_1}(A_2\bar{B}) = 0.913 \times 0.01$.

  (4) $P_{A_1}(B|A_2) = \frac{P_{A_1}(A_2B)}{P_{A_1}(A_2B)+P_{A_1}(A_2\bar{B})} \approx 0.9$(后验概率).

§1.7 独立试验(序列)

由可数个独立的随机分步试验组成的(一个整体)随机试验指:
在(一个整体)试验中, 若E_i 是只依赖于第i 步试验的事件,
则E_i, $i \geqslant 1$ 相互独立.

习题一, 43 连续投掷一对均匀色子, 若两点之和为7, 则甲赢;
若两点之积为5, 则乙赢. 不停投直到某方赢. 求: 甲赢的概率.

- 在每步试验中, $P_i(A_i) = \frac{6}{36} =: p$, $P_i(B_i) = \frac{2}{36} =: q$.
  记$C_i = \overline{A_i \cup B_i}$, 则$P_i(C_i) =: r$.
- 在(一个整体)试验中,
  甲赢$= \bigcup_n (C_1 \cdots C_{n-1} A_n)$; 乙赢$= \bigcup (C_1 \cdots C_{n-1} B_n)$.
  $P(\text{甲赢}) = \sum_{n=1}^{\infty} P(C_1 \cdots C_{n-1} A_n) = \sum_n r^{n-1} p = \frac{p}{1-r}$.
  $P(\text{甲赢}) = \frac{p}{p+q}$, $P(\text{乙赢}) = \frac{q}{p+q}$.
- $\omega = ((i_1, j_1), (i_2, j_2), \cdots)$. $E_{n,i,j} = \{\omega : i_n = i, j_n = j\}$,
  $P(E_{n,i,j}) = \frac{1}{36}$. E_{n,i_n,j_n}, $n \geqslant 1$ 相互独立.