Ch-20 组合存在性定理

20.1 鸽巢原理和 $Ramsey$ 定理

定理 20.1 鸽巢原理 将 $n+1$ 个物体放入 n 个盒子里，则至少有一个盒子里有两个或两个以上的物体。（反证法证明）

- n 个连续整数中至少有一个数能被 n 整除
- 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是 n 个正整数，则其中存在连续的若干个数，其和为 n 的倍数
- 在 $n+1$ 个小于等于 $2n$ 且互不相等的正整数中必有两个数互素（任意两个相邻正整数互素）
- 在 $1, 2, \cdots, 2n$ 中任取两个 $n+1$ 个不同的数，其中至少有一个数是另一个数的倍数
- 设 $a_1, a_2, \cdots, a_{n^2+1}$ 是 n^2+1 个不同实数的序列，则一定可以从这个序列中选出 $n+1$ 个数的子序列 $a_{k_1}, a_{k_2}, \cdots, a_{k_{n+1}}$，使得这个子序列为递增序列或递减序列（反证法证明）

定理 20.2 鸽巢原理的一般形式 设 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 是给定的正整数，若要把 $q_1 + q_2 + \cdots + q_n - n + 1$ 个物体放入 n 个盒子中，则或第一个盒子至少包含了 q_1 个物体，或第二个盒子至少包含了 q_2 个物体，$\cdots$，或第 n 个盒子至少包含了 q_n 个物体。

定理 20.3 鸽巢原理的算术平均形式 设 $m_1, m_2, \cdots, m_n$ 是 n 个正整数，如果他们的算术平均数满足

$$\frac{(m_1 + m_2 + \cdots + m_n)}{n} > r - 1$$

则存在 $m_i \geq r$，其中 $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$。

定理 20.4 鸽巢原理的函数形式 设 $f: A \to B$，其中 $|A| = m$，$|B| = n$，$m, n \in \mathbb{Z}^+$. 若 $m > n$，则在 A 中至少存在 $\lceil \frac{m}{n} \rceil$ 个元素 $a_1, a_2, \cdots, a_{\lceil \frac{m}{n} \rceil}$ 使得 $f(a_1) = f(a_2) = \cdots = f(a_{\lceil \frac{m}{n} \rceil})$。

$Ramsey$ 定理

定理 20.5 设 p,q 是正整数，$p,q\ge 2$，则存在最小的正整数 $R(p,q)$，使得当满足 $n\ge R(p,q)$ 时，用红、蓝两色涂色 K_n 的边，则或者存在一个蓝色的完全 p 边形，或者存在一个红色的完全 q 边形。（归纳法证明）

- 称 $R(p,q)$ 为 $Ramsey$ 数，且 $R(p,q)=R(q,p)$
- $R(p,q)\le R(p-1,q)+R(p,q-1)$
- $R(p,q)\le \binom{p+q-2}{p-1}$ (归纳法证明)
- $R(p,p)\le \binom{2p-2}{p-1}\le 2^{2p-2}$
- $R(3,3)=6$
- $R(3,4)=9$

定理 20.6 $R(p,q)=R(q,p)$

定理 20.7 ***Ramsey*** **定理** 对于任意给定的正整数 p,q 和 r，$p,q\ge r$，存在着一个最小的正整数 $R(p,q;r)$，使得当集合 S 的元素数 $\ge R(p,q;r)$ 时，将 S 的 r 元子集族任意划分成 E_1 和 E_2，则或者 S 有某个 p 子集 A，A 的所有 r 元子集都属于 E_1，或者 S 有某个 q 元子集 B，B 的所有 r 元子集都属于 E_2。

定理 20.8 ***Ramsey*** **定理的一般形式** 设 $r\ge 1$，$k\ge 1$，$q_i\ge r(i=1,2,\cdots,k)$ 是已给定的正整数，则存在一个最小的正整数 $R(q_1,q_2,\cdots,q_k;r)$，使得当 n 满足 $n\ge R(q_1,\ q_2,\cdots,q_k;r)$ 时将 n 元集 S 的所有 $\binom{n}{r}$ 个 r 元子集划分成 k 个子集族 $T_1,T_2,\cdots,T_k$，那么存在 S 的 q_1 元子集 A_1 且 A_1 的所有 r 元子集都属于 T_1，或者存在 S 的 q_2 元子集 A_2 且 A_2 的所有 r 元子集都属于 T_2，$\cdots$，或者存在的 S 的 q_k 元子集 A_k 且 A_k 的所有 r 元子集都属于 T_k。

- $R(3,3,3)=17$

20.2 相异代表系

定义 设 S 为有穷集，$A_0,A_1,\cdots,A_{n-1}$ 是 S 的不同的子集，$A_0,A_1,\cdots,A_{n-1}$ 的一个相异代表系是由不同元素构成的有序 n 元组 $\langle a_0,a_1,\cdots a_{n-1}\rangle$，使得
$a_i\in A_i$，其中 $0\le i\le n-1$。