



单元6.1 通路与回路

第二编 图论 第七章 图

7.2 通路与回路



北京大学



内容提要

- 通路、简单通路、初级通路
- 回路、简单回路、初级回路
- 扩大路径法



北京大學

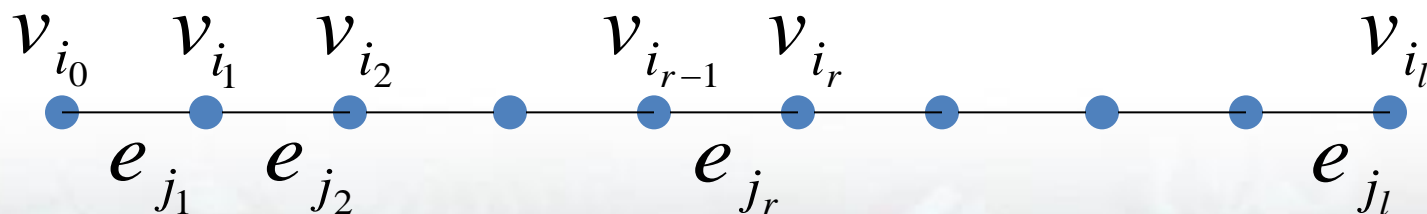


通路(walk)

- 顶点与边的交替序列

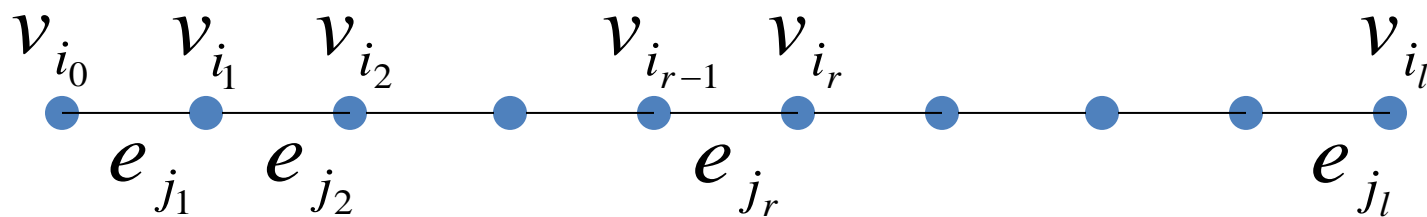
其中 $\Gamma = v_{i_0} e_{j_1} v_{i_1} e_{j_2} \cdots v_{i_{l-1}} e_{j_l} v_{i_l}$

$$e_{j_r} = (v_{i_{r-1}}, v_{i_r}), r = 1, 2, \dots, l$$



起点, 终点, 通路长度

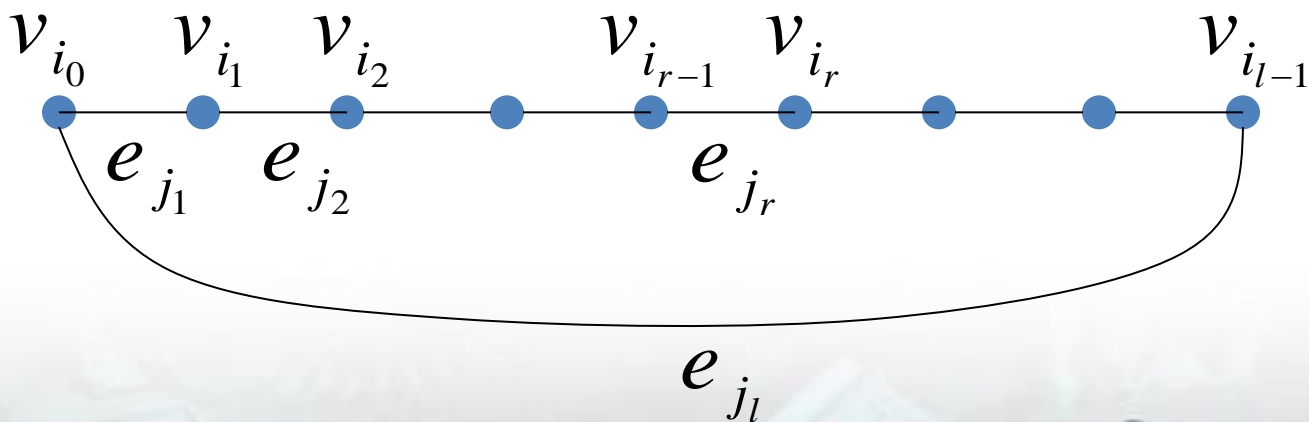
- v_{i_0} 是起点, v_{i_l} 是终点
- 通路长度 $|\Gamma| = l$



回路(closed walk)

- 若 $v_{i_0} = v_{i_l}$

$$\Gamma = v_{i_0} e_{j_1} v_{i_1} e_{j_2} \cdots v_{i_{l-1}} e_{j_l} v_{i_0}$$





简单(复杂、初级)通(回)路

- 简单通路: 没有重复边的通路
- 简单回路: 没有重复边的回路
- 复杂通路: 有重复边的通路
- 复杂回路: 有重复边的回路
- 初级通路(路径): 没有重复顶点的通路
- 初级回路(圈): 没有重复顶点的回路

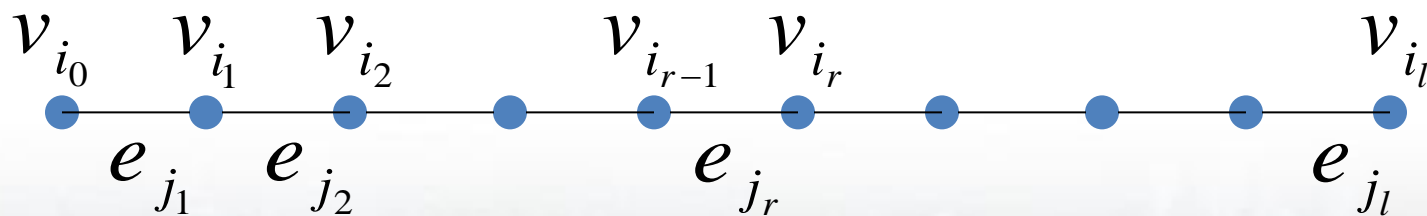
通(回)路的表示

- 可以只用边的序列来表示通(回)路

$$e_{j_1} e_{j_2} \cdots e_{j_l}$$

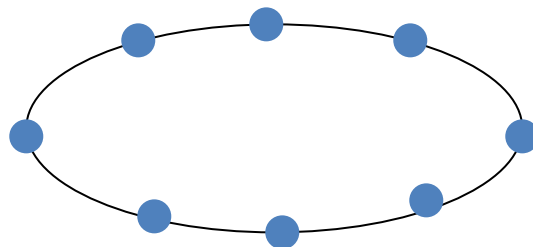
- 简单图可以只用顶点的序列来表示通(回)路

$$v_{i_0} v_{i_1} \cdots v_{i_{l-1}} v_{i_l}$$



圈的表示

- 画出的长度为 l 的圈
 - 如果是非标定的, 则在同构意义下是唯一的
 - 如果是标定的(指定起点, 终点), 则是 l 个不同的圈





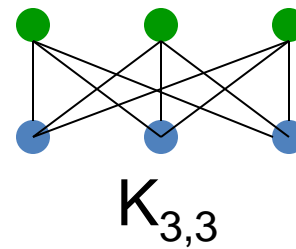
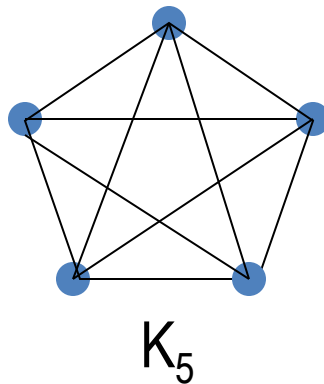
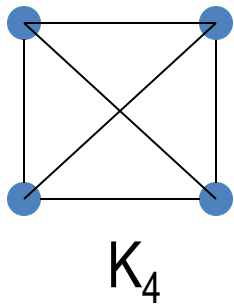
周长

- G 是含圈的无向简单图

$c(G)$ =最长圈的长度

周长举例

- $c(K_n)=n$ ($n \geq 3$) $c(K_{n,n})=2n$





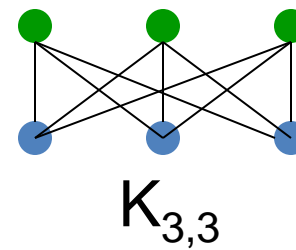
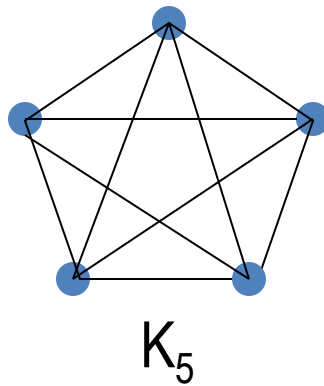
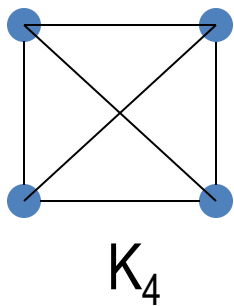
围长

- G 是含圈的无向简单图

$g(G)$ =最短圈的长度

围长举例

- $g(K_n)=3$ ($n \geq 3$), $g(K_{n,n})=4$ ($n \geq 2$)





定理7.6

- 定理7.6 在 n 阶(有向或无向)图 G 中,若从不同顶点 v_i 到 v_j 有通路, 则从 v_i 到 v_j 有长度小于等于 $n-1$ 的通路

证明: 下一页

- 推论 在 n 阶图 G 中,若从不同顶点 v_i 到 v_j 有通路,则从 v_i 到 v_j 有长度小于等于 $n-1$ 的路径(初级通路). #

定理7.6证明

- 证: 设 $\Gamma = v_{i_0} e_{j_1} v_{i_1} e_{j_2} \cdots e_{j_l} v_{i_l}, v_{i_0} = v_i, v_{i_l} = v_j,$
若 $l > n-1$, 则 Γ 上顶点数 $l+1 > n$, 必存在 $0 \leq s < k \leq l$, 使
得 $v_{i_s} = v_{i_k}$, 于是 Γ 上有从 v_{i_s} 到自身的回路 C_{sk} , 在 Γ 上
删除 C_{sk} 的所有边和除 v_{i_s} 外的所有顶点, 得

$$\Gamma' = v_{i_0} e_{j_1} v_{i_1} e_{j_2} \cdots v_{i_s} e_{j_{k+1}} v_{i_{k+1}} \cdots e_{j_l} v_{i_l}$$

则 $|\Gamma'| < |\Gamma|$, 重复进行有限多步为止. #

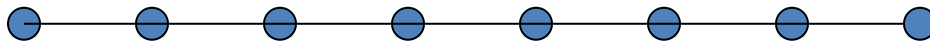


定理7.6推论

- 在 n 阶图 G 中,若从不同顶点 v_i 到 v_j 有通路,则从 v_i 到 v_j 有长度小于等于 $n-1$ 的**路径**(初级通路). #

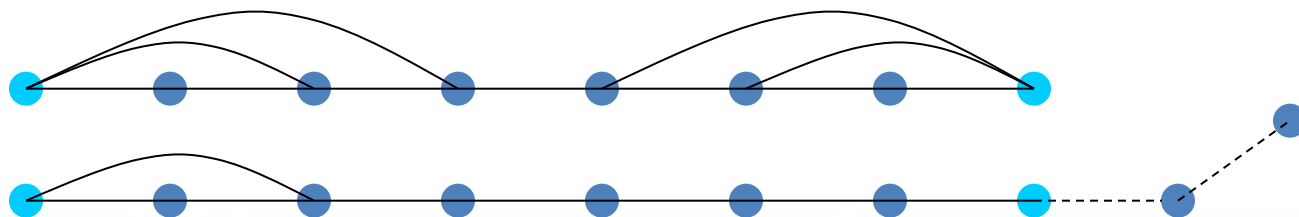
定理7.7

- 定理7.7 在 n 阶图 G 中,若有从顶点 v_i 到自身的回路,则有从 v_i 到自身长度小于等于 n 的回路. #
- 推论 在 n 阶图 G 中,若有从顶点 v_i 到自身的简单回路,则有从 v_i 到自身长度小于等于 n 的圈(初级回路).



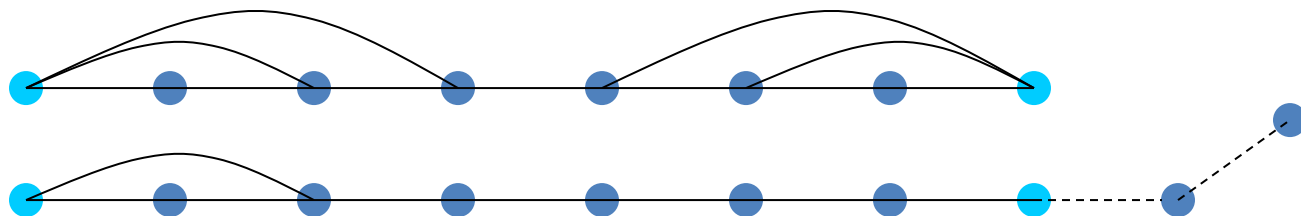
极大路径

- 在无向简单图中, 路径的两个端点不与路径本身以外的顶点相邻, 这样的路径称为极大路径
- 在有向图中, 路径起点的前驱, 终点的后继, 都在路径本身上



扩大路径法

- 任何一条路径,只要不是极大路径,则至少有一个端点与路径本身以外的顶点相邻,则路径还可以扩大,直到变成极大路径为止



例7.6

例7.6: 设 G 是 $n(n \geq 3)$ 阶无向简单图, $\delta(G) \geq 2$.

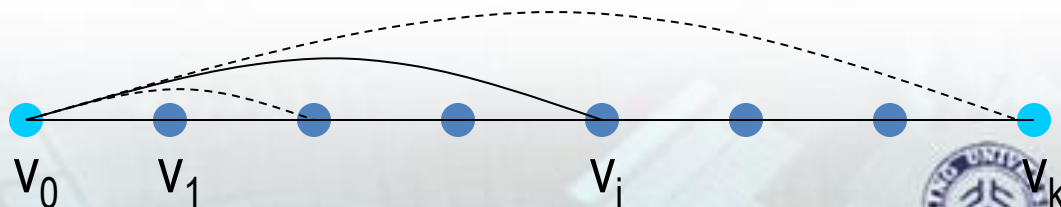
证明 G 中有长度 $\geq \delta(G)+1$ 的圈

证明: $\forall u_0 \in V(G), \delta(G) \geq 2 \Rightarrow \exists v_1 \in N_G(v_0),$

对 $\Gamma_0 = u_0 u_1$ 采取扩大路径法, 得到极大路径 $\Gamma = v_0 v_1 \dots v_k$. $d(v_k) \geq \delta(G) \Rightarrow k \geq \delta(G),$

$d(v_0) \geq \delta(G) \Rightarrow \exists v_i \in N_G(v_0), \delta(G) \leq i \leq k.$

于是 $v_0 v_1 \dots v_i v_0$ 是长度 $\geq \delta(G)+1$ 的圈. #





例7.7(有向图的例子)

- D 是有向简单图,
 $\delta(D) \geq 2$, $\delta^-(D) > 0$, $\delta^+(D) > 0$,
证明 D 中有长度大于等于
 $\max\{\delta^-(D), \delta^+(D)\} + 1$ 的圈

例7.7证明

• 证明: 分别考虑 v_0, v_k :

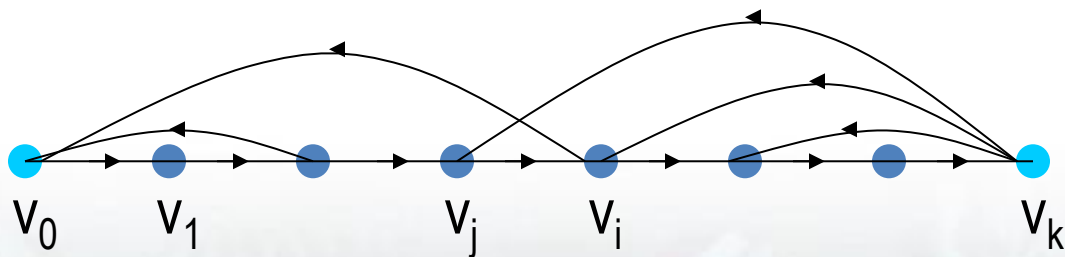
(1) $d^-(v_0) \geq \delta^-(D) \Rightarrow \exists v_i \in N_D^-(v_0), \delta^- \leq i \leq k$.

于是 $v_0 v_1 \dots v_i v_0$ 是长度 $\geq \delta^- + 1$ 的圈.

(2) $d^+(v_k) \geq \delta^+(D) \Rightarrow \exists v_j \in N_D^+(v_k), 0 \leq j \leq k - \delta^+$.

于是 $v_j v_{j+1} \dots v_k v_j$ 是长度 $\geq \delta^+ + 1$ 的圈.

较长的就是 D 中长度 $\geq \max\{\delta^-, \delta^+\} + 1$ 的圈. #





小结

- 通路、简单通路、初级通路
- 回路、简单回路、初级回路
- 扩大路径法

