第十九章　格与布尔代数

- 格的定义与性质
- 子格、格同态
- 布尔代数概念

19.1 格的定义和性质

- 格的定义
- 格的基本性质
  - 对偶原理
  - 格中的基本等式与不等式
  - 格中的基本等价条件
  - 格中的算律
- 格的代数定义
- 格中的不等式

格的定义

格的偏序集定义：

$<S, \preccurlyeq>$, S的任何二元子集都有最大下界、最小上界.

求最大下界、最小上界构成格中的运算$\wedge, \vee$

格$<L, \preccurlyeq>$与导出的代数系统$<L, \wedge, \vee>$有对应关系

格的实例：

n的正因子格F_n

幂集格$P(B)$

子群格$L(G)$

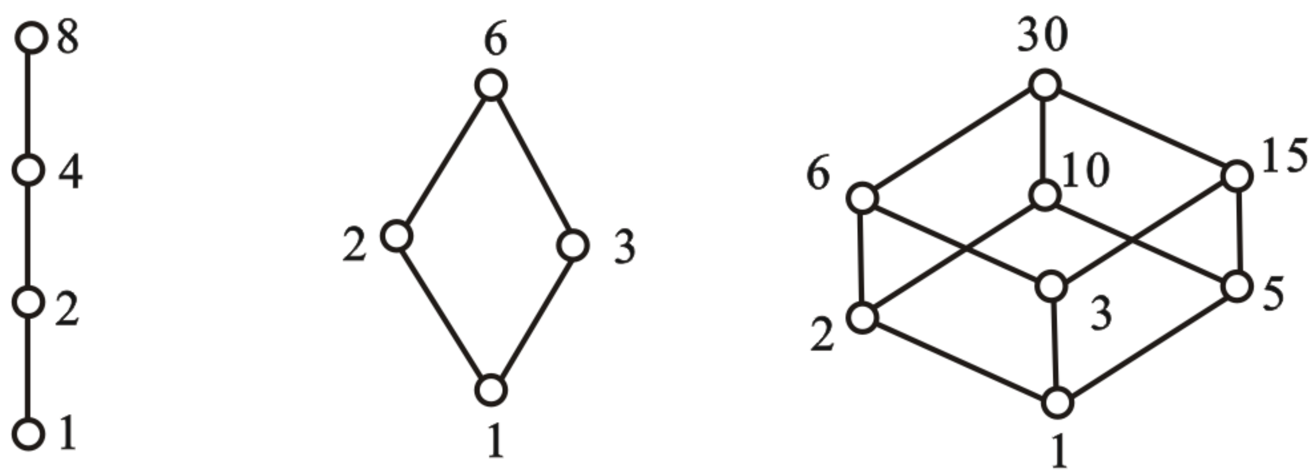
格的实例——正因子格

例1 设n是正整数，F_n是n的正因子的集合。D为整除关系，则偏序集 $<F_n, D>$构成格——正因子格。

$\forall x, y \in F_n$，$x \vee y$是lcm(x, y)，即x与y的最小公倍数。

$x \wedge y$是gcd(x, y)，即x与y的最大公约数。

下图给出了格 $<F_8, D>$，$<F_6, D>$ 和 $<F_{30}, D>$

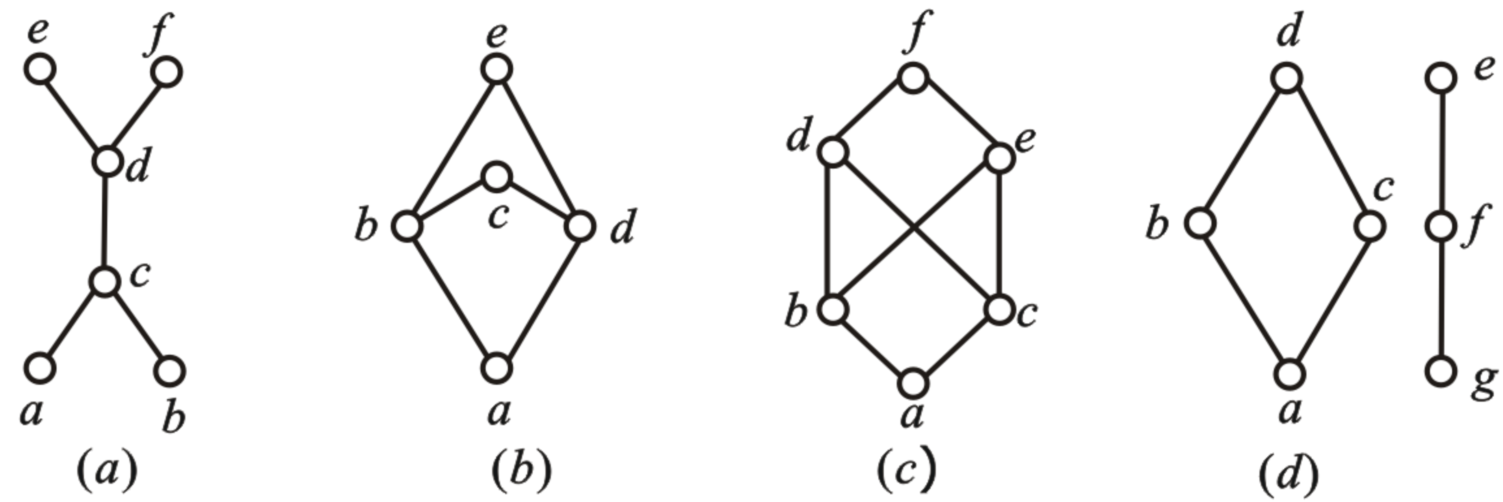


格的实例(续)

例2 判断下列偏序集是否构成格，并说明理由。

(1) < Z, ≤ >，其中Z是整数集，≤为小于或等于关系。

(2) 偏序集的哈斯图分别在下图给出。



(1) 是格。

(2) 都不是格。

格的性质—对偶原理

对偶命题：设P是由格中元素, $\preccurlyeq$, $\succcurlyeq$, =, $\wedge$, $\vee$等表示的命题，将P中的$\preccurlyeq$, $\succcurlyeq$, $\wedge$, $\vee$分别替换成$\succcurlyeq$, $\preccurlyeq$, $\vee$, $\vee$得到的命题称为P的对偶命题，记作P^*.

对偶原理：如果 P 对于一切格为真，则P^*也对一切格为真。

实例　P:　$a \wedge b = b \wedge a$

P^*：$a \vee b = b \vee a$

性质：$(P^*)^* = P$

格的性质(续)

格中的基本不等式和等式

自反：$a \preccurlyeq a$

反对称性：$a \preccurlyeq b,\ b \preccurlyeq a \Rightarrow a=b$

传递：$a \preccurlyeq b,\ b \preccurlyeq c \Rightarrow a \preccurlyeq c$

上界：$a \preccurlyeq a \vee b,\quad b \preccurlyeq a \vee b$

下界：$a \wedge b \preccurlyeq a,\ \ a \wedge b \preccurlyeq b$

最大下界：$a \preccurlyeq b,\ a \preccurlyeq c \Rightarrow a \preccurlyeq b \wedge c$

最小上界：$a \succcurlyeq b,\ a \succcurlyeq c \Rightarrow a \succcurlyeq b \vee c$

格的性质(续)

定理 下列条件彼此等价（格中的基本等价条件）：

(1) $a \preccurlyeq b$

(2) $a \wedge b = a$

(3) $a \vee b = b$

证 (1)⇒(2) $a \preccurlyeq a$, $a \preccurlyeq b \Rightarrow a \preccurlyeq a \wedge b$, 又$a \wedge b \preccurlyeq a$，故得 $a \wedge b = a$.

(2)⇒(3) $a = a \wedge b \preccurlyeq b$, $b \preccurlyeq b \Rightarrow a \vee b \preccurlyeq b$, 又$b \preccurlyeq a \vee b$，故得 $a \vee b = b$.

(3)⇒(1) $a \preccurlyeq a \vee b = b$.

格的性质(续)

格中交换律、结合律、幂等律、吸收律

证 (1) $a \wedge b$是$\{a, b\}$的下界，$b \wedge a$是$\{b, a\}$的下界，而

$\{a, b\}=\{b, a\}$，因此$a \wedge b=b \wedge a$.

(2) 由$(a \wedge b) \wedge c \preccurlyeq a \wedge b \preccurlyeq b$和$(a \wedge b) \wedge c \preccurlyeq c$知，

$(a \wedge b) \wedge c \preccurlyeq b \wedge c$.

又$(a \wedge b) \wedge c \preccurlyeq a \wedge b \preccurlyeq a$，故$(a \wedge b) \wedge c \preccurlyeq a \wedge (b \wedge c)$.

同理，$a \wedge (b \wedge c) \preccurlyeq (a \wedge b) \wedge c$. 所以，$a \wedge (b \wedge c)=(a \wedge b) \wedge c$.

格的代数定义

吸收律 设$\circ, *$可交换 $\forall a, b \in S$,
$a \circ (a * b) = a$，$a * (a \circ b) = a$

引理 $< S,*,\circ >$是具有两个二元运算的代数系统。

如果$*$, $\circ$运算满足交换、结合、吸收律，则：

(1) $*$, $\circ$满足幂等律

(2) $a * b = a \Leftrightarrow a \circ b = b$

证：(1) $a * a = a * (a \circ (a * a)) = a$

同理，$a \circ a = a$

(2) $(\Leftarrow)$ $a * b = a * (a \circ b) = a$

$(\Rightarrow)$ $a \circ b = (a * b) \circ b = b$

格的代数定义(续)

定理 设 $< S,*,\circ >$ 是具有两个二元运算的代数系统，若$*$和$\circ$运算满足交换、结合、吸收律，则可以适当定义S上偏序$\preccurlyeq$，使得$< S, \preccurlyeq >$构成格，且$< S, \preccurlyeq >$ 导出的代数系统就是 $< S,*,\circ >$.

证明思路：利用运算$\circ$或$*$定义S上的二元关系R

证明 R 为 S 上的偏序

证明对于 S 中任意两个元素x, y

$$x \vee y = x \circ y,\ x \wedge y = x * y$$

$< S,\wedge,\vee >$ 构成格。

定理的证明

证 (1) 定义二元关系R, $aRb \Leftrightarrow a \circ b=b$,

(2) R为偏序:

$$a \circ a = a \Rightarrow aRa$$

$$aRb, bRa \Rightarrow a \circ b = b, b \circ a = a \Rightarrow a = b$$

$$aRb, bRc \Rightarrow a \circ b = b, b \circ c = c$$

$$\Rightarrow a \circ c = a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c = b \circ c = c$$

将R记作$\preccurlyeq$.

定理的证明(续)　　$a \preccurlyeq b \Leftrightarrow a \circ b = b$

(3) 先证$a \circ b$为$\{a, b\}$的上界：

由$a \circ (a \circ b) = (a \circ a) \circ b = a \circ b$知，$a \preccurlyeq a \circ b$.

由$b \circ (a \circ b) = a \circ (b \circ b) = a \circ b$知，$b \preccurlyeq a \circ b$.

下证$a \circ b$为$\{a, b\}$的最小上界：假设c为上界，由

$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c) = a \circ c = c$得$a \circ b \preccurlyeq c$.

同理可证，$a * b$是$\{a, b\}$的最大下界。

格的代数定义

等价定义：设$<L, \wedge, \vee>$是具有两个二元运算的代数系统，如果$\wedge, \vee$满足交换、结合、吸收律，则称$<L, \wedge, \vee>$是格。

实例：$<F_n, \mathrm{gcd}, \mathrm{lcm}>$

$\forall x, y \in F_n$, $\mathrm{gcd}(x, y)=\mathrm{gcd}(y, x)$, $\mathrm{lcm}(x, y)=\mathrm{lcm}(y, x)$

$\mathrm{gcd}(x, \mathrm{gcd}(y, z))=\mathrm{gcd}(\mathrm{gcd}(x, y), z)$

$\mathrm{lcm}(x, \mathrm{lcm}(y, z))=\mathrm{lcm}(\mathrm{lcm}(x, y), z)$

$\mathrm{gcd}(x, \mathrm{lcm}(x, y))=x$, $\mathrm{lcm}(x, \mathrm{gcd}(x, y)) = x$

$x|y \Leftrightarrow \mathrm{lcm}(x, y)=y$，$<F_n, |>$与$<F_n, \mathrm{gcd}, \mathrm{lcm}>$是同一个格

格的性质(续)

格的不等式

（1）保序不等式

$$a \preccurlyeq b, c \preccurlyeq d \Rightarrow a \wedge c \preccurlyeq b \wedge d,\ a \vee c \preccurlyeq b \vee d$$

（2）分配不等式

$$a \vee (b \wedge c) \preccurlyeq (a \vee b) \wedge (a \vee c),$$

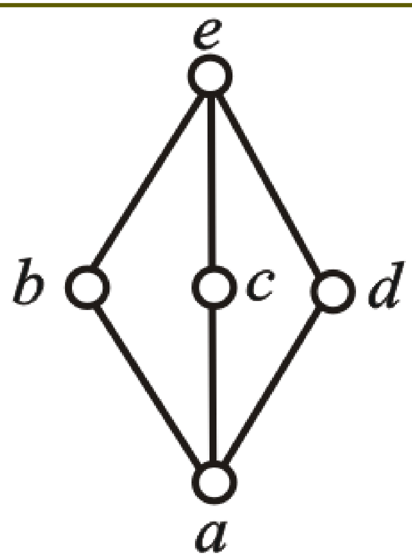
$$a \wedge (b \vee c) \succcurlyeq (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

（3）模不等式

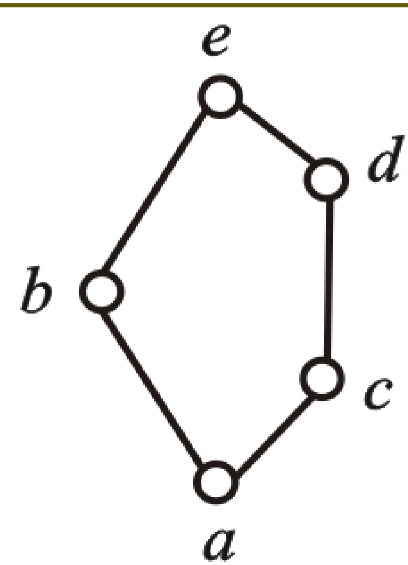
$$a \preccurlyeq b \Leftrightarrow a \vee (c \wedge b) \preccurlyeq (a \vee c) \wedge b$$

思考：如何证明以上不等式?

不满足分配律的格



钻石格



五角格

钻石格： $b \vee (c \wedge d) = b \vee a = b$

$(b \vee c) \wedge (b \vee d) = e \wedge e = e$

思考：指出五角格不满足分配律的元素

19.2 子格、格同态

- 子格
  - 子格定义
  - 子格判别
- 格的同态与同构
  - 格同态定义
  - 格同态的性质
  - 完备格

格的子格

L的子格：L的非空子集S，且S关于L中$\wedge$和$\vee$运算封闭.

注意：子格元素在原格中求最大下界，最小上界.

实例：子群格$L(G)$是格，但不一定是$P(G)$的子格.

例如Klein四元群$G=\{e, a, b, c\}$,

$L(G) = \{< e >, < a >, < b >, < c >, G\}$

$P(G) = \{ \phi, < e >, \{a\}, \{b\}, \{c\}, < a >, < b >, < c >,$

$\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \{a, b, e\}, \{a, c, e\}, \{b, c, e\}, G \}$

格的同态

定义 设L_1和L_2是格，$f: L_1 \to L_2$, $\forall x, y \in L_1$，有

$$f(x \wedge y)=f(x) \wedge f(y),\ f(x \vee y)=f(x) \vee f(y)$$

则称f为L_1到L_2的同态.

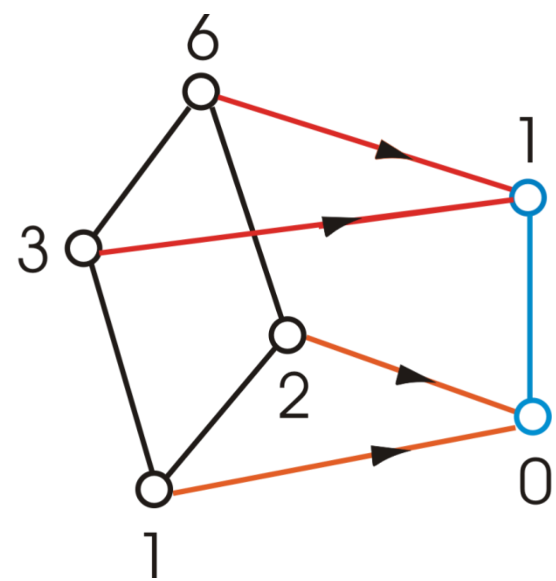
实例：$L_1 = <\{1, 2, 3, 6\}, | >$,

$L_2 = <\{0, 1\}, \leq >$

$f(1) = f(2) = 0,$

$f(3) = f(6) = 1$

f 为 L_1到 L_2的同态.



格同态的性质

格同态具有保序性

定理1 f是格L_1到L_2的同态，则$\forall a, b\in L_1$,

$$a\preccurlyeq b \Rightarrow f(a)\preccurlyeq f(b).$$

证：$a\preccurlyeq b \Rightarrow a\wedge b=a$

$$\Rightarrow f(a\wedge b)=f(a)$$

$$\Rightarrow f(a)\wedge f(b)=f(a)$$

$$\Rightarrow f(a)\preccurlyeq f(b)$$

注意：$f(a)\preccurlyeq f(b)$不一定推出$a\preccurlyeq b$. 思考反例.

格同态的性质(续)

定理2 f 为双射，f 为L_1到L_2的同构当且仅当

$$\forall a, b \in L_1,\ a \preccurlyeq b \Leftrightarrow f(a) \preccurlyeq f(b)$$

证：(必要性) 由定理1知，$a \preccurlyeq b \Rightarrow f(a) \preccurlyeq f(b)$. 反过来，设$f(a) \preccurlyeq f(b)$，则有$f(a) \wedge f(b) = f(a)$. 因为$f$是同态，故$f(a \wedge b) = f(a)$. 进而由$f$是单射知，$a \wedge b = a$，于是有$a \preccurlyeq b$.

(充分性) 见后

格同态的性质(续)

定理2 f 为双射，f 为L_1到L_2的同构当且仅当

$$\forall a, b \in L_1,\ a \preccurlyeq b \Leftrightarrow f(a) \preccurlyeq f(b)$$

(充分性) 证明同构的思路:

(1) 由保序性证明 $\underline{f(a) \vee f(b) \preccurlyeq f(a \vee b)}$

(2) 由满射性存在d使得$f(a) \vee f(b) = f(d)$.

由$f(a) \preccurlyeq f(d)$ 推出$a \preccurlyeq d$, 同理$b \preccurlyeq d$.

(3) $a \vee b \preccurlyeq d$ 推出$\underline{f(a \vee b) \preccurlyeq f(a) \vee f(b)}$

于是由(1)和(3)得$f(a) \vee f(b) = f(a \vee b)$.

同理 $f(a) \wedge f(b) = f(a \wedge b)$.

完备格

定义 设L是格，若对L的任何子集S，S的最大下界$\wedge S$, 最小上界$\vee S$均存在，称L是完备格.

注意：S可以是空集

x是$\varnothing$的下界 $\Leftrightarrow \forall a(a\in\varnothing\rightarrow x\preccurlyeq a)$

x是$\varnothing$的上界 $\Leftrightarrow \forall a(a\in\varnothing\rightarrow a\preccurlyeq x)$

前件为假，L中任何元素都是$\varnothing$的上界和下界，取L最大元为$\wedge\varnothing$，最小元为$\vee\varnothing$

判定：L为偏序，任意子集$S\subseteq L$, $\vee S$ (或$\wedge S$) 存在.

实例：有限格、幂集格均为完备格

布尔代数的定义

$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

定义 有补分配格称为布尔格（布尔代数）

定理 设$< B,*,\circ,\triangle, a, b >$是代数系统，其中$*,\circ$为二元运算, $\triangle$为一元运算，a, b为0元运算. 如果满足以下算律:

交换律 $x * y = y * x, x \circ y = y \circ x$

分配律 $x * (y \circ z) = (x * y) \circ (x * z)$

$x \circ (y * z) = (x \circ y) * (x \circ z)$

同一律 $x * b = x, x \circ a = x$

补元律 $x *\triangle x = a, x \circ\triangle x = b$

则$< B,*,\circ,\triangle, a, b >$构成布尔格.

布尔代数的定义(续)

集合的幂集格$\langle P(B),\cap,\cup,\sim,\emptyset,B\rangle$是布尔代数。

逻辑代数$\langle\{0,1\},\wedge,\vee,-,0,1\rangle$是布尔代数。

任何有限布尔代数元素数为2^n.

任何有限布尔代数都同构于$\{0, 1\}^n$.