第三章、随机向量

- 第七次课

  §3.1 随机向量的概念

  §3.2 二维随机向量的联合分布与边缘分布

  §3.7 条件分布(不讲条件期望)

  §3.3 随机变量的独立性

- 第八次课

  §3.4 两个随机变量的函数

  §3.5 二维随机向量的数字特征

  §3.6 n 维随机向量

§3.1 随机向量的概念

定义 (随机向量)

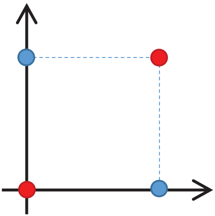
<u>随机向量</u>指同一个概率模型中的多个随机变量.

$\xi(=\vec{X}) : \Omega \to \mathbb{R}^n,\ \omega \mapsto (X_1(\omega), \cdots, X_n(\omega))$.

随机向量的函数指$f(\xi)$, 其中$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

例: 连续投两次公平硬币. $\Omega = \{HH, HT, TH, TT\}$.

- $X_i = \begin{cases} 1, & 第i次投到正面, \\ 0, & 否则. \end{cases}$ $\quad \xi = (X_1, X_2)$.
- 令$Y = 1 - X_1$, $\quad \eta = (X_1, Y)$.
- $P(\xi = (1,1)) = \frac{1}{4}$, $P(\eta = (1,1)) = 0$.
- **联合分布**: ξ 诱导的$\mathbb{R}^n$ 上的分布.



§3.2 二维随机向量的联合分布与边缘分布, §3.7 条件分布

1. 离散型情形

定义 (离散型随机向量)

二维离散型随机向量指$\xi=(X,Y)$, 其中X,Y 都是离散型.

称$P(X=x_i,Y=y_j)=p_{ij},\ \forall i,j$ 为ξ 的联合分布(列).

联合分布列: (1) $p_{ij}\geqslant 0$, (2) $\sum_{i,j}p_{ij}=1$.

注: X,Y 都是离散型$\Longleftrightarrow\xi$ (在$\mathbb{R}^2$ 中)的取值可数.

例2.2, 2.3: 有大量粉笔, 含白、黄、红三种颜色, 比例分别为p_1, p_2, p_3. 从中抽取n 支. 求: 恰好抽到k_1 支白, k_2 支黄的概率.

- 设恰好抽到X 支白, Y 支黄, 即求$(X, Y) = (k_1, k_2)$ 的概率.
- 可以理解为放回抽样, 连续抽取n 次.
- $P(X = k_1, Y = k_2) = C_n^{k_1} C_{n-k_1}^{k_2} p_1^{k_1} p_2^{k_2} p_3^{n-k_1-k_2}$.
- $P(X = k_1) = C_n^{k_1} p_1^{k_1} (1 - p_1)^{n-k_1}$.
- $$\begin{aligned} P(Y = k_2 | X = k_1) &= \frac{P(X = k_1, Y = k_2)}{P(X = k_1)} \\ &= C_{n-k_1}^{k_2} \left(\frac{p_2}{p_2 + p_3}\right)^{k_2} \left(\frac{p_3}{p_2 + p_3}\right)^{k_3}. \end{aligned}$$

定义

- (X, Y) 的边缘分布 指X 的分布与Y 的分布.
- 条件分布指

  $\{P(Y = y_j|X = x_i), j \geqslant 1\}$ ($\forall i$ 给定), 与

  $\{P(X = x_i|Y = y_j), i \geqslant 1\}$ ($\forall j$ 给定).

- 联合分布⇒ 边缘分布、条件分布.
- X 的分布 $\bigoplus$ $\{P(Y = y_j|X = x_i), j \geqslant 1\}, \forall i$

  $\Rightarrow$ 联合分布.

  $P(X = x_i, Y = y_j)$

  $= P(X = x_i)P(Y = y_j|X = x_i)$.
- 自习例2.4, 2.5.

2. 连续型情形

定义 (连续型随机向量)

二维连续型随机向量指$\xi=(X,Y)$ 在$\mathbb{R}^2$ 中有<u>联合密度(函数)</u> $p(x,y)$，即对任意矩形D (从而对任意Borel集D)，$P(\xi\in D)=\iint_D p(x,y)dxdy$.

联合密度: (1) $p(x,y)\geqslant 0$, (2) $\iint p(x,y)dxdy=1$.
为清楚起见，写$p_{X,Y}(x,y)$.

- ξ 是连续型$\Longrightarrow X,Y$ 都是连续型. 反之不然.
- 例: $X\sim N(0,1)$, $Y=X$, 但ξ 没有联合密度.

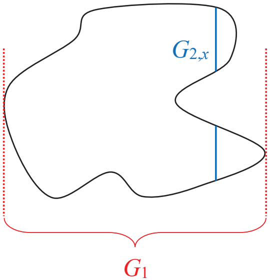
定义

- (X,Y) 的边缘密度指X 的密度$p_X(x), x \in \mathbb{R}$与 Y 的密度$p_Y(y), y \in \mathbb{R}$.
- 条件密度指
  $\{p_{Y|X}(y|x) := \frac{p(x,y)}{p_X(x)}, y \in \mathbb{R}\}$ ($\forall x$ 给定), 与
  $\{p_{X|Y}(x|y) := \frac{p(x,y)}{p_Y(y)}, x \in \mathbb{R}\}$ ($\forall y$ 给定).

- $p_X(x) = \int p(x,y)dy$, $p_Y(y) = \int p(x,y)dx$.
- $\int p_{Y|X}(y|x)dy = 1$, $\forall x$. $\int p_{X|Y}(x|y)dx = 1$, $\forall y$.
- 联合密度$\Rightarrow$ 边缘密度、条件密度.
- $p_X \bigoplus p_{Y|X}(\cdot|x)$, $\forall x$, 或$p_Y \bigoplus p_{X|Y}(\cdot|y)$, $\forall y$ $\Rightarrow$ 联合密度.
- $p_{Y|X}(y|x)$直观含义是$P(Y \in (y, y+dy)|X \in (x, x+dx)) = \frac{p(x,y)dxdy}{p_X(x)dx} = p_{Y|X}(y|x)dy$.

定义2.5. (面积为a 的)区域G 上的均匀分布$\xi \sim U(G)$.

- 联合密度: $p(x,y) := \frac{1}{a}$, $(x,y) \in G$.
- 边缘密度: $p_X(x) = \frac{|G_{2,x}|}{a}$, $x \in G_1$,
  其中$G_{2,x} := \{y : (x,y) \in G\}$,
  $G_1 = \{x : |G_{2,x}| > 0\}$.
- 条件密度: $p_{Y|X}(y|x) = \frac{1}{|G_{2,x}|}$, $y \in G_{2,x}$.
- $p_{Y|X}(y|x) = \frac{1}{p_X(x)} p(x,y)$
  就是将$p(x,y)$ 对y 进行归一化.



定义2.6, 例7.5 二维正态分布的密度函数$p(x,y)$ 为

$$C\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left((\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})^2+(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2})^2-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}\right)\right\},$$

其中$\mu_1,\mu_2\in\mathbb{R}$, $\sigma_1,\sigma_2>0$, $|\rho|<1$; $C=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$.

- 标准形式vs 一般形式$Ce^{-ax^2-by^2+cxy+dx+ey}$.
- 例. $p(x,y)=Ce^{-\frac{1}{2}x^2-y^2+xy-3x+5y}$, $\surd$. $Ce^{-x^2-y^2-2xy}$, $\times$.
- $p_X(x)=Ce^{-\frac{1}{2}x^2-3x}\int e^{-y^2+xy+5y}dy$.
- $-(y^2-(x+5)y+(\frac{x+5}{2})^2)+\frac{1}{4}x^2+\frac{5}{2}x+c$.
- $p_X(x)=C_1e^{-\frac{1}{2}x^2-3x}e^{\frac{1}{4}x^2+\frac{5}{2}x}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}}e^{-\frac{(x+1)^2}{4}}$.
- $p_{X|Y}(x|y)=C_ye^{-\frac{1}{2}x^2+(y-3)x}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(x-(y-3))^2}$.

3. 一般情形

- 联合分布函数$F(x,y)=P(X\leqslant x, Y\leqslant y)$. 性质见书.
- 连续型: $p(x,y)=\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(x,y)$.
- $F_{\vec{X}}(\vec{x})=P(X_1\leqslant x_1,\cdots,X_n\leqslant x_n)$.

§3.3 随机变量的独立性

定义 (随机变量相互独立)

- n个随机变量$X_1, X_2, \cdots, X_n$相互独立指$\forall x_1, \cdots, x_n$, $P(X_1 \leqslant x_1, \cdots, X_n \leqslant x_n) = P(X_1 \leqslant x_1) \cdots P(X_n \leqslant x_n)$.
- 随机变量列$X_1, X_2, \cdots$相互独立指$X_1, \cdots, X_n$ 相互独立, $\forall n \geqslant 2$.
- 独立同分布的*(independent and identically distributed, i.i.d.)*随机变量序列指$X_1, X_2, \cdots$ 相互独立, 且$F_{X_n} = F_{X_1}$, $\forall n$.
- 随机向量相互独立指$F_{\vec{X},\vec{Y}}(\vec{x}, \vec{y}) = F_{\vec{X}}(\vec{x}) F_{\vec{Y}}(\vec{y})$, $F_{\vec{X}^{(1)}, \cdots, \vec{X}^{(n)}}(\vec{x}^{(1)}, \cdots, \vec{x}^{(n)}) = F_{\vec{X}^{(1)}}(\vec{x}^{(1)}) \cdots F_{\vec{X}^{(n)}}(\vec{x}^{(n)})$.

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ **相互独立的等价条件:**

- $P(X_1 \in D_1, \cdots, X_n \in D_n) = P(X_1 \in D_1) \cdots P(X_n \in D_n)$.
- 离散型: $P(\bigcap_{i=1}^n \{X_i = x_i\}) = \prod_{i=1}^n P(X_i = x_i)$.
- 连续型: $p_{\vec{X}}(x_1, \cdots, x_n) = p_{X_1}(x_1) \cdots p_{X_n}(x_n)$.

X, Y **相互独立的等价条件:**

- 在$X = x$ 的条件下, Y 的条件分布就是其边缘分布.
  - 若$E|X|, E|Y| < \infty$, 且X与Y独立, 则$E(XY) = (EX)(EY)$ (定理4.4).

    例: $EXY = \iint xyp_X(x)p_Y(y)dxdy$.

泊松分布的独立性.

习题一、38. 每个虫卵独立地以概率p 孵化为虫.

虫卵数$X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $Y =$ 幼虫数, $Z =$ 死卵数.

则$Y \sim \mathcal{P}(\lambda p)$, $Z \sim \mathcal{P}(\lambda(1-p))$, 且$Y$, Z 相互独立.

- $P(Y = k|X = n) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$.
- $P(Y = k, Z = \ell) = P(Y = k, X = k + \ell) \overset{n=k+\ell}{=}$
  $\frac{\lambda^{k+\ell}}{(k+\ell)!} e^{-\lambda} C_{k+\ell}^k p^k (1-p)^\ell = \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda p} \frac{(\lambda(1-p))^\ell}{\ell!} e^{-\lambda(1-p)}$.
- $P(Y = k) = \sum_\ell P(Y = k, Z = \ell) =$
  $\frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda p} \sum_\ell \frac{(\lambda(1-p))^\ell}{\ell!} e^{-\lambda(1-p)} = \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda p}$.
- 一般化：$\sum_{i=1}^k p_i = 1$, Y_i : 第i类的个数, $i = 1, \cdots, k$.
  $P(Y_i = n_i, \forall i) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \frac{n!}{\prod_i n_i!} \prod_i p_i^{n_i} = \prod_i \frac{(\lambda p_i)^{n_i}}{n_i!}$.