单元-2.3-关系的表示和关系的性质

第一编 集合论 第2章 二元关系

2.3 关系矩阵和关系图

2.4 关系的性质

内容提要

- 关系的表示
  - 集合
  - 关系矩阵
  - 关系图
- 关系的性质
  - 自反、反自反
  - 对称、反对称
  - 传递

关系矩阵

- $A=\{a_1,a_2,...,a_n\}$, $R \subseteq A \times A$
- R的关系矩阵

$$M(R)=(r_{ij})_{n\times n}$$

$$M(R)(i,\ j) = r_{ij} = \begin{cases} 1, & a_i R a_j \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$$

北京大学

例2.4

- $A=\{a,b,c\}$

$R_1=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle\}$

$R_2=\{\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle b,c\rangle\}$

$$M(R_1)=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\qquad M(R_2)=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

关系矩阵的性质

- 集合表达式与关系矩阵可唯一相互确定
- $M(R^{-1})=(M(R))^T$
  - ^{T}表示矩阵转置
- $M(R_1 o R_2)=M(R_2)\bullet M(R_1)$
  - •表示矩阵的“逻辑乘”，加法用$\vee$, 乘法用$\wedge$

例2.4

- $A=\{a,b,c\}$

  $R_1=\{<a,a>,<a,b>,<b,a>,<b,c>\}$

  $R_2=\{<a,b>,<a,c>,<b,c>\}$

  用$M(R_1)$, $M(R_2)$确定$M(R_1^{-1})$, $M(R_2^{-1})$, $M(R_1 o R_1)$, $M(R_1 o R_2)$, $M(R_2 o R_1)$, 从而求出它们的集合表达式.

例2.4

- **解:**

$$M(R_1)=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix},\qquad M(R_2)=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

$$M(R_1^{-1})=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix},\qquad M(R_2^{-1})=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&1&0\end{bmatrix}.$$

$R_1^{-1}=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle c,b\rangle\}$

$R_2^{-1}=\{\langle b,a\rangle,\langle c,a\rangle,\langle c,b\rangle\}$

例2.4

$$M(R_1 \circ R_1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$R_1 o R_1$={<a,a>,<a,b>,<a,c>,

<b,a>,<b,b>}.

例2.4

$$M(R_1 \circ R_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

R_1oR_2={<a,a>,<a,c>}

例2.4

$$M(R_2 \circ R_1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

R_2oR_1={<a,b>,<a,c>,<b,b>,<b,c>}

#

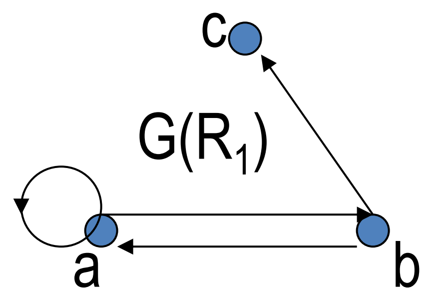
关系图

- $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$, $R\subseteq A\times A$
- R的关系图 G(R)
  - 以“o”表示A中元素(称为顶点), 以“→”表示R中元素(称为有向边)
  - 若a_iRa_j, 则从顶点a_i向顶点a_j引有向边$\langle a_i,a_j\rangle$

例2.4

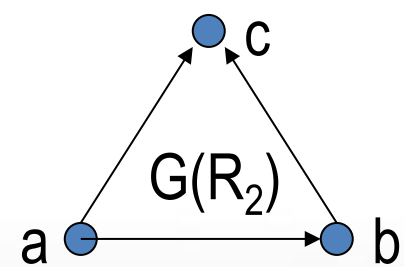
- A={a,b,c}

$R_1=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle\}$



$G(R_1)$

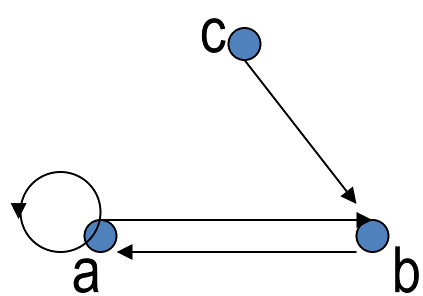
$R_2=\{\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle b,c\rangle\}$



$G(R_2)$

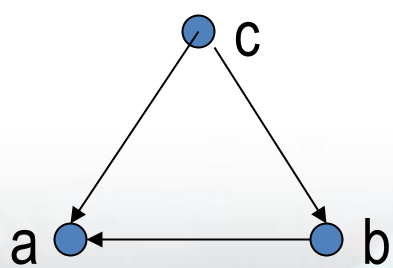
例2.4

$R_1^{-1} = \{<a,a>,<a,b>,<b,a>,<c,b>\}$



$G(R_1^{-1})$

$R_2^{-1} = \{<b,a>,<c,a>,<c,b>\}$



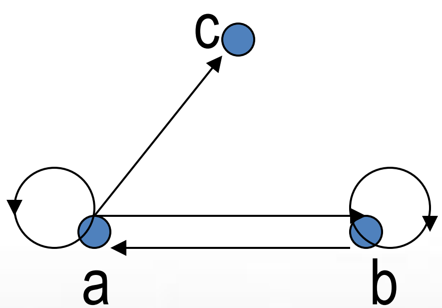
$G(R_2^{-1})$

例2.4

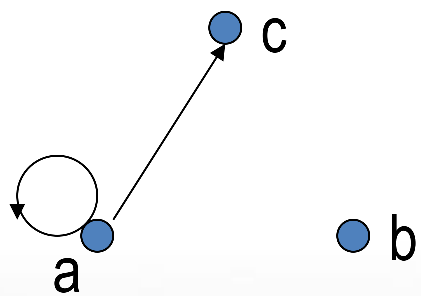
$R_1 o R_1 = \{<a,a>,<a,b>,<a,c>,<b,a>,$
$<b,b>\}.$

$R_1 o R_2 = \{<a,a>,<a,c>\}.$

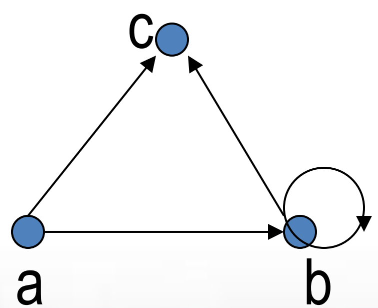
$R_2 o R_1 = \{<a,b>,<a,c>,<b,b>,<b,c>\}.$



$G(R_1 o R_1)$



$G(R_1 o R_2)$



$G(R_2 o R_1)$

讨论

- 当A中元素标定次序后, 对于$R \subseteq A \times A$
  - G(R)与R的集合表达式可唯一互相确定
  - R的集合表达式,关系矩阵,关系图三者均可唯一互相确定
- 对于$R \subseteq A \times B$
  - $|A|=n,|B|=m$,关系矩阵M(R)是$n \times m$阶
  - G(R)中边都是从A中元素指向B中元素

关系性质

- 自反性(reflexivity)
- 反自反性(irreflexivity)
- 对称性(symmetry)
- 反对称性(antisymmetry)
- 传递性(transitivity)

自反性

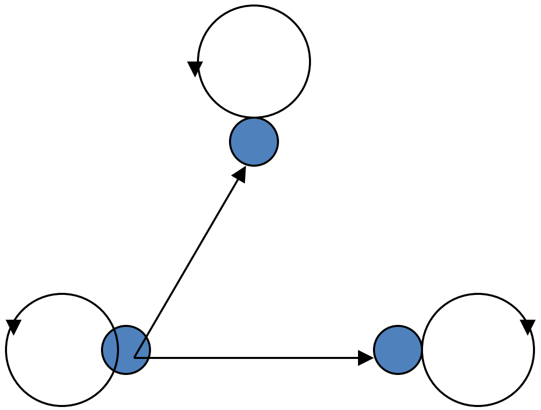
- $R \subseteq A \times A$
- R是自反的 $\Leftrightarrow$

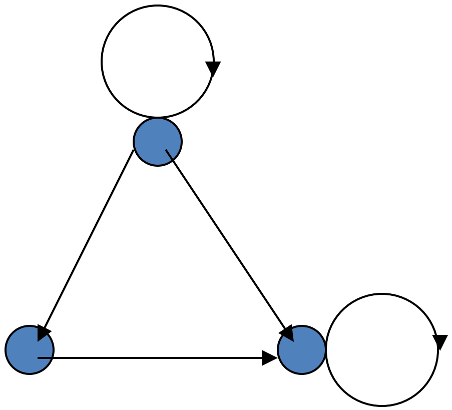
$$\forall x(x \in A \rightarrow xRx)$$

$$\Leftrightarrow (\forall x \in A) xRx$$

- R是非自反的 $\Leftrightarrow \exists x(x \in A \wedge \neg xRx)$

自反性举例





自反　　　　非自反

定理2.10

- 定理2.10:

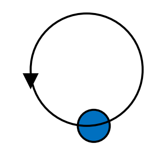
  R是自反的

  $\Leftrightarrow$ $I_A \subseteq R$

  $\Leftrightarrow$ R^{-1}是自反的

  $\Leftrightarrow$ M(R)主对角线上的元素全为1

  $\Leftrightarrow$ G(R)的每个顶点处均有环. #



反自反性

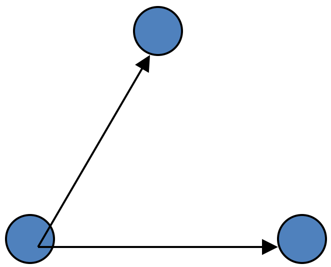
- $R \subseteq A \times A$
- R是反自反的 $\Leftrightarrow$

  $\forall x(x \in A \rightarrow \neg xRx)$

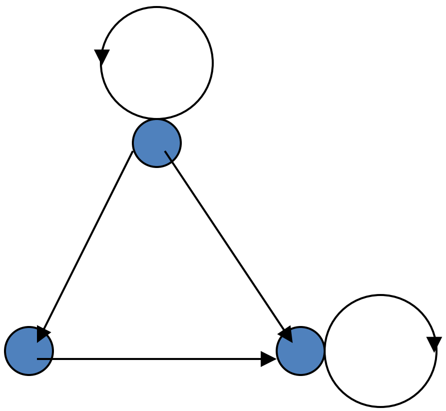
  $\Leftrightarrow (\forall x \in A) \neg xRx$

- R是非反自反的 $\Leftrightarrow \exists x(x \in A \wedge xRx)$

反自反性举例



反自反



非反自反

定理2.11

- 定理2.11:

  R是反自反的

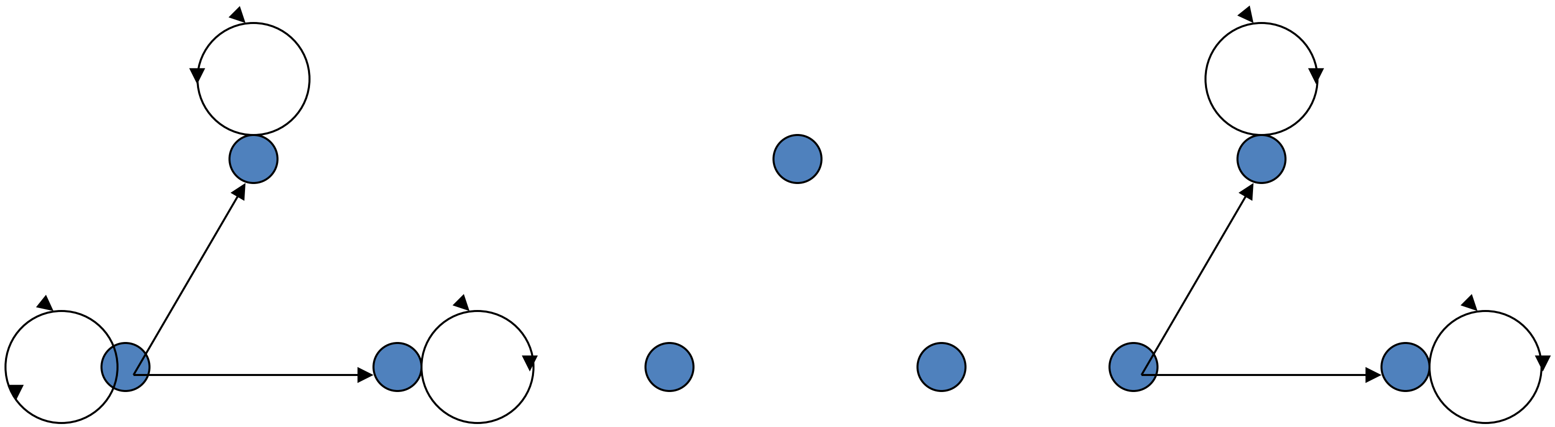
  $\Leftrightarrow I_A \cap R = \varnothing$

  $\Leftrightarrow R^{-1}$是反自反的

  $\Leftrightarrow M(R)$主对角线上的元素全为0

  $\Leftrightarrow G(R)$的每个顶点处均无环. #

自反性与反自反性



自反　　　　反自反　　　　都不是

(自反且反自反: $\varnothing$上的空关系)

对称性

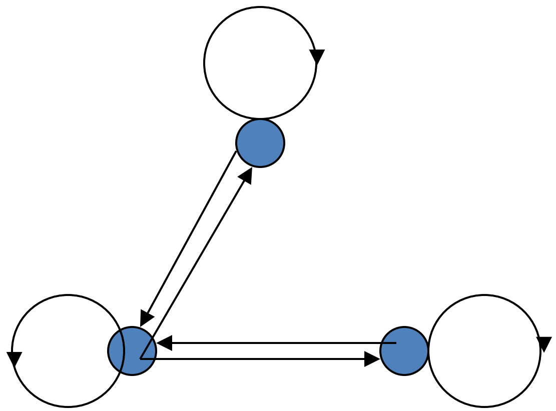
- $R \subseteq A \times A$
- R是对称的 $\Leftrightarrow$

$$\forall x \forall y(x \in A \wedge y \in A \wedge xRy \rightarrow yRx)$$

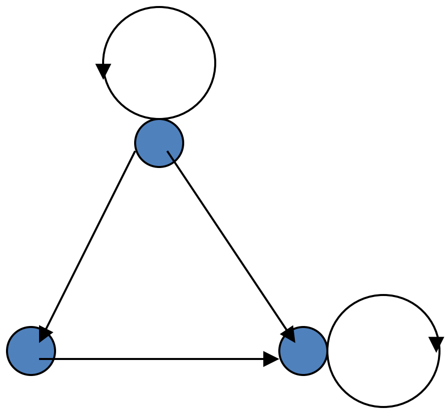
$$\Leftrightarrow (\forall x \in A)(\forall y \in A)[xRy \rightarrow yRx]$$

- R是非对称的 $\Leftrightarrow$
$\exists x \exists y(x \in A \wedge y \in A \wedge xRy \wedge \neg yRx)$

对称性举例



对称



非对称

定理2.12

- 定理2.12:

  R是对称的

  $\Leftrightarrow$ $R^{-1}=R$

  $\Leftrightarrow$ R^{-1}是对称的

  $\Leftrightarrow$ M(R)是对称的

  $\Leftrightarrow$ G(R)的任何两个顶点之间若有边, 则必有两条方向相反的有向边. #

反对称性

- $R \subseteq A \times A$
- R是反对称的 $\Leftrightarrow$

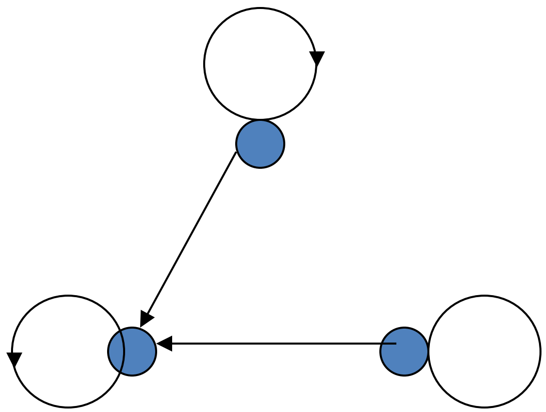
  $\forall x \forall y(x \in A \wedge y \in A \wedge xRy \wedge yRx \rightarrow x=y)$

  $\Leftrightarrow (\forall x \in A)(\forall y \in A)[xRy \wedge yRx \rightarrow x=y]$

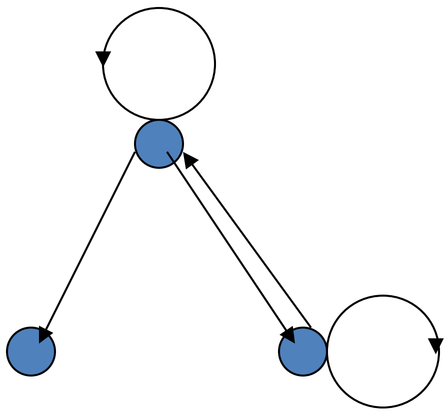
- R非反对称 $\Leftrightarrow$

  $\exists x \exists y(x \in A \wedge y \in A \wedge xRy \wedge yRx \wedge x \neq y)$

反对称性举例



反对称



非反对称

定理2.13

- 定理2.13:

  R是反对称的

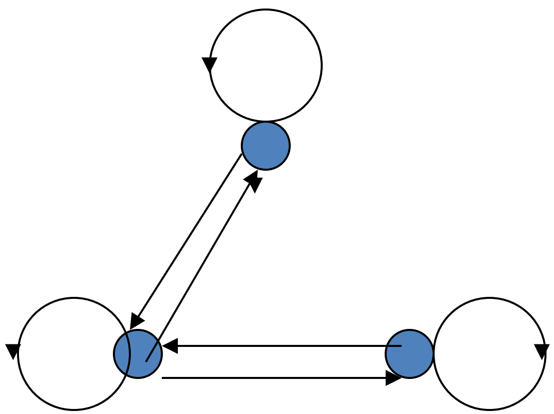
  $\Leftrightarrow R^{-1}\cap R\subseteq I_A$

  $\Leftrightarrow R^{-1}$是反对称的

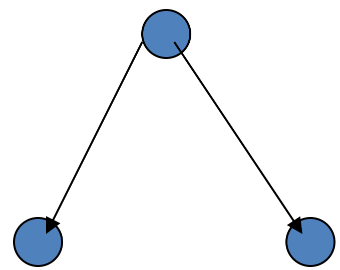
  $\Leftrightarrow$ 在M(R)中,$\forall i\forall j(i\neq j\wedge r_{ij}=1\rightarrow r_{ji}=0)$

  $\Leftrightarrow$ 在G(R)中, $\forall a_i\forall a_j(i\neq j)$,若有有向边$<a_i,a_j>$, 则必没有$<a_j,a_i>$. #

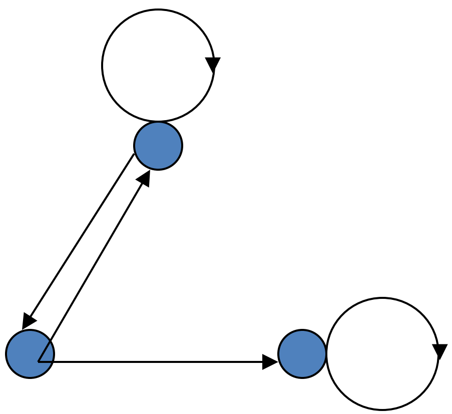
对称性与反对称性



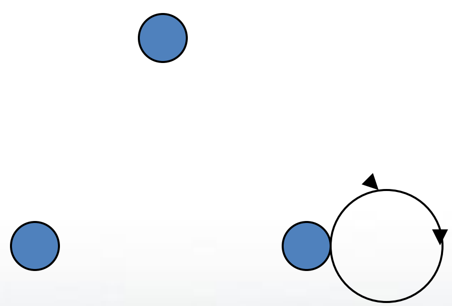
对称



反对称



都不是



对称且反对称

传递性

- $R \subseteq A \times A$
- R是传递的 $\Leftrightarrow$

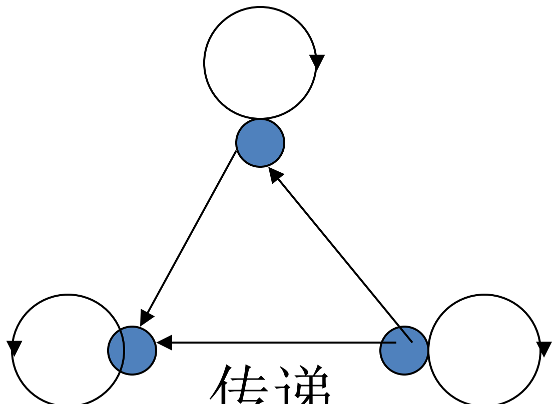
  $\forall x \forall y \forall z (x \in A \wedge y \in A \wedge z \in A \wedge xRy \wedge yRz \rightarrow xRz)$

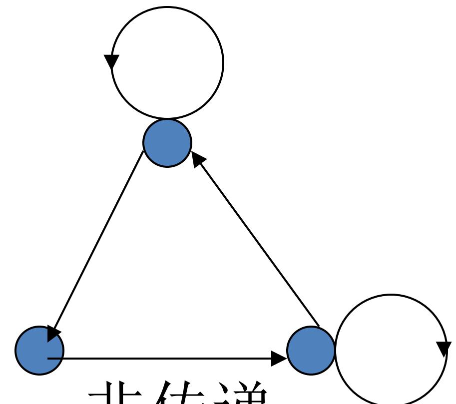
  $\Leftrightarrow (\forall x \in A)(\forall y \in A)(\forall z \in A)[xRy \wedge yRz \rightarrow xRz]$

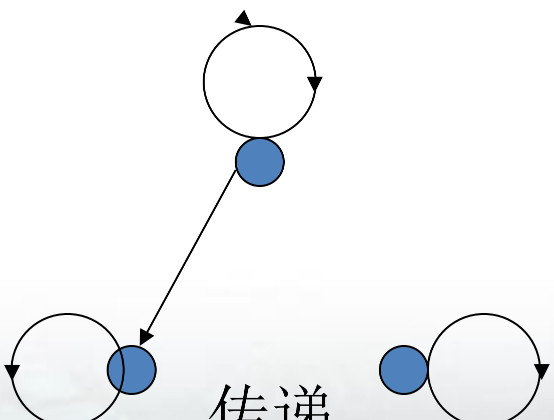
- R非传递 $\Leftrightarrow$

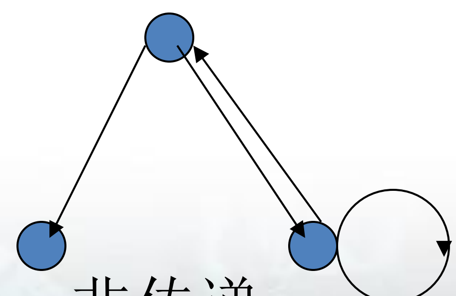
  $\exists x \exists y \exists z (x \in A \wedge y \in A \wedge z \in A \wedge xRy \wedge yRz \wedge \neg xRz)$

传递性举例


传递


非传递


传递


非传递

定理2.14

- 定理2.14:

  R是传递的

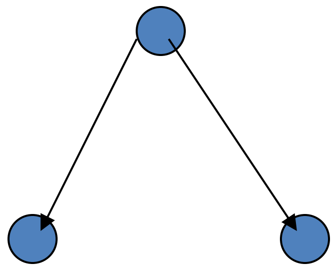
$\Leftrightarrow$ $R \circ R \subseteq R$ $\Leftrightarrow$ R^{-1}是传递的

$\Leftrightarrow$ $\forall i \forall j$, $M(R \circ R)(i,j) \le M(R)(i,j)$

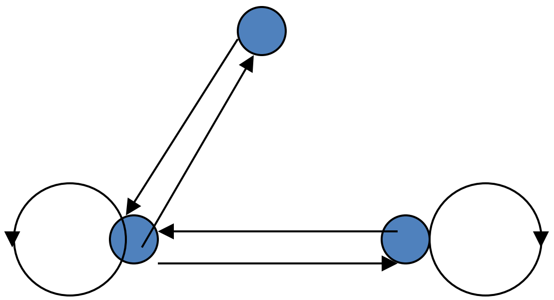
$\Leftrightarrow$ 在G(R)中, $\forall a_i \forall a_j \forall a_k$, 若有有向边$\langle a_i,a_j \rangle$和$\langle a_j,a_k \rangle$, 则必有有向边$\langle a_i,a_k \rangle$.

#

传递性



传递



非传递

在N={0,1,2,…}上

- $\leq=\{\langle x,y\rangle \mid x\in N\wedge y\in N\wedge x\leq y\}$自反,反对称,传递
- $\geq=\{\langle x,y\rangle \mid x\in N\wedge y\in N\wedge x\geq y\}$自反,反对称,传递
- $<=\{\langle x,y\rangle \mid x\in N\wedge y\in N\wedge x<y\}$反自反,反对称,传递
- $>=\{\langle x,y\rangle \mid x\in N\wedge y\in N\wedge x>y\}$反自反,反对称,传递
- $\mid=\{\langle x,y\rangle \mid x\in N\wedge y\in N\wedge x\mid y\}$反对称,传递($\neg 0\mid 0$)
- $I_N=\{\langle x,y\rangle \mid x\in N\wedge y\in N\wedge x=y\}$自反,对称,反对称,传递
- $E_N=\{\langle x,y\rangle \mid x\in N\wedge y\in N\}=N\times N$自反,对称,传递.

#

例2.5

- $A=\{a,b,c\}$

$R_1=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle a,c\rangle\}$,

$R_2=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,a\rangle\}$,

$R_3=\{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,$
$\langle c,c\rangle\}$,

$R_4=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle c,c\rangle\}$,

$R_5=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle\}$,

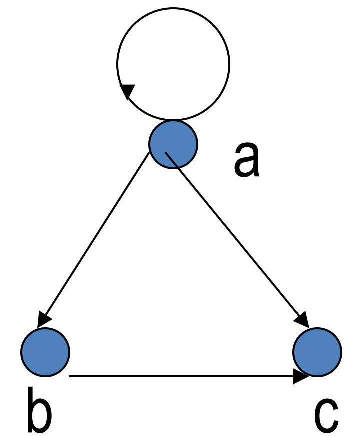
$R_6=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle a,a\rangle\}$,

例2.5

$R_1=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,$

$\langle b,c\rangle,\langle a,c\rangle\}$

反对称,传递

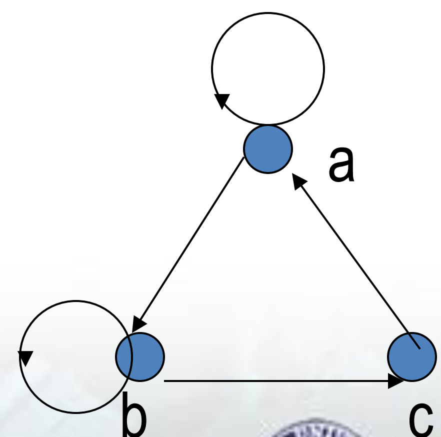


$G(R_1)$

$R_2=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,$

$\langle b,c\rangle,\langle c,a\rangle\}$

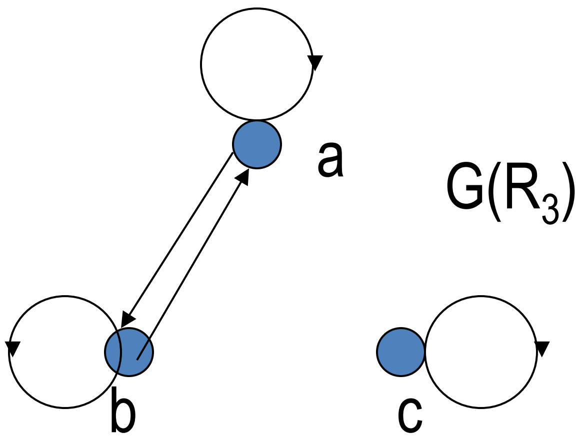
反对称



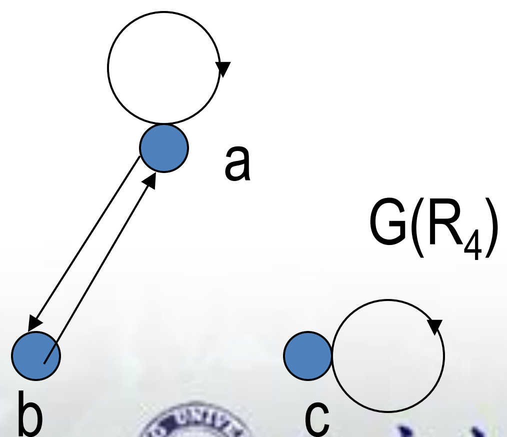
$G(R_2)$

例2.5

R_3={<a,a>,<b,b>,
<a,b>,<b,a>,<c,c>}
自反,对称,传递

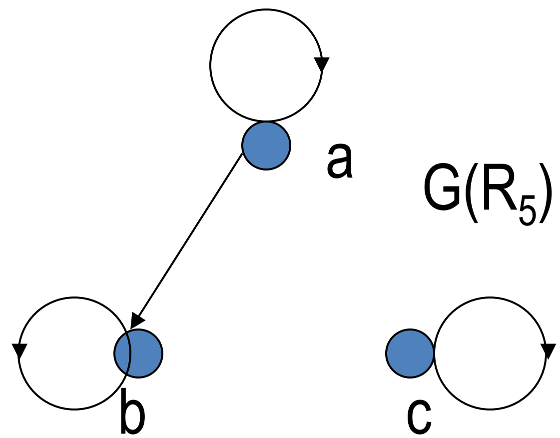


R_4={<a,a>,<a,b>,
<b,a>,<c,c>}
对称



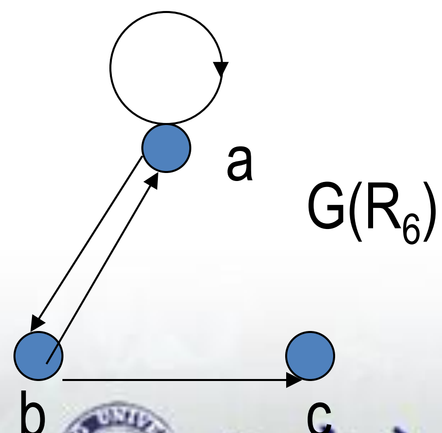
例2.5

R_5={<a,a>,<a,b>,
<b,b>,<c,c>}
自反,反对称,传递



R_6={<a,b>,<b,a>,
<b,c>,<a,a>}.
无任何性质

#



关系性质与关系运算

- 定理2.15: $R_1,R_2 \subseteq A\times A$

	自反	反自反	对称	反对称	传递
R_1^{-1}, R_2^{-1}	√	√	√	√(4)	√
$R_1\cup R_2$	√	√	√		
$R_1\cap R_2$	√	√(2)	√	√	√(5)
$R_1 \circ R_2$,$R_2 \circ R_1$	√(1)				
R_1-R_2 , R_2-R_1		√	√(3)	√	
$\sim R_1$,$\sim R_2$			√(3')		

北京大学

定理2.15(1)证明

- R_1,R_2自反 $\Rightarrow R_1 o R_2$自反
- 证明: $\forall x$,

$$x \in A$$

$$\Rightarrow xR_2x \land xR_1x$$

$$\Rightarrow xR_1oR_2x$$

$\therefore R_1,R_2$自反 $\Rightarrow R_1 o R_2$自反.

定理2.15(2)证明

- R_1,R_2反自反 $\Rightarrow$ $R_1\cap R_2$反自反
- 证明: (反证) 若$R_1\cap R_2$非反自反, 则 $\exists x\in A$,

$$x(R_1\cap R_2)x$$

$$\Leftrightarrow xR_1x \wedge xR_2x$$

与R_1,R_2反自反矛盾!

$\therefore$ R_1,R_2反自反 $\Rightarrow$ $R_1\cap R_2$反自反. #

定理2.15(3)证明

- R_1,R_2对称 $\Rightarrow$ R_1-R_2对称
- 证明: $\forall x,y\in A$,

$$
\begin{aligned}
& x(R_1-R_2)y \\
\Leftrightarrow\ & xR_1y \wedge \neg xR_2y \\
\Leftrightarrow\ & yR_1x \wedge \neg yR_2x \\
\Leftrightarrow\ & y(R_1-R_2)x
\end{aligned}
$$

$\therefore$ R_1,R_2对称 $\Rightarrow$ R_1-R_2对称. #

定理2.15(3')证明

- R_1对称 $\Rightarrow$ $\sim R_1$对称
- 证明: $\forall x,y \in A$,

$$x(\sim R_1)y$$

$$\Leftrightarrow x(E_A - R_1)y \Leftrightarrow xE_Ay \wedge \neg xR_1y$$

$$\Leftrightarrow yE_Ax \wedge \neg yR_1x \Leftrightarrow y(E_A - R_1)x$$

$$\Leftrightarrow y(\sim R_1)x$$

$\therefore$ R_1对称 $\Rightarrow$ $\sim R_1$对称. #

定理2.15(4)证明

- R_1反对称 $\Rightarrow$ R_1^{-1}反对称
- 证明: (反证) 若R_1^{-1}非反对称, 则 $\exists x,y\in A$,

$$xR_1^{-1}y \wedge yR_1^{-1}x \wedge x\neq y$$

$$\Leftrightarrow yR_1x \wedge xR_1y \wedge x\neq y$$

与R_1反对称矛盾!

$\therefore$ R_1反对称 $\Rightarrow$ R_1^{-1}反对称. #

定理2.15(5)证明

- R_1,R_2传递 $\Rightarrow R_1\cap R_2$传递
- 证明: $\forall x,y,z\in A$,

$$x(R_1\cap R_2)y \wedge y(R_1\cap R_2)z$$

$$\Leftrightarrow (xR_1y\wedge xR_2y)\wedge(yR_1z\wedge yR_2z)$$

$$\Leftrightarrow (xR_1y\wedge yR_1z)\wedge(xR_2y\wedge yR_2z)$$

$$\Rightarrow\ xR_1z\wedge xR_2z\ \Leftrightarrow x(R_1\cap R_2)z$$

$\therefore\ R_1,R_2$传递 $\Rightarrow R_1\cap R_2$传递. #

小结

- M(R), G(R)
- 自反, 反自反, 对称, 反对称, 传递