等价关系和划分

第一编 集合论 第2章 二元关系

2.7等价关系和划分

内容提要

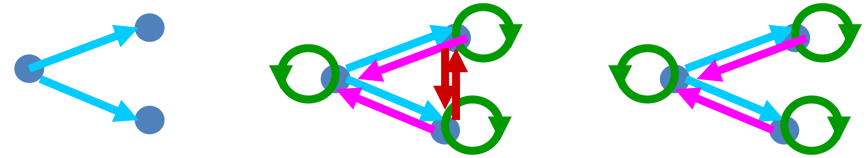
- 等价关系、等价类、商集
- 同余关系
- 划分、划分的块、划分的加细
- Stirling子集数

等价关系

定义2.14 设A≠∅且R⊆A×A, 若R是自反、对称、传递的，则说 R是等价关系.

	关系	自反	对称	传递	等价关系
R_1	x与y同年生	√	√	√	√
R_2	x与y同姓	√	√	√	√
R_3	x的年龄不比y小	√	×	√	×
R_4	x与y选修同门课程	√	√	×	×
R_5	x的体重比y重	×	×	√	×

例2.10



例2. 10 设A≠∅且R⊆A×A，对R依次求三种闭包，共有6种不同顺序，其中哪些顺序一定导致等价关系？ (说明：tsr(R)=t(s(r(R))))

解 由于 sr(R)=rs(R)，tr(R)=rt(R)，st(R)⊆ts(R)，

所以6种顺序至多产生两种结果：

	tsr(R)=trs(R)=rts(R)	str(R)=srt(R)=rst(R)
自反	√	√
对称	√	√
传递	√	×
等价关系	√(等价闭包)	×

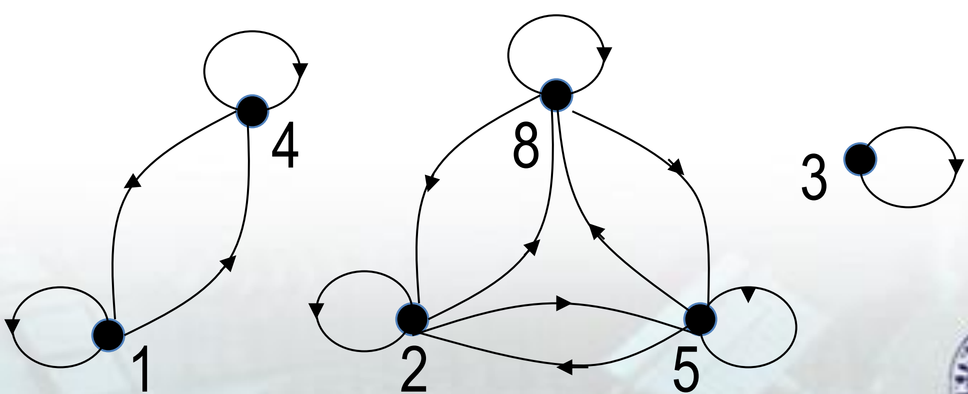
等价类

定义2.15 设 R 是$A\neq\varnothing$上等价关系, $\forall x\in A$, 则 x 关于R的等价类是 $[x]_R = \{\ y \mid y\in A \wedge xRy\ \}$, 简称为x的等价类, 简记为$[x]$。

例2.11 设 $A=\{1,2,3,4,5,8\}$, A上模3同余关系

$R_3 = \{\ \langle x,y\rangle \mid x,y\in A \wedge x\equiv y(\text{mod } 3)\ \}$ 的等价类

$[1]=[4]=\{1,4\}$, $[2]=[5]=[8]=\{2,5,8\}$, $[3]=\{3\}$



同余关系是等价关系

- 自反性

$$x-x=0\cdot n$$

- 对称性

$$x-y=k\cdot n \Rightarrow y-x=(-k)\cdot n$$

- 传递性

$$x-y=k_1\cdot n \wedge y-z=k_2\cdot n \Rightarrow x-z=(k_1+k_2)\cdot n$$

定理2.27

定理2. 27 设R是$A\neq\varnothing$上等价关系, 则$\forall x,y\in A$,

(1) $[x]_R\neq\varnothing$;　(2) $xRy \Rightarrow [x]_R=[y]_R$;

(3) $\neg xRy \Rightarrow [x]_R\cap[y]_R=\varnothing$;　(4) $\cup\{[x]_R \mid x\in A\}=A$.

证明　(1) R自反 $\Rightarrow xRx \Rightarrow x\in[x]_R \Rightarrow [x]_R\neq\varnothing$.

(2) $\forall z$, $z\in[x]_R \Rightarrow zRx\wedge xRy \Rightarrow zRy \Rightarrow z\in[y]_R$.

所以$[x]_R\subseteq[y]_R$. 同理 $[x]_R\supseteq[y]_R$.

(3) (反证) 假设$\exists z$, $z\in[x]_R\cap[y]_R$, 则 $z\in[x]_R\cap[y]_R$ $\Rightarrow zRx\wedge zRy \Rightarrow xRz\wedge zRy \Rightarrow xRy$, 这与$\neg xRy$矛盾!

(4) $A = \cup\{ \{x\} \mid x\in A \} \subseteq \cup\{ [x]_R \mid x\in A \}$

$\subseteq \cup\{ A \mid x\in A \} = A$. #

商集

定义2. 16 设R是$A\neq\emptyset$上等价关系，A关于R的商集（简称A的商集）是 $A/R = \{ [x]_R \mid x\in A \}$。

- 显然 $\cup A/R = A$
- 例2.11(2):

$$A/R_3 =\{ \{1,4\}, \{2,5,8\}, \{3\} \}$$

例2.12(1)

- $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$上等价关系有：I_A, E_A,

  $R_{ij}=I_A\cup\{<a_i,a_j>,<a_j,a_i>\}$, $a_i,a_j\in A$, $i\neq j$.

  $A/I_A=\{\ \{a_1\}, \{a_2\},\ldots, \{a_n\}\ \}$

  $A/E_A=\{\ \{a_1,a_2,\ldots,a_n\}\ \}$

  $A/R_{ij}=A/I_A\cup\{\{a_i,a_j\}\} - \{\{a_i\},\{a_j\}\}$

  $= \{\ \{a_1\},\ldots,\{a_{i-1}\}, \{a_{i+1}\},\ldots,\{a_{j-1}\},\{a_{j+1}\},\ldots,\{a_n\},$

  $\{a_i,a_j\}\ \}$

  空关系∅不是A上等价关系(非自反)

例2.12(2)

- A={a,b,c}上全体等价关系共有**5**种

  $R_1=I_A$, $R_2=E_A$, $R_3=I_A\cup\{<b,c><c,b>\}$,
  $R_4=I_A\cup\{<a,c><c,a>\}$, $R_5=I_A\cup\{<a,b><b,a>\}$

- 商集: {{a},{b},{c}}, {{a,b,c}}, {{a},{b,c}}, {{a,c},{b}}, {{a,b},{c}}

划分

定义2. 17 $A\neq\varnothing$的一个划分是$\mathcal{A}\subseteq P(A)$满足

(1) $\varnothing\notin\mathcal{A}$

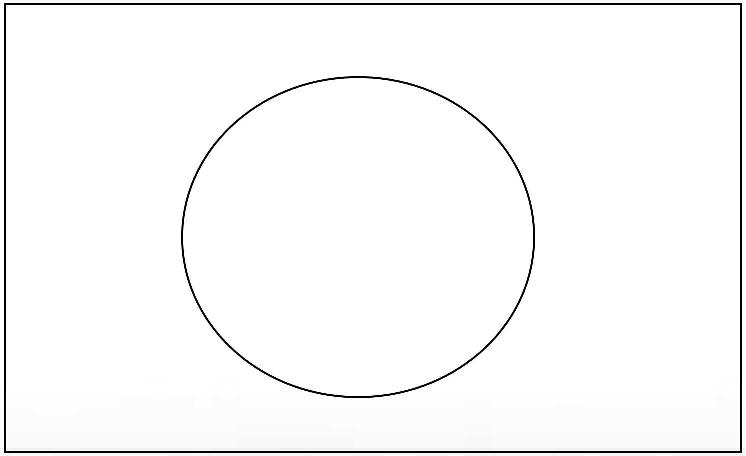
(2) $\forall x,y(\ x,y\in\mathcal{A}\wedge x\neq y \Rightarrow x\cap y=\varnothing\ )$

(3) $\cup\mathcal{A}=A$

$\mathcal{A}$中元素称为划分块(block).

划分举例

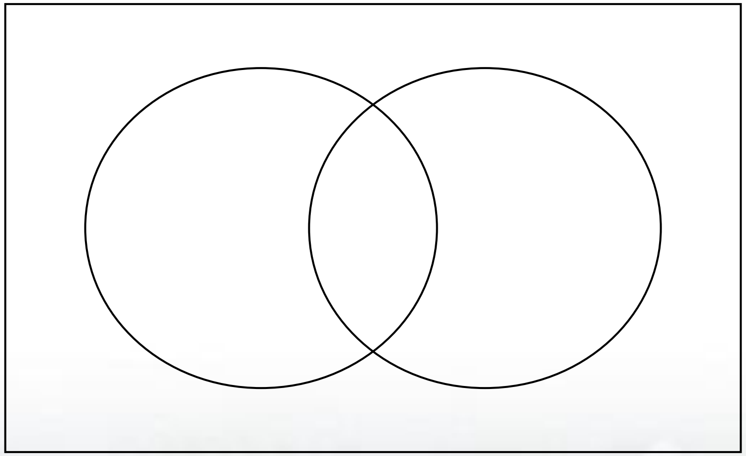
- 设$\varnothing \neq A_1, A_2, \ldots, A_n \subset E$
- $\mathcal{A}_i = \{A_i, \sim A_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$



划分举例

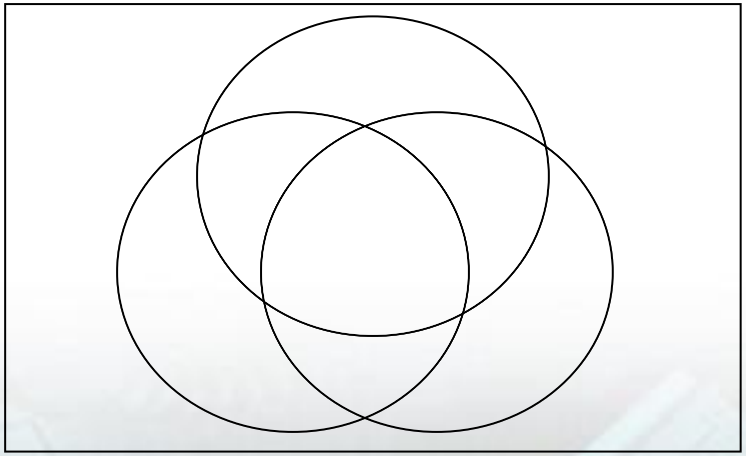
- 设$\varnothing \neq A_1, A_2, \ldots, A_n \subset E$
- $\mathcal{A}_{ij} = \{A_i \cap A_j, \sim A_i \cap A_j, A_i \cap \sim A_j, \sim A_i \cap \sim A_j\} - \{\varnothing\}$

  $i,j = 1,2,\ldots,n \wedge i \neq j$



划分举例

- ……
- $\mathcal{A}_{12\ldots n}$ = {$\sim A_1 \cap \sim A_2 \cap \ldots \cap \sim A_n$,…,
  $\sim A_1 \cap \sim A_2 \cap \ldots \cap \sim A_{n-1} \cap A_n$,…
  $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$}-{$\varnothing$}



定理2.28

- 设A≠∅, 则

  (1) R是A上等价关系 ⇒ A/R是A的划分

  (2) $\mathcal{A}$是A的划分 ⇒ 同块关系 $R_{\mathcal{A}}$

  $$xR_{\mathcal{A}}y \Leftrightarrow \exists z(z\in\mathcal{A} \wedge x\in z \wedge y\in z)$$

  是A上等价关系. #

- $R_{\mathcal{A}}$称为由划分$\mathcal{A}$所定义的等价关系

Stirling子集数

- 把n个不同球放到k个相同盒子, 要求无空盒, 不同放法的总数

$$\left\{ {n \atop k} \right\}$$

称为Stirling子集数。

- 把n元集分成k个非空子集的分法总数

Stirling子集数递推公式

$$\left\{ {n \atop 0} \right\} = 0, \left\{ {n \atop 1} \right\} = 1, \left\{ {n \atop 2} \right\} = 2^{n-1} - 1, \left\{ {n \atop n-1} \right\} = C_n^2, \left\{ {n \atop n} \right\} = 1.$$

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = k\left\{ {n-1 \atop k} \right\} + \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\}.$$

先把**n-1**个元素分成**k**个子集, 再加入第**n**个元素到其中之一

先把**n-1**个元素分成**k-1**个子集, 再让第**n**个元素自成一子集

例2.13

- **A={a,b,c,d}上有15种等价关系**

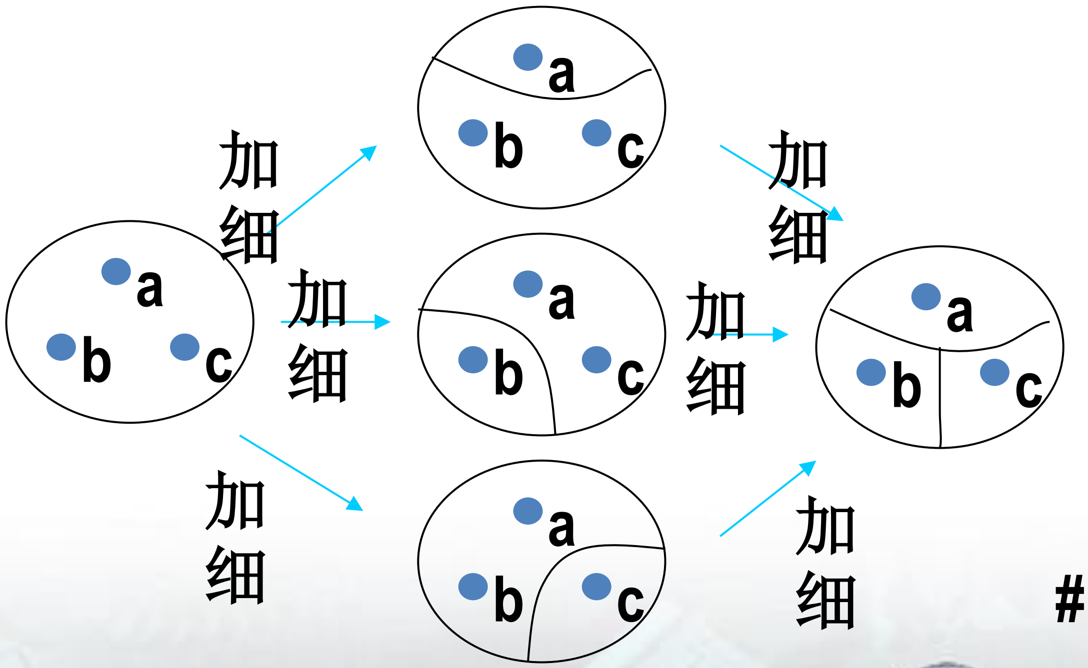
$$\left\{ \begin{matrix} 4 \\ 1 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 4 \\ 3 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 4 \\ 4 \end{matrix} \right\} = 1 + (2^3 - 1) + C_4^2 + 1 = 1 + 7 + 6 + 1 = 15.$$

北京大学

划分的加细

定义2. 18 设$\mathcal{A}$和$\mathcal{B}$都是集A的划分，若$\mathcal{A}$的每个划分块都含于$\mathcal{B}$的某个划分块中，则说$\mathcal{A}$为$\mathcal{B}$的加细。

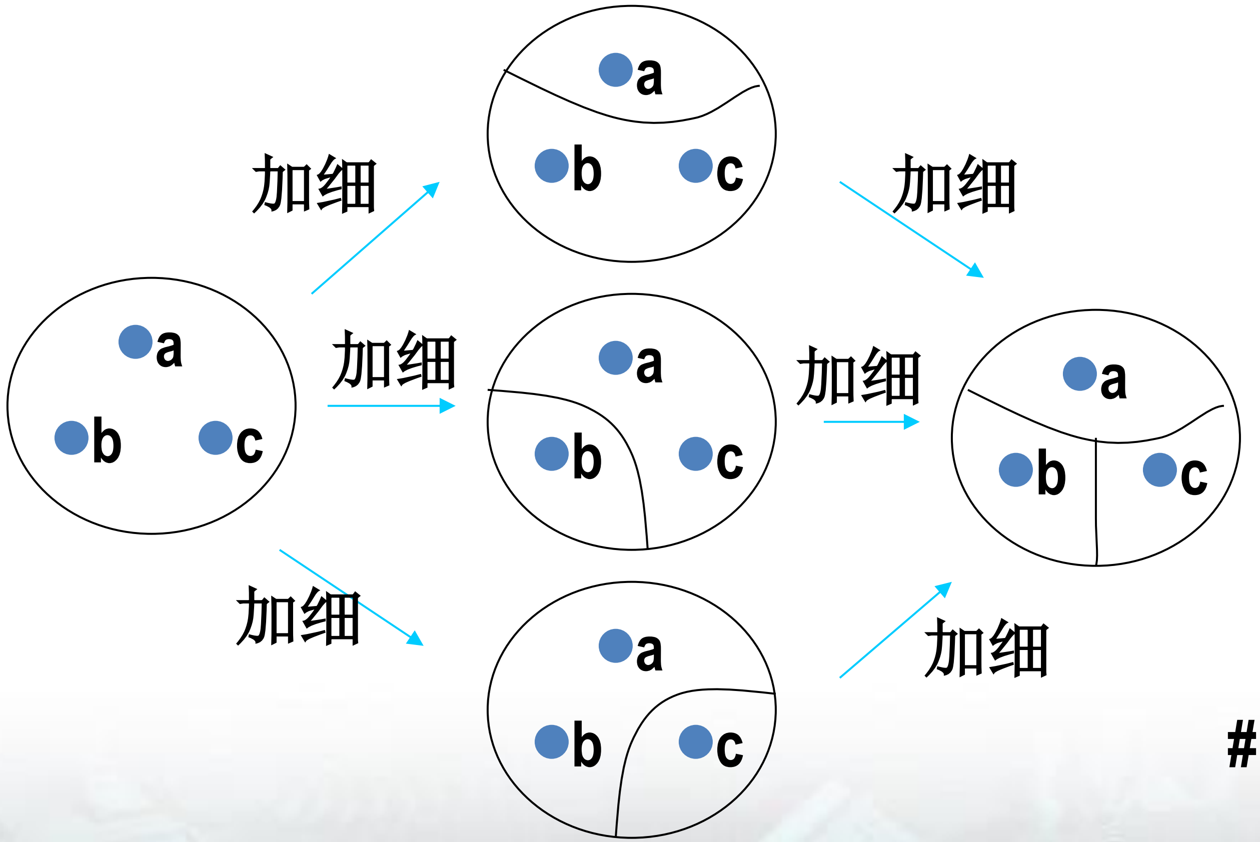
例2. 14 A={a,b,c}上的划分之间的加细。



#

例2.14

- A={a,b,c}上的划分之间的加细



#

小结

- ~ 等价关系(自反, 对称, 传递)
  - 等价类[x], 商集A/R
  - 同余关系
- 划分, 块, 加细
- Stirling子集数