单元8.1 树

第二编 图论　第九章 树

9.1 无向树的定义及性质、9.2 生成树

北京大学

内容提要

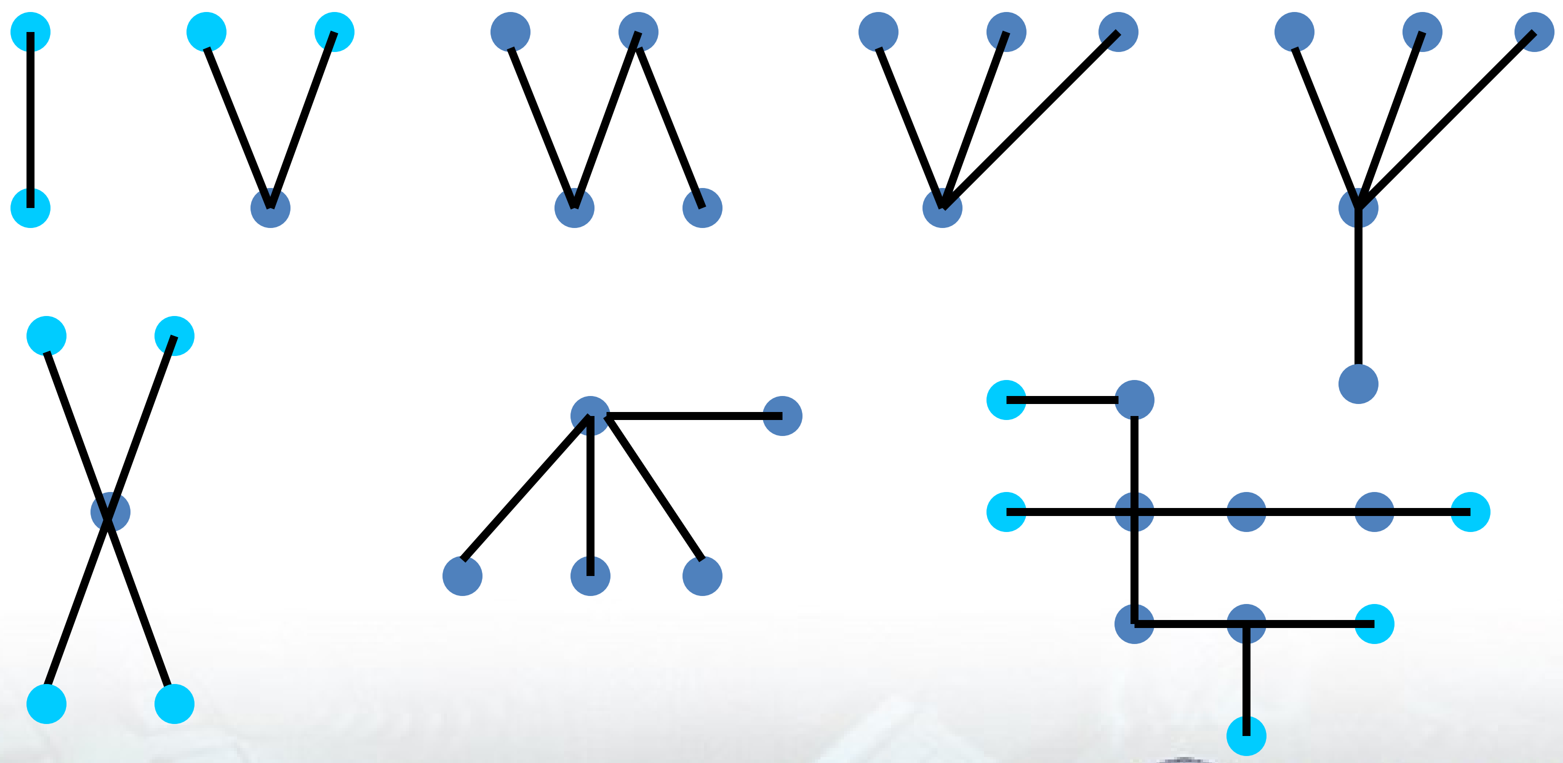
第九章　树

9.1 无向树的定义与性质

9.2 生成树

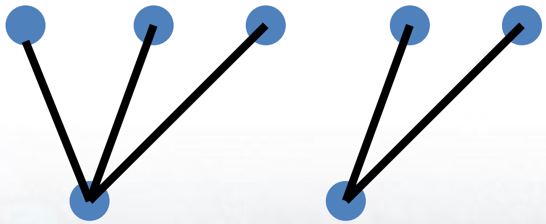
无向树

- **树**: 连通无回图



无向树

- 树(tree): 连通无回图, 常用T表示树
- 树叶(leaf): 树中1度顶点
- 分支点: 树中2度以上顶点
- 平凡树: 平凡图(无树叶,无分支点)
- 森林(forest): 无回图
- 森林的每个连通分支都是树



树的等价定义

定理9. 1 设 G=<V,E>是n阶m边无向图,则

(1) G是树(连通无回)

⇔ (2) G中任何2顶点之间有唯一路径

⇔ (3) G无圈 $\wedge$ m=n-1

⇔ (4) G连通 $\wedge$ m=n-1

⇔ (5) G极小连通: 连通 $\wedge$ 所有边是桥

⇔ (6) G极大无回: 无圈 $\wedge$ 增加任何新边产生唯一圈

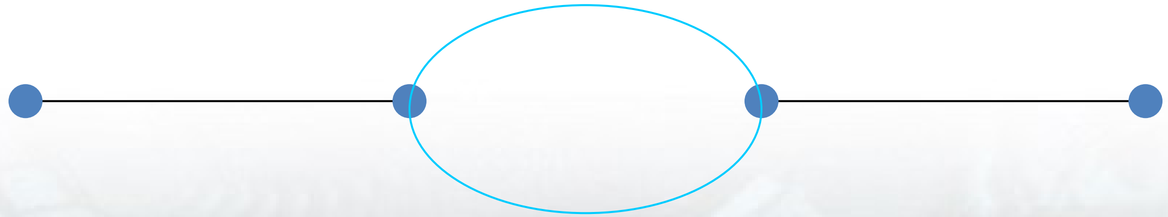
定理9.1证明(1)⇒(2)

证明　(1)⇒(2)⇒(3)⇒(4)⇒(5)⇒(6)⇒(1)

(1) G是树(连通无回)

(2) G中任何2顶点之间有唯一路径

(1)⇒(2): ∀u,v∈V, G连通, u,v之间的短程线是路径. 如果u,v之间的路径不唯一, 则G中有回路, 矛盾!



定理9.1证明(2)⇒(3)

(2) G中任何2顶点之间有唯一路径

(3) G无圈 $\wedge$ m=n-1

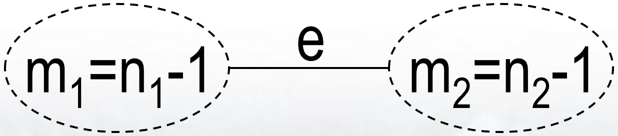
证明(续) (2)⇒(3): 任2点之间有唯一路径⇒无圈

(反证: 有圈⇒存在2点,它们之间有2条路径.)

m=n-1(归纳法): n=1时,m=0. 设n≤k时成立,

当n=k+1时, 任选1边e, G-e有2个连通分支,

$m=m_1+m_2+1=(n_1-1)+(n_2-1)+1=n_1+n_2-1=n-1.$



定理9.1证明(3)⇒(4)

(3) G无圈 $\wedge$ m=n-1

(4) G连通 $\wedge$ m=n-1

证明(续) (3)⇒(4): G连通: 假设G有s个连通分支, 则每个连通分支都是树, 所以

$$m=m_1+m_2+\ldots+m_s=(n_1-1)+(n_2-1)+\ldots+(n_s-1)$$
$$=n_1+n_2+\ldots+n_s-s=n-s=n-1,\text{ 所以 } s=1.$$

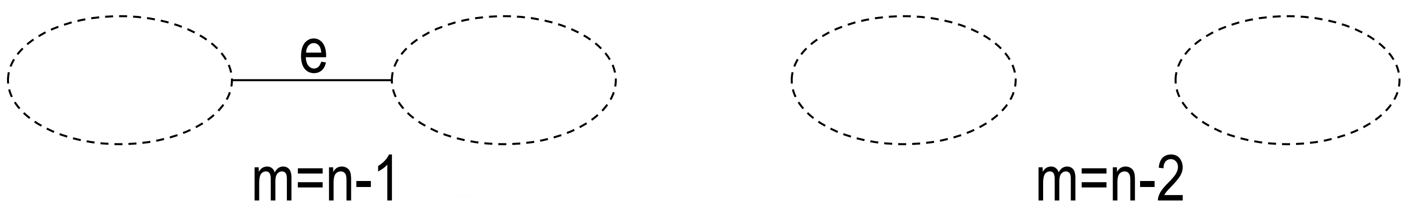
$m_1=n_1-1$ $m_2=n_2-1$ ………… $m_s=n_s-1$

定理9.1证明(4)⇒(5)

(4) G连通 ∧ m=n-1

(5) G极小连通: 连通 ∧ 所有边是桥

证明(续) (4)⇒(5): 所有边是桥: ∀e∈E, G-e是n阶(n-2)边图, 一定不连通(连通⇒m≥n-1), 所以e是割边.

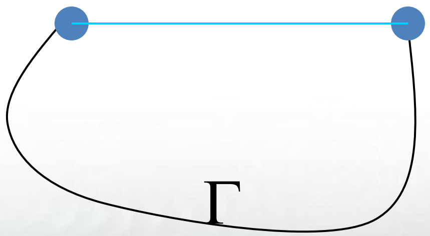


定理9.1证明(5)⇒(6)

(5) G极小连通：连通∧所有边是桥

(6) G极大无回：无圈∧增加任何新边得唯一圈

证明（续）(5)⇒(6): 所有边是桥⇒无圈. ∀u,v∈V, G连通, u,v之间有唯一路径Γ，则Γ∪(u,v)是唯一的圈.



定理9.1证明(6)⇒(1)

(6) G极大无回: 无圈 ∧ 增加任何新边得唯一圈

(1) G是树(连通无回)

证明（续）(6)⇒(1): G连通: $\forall u,v\in V$, $G\cup(u,v)$有唯一的圈C, C-(u,v)是u,v之间的路径. #

定理9.2

定理9. 2 非平凡树至少有**2**个树叶

证明 设T有x个树叶, 由定理1和握手定理,

$$2m = 2(n-1) = 2n-2 = \Sigma d(v)$$

$$= \Sigma_{v\text{是树叶}} d(v) + \Sigma_{v\text{是分支点}} d(v)$$

$\geq x + 2(n-x) = 2n-x$, 所以 $x \geq 2$. #

无向树的计数: t_n

- t_n: n(≥1)阶非同构无向树的个数
- t_n的生成函数(generating function):

$$t(x) = t_1x + t_2x^2 + t_3x^3 + \ldots + t_nx^n + \ldots$$

- Otter公式:

$$t(x) = r(x) - (r(x)^2 - r(x^2)) / 2$$

- r(x)的递推公式:

$$r(x) = x\prod_{i=1}^{\infty}(1-x^i)^{-r_i}$$

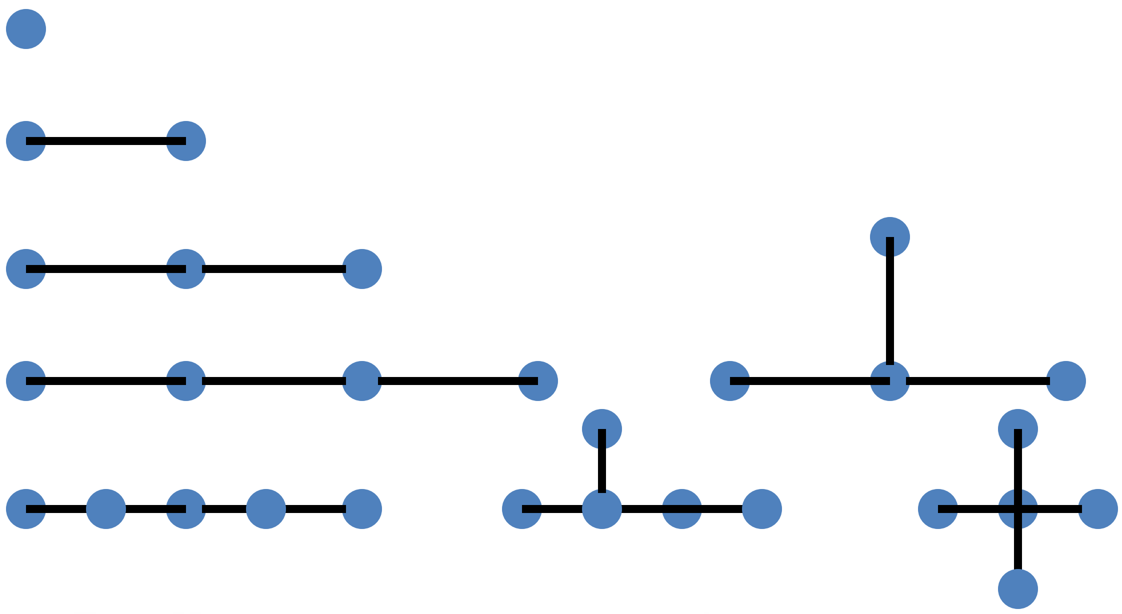
$$r(x) = r_1x + r_2x^2 + r_3x^3 + \ldots + r_nx^n + \ldots$$

t_n表

n	t_n	n	t_n	n	t_n	n	t_n
1	1	9	47	17	48,629	25	104,636,890
2	1	10	106	18	123,867	26	279,793,450
3	1	11	235	19	317,955	27	751,065,460
4	2	12	551	20	823,065	28	2,023,443,032
5	3	13	1,301	21	2,144,505	29	5,469,566,585
6	6	14	3,159	22	5,623,756	30	14,830,871,802
7	11	15	7,741	23	14,828,074	31	40,330,829,030
8	23	16	19,320	24	39,299,897	32	109,972,410,221

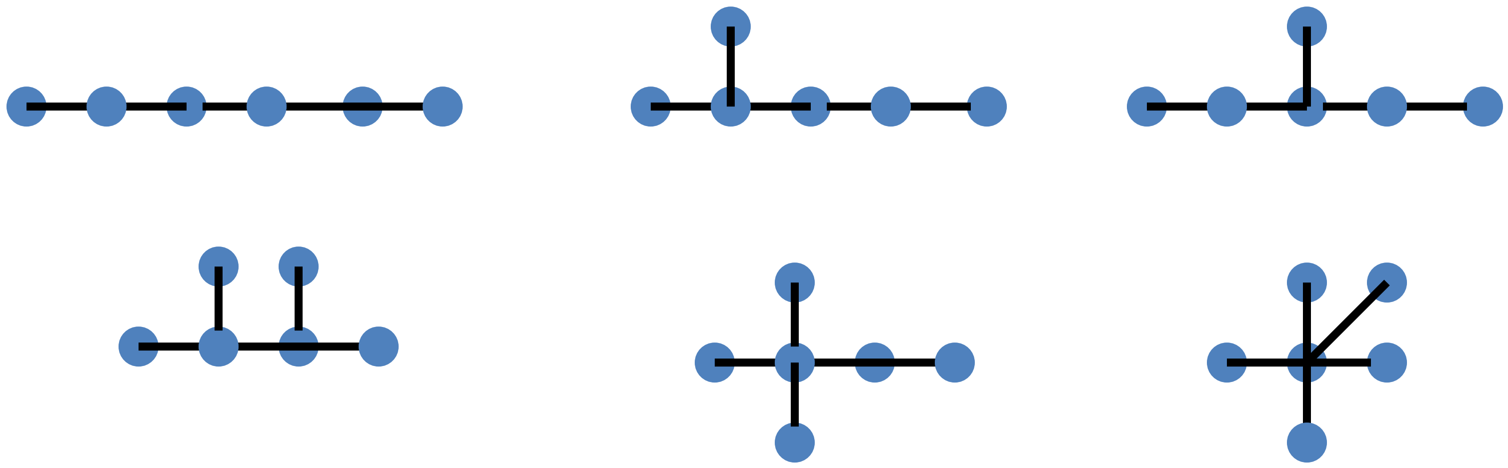
无向树的枚举

- 画出所有非同构的n阶无向树
- n=1:
- n=2:
- n=3:
- n=4:
- n=5:



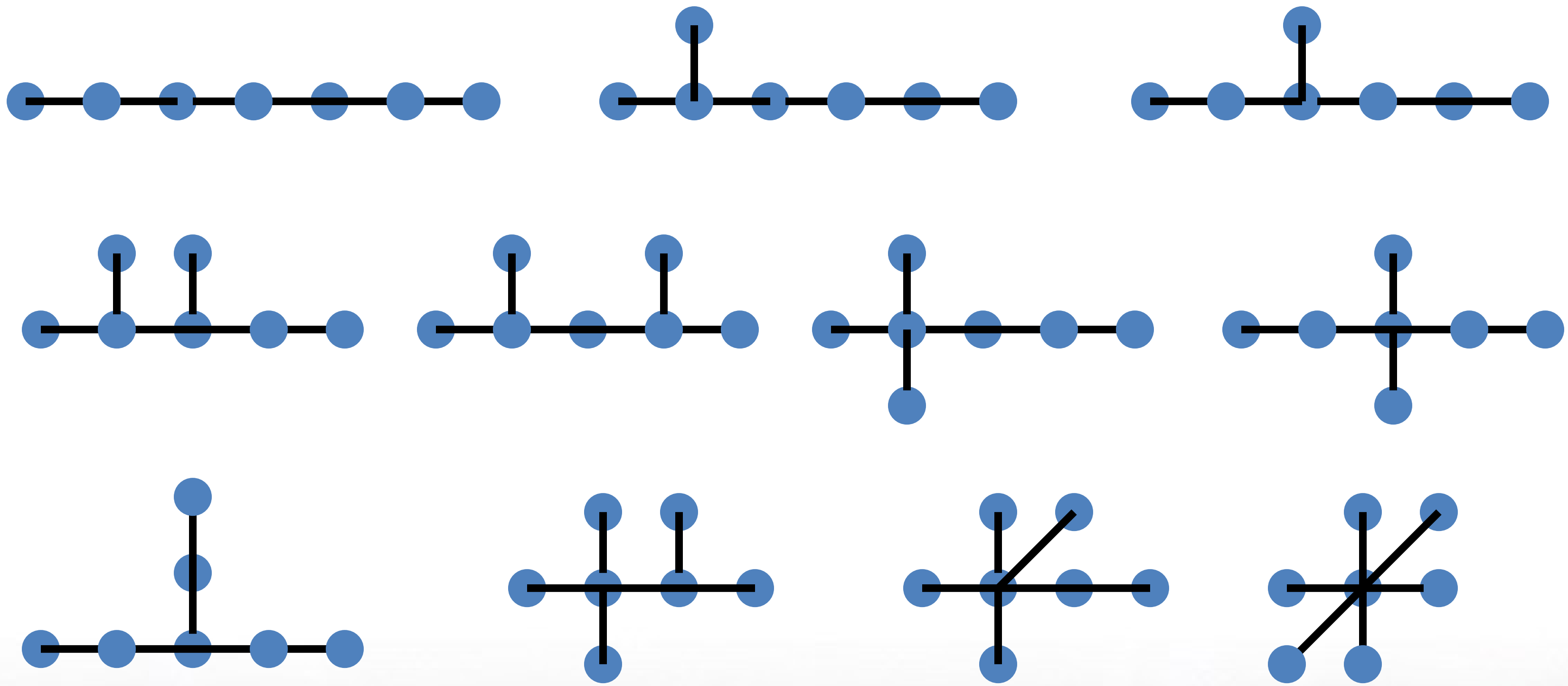
6阶非同构无向树

- n=6: t_6=6



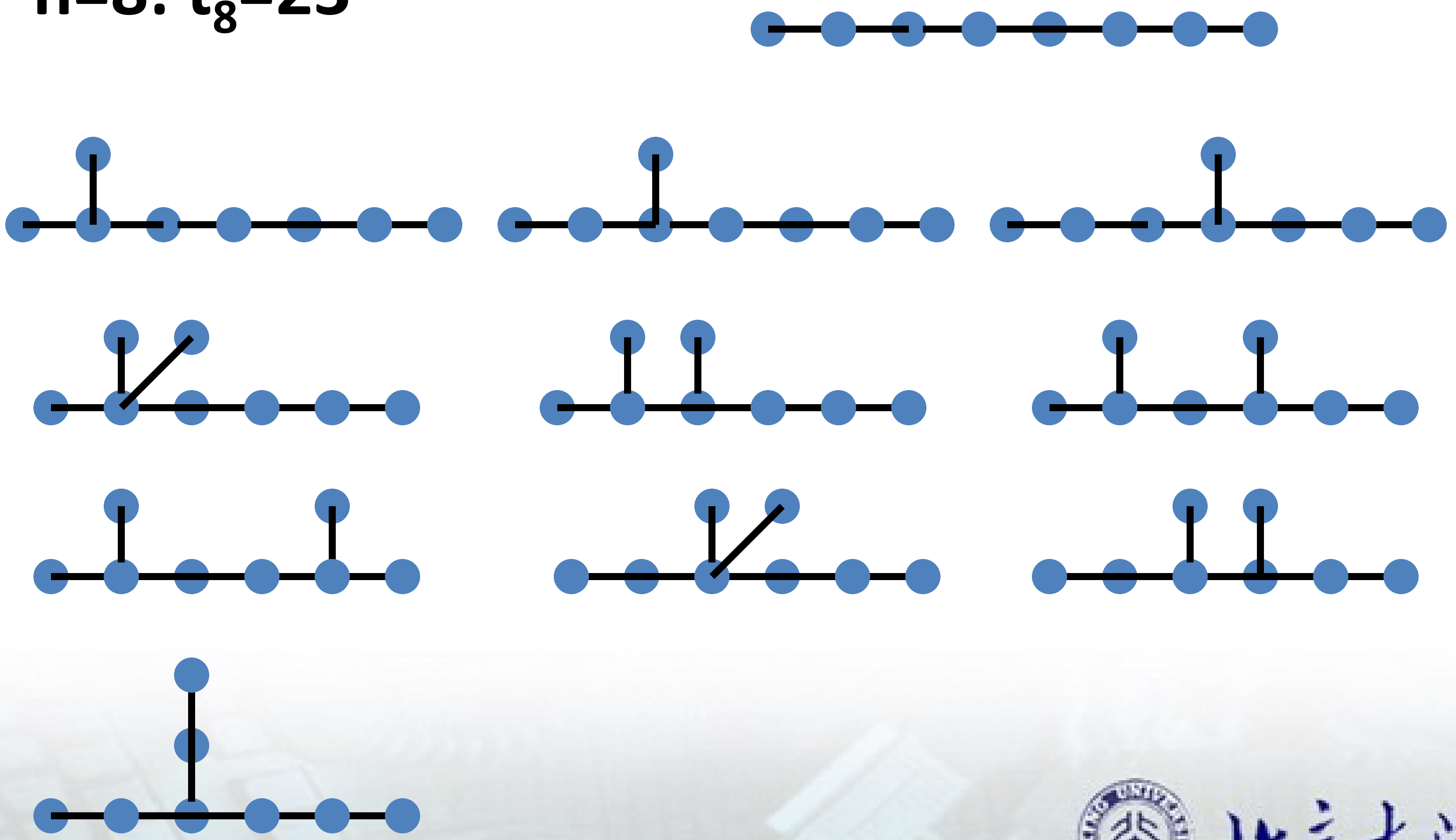
7阶非同构无向树

- n=7: t_7=11



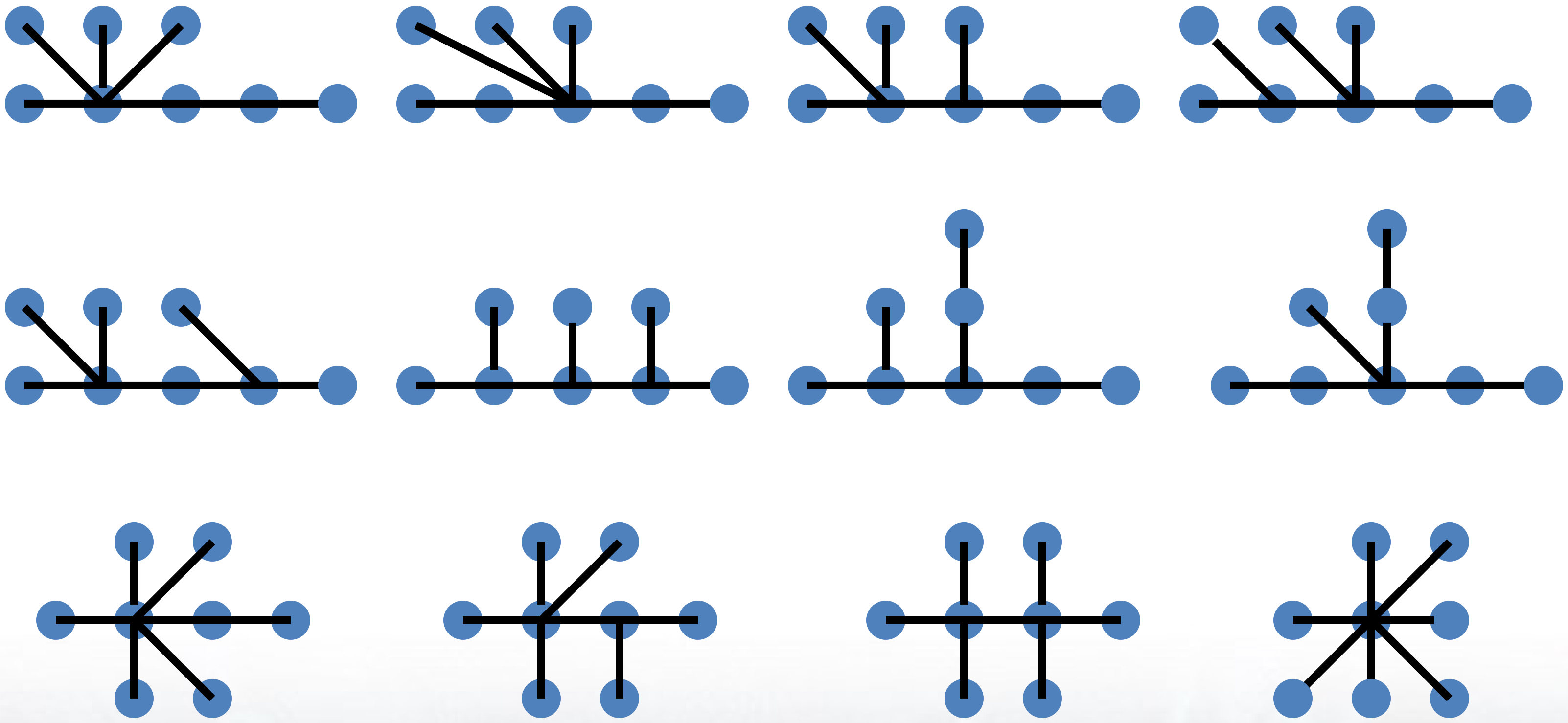
8阶非同构无向树

- n=8: t_8=23



8阶非同构无向树(续)

- **n=8: t_8=23**



8阶非同构无向树(解法2)

- **n=8: 度数列有11种:**

(1)^{1} 1 1 1 1 1 1 1 7

(2)^{1} 1 1 1 1 1 1 2 6

(3)^{1} 1 1 1 1 1 1 3 5

(4)^{1} 1 1 1 1 1 1 4 4

(5)^{2} 1 1 1 1 1 2 2 5

(6)^{3} 1 1 1 1 1 2 3 4

(7)^{1} 1 1 1 1 1 3 3 3

(8)^{5} 1 1 1 1 2 2 3 3

(9)^{3} 1 1 1 1 2 2 2 4

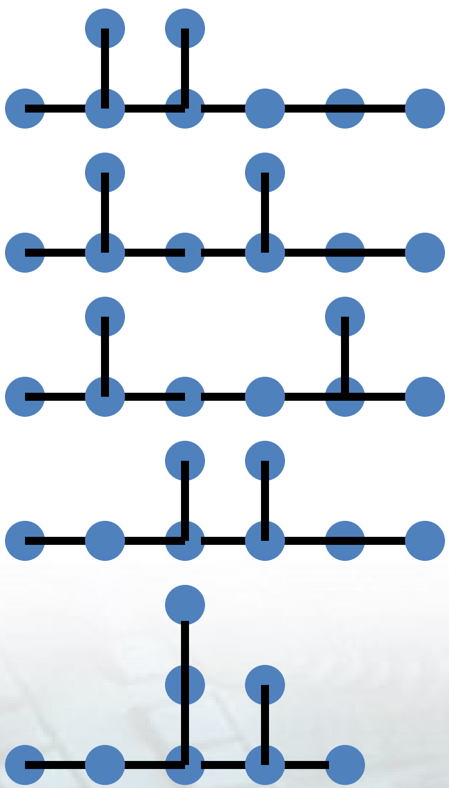
(10)^{4} 1 1 1 2 2 2 2 3

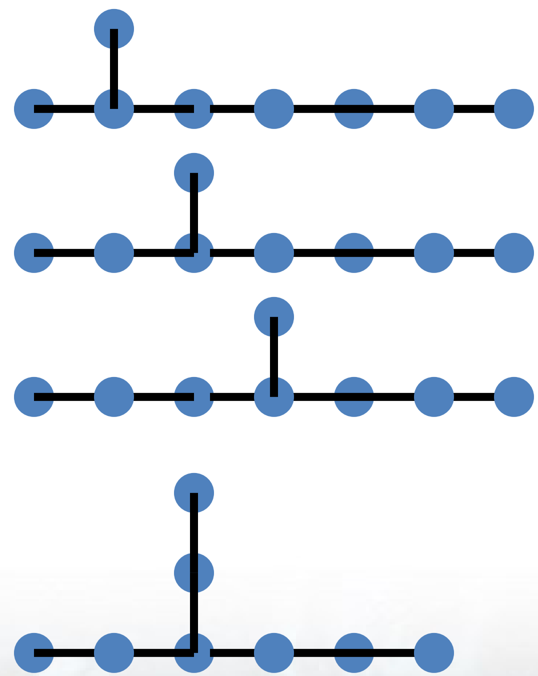
(11)^{1} 1 1 2 2 2 2 2 2

8阶非同构无向树(解法2)

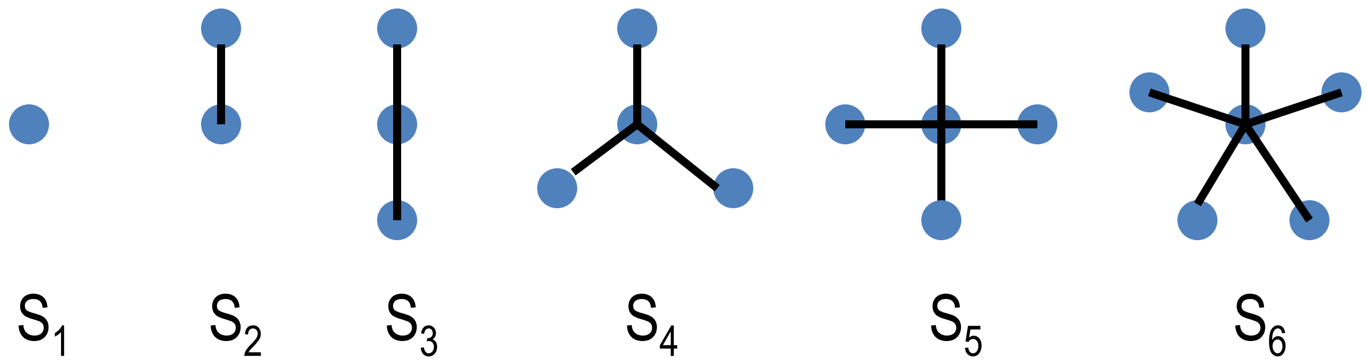
- **n=8: 度数列有11种:**

$(8)^{5}$ 1 1 1 1 2 2 3 3　$(10)^{4}$ 1 1 1 2 2 2 2 3



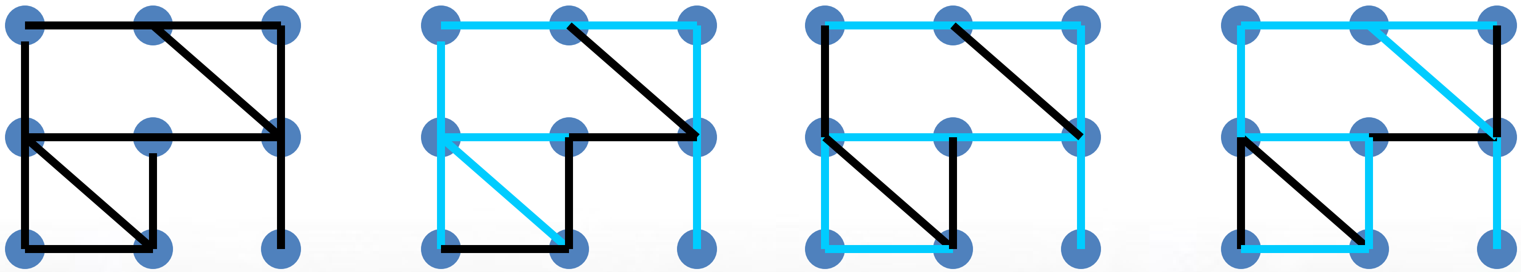


星: $S_n=K_{1,n-1}$



生成树

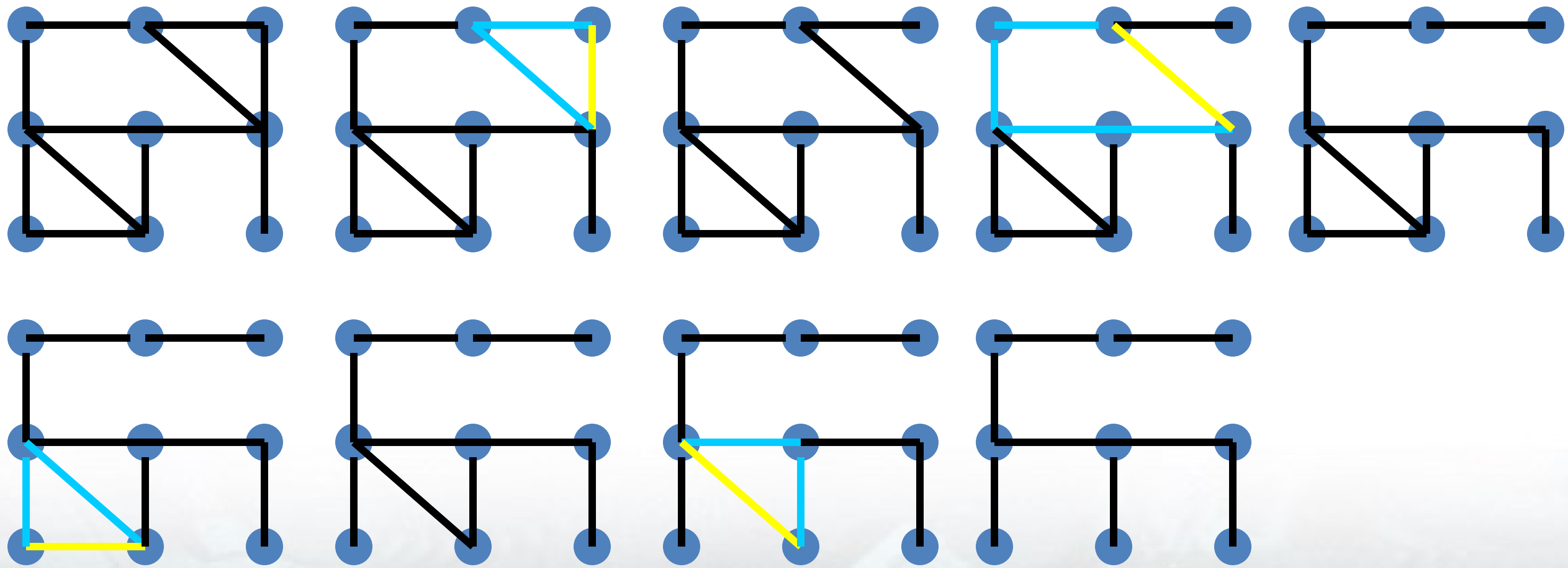
- 生成树: $T \subseteq G \wedge V(T)=V(G) \wedge T$是树
- 树枝: $e \in E(T)$, $n-1$条
- 弦: $e \in E(G)-E(T)$, $m-n+1$条
- 余树: $G[E(G)-E(T)] = \overline{T}$



定理9.3

定理9.3 无向图G连通 ⇔ G有生成树

证明 (⇐) 显然. (⇒) 破圈法. #

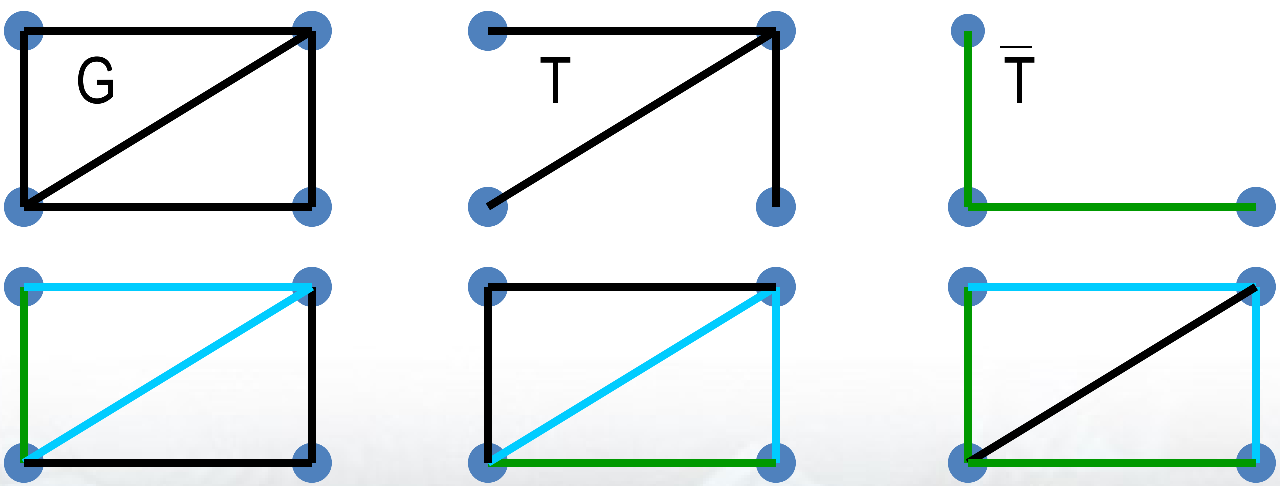


三个推论和一个定理

- **推论1**: G是n阶m边无向连通图⇒$m\geq n-1$. #
- **推论2**: T是n阶m边无向连通图G的生成树, 则 $|E(\overline{T})|=m-n+1$. #
- **推论3**: T是无向连通图G的生成树, C是G中的圈, 则$E(\overline{T})\cap E(C)\neq\emptyset$.
- **定理9.13**: 设T是连通图G的生成树, S是G中的割集, 则$E(T)\cap S\neq\emptyset$.

推论3

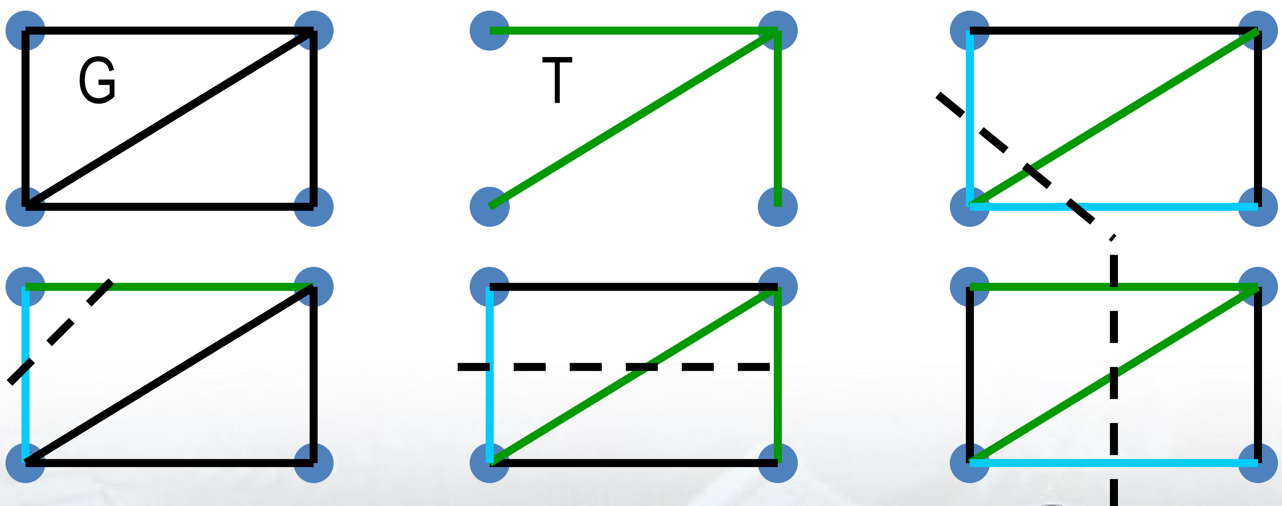
- 设T是连通图G的生成树, C是G中的圈, 则 $E(\overline{T})\cap E(C)\neq\varnothing$.
- 证明: (反证) 若$E(\overline{T})\cap E(C)=\varnothing$, 则 $E(C)\subseteq E(T)$, T中有回路C, T是树, 矛盾! #



定理9.13

- 设T是连通图G的生成树, S是G中的割集, 则 $E(T)\cap S\neq\varnothing$.
- 证明: (反证) 若$E(T)\cap S=\varnothing$, 则

$T\subseteq G-S$,则G-S连通, S是割集, 矛盾! #



定理9.4

- 设G是连通图, T是G的生成树, e是T的弦, 则$T \cup e$中存在由弦e和其他树枝组成的圈, 并且不同的弦对应不同的圈.

定理9.4证明

- 证明: 设$e=(u,v)$, 设$P(u,v)$是u与v之间在T中的唯一路径, 则$P(u,v)\cup e$是由弦e和其他树枝组成的圈.

  设e_1,e_2是不同的弦,对应的圈是C_{e1},C_{e2}, 则$e_1\in E(C_{e1})-E(C_{e2})$, $e_2\in E(C_{e2})-E(C_{e1})$, 所以$C_{e1}\neq C_{e2}$. #

例9.1(破圈法)

- 设G是无向连通图, $G' \subseteq G$, G'无圈, 则G中存在生成树T, $G' \subseteq T \subseteq G$.
- 证明: 不妨设G有圈C_1(否则G是树, T=G). 则$\exists e_1 \in E(C_1)-E(G')$, 令$G_1=G-\{e_1\}$.

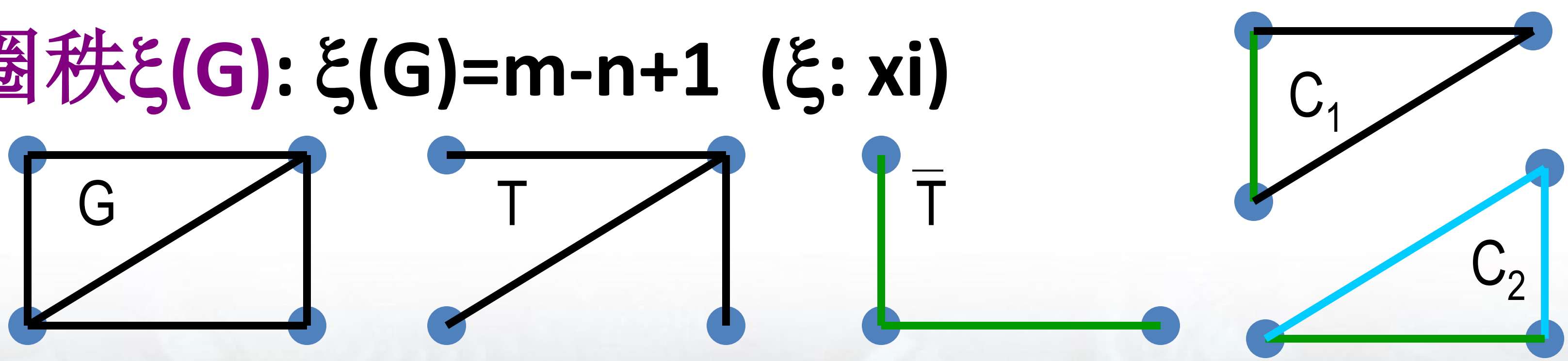
  若G_1还有圈C_2, 则$\exists e_2 \in E(C_2)-E(G')$,

  令$G_2=G_1-\{e_2\}= G-\{e_1,e_2\}$. 重复进行,

  直到$G_k=G-\{e_1,e_2,\ldots,e_k\}$无圈为止, $T=G_k$. #

基本回路

- 设G是n阶m边无向连通图, T是G的生成树, $\overline{T}=\{e'_1,e'_2,\ldots,e'_{m-n+1}\}$
- 基本回路: $T\cup e'_r$中的唯一回路C_r
- 基本回路系统: $\{C_1,C_2,\ldots,C_{m-n+1}\}$
- 圈秩ξ(G): ξ(G)=m-n+1 (ξ: xi)



定理9.5

- 设G是连通图, T是G的生成树, e是T的树枝, 则G中存在由树枝e和其他弦组成的割集, 并且不同的树枝对应不同的割集.

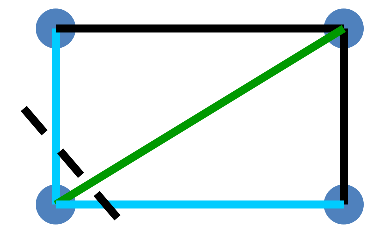
定理9.5证明

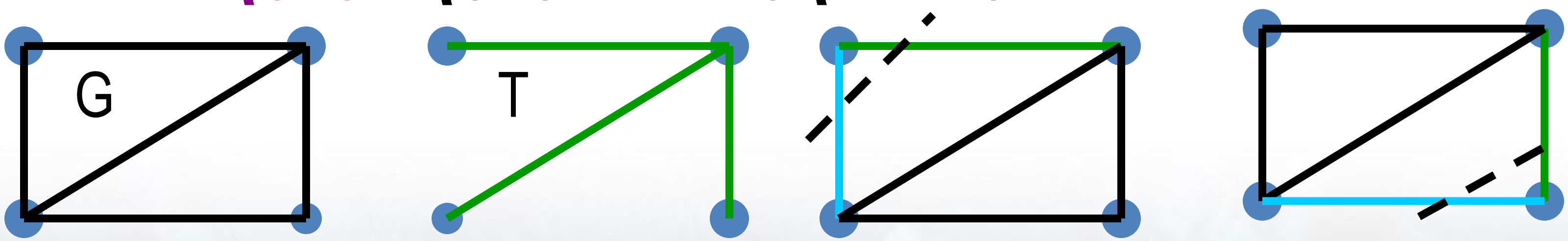
- 证明: e是T的桥, 设T-e的两个连通分支是T_1与T_2, 则$E(G)\cap(V(T_1)\&V(T_2))$是由树枝e和其他弦组成的割集.

  设e_1,e_2是不同的树枝,对应的割集是S_{e1},S_{e2}, 则$e_1 \in S_{e1}-S_{e2}$, $e_2 \in S_{e2}-S_{e1}$, 所以$S_{e1} \neq S_{e2}$. #

基本割集

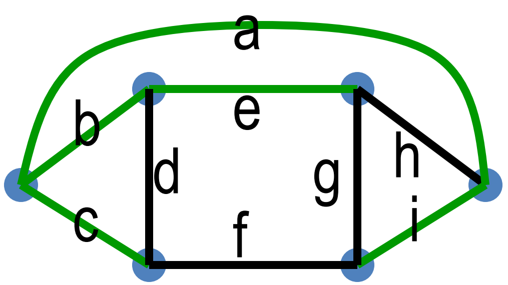
- 设G是n阶m边无向连通图, T是G的生成树, $T=\{e_1,e_2,\ldots,e_{n-1}\}$
- 基本割集: e_r对应的唯一割集S_r
- 基本割集系统: $\{S_1,S_2,\ldots,S_{n-1}\}$
- 割集秩$\eta(G)$: $\eta(G)=n-1$ (η: eta)





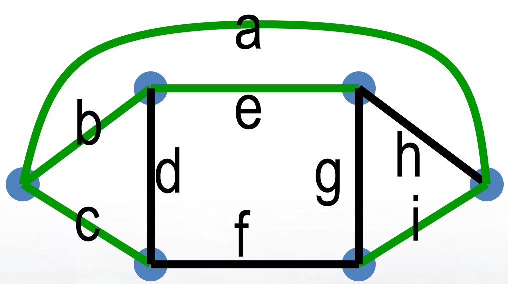
例9.2

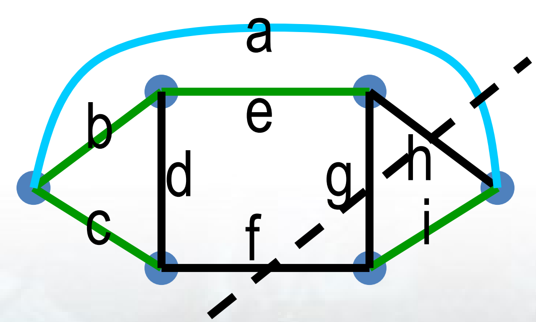
- G如图,T={a,b,c,e,i}是G的生成树,求对应T的基本回路系统和基本割集系统.



例9.2解

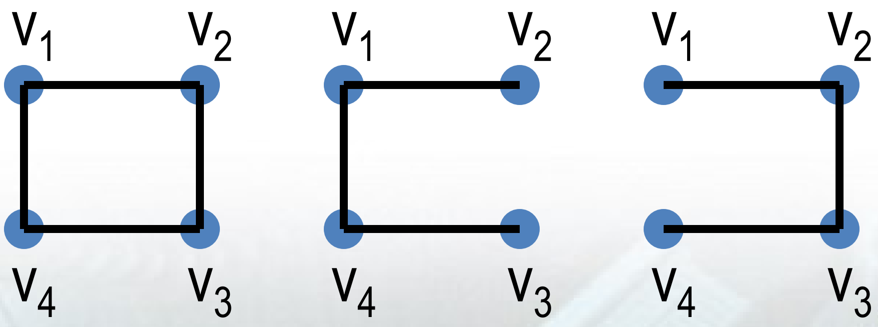
- 解: $\overline{T}=\{d,f,g,h\}$, 基本回路: $C_d=dcb$, $C_f=fcai$, $C_g=gebai$, $C_h=heba$, 基本回路系统: $\{C_d,C_f,C_g,C_h\}$. 基本割集: $S_a=\{a,h,g,f\}$, $S_b=\{b,d,g,h\}$, $S_c=\{c,d,f\}$, $S_e=\{e,g,h\}$, $S_i=\{i,g,f\}$, 基本割集系统: $\{S_a,S_b,S_c,S_e,S_i\}$. #





生成树的计数: $\tau(G)$

- $\tau(G)$: 标定图G的生成树的个数
- $T_1 \neq T_2$: $E(T_1) \neq E(T_2)$
- G-e: 删除(deletion)
- G\e: 收缩(contraction)



定理9.6

- $\forall e$非环,

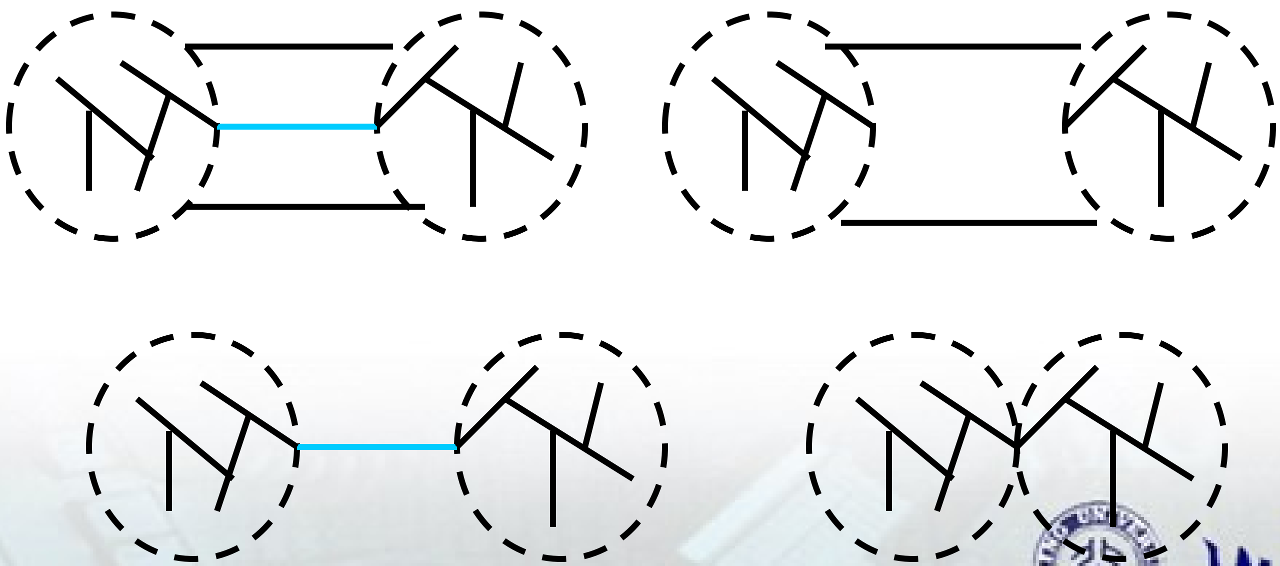
$$\tau(G) = \tau(G-e) + \tau(G\backslash e)$$

定理6证明

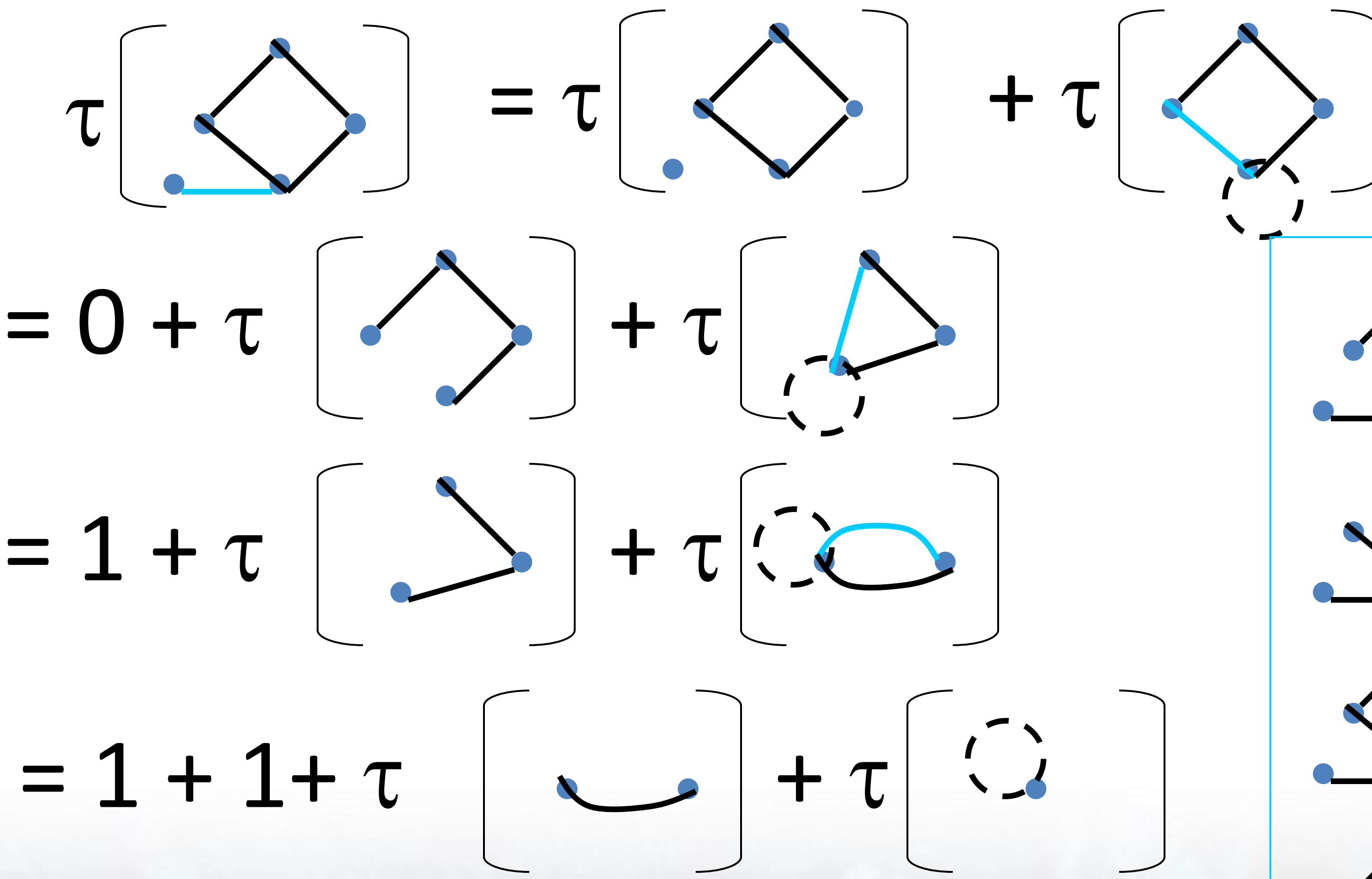
- 证明: ∀e非环,

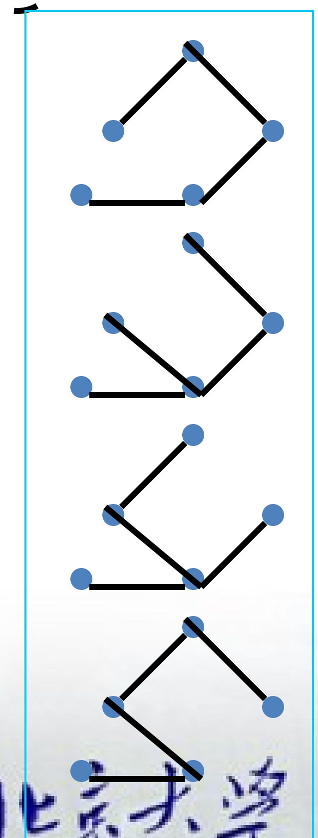
(1) 不含e的G的生成树个数: $\tau(G-e)$,

(2) 含e的G的生成树个数: $\tau(G\backslash e)$. #



例9.3





$= 1 + 1 + 1 + 1 = 4.$ #

定理9.7

- **Cayley公式: $n \geq 2 \Rightarrow \tau(K_n)=n^{n-2}$.**
- **证明: 令$V(K_n)=\{1,2,\ldots,n\}$, 用V中元素构造长度为(n-2)的序列,有n^{n-2}个不同序列,这些序列与K_n的生成树是一一对应的.**
- **这种长度为n-2的序列称为 Pruefer code**

定理9.7证明

- 证明(续): (1) 由树构造序列:

  设T是任意生成树. 令

  $k_1=\min\{ r \mid d_T(r)=1 \}$, $N_T(k_1)=\{ \ell_1 \}$,

  $k_2=\min\{ r \mid d_{T-\{k1\}}(r)=1 \}$, $N_{T-\{k1\}}(k_2)=\{\ell_2 \}$,

  ……

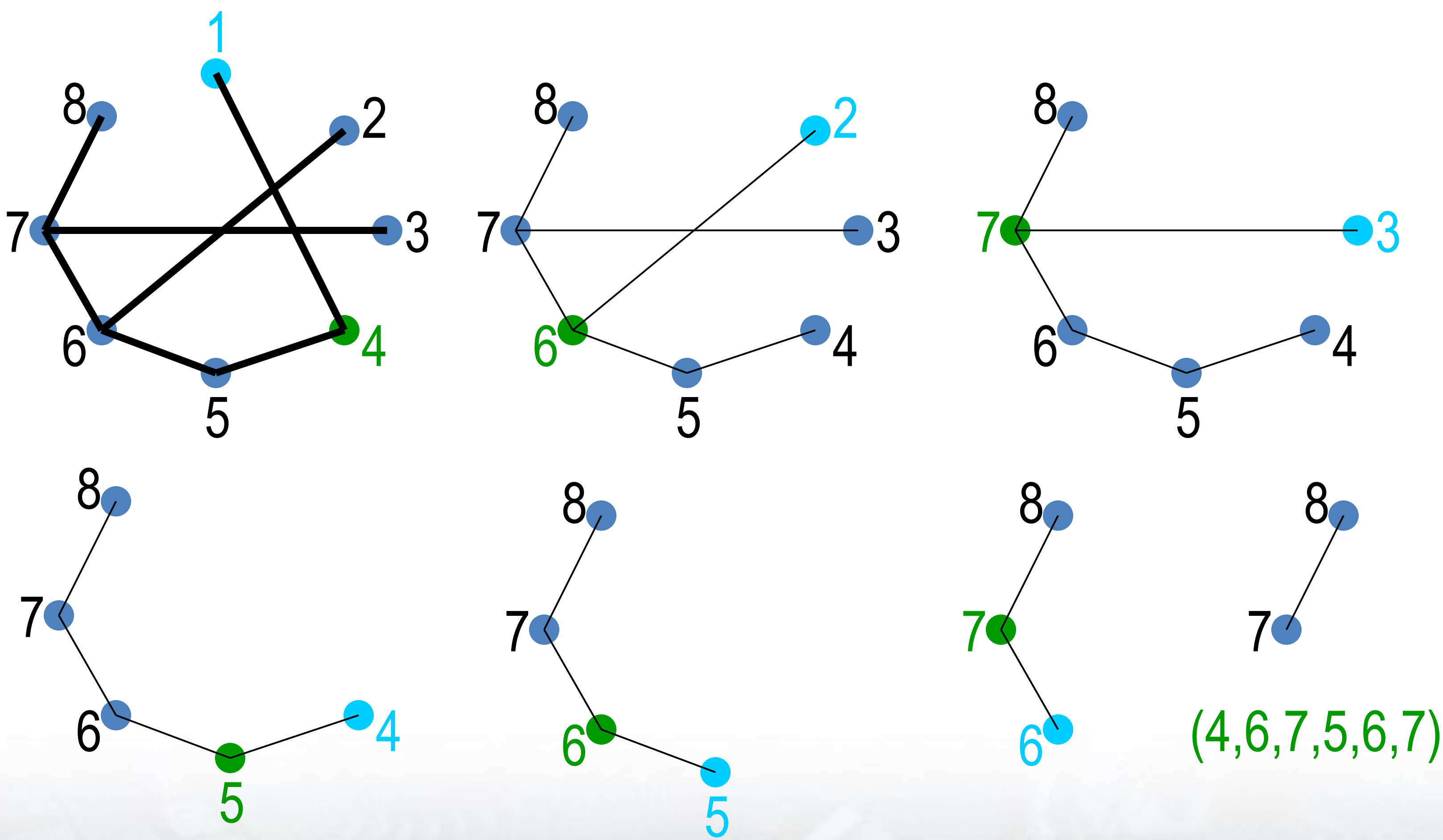
  $k_{n-2}=\min\{ r \mid d_{T-\{k1,k2,\ldots kn-3\}}(r)=1 \}$,

  $N_{T-\{k1 ,k2,\ldots kn-3\}}(k_{n-2})=\{\ell_{n-2} \}$,

  得到序列 $(\ell_1, \ell_2,\ldots, \ell_{n-2})$.

北京大学

定理9.7证明举例



定理9.7证明

- 证明(续): (2) 由序列构造树:

设$(\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_{n-2})$是任意序列. 令

$k_1=\min\{ r \mid r\in V-\{\ell_1, \ell_2,\ldots, \ell_{n-2}\} \}$,

$k_2=\min\{ r \mid r\in V-\{k_1, \ell_2,\ldots, \ell_{n-2}\} \}$,

…… $k_{n-2}=\min\{ r \mid r\in V-\{k_1,k_2,\ldots,k_{n-3}, \ell_{n-2}\} \}$,

$k_{n-1}=\min\{ r \mid r\in V-\{k_1,k_2,\ldots,k_{n-3},k_{n-2}\} \}$,

$l_{n-1}=\min\{ r \mid r\in V-\{k_1,k_2,\ldots,k_{n-3},k_{n-2},k_{n-1}\} \}$.

$E(T)=\{ (k_i, \ell_i) \mid i=1,2,\ldots,n-1\}$.

定理9.7证明举例

- (3,2,7,8,2,5)
- k_1=min(V-{3,2,7,8,2,5})=min{1,4,6}=1,

  k_2=min(V-{1,2,7,8,2,5})=min{3,4,6}=3,

  k_3=min(V-{1,3,7,8,2,5})=min{4,6}=4,

  k_4=min(V-{1,3,4,8,2,5})=min{6,7}=6,

  k_5=min(V-{1,3,4,6,2,5})=min{7,8}=7,

  k_6=min(V-{1,3,4,6,7,5})=min{2,8}=2,

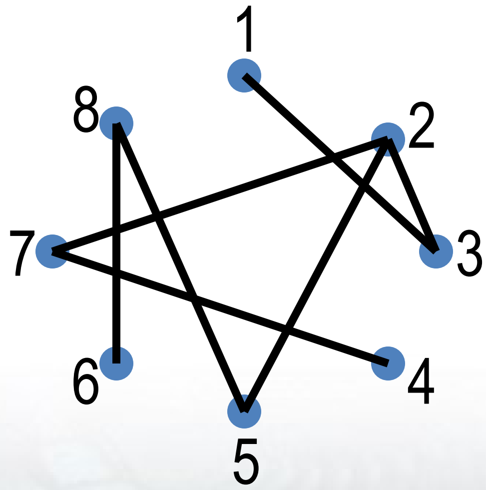
  k_7=min(V-{1,3,4,6,7,2})=min{5,8}=5,

  l_7=min(V-{1,3,4,6,7,2,5})=min{8}=8

定理9.7证明举例

- (3,2,7,8,2,5)
- (1,3,4,6,7,2,5)

  (3,2,7,8,2,5,8)



定理9.7证明

- 可以证明上述(1)和(2)建立的对应关系是双射: 每个树都得出序列, 每个序列都得出树; 由不同的树得出不同的序列, 由不同的序列得出不同的树.　#

小结

- 无向树
  - 等价定义与性质
  - 非同构无向树的枚举(利用度数列)
- 生成树
  - 基本割集系统, 基本回路系统
  - 无向标定图中生成树的个数