Ch-08 假设检验

8. 1 问题的提法

定义 1. 1 设 $X \sim F_\theta(\theta \in \Theta)$ 为总体模型，所谓假设检验问题是两个关于总体真值的互相对立判断（$\theta \in \Theta_0, \theta \in \Theta_1$）的鉴定问题，其中 Θ_0 是 Θ 的一个真子集，$\Theta_1 = \Theta \backslash \Theta_0$ 为 Θ_0 的余集。判断 $\theta \in \Theta_0$ 称为**零假设**（或**原假设**），记为 H_0，判断 $\theta \in \Theta_1$ 称为**对立假设**（或**备择假设**），记为 H_1. 通常使用

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \leftrightarrow H_1 : \theta \in \Theta_1$$

或 (Θ_0, Θ_1) 表示**假设检验问题**。问题一般提出为：零假设是否成立？

假设检验问题要求回答的是：零假设 $\theta \in \Theta_0$ 是否成立。“是”表示接受零假设 $\theta \in \Theta_0$，“否”表示拒绝零假设 $\theta \in \Theta_0$. 样本观察值 $x = (x_1, \cdots, x_n)$ 是 $X = (X_1, \cdots, X_n)$ 的取值。如果给出样本空间的一个子集 W，当且仅当样本观察值 $x \in W$ 时，否定零假设 $\theta \in \Theta_0$，则称 W 为**否定域**。则只要求出否定域 W，就是假设检验问题的一个解，当样本观察值满足 $x \in W$ 时：零假设不真，否定零假设。

在 H_0 为真的条件下，若样本观察值满足条件 $x \in W$，应当否定 H_0，这种错误称为**第一类错误**；在 H_0 不真的条件下，若样本观察值 $x \notin W$，不应否定 H_0，这种错误称为**第二类错误**。

总体情况	样本情况	规则判断	判断的正确性
H_0 为真	$x \in W$	否定 H_0	犯第一类错误
H_0 为真	$x \notin W$	不否定 H_0	正确
H_0 不真	$x \in W$	否定 H_0	正确
H_0 不真	$x \notin W$	不否定 H_0	犯第二类错误

在 H_0 为真的情况下，分布参数 $\theta \in \Theta_0$，可用 $P_\theta(X \in W)(\theta \in \Theta_0)$ 表示**犯第一类错误的概率**。称 $\beta_W(\theta) \triangleq P_\theta(X \in W)$ 为 W 的**功效函数**。

当 $\theta \in \Theta_0$ 时，$\beta_W(\theta)$ 是犯第一类错误的概率；当 $\theta \in \Theta_1$ 时，$1-\beta_W(\theta)$ 是犯第二类错误的概率。因此对于给定的否定域 W，可使用 W 的功效函数刻画犯错误的情况。

我们希望找到一个 W 使得当 $\theta \in \Theta_0$ 时，$\beta_W(\theta)$ 很小；$\theta \in \Theta_1$ 时，$\beta_W(\theta)$ 很大，$1-\beta_W(\theta)$ 很小。犯两类错误的概率都很小是不可能实现的。在样本量固定的情况下，当选择否定域 W 使犯第一类错误的概率减少时，相应的犯第二类错误的概率就增大。因此，不可能使犯两类错误的概率都一致地任意小。

因此在寻找否定域时，应当采取的策略为：在控制犯第一类错误的概率在一定水平的条件下，选取犯第二类错误的概率尽可能小的否定域 W.

定义 1.2 设 (Θ_0, Θ_1) 为总体模型 $X \sim F_\theta(\theta \in \Theta)$ 的一个假设检验问题，$X=(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为总体的一个样本，W 为检验问题的一个否定域，$\alpha \in (0,1)$ 为一个常数。

1. 称定义在 Θ 上的函数 $\beta_W(\theta) \triangleq P_\theta(X \in W)$ 为 W 的**功效函数**。
2. 若 W 满足条件

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} \beta_W(\theta) \leq \alpha$$

则称 W 为检验问题 (Θ_0, Θ_1) 的一个**显著性水平为 α 的否定域**。

否定域 W 的显著性水平控制了第一类错误。有了显著性水平的概念之后，可以在显著性水平为 α 的否定域中寻找最优的否定域。

定义 1.3 设 (Θ_0, Θ_1) 为总体模型 $X \sim F_\theta(\theta \in \Theta)$ 的一个假设检验问题，$X=(X_1, \cdots, X_n)$ 为总体的一个样本，W 为检验问题 (Θ_0, Θ_1) 的一个水平为 α 的否定域，$\alpha \in (0,1)$. 称 W 为假设检验问题 (Θ_0, Θ_1) 的水平为 α 的**一致最大功效否定域**（简称 **UMP 否定域**），若

1. W 是水平为 α 的否定域
2. 对任何其他的水平为 α 的否定域 $\widetilde{W}$，均有

$$\beta_W(\theta) \geq \beta_{\widetilde{W}}(\theta), \quad \forall \theta \in \Theta_1$$

此处 $\beta_W(\theta)$ 和 $\beta_{\widetilde{W}}(\theta)$ 分别为 W 和 $\widetilde{W}$ 的功效函数。

上述定义给出最优检验的标准，体现在在控制犯第一类错误概率的情况下寻找使犯第二类错误概率达到最小的否定域的思想。要找到水平为 α 的 UMP 否定域常常很不容易，甚至否定域不存在。若事先控制住犯第一类错误的概率，则犯第二类错误的概率是难以控制了。在样本量固定的情况下，只能在水平 α 的否定域中寻找使犯第二类错误的概率尽可能小的否定域。

检验方法

1. 给出一个**否定域** W

   若 $x \in W$，拒绝 H_0；若 $x \notin W$，接受 H_0.

2. 否定域 $W =$ 检验方法 $=$ 是否拒绝 H_0 的判断依据

   先定好检验方法再处理数据，**不可以根据数据选择否定域**

3. **第一类错误**（以真当假，错杀好人）：H_0 为真，拒绝 H_0；

   犯错概率 $P_\theta(X \in W)$，$\theta \in \Theta_0$.

4. **第二类错误**（以假当真，错放坏人）：H_0 为假，接受 H_0；

   犯错概率 $P_\theta(X \notin W)$，$\theta \in \Theta_1$.

5. 两类错误的对立：数据量不增加的前提下，不能指望都小

6. 目标：选择 W，首先**保证第一类错误概率** $\leq \alpha$，**然后尽量减小犯第二类错误的概率**。

定义 1.4 设 (Θ_0, Θ_1) 为总体模型 $X \sim F_\theta(\theta \in \Theta)$ 的一个假设检验问题，
$X = (X_1, \cdots, X_n)$ 为总体的一个样本，W 为检验问题 (Θ_0, Θ_1) 的一个水平为 α 的**无偏否定域**，若对任何 $\theta_0 \in \Theta_0$ 和 $\theta_1 \in \Theta_1$ 均有

$$P_{\theta_0}(X \in W) \leq \alpha \leq P_{\theta_1}(X \in W)$$

定义 1.5 设 (Θ_0, Θ_1) 为总体模型 $X \sim F_\theta(\theta \in \Theta)$ 的一个假设检验的问题，
$X = (X_1, \cdots, X_n)$ 为总体的一个样本，W 为检验问题 (Θ_0, Θ_1) 的一个水平为 α 的否定域，$\alpha \in (0, 1)$. 称 W 为假设检验问题 (Θ_0, Θ_1) 的水平为 α 的**最优无偏否定域**（简称 UMPU 否定域），若

1. W 是水平为 α 的无偏否定域

2. 对任何其他的水平为 α 的无偏否定域 $\widetilde{W}$，均有

$$P_{\theta_1}(X \in \widetilde{W}) \le P_{\theta_1}(X \in W), \quad \forall\, \theta_1 \in \Theta_1$$

3.

8.2 N-P 引理和似然比假设

设总体模型为 $X \sim F_\theta$，$\theta \in \Theta = \{\theta_0, \theta_1\}$，参数空间 Θ 是由两个点组成的集合，假设检验问题为

$$H_0 : \theta = \theta_0 \leftrightarrow H_1 : \theta = \theta_1$$

这样的假设检验问题称为**简单假设检验问题**。当 Θ_0 或 Θ_1 中有一个集合不是单点集的时候，相应的假设检验问题称为**复杂假设检验问题**。对于简单假设检验问题，可使用 N-P 引理解决。

定理 2.1 N-P 引理　设 X 的一个样本为 $X = (X_1, \cdots, X_n)$，并假定 X 的密度函数为 $f(x,\theta), \theta = \theta_0$ 或 $\theta = \theta_1$（当 X 的分布为离散的时候，$f(x,\theta)$ 理解为分布列）。记 $L(x,\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta)$，$x = (x_1, \cdots, x_n)$. 若对于给定的 $\alpha \in (0,1)$，n 维空间中的集合

$$W = \{x : L(x,\theta_1) > \lambda_0 L(x,\theta_0)\} \quad (\lambda_0 \ge 0 \text{ 是常数})$$

满足

$$P_{\theta_0}(X \in W) \triangleq \int \cdots \int \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta_0) \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n = \alpha$$

则 W 是水平为 α 的 UMP 否定域。

由 N-P 引理所给出的否定域又称**似然比否定域**，这种由似然比构造否定域的检验法叫做**似然比检验**。

8.3 单参数模型中的检验

定义 3.1　设 $\{f(x,\theta), \theta \in \Theta\}$ 为密度函数族（在离散分布的情况下是分布列族），其中 Θ 为有限或无穷区间。若密度函数能分解为下列形式：

$$f(x,\theta) = S(\theta) h(x) \exp\{C(\theta) T(x)\}, \quad \theta \in \Theta$$

其中 $C(\theta)$ 为 θ 的严格增函数，则称 $\{f(x,\theta),\theta\in\Theta\}$ 构成**单参数指数族**。

考虑单参数指数族分布中如下的检验问题：

$$H_0:\theta\le\theta_0\leftrightarrow H_1:\theta>\theta_0$$

称此检验问题为**单边假设检验问题**。相应地，称假设检验问题

$$H_0:\theta=\theta_0\leftrightarrow H_1:\theta\neq\theta_0$$

为**双边假设检验问题**。

定理 3.4 设 X 的分布族 $\{f(x,\theta),\theta\in\Theta\}$ 为单参数指数族，又设 $X_1,\cdots,X_n$ 为来自 X 的一个样本。记 $W=\{x:\sum\limits_{i=1}^{n}T(x_i)>c\}$，其中 c 为任一常数。只要 $\alpha=P_{\theta_0}(x\in W)\neq 0$ ，则 W 是假设检验问题的水平为 α 的 UMP 否定域。

8.4 广义似然比检验和关于正态总体参数的检验

一、广义似然比检验的思想

考虑假设检验问题

$$H_0:\theta\in\Theta_0\leftrightarrow H_1:\theta\in\Theta_1$$

其中 $\Theta_1=\Theta\backslash\Theta_0$. 设 $(X_1,\cdots,X_n)$ 为来自总体 X 的一个样本，$x=(x_1,\cdots,x_n)$ 为 $X=(X_1,\cdots,X_n)$ 的观察值。令

$$L(x,\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\theta)$$

对于固定的点 x，变量 θ 的函数 $L(x,\theta)$ 为似然函数，有时候简记为 $L(\theta)$. 令 $\hat\theta$ 为 θ 的 ML 估计，$\hat\theta$ 满足

$$L(x,\hat\theta)=\sup_{\theta\in\Theta}L(x,\theta)$$

同时，令 $\hat\theta$ 为在总体模型 $X\sim f(x,\theta)\,(\theta\in\Theta_0)$ 的假设之下，参数 θ 的 ML 估计，$\hat\theta_0$ 满足

$$L(x,\hat{\theta}_0)=\sup_{\theta\in\Theta_0}L(x,\theta)$$

定义 4.1 对于上述的 $L(x,\hat{\theta})\triangleq L(\hat{\theta})$ 及 $L(x,\hat{\theta}_0)\triangleq L(\hat{\theta}_0)$，称

$$\lambda(x)\frac{L(\hat{\theta})}{L(\hat{\theta}_0)}$$

为**广义似然比**。

仿照简单假设检验问题的情况，采用

$$W=\{x:\lambda(x)>c\}$$

作为备选的否定域。对于固定的 α，选择 c 使得

$$\sup_{\theta\in\theta_0}P_\theta(X\in W)=\alpha$$

选中的 W 作为假设检验问题的否定域。这样的否定域称为**广义似然比否定域**，相应的检验方法称为**广义似然比检验**。

二、关于正态总体均值的检验

设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，参数 $\mu\in(-\infty,+\infty)$，$\sigma^2>0$，$(X_1,\cdots,X_n)$ 为来自总体 X 的一个样本，$x=(x_1,\cdots x_n)$ 为样本观察值

(1) 若 σ^2 已知，检验统计量为 $T(\vec{x})=\dfrac{\sqrt{n}(\overline{x}-\mu_0)}{\sigma}$.

- 双边检验问题 $H_0:\mu=\mu_0\leftrightarrow H_1:\mu\neq\mu_0$

  否定域 $W=\{\vec{x}:\mid T(x)\mid>c\}$，$P(\mid Z\mid>c)=\alpha$
- 单边检验问题 $H_0:\mu\leq(\geq)\mu_0\leftrightarrow H_1:\mu>(<)\mu_0$

  否定域 $W=\{\vec{x}:T(\vec{x})>(<-)c\}$，$P(Z>(<-)c)=\alpha$

(2) 若 σ^2 未知，检验统计量 $T(\vec{x})=\dfrac{\sqrt{n}(\overline{x}-\mu_0)}{\sqrt{\dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}}$

- 双边检验问题 $H_0:\mu=\mu_0\leftrightarrow H_1:\mu\neq\mu_0$

  否定域 $W=\{\vec{x}:\mid T(x)\mid>c\}$，$P(\mid t(n-1)\mid>c)=\alpha$

- 单边检验问题 $H_0: \mu \leq (\geq) \mu_0 \leftrightarrow H_1: \mu > (<) \mu_0$

  否定域 $W = \{\vec{x}: T(\vec{x}) > (< -)c\}$，$P(t(n-1) > (< -)c) = \alpha$

三、关于正态总体方差的检验

设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，参数 $\mu \in (-\infty, +\infty)$，$\sigma^2 > 0$，$(X_1, \cdots, X_n)$ 为来自总体 X 的一个样本，$x = (x_1, \cdots x_n)$ 为样本观察值

- 检验统计量
  - μ 已知：$T(\vec{x}) = \dfrac{1}{\sigma_0^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$
  - μ 未知：$T(\vec{x}) = \dfrac{1}{\sigma_0^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$
- χ^2 检验
- 双边检验问题 $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 \leftrightarrow H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$

  否定域 $W = \{\vec{x}: T(\vec{x}) < c_1 \text{ 或} > c_2\}$

  $P(\chi_n^2 < c_1) = P(\chi_n^2 > c_2) = \dfrac{\alpha}{2}$

  $P(\chi_{n-1}^2 < c_1) = P(\chi_{n-1}^2 > c_2) = \dfrac{\alpha}{2}$
- 单边检验问题 $H_0: \sigma^2 \geq \sigma_0^2 \leftrightarrow H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$

  否定域 $W = \{\vec{x}: T(\vec{x}) < c_1\}$，$P(\chi_n^2 < c_1) = P(\chi_{n-1}^2 < c_1) = \alpha$

四、关于两正态总体中的参数检验

设 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$，$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$，参数 $\mu_1, \mu_2 \in (-\infty, +\infty)$，$\sigma_1^2, \sigma_2^2 > 0$，$(X_1, \cdots, X_{n_1})$ 为来自总体 X 的一个样本，$x = (x_1, \cdots x_{n_1})$ 为样本观察值，$(Y_1, \cdots, Y_{n_2})$ 为来自总体 Y 的一个样本，$y = (y_1, \cdots y_{n_2})$ 为样本观察值。

(1) $H_0: \mu_1 = \mu_2 \leftrightarrow H_1: \mu_1 \neq \mu_2$

- σ_1^2, σ_2^2 已知

  $\overline{X} - \overline{Y} \sim N(0, \dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2})$，检验统计量 $T(\vec{X}, \vec{Y}) = \dfrac{|\overline{X} - \overline{Y}|}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$

否定域 $W=\{|\ \overline{x}-\overline{y}\ |>c\}$

$P_{H_0}((\vec{X},\vec{Y})\in W)=P(|\ Z\ |>c)=\alpha$

- σ_1^2,σ_2^2 未知，但 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$

(2) $H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2\leftrightarrow H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$

- μ_1,μ_2 已知
- μ_1,μ_2 未知