Ch-01 随机事件与概率

1. 1 随机事件及其概率

断言：在一组条件 S 实现之下，某条件 A 必然发生

样本或样本点：每个试验结果称为一个样本点 ω

样本空间：所有试验结果全体组成的集合 Ω

必然事件：在 S 实现之下必然发生的事件叫做条件 S 之下的**必然事件**。

偶然事件：在条件 S 之下可能发生也可能不发生的事件称为**偶然事件**。

定义 1. 1 在不变（基本不变）的一组条件 S 之下，重复做 n 次实验，设 μ 是 n 次实验中事件 A 发生的次数。如果对于大量的实验（即 n 很大），发生的概率 $\frac{\mu}{n}$ 稳定地在某一数值 p 左右摆动，而且随着实验次数的增多一般说来这种摆动的幅度变小，则称 A 为随机事件，并称数值 p 为**随机事件** A 在条件 S 下发生的**概率**，记为 $P(A|S)=p$ 或简写为 $P(A)=p$.

定义 1.1 也可简单说成：发生的概率有稳定性的事件叫做随机事件，频率的摆动中心叫做该随机事件的概率。

对任何随机事件 A，有 $0 \le P(A) \le 1$.

定义 1. 2 在条件 S 下，一个事件的概率是人们根据已有的知识和经验对该事件发生的可能性所给出的个人信念，这种信念用区间 $[0,1]$ 中的一个数来表示，可能性大的对应较大的数。

定义 1.2 是概率的主观定义，所定义的概率叫做**主观概率**。

1. 2 事件的运算与概率的加法公式

1. 事件的包含与相等

定义 2. 1 设有事件 A 和 B。如果 A 发生，则 B 必发生，那么称事件 B **包含**事件 A（或称 A 包含在 B 中），并记为 $A \subset B$.

定义 2. 2 如果事件 A 包含事件 B，同时事件 B 也包含事件 A，则称事件 A 与事件 B **相等**（或称**等价**），并记做 $A=B$.

$A=B$ 的含义是：事件 A 发生当且仅当事件 B 发生。

2. 事件的并和交

定义 2.3 设 A 和 B 都是事件，则“ A 或 B ”表示这样的事件 C：C 发生当且仅当 A 和 B 中至少有一个发生。这个事件 C 叫做 A 与 B 的并，记为 $A \cup B$.

对于并运算，有下列性质：

$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cup U = U, \quad A \cup V = A$$

定义 2.4 当 A 和 B 都是事件，则 A 且 B 表示这样的事件 C：C 发生当且仅当 A 和 B 都发生。这个事件 C 叫做 A 与 B 的交，记为 $A \cap B$，简记为 AB.

3. 事件的余与差

定义 2.5 设 A 是事件，称非 A 是 A 的**对立事件**（或称**余事件**），其含义为：非 A 发生当且仅当 A 不发生，常用 $\overline{A}$ 表示非 A，也用 A^c 表示非 A.

定义 2.6 设 A 和 B 是两个事件，则两个事件的差 A 减 B 表示这样的事件 C：C 发生当且仅当 A 发生而 B 不发生。这个事件 C 记为 $A - B$（或 $A \backslash B$）。

$$A - B = A \cap \overline{B}$$

4. 事件的运算规律

5. 多个事件的并与交

定义 2.7 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是 n 个事件，则 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的并指的是：它的发生当且仅当 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中至少一个发生。常用 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ 表示 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的并。

定义 2.8 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是 n 个事件，则 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的交指的是：它的发生当且仅当 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 这 n 个事件都发生。用 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ 表示 $A_1, A_2, \cdots A_n$ 的交。

定义 2.9 设 $A_1, A_2, \cdots, A_i, \cdots$ 是一列事件，B 是这样的事件：它的发生当且仅当这些 $A_i(i = 1, 2, \cdots$ 中至少一个发生。这个 B 叫做诸 A_i 的并，记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$，有时也写为 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_i \cup \cdots$.

定义 2.10 设 $A_1, A_2, \cdots, A_i, \cdots$ 是一列事件，C 为这样的事件：C 发生当且仅当这些 $A_i(i = 1, 2, \cdots)$ 都发生。这个 C 称为诸 A_i 的交，记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$，有时也记为 $A_1 A_2 A_3 \cdots$.

6. 互不相容的事件

定义 2.11 如果事件 A 与事件 B 不能都发生，即 $A \cap B = V$（不可能事件），则称 A 与 B 是**互不相容**的事件（也叫做**互斥**的事件）

定义 2.12 称事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是互不相容的，若对任何 $i \neq j \; (1 \leq i \leq n, \; 1 \leq j \leq n)$，$A_i$ 与 A_j 互不相容。

7. 概率的加法公式

概率的加法公式（1） 如果事件 A 与事件 B 互不相容，则

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

该公式表达了概率的**可加性**。

由于 $A \cup \overline{A} = U$，A 与 $\overline{A}$ 互不相容，由加法公式，$P(A) + P(\overline{A}) = P(U) = 1$，因此有

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 互不相容，则**概率的有限可加性**为

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

概率的加法公式（2） 设 $A_1, A_2, \cdots$ 是一列事件，两两不相容（即对一切 $i \neq j$, A_i 与 A_j 互不相容，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

该公式称为**概率的完全可加性**。

对任意两个事件 A 和 B，均有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

概率的连续性 若 $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$，则 $\lim_i P(A_i) = P(\lim_i A_i)$

概率满足的三个条件：

1. 非负性：$P(A) \geq 0, \forall A$
2. 归一化：$P(\Omega) = 1$
3. 可列可加性：若 $A_1, A_2, \cdots$ 互不相容，则 $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} P(A_i) = P(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i)$

概率的性质：可加、连续、单调、有限可加、$P(\varnothing) = 0$

1.3 古典概型

在条件 S 之下只有 n 个可能的结果：$A_1, A_2, \cdots, A_n$，把每个结果看成一个事件，在 S 的每次实现下发生且只发生上述事件之一，并且它们出现的机会相等（即这些 A_i 有相等的概率），则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为条件 S 下的**基本事件**，如果事件 A 由 m 个基本事件组成（即 A 是某 m 个基本事件之并），则

$$P(A) = \frac{A\text{中所包含的基本事件个数}}{\text{总的基本事件个数}} = \frac{m}{n}$$

这种在条件 S 之下有**有限**种可能结果、各种结果互不相容且各结果出现的可能性相等的情形，便是**古典概型**。应用古典概型公式时应注意：

1. $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ 是必然事件（完全性）
2. 对任何 $i \neq j$，A_i 和 A_j 互不相容（不相容性）
3. 对任何 $i \neq j$，A_i 发生的机会和 A_j 发生的机会相等（等概性）

具有以上三条性质的事件组 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 简称**等概完备事件组**。

定理 3.1 设有 N 件产品分成 k 类，其中第 i 类有 N_i 件产品（$i = 1, 2, \cdots, k$），$N_1 + N_2 + \cdots + N_k = N$. 从这 N 件产品中任取 m 件，$m = m_1 + m_2 + \cdots + m_k$ $(0 \leq m_i \leq N_i,\ i = 1, 2, \cdots, k)$，则事件 $A =$“恰有 m_1 件产品属于第 1 类，恰有 m_2 件产品属于第 2 类，$\cdots$，恰有 m_k 件产品属于第 k 类”发生的概率为

$$P(A) = \frac{C_{N_1}^{m_1} C_{N_2}^{m_2} \cdots C_{N_k}^{m_k}}{C_N^m}$$

定理 3.2 Jordan 公式 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是 n 个事件（$n \geq 2$），则

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) &= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i A_j A_k) + \cdots \\ &\quad + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \cdots A_n) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} S_k \end{aligned}$$

其中，$S_k = \sum_{i<\cdots<i_k} P(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_k})\ (k = 1, 2, \cdots, n)$

1.4 概率的公理化定义和性质

定义 4.1 一个集合是指具有确切含义的若干个东西的全体。这些东西中的每一个称为该集合的元素。

通常用大写英文字母 $A, B, C, \cdots$（或附下标）表示集合，而用小写英文字母 $a, b, c, \cdots$（或附下标）表示元素。如果 a 是 A 的元素，则称 a 属于 A 并用记号 $a \in A$ 表示。如果 a 不是 A 的元素，则用记号 $a \notin A$ 表示。称没有元素的集合为**空集合**，简称空集，用记号 $\varnothing$ 表示。

定义 4.2 如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素，则称 B 包含 A（或称 A 包含在 B 中），记为 $A \subset B$。此时也称 A 是 B 的子集。我们规定空集是任何集合的子集。

定义 4.3 称集合 A 与集合 B **相等**（记为 $A = B$），若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$.

定义 4.4 属于 A 或属于 B 的元素的全体称为 A 与 B 的**并集**，记为 $A \cup B$，即

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ 或 } x \in B\}$$

定义 4.5 属于 A 或属于 B 的元素的全体称为 A 与 B 的**交集**，并记为 $A \cap B$（或 AB），即

$$A \cap B \triangleq \{x : x \in A \text{ 且 } x \in B\}$$

定义 4.6 设 A 和 B 是两个集合，则属于 A 但不属于 B 的元素的全体称为 A 与 B 的差集，记为 $A-B$（或 $A\backslash B$），即

$$A-B \triangleq \{x : x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$$

定义 4.8 定义域和函数满足下列条件：

(1) $P(A) \geq 0$

(2) $P(\Omega) = 1$

(3) $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$

1.5 条件概率与独立性

定义 5.1 设 A 和 B 都是条件 S 下的事件，则称条件 S 已经实现且 B 已发生的情形下 A 发生的概率为 B 发生的条件下 A 的**条件概率**，记为 $P(A|B)$.

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

将式子改写成**乘法公式**：$P(AB) = P(A|B) \cdot P(B)$

定理 5.1 一般乘法公式 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是 n 个事件（$n \geq 2$），$P(A_1 A_2 \cdots A_{n-1}) \neq 0$，则

$$P(A_1 \cdots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2) \cdots P(A_n|A_1 \cdot A_{n-1})$$

条件概率的性质：

1. $P(B|B) = 1, P(V|B) = 0$
2. 若 $A_1, A_2, \cdots$ 是一列两两不相容的事件，则
$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \mid B\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k|B)$$

定义 5.2 设 A 和 B 都是条件 S 下的随机事件，若满足 $P(AB) = P(A)P(B)$，则称 A 和 B **相互独立**。

定理 5.2 若 4 对事件 $A, B; A, \overline{B}; \overline{A}, B; \overline{A}, \overline{B}$ 有一对相互独立，则另外 3 对也都相互独立。

定义 5.4 称事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是**相互独立**的，若对任何整数 $k\,(2 \leq k \leq n)$，有

$$P(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_k})$$

其中 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 是满足下列条件的任何 k 个整数：$1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$.

一组事件两两独立不能保证这组事件相互独立

1.6 全概公式和逆概公式

全概公式

定理 6.1 全概公式 如果事件组 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ $(n \geq 2)$ 满足下列条件：

1. $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 两两不相容且 $P(B_i) > 0$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$
2. $B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n$ 是必然事件

则对任何事件 A 皆有

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A|B_i)$$

满足条件 (1) 和 (2) 的事件组 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 叫做**完备事件组**。

逆概公式

定理 6.2 逆概公式 如果事件组 $B_1, \cdots, B_n$ $(n \geq 2)$ 满足下列条件：

1. $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 两两不相容且 $P(B_i) > 0$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$
2. $B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n$ 是必然事件

则对任一事件 A，只要 $P(A) > 0$，则

$$P(B_k|A) = \frac{P(B_k)P(A|B_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(B_i)P(A|B_i)}$$

逆概率公式也称**贝叶斯公式**，在使用时，常把 $P(B_1), P(B_2), \cdots$ 称为**先验概率**，他们的值是根据先前的知识和经验得出；$P(B_k|A)$ 被称作 B_k 的**后验概率**。

1.7 独立试验序列

定理 7.1 设每次试验中事件 A 发生的概率是 p，则在 n 次独立重复的试验中 A 发生 k 次的概率是

$$P(A \text{ 发生 } k \text{ 次}) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

第一近似公式 当 n 很大而 p 很小时，有

$$P(A \text{ 发生 } k \text{ 次}) \approx \frac{1}{k!}(np)^k e^{-np}$$

定理 7.2 如果 $0 < p_n < 1$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} np_n = \lambda > 0$，则

$$\lim_{n\to\infty} C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

第二近似公式 当 n 很大而 p 不是很小时，有

$$P(A\text{ 发生 }k\text{ 次}) \approx \frac{1}{\sqrt{np(1-p)}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x_k^2}$$

其中 $x_k = (k-np)/\sqrt{np(1-p)}$

1.8 补充知识

几何概型

熵

信息论