第二十三章 组合计数定理

- 23.1 包含排斥原理
- 23.2 对称筛公式及其应用
- 23.3 Burnside引理
- 23.4 Polya定理

23.1 包含排斥原理

- 包含排斥原理的基本形式及其推论
- 应用实例
- 有穷集的*r*组合数
- 有限制条件件的集合计数
- 恒等式证明

包含排斥原理的基本形式

定理 设S为有穷集，$P_1, P_2, \dots, P_m$是 m 种性质，A_i是 S 中具有性质P_i的元素构成的子集，$i = 1, 2, \dots, m$. 则S中不具有性质$P_1, P_2, \dots, P_m$的元素数为

$$\left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_m}\right|$$

$$= |S| - \sum_{i=1}^{m} |A_i| + \sum_{1 \le i < j \le m} \left|A_i \cap A_j\right| - \sum_{1 \le i < j < k \le m} \left|A_i \cap A_j \cap A_k\right|$$

$$+ \cdots + (-1)^m |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m|$$

证明

证明：组合分析。

右边$= |S| - \sum_{i=1}^{m}|A_i| + \sum_{1\le i<j\le m}|A_i \cap A_j|$

$$- \sum_{1\le i<j<k\le m} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots + (-1)^m |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m|$$

若x不具有任何性质，则对等式右边贡献为：

$$1 - 0 + 0 - 0 + \ldots + (-1)^m \cdot 0 = 1$$

若x具有n条性质，$1 \le n \le m$, 则对等式右边的贡献为：

$$1 - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^m \binom{n}{m} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

推论

推论 S中至少具有一条性质的元素数为

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m|$$

$$= \sum_{i=1}^{m} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le m} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le m} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots$$

$$+ (-1)^m |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m|$$

应用

计数多重集的r组合数

例1 $B=\{3\cdot a, 4\cdot b, 5\cdot c\}$的10-组合数

解： $S = \{x \mid x$是a, b, c任意重复的10-组合$\}$

$A_1 = \{x \mid x\in S$， x中至少含4个$a\}$

1-1 $\{x \mid x$是a, b, c的任意6组合$\}$

$A_2 = \{x \mid x\in S$， x中至少含5个$b\}$

1-1 $\{ x \mid x$是a, b, c的任意5组合$\}$

$A_3 = \{x \mid x\in S$， x中至少含6个$c\}$

1-1 $\{ x \mid x$是a, b, c的任意4组合$\}$

计数多重集 *r* 组合数（续）

$$|S| = \binom{3+10-1}{10} = \binom{12}{2} = 66, |A_1| = \binom{3+6-1}{6} = \binom{8}{2} = 28$$

$$|A_2| = \binom{3+5-1}{5} = \binom{7}{2} = 21, |A_3| = \binom{3+4-1}{4} = \binom{6}{2} = 15$$

$$|A_1 \cap A_2| = \binom{3+1-1}{1} = 3$$

$S=\{ n_1 \cdot a_1, n_2 \cdot a_2, \ldots, n_k \cdot a_k \}$的组合数为$C(k+r-1,r)$, 当$r \le n_i$

$$|A_1 \cap A_3| = \binom{3+0-1}{0} = 1, |A_2 \cap A_3| = |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$$

$$\left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}\right| = 66 - (28+21+15) + (3+1+0) - 0 = 6$$

注意：性质的确定与要求条件相反

性质彼此独立，具有不同性质的元素计数互不影响

多重集的r组合数(earlier)

例1 $S=\{3\cdot a,4\cdot b,5\cdot c\}$的10组合数

解：生成函数$G(y)$

$$=(1+y+y^2+y^3)(1+y+y^2+y^3+y^4)(1+y+y^2+y^3+y^4+y^5)$$

$$=(1+2y+3y^2+4y^3+4y^4+3y^5+2y^6+y^7)(1+y+y^2+y^3+y^4+y^5)$$

$$=(1+\cdots+3y^{10}+2y^{10}+y^{10}+\cdots)$$

$N=6$ $\{a,a,a,b,b,b,b,c,c,c\}$, $\{a,a,a,b,b,b,c,c,c,c\}$,

$\{a,a,a,b,b,c,c,c,c,c\}$, $\{a,a,b,b,b,b,c,c,c,c\}$,

$\{a,a,b,b,b,c,c,c,c,c\}$, $\{a,b,b,b,b,c,c,c,c,c\}$

计数限制条件元素数

例2 求不超过120的素数个数

解：$11^2 = 121$，

不超过120的合数的素因子可能是2, 3, 5, 7，

$$S=\{ x \mid x\in Z, 1\le x\le 120\}, |S| = 120$$

被2, 3, 5, 7整除的集合分别为A_1, A_2, A_3, A_4:

所求的元素数$N = |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}| + 3$

+3的理由是：2, 3, 5, 7四个数是能够被2, 3, 5或7整除的，但是它们是素数；而1是不能被2, 3, 5和7整除的，但是1不是素数。

计数限制条件元素数

$|A_1| = 60$， $|A_2| = 40$， $|A_3| = 24$， $|A_4| = 17$

$|A_1 \cap A_2| = 20$, $|A_1 \cap A_3| = 12$, $|A_1 \cap A_4| = 8$,

$|A_2 \cap A_3| = 8$, $|A_2 \cap A_4| = 5$, $|A_3 \cap A_4| = 3$

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 4$, $|A_1 \cap A_2 \cap A_4| = 2$, $|A_1 \cap A_3 \cap A_4| = 1$,

$|A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 1$, $|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 0$

$$\left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}\right|$$

$$= 120 - (60 + 40 + 24 + 17)$$

$$+(20 + 12 + 8 + 8 + 5 + 3) - (4 + 2 + 1 + 1) + 0$$

$$= 120 - 141 + 56 - 8 = 27$$

$N = 30$

欧拉函数的值

$\phi(n)$: 不超过（小于或等于）n且与n互素的正整数的个数

设$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$为$n$的素因子分解式

A_i={x | 1≤x≤n，且p_i整除x }，则

$$|A_i| = n/p_i\,, i = 1, 2, \dots, k$$

$$|A_i \cap A_j| = n/p_i p_j\,, 1 \le i < j \le k, \dots$$

$$\phi(n) = \left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_k}\right|$$

$$= n - \left(\frac{n}{p_1} + \frac{n}{p_2} + \cdots + \frac{n}{p_k}\right) + \left(\frac{n}{p_1 p_2} + \frac{n}{p_1 p_3} + \cdots + \frac{n}{p_{k-1} p_k}\right) - \cdots + (-1)^k \frac{n}{p_1 p_2 \dots p_k}$$

$$= n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

证明交错和的恒等式

例3 证明$\binom{n-m}{r-m}=\sum_{i=0}^{m}(-1)^i\binom{m}{i}\binom{n-i}{r}, m\le r\le n$

证： 令S={1, 2,…, n}, A={1, 2,…, m}，计数S中包含A的r子集。

P_j: 在S的r子集中不包含j, j=1, 2, …, m

$$|A_j|=\binom{n-1}{r}, 1\le j\le m, |A_i\cap A_j|=\binom{n-2}{r}, 1\le i<j\le m$$

$$\ldots, \qquad |A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_m|=\binom{n-m}{r}$$

$$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_m}|$$

$$=\binom{n}{r}-\binom{m}{1}\binom{n-1}{r}+\binom{m}{2}\binom{n-2}{r}-\cdots+(-1)^m\binom{m}{m}\binom{n-m}{r}$$

23.2 对称筛公式及其应用

- 对称筛公式
- 错位排列
- 棋盘多项式
- 有禁区的排列

对称筛公式

$$\left|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_m}\right| = |S| - \sum_{i=1}^{m}|A_i| + \sum_{1\le i<j\le m}\left|A_i\cap A_j\right|$$

$$-\sum_{1\le i<j<k\le m}\left|A_i\cap A_j\cap A_k\right| + \cdots + (-1)^m|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_m|$$

$$N_k = \left|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k}\right|, 1\le i_1 < i_2 < \cdots i_k \le m, k = 1, 2,$$

$$|S| = N$$

$$N_0 = N - \binom{m}{1}N_1 + \binom{m}{2}N_2 - \cdots + (-1)^m\binom{m}{m}N_m$$

$$= N + \sum_{t=1}^{m}(-1)^t\binom{m}{t}N_m$$

使用条件：不同性质对计数的影响对称.

各性质计数是独立的.

应用—错位排列计数

错位排列数记作D_n，设S为$\{1, 2, \ldots, n\}$的排列的集合，P_i是其中i在第i位的性质，i=1, 2, …, n.

$$N = n!, \qquad N_1 = (n-1)!, \qquad N_2 = (n-2)!$$

…

$$N_k = (n-k)!, \qquad \ldots, \qquad N_n = 0!$$

$$D_n = n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} 0!$$

$$= n!\left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right]$$

错位排列实例

例1 8个字母A, B, C, D, E, F, G, H的全排列中，使得4个元素不在原来位置的排列数。

解：4个元素的错排数为

$$D_4 = 4!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\right)$$

$$= 24\left(1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24}\right) = 12 - 4 + 1 = 9$$

$$N = C(8,4) \cdot 9 = 630$$

应用—有限制条件的排列

在X={1, 2, …, n}的全排列中不出现12, 23, …, (n-1)n的排列称为有限制条件的排列。

设这样的排列数为Q_n. 例如，$Q_1 = Q_2 = 1$，$Q_3 = 3$，$Q_4 = 11$

一般地，

$$Q_n = n! - \binom{n-1}{1}(n-1)! + \binom{n-1}{2}(n-2)! - \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1}1!$$

应用—有限制条件的排列

证: 设$X=\{1,2,\dots,n\}$, $S=\{x|x$是X的排列$\}$。令$A_j=\{x\in S|x$中出现$j(j+1)\}$, $j=1,2,\dots,n-1$. 则$|A_j|=(n-1)!=N_1$.

若$x\in A_i\cap A_j$,则$i(i+1)$，$j(j+1)$都在x中出现。1）如果$i+1=j$，则$i(i+1)\ (i+2)$可看成一个元素，相当于$n-2$个元素的排列。2）否则，$i(i+1)$，$j(j+1)$各看成一个元素，也相当于$n-2$个元素的排列。

故$|\,A_i\cap A_j|=(n-2)!=N_2$.

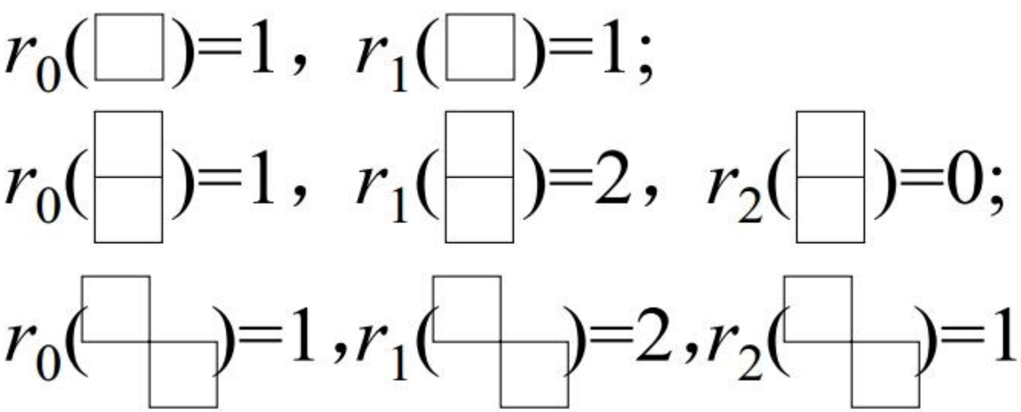
同理，对任意$1\le k\le n-1$有$N_k=(n-k)!$ 因此

$$Q_n=n!-\binom{n-1}{1}(n-1)!+\binom{n-1}{2}(n-2)!-\cdots+(-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1}1!$$

棋盘多项式与有禁区的排列

1. n个元素的排列与n个棋子在$n\times n$棋盘的布棋方案（其中不允许两个棋子布在同行、同列）是一一对应的。
排列$i_1 i_2 \dots i_n$表示：第一行放在第i_1列，第二行放在第i_2列…，第n行放在第i_n列。

2. $r_k(C)$表示k个棋子在棋盘C上的布棋方案数，在布棋时任意两个棋子不允许落到棋盘的同一行和同一列。



棋盘多项式与有禁区的排列

我们规定，对任意的棋盘C有$r_0(C)=1$. 则有下列性质:

(1) 对任意C和正整数k，如果k大于C中的方格数，则$r_k(C) = 0$.

(2) $r_1(C)$等于C中的方格数。

(3) 设C_1和C_2是两个棋盘，若C_2可由C_1旋转或翻转得到，则

$r_k(C_1)=r_k(C_2)$.

(4) 设C_i是从棋盘C中去掉指定的方格所在的行和列后剩余的棋盘，C_l是从棋盘C中去掉指定的方格后剩余的棋盘，则有

$r_k(C)=r_{k-1}(C_i)+r_k(C_l), k\geq 1$.

(5) 设棋盘C由两个子棋盘C_1和C_2构成，如果C_1和C_2没有公共的行和列，则

$r_k(C)=\sum_{i=0}^{k} r_i(C_1)r_{k-i}(C_2)$.

棋盘多项式与有禁区的排列

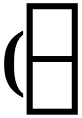
定义 生成函数$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{C}) = \sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{C})\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k}}$称为$\boldsymbol{C}$的棋盘多项式。

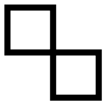
不难证明：

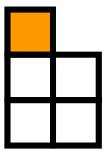
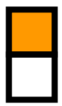
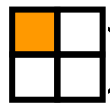
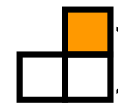
$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{x}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{i}}) + \boldsymbol{R}(\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{l}})$$

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{C}_{\mathbf{1}})\boldsymbol{R}(\boldsymbol{C}_{\mathbf{2}})$$

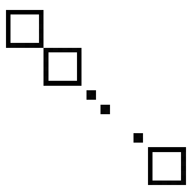
简单棋盘多项式的结果

$R($$)=R($$)=1+2x$

$R($$)=1+2x+x^2$

$R($$)=xR($$)+R($$)=x(1+2x)+x(1+x)+R($$)$

$=2x+3x^2+1+3x+x^2=1+5x+4x^2$

$R(C)=R($$)=(1+x)^n$

有禁区的排列

有禁区的排列：限制某些数字不能出现在某些位置的排列，这些位置对应于棋盘的禁区.

定理：C是$n \times n$的具有给定禁区的棋盘，禁区对应于$\{1, 2, \dots, n\}$的元素在排列中不允许出现的位置，则这种有禁区的排列数为

$$n! - r_1(n-1)! + r_2(n-2)! - \cdots + (-1)^n r_n$$

其中r_i是i个棋子布置到禁区的方案数。

定理证明

不考虑禁区限制，不带编号棋子的布棋方案数为$n!$，

考虑棋子编号，布棋方案数为$n!n!$

P_j: 第j个棋子落入禁区的性质，$j=1, 2, .., n$

给定1个棋子落入禁区的方案数：$N_1=r_1(n-1)!(n-1)!$

给定2个棋子落入禁区的方案数：$N_2=2!r_2(n-2)!(n-2)!$

…

给定k个棋子落入禁区的方案数：$N_k=k!r_k(n-k)!(n-k)!$

…

n个棋子落入禁区的方案数： $N_n=n!r_n0!0!$

定理证明（续）

带编号的棋子不落入禁区的方案数

$$N_0 = n!\,n! - \binom{n}{1} r_1 (n-1)!\,(n-1)! + \binom{n}{2} 2!\, r_2 (n-2)!\,(n-2)!$$

$$- \cdots + (-1)^k \binom{n}{k} k!\, r_k (n-k)!\,(n-k)! + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} n!\, r_n$$

$$= n!\,n! - r_1 n!\,(n-1)! + r_2 n!\,(n-2)! - \cdots + (-1)^k r_k n!\,(n -$$

定理证明（续）

(证法II) 设A_i为第i个棋子布入禁区，其它棋子任意布的方案集，i =1, 2, 3, …, n. k个棋子布入禁区，其它n-k个棋子任意布的方案数为$r_k(n-k)!$

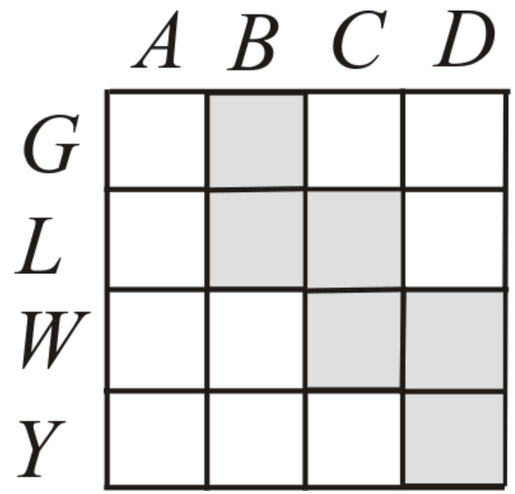
根据容斥原理，棋子不落入禁区的方案数

$$N = \left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}\right|$$
$$= n! - r_1(n-1)! + r_2(n-2)! - \cdots$$
$$+ (-1)^k r_k(n-k)! + \cdots + (-1)^n r_n$$

注意适用条件：棋盘为$n \times n$, 小禁区

应用 $N = n! - r_1(n-1)! + r_2(n-2)! - \ldots + (-1)^k r_k(n-k)! + \ldots + (-1)^n r_n$

例2 ***G*, *L*, *W*, *Y* 4位工作人员，*A*, *B*, *C*, *D*为4项工作。每个人不能从事的工作如图所示。问有多少种安排工作的方法。**

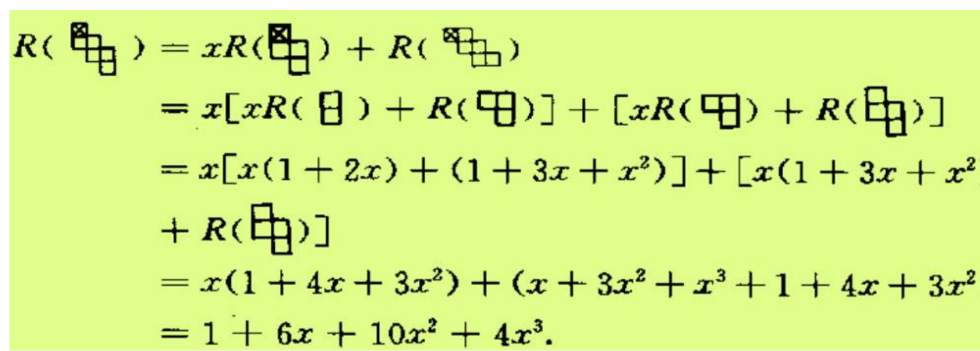


解 禁区的棋盘多项式为

$$1 + 6x + 10x^2 + 4x^3$$

$$N = 4! - 6\cdot 3! + 10\cdot 2 - 4$$

$$= 24 - 36 + 20 - 4 = 4$$



应用—错排问题

$$N = n! - r_1(n-1)! + r_2(n-2)! - \ldots + (-1)^k r_k (n-k)! + \ldots + (-1)^n r_n$$

$$R(C) = R\left(\begin{matrix}\square & & & \\ & \square & & \\ & & \ddots & \\ & & & \square\end{matrix}\right) = (1+x)^n$$

$$R(C) = 1 + C(n,1)x + C(n,2)x^2 + \cdots + C(n,n)x^n$$

$$D_n = n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} 0!$$

$$= n! - n! + \frac{1}{2!}n! - \frac{1}{3!}n! + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!} n!$$

$$= n!\left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right]$$