



单元10.3 对偶图、外平面图

第二编 图论 第十一章 平面图

11.4 平面图的对偶图、11.5 外平面图



北京大學

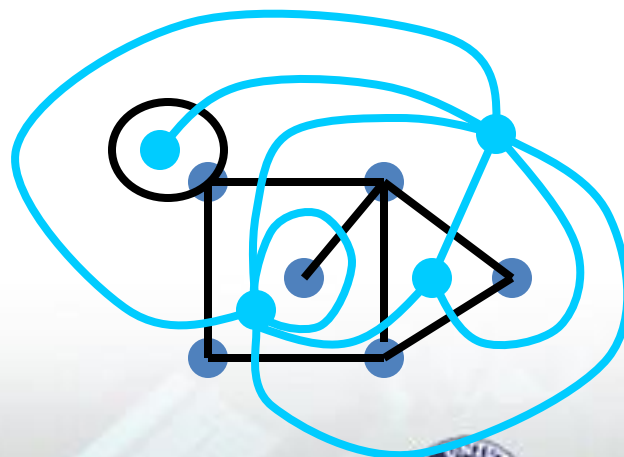
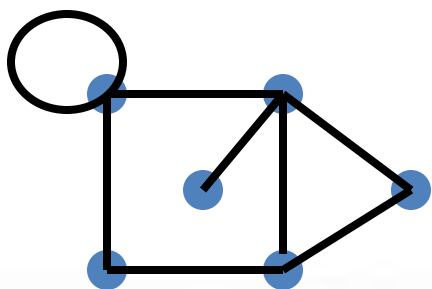


内容提要

- 对偶图, 自对偶图
- 外平面图, 极大外平面图

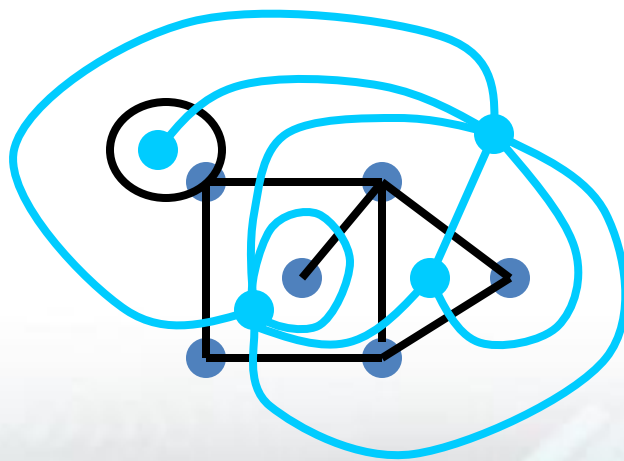
对偶图

- 平面图 $G = \langle V, E \rangle$, G 的面集合是 R
- 对偶图 $G^* = \langle V^*, E^* \rangle$, G^* 的面集合是 R^* , 则 V^* 与 R , E^* 与 E , 都是一一对应的



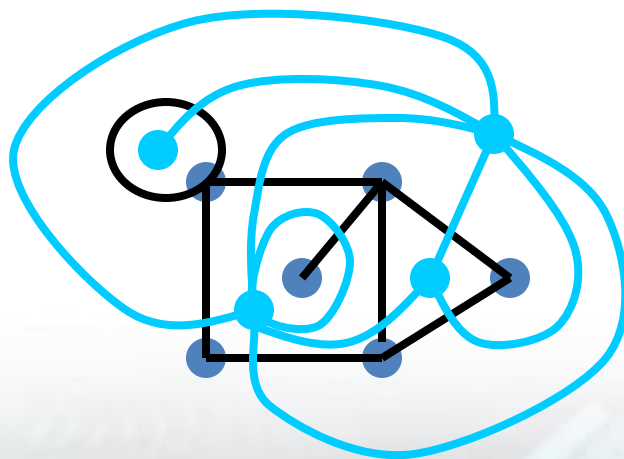
对偶图的性质

- 对偶图是**连通平面图**
- **环**与**桥**互相对偶
- **平行边**对偶于2个面之间的多条边界



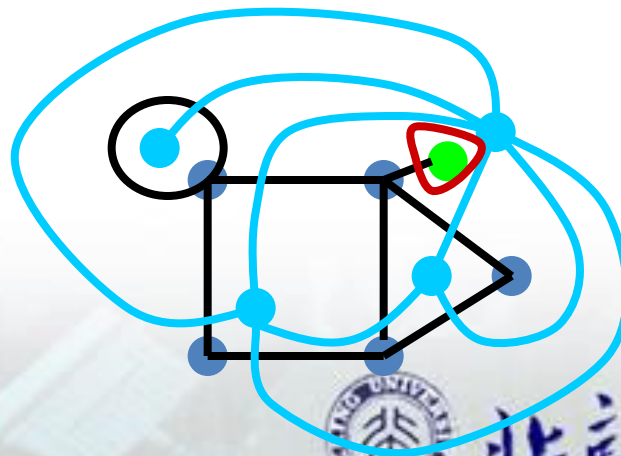
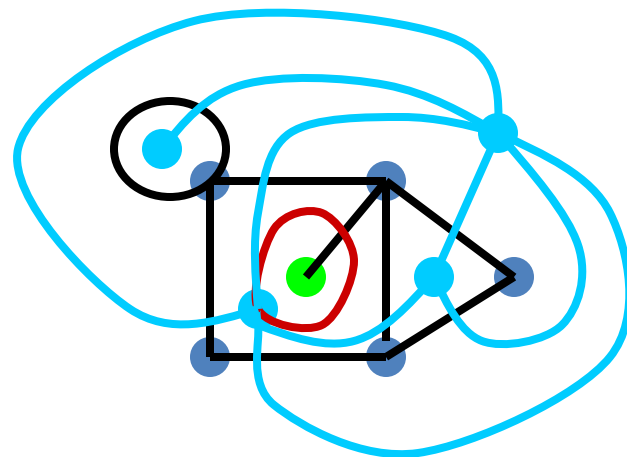
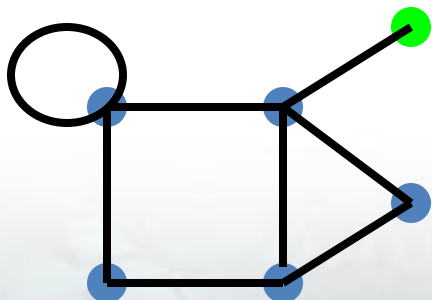
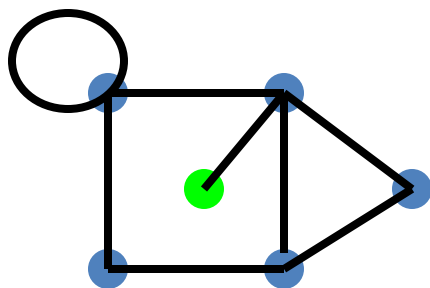
对偶图的性质

- $n^*=r, m^*=m$
- $r^*=n-p+1$ ($n-m+r=1+p, n^*-m^*+r^*=2$)
- $d_{G^*}(v_i^*)=\deg_G(R_i)$



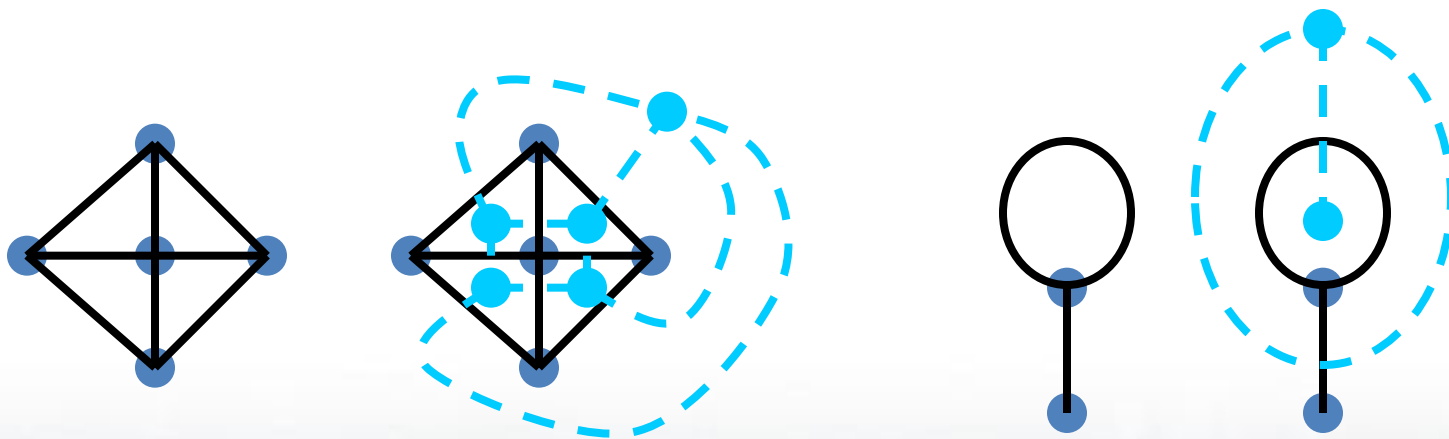
对偶图的性质

- $G_1 \cong G_2$, 不一定 $G_1^* \cong G_2^*$



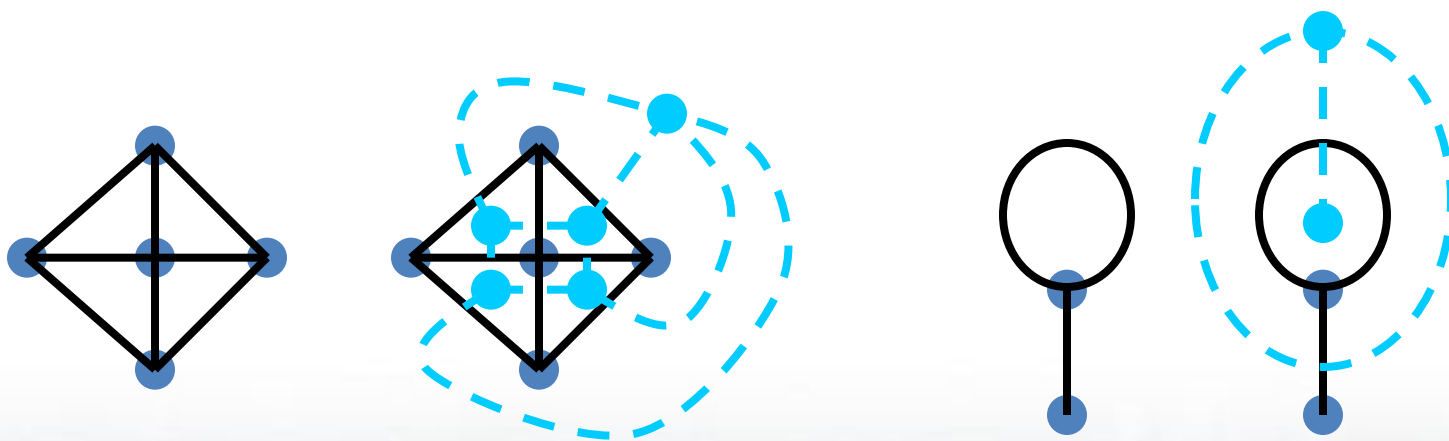
对偶图的性质

- G 连通 $\Leftrightarrow G \cong G^{**}$ (要求 G^* 不改变形状)



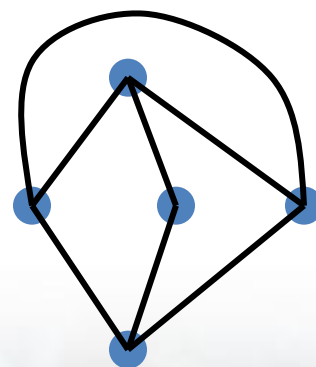
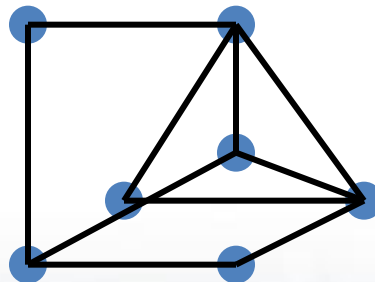
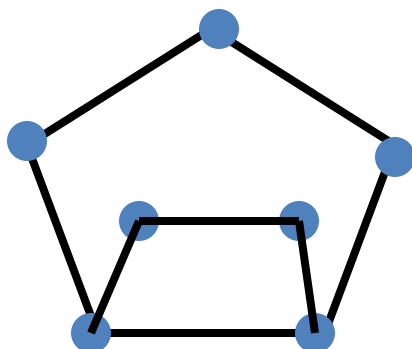
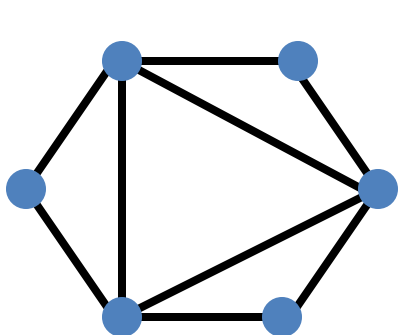
自对偶图

- 自对偶图: $G \cong G^*$.
- $n \geq 4$ 时, 轮图 W_n 是自对偶图



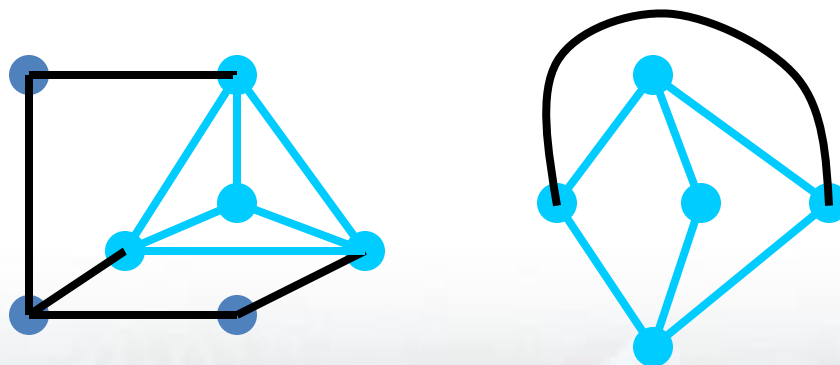
外(可)平面图

- 平面图的所有顶点可都在一个面的边界上



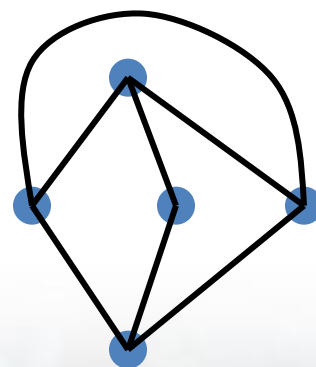
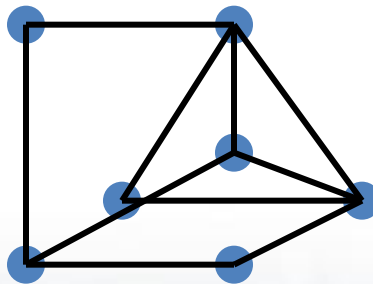
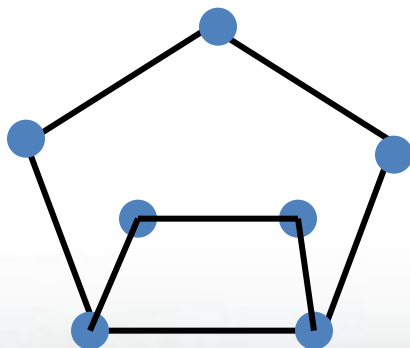
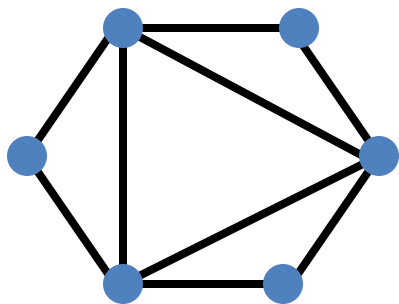
外平面图充要条件

- G 是外平面图 $\Leftrightarrow G$ 不含与 K_4 或 $K_{2,3}$ 同胚子图
- #
- (G 是平面图 $\Leftrightarrow G$ 不含与 K_5 或 $K_{3,3}$ 同胚子图)



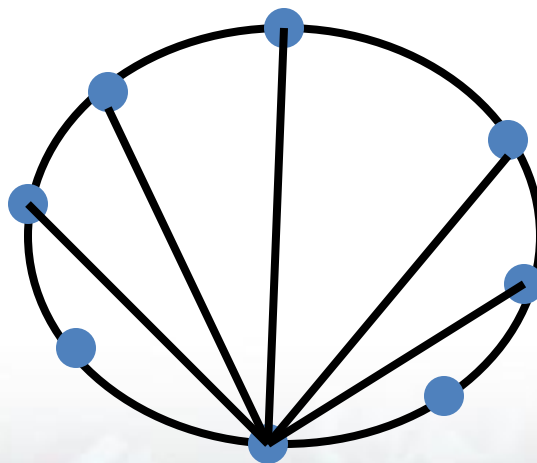
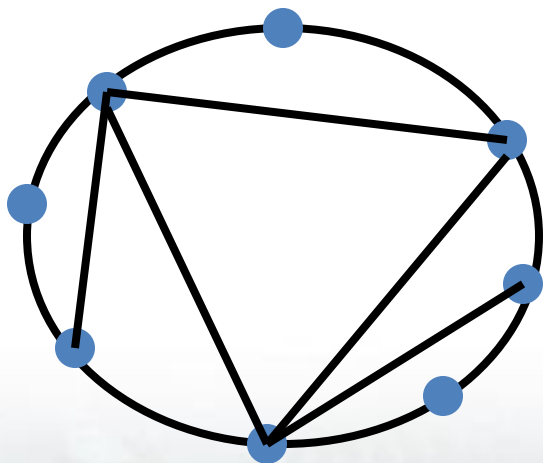
极大外平面图

- 本身是简单外平面图,但是在任意不相邻顶点之间加边就不是外平面图了



极大外平面图充要条件

- 设 G 是 $n(\geq 3)$ 阶外平面图, 所有顶点在外部面边界上, 则 G 是极大外平面图 \Leftrightarrow
 G 外部面边界是 n -圈, 所有内部面边界是3-圈.

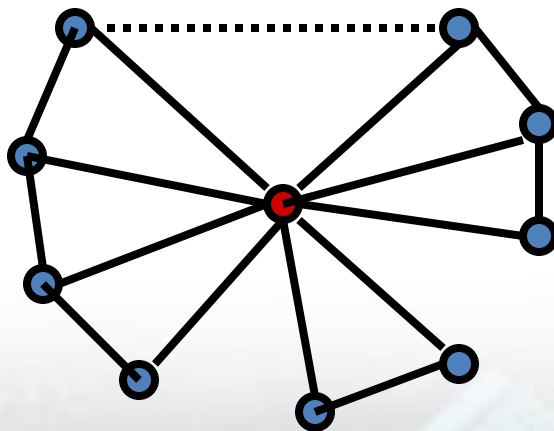
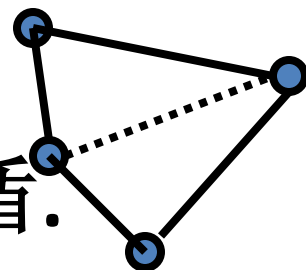


定理11.19证明(\Rightarrow)

• (\Rightarrow) 反证, 分情形讨论.

(1) 有4次以上内部面 \Rightarrow 可加边, 矛盾.

(2) 外部面边界不是圈 \Rightarrow 有割点 \Rightarrow 可加边, 矛盾.



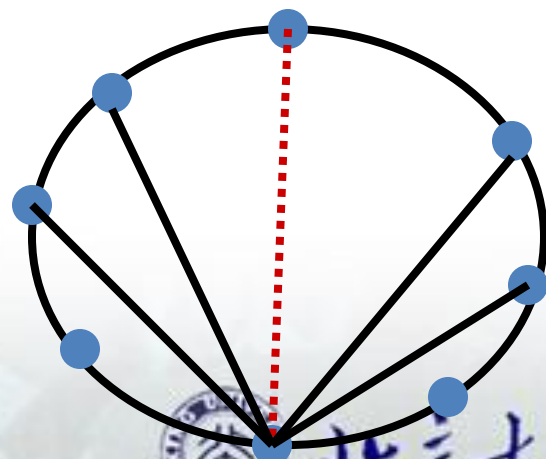
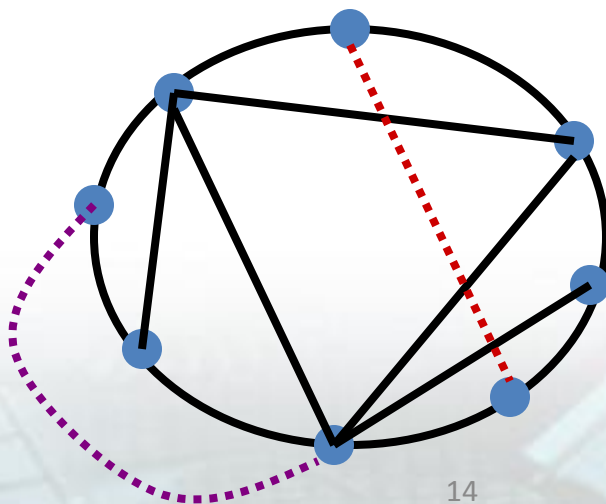
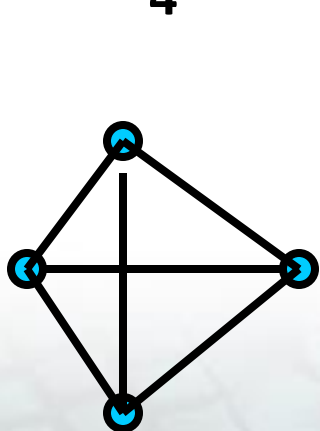
定理11.19证明(\Leftarrow)

- (\Leftarrow) 分情形讨论

(1) 只有一个内部面 $\Rightarrow K_3 \Rightarrow$ 是极大外平面图

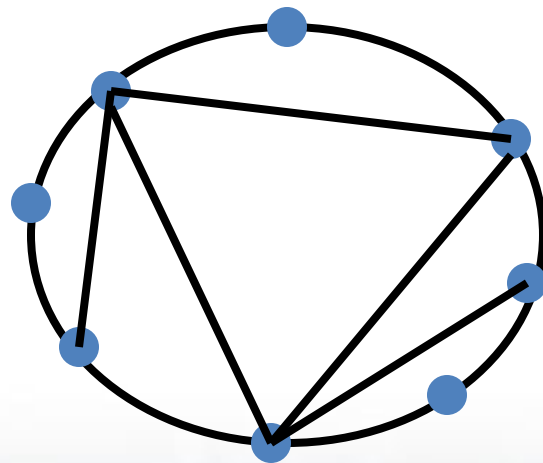
(2) 至少有两个内部面. 加边 $e=(u,v) \Rightarrow$ 其余顶点分两侧 \Rightarrow 有边连接两侧顶点 \Rightarrow 子图同胚

K_4 . #



极大外平面图必要条件

- $n(\geq 3)$ 阶极大外平面图 G 所有顶点在外部面边界上
 - $\Rightarrow G$ 有 $n-2$ 个内部面
 - $\Rightarrow m=2n-3$
 - \Rightarrow 至少有3个顶点度数 ≤ 3
 - \Rightarrow 至少有2个顶点度数 $=2$
 - $\Rightarrow \kappa=2$.



定理11.20-21证明(要点)

- $n(\geq 3)$ 阶极大外平面图 G

所有顶点在外部面边界上

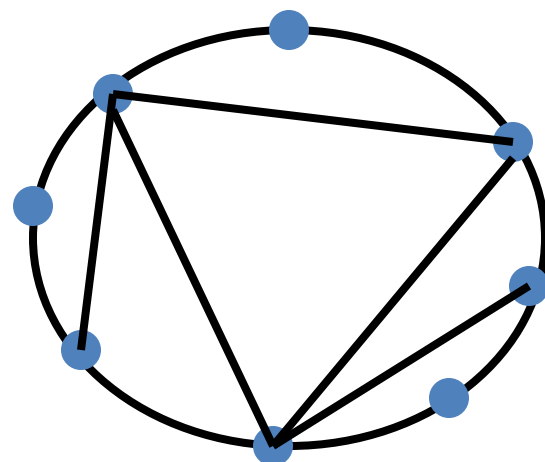
$\Rightarrow G$ 有 $n-2$ 个内部面 (归纳法)

$\Rightarrow m=2n-3$ (面的握手定理)

\Rightarrow 至少3个顶点度 ≤ 3 ($m=2n-3$, 握手定理)

\Rightarrow 至少2个顶点度 $=2$ (内部面提供0,1,2边界)

$\Rightarrow \kappa=2$ (K_3 ; 圈 \Rightarrow 无割点; 2度点 \Rightarrow 有2点割集)





小结

- 对偶图, 自对偶图
- 外平面图, 极大外平面图