单元1.5 集合的运算

第一编 集合论　第一章 集合

1.3 集合的运算

内容提要

集合的运算

文氏图

容斥原理

并集

定义1. 8 设A,B为二集合，称由A和B的所有元素组成的集合为A与B的并集，记作A∪B，称∪为并运算符，A∪B的描述法表示为A∪B = { x | x∈A ∨ x∈B }。集合的并运算可以推广到有限个或可数个集合(初级并)。

设$A_1, A_2, \ldots, A_n$ 为n个集合，$A_1, A_2, \ldots, A_n$, ...为可数个集合，则 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \{x \mid \exists i(1 \le i \le n \wedge x \in A_i)\}$

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \qquad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots$$

并集的例子

(1) 设A={x∈N|5≤x≤10}， B={x∈N|x≤10∧为素数}，则

A∪B={2,3,5,6,7,8,9,10}。

(2) 设A_n={x∈R|n-1≤x≤n}，n=1,2,…,10，则

$$\bigcup_{n=1}^{10} A_n = \{x \in R \mid 0 \le x \le 10\} = [0,10]$$

(3) 设A_n={x∈R|0≤x≤1/n}，n=1,2,…，则

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{x \in R \mid 0 \le x \le 1\} = [0,1]$$

交集

定义1. 9 设**A,B**为二集合，称由**A**和**B**的公共元素组成的集合为**A**与**B**的交集，记作**A∩B**，称∩为交运算符，**A∩B**的描述法表示为**A∩B = { x | x∈A ∧ x∈B }**。集合的交运算可以推广到有限个或可数个集合(初级交)。设$A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$为可数个集合，则

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \{x \mid \forall i(1 \le i \le n \rightarrow x \in A_i)\}$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \qquad \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots$$

交集的例子

(1) 设A = { x∈N| x为奇数 ∧ 0≤x≤20 },

B = { x∈N| x为素数 ∧ 0≤x≤20 }，则

A∩B = { 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 }。

(2) 设A_n = {x∈R|0≤x≤n}，n=1,2,…，则

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{x \in R \mid 0 \le x \le 1\} = [0,1]$$

不相交

定义1. 10 设A,B为二集合，若$A\cap B=\varnothing$，则称A和B是不交的。设$A_1,A_2,\ldots$是可数多个集合，若对于任意的$i\neq j$，都有$A_i\cap A_j=\varnothing$，则称$A_1,A_2,\ldots$是互不相交的。

设$A_n=\{x\in R\,|\,n-1<x<n\}$，$n=1,2,\ldots$，则$A_1, A_2,\ldots$是互不相交的。

相对补集

定义1. 11 设A,B为二集合，称属于A而不属于B的全体元素组成的集合为B对A的相对补集，记作A-B。

A-B的描述法表示为

$$A-B=\{\,x \mid x\in A \wedge x\notin B\,\}。$$

对称差

定义1.12 设A,B为二集合，称属于A而不属于B，或属于B而不属于A的全体元素组成的集合为A与B的对称差，记作$A \oplus B$。$A \oplus B$的描述法表示为

$$A \oplus B = \{x \mid (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)\}$$

容易看出

$$A \oplus B = (A-B) \cup (B-A) = (A \cup B)-(A \cap B)$$

绝对补集

定义1.13 设E为全集，$A \subseteq E$，称A对E的相对补集为A的**绝对补集**，记作$\sim A$。

$\sim A$的描述法表示为

$$\sim A = \{ x \mid x \in E \wedge x \notin A \}。$$

因为E是全集，所以$x \in E$是真命题，于是

$$\sim A = \{ x \mid x \notin A \}。$$

广义并集

定义1.14 设$\mathcal{A}$为一个集族，称由$\mathcal{A}$中全体元素的元素组成的集合为$\mathcal{A}$的广义并，记作$\cup\mathcal{A}$（“大并$\mathcal{A}$”）。$\cup\mathcal{A}$的描述法表示为

$$\cup\mathcal{A} = \{ x \mid \exists z (x\in z \wedge z\in\mathcal{A}) \}$$

设$\mathcal{A}=\{\{a,b\},\{c,d\},\{d,e,f\}\}$，则$\cup\mathcal{A}=\{a,b,c,d,e,f\}$.

当$\mathcal{A}$是以S为指标集的集族时

$$\cup\mathcal{A} = \cup\{A_\alpha \mid \alpha\in S\} = \bigcup_{\alpha\in S} A_\alpha$$

北京大学

广义交集

定义1.15 设$\mathcal{A}$为一个集族，称由$\mathcal{A}$中全体元素的公共元素组成的集合为$\mathcal{A}$的广义交， 记作$\cap\mathcal{A}$。 $\cap\mathcal{A}$ 的描述法表示为

$$\cap\mathcal{A} = \{ x \mid \forall z (z\in\mathcal{A} \to x\in z) \}$$

设$\mathcal{A}$=$\{\{1,2,3\},\{1,a,b\},\{1,6,7\}\}$，则$\cap\mathcal{A}=\{1\}$。

当$\mathcal{A}$是以S为指标集的集族时

$$\cap\mathcal{A} = \cap\{A_\alpha \mid \alpha\in S\} = \bigcap_{\alpha\in S} A_\alpha$$

注意： 当$\mathcal{A}=\varnothing$ 时，$\cap\varnothing$无意义。(为什么?)

例子

在广义并与广义交的运算中，将集族的元素还看成集族，给定下列集族， $\mathcal{A}_1=\{a,b,\{c,d\}\}$， $\mathcal{A}_2=\{\{a,b\}\}$， $\mathcal{A}_3=\{a\}$， $\mathcal{A}_4=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$， $\mathcal{A}_5=a$（$a\neq\varnothing$）， $\mathcal{A}_6=\varnothing$， 则

$\cup\mathcal{A}_1= a\cup b\cup\{c,d\}$， $\cap\mathcal{A}_1= a\cap b\cap\{c,d\}$，

$\cup\mathcal{A}_2=\{a,b\}$， $\cap\mathcal{A}_2=\{a,b\}$， $\cup\mathcal{A}_3=a$， $\cap\mathcal{A}_3=a$，

$\cup\mathcal{A}_4=\{\varnothing\}$， $\cap\mathcal{A}_4=\varnothing$， $\cup\mathcal{A}_5=\cup a$， $\cap\mathcal{A}_5=\cap a$，

$\cup\mathcal{A}_6=\varnothing$， $\cap\mathcal{A}_6$ 无意义。

集合运算的优先级

第一类运算：

绝对补、幂集、广义交、广义并等。

第一类运算按照从右向左的顺序运算。

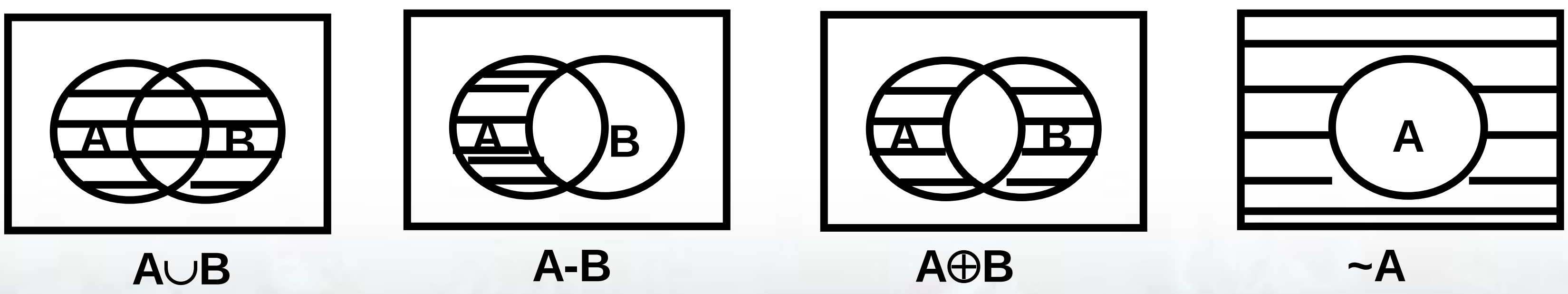
第二类运算：

初级并、初级交、相对补、对称差等。

第二类运算按照括号决定的顺序运算，多个括号并排或没有括号的部分按照从左向右的顺序运算。

文氏图

集合与集合之间的关系以及一些运算的结果可以用文氏图给予直观的表示。在文氏图中，用矩形代表全集，用圆或其他闭曲线的内部代表 E 的子集，并将运算结果得到的集合用阴影部分表示。



容斥原理(包含排斥原理)

定理1.3 设 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 为 n 个集合，则

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$$

北京大学

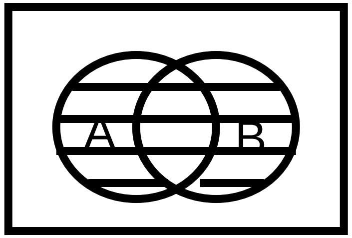
例1.1

在1到10000之间既不是某个整数的平方，也不是某个整数的立方的数有多少？

解 设 $E=\{x\in N \mid 1\le x\le 10000\}$，$|E|=10000$，

$A=\{x\in E \mid x=k^2 \wedge k\in Z\}$，$|A|=100$，

$B=\{x\in E \mid x=k^3 \wedge k\in Z\}$，$|B|=21$，



A∪B

$A\cap B=\{x\in E \mid x=k^6 \wedge k\in Z\}$，$|A\cap B|=4$，

则 $|\sim(A\cup B)|=|E|-|A\cup B|=|E|-(|A|+|B|-|A\cap B|)$

$=10000-100-21+4=9883$。□

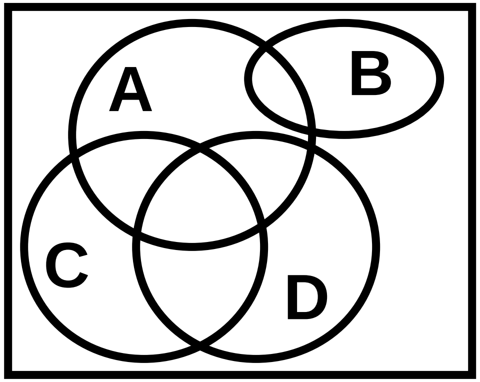
例1.2

在24名科技人员中，会说英、日、德、法语的人数分别为13、 5、 10、和9， 其中同时会说英语、日语的人数为2，同时会说英语、德语， 或同时会说英语、法语， 或同时会说德语、法语两种语言的人数均为4。会说日语的人既不会说法语也不会说德语。试求只会说一种语言的人数各为多少？又同时会说英、德、法语的人数有多少？

解答

设A、B、C、D分别为会说英、日、德、法语的集合。

由已知条件可知，$|A|=13$，$|B|=5$，



$|C|=10$，$|D|=9$，$|A\cap B|=2$，

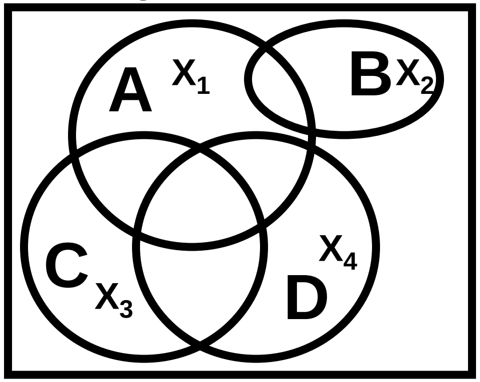
而 $|A\cap C|=|A\cap D|=|C\cap D|=4$，

$|B\cap C|=|B\cap D|=|A\cap B\cap C|=|A\cap B\cap D|=$

$|A\cap B\cap C\cap D|=0$，$|A\cup B\cup C\cup D|=24$。

解答(续)

对集合A、B、C、D应用容斥原理，并代入已知条件得方程 $24=37-14+|A\cap C\cap D|$，于是，$|A\cap C\cap D|=1$，即同时会说英、法、德语只有1人。



设只会说英、日、法、德语的人数为 x_1、x_2、x_3、x_4，则

$x_1=|A|-|(B\cup C\cup D)\cap A|=|A|-|(B\cap A)\cup(C\cap A)\cup(D\cap A)|$，对 $B\cap A$、$C\cap A$、$D\cap A$用容斥原理，得$x_1=1$，类似可求出$x_2=3$，$x_3=3$，$x_4=2$。 □

小结

- 集合的运算、集合运算的优先级
  - 并、初级并、广义并
  - 交、初级交、广义交
  - 相对补、对称差、绝对补
- 文氏图
- 容斥原理