单元12.1 支配集、点覆盖集、点独立集

第二编 图论　第十二章支配集、覆盖集、独立集与匹配

13.1 支配集、点覆盖集、点独立集

北京大学

内容提要

- 支配集
- 点独立集
- 点覆盖集
- 团
- 支配数，点独立数，点覆盖数，团数之间的关系

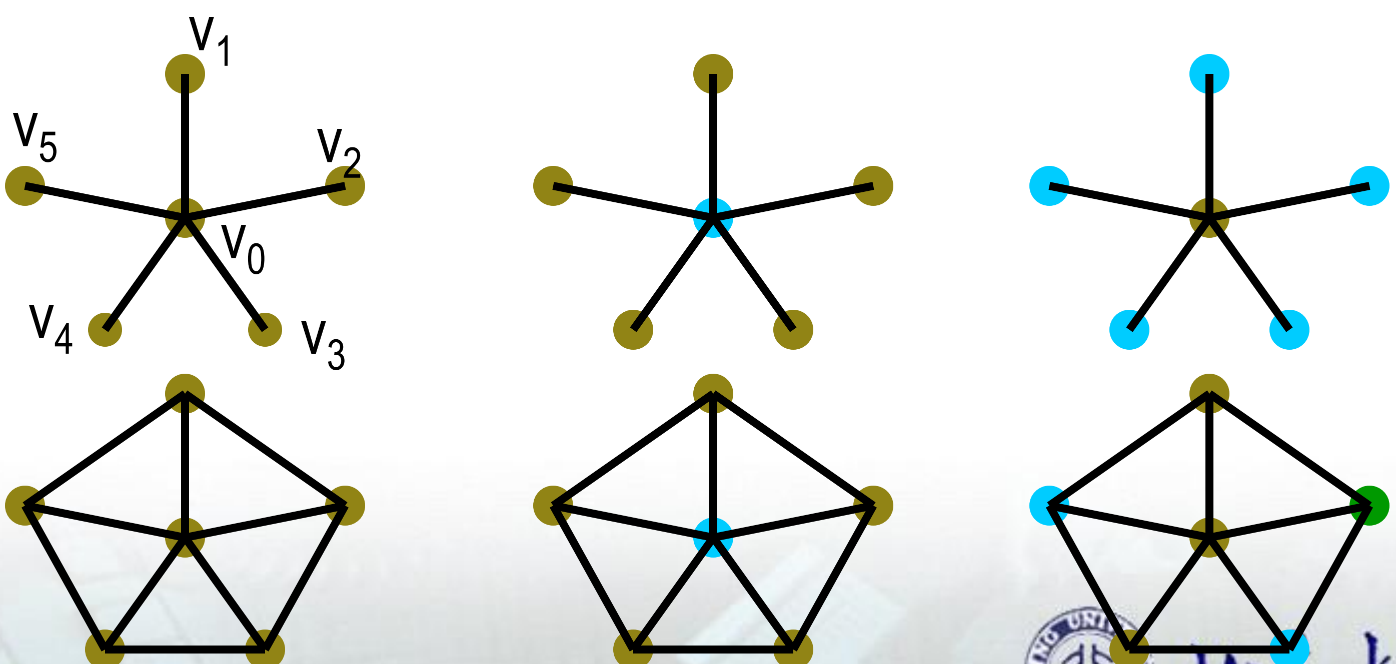
支配集

- G=<V,E> , e=(u,v) $\Leftrightarrow$ u支配v $\Leftrightarrow$ v支配u
- 支配集: $V^* \subseteq V$, $\forall v \in V-V^*$, $\exists u \in V^*$, u支配v

- 极小支配集: 真子集都非支配集的支配集
- 最小支配集: 顶点数最少的支配集
- 支配数: $\gamma_0(G)$ = 最小支配集的顶点数

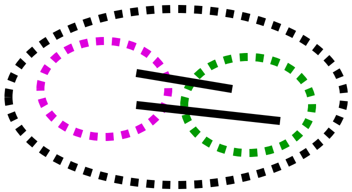
支配集举例

- 星形图S_n: $\{v_0\}$, $\{v_1,v_2,\ldots,v_{n-1}\}$, $\gamma_0(S_n)=1$
- 轮图W_n: $\{v_0\}$, $\{v_1,v_3,v_5\ldots,v_{n-2}\}$, $\gamma_0(W_n)=1$



定理13.1

- 无向图G无孤立点, V_1*是极小支配集, 则存在V_2*也是极小支配集, 且$V_1^*\cap V_2^*=\varnothing$.



- 说明: 支配集要包含所有孤立点

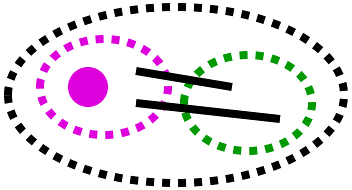
定理13.1证明

- 证:

(1) V_1^*是极小支配集 $\Rightarrow$ $V-V_1^*$也是支配集.

反证: 否则, $\exists u\in V_1^*$, $\forall v\in V-V_1^*$, $(u,v)\notin E$, $V_1^*-\{u\}$还是支配集, 与V_1^*极小性矛盾.

(2) $V-V_1^*$是支配集 $\Rightarrow$



$V-V_1^*$中有子集是极小支配集, 设为V_2^*.

显然$V_1^*\cap V_2^*=\varnothing$. #

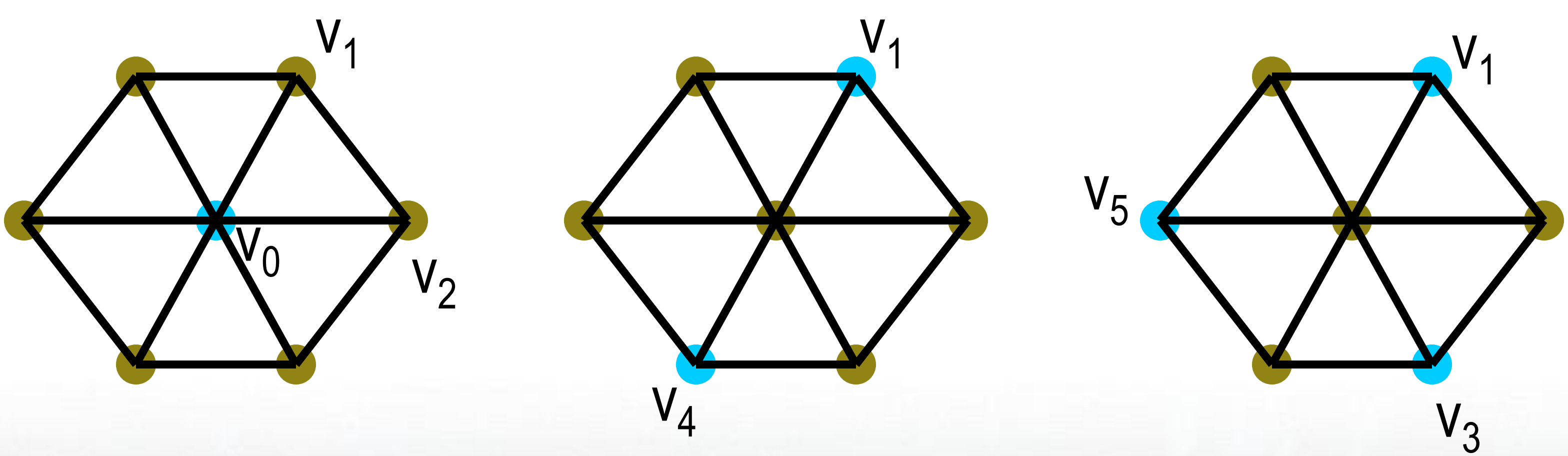
独立集

- 无向图G=<V,E>
- 独立集: $V^* \subseteq V$, $\forall u,v \in V^*$, u与v不相邻

- 极大独立集: 真母集都非独立集的独立集
- 最大独立集: 顶点数最多的独立集
- 点独立数: $\beta_0(G)$ = 最大独立集的顶点数

独立集举例

- $\{v_0\}$, $\{v_1,v_4\}$, $\{v_1,v_3,v_5\}$, $\beta_0=3$



定理13.2

- 无向图G(~~无孤立点~~),

  V*是极大独立集 $\Rightarrow$ V*是极小支配集

- 说明: 极大独立集要包含所有孤立点

  "无孤立点"的条件可以去掉

定理13.2证明

- 证: (1) V*是极大独立集 $\Rightarrow$ V*也是支配集.

(反证) 否则, $\exists v \in V\text{-}V^*$, $\forall u \in V^*$, $(u,v) \notin E$, $V^* \cup \{v\}$还是独立集, 与V*极大性相矛盾.

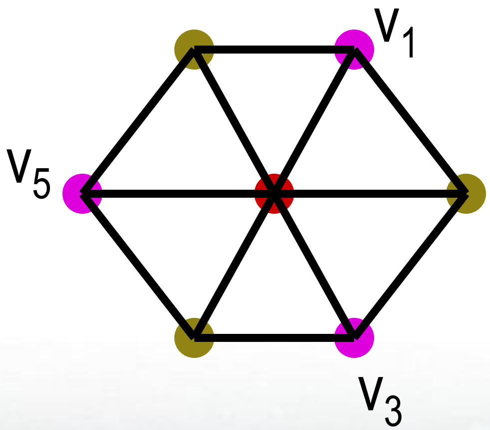
(2) V*是极小支配集.

(反证) 否则, $\exists u \in V^*$, $V^*\text{-}\{u\}$是支配集, 则$\exists v \in V^*$, $(u,v) \in E$, 与V*是独立集相矛盾. #

定理13.2补充推论

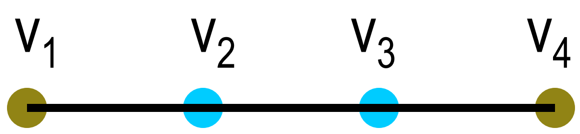
- 无向图G, 则

$$\gamma_0 \leq \beta_0 \qquad \#$$



定理13.2逆命题反例

- 极小支配集不一定是(极大)独立集
  - $\{v_2,v_3\}$是极小支配集
  - $\{v_2,v_3\}$不是独立集，当然不是极大独立集



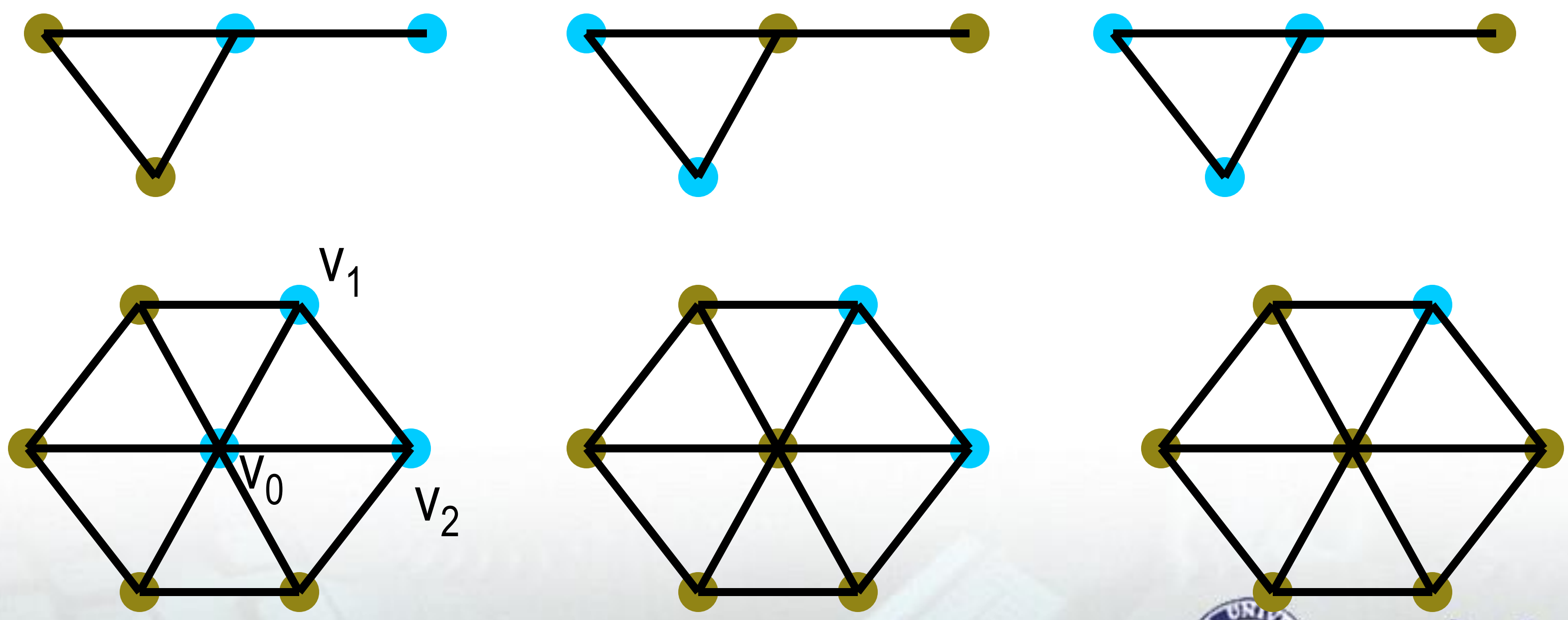
团

- 无向图G=<V,E>
- 团: $V^* \subseteq V$, $G[V^*]$是完全子图

- 极大团: 真母集都不是团的团
- 最大团: 顶点数最多的团
- 团数: $\nu_0(G)$ = 最大团的顶点数

团举例

- $\{v_0,v_1,v_2\}$, $\{v_1,v_2\}$, $\{v_1\}$, $\nu_0=3$



定理13.4

- 无向图G,

  V*是G的团 $\Leftrightarrow$ V*是$\overline{G}$的独立集.　　#

- 推论: 无向图G,

  (1) $\nu_0(G)=\beta_0(\overline{G})$

  (2) V*是G的极(最)大团

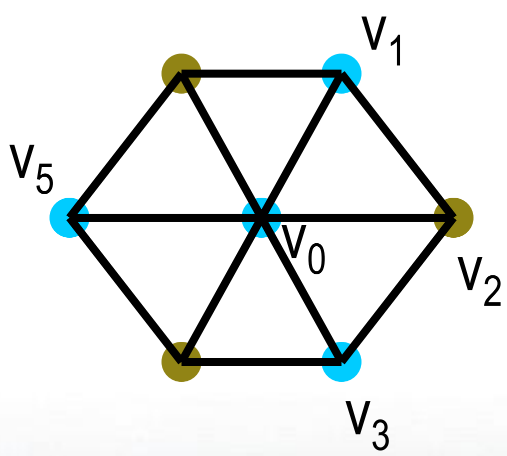
  $\Leftrightarrow$ V*是$\overline{G}$的极(最)大独立集.　#

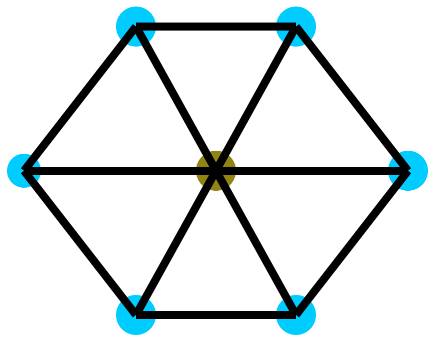
点覆盖

- 无向图G=<V,E>
- 点覆盖: $V^* \subseteq V$, $\forall e \in E$, $\exists v \in V^*$, v关联e
  - 说明: 点覆盖要含所有带环点
- 极小点覆盖: 真子集都非点覆盖的点覆盖
  - 说明: 极小点覆盖不含任何孤立点
- 最小点覆盖: 顶点数最少的点覆盖
- 点覆盖数: $\alpha_0(G)$ = 最小点覆盖的顶点数

点覆盖举例

- $\{v_0,v_1,v_3,v_5\}$, $\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6\}$, $\alpha_0=4$



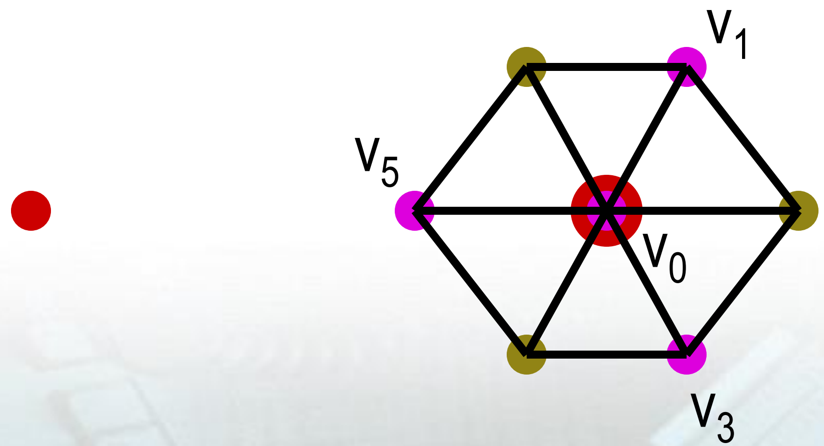


补充定理

- 无孤立点(~~连通~~)图中, 点覆盖是支配集

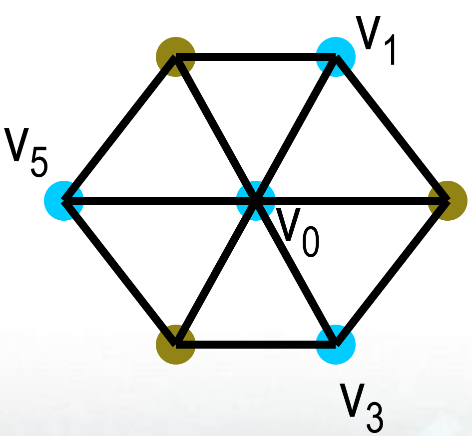
$$\gamma_0 \le \alpha_0$$

- 点覆盖加所有孤立点是支配集



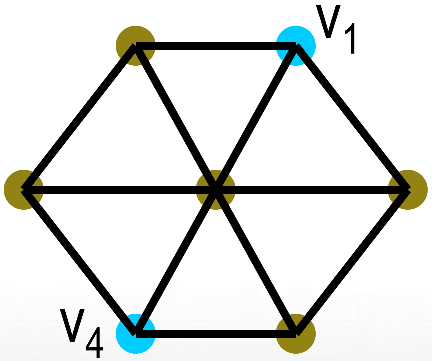
反例

- 极小点覆盖不一定是极小支配集
  - $\{v_0, v_1, v_3, v_5\}$ 是极小点覆盖
  - $\{v_1, v_3, v_5\}$ 是极小支配集



反例

- 支配集不一定是点覆盖
  - $\{v_1,v_4\}$ 是支配集
  - $\{v_1,v_4\}$ 不是点覆盖



定理13.3

- 无向图G无孤立点, $V^*\subset V$,

$$V^* \text{是点覆盖} \Leftrightarrow V-V^* \text{是独立集.}$$

定理13.3证明

- 证: $(\Rightarrow)$

  (反证) 否则, $\exists u,v \in V-V^*$, $(u,v)\in E$, 则V^*不是点覆盖, 矛盾.

  $(\Leftarrow)$ $V-V^*$是独立集, $\forall (u,v)\in E$,

  $(u,v)\in E \Rightarrow \neg(\ u\in V-V^* \wedge v\in V-V^*\ )$

  $\Leftrightarrow u\in V^* \vee v\in V^* \Rightarrow$ V^*是点覆盖. #

定理13.3推论

- 无向图G无孤立点,

V*是极(最)小点覆盖 ⇔ V-V*是极(最)大独立集

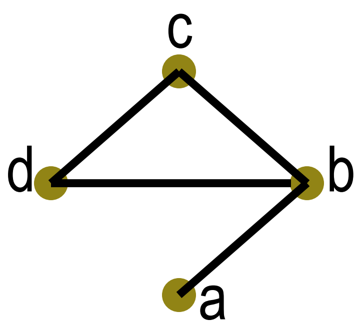
$$\alpha_0 + \beta_0 = n \qquad \#$$

$\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \nu_0$之间关系

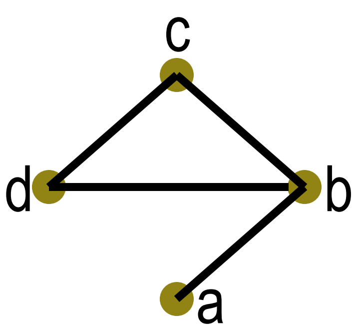
- $\alpha_0+\beta_0=n$ (无孤立点, 定理13.3推论).
- $\gamma_0 \le \beta_0$ (定理13.2补充推论)
- $\gamma_0 \le \alpha_0$ (无孤立点, 补充定理)
- $\nu_0(G)=\beta_0(\overline{G})$ (定理13.4推论)
- α_0, β_0, ν_0都是难解的(intractable, hard)
  - 目前都没有多项式时间算法
  - 与哈密顿回路问题, 着色问题等“一样难”

例13.1

- 求全体极小支配集, 极小点覆盖, 极大独立集



例13.1: 全体极小支配集



- $\Pi_{v\in V}(v+\Sigma_{u\in\Gamma(v)}u)$

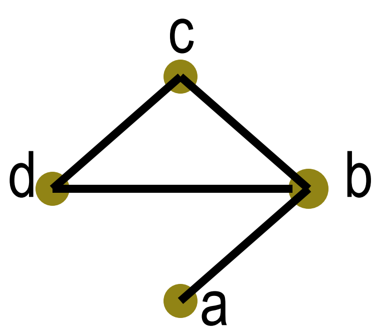
= (a+b)(b+a+c+d)(c+b+d)(d+c+b)

= ac+ad+b.

(幂等: a+a=a, a•a=a, 逻辑加乘)

- {a,c}, {a,d}, {b}是全体极小支配集.
- $\gamma_0=1$.

例13.1: 极小点覆盖



- $\Pi_{(u,v)\in E}(u+v)$

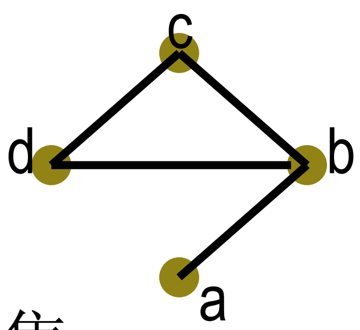
  $= (a+b)(b+c)(b+d)(c+d)$

  $= bc+bd+acd.$

  (幂等: a+a=a, a•a=a, 逻辑加乘)

- {b,c}, {b,d}, {a,c,d}是全体极小点覆盖.
- $\alpha_0=2$.

例13.1: 极大独立集



- G无孤立点,

  V*是极小点覆盖 $\Leftrightarrow$ V-V*是极大独立集.

- {b,c}, {b,d}, {a,c,d} 是全体极小点覆盖,
- {a,d}, {a,c}, {b} 是全体极大独立集.
- β_0=2. #

小结

- 支配集，支配数γ_0
- 点独立集，点独立数β_0
- 点覆盖集，点覆盖数α_0
- 团，团数ν_0
- $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \nu_0$ 之间关系