Ch-04 概率极限定理

4.1 随机序列的收敛性

定理 1.1 称 $\xi_1,\xi_2,\cdots$ 依概率收敛于 η，若对任何 $\epsilon>0$，成立

$$\lim_{n\to\infty} P(|\xi_n-\eta|\geq\epsilon)=0$$

记做 $\xi_n \stackrel{P}{\to} \eta$.

定义 1.2 称 $\xi_1,\xi_2,\cdots$ 几乎必然收敛于 η，若

$$P(\lim_{n\to\infty}\xi_n=\eta)=1$$

记做 $\xi_n \stackrel{a.s.}{\to} \eta$.

定义 1.3 称 $\xi_1,\xi_2,\cdots$ 依分布收敛于 η，若对 η 的分布函数 $F(x)$ 的任何连续点 x，皆成立

$$\lim_{n\to\infty} P(\xi_n\leq x)=P(\eta\leq x)$$

记做 $\xi_n \stackrel{d}{\to} \eta$.

定理 1.1 设 $\xi_n \stackrel{a.s.}{\to} \eta$，则 $\xi_n \stackrel{P}{\to} \eta$.

定理 1.2 设 $\xi_n \stackrel{P}{\to} \eta$，则 $\xi_n \stackrel{w}{\to} \eta$.

定义 1.4 设 $X_1,X_2,\cdots$ 是随机变量序列，$E(X_n)$ 均存在 $(n\geq 1)$，若

$$\xi_n \triangleq \frac{1}{n}\sum_{k=1}(X_k-E(X_k)) \stackrel{P}{\to} 0 \quad (n\to\infty)$$

则称 $X_1,X_2,\cdots$ 服从弱大数律。

定义 1.5 设 $X_1,X_2,\cdots$ 是随机变量序列，$E(X_n)$ 均存在 $(n\geq 1)$，若 $n\to\infty$ 时，

$$\xi_n \triangleq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k-E(X_k)) \stackrel{a.s.}{\to} 0$$

则称 $X_1,X_2,\cdots$ 服从强大数律。

定义 1.6 设 $X_1,X_2,\cdots$ 是随机变量列，$E(X_n)$ 和 $var(X_n)$ 都存在 $(n\geq 1)$，若 $n\to\infty$ 时，

$$\xi_n \triangleq \frac{\sum_{k=1}^{n}(X_k-E(X_k))}{\sqrt{var(\sum_{k=1}^{n}X_k)}} \stackrel{d}{\to} \xi\sim N(0,1)$$

则称 $X_1,X_2,\cdots$ 服从中心极限定理。

定义 1.7 称 $X_1, X_2, \cdots$ 是相互独立的随机变量序列，若对任何 $n \geq 2$，$X_1, \cdots, X_n$ 是相互独立的。

4.2 大数律和强大数律

定理 2.1 弱大数律 WLLN 设 $X_1, X_2, \cdots$ 是相互独立的随机变量序列，$E(X_i) = \mu_i$，$var(X_i) = \sigma_i^2$ $(i \geq 1)$ 且 $\{\sigma_i^2, i \geq 1\}$ 有界，设 $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ $(n \geq 1)$，则

$$\frac{S_n - E(S_n)}{n} \xrightarrow{P} 0 \quad (n \to \infty)$$

定理 2.2 强大数律 SLLN 设 $X_1, X_2, \cdots$ 是相互独立的随机变量序列，$E(X_i) = \mu$, $E(X_i - \mu_i)^4 \leq M$（对一切 $i \geq 1$；M 是一个常数），$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ $(n \geq 1)$，则当 $n \to \infty$ 时，

$$\frac{S_n - E(S_n)}{n} \xrightarrow{a.s.} 0$$

4.3 中心极限定理

定理 3.1 林德伯格-列维 CLT 设 $X_1, X_2, \cdots$ 是相互独立同分布的随机变量序列，$\mu = E(X_1)$ 和 $\sigma^2 = var(X_1)$ 都存在且 $\sigma > 0$，$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ $(n \geq 1)$，则对一切 x 成立：

$$\lim_{n \to \infty} P(\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \mathrm{d}u$$

中心极限定理 CLT 设 $X_1, X_2, \cdots$ 满足 $\forall\, n,\ 0 < var(X_n) < \infty$，$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ $(n \geq 1)$，若

$$S_n^* = \frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{var(S_n)}} \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1)$$

则称 $X_1, X_2, \cdots$ 满足中心极限定理。