单元11.1 点着色与色多项式

第二编 图论　第十一章 平面图

12.1 点着色

12.2 色多项式

内容提要

着色与色数

点色数

色多项式

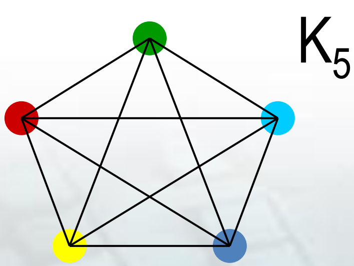
着色

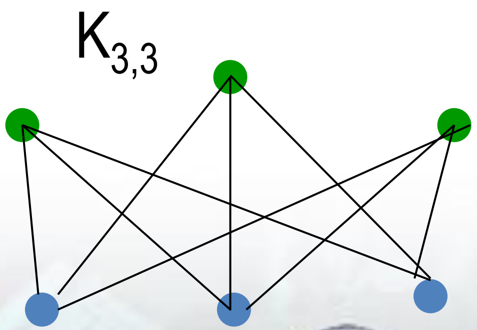
- 给无环图的每个顶点指定1种颜色, 使得相邻顶点有不同颜色
- 颜色集C={1,2,…,k},

$$f: V\to C,$$

$$\forall u\forall v(\ u,v\in V \wedge u\text{与}v\text{相邻} \to f(u)\neq f(v)\ )$$

- **k-着色: |C|=k**



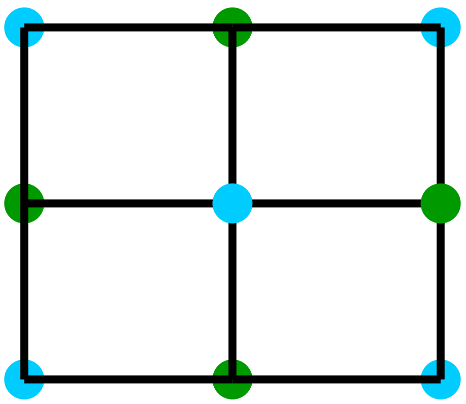


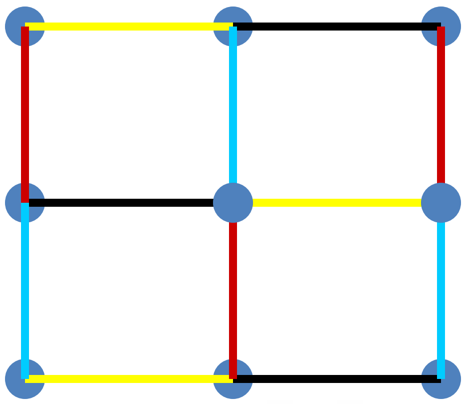
色数

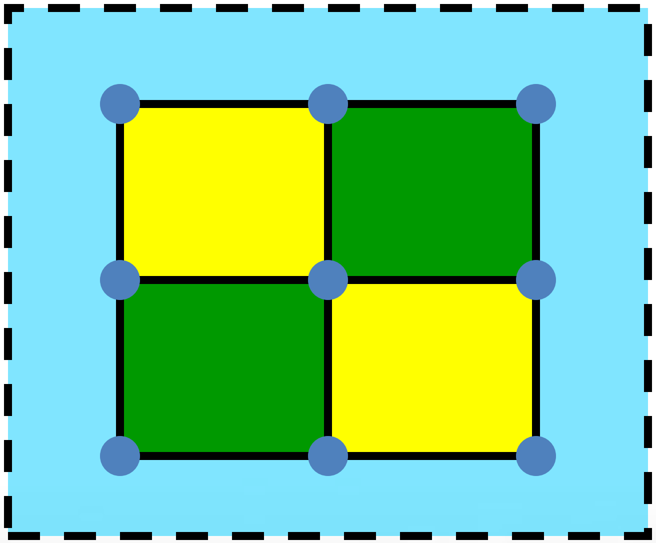
- **k-色图: 可k-着色,但不可(k-1)-着色**
- 色数: 着色所需最少颜色数
- 点色数χ**(G)**
- 边色数χ**'(G),** 面色数χ***(G)**

色数举例

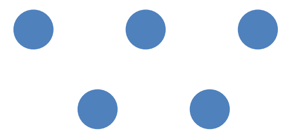
- 例: $\chi(G)=2$, $\chi'(G)=4$, $\chi^*(G)=3$

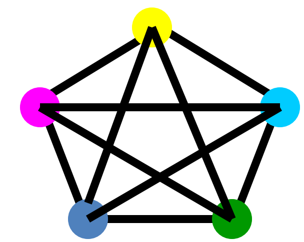




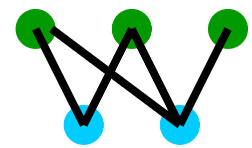


点色数性质

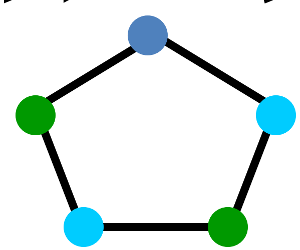


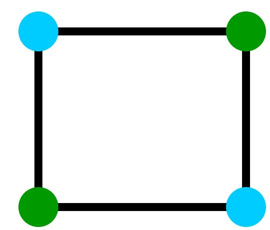


- $\chi(G)=1 \Leftrightarrow$ G是零图
- $\chi(K_n)=n$

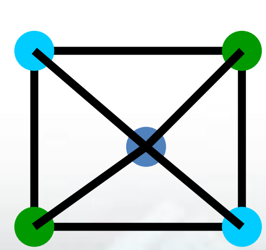


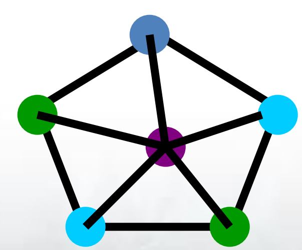
- $\chi(G)=2 \Leftrightarrow$ G是非零图二部图
- G可2-着色 $\Leftrightarrow$ G是二部图 $\Leftrightarrow$ G无奇圈
- $\chi(C_n)=\begin{cases} 2, & n\text{偶数} \\ 3, & n\text{奇数} \end{cases}$





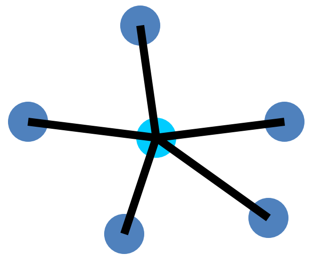
- $\chi(W_n)=\begin{cases} 4, & n\text{偶数} \\ 3, & n\text{奇数} \end{cases}$





$\chi(G)$上界

- 定理12.5: $\chi(G) \le \Delta(G)+1$



- 证: $\forall v \in V(G)$,

  $\Gamma_G(v)=\{ u \mid (u,v)\in E(G) \}$, $|\Gamma_G(v)|\le\Delta(G)$,

  给$\Gamma_G(v)$中顶点着色至多需要$\Delta(G)$种颜色,

  所以至少还剩一种颜色可用来给v着色. #

Brooks定理

- **定理12.6(Brooks):**

  n 阶($n \geq 3$)连通非完全图G非奇圈 $\Rightarrow$

  $$\chi(G) \leq \Delta(G). \qquad \#$$

说明: $\chi(K_1)=1 > \Delta(K_1)=0$

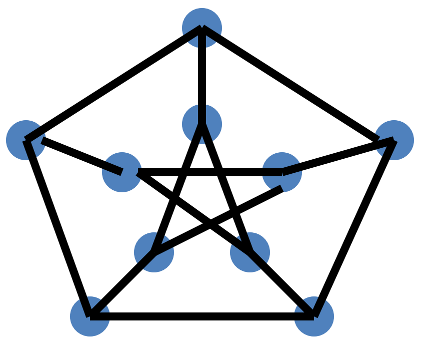
$\chi(K_2)=2 > \Delta(K_2)= 1$

$\chi(K_n)=n > \Delta(K_n)=n-1$

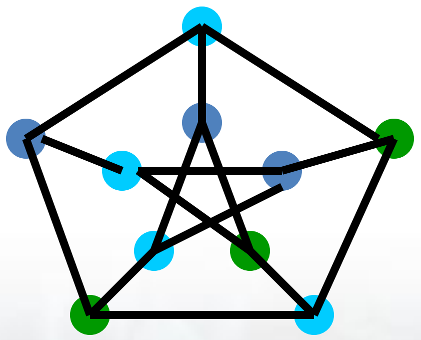
$\chi(C_{2k+1})=3 > \Delta(C_{2k+1})=2$

例12.1

- Petersen图, χ=3.



- 解1: 由Brooks定理, $\chi \le \Delta = 3$.
  又图中有奇圈, $\chi \ge 3$.
  所以χ=3.　　　#
- 解2: 存在如下3-着色, $\chi \le \Delta = 3$.
  又图中有奇圈, $\chi \ge 3$.
  所以χ=3.　　　#



定理12.7

- 对图G进行$\chi(G)$-着色, 设

$$V_i = \{v \mid v \in V(G) \wedge v\text{着颜色}i\},$$

$$i=1,2,\ldots,\chi(G),$$

则$\Pi=\{V_1,V_2,\ldots,V_{\chi(G)}\}$是V(G)的划分. #

- 说明: V_i中的点构成“独立集”

定理12.7'

- 对图G进行$\chi(G)$-着色, 设

$$R = \{ (u,v) \mid u,v \in V(G) \wedge u,v\text{着同色} \},$$

则R是V(G)上等价关系. #

色多项式

- 不同的着色: 至少有一个顶点的着色不同
- 色多项式

  $f(G,k)$=图G的不同的k-着色的总数

- 完全图 $f(K_n,k)=k(k-1)\ldots(k-n+1)=f(K_{n-1},k)(k-n+1)$
- 零图 $f(N_n,k)=k^n$

例12.2

- 求$f(K_n,6)$, $n\geq 2$.

解：$f(K_1,6)=6$,　$f(K_2,6)=6\times 5=30$,

$f(K_3,6)=6\times 5\times 4=120$, $f(K_4,6)=6\times 5\times 4\times 3=360$,

$f(K_5,6)=6\times 5\times 4\times 3\times 2=720$, $f(K_6,6)=6!=720$,

$f(K_n,6)=0$, $n\geq 7$.　#

色多项式的递推公式

- 若(u,v)不是G中的边

$$f(G,k)=f(G\cup(u,v),k)+f(G\backslash(u,v),k)$$

- 若e=(u,v)是G中的边

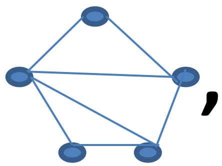
$$f(G,k)=f(G-e,k)-f(G\backslash e,k)$$

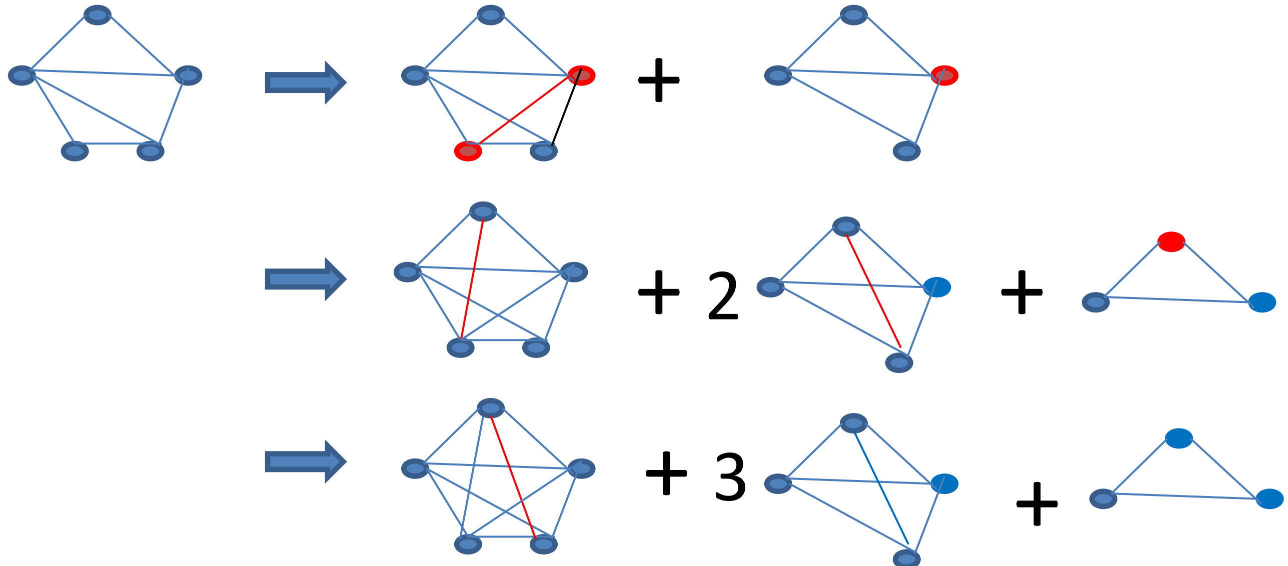
- 推论

$$f(G,k)=f(K_{n1},k)+ f(K_{n2},k)+\ldots+ f(K_{nr},k),$$

$$\chi(G)=\min\{n_1,n_2,\ldots,n_r\}$$

例12.3

- G= , 求f(G,k).
- 解:



$f(G,k) = f(K_5,k) + 3f(K_4,k) + f(K_3,k)$

$= k(k-1)(k-2)^3 = k^5 - 7k^4 + 18k^3 - 20k^2 + 8k.$

所以$\chi(G) = \min\{5,4,3\} = 3$, 且 $f(G,3)=6$. #

色多项式的性质

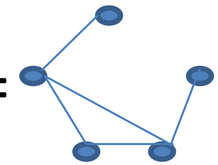
- $f(G,k)$是n次多项式,系数正负号交替
- k^n系数为1, k^{n-1}系数为$-m$, m为边数, 常数项为0
- 最低非零项为k^p, p为连通分支数
- 不同连通分支相乘
- T是n阶树 $\Leftrightarrow f(T,k) = k(k-1)^{n-1}$. (用归纳法证明)
- C是n阶圈 $\Rightarrow f(C,k) = (k-1)^n + (-1)^n(k-1)$.

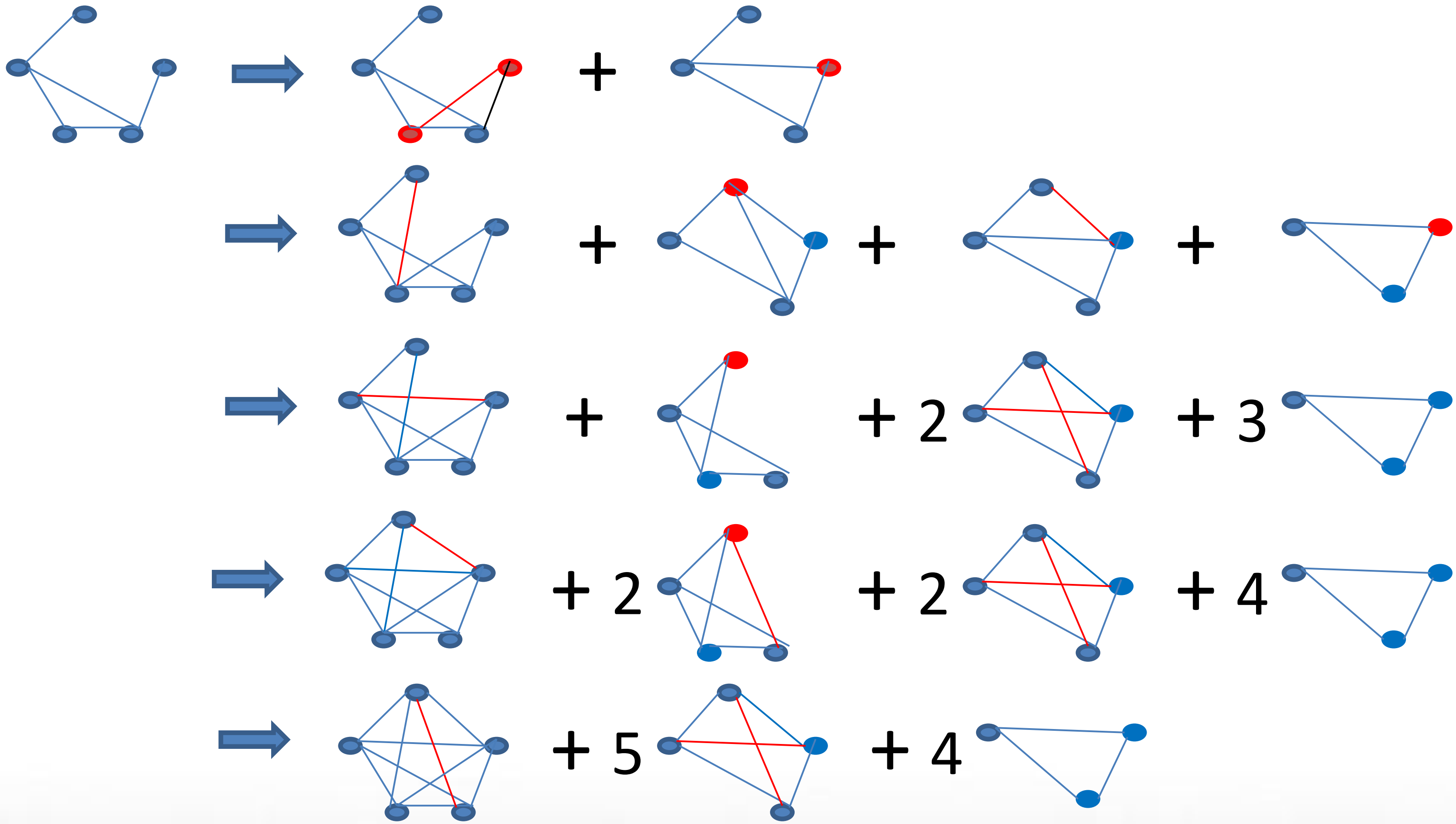
例12.4

- 有n门课程要期末考试，每个学生每天只能参加一门课程的考试，至少需要几天才能考完？在最少天数下最多有几种安排方案？
- 解：以课程为顶点，如果有同一个学生同时选两门课程，则用边连接这两门课程，得到图G.

最少考试天数= $\chi(G)$；方案数=$f(G,\chi(G))$。

例12.4(续)

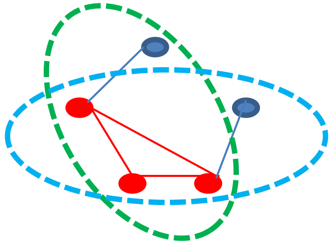
G= 



$f(G,k) = k(k-1)^3(k-2) = k^5 - 5k^4 + 9k^3 - 7k^2 + 2k.$

$\chi(G) = 3$, $f(G,3) = 24$.   #

定理12.10



- 设V_1是G的点割集，且$G[V_1]$是G的完全子图$K_{|V1|}$，若$G-V_1$有p个连通分支$G_1, G_2,\ldots, G_p$（$p\geq 2$），

  且$H_i=G[V_1\cup V(G_i)]$，则 $f(G,k)=\frac{\prod_{i=1}^{p} f(H_i,k)}{f(G[V_1],k)^{p-1}}$.

证: 对$G[V_1]$的每种k着色, H_i有$f(H_i,k)/f(G[V_1],k)$种k着色,

$$f(G,k)=f(G[V_1],k)\prod_{i=1}^{p}\frac{f(H_i,k)}{f(G[V_1],k)}=\frac{\prod_{i=1}^{p} f(H_i,k)}{f(G[V_1],k)^{p-1}}.\quad \#$$

例: $f(G,k) = f(K_3,k)(k-1)^2=k(k-1)^3(k-2)$.

小结

- 点色数$\chi(G)$
- $\chi(G)$上界 $\chi \le \Delta+1$
- (Brooks定理) 连通非完全(n≥3)非奇圈 $\chi \le \Delta$
- 色多项式 f(G,k)
- 色多项式的计算（递推公式）