- 初分布μ; 转移概率$(p_{ij})_{i,j\in S}$.
  $P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \cdots, X_n = i_n) = \mu_{i_0} p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{n-1} i_n}$.
- 不变分布: $\sum_i \pi_i p_{ij} = \pi_j, \forall j$.
  细致平衡: $\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji}, \forall i, j$.
- 常返: $P_i(\exists n \geqslant 1 \text{ 使得} X_n = i) = 1$.
  $P_i(\text{回访无穷次}) = 1$.
  $P_i(\exists n \text{ 使得} X_n = j) = 1, \forall i, j$.
- 击中概率: 方程, 边界条件, 求解.
- 常返$\Leftrightarrow G_{ii} = \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$.
  $\mathbb{Z}^1$, $\mathbb{Z}^2$ 常返, $\mathbb{Z}^d$, $d \geqslant 3$ 非常返.

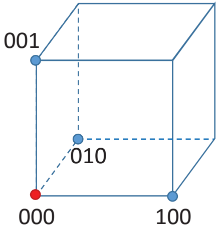
常返: $P_i(\sigma_i < \infty) = 1$, 其中$\sigma_i := \inf\{n \geqslant 1 : X_n = i\}$.

- 正常返(定义3.4, 定理3.7): $E_i\sigma_i < \infty$.
  正常返是一个互通类的性质.
  互通类常返$\Leftrightarrow$不变分布存在, $\pi_i = \frac{1}{E_i\sigma_i}$.
  $\mathbb{Z}^1$, $\mathbb{Z}^2$ 常返, 但不是正常返.
- 遍历定理(定理3.14):
  互通、正常返、$\sum_i \pi_i|f(i)| < \infty$, 则
  $$P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1} f(X_m) = \sum_i \pi_i f(i)\right) = 1.$$
  时间平均= 空间平均.

- 周期d (定义3.6, 定理3.9)(定义3.6, 定理3.9):
  $d := \{n : n \geqslant 1, p_{ii}^{n} > 0\}$的最大公约数.
  常返类中状态具有相同周期.
- 非周期: $d = 1$.
  $\Rightarrow \forall i, j, \exists N_{ij}$ 使得$p_{ij}^{(n)} > 0, \forall n \geqslant N_{ij}$.
  反例: $1 \rightleftharpoons 2$. $\pi_1 = \pi_2 = \frac{1}{2}$, 但$p_{11}^{(2n)} = 1$, $p_{12}^{(2n)} = 0$.
- 强遍历定理: 互通、正常返、非周期, 则
  $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j$, (即, $P_i(X_n = j) \to \pi_j$).
- 周期情形: $\mathbf{P}_\varepsilon = \varepsilon\mathbf{I} + (1-\varepsilon)\mathbf{P}$ (非周期化),
  $\pi\mathbf{P}_\varepsilon = \varepsilon\pi + (1-\varepsilon)\pi\mathbf{P} = \pi$ （非周期化后不变分布不改变）.

马氏链蒙特卡洛算法(Markov Chain Monte Carlo, MCMC).

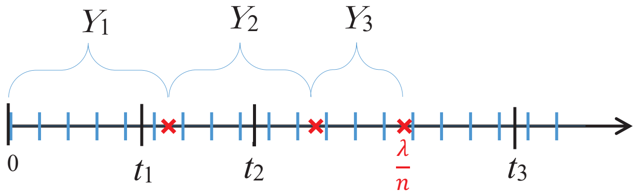
- 目标: 模拟一个分布π 或$X \sim \pi$.
- 思想: 构造以π 为不变分布的马氏链转移矩阵$\mathbf{P}$.
- 输入初值$X_0 = i_0$, 迭代产生$X_1 = i_1, \cdots, X_n = i_n$.
- 模拟π: $\pi_i \approx \frac{n_i}{n}$, $\forall i$ (遍历定理).
  模拟X: $X = i_n$ (强遍历定理).
- **例:** 超立方体$H_N = \{0,1\}^N$ 上的均匀分布.
  $\mathbf{P}$: 图上的随机游动.
  $\mathbf{P}_\varepsilon = \varepsilon \mathbf{I} + (1-\varepsilon)\mathbf{P}$.



§5.2 独立增量过程

1. 泊松过程(Poisson process, 定义2.3, 定理2.1)

$X_t = (0, t]$ 放射出的粒子数.



- 平稳增量: $X_{t+s} - X_s \sim \mathcal{P}(\lambda t)(= \lim_n B(nt, \frac{\lambda}{n}))$.
- 独立增量: $X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \cdots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ 相互独立, $\forall t_1 < t_2 < \cdots < t_n$.

状态空间S 上的连续时间马氏链：

- 每个状态i: 参数为q_i 的闹钟，“色子” p_{ij}, $j \neq i$.
- 每条有向边$\overrightarrow{ij}$: 参数为$q_{ij} = q_i p_{ij}$ 的闹钟.
- 泊松的分解(第七次课，习题一、38)，
  指数的最小值(第八次课，例4.8)
- 转移速率矩阵$\mathbf{Q}$: $(q_{ij})_{i,j\in S}$, 其中$q_{ii} = -q_i$.
- 转移概率矩阵$\mathbf{P}(t)$: $p_{ij}(t) = q_{ij}t + o(t)$, $t \to 0$, $j \neq i$.
  当$|S| < \infty$ 时，$\mathbf{P}(t) = e^{t\mathbf{Q}}$.
  一般情形，Chapman-Kolmogorov前进后退方程:

$$\frac{1}{dt}d\mathbf{P}(t) = \mathbf{Q}\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{Q}.$$

例如： Poisson 过程

- $S = \{0, 1, 2, \cdots\}$
- 每个状态i: 参数为λ 的闹钟: $Y_1, Y_2, \cdots, i.i.d. \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$.
  $p_{n,n+1} = 1, \ n \geqslant 0.$
- 转移速率矩阵$\mathbf{Q}$: $(q_{ij})_{i,j\in S}$, 其中$q_{i(i+1)} = \lambda, q_{ii} = -\lambda$.

- 互通、常返、正常返($\sigma_i = \inf\{t > Y_1 : X_t = i\}$).
- 不变分布: $\pi\mathbf{P}(t) = \pi$, $\forall t$, 即$\pi\mathbf{Q} = 0$.
- 可逆分布: $\pi_i p_{ij}(t) = \pi_j p_{ji}(t)$, 即$\pi_i q_{ij} = \pi_j q_{ji}$.
- 遍历定理: 假设互通、正常返、$\sum_i \pi_i |f(i)| < \infty$.

$$\mathcal{P}\left(\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(X_t)dt = \sum_i \pi_i f(i)\right) = 1.$$

强遍历定理:

$$\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) = \pi_j.$$

2. 布朗运动(Brownian motion, 定义2.4., 定理2.5)

离散逼近:

- δ: 微观单位时间. ε: 微观单位步长.

  宏观时间$t = n\delta$ 后的位移$B_t = \varepsilon S_n$.
- 取$\varepsilon = \sqrt{\delta} = \sqrt{\frac{t}{n}}$, 则$B_t = \sqrt{t}\frac{S_n}{\sqrt{n}} \to N(0,t)(n \to \infty)$.

布朗运动定义:

- 平稳增量: $B_{s+t} - B_s \sim N(0,t)$.
- 独立增量.
- B_t 关于t 连续.

布朗运动的性质:

- B_t 关于t 不可导. $B_{t+\Delta t} - B_t = O(\sqrt{\Delta t})$.