# 22.5 指数生成函数

定义 设$\{a_n\}$为序列，称

$$G_e(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{x^n}{n!}$$

为$\{a_n\}$的指数生成函数。

例1 给定正整数$m$, $a_n=P(m,n)$, $\{a_n\}$的指数生成函数为

$$G_e(x)=\sum_{n=0}^{\infty}P(m,n)\frac{x^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{m!}{n!\,(m-n)!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{m}{n}x^n=(1+x)^m$$

例2 $b_n=1$, 则$\{b_n\}$的指数生成函数为

$$G_e(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x$$

# 指数生成函数的性质

设数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$的指数生成函数分别为$A_e(x)$和$B_e(x)$, 则

$$A_e(x)\cdot B_e(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\frac{x^n}{n!},\ \text{其中}c_n=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}a_kb_{n-k}$$

证： $A_e(x)\cdot B_e(x)=(\sum_{k=0}^{\infty}a_k\frac{x^k}{k!})\cdot(\sum_{l=0}^{\infty}b_l\frac{x^l}{l!})$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{k!}\cdot\frac{b_{n-k}}{(n-k)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{k!}\cdot\frac{n!b_{n-k}}{(n-k)!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_kb_{n-k}=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\frac{x^n}{n!}$$

# 应用-多重集排列计数

定理：设$S=\{n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2, \ldots, n_k\cdot a_k\}$为多重集，则$S$的$r$排列数$\{a_r\}$的指数生成函数为

$$G_e(x) = f_{n_1}(x)f_{n_2}(x)\ldots f_{n_k}(x)$$

$$f_{n_i}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n_i}}{n_i!}, \qquad i = 1, 2, \ldots, k$$

**Known:**

(1) 全排列$r=n$，$n_1+n_2+\ldots+n_k=n$时，$N = \dfrac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$

(2) 若$r \le n_i$时，每个位置都有$k$ 种选法，得$k^r$

# 证明

考察$f_{n_1}(x)f_{n_2}(x)\cdots f_{n_k}(x)$展开式中$x^r$的项，

$$\frac{x^{m_1}}{m_1!}\frac{x^{m_2}}{m_2!}\cdots\frac{x^{m_k}}{m_k!},$$

其中$m_1+m_2+\cdots+m_k=r$, $0\le m_i\le n_i$, $i=1,2,\ldots,k$　　(*)

即 $\frac{x^{m_1+m_2+\cdots+m_k}}{m_1!m_2!\cdots m_k!}=\frac{x^r}{r!}\frac{r!}{m_1!m_2!\cdots m_k!}$, $a^r=\sum\frac{r!}{m_1!m_2!\cdots m_k!}$

其中求和是对满足方程(*)的一切非负整数解来求。

一个非负整数解对应了$\{m_1\cdot a_1, m_2\cdot a_2, \ldots, m_k\cdot a_k\}$，即$S$的$r$组合，而该组合的全排列数是$\frac{r!}{m_1!m_2!\ldots m_k!}$，因此$a_r$代表了$S$的$r$排列数。

设 $S=\{ n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2, \dots , n_k\cdot a_k \}$为多重集，则 $S$ 的 $r$ 排列数$\{ a_r \}$的指数生成函数为

$$G_e(x)=f_{n_1}(x)f_{n_2}(x)\dots f_{n_k}(x)$$

$$f_{n_i}(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^{n_i}}{n_i!} \quad i=1,2,\dots,k$$

# 实例

**例** $S=\{1\ a_1, 1\ a_2,\dots, 1\ a_n\}$，求$r$-排列数。

**解：** 设排列数为$\{a_r\}$, 有$f_{ni}(x)=1+x$，则

$$G_e(x)=(1+x)^n=\sum_{r=0}^{n}C(n,r)x^r$$

$$=\sum_{r=0}^{n}\frac{n!}{r!\,(n-r)!}x^r$$

$$=\sum_{r=0}^{n}\frac{n!}{(n-r)!}\frac{x^r}{r!}$$

所以$a_r=n!/(n-r)!=P(n,r)$。

# 实例(续)

设 $S=\{n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2, \ldots, n_k\cdot a_k\}$为多重集，则 $S$ 的 $r$ 排列数$\{a_r\}$的指数生成函数为

$$G_e(x)=f_{n_1}(x)f_{n_2}(x)\ldots f_{n_k}(x)$$

$$f_{n_i}(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^{n_i}}{n_i!} \quad i=1,2,\ldots,k$$

例 $S=\{\infty\, a_1, \infty\, a_2, \ldots, \infty\, a_k\}$，求$S$的$r$-排列数。

解：设排列数为$\{a_r\}$,

$f_{ni}(x)=(1+x+x^2/2!+\cdots+x^r/r!+\cdots)$，则

$G_e(x)=(1+x+x^2/2!+\cdots+x^r/r!+\cdots)^k$

$$=(e^x)^k=e^{kx}$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(kx)^r}{r!}$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}k^r\frac{x^r}{r!}$$

所以$a_r=k^r$.

# 实例

设 $S=\{n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2, \ldots, n_k\cdot a_k\}$为多重集，则 $S$ 的 $r$ 排列数$\{a_r\}$的指数生成函数为

$$G_e(x)=f_{n_1}(x)f_{n_2}(x)\ldots f_{n_k}(x)$$

$$f_{n_i}(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^{n_i}}{n_i!} \quad i=1,2,\ldots,k$$

带限制条件

$x_1+x_2+\ldots+x_k=r,\ l_i\le x_i\le n_i$

生成函数

$$G(y)=(y^{l_1}+y^{l_1+1}+\ldots+y^{n_1})(y^{l_2}+y^{l_2+1}+\ldots+y^{n_2})\ldots(y^{l_k}+y^{l_k+1}+\ldots+y^{n_k})$$

带系数

$p_1x_1+p_2x_2+\ldots+p_kx_k=r,\ x_i\in N$

生成函数

$$G(y)=(1+y^{p_1}+y^{2p_1}+\ldots)(1+y^{p_2}+y^{2p_2}+\ldots)\ldots(1+y^{p_k}+y^{2p_k}+\ldots)$$

**例3** 由1, 2, 3, 4组成的五位数中，要求1出现不超过2次，但不能不出现，2出现不超过1次，3出现可达3次，4出现偶数次。求这样的五位数个数。

**解:**

$$G_e(x)=\left(x+\frac{x^2}{2!}\right)(1+x)\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\right)\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}\right)$$

$$=x+5\frac{x^2}{2!}+18\frac{x^3}{3!}+64\frac{x^4}{4!}+215\frac{x^5}{5!}+\cdots$$

$$N=215$$

# 实例(续)

**例 4** 红、白、兰涂色$1\times n$的方格，要求偶数个为白色，问有多少方案?

**解：** 设方案数为$a_n$，则

$$G_e(x)=\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots\right)^2$$

$$=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})e^{2x}=\frac{1}{2}e^{3x}+\frac{1}{2}e^x$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}3^n\frac{x^n}{n!}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3^n+1}{2}\right)\frac{x^n}{n!}$$

得 $a_n=\frac{3^n+1}{2}$

# 实例(续)

$$a_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} 2^{n-2k}$$

**例4 (另解)** 红、白、兰涂色 $1 \times n$的方格，要求偶数个为白色，问有多少方案?

**解：** 设有方案数$h_n$，则$h_1 = 2$。

若最后一个方格涂成红色或蓝色，则有 $h_{n-1}$种 方案。

若最后一个方格涂成白色，则有$3^{n-1} - h_{n-1}$种方案。

$$h_n = 2h_{n-1} + \left(3^{n-1} - h_{n-1}\right)$$

$$= h_{n-1} + 3^{n-1} \ (n \geq 2)$$

$$h_n = \frac{3^n + 1}{2}$$

# 一些指数型生成函数

$$e^x = \sum_{n\ge 0} \frac{x^n}{n!}$$

$$\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \sum_{n\ge 0} \frac{1+(-1)^n}{2} \frac{x^n}{n!}$$

$$xe^x = \sum_{n\ge 1} n \frac{x^n}{n!}$$

$$e^{cx} = \sum_{n\ge 0} c^n \frac{x^n}{n!}$$

$$\frac{1}{2} x^2 e^x = \sum_{n\ge 2} C_2^n \frac{x^n}{n!}$$

$$\frac{e^x - 1}{x} = \sum_{n\ge 0} \frac{1}{n+1} \frac{x^n}{n!}$$

$$\frac{1}{m!} x^m e^x = \sum_{n\ge m} C_m^n \frac{x^n}{n!}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n\ge 0} n! \frac{x^n}{n!}$$

# 指数型生成函数的运算

$$A(x)=\sum_{n\geq 0}a_n\frac{x^n}{n!}$$

$$B(x)=\sum_{n\geq 0}b_n\frac{x^n}{n!}$$

$$\int_0^x A(t)dt=\sum_{n\geq 0}a_{n-1}\frac{x^n}{n!}$$

$$A'(x)=\sum_{n\geq 0}a_{n+1}\frac{x^n}{n!}$$

$$xA(x)=\sum_{n\geq 0}na_{n-1}\frac{x^n}{n!}$$

$$\frac{A(x)-a_0}{x}=\sum_{n\geq 1}\frac{a_{n+1}}{n+1}\frac{x^n}{n!}$$

$$A(x)+B(x)=\sum_{n\geq 0}(a_n+b_n)\frac{x^n}{n!}$$

$$A'(x)-A(x)=\sum_{n\geq 0}(a_{n+1}-a_n)\frac{x^n}{n!}$$

$$A(x)B(x)=\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{0\leq k\leq n}C_k^n a_k b_{n-k}\right)\frac{x^n}{n!}$$

$$e^xA(x)=\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{0\leq k\leq n}C_k^n a_k\right)\frac{x^n}{n!}$$

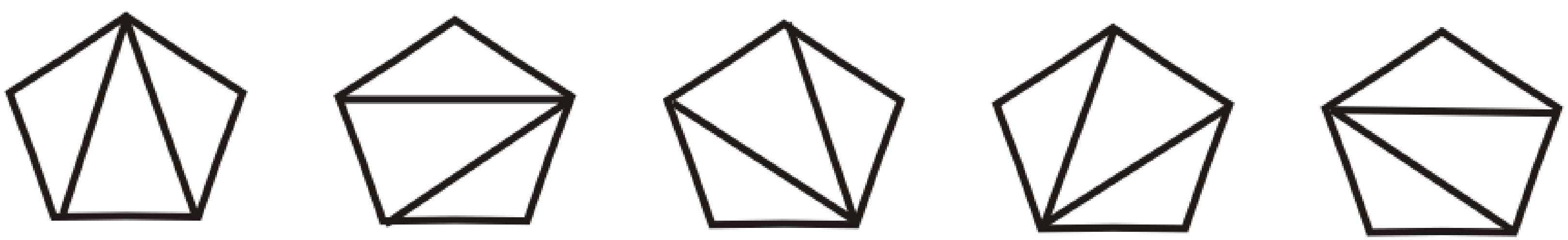
# 22.6 高级计数

- 高级计数
  - Catalan数
  - 第一类Stirling数
  - 第二类Stirling数
- 讨论要点
  - 定义
  - 递推方程
  - 恒等式
  - 对应的组合问题
  - 生成函数

# Catalan数定义

定义 一个凸$n$+1边形，通过不相交于它内部的对角线将其划分成三角形的方法数，记作$h_n$，称为第$n$-1个Catalan数.

前几个：$h_2$=1, $h_3$=2, $h_4$=5, $h_5$=14, $h_6$=42, $h_7$=132, $h_8$=429, $h_9$=1430, $h_{10}$=4862.



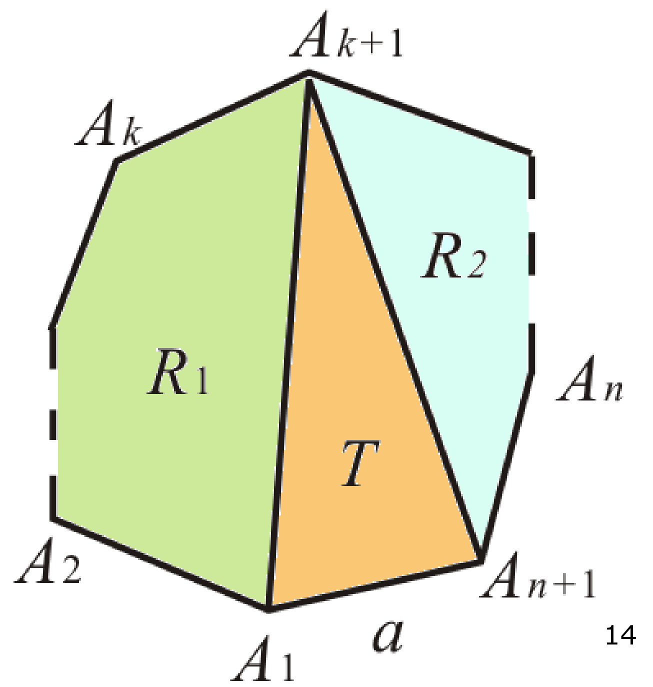
# 递推方程

考虑$n$+1条边的多边形，端点$A_1$, $A_{n+1}$的边记为$a$, 以$A_{k+1}A_1$, $k$=1, 2,…, $n$-1, 为边，$A_{n+1}A_{k+1}$为另一边，构成三角形$T$, $T$将多边形划分成$R_1$和$R_2$两个部分，分别为$k$+1边形和$n$-$k$+1边形.

$$h_n = \sum_{k=1}^{n-1} h_k h_{n-k}, \qquad n \geq 2$$

$$h_1 = 1$$

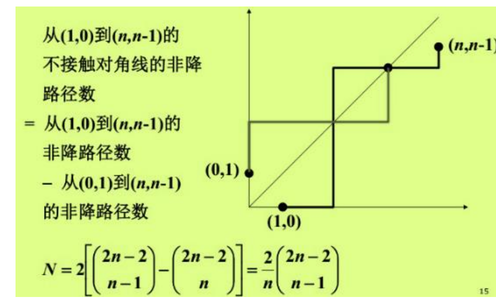
$$h_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$$



# 生成函数及对应的组合问题

生成函数：$H(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}$

Ch. 21.3-4




对应的组合问题：

1) 从(0,0)到($n$,$n$)的除了端点以外不接触对角线的非降路径数$\frac{2}{n}\binom{2n-2}{n-1}$

2) $a_1 \times\ a_2 \times \cdots \times a_n$, 不改变因子顺序，加括号的方法数$h_n$

3) $2n$个点均匀分布在圆周上，用$n$条不相交的弦配对的方法数是第$n$个Catalan数$\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$（p.396: Ex. 30）

# 应用—栈的输出计数

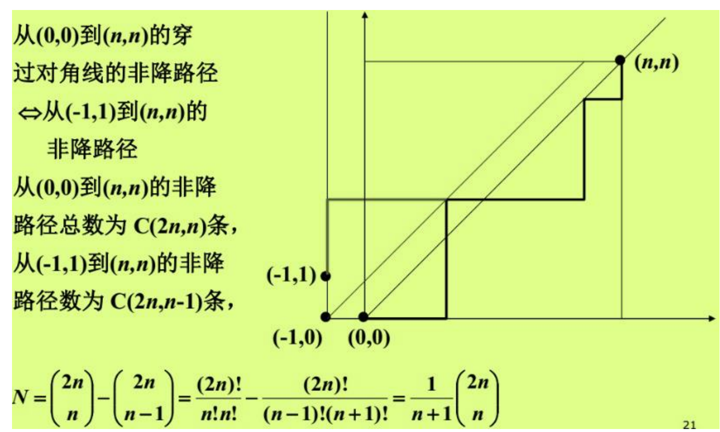
1, 2, … , $n$放入堆栈后的不同的输出个数

分析：

1. 1进栈；
2. $k$个数（$k = 0, 1, \dots, n-1$）进栈并且出栈；
3. 1出栈；
4. 处理$k+2, \dots, n$的进栈问题；

   步2：子问题规模$k$

   步4：子问题规模$n-k-1$




$$\begin{cases} T(n) = \sum_{k=0}^{n-1} T(k)T(n-1-k) \\ T(1) = 1 \end{cases}$$

# 栈的输出个数（续）

$$\begin{cases} T(n) = \sum_{k=0}^{n-1} T(k)T(n-1-k) \\ T(0)=1,\ T(1)=1 \end{cases} \qquad G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} T(n)x^n,$$

$$G^2(x) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} T(k)x^k\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} T(l)x^l\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}\left(\sum_{k=0}^{n-1} T(k)T(n-1-k)\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} T(n)x^{n-1} = \frac{G(x)-1}{x}$$

$$xG^2(x) - G(x) + 1 = 0 \Rightarrow 2xG(x) = 1 \pm \sqrt{1-4x},$$

由于$x \to 0, G(0) \to 0,\ 2xG(x) = 1 - \sqrt{1-4x}$

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} x^n$$

# 应用(进栈出栈，括号对，围绕圆桌握手，买票)

例 $n$对括号有多少种匹配方式?

解：$n$对括号相当于有$2n$个符号，$n$个左括号、$n$个右括号，设问题的解为$f(n)$。第0个符号肯定为左括号，与之匹配的右括号必须为第$2i+1$个符号。如果是第$2i$个字符，那么第0个字符与第$2i$个字符间包含奇数个字符，而奇数个字符无法构成匹配。简单分析知，$f(n)$可以转化为如下的递推式 $f(n)=f(0)f(n-1)+f(1)f(n-2)+\cdots+f(n-2)f(1)+f(n-1)f(0)$，其中，$f(0)f(n-1)$表示第0个字符与第1个字符匹配，剩余字符分成两部分，一部分为0个字符，另一部分为$2(n-1)$个字符，然后对这两部分求解；$f(1)f(n-2)$表示第0个字符与第3个字符匹配，剩余字符分成两部分，一部分为2个字符，另一部分为$2(n-2)$个字符；依次类推。

$f(1)=1, f(2)=2, f(3)=5$，结合递归式，易知$f(n)=h_{n+1}$.

# 应用

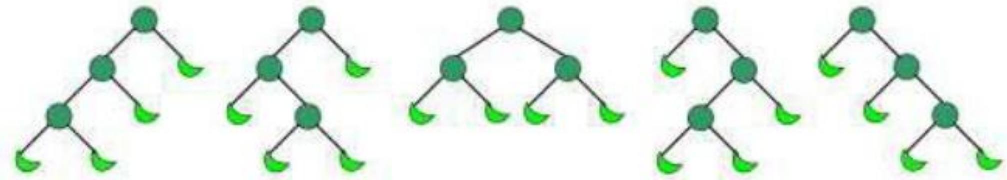
**例** 16个人按顺序去买烧饼，其中8个人每人身上只有一张5块钱，另外8个人每人身上只有一张10块钱。烧饼5块一个，开始时烧饼店老板身上没有钱。16个顾客互相不通气，每人只买一个。问这16个人共有多少种排列方法能避免找不开钱的情况出现。

**解：** $h_{8+1} = 1430$，所以总数$= 1430 * 8! * 8!$

**例** 在图书馆一共6个人在排队，3个还《面试宝典》一书，3个在借《面试宝典》一书，图书馆此时没有了面试宝典了，求他们排队的总数？

**解：** $h_{3+1} = 5$，所以总数为$5 * 3! * 3! = 180.$

# 应用



**例 $n$个节点构成的二叉树，共有多少种情形？**

**解：** $n=1$时，只有1个根节点，则只能组成1种二叉树，令$n$个节点可组成的二叉树数量为$h(n)$，则$h(1)=1$.

$n=2$时，1个根节点固定，还有$2-1$个节点。这一个节点可分成$(1,0),(0,1)$两组，即$h(2)=h(0)h(1)+h(1)h(0)=2$

$n=3$时，1个根节点固定，还有2个节点。这2个节点可分成$(2,0),(1,1),(0,2)$ 3组，即$h(3)=h(0)h(2)+h(1)h(1)+h(2)h(0)=5$。

以此类推，当$n\geq 2$时，可组成的二叉树数量为$h(n)=h(0)*h(n-1)+h(1)*h(n-2)+\cdots+h(n-1)*h(0)$种，即符合Catalan数的定义，可直接利用通项公式得出结果。

# 第一类Stirling数

定义 多项式$x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)$的展开式为

$$S_n x^n - S_{n-1}x^{n-1} + S_{n-2}x^{n-2} - \cdots + (-1)^{n-1}S_1 x$$

将$x^r$的系数的绝对值$S_r$记作$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}$, 称为第一类Stirling数。

$n$个元素的集合分成$r$个环排列的方法数

实例

$n=2,\qquad x(x-1)=x^2-x$

$n=3,\qquad x(x-1)(x-2)=x^3-3x^2+2x$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}=0, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}=1, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}=1$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}=0, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}=2, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}=3, \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}=1$$

# 递推方程

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = (n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ r-1 \end{bmatrix} \quad n > r \geq 1; \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = 0, \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = (n-1)!$$

证：

$$x(x-1)\ldots(x-n+2) = \begin{bmatrix} n-1 \\ n-1 \end{bmatrix} x^{n-1} - \begin{bmatrix} n-1 \\ n-2 \end{bmatrix} x^{n-2} + \cdots$$

$$x(x-1)\ldots(x-n+2)(x-n+1)$$

$$= \left( \begin{bmatrix} n-1 \\ n-1 \end{bmatrix} x^{n-1} - \begin{bmatrix} n-1 \\ n-2 \end{bmatrix} x^{n-2} + \cdots \right)(x-n+1)$$

其中$x^r$系数的绝对值$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = (n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ r-1 \end{bmatrix}$

# 递推方程

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = (n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ r-1 \end{bmatrix} \quad n > r \geq 1; \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = 0, \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = (n-1)!$$

递推关系的说明：考虑第$n$个物品，$n$可以单独构成一个环排列，此时前$n-1$个物品构成$r-1$个环排列，方法数为$\begin{bmatrix} n-1 \\ r-1 \end{bmatrix}$；也可以前$n-1$个物品构成$r$个环排列，第$n$个物品放入任意一个中，这样有$(n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ r \end{bmatrix}$种方法。

# 递推三角形

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = (n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ r-1 \end{bmatrix}$$

| | $r=1$ | $r=2$ | $r=3$ | $r=4$ | $r=5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $n=1$ | 1 | | | | |
| $n=2$ | 1 | 1 | | | |
| $n=3$ | 2 | 3 | 1 | | |
| $n=4$ | 6 | 11 | 6 | 1 | |
| $n=5$ | 24 | 50 | 35 | 10 | 1 |

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = (5-1)\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

# 生成函数及恒等式

生成函数 $x(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1)$

恒等式

$$(1)\ \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1$$

$$(2)\ \begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$(3)\ \sum_{r=1}^{n} \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = n!$$

证：(1) $x$的$n$次方系数为1.

(2) $x$的$n$-1次方系数为

$$1+2+\cdots+n-1 = n(n-1)/2$$

# (3)式的证明

(3) $\sum_{r=1}^{n}\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = n!$

$n$元对称群$S_n$，在表示式中具有$r$个不交轮换的置换个数是$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}$

证明：设这样的置换为$\left\langle {n \atop r} \right\rangle$个，得到这种置换的方法有两种：

从$S_{n-1}$的含$r$-1个轮换的置换中加入$(n)$，方法有$\left\langle {n-1 \atop r-1} \right\rangle$种；

从$S_{n-1}$含有$r$个轮换的置换中加入$n$, 方法有$(n-1)\left\langle {n-1 \atop r} \right\rangle$种.

$$\left\langle {n \atop r} \right\rangle = (n-1)\left\langle {n-1 \atop r} \right\rangle + \left\langle {n-1 \atop r-1} \right\rangle$$

$$\left\langle {n \atop 0} \right\rangle = 0, \qquad \left\langle {n \atop 1} \right\rangle = (n-1)!$$

证法(II)：生成函数$x(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1)$中$x$取1，正好是系数之和。

# 第二类Stirling数

定义：$n$个不同的球恰好放到$r$个相同的盒子里的方法数称为第二类Stirling数，记作$\left\{ {n \atop r} \right\}$.

实例：$\left\{ {4 \atop 2} \right\} = 7$

a, b, c | d； a, c, d | b； a, b, d | c； b, c, d | a；

a, b | c, d； a, c | b, d； a, d | b, c

# 递推方程

$$\begin{Bmatrix} n \\ r \end{Bmatrix} = r\begin{Bmatrix} n-1 \\ r \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} n-1 \\ r-1 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} n \\ 0 \end{Bmatrix} = 0, \begin{Bmatrix} n \\ 1 \end{Bmatrix} = 1$$

**证明：** 取球$a_1$，

$a_1$单独放一个盒子，$\begin{Bmatrix} n-1 \\ r-1 \end{Bmatrix}$

$a_1$不单独放一个盒子，$r\begin{Bmatrix} n-1 \\ r \end{Bmatrix}$

先放$n$-1个球到$r$个盒子里，插入$a_1$有$r$种方法。

$r$=1, $r$=2, $r$=3, $r$=4, $r$=5

$n$=1　1

$n$=2　1　1

$n$=3　1　3　1

$n$=4　1　7　6　1

$n$=5　1　15　25　10　1

$$\begin{Bmatrix} 5 \\ 3 \end{Bmatrix} = 3\begin{Bmatrix} 4 \\ 3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 4 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

# 恒等式

$\sum\binom{n}{n_1 n_2 \cdots n_m} = m^n$，对满足 $n_1+n_2+\cdots+n_m = n$ 的非负整数解求和。（见多项式系数）

(1) $\left\{ {n \atop 2} \right\} = 2^{n-1} - 1$

(2) $\left\{ {n \atop n-1} \right\} = \binom{n}{2}$

(3) $\left\{ {n \atop n} \right\} = 1$

(4) $\sum\binom{n}{n_1 n_2 \cdots n_m} = m!\left\{ {n \atop m} \right\}$，对满足$n_1+n_2+\cdots+n_m = n$的正整数解求和

(5) $\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}\left\{ {n \atop k} \right\}k! = m^n$

(6) $\left\{ {n+1 \atop r} \right\} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left\{ {k \atop r-1} \right\}$

# 恒等式证明

证明：

(1) $\left\{ {n \atop 2} \right\} = 2^{n-1} - 1$

$a_1$先放在一个盒子里，剩下的$n$-1个球每个有2种选择，

但是全落入$a_1$的盒子的方法不符合要求，减去。

(2) $\left\{ {n \atop n-1} \right\} = \binom{n}{2}$

$n$个球放到$n$-1个盒子，必有一个盒子含2个球，

其余每个盒子1个球。选择两个球有$C(n, 2)$种方法。

# 恒等式证明（续）

(4) $\sum \binom{n}{n_1 n_2 \ldots n_m} = m! \left\{ {n \atop m} \right\}$,

对满足$n_1 + n_2 + \cdots + n_m = n$的正整数解求和；对应$n$个不同的球恰好放到$m$个不同盒子的方法数（无空盒）

(5) $\sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} \left\{ {n \atop k} \right\} k! = m^n$

按照含球的盒子数分类，对应了允许存在空盒的方法数

(6) $\left\{ {n+1 \atop r} \right\} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left\{ {k \atop r-1} \right\}$

至多$n$个不同的球放到$r$-1个相同的盒子不存在空盒的方法

按照球数分类

# 生成函数

(4) $\sum \binom{n}{n_1\ n_2 \ldots n_m} = m!\left\{ {n \atop m} \right\}$,

对满足 $n_1 + n_2 + \ldots + n_m = n$ 的正整数解求和

考虑第二类Stirling数的指数生成函数

$$(e^x - 1)^m = \left(x + \frac{x^2}{2!} + \cdots\right)^m = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} \quad (*)$$

其中$a_n = \sum \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_m!}$

求和是对一切满足方程$n_1+n_2+\cdots+n_m=n$的正整数解进行。

根据第二类Stirling数的性质有

$$a_n = \begin{cases} 0, & n < m \\ \sum \frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_m!} = \sum \binom{n}{n_1 n_2 \ldots n_m} = m!\left\{ {n \atop m} \right\} & n \geq m \end{cases}$$

# 生成函数（续）

将这个结果代入(*)式得

相差m!倍

$$(e^x-1)^m=\sum_{n=m}^{\infty} m!\left\{ n \atop m \right\}\frac{x^n}{n!}.$$

可以近似地将$(e^x-1)^m$看成$\left\{ n \atop m \right\}$的指数生成函数，用二项式定理将$(e^x-1)^m$展开得

$$(e^x-1)^m=\binom{m}{m}e^{mx}-\binom{m}{m-1}e^{(m-1)x}+\binom{m}{m-2}e^{(m-2)x}-\cdots+(-1)^m\binom{m}{0}\cdot 1$$

$$=\binom{m}{m}\left(1+\frac{m}{1!}x+\frac{m^2}{2!}x^2+\cdots\right)-\binom{m}{m-1}\left(1+\frac{(m-1)}{1!}x+\right.$$

# 生成函数（续）

比较上式两边$\frac{x^n}{n!}$的系数得

$$m!\left\{ {n \atop m} \right\} = \binom{m}{m} m^n - \binom{m}{m-1}(m-1)^n + \binom{m}{m-2}(m-2)^n - \cdots + (-1)^m \binom{m}{1} \cdot 1^n$$

，从而得到关于$\left\{ {n \atop m} \right\}$的恒等式

$$\left\{ {n \atop m} \right\} = \frac{1}{m!}\left[\binom{m}{m} m^n - \binom{m}{m-1}(m-1)^n + \binom{m}{m-2}(m-2)^n - \right.$$

# 两类Stirling数间的关系

$$(x)_n := x(x-1)\cdots(x-n+1)$$

$$s(n,k) := (-1)^{n-k}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$$

定理 (1) $x(x+1)\cdots(x+n-1) = \sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}x^k$

(2) $(x)_n = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)x^k$

定理 $x^n = \sum_{k=0}^{n}\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}(x)_k$

# 两类Stirling数间的关系（续）

$$s(n,k) := (-1)^{n-k}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$$

定理 $\sum_{k=0} s(n,k)\begin{Bmatrix} k \\ m \end{Bmatrix} = \delta_{n,m} = \sum_{k=0}\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} s(k,m)$

定理 $\sum_{k=0}^{n}\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} = B_n$，这里 $B_n$是第$n$个 Bell数，即一个$n$元集合的分划数。

# 对应的组合问题—放球

**(1) $n$个球放到$m$个盒子里的方法数.**

| 球标号 | 盒标号 | 允空盒 | 放球方法数 | 对应的组合问题 |
|---|---|---|---|---|
| 否 | 否 | 否 | $P_m(n)-P_{m\text{-}1}(n)$ | 将$n$恰好无序拆分成$m$部分 |
| | 否 | 是 | $P_m(n)$ | 将$n$无序拆分成$t$个部分($t\le m$) |
| | 是 | 否 | $C(n-1,m-1)$ | $x_1+x_2+\ldots+x_m=n$的正整数解 |
| | 是 | 是 | $C(n+m-1,n)$ | $x_1+x_2+\ldots+x_m=n$的非负整数解 |

See p. 383
See p. 383 Thm. 22.13

# 对应的组合问题—放球

| 球标号 | 盒标号 | 允空盒 | 放球方法数 | 对应的组合问题 |
|---|---|---|---|---|
| 是 | 否 | 否 | $\left\{ {n \atop m} \right\}$ | 第二类Stirling数 |
| | 否 | 是 | $\sum_{k=1}^{m} \left\{ {n \atop k} \right\}$ | 第二类Sirling数性质 |
| | 是 | 否 | $m! \left\{ {n \atop m} \right\}$ | 第二类Stirling数性质 |
| | 是 | 是 | $m^n = \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} \left\{ {n \atop k} \right\} k!$ | 乘法法则 |

# $n$个球放入$m$个盒子—解释

| 球（有无区别） | 盒子（有无区别） | 是否允许为空 | 原因解释 |
|---|---|---|---|
| 无 | 无 | 允许 | 整数拆分问题<br>$(1+x+x^2+x^3+\ldots)(1+x^2+x^4+x^6+\ldots)\ldots(1+x^m+x^{2m}+x^{3m}+\ldots)$即<br>$G(x)=\frac{1}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^m)}$中$x^n$项的系数。 |
| 无 | 无 | 不允许 | 先每一个盒子放一个球然后剩余 n-m，相当于整数 n-m 用不超过 m 的数来拆分的拆分数，而这又等价为将 n-m 拆分成最大数不超过 m 的拆分数。<br>$G(x)=\frac{x^m}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^m)}$中$x^n$的系数，即$G(x)=\frac{1}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^m)}$中$x^{n-m}$项的系数。 |

| 球（有无区别） | 盒子（有无区别） | 是否允许为空 | 原因解释 |
| --- | --- | --- | --- |
| 无 | 有 | 允许 | ①对每个盒子用 1 代表不放球，用 x 代表放一个球，用 $x^2$ 代表放两个球，….。母函数可构造为：$1+x+x^2+\ldots$，所有盒子情况相同，结果为 $\frac{1}{(1-x)^m}$ 中 $x^n$ 项的系数 $C_{m+n-1}^{n}$。<br>②可以看做 n 个球选 m 个盒子，盒子可以重复选，也就是有重复的组合问题，$C_{m+n-1}^{n}$ |
| 无 | 有 | 不允许 | ①对每个盒子用用 1 代表不放球，用 x 代表放一个球，用 x2 代表放两个球，….。母函数可构造为：$x+x^2+\ldots$，所有盒子情况相同，结果为 $\frac{x^m}{(1-x)^m}$ 中 $x^n$ 项的系数。即 $\frac{1}{(1-x)^m}$ 中 $x^{n-m}$ 项的系数 $C_{m+(n-m)-1}^{n-m}=C_{n-1}^{m-1}$<br>②先取 m 个球每盒一个，余下的 n-m 进行有重复的组合，C(m+(n-m)-1,n-m)=C(n-1,n-m)=C(n-1,m-1) |

| 球（有无区别） | 盒子（有无区别） | 是否允许为空 | 原因解释 |
|---|---|---|---|
| 有区别 | 有区别 | 允许 | n 个不同的球放进 m 个有区别的盒子，允许空盒的放法与 m 个不同的元素，取 n 个作有重复的排列的方法一一对应。（将 n 个球按顺序排好，然后下面对应 m 个盒子的编号，盒子编号允许重复，盒子编号相同意味着在同一个盒子中，相当于 m 个字符取 n 个做有重复的排列。）即是一个有重复的排列问题，应用指数型母函数：<br>$G_e(x)=(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots)^m=e^{mx}$<br>中 $\frac{x^n}{n!}$ 的系数 $m^n$。 |
| 有区别 | 有区别 | 不允许 | n 个不同的球放进 m 个有区别的盒子，允许空盒的放法与 m 个不同的元素，取 n 个作有重复的排列的方法一一对应。即是一个有重复的排列问题，应用指数型母函数：<br>$G_e(x)=(x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots)^m=(e^x-1)^m$<br>利用二项式定理张开可得：<br>$a_n=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k C(m,k)(m-k)^n$ |

| 球（有无区别） | 盒子（有无区别） | 是否允许为空 | 原因解释 |
|---|---|---|---|
| 有区别 | 无区别 | 不允许 | 第二类司特林数的定义，$S(n,m)$ n个有标志的球，放进有区别的m个盒子中，无一空盒，其方案数为$m!S(n,m)$，其中1≤m≤n。这相当于将这种情况的m个盒子进行了一次全排列，由此有：$S(n,m)=\frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{m}(-1)^k C(m,k)(m-k)^n$ |
| 有区别 | 无区别 | 允许 | 这可以分为：空1个盒子，空2个盒子，…，空m-1个盒子，对应有$S(n,m-1),S(n,m-2),\ldots,S(n,1)$。考虑到m和n大小关系则有：$S(n,1)+S(n,2)+\ldots+S(n,m),n\geq m;$ $S(n,1)+S(n,2)+\ldots+S(n,n),n\leq m.$ |

# 对应组合问题—函数与关系计数

(2) 函数计数：$|A| = n, |B| = m$，计数结果：

$A$到$B$的关系：$2^{mn}$

$A$到$B$的函数：$m^n$

$A$到$B$的单射函数：$P(m,n) = m(m-1)\cdots(m-n+1)$

$A$到$B$的满射函数：$m!\left\{ {n \atop m} \right\}$

$A$到$B$的双射函数：$m = n, P(n,n) = n!\left\{ {n \atop m} \right\} = n!$

(3) 等价关系计数 $\sum_{m=1}^{n} \left\{ {n \atop m} \right\}$