Ch-21 基本的计数公式

21. 1 两个计数原则

加法法则 设事件 A 有 p 种产生的方式，事件 B 有 q 种产生的方式，若事件 A 与事件 B 产生的方式不重叠，则事件 $A \cup B$ 有 $p+q$ 种产生的方式。

乘法法则 设事件 A 有 p 种产生的方式，事件 B 有 q 种产生的方式，若事件 A 与事件 B 的产生是彼此独立的，则事件 $A \cap B$ 有 $p \times q$ 种产生的方式。

加法法则 设事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 分别有 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 种产生的方式，若其中任何两个事件产生的方式都不重叠，则事件 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ 的产生的方式共有 $p_1 + p_2 + \cdots + p_n$ 种。

乘法法则 设事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 分别有 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 种产生的方式，若其中任何两个事件的产生都是相互独立的，则事件 $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$ 的产生的方式共有 $p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_n$ 种。

21. 2 排列与组合

定义 21. 1 元素可以多次出现的集合称为**多重集**，元素 a_i 出现的次数叫做该元素的**重复数**，记作 n_i，$n_i = 0, 1, \cdots, \infty$，含有 k 种元素的多重集 S 可记作 $S = \{n_1 \cdot a_1, n_2 \cdot a_2, \cdots, n_k \cdot a_k\}$。

定义 21. 2 从 n 元集 S 中有序选取的 r 个元素叫做 S 的一个 **r-排列**，不同排列的总数记作 $P(n,r)$，如果 $r = n$，则称这个排列为 S 的**全排列**。

定理 21. 1 设 n, r 是正整数，且 $n \geq r$，则

$$P(n,r) = n(n-1)\cdots(n-r+1)$$

规定 $0! = 1$ 和 $P(n,0) = 1$，则有

$$P(n,r) = \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-r)!}, & n \geq r \geq 0; \\ 0, & n < r. \end{cases}$$

定理 21. 2 一个 n 元集 S 的环形 r-排列数是

$$\frac{P(n,r)}{r} = \frac{n!}{r(n-r)!}$$

如果 $r = n$，则 S 的环排列数是 $(n-1)!$

定义 21.3 从 n 元集 S 中无序选取的 r 个元素叫做 S 的一个 **r-组合**，不同组合的总数记作 $C(n,r)$。

定理 21.3 对一切正整数 $n,r,n \geq r$，有

$$C(n,r)=\frac{P(n,r)}{r!}$$

当 $r>n$ 时 $C(n,r)=0$，并记 $C(n,0)=1$，那么有

$$C(n,r)=\begin{cases}\dfrac{n!}{r!(n-r)!}, & n \geq r \geq 0, \\ 0, & n<r.\end{cases}$$

推论 设 $n,r \in \mathbb{N}$，对一切 $n \geq r$ 有

$$C(n,r)=C(n,n-r)$$

- 设 p 是素数，$p \neq 2$，证明当 $C(2p,p)$ 被 p 除时余数为 2.

  （由 k 个连续正整数乘积可被 $k!$ 整除，则 $p \mid C(p,k),\ 0<k<p$）

定义 21.4 从多重集 $S=\{n_1 \cdot a_1, n_2 \cdot a_2, \cdots, n_k \cdot a_k\}$ 中有序选取的 r 个元素叫做 S 的一个 r-排列。当 $r=n_1+n_2+\cdots+n_k$ 时也叫做 S 的一个**全排列**。

定理 21.4 设多重集 $S=\{\infty \cdot a_1, \infty \cdot a_2, \cdots, \infty \cdot a_k\}$，则 S 的 r-排列数是 k^r

定理 21.5 设多重集 $S=\{n_1 \cdot a_1, n_2 \cdot a_2, \cdots, n_k \cdot a_k\}$，且 $n=n_1+n_2+\cdots+n_k$，则 S 的排列数为

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

简记为 $\begin{pmatrix} n \\ n_1\ n_2\ \cdots\ n_k \end{pmatrix}$

定义 21.5 设 S 是多重集，S 的含有 r 个元素的子多重集就叫做 S 的 **r-组合**。

定理 21.6 设多重集 $S=\{\infty \cdot a_1, \infty \cdot a_2, \cdots, \infty \cdot a_k\}$，则 S 的 r-组合数是 $C\binom{r}{k+r-1}$

21.3 二项式定理与组合恒等式

组合数 $C(n,k)$，也记作 $\binom{n}{k}$，叫做**二项式系数**，关于 $\binom{n}{k}$，有以下结果：

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!(n-k)!}, & k \le n; \\ 0, & k \ge n, \end{cases}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \qquad n \ge k \tag{21.1}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}, \qquad n,k \in \mathbb{Z}^+ \tag{21.2}$$

$Pascal$ 公式

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}, \qquad n,k \in \mathbb{Z}^+ \tag{21.3}$$

定理 21.7 二项式定理 设 n 是正整数，对一切 x 和 y 有

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

- 设 n 是正整数，对一切 x 有
$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$
- 对任何正整数 n 有
$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n \tag{21.4}$$
- 对任何正整数 n 有
$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0 \tag{21.5}$$

常见的组合恒等式

- $$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}, \qquad n \in \mathbb{Z}^+. \tag{21.6}$$
- $$\sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}, \qquad n \in \mathbb{Z}^+. \tag{21.7}$$
- $$\binom{n}{r}\binom{r}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{r-k}, \qquad n,r,k \in \mathbb{Z}^+. \tag{21.8}$$
- $$\sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k}\binom{n}{r-k} = \binom{m+n}{r}, \qquad m,n,r \in \mathbb{N} \tag{21.9}$$
- $$\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k}\binom{n}{k} = \binom{m+n}{m}, \qquad m,n \in \mathbb{N} \tag{21.10}$$
- $$\sum_{l=0}^{n} \binom{l}{k} = \binom{n+1}{k+1}, \qquad n,k \in \mathbb{N} \tag{21.11}$$
- $$\sum_{l=0}^{k} \binom{n+l}{l} = \binom{n+k+1}{k}, \qquad n,k \in \mathbb{N} \tag{21.12}$$

非降路径问题

1. 从 $(0,0)$ 点到 (m,n) 点的**非降路径数**为 $\binom{m+n}{m}$.
2. 从 $(0,0)$ 点到 (n,n) 点的**除端点外不接触**直线 $y=x$ 的非降路径数，由对称性，等于从 $(1,0)$ 点到 $(n,n-1)$ 点的非降路径数减去从 $(0,1)$ 点到 $(n,n-1)$ 点的非降路径数的差的 2 倍，为
$$2\left[\binom{2n-2}{n-1}-\binom{2n-2}{n}\right]=\frac{2}{n}\binom{2n-2}{n-1}=\frac{1}{2n-1}\binom{2n}{n}.$$
3. 从 $(0,0)$ 点到 (n,n) 点的**不穿过**直线 $y=x$ 的非降路径数，由对称性，等于从 $(0,0)$ 点到 (n,n) 点的非降路径数减去从 $(-1,1)$ 点到 (n,n) 点的非降路径数的差的 2 倍，为
$$2\left[\binom{2n}{n}-\binom{2n}{n-1}\right]=\frac{2}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

21.4 多项式定理

定理 21.8 多项式定理 设 n 是正整数，则对一切实数 $x_1,x_2,\cdots,x_t$ 有

$$(x_1+x_2+\cdots+x_t)^n=\sum_{\substack{\text{满足 } n_1+n_2+\cdots+n_t=n \\ \text{的非负整数解}}}\binom{n}{n_1\ n_2\ \cdots\ n_t}x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_t^{n_t}$$

- $(x_1+x_2+\cdots+x_t)^n$ 中不同类项的项数为 $\binom{n+t-1}{n}$.

  （对应于方程 $n_1+n_2+\cdots+n_t=n$ 的非负整数解个数）
- $\displaystyle\sum_{\substack{\text{满足 } n_1+n_2+\cdots+n_t=n \\ \text{的非负整数解}}}\binom{n}{n_1\ n_2\ \cdots\ n_t}=t^n$
- $$\binom{n}{n_1\ n_2\ \cdots\ n_t}=\binom{n-1}{n_1-1\ n_2\ \cdots\ n_t}+\binom{n-1}{n_1\ n_2-1\ \cdots\ n_t}+\cdots+\binom{n-1}{n_1\ n_2\ \cdots\ n_t-1}$$
- 若 p 是素数，且 $\binom{p}{k_1\ k_2\ \cdots\ k_n}\neq 1$，则 $p\mid\binom{p}{k_1\ k_2\ \cdots\ k_n}$

  （由 $\binom{p}{k_1\ k_2\ \cdots\ k_n}\neq 1\Leftrightarrow\exists k_i=p$ 可得）

***Fermat* 小定理** 设 p 为素数，则 $p\mid(n^p-n)$

证明：由 $n^p=\displaystyle\sum_{\substack{\text{满足 } k_1+k_2+\cdots+k_n=p \\ \text{的非负整数解}}}\binom{p}{k_1\ k_2\ \cdots\ k_n}$，等式右边恰有 n 项值为 1，其余各项之和为 n^p-n，而由 $\binom{p}{k_1\ k_2\ \cdots\ k_n}\neq 1$，$p\mid\binom{p}{k_1\ k_2\ \cdots\ k_n}$，故 p 整除除了值为 1 的项外的每一项，则 $p\mid(n^p-n)$.