第二十二章 组合计数方法

- 22.1 递推方程的公式解法
- 22.2 递推方程的其他解法
- 22.3 生成函数的定义及其性质
- 22.4 生成函数的应用
- 22.5 指数生成函数及其应用
- 22.6 高级计数

22.1 递推方程的公式解法

- 递推方程的定义
- 递推方程的实例
- 常系数线性递推方程的求解
  - 常系数线性递推方程定义
  - 公式解法
- 递推方程在计数问题中的应用

递推方程的定义

设序列$a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$, 记为$\{a_n\}$，一个把$a_n$与某些$a_i$ ($i<n$)联系起来的等式，叫做关于序列$\{a_n\}$的递推方程。

当给定递推方程和适当的初值就唯一确定了序列。

例1 Fibonacci数列：1，1，2，3，5，8，… ，

Fibonacci数列的递推方程为：$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$,

初值：$f_0 = 1$，$f_1 = 1$

例2 阶乘计算数列：1，2，6，24，5！，…，

阶乘递推方程为：$F(n) = nF(n-1)$，初值$F(1) = 1$

递推方程的实例

例3 一个编码系统用8进制数字对信息编码，一个码是有效的当且仅当含有偶数个7. 求n位长的有效码字有多少个？

解 设所求有效码字为a_n个。

n-1位长的八进制串

$x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$

含偶数个7 a_{n-1}

$y = 7$

含奇数个7 $8^{n-1} - a_{n-1}$

则$a_n=7a_{n-1}+8^{n-1}-a_{n-1}$, 即$a_n=6a_{n-1}+8^{n-1}$, $a_1=7$ 解得$a_n=(6^n+8^n)/2$.

例4 Hanoi塔问题：$T(n) = 2T(n-1) + 1$，$T(1) = 1$，

解得$T(n) = 2^n - 1$

常系数线性齐次递推方程

定义

$$\begin{cases} H(n) - a_1 H(n-1) - a_2\, H(n-2) - \cdots - a_k H(n-k) = 0 \\ H(0) = b_0, H(1) = b_1, H(2) = b_2, \dots, H(k-1) = b_{k-1} \end{cases}$$

其中$a_1, a_2, \dots, a_k$为常数，$a_k \neq 0$，称为k阶常系数线性齐次递推方程，$b_0, b_1, \dots, b_{k-1}$为k个初值。

实例：Fibonacci数列的递推方程 $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ (√)

$F(n) = nF(n-1),\ F(1) = 1$ (×)

$a_n = 6a_{n-1} + 8^{n-1}, a_1 = 7$ (×)

$T(n) = 2\,T(n-1) + 1, T(1) = 1$ (×)

公式解法

- 特征方程、特征根
- 递推方程的解与特征根的关系
- 解的线性性质
- 无重根下通解的结构及求解实例
- 有重根下通解结构及求解实例

特征方程与特征根

$$\begin{cases} H(n) - a_1 H(n-1) - a_2 H(n-2) - \cdots - a_k H(n-k) = 0 \\ H(0) = b_0, H(1) = b_1, H(2) = b_2, \ldots, H(k-1) = b_{k-1} \end{cases}$$

称$x^k - a_1 x^{k-1} - \cdots - a_k = 0$为其特征方程，

称特征方程的根为递推方程的特征根。

实例

递推方程 $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$

特征方程 $x^2 - x - 1 = 0$

特征根 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

递推方程解与特征根的关系

定理1 q是非零复数，则q^n是递推方程的解当且仅当q是它的特征根。

证 q^n是递推方程的解

$\Leftrightarrow q^n - a_1 q^{n-1} - a_2 q^{n-2} - \cdots - a_k q^{n-k} = 0$

$\Leftrightarrow q^{n-k}(q^k - a_1 q^{k-1} - a_2 q^{k-2} - \cdots - a_k) = 0$

$\Leftrightarrow q^k - a_1 q^{k-1} - a_2 q^{k-2} - \cdots - a_k = 0$

$\Leftrightarrow q$是它的特征根

解的线性性质

定理2 $h_1(n)$和$h_2(n)$是递推方程的解，c_1, c_2为任意常数，则$c_1h_1(n)+c_2h_2(n)$是递推方程的解。

证 将$c_1h_1(n)+c_2h_2(n)$代入递推方程左边，化简后等于0.

推论 若$q_1, q_2,\ldots, q_k$是递推方程的特征根，则$c_1q_1^n+c_2q_2^n+\cdots+c_kq_k^n$是递推方程的解，其中$c_1, c_2, \ldots, c_k$是任意常数。

无重根时的通解结构

通解定义 若对递推方程的每个解$h(n)$，都存在一组常数$c'_1, c'_2, \ldots, c'_k$使得$h(n)=c'_1 q_1^n+c'_2 q_2^n+\cdots+c'_k q_k^n$ 成立，则称$c_1 q_1^n+c_2 q_2^n+\cdots+c_k q_k^n$为**通解**，其中$c_1, c_2, \ldots, c_k$是任意常数。

定理3 设$q_1, q_2, \ldots, q_k$是k阶常系数线性齐次递推方程不等的特征根，则$H(n)=c_1 q_1^n+c_2 q_2^n+\cdots+c_k q_k^n$为通解。

证明：略。

求解实例

例5 Fibonnaci数列，特征根为 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}$，

通解为 $f_n = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

带入初值 $f_0=1, f_1=1$, 得 $\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \end{cases}$

解得 $c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1+\sqrt{5}}{2}, c_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

于是 $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$

有重根时求解中的问题

例6 $H(n) - 4H(n-1) + 4H(n-2) = 0$

$H(0) = 0, H(1) = 1$

特征方程 $x^2 - 4x + 4 = 0$，通解 $H(n) = c_1 2^n + c_2 2^n = c2^n$

代入方程得：

$c2^n - 4c2^{n-1} + 4c2^{n-2} = 0$

$c - 2c + c = 0$，任意c都是解，但还有其他形式的解，例如$n2^n$是解，且与2^n线性无关。

原因：两个解$c_1 2^n$与$c_2 2^n$线性相关。

有重根时的通解结构

定理4 若q是递推方程的e重特征根，则$q^n, nq^n, \ldots, n^{e-1}q^n$是递推方程的线性无关的解。

定理5 设$q_1, q_2, \ldots, q_t$是递推方程的不相等的特征根，且q_i的重数为e_i，令

$$H_i(n) = \left(c_{i1} + c_{i2}n + \cdots + c_{ie_i}n^{e_i-1}\right)q_i^n,$$

则通解$H(n) = \sum_{i=1}^{t} H_i(n)$.

证明：略。

求解实例

例7 $H(n)+H(n-1)-3H(n-2)-5H(n-3)-2H(n-4)=0$

$H(0)=1, H(1)=0, H(2)=1, H(3)=2$

解：特征方程 $x^4+x^3-3x^2-5x-2=0$，特征根$-1, -1, -1, 2$,

通解为$H(n)=\left(c_1+c_2n+c_3n^2\right)(-1)^n+c_4 2^n$

$$\begin{cases} c_1+c_4=1 \\ -c_1-c_2-c_3+2c_4=0 \\ c_1+2c_2+4c_3+4c_4=1 \\ -c_1-3c_2-9c_3+8c_4=2 \end{cases}$$

解得 $c_1=\frac{7}{9}, c_2=-\frac{1}{3}, c_3=0, c_4=\frac{2}{9}$

解为 $H(n)=\frac{7}{9}(-1)^n-\frac{1}{3}n(-1)^n+\frac{2}{9}2^n$

常系数线性非齐次递推方程求解

- 递推方程的标准型
- 通解结构
- 特解的求法
  - 多项式函数
  - 指数函数
  - 组合形式

递推方程的标准型及通解

$$H(n)-a_1H(n-1)-\cdots-a_kH(n-k)=f(n), n\geq k, a_k\neq 0, f(n)\neq 0.$$

定理6 设$\overline{H(n)}$是对应齐次方程的通解，$H^*(n)$是一个特解，则

$$H(n)=\overline{H(n)}+H^*(n)$$

是递推方程的通解。

证 (1) $H(n)$是解，代入验证。

(2) 设$h(n)$是解，证明$h(n)$为一个齐次解与特解$H^*(n)$之和。

$$\begin{array}{r} h(n)-a_1h(n-1)-\cdots\quad -a_kh(n-k)\ =f(n) \\ -)\ H^*(n)-a_1H^*(n-1)-\cdots-a_kH^*(n-k)=f(n) \\ \hline \end{array}$$

$$[h(n)-H^*(n)]-a_1[h(n-1)-H^*(n-1)]-\cdots- a_k[h(n-k)-H^*(n-k)]=0$$

故$h(n)-H^*(n)$是齐次解，即$h(n)$是一个齐次解与$H^*(n)$之和。

特解的求法

$f(n)$为n的t次多项式，一般$H^*(n)$也为n的t次多项式

例8 $a_n + 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 3n^2$

解：设 $a_n^* = P_1n^2 + P_2n + P_3$，代入得

$$P_1n^2+P_2n+P_3+5[P_1(n-1)^2+P_2(n-1)+P_3]+6[P_1(n-2)^2+P_2(n-2)+P_3]=3n^2$$

$$\begin{cases} 12P_1 = 3 \\ -34P_1 + 12P_2 = 0 \\ 29P_1 - 17P_2 + 12P_3 = 0 \end{cases}$$

$$P_1 = \frac{1}{4}, P_2 = \frac{17}{24}, P_3 = \frac{115}{288},$$

$$a_n^* = \frac{1}{4}n^2 + \frac{17}{24}n + \frac{115}{288}$$

通解为 $a_n = c_1(-2)^n + c_2(-3)^n + \frac{1}{4}n^2 + \frac{17}{24}n + \frac{115}{288}$

实例

例9 Hanoi塔

$T(n)=2T(n-1)+1$

$T^*(n)=P$

$P=2P+1$, $P=-1$

$T(n)=c2^n-1$, 代入初值 $T(1)=1$, 得$c=1$,

解为 $T(n)=2^n-1$.

例10 $H(n)-H(n-1)=7n$

设特解P_1n+P_2不行，应设n^2次项, 因为特征根是1.

设$H^*(n)=P_1n^2+P_2n$, 代入 解得 $P_1=P_2=7/2$,

通解为 $H(n)=c\cdot 1^n+\frac{7}{2}n(n+1)=c+\frac{7}{2}n(n+1)$

特解的求法（续）

$f(n)$为指数函数β^n，若β不是特征根，则特解为

$H^*(n) = P\beta^n$

例11 通信编码问题

$a_n=6a_{n-1}+8^{n-1}$, $a_1=7$

解： $a^*_n=P8^{n-1}$，代入得$P=4$,

通解 $a_n=c\cdot 6^n + 4\cdot 8^{n-1}$,

代入初值得 $a_n=(6^n+8^n)/2$.

特解的求法（续）

若β是e重特征根，则特解为$Pn^e\beta^n$

例12 求$H(n) - 5H(n-1) + 6H(n-2) = 2^n$的一个特解。

解：设$H^*(n) = Pn2^n$,

代入得

$$Pn2^n - 5P(n-1)2^{n-1} + 6P(n-2)2^{n-2} = 2^n$$

解得 $P = -2$

故$H^*(n) = -n2^{n+1}$

特解的求法（续）

例13 递推公式

$$a_n - 2a_{n-1} = n + 3^n$$

$$a_0 = 0$$

解：设特解为$a_n^* = P_1 n + P_2 + P_3 3^n$，代入得

$$(P_1 n + P_2 + P_3 3^n) - 2[P_1(n-1) + P_2 + P_3 3^{n-1}] = n + 3^n$$

即 $-P_1 n + (2P_1 - P_2) + P_3 3^{n-1} = n + 3^n$

解得$P_1 = -1,\ P_2 = -2,\ P_3 = 3$

令$a_n = c2^n - n - 2 + 3^{n+1}$

解得 $c = -1$，$a_n = -2^n - n - 2 + 3^{n+1}$

22.2 递推方程的其他解法

- 换元法
- 迭代归纳法
- 差消法
- 尝试法

换元法

思想：通过换元转化成常系数线性递推方程

例1 $\begin{cases} a_n^2 = 2a_{n-1}^2 + 1 \\ a_0 = 2 \end{cases}$ $a_n > 0$

解：令 $b_n = a_n^2$, 代入得

$$b_n = 2b_{n-1} + 1，\ b_0 = 4$$

解得$b_n = 5 \cdot 2^n - 1$, 故 $a_n = \sqrt{5 \cdot 2^n - 1}$

换元法—归并排序

例2 归并排序

$T(n)=2T(n/2)+n-1,\ \ n=2^k$

$T(2)=1$

解： $H(k)=2H(k-1)+2^k-1$， $H(1)=1$

令$H^*(k)=P_1k2^k+P_2$, 解得$P_1=P_2=1$, $H^*(k)=k2^k+1$

通解$H(k)=C2^k+k2^k+1$, 代入初值，得$C=-1$,

于是，$H(k)=-2^k+k2^k+1$,

故$T(n)=n\log n-n+1$.

迭代归纳法

$(a\times c)\times b; (c\times a)\times b;$
$a\times(b\times c); a\times(c\times b);$
$c\times(a\times b); (a\times b)\times c$

例3 给定n个实数$a_1, a_2, \cdots, a_n$，可以用多少种不同的方式来构成它们的乘积？这里认为相乘的次序不同也是不同的方法，如$(a_1\times a_2)\times a_3$与$a_1\times(a_2\times a_3)$是不同的方法。

解：令$h(n)$表示这n个数构成乘积的方法数。显然有$h(1)=1$. 假设$n-1$个数$a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$的乘积已经构成，有$h(n-1)$个。任取其中的一个乘积，它是由$n-2$次乘法得到的。对于其中任一次相乘的两个因式，加入$a_n$的方法有4种，因此这种加入$a_n$的方法数共有$4(n-2)$种。另外，还可以把$a_n$分别乘在整个乘积的左边或右边，因此加入$a_n$的方法数是$4(n-2)+2=4n-6$.

迭代归纳法

根据以上的分析可以得到递推方程：

$h(n) = (4n\text{-}6)\, h(n\text{-}1),\ h(1) = 1$

$$
\begin{aligned}
h(n) &= (4n-6)h(n-1) \\
&= (4n-6)(4n-10)h(n-2) \\
&= \cdots \\
&= (4n-6)(4n-10)\cdots 6\cdot 2\cdot h(1) \\
&= 2^{n-1}[(2n-3)(2n-5)\cdots 3\cdot 1] \\
&= 2^{n-1}\frac{(2n-2)!}{(2n-2)(2n-4)\cdots 4\cdot 2} \\
&= \frac{(2n-2)!}{(n-1)!}
\end{aligned}
$$

用归纳法验证。

迭代归纳法—错位排列

例4 错位排列问题

错位排列：$\{1, 2, \ldots, n\}$的排列$a_1a_2\ldots a_n$, $a_i \neq i$, $i=1, 2, \ldots, n$，

n个元素的错位排列数记作D_n

将错位排列按首元素$2, 3, \ldots, n$分类：有n-1类，

第一位为2的类：

第二位为1： 方法数为D_{n-2}

第二位不是1：方法数为D_{n-1}

递推方程：

$$D_n = (n-1)(D_{n-1}+D_{n-2})$$

$$D_1 = 0,\ D_2 = 1$$

迭代归纳法—错位排列(续)

解： $D_n = (n\text{-}1)(D_{n\text{-}1} + D_{n\text{-}2})$

$$D_n - nD_{n-1} = -[D_{n-1} - (n-1)D_{n-2}] = \cdots$$
$$= (-1)^{n-2}[D_2 - 2D_1] = (-1)^{n-2}$$

$$D_n = nD_{n-1} + (-1)^n, D_1 = 0$$

$$D_n = n(n-1)D_{n-2} + n(-1)^{n-1} + (-1)^n$$
$$= n(n-1)(n-2)D_{n-3} + n(n-1)(-1)^{n-2} + n(-1)^{n-1} + (-1)^n$$
$$= \cdots$$
$$= n(n-1)\dots 2D_1 + n(n-1)\dots 3(-1)^2 + n(n-1)\dots 4(-1)^3 +$$
$$\dots + n(-1)^{n-1} + (-1)^n$$
$$= n!\,[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}]$$

用归纳法验证.

迭代归纳法—递归树

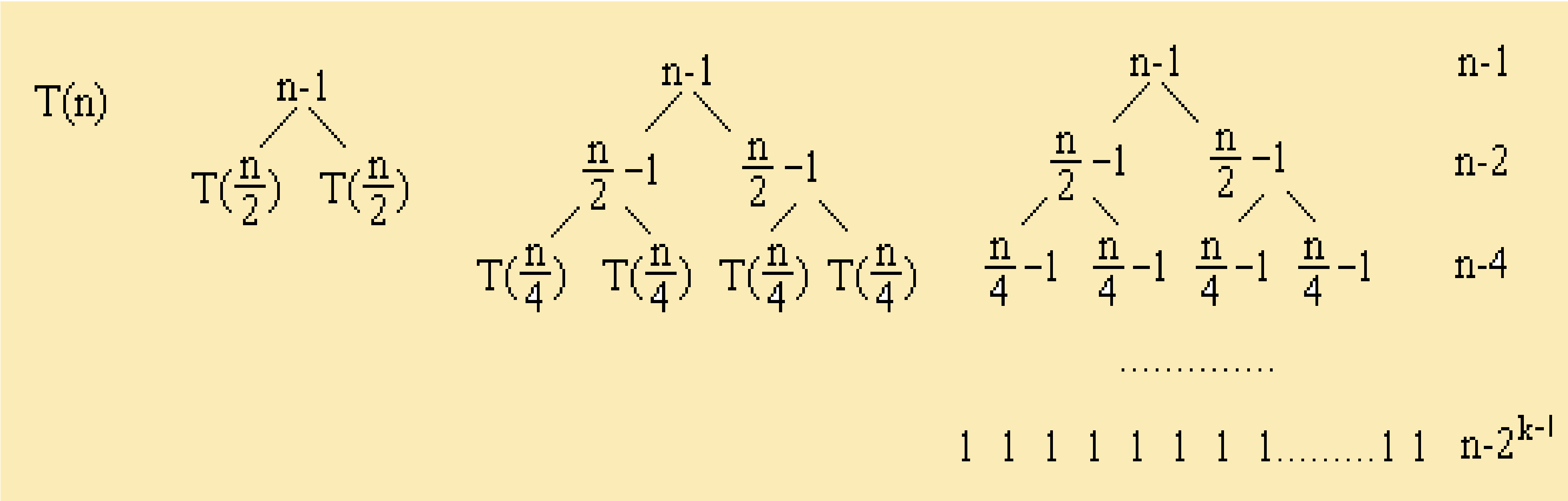
例5 归并排序

$T(n)=2T(n/2)+n-1$，$n=2^k$

$T(2)=1$

递归树有k层，总数为

$nk-(1+2+\ldots+2^{k-1})=nk-(2^k-1)=n\log n-n+1$



迭代归纳法—归并排序

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 2\,T(n/2) + n\text{-}1 \\
&= 2\,[2\,T(n/4) + n/2 – 1] + n\text{-}1 \\
&= 2^2\,T(n/2^2) + n\text{-}2 + n\text{-}1 \\
&= \cdots \\
&= 2^{k\text{-}1}T(n/2^{k\text{-}1}) + n\text{-}2^{k\text{-}2} + \cdots + n\text{-}2 + n\text{-}1 \\
&= 2^{k\text{-}1}T(2) + n(k\text{-}1) – (1 + 2 + \cdots + 2^{k\text{-}2}) \\
&= 2^{k\text{-}1} + n(k\text{-}1) – (2^{k\text{-}1} – 1) \\
&= nk – n + 1 \\
&= n\log n – n + 1
\end{aligned}
$$

差消法—快速排序

例6 求解递推方程：$\begin{cases} T(n)=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n-1}T(i)+n+1, & n\geq 2 \\ T(1)=0 \end{cases}$

解：$nT(n)=2\sum_{i=1}^{n-1}T(i)+n^2+n$

$$(n-1)T(n-1)=2\sum_{i=1}^{n-2}T(i)+(n-1)^2+(n-1)$$

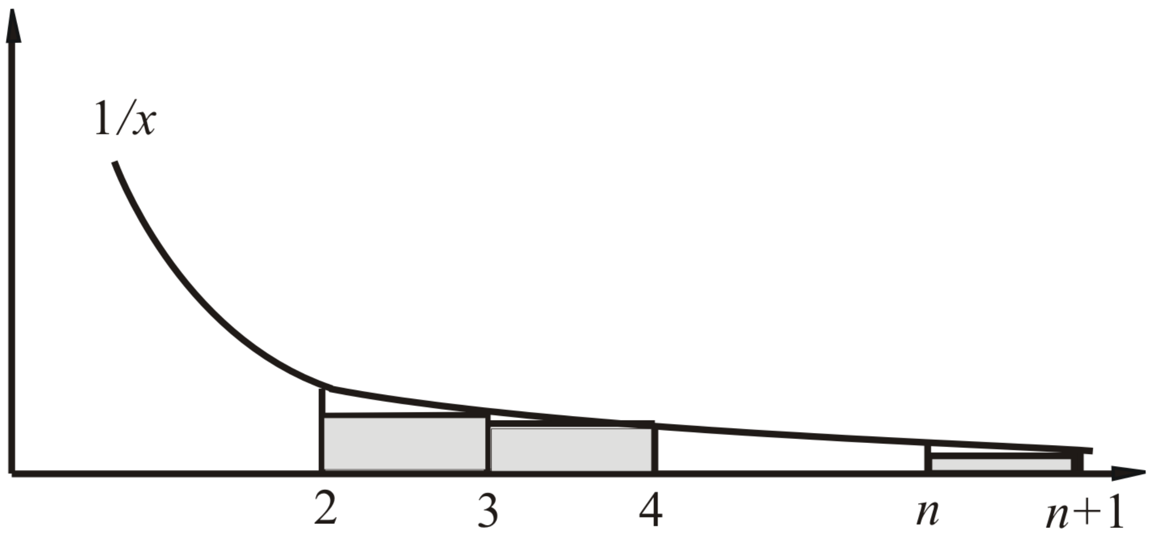
$nT(n)-(n-1)T(n-1)=2T(n-1)+2n$

$nT(n)=(n+1)T(n-1)+2n$

$$\frac{T(n)}{n+1}=\frac{T(n-1)}{n}+\frac{2}{n+1}=\frac{2}{n+1}+\frac{2}{n}+\cdots+\frac{2}{3}+\frac{T(1)}{2}$$

$$=2\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{3}\right]\Rightarrow T(n)=2(n+1)[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{3}]$$

差消法（续）



$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{3}\leq\int_{2}^{n+1}\frac{1}{x}dx$$

$$=\ln x|_{2}^{n+1}=\ln(n+1)-\ln 2=O(\log n)$$

$$\Rightarrow T(n)=O(n\log n)$$

尝试法—快速排序

例7 $T(n)=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n-1}T(i)+n+1$

(1) $T(n)=C$, 左边$=O(1)$,

右边$=\frac{2}{n}C(n-1)+n+1=2C-\frac{2C}{n}+n+1=O(n)$

(2) $T(n)=cn$, 左边$=cn$,

右边$=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n-1}ci+n+1$

$=\frac{2c}{n}\frac{(1+n-1)(n-1)}{2}+n+1$

$=c(n-1)+n+1$

$=(c+1)n-c+1$

尝试法—快速排序

(3) $T(n)=cn^2$, 左边$=cn^2$

右边$= \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n-1} ci^2 + n + 1$

$$= \frac{2}{n}\left[\frac{cn^2}{3} + O\left(n^2\right)\right] + n + 1 = \frac{2c}{3}n^2 + O(n)$$

(4) $T(n)=cn\log n$, 左边$=cn\log n$

右边$= \frac{2c}{n}\sum_{i=1}^{n-1} i\log i + n + 1$

$$= \frac{2c}{n}\left[\frac{n^2}{2}\log n - \frac{n^2}{4\ln 2} + O(n\log n)\right] + n + 1$$ (由下页PPT)

$$= cn\log n + \left(1 - \frac{c}{2\ln 2}\right)n + O(\log n)$$

积分近似

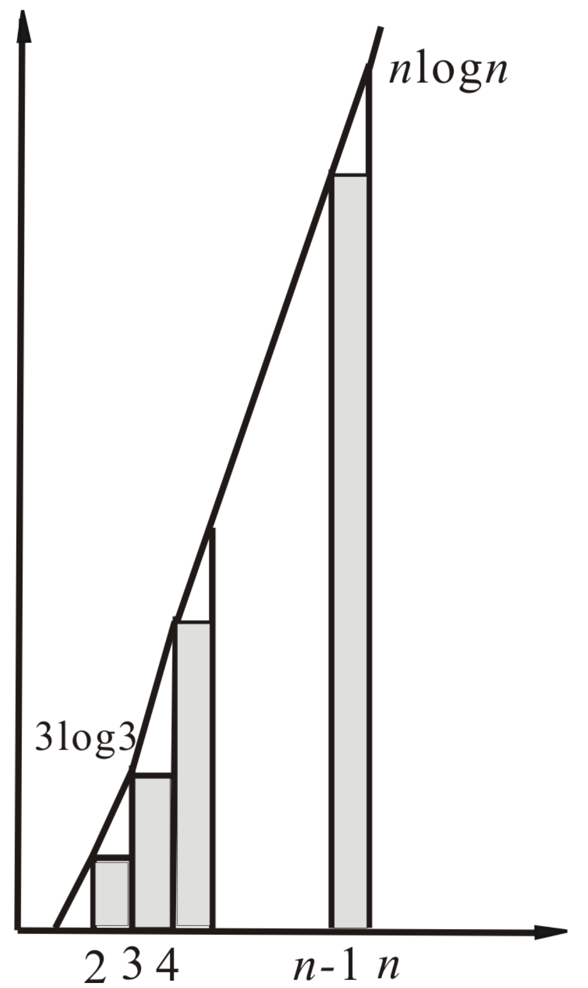
$$\int_2^n x\log x\,dx = \int_2^n \frac{x}{\ln 2}\ln x\ dx$$

$$= \frac{1}{\ln 2}\left[\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}\right]\Big|_2^n$$

$$= \frac{1}{\ln 2}\left(\frac{n^2}{2}\ln n - \frac{n^2}{4}\right)$$

$$- \frac{1}{\ln 2}\left(\frac{4}{2}\ln 2 - \frac{4}{4}\right)$$

$$= \frac{n^2}{2}\log n - \frac{n^2}{4\ln 2} + O(n\log n)$$



分治算法

n为输入规模，n/b为子问题输入规模，a为子问题个数，$d(n)$为分解及综合的代价

$$T(n) = aT(n/b) + d(n), \qquad n = b^k$$

$$T(1) = 1$$

$$T(n) = a^2\, T\left(n/b^2\right) + ad(n/b) + d(n)$$

$$= \cdots$$

$$= a^k\, T\left(n/b^k\right) + a^{k-1} d\left(n/b^{k-1}\right) + a^{k-2}\left(n/b^{k-2}\right)$$

$$+ \cdots + ad(n/b) + d(n)$$

$$= a^k + \sum_{i=0}^{k-1} a^i d(n \,/\, b^i)$$

$$a^k = a^{\log_b n} = n^{\log_b a}$$

分治与递归算法—二分检索

$$T(n) = a^k + \sum_{i=0}^{k-1} a^i d(n/b^i),\ \ a^k = n^{\log_b a}$$

(1) $d(n)=c$

$$T(n) = \begin{cases} a^k + c\dfrac{a^k - 1}{a - 1} = O(a^k) = O(n^{\log_b a}) & a \neq 1 \\ a^k + kc = O(kc) = O(\log n) & a = 1 \end{cases}$$

二分检索: $W(n) = W(n/2) + 1$

$a = 1, b = 2, d(n) = c$

$W(n) = O(\log n)$

分治与递归算法—二分归并

(2) $d(n)=cn$

$$T(n) = a^k + \sum_{i=1}^{k-1} a^i \frac{cn}{b^i} = a^k + cn \sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{a}{b}\right)^i$$

$$= \begin{cases} n^{\log_b a} + cn \dfrac{(a/b)^k - 1}{a/b - 1} = O(n) & a < b \\ n + cnk = O(n\log n) & a = b \\ a^k + cn \dfrac{(a/b)^k - 1}{a/b - 1} = a^k + c\dfrac{a^k - b^k}{a/b - 1} = O(n^{\log_b a}) & a > b \end{cases}$$

归并排序: $W(n)=2W(n/2)+n-1$

$a = 2, b = 2, d(n) = O(n), \ W(n)= O(n\log n)$