Ch-05 随机过程

5. 1 随机过程的概念

定义 1. 1 给定无穷集 $T \subset (-\infty, +\infty)$，如果对每个 $t \in T$，对应一个随机变量 X_t，则称随机变量族 $X_t, t \in T$ 为**随机过程**（简称**过程**）。

令 E 表示这些 X_t 所可能取的值组成的集合，E 叫做**状态空间**。如果 $X_t = x$，则称随机过程 $X_t, t \in T$ 在时刻 t 处于**状态** x.

当 T 是可列无穷集时，$\{X_t, t \in T\}$ 叫做**离散时间的随机过程**，也叫**随机序列**。当 T 是一个区间时，$\{X_t, t \in T\}$ 叫做**连续时间的随机过程**。

定义 1. 2 称两个过程 $\{X_t, t \in T\}$ 和 $\{Y_t, t \in T\}$ 是**随机等价**的，若

$$P(X_t = Y_t) = 1 \quad (\text{一切 } t \in T)$$

5. 2 独立增量过程

定义 2. 1 称 $\{X(t), t \in T\}$ 是**独立增量过程**，若对任何 $n \geq 3$ 及 T 中 n 个数
$t_1 < t_2 < \cdots < t_n$，随机变量

$$X(t_2) - X(t_1),\ X(t_3) - X(t_2),\ \cdots,\ X(t_n) - X(t_{n-1})$$

是相互独立的。

如果此时 $X(t+h) - X(t)(h > 0)$ 的分布函数不依赖于 t，则称 $\{X(t), t \in T\}$ 是**时齐的独立增量过程**。

定义 2. 3 称计数过程 $\{X(t), t \geq 0\}$ 是（时齐）**泊松过程**，若它是时齐的独立增量过程且存在 $\lambda > 0$，对一切 $t > 0$，有

$$P(X(t)=k)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-k}$$

也称此过程为参数为 λ 的泊松过程。

5. 3 马尔可夫链

定义 3. 1 设 E 是至多可列集（E 是有限集或全部元素可排成一个无穷序列），称取值于 E 的随机变量序列 $\{X_n, n \geq 0\}$ 是**马尔可夫链**（简称**马氏链**），若对**任何非负整数列** $t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t_{n+1}$ 及 E 中元素 $i_1, i_2, \cdots, i_{n+1}$ 均成立下列等式：

$$P(X_{t_{n+1}}=i_{n+1} \mid X_{t_1}=i_1, \cdots, X_{t_n}=i_n)=P(X_{t_{n+1}}=i_{n+1} \mid X_{t_n}=i_n)$$

当 $P(X_{t_1}=i_1, \cdots, X_{t_n}=i_n)>0$. 这个性质被称为**马尔可夫性质**（简称**马氏性**）。无后效性：已知现在，则未来与过去无关。

定义 3. 2 称马氏链 $\{X_n, n \geq 0\}$ 是**齐次**的，若对一切状态 i, j，条件概率 $P(X_{s+n}=j \mid X_s=i)$ 与 s 的值无关。这个条件概率叫做 n **步转移概率**，记为 $p_{ij}^{(n)}$. 用 p_{ij} 表示 $p_{ij}^{(1)}$，即**一步概率矩阵**。

1. $p_{ij}>0, \forall\, i, j$
2. $\sum\limits_j p_{ij}=1, \forall\, i$

定理 3. 2 设 $\{X_n, n \geq 0\}$ 是马氏链，E 是状态空间，$p_{ij}^{(n)}$ 是 n 步转移概率，则对任意 $n \geq 1$，$1 \leq m \leq n$，有

$$p_{ij}^{(n)}=\sum_{k \in E} p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n-m)}$$

规定 $p_{ij}^{(0)}=\delta_{kj}$（当 $k=j$ 时，$\delta_{kj}=1$；当 $k \neq j$ 时，$\delta_{kj}=0$），称为 Kolmogorov-Chapman 方程。$\mathbf{P}$ 称为**一步转移概率矩阵**。

由矩阵的乘法运算知

$$\mathbf{P}^{(n)}=\mathbf{P}^n$$

令 $f_{ij}^* = P$（存在 $n > s$ 使得 $X_n = j \mid X_s = i$），$f_{ij}^{(k)} = P$（$X_{s+1} \neq j, X_{s+2} \neq j, \cdots,$ $X_{s+k-1} \neq j, X_{s+k} = j \mid X_s = i$）

f_{ij}^* 的含义是从状态 i 出发将来经过 j 的概率，$f_{ij}^{(k)}$ 的含义是：从状态 i 出发 k 步后**首次**到达 j 的概率。可以得到

$$f_{ij}^* = \sum_{k=1}^{\infty} f_{ij}^{(k)}$$

定理 3.3 对任何 $n \geq 1$，有

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)}$$

这里规定 $p_{jj}^{(0)} = 1.$

定义 3.3 称状态 i 是**常返**的，若 $f_{ii}^* = 1$；称状态 i 是**非常返**的，若 $f_{ii}^* < 1.$

若 $f_{ii}^* = 1$，则从 i 出发无穷多次经过 i 的概率为 1.

若 i 是常返状态，令

$$m_i = \sum_{k=1}^{\infty} k f_{ii}^{(k)}$$

这是一个非负项级数，若级数发散，规定 m_i 为 ∞. m_i 的直观意义是：**状态 i 的平均再现时间**。

定义 3.4 当 $m_i \neq \infty$ 时，称 i 是**积极常返状态**（也叫**正常返状态**）。当 $m_i = \infty$ 时，称 i 是**消极常返状态**（也叫**零常返状态**）。

令 $G_{ii} = \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} P_i(X_n = i) =$ 平均回访总次数

定理 3.4 i 是常返的充要条件是级数 $G_{ii}=\sum_{n=1}^{\infty}p_{ii}^{(n)}$ 发散。

推论 3.1 若 j 是非常返的，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}p_{ij}^{(n)}\text{收敛（对一切 } i\text{ ）}$$

记 $g_{ii}=P(\text{有无穷多个 } n \text{ 使得 } X_n=i\mid X_s=i)$，$g_{ii}(m)=P(\text{至少有 } m \text{ 个 } n>s \text{ 使得 } X_n=i\mid X_s=i)$($m$ 是正整数).

定理 3.5 若 i 常返，则 $g_{ii}=1$；若 i 是非常返的，则 $g_{ii}=0$.

定义 3.5 称 i **可到达** j，若存在 $n\geq 1$ 使得 $p_{ij}^{(n)}>0$.

i 可到达 j 的充要条件是 $f_{ij}^{*}>0$.

定理 3.6 若 i 是常返的，i 可到达 j，则 j 是常返的且 $f_{ij}^{*}=f_{ji}^{*}=1$.

若状态 i 可到达 j，j 可到达 i，则称 i 与 j **互通**。

定理 3.7 若 i 是积极常返的，i 可到达 j，则 j 也是积极常返的。

定义 3.6 设 i 是常返状态，称整数集合

$$A=\{n:n\geq 1,p_{ii}^{(n)}>0\}$$

的最大公约数 d 为 i 的**周期**。

定理 3.8 设 i 是常返状态，i 可到达 j，则常返状态 j 与 i 有相等的**周期**。

定理 3.9 对一切 i, j, $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$ 均存在的充要条件是每个积极常返状态的周期是 1.

定理 3.13 设 $\{X_n, n \geq 0\}$ 是马氏链，状态空间是 E，X_0 的概率分布列是 $\{p_i, i \in E\}$（即 $p_i = P(X_0 = i)$，则所有 $X_n(n = 0, 1, \cdots)$ 有相同的概率分布的充要条件是 p_i 满足

$$p_i = \sum_{k\in E} p_k p_{ki} \quad (\text{一切 } i \in E)$$

该式叫做马氏链的**平稳分布**。

平稳分布 $\pi : \sum\limits_i \pi_i p_{ij} = \pi_j, \forall\, i$, 即 $\pi\mathbf{P} = \pi$. $\forall\, n$, 若 $X_0 \sim \pi$， 则 $X_n \sim \pi$.

逆过程 Y：初分布 π；Y 的发展机制：$q_{ji} = \dfrac{\pi_i p_{ij}}{\pi_j}$，即 $\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji}$.
$P(Y_0 = j_0, \cdots, Y_n = j_n) = P(X_0 = j_n, \cdots, X_n = j_0)$，即
$\{Y_k, k = 0, 1, \cdots, n\} \overset{d}{=} \{X_{n-k}, k = 0, 1, \cdots, n\}$.

可逆：$q_{ij} = p_{ij}, \forall\, i, j \Leftrightarrow$

细致平衡：$\pi p_{ij} = \pi p_{ji}, \forall\, i, j$

定理 3.14 若马氏链 $\{X_n, n \geq 0\}$ 的任何两个状态可相互到达且存在平稳分布，则强大数律成立，即

$$P(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(X_k) = Ef(X_0)) = 1$$

其中 $f(x)$ 是任何有界函数。