单元1.6 基本的集合恒等式

第一编 集合论
第一章 集合
1.4 基本的集合恒等式

内容提要

(1) 集合恒等式

– 13组最基本的集合恒等式

(2) 半形式化方法

– 推导集合等式和包含式

集合恒等式(①~④)

设E是全集，A,B,C为E的任意子集。

① 幂等律　$A \cup A = A$, $A \cap A = A$

② 交换律　$A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$

③ 结合律　$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

④ 分配律　$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

集合恒等式 (⑤~⑥)

⑤ 德•摩根律

绝对形式　$\sim(A\cup B) = \sim A\cap\sim B$

$\sim(A\cap B) = \sim A\cup\sim B$

相对形式　$E-(A\cup B) = (E-A)\cap(E-B)$

$E-(A\cap B) = (E-A)\cup(E-B)$

⑥ 吸收律　$A\cup(A\cap B) = A$，$A\cap(A\cup B) = A$

基本的等值式(⑦~⑬)

⑦ 零律　$A \cup E = E$，$A \cap \varnothing = \varnothing$

⑧ 同一律　$A \cup \varnothing = A$，$A \cap E = A$

⑨ 排中律　$A \cup {\sim}A = E$

⑩ 矛盾律　$A \cap {\sim}A = \varnothing$

⑪ 余补律　${\sim}\varnothing = E$，${\sim}E = \varnothing$

⑫ 双重否定律　${\sim}({\sim}A) = A$

⑬ 补交转换律　$A - B = A \cap {\sim}B$

推广到集族的情况

设$\{A_\alpha\}_{\alpha\in S}$为集族，B为一集合：

分配律

$$B\cup(\bigcap\{A_\alpha\}_{\alpha\in S})=\bigcap_{\alpha\in S}(B\cup A_\alpha)$$

$$B\cap(\bigcup\{A_\alpha\}_{\alpha\in S})=\bigcup_{\alpha\in S}(B\cap A_\alpha)$$

德•摩根律

$$\sim(\bigcup\{A_\alpha\}_{\alpha\in S})=\bigcap_{\alpha\in S}(\sim A_\alpha)$$

$$\sim(\bigcap\{A_\alpha\}_{\alpha\in S})=\bigcup_{\alpha\in S}(\sim A_\alpha)$$

$$B-(\bigcup\{A_\alpha\}_{\alpha\in S})=\bigcap_{\alpha\in S}(B-A_\alpha)$$

$$B-(\bigcap\{A_\alpha\}_{\alpha\in S})=\bigcup_{\alpha\in S}(B-A_\alpha)$$

例1.3

由定义证明下面的恒等式：

(1) 分配律： $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(2) 零律： $A \cap \varnothing = \varnothing$

(3) 排中律： $A \cup \sim A = E$

北京大学

分配律的证明

(1) 对于任意的x，

$x\in A\cup(B\cap C)$

$\Leftrightarrow x\in A \vee x\in(B\cap C)$

$\Leftrightarrow x\in A \vee (x\in B \wedge x\in C)$

$\Leftrightarrow (x\in A\vee x\in B)\wedge(x\in A\vee x\in C)$ (命题逻辑分配律)

$\Leftrightarrow x\in(A\cup B)\wedge x\in(A\cup C)$ $\Leftrightarrow x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$，

因而，$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$。 □

零律的证明

(2) 对于任意的x，

$x \in A \cap \varnothing$

$\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in \varnothing$

$\Leftrightarrow x \in A \wedge 0$

$\Leftrightarrow 0$ (命题逻辑零律)

$\Leftrightarrow x \in \varnothing$，

因而，$A \cap \varnothing = \varnothing$。□

排中律的证明

(3) 对于任意的x，

$$x \in A \cup {\sim}A$$

$$\Leftrightarrow x \in A \vee x \in {\sim}A$$

$$\Leftrightarrow x \in A \vee x \notin A$$

$$\Leftrightarrow x \in A \vee \neg x \in A$$

$\Leftrightarrow 1$ (命题逻辑排中律)

$\Leftrightarrow x \in E$， 因而，$A \cup {\sim}A = E$。□

例1.8

设$\mathcal{A},\mathcal{B}$为集族，试证明：

(1) 若 $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{B}$，则 $\cup\mathcal{A}\subseteq\cup\mathcal{B}$；

(2) 若 $\mathcal{A}\in\mathcal{B}$，则 $\mathcal{A}\subseteq\cup\mathcal{B}$；

(3) 若 $\mathcal{A}\neq\varnothing$且 $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{B}$，则 $\cap\mathcal{B}\subseteq\cap\mathcal{A}$；

(4) 若 $\mathcal{A}\in\mathcal{B}$，则 $\cap\mathcal{B}\subseteq\mathcal{A}$；

(5) 若 $\mathcal{A}\neq\varnothing$，则 $\cap\mathcal{A}\subseteq\cup\mathcal{A}$。

集族性质(1)(2)的证明

(1) 对于任意的x，

$$x \in \cup \mathcal{A}$$

$$\Leftrightarrow \exists A(A \in \mathcal{A} \wedge x \in A)$$

$$\Rightarrow \exists A(A \in \mathcal{B} \wedge x \in A) \qquad (\text{已知}\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B})$$

$$\Leftrightarrow x \in \cup \mathcal{B}$$

所以，$\cup \mathcal{A} \subseteq \cup \mathcal{B}$。

(2) 若 $\mathcal{A} \in \mathcal{B}$，由广义并集定义可知 $\mathcal{A} \subseteq \cup \mathcal{B}$。

集族性质(3)的证明

(3) 由$\mathcal{A}\neq\varnothing$，知$\mathcal{B}\neq\varnothing$，故$\cap\mathcal{A}$与$\cap\mathcal{B}$均有意义。

对于任意的x，

$$x\in\cap\mathcal{B}$$

$$\Leftrightarrow \forall y(\, y\in\mathcal{B}\rightarrow x\in y\,)$$

$$\Rightarrow \forall y(\, y\in\mathcal{A}\rightarrow x\in y\,) \qquad (\mathcal{A}\subseteq\mathcal{B})$$

$$\Leftrightarrow x\in\cap\mathcal{A}$$

所以，$\cap\mathcal{B}\subseteq\cap\mathcal{A}$。 □

例1.9

集合幂集运算具有下列性质：

(1) $A \subseteq B$ 当且仅当 $P(A) \subseteq P(B)$；

(2) $P(A-B) \subseteq (P(A)-P(B)) \cup \{\varnothing\}$。

幂集性质(1)的证明

(1) 先证必要性。

对于任意的x，

$x \in P(A)$

$\Leftrightarrow x \subseteq A$

$\Rightarrow x \subseteq B \quad (A \subseteq B)$

$\Leftrightarrow x \in P(B)$，

故有 $P(A) \subseteq P(B)$。

再证充分性。

对于任意的y，

$y \in A$

$\Leftrightarrow \{y\} \in P(A)$

$\Rightarrow \{y\} \in P(B) \quad (P(A) \subseteq P(B))$

$\Leftrightarrow y \in B$

所以，$A \subseteq B$。

幂集性质(2)的证明

对于任意的集合x，

若x=$\varnothing$，$x \in P(A) \cup P(B)$ 且$x \in (P(A)-P(B)) \cup \{\varnothing\}$。若$x \neq \varnothing$，

$x \in P(A-B)$

$\Leftrightarrow x \subseteq A-B \Rightarrow x \subseteq A \land x \not\subseteq B$

$\Leftrightarrow x \in P(A) \land x \notin P(B)$

$\Leftrightarrow x \in (P(A)-P(B))$

综上所述，可知 $P(A-B) \subseteq (P(A)-P(B)) \cup \{\varnothing\}$。

北京大学

小结

(1) 集合恒等式

– 13组最基本的集合恒等式

(2) 半形式化方法

– 推导集合等式和包含式