单元7.1 欧拉图

第二编 图论　第八章 欧拉图与哈密顿图

8.1 欧拉图

内容提要

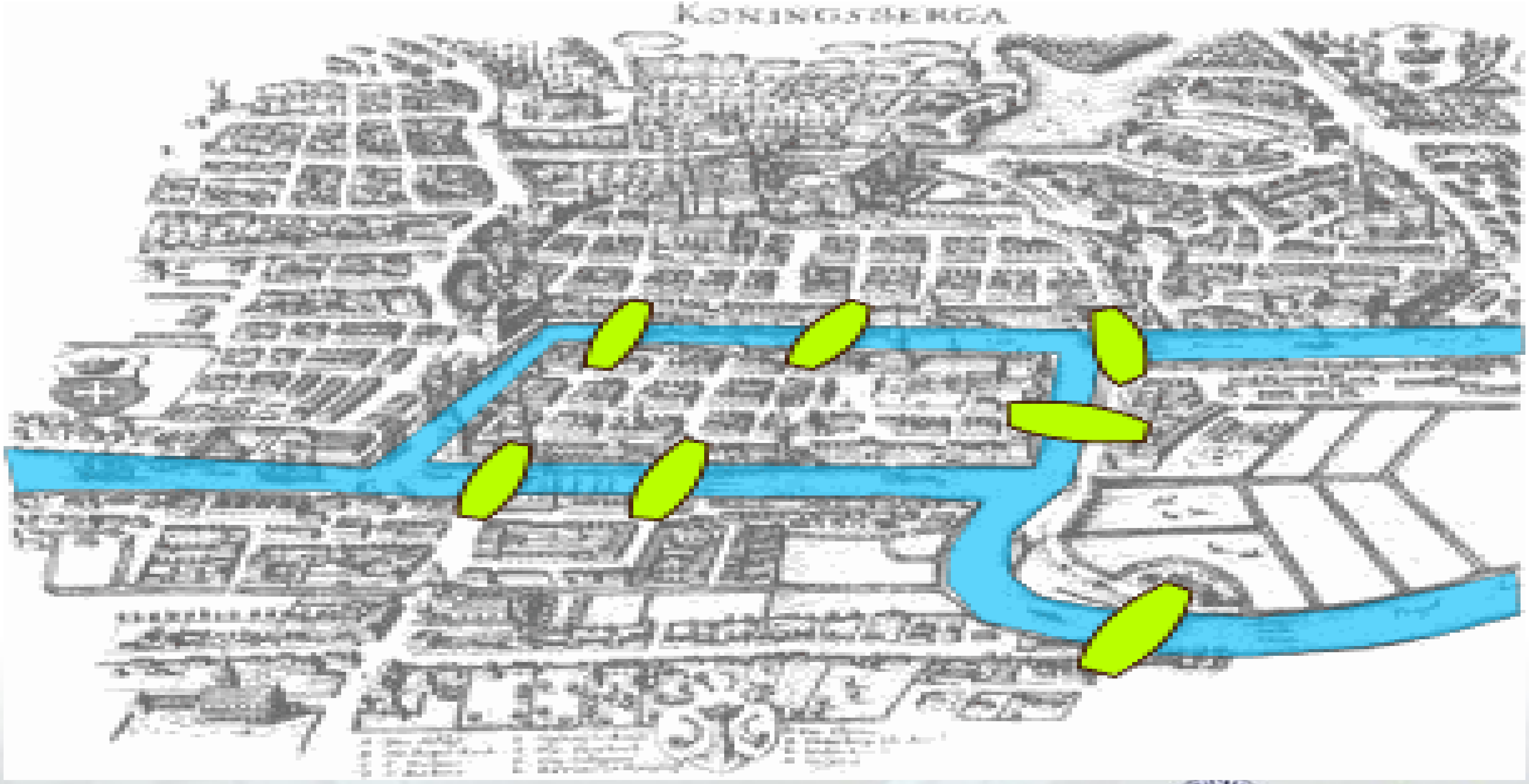
- 欧拉回路、欧拉通路
- 欧拉图、半欧拉图
- 有向欧拉图、有向半欧拉图
- 欧拉图、半欧拉图的充要条件
- 求欧拉回路的算法

七桥问题

- **Königsberg, River Pregel (Kaliningrad, Russia)**

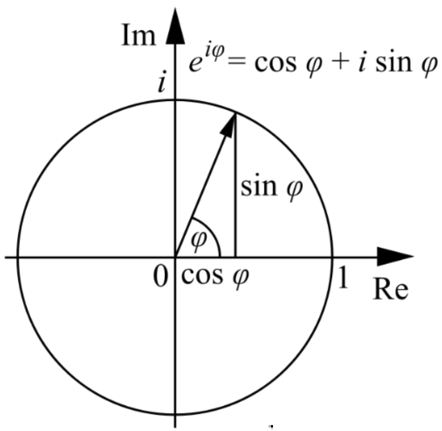
七桥问题

- **Königsberg, River Pregel (Kaliningrad, Russia)**



Leonhard Euler(1707~1783)

- 瑞士数学家, 最多产的数学家
  - ≥1100书籍论文
  - 全集≥75卷
  - 13个孩子
  - 最后17年失明

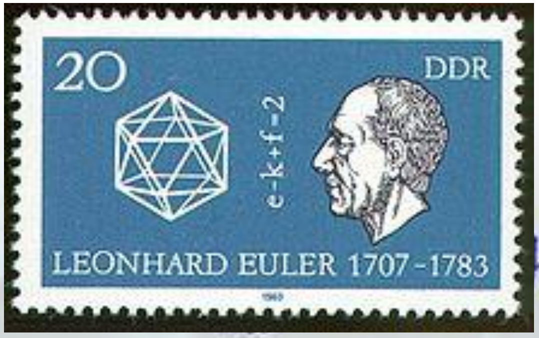


$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right).$$

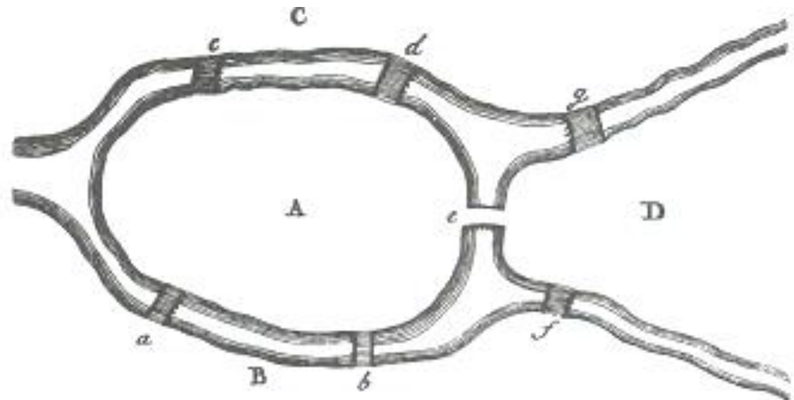
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{\pi^2}{6}.$$

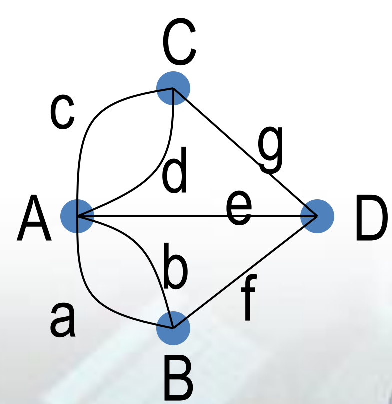
$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n)\right).$$



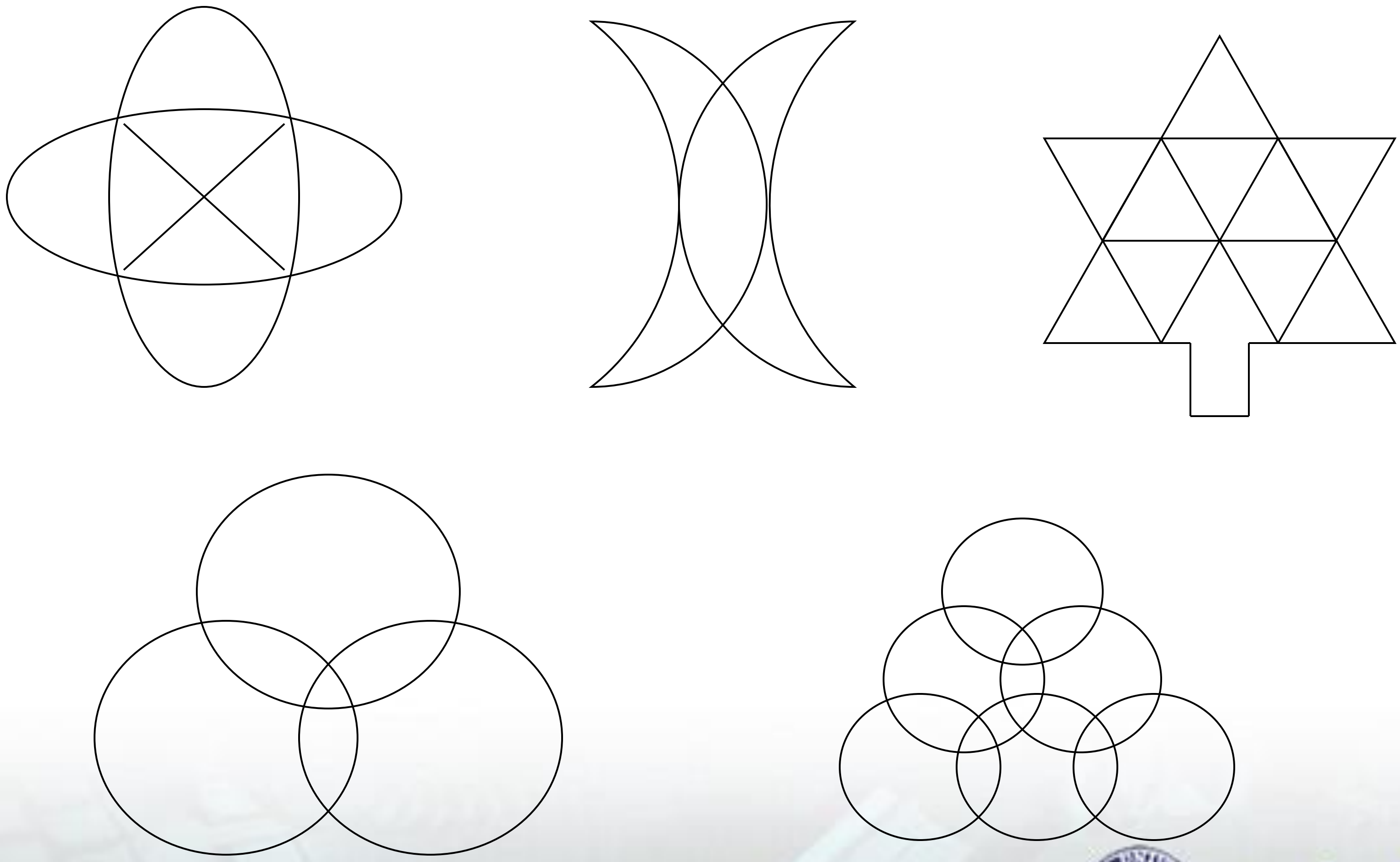
Euler的解法

- **1736年, 图论和拓扑学诞生**





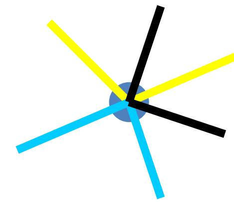
一笔画



欧拉通(回)路、(半)欧拉图

- 欧拉通路：经过图中所有边的简单通路
- 半欧拉图：有欧拉通路的图
- 欧拉回路：经过图中所有边的简单回路
- 欧拉图：有欧拉回路的图

无向欧拉图的充分必要条件

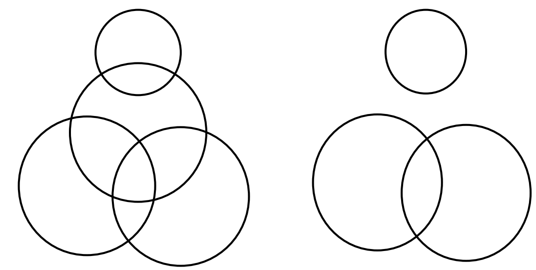


定理8.1: 设G是无向连通图,则

G是欧拉图 (1)

⇔ G中所有顶点都是偶数度 (2)

⇔ G是若干个边不交的圈的并(3)



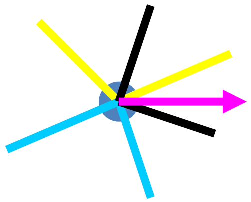
证明 (1)⇒(2) 若欧拉回路总共k次经过顶点v, 则 d(v)=2k. (2)⇒(3)若删除任意1个圈上的边,则所有顶点的度还是偶数, 但是不一定连通了. 对每个连通分支重复进行. (3)⇒(1)有公共点但边不交的简单回路, 总可以拼接成欧拉回路: 在交点处,走完第1个回路后再走第2个回路. #

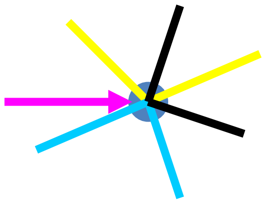
无向半欧拉图的充分必要条件

- 定理8.2: 设G是无向连通图,则

  (1) G是半欧拉图

⇔ (2) G中恰有2个奇度顶点 #





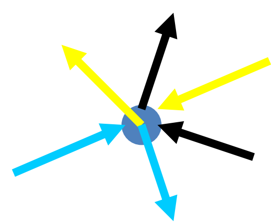
有向欧拉图的充分必要条件

- 定理8.3: 设G是有向连通图,则

  G是欧拉图

$\Leftrightarrow \forall v \in V(G),\ d^+(v)=d^-(v)$

$\Leftrightarrow$ G是若干个边不交有向圈的并 #

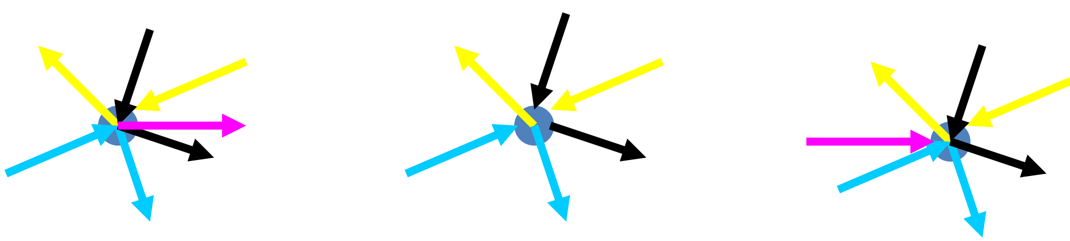


有向半欧拉图的充分必要条件

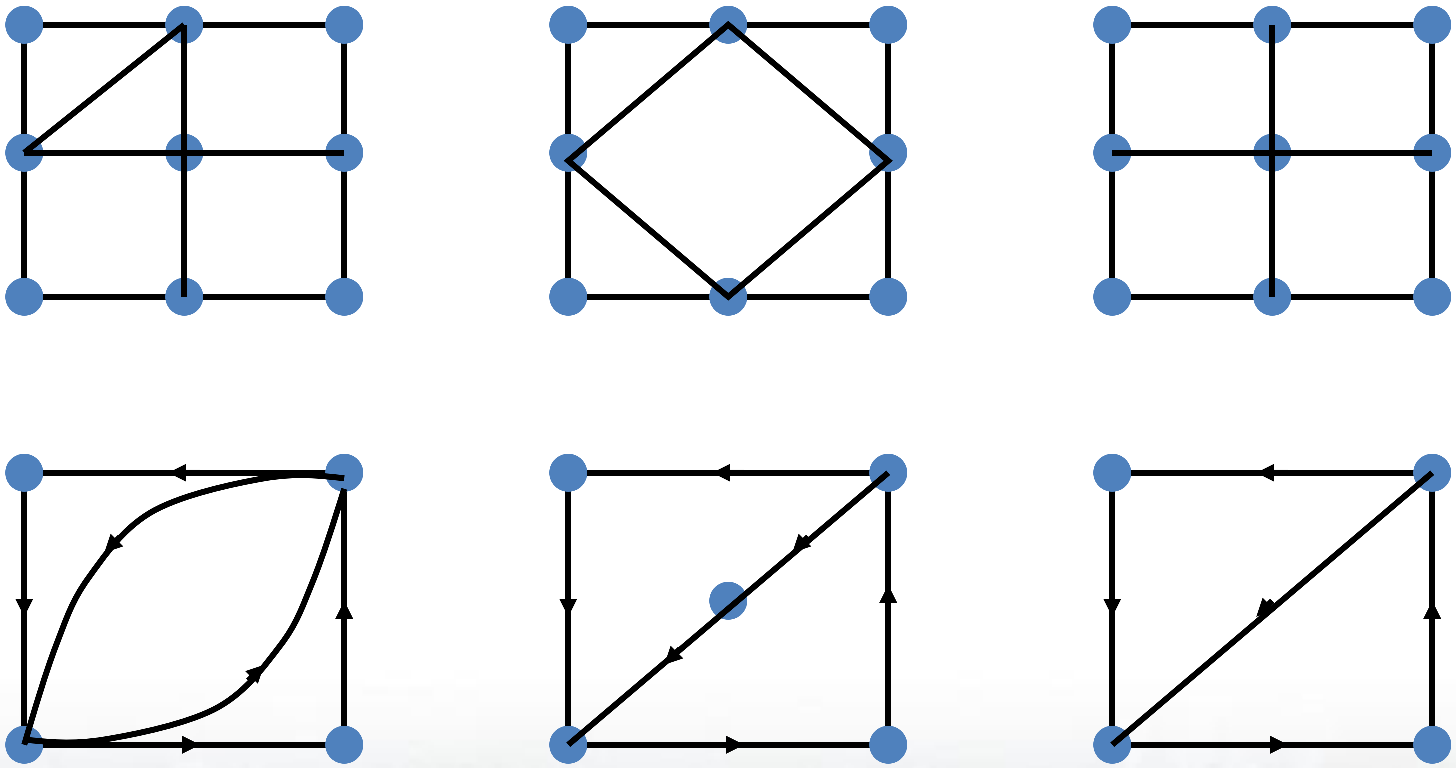
- 定理8.4: 设G是无向连通图,则

  G是半欧拉图

⇔ G中恰有2个奇度顶点, 其中1个入度比出度大1,另1个出度比入度大1, 其余顶点入度等于出度. #



例



Fleury算法(避桥法)

- 从任意一点开始, 沿着没有走过的边向前走
- 在每个顶点, 优先选择剩下的非桥边, 除非只有唯一一条边
- 直到得到欧拉回路或宣布失败

- 定理8.5: 设G是无向欧拉图,则Fleury算法终止时得到的简单通路是欧拉回路. #

Fleury算法(递归形式)

if d(v)>1 then e:=v关联的任意非割边

else e:=v关联的唯一边

u:=e的另一个端点.

递归地求G-e的从u到w的欧拉通路

把e接续在递归求出的通路上

Fleury算法(迭代形式)

(1) P_0:=v;

(2) 设$P_i=v_0e_1v_1e_2\ldots e_iv_i$已经行遍,

设 $G_i=G-\{e_1,e_2,\ldots,e_i\}$,

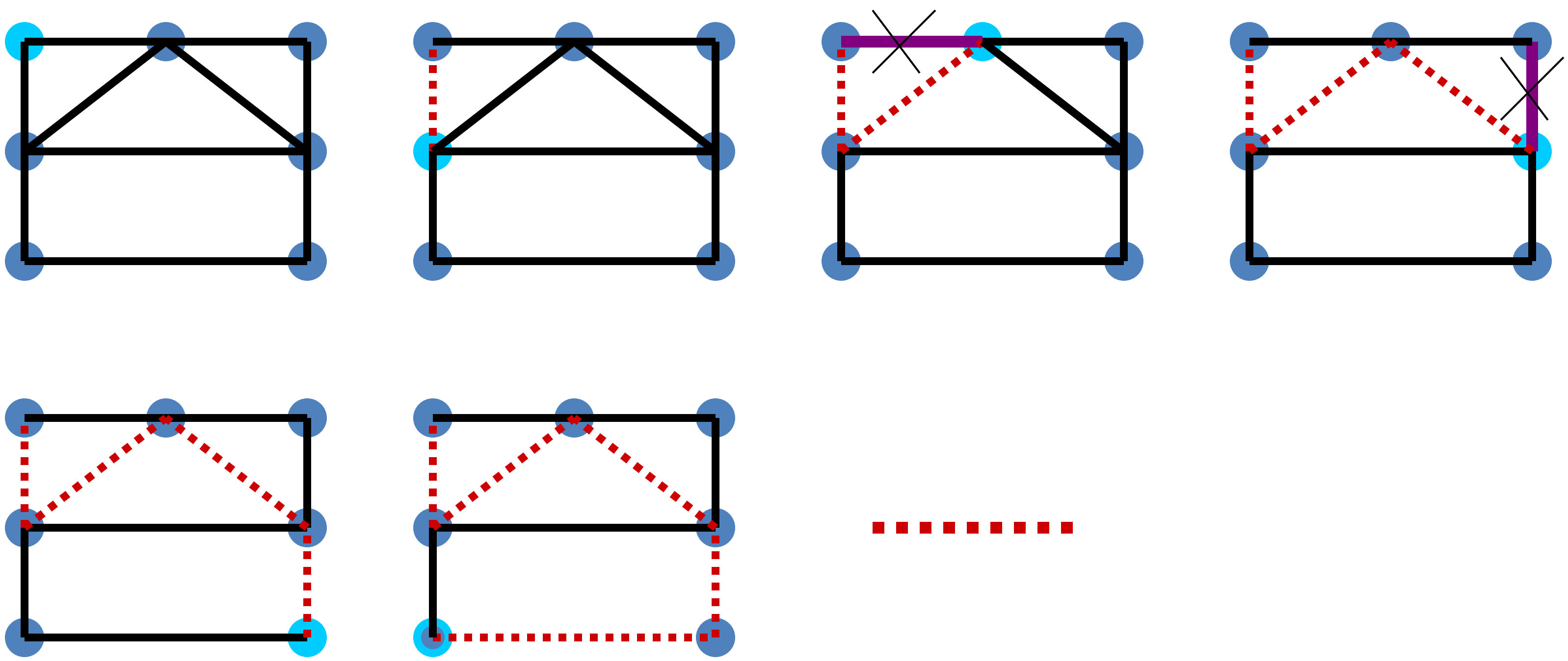
e_{i+1}:= G_i中满足如下2条件的边:

(a) e_{i+1}与v_i关联

(b) 除非别无选择,否则e_{i+1}不是G_i中的桥

(3) 若$G_i \neq N_i$, 则回到(2); 否则算法停止

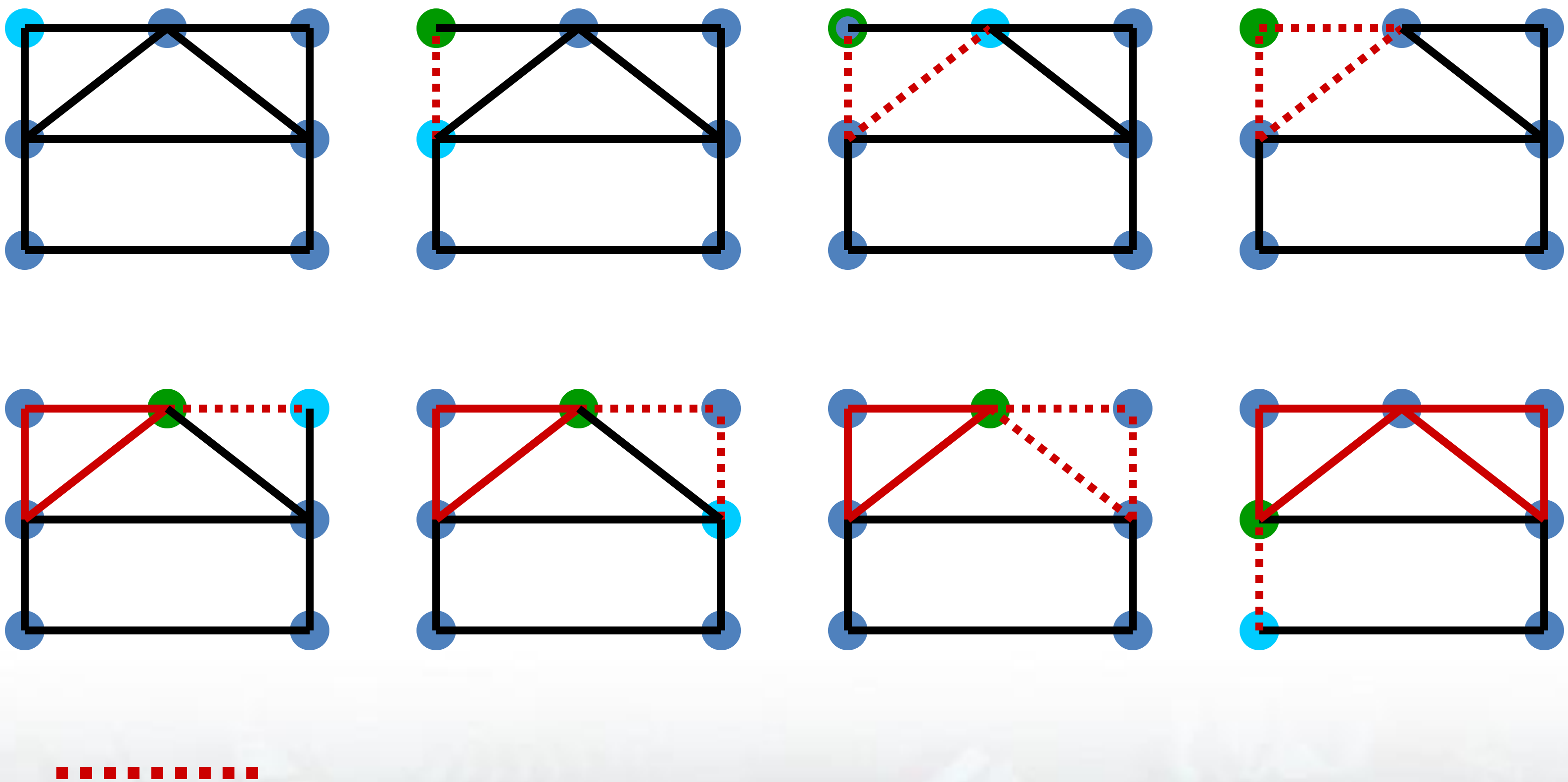
Fleury算法举例



逐步插入回路算法

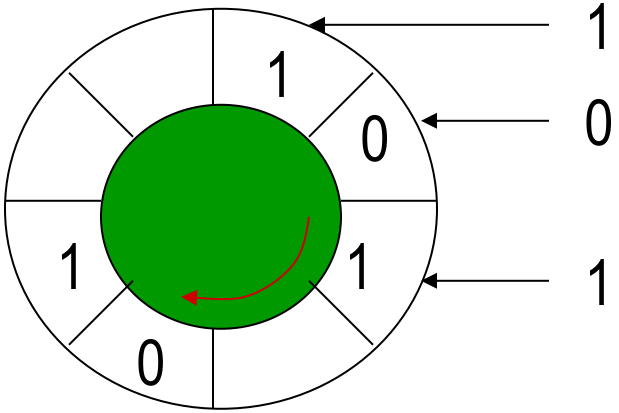
- 每次求出一个简单回路
- 把新求出的回路插入老回路, 合并成一个更大的回路
- 直到得到欧拉回路或宣布失败

逐步插入回路算法举例



轮盘设计

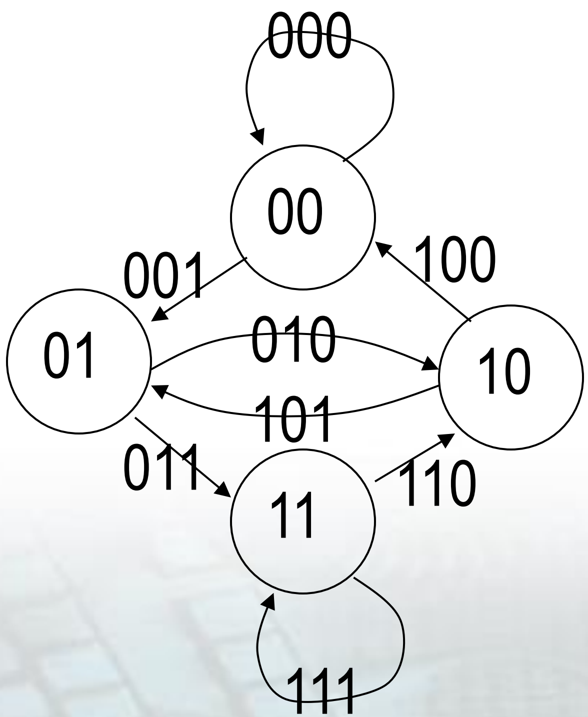
- 000,001,010,011,100,101,110,111

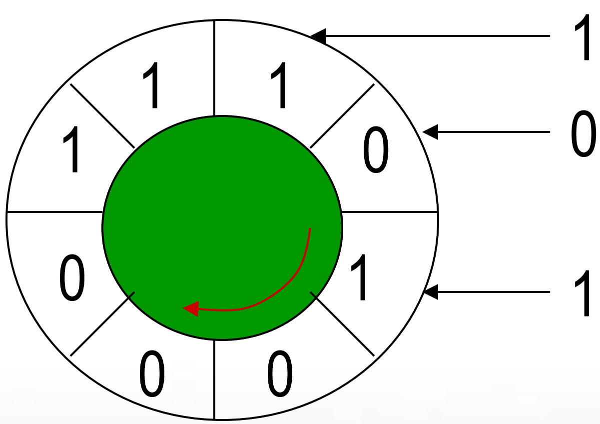


轮盘设计

- D=<V,E>, V={00,01,10,11},

  E={ abc=<ab,bc> | a,b,c∈{0,1} }





小结

- 欧拉图 **Easy**
  - 充要条件