第二十一章 基本计数公式

- 21.1 加法法则与乘法法则
- 21.2 排列组合
- 21.3 二项式定理与组合恒等式
- 21.4 多项式定理

21.1 加法法则与乘法法则

- 加法法则
- 乘法法则
- 应用实例

加法法则

加法法则：事件A有m种产生方式，事件B有n种产生方式，则“事件A或B”有$m+n$种产生方式。

使用条件：事件A与B产生方式不重叠

适用问题：分类选取

推广：事件A_1有n_1种产生方式，事件A_2有n_2种产生方式，…, 事件A_k有n_k种产生的方式，则“事件A_1或A_2或… A_k”有$n_1+n_2+\ldots+n_k$种产生的方式。

乘法法则

乘法法则：事件A有m种产生方式，事件B有n种产生方式，则"事件A与B"有mn种产生方式。

使用条件：事件A与B的产生方式相互独立

适用问题：分步选取

推广：事件A_1有n_1种产生方式，事件A_2有n_2种产生方式，…，事件A_k有n_k种产生的方式，则"事件A_1与A_2与…A_k"有$n_1n_2\dots n_k$种产生的方式。

应用实例

例1 设A,B,C是3个城市，从A到B有3条道路，从B到C有2条道路，从A直接到C有4条道路，问从A到C有多少种不同的方式?

解：$N = 3 \times 2 + 4 = 10$

例2 求1400的不同的正因子个数

解：$1400 = 2^3\, 5^2\, 7$，故正因子为：$2^i\, 5^j\, 7^k$，其中$0 \leq i \leq 3, 0 \leq j \leq 2, 0 \leq k \leq 1$，从而正因子个数

$$N = (3+1)(2+1)(1+1) = 24.$$

21.2 排列组合

- 选取问题
- 集合的排列与组合
- 基本计数公式的应用
- 多重集排列与组合

选取问题 --组合计数模型1

设$\boldsymbol{n}$元集合$\boldsymbol{S}$，从$\boldsymbol{S}$中选取$\boldsymbol{r}$个元素。

根据是否有序，是否允许重复可以将该问题分为四个子类型：

	不重复	重复
有序	集合排列$\boldsymbol{P(n,r)}$	多重集排列
无序	集合组合$\boldsymbol{C(n,r)}$	多重集组合

集合的排列

1．从n元集S中有序、不重复选取的r个元素称为S的一个r 排列，S的所有r排列的数目记作$P(n,r)$

$$P(n,r)=\begin{cases}\dfrac{n!}{(n-r)!} & r\le n\\ 0 & r>n\end{cases}$$

2．环排列

S 的 r 环排列数 $=\dfrac{P(n,r)}{r}$

集合的组合

3．从n元集S中无序、不重复选取的r个元素称为S的一个r组合，S的所有r组合的数目记作$C(n, r)$

$$C(n,r)=\begin{cases}\dfrac{P(n,r)}{r!} & n\geq r\\ 0 & n<r\end{cases}$$

4．$C(n,r)=C(n,n-r)$

证明方法:

公式代入

组合证明（一一对应）

基本计数公式的应用

例1 从1—300中任取3个数使得其和能被3整除有多少种方法?

解: $A=\{1, 4, \ldots, 298\}$

$B=\{2, 5, \ldots, 299\}$

$C=\{3, 6, \ldots, 300\}$

分类:

分别取自A, B, C: 各 $C(100, 3)$

A, B, C 各取1个: $C(100, 1)^3$

$N = 3C(100, 3) + 100^3 = 1485100$

基本计数公式的应用（续）

例2 求1000！的末尾有多少个0？

解：$1000!=1000\times 999\times 998\times\ldots\times 2\times 1$

将上面的每个因子分解，若分解式中共有i个5, j个2，那么$\min\{i, j\}$就是0的个数。1, … ,1000中有

500个是2的倍数，$j\geq 500$;

200个是5的倍数，

40个是25的倍数（多加40个5），

8个是125的倍数（再多加8个5），

1个是625的倍数（再多加1个5）

$i=200+40+8+1=249$. $\min\{i, j\}=249$.

多重集的排列

多重集的表示

$$S = \{n_1 \cdot a_1, n_2 \cdot a_2, \ldots, n_k \cdot a_k\},\ \ 0 < n_i \le +\infty$$

r 排列的计数结果

(1) 全排列r=n，$n_1 + n_2 + \ldots + n_k$=n时，$N = \dfrac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$

证明：分步选取.

$$N = C(n, n_1)C(n - n_1, n_2) \ldots C(n - n_1 - n_2 - \cdots - n_{k-1}, n_k)$$

$$= \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_k!}$$

(2) 当$r \le n_i$时，每个位置都有k 种选法，得 k^r.

多重集的组合

多重集 $S=\{n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2, \ldots, n_k\cdot a_k\}$的组合数为

$$N=C(k+r-1,r), \text{当} r\le n_i$$

证明: 一个r 组合为$\{x_1\cdot a_1, x_2\cdot a_2, \ldots, x_k\cdot a_k\}$,

其中 $x_1+x_2+\ldots+x_k=r$, x_i为非负整数。这个不定方程的非负整数解对应于下述排列

$$\underbrace{1\ldots1}_{x_1\text{个}}\ 0\ \underbrace{1\ldots1}_{x_2\text{个}}\ 0\ \underbrace{1\ldots1}_{x_3\text{个}}\ 0\ \ldots\ldots\ 0\ \underbrace{1\ldots1}_{x_k\text{个}}$$

r个1，k–1个0的全排列数为

$$N=\frac{(r+k-1)!}{r!(k-1)!}=C(k+r-1,r)$$

实例

例3 r个相同的球放到n个不同的盒子里，每个盒子球数不限，求放球方法数。

解： 设盒子的球数依次记为$x_1, x_2, \ldots, x_n$, 则满足

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=r,\quad x_1, x_2, \ldots, x_n\text{为非负整数},$$

放球方法数$N=C(n+r-1, r)$.

例4 排列26个字母，使得a与b之间恰有7个字母，求方法数。

解： 固定a和b，中间选7个字母，有$2P(24, 7)$种方法，将它看作大字母与其余17个全排列有18!种，因此，$N=2P(24,7)\times 18!$.

实例(续)

例5 (1) 10个男生，5个女生站成一排，若没有女生相邻，有多少种方法？

(2) 如果站成一个圆圈，有多少种方法？

解： (1) $P(10,10)\cdot P(11,5)$

(2) $P(10,10)P(10,5)/10$

实例(续)

例6 把2n个人分成n组，每组2人，有多少分法?

解： 相当于2n个不同的球放到n个相同的盒子，每个盒子2个球，放法数为

$$N = \binom{2n}{2}\binom{2n-2}{2}\binom{2n-4}{2}\cdots\binom{2}{2}/n! = \frac{(2n)!}{(2!)^n n!}$$

$$= \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

实例（续）

例7 9本不同的书，其中4本红皮，5本白皮，

(1) 9本书的排列方式数有多少?

(2) 若白皮书必须放在一起，那么有多少方法?

(3) 若白皮书必须放在一起，红皮书也必须放在一起，那么有多少方法?

(4) 若白皮和红皮书必须相间，有多少方法?

解：(1) 9!

(2) 5！ 5！

(3) 5！ 4！ 2！

(4) 5！ 4！