22.3 生成函数及其性质

- 生成函数的定义
- 牛顿二项式定理
- 生成函数的性质
- 生成函数与序列的对应关系

生成函数的定义

设序列$\{a_n\}$，构造形式幂级数

$$G(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

称$G(x)$为$\{a_n\}$的生成函数。

实例：

(1) $\{C(m,n)\}$的生成函数为

$$G(x)=1+C(m,1)x+C(m,2)x^2+\cdots=(1+x)^m$$

(2) 给定正整数k, $\{k^n\}$的生成函数为

$$G(x)=1+kx+k^2x^2+k^3x^3+\cdots=\frac{1}{1-kx}$$

牛顿（广义）二项式定理

牛顿二项式系数：

$$\binom{r}{n} = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 1 & n = 0 \\ \dfrac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{n!} & n > 0 \end{cases}$$

其中r为实数，n为整数

牛顿二项式定理：设α为实数，则对一切x, y，$|x/y|<1$有

$$(x+y)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n y^{\alpha-n},$$

其中$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$

牛顿二项式定理（续）

$(x+y)^{\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n y^{\alpha-n}$, 其中$\binom{\alpha}{n}=\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}$

当$\alpha=m$时，变成二项式定理

$$(x+y)^m=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{m}{n}x^n y^{m-n},$$

$$(1+z)^m=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{m}{n}z^n$$

生成函数的性质——线性与乘积

线性性质：

1. $b_n = \alpha a_n$，则$B(x) = \alpha A(x)$

2. $c_n = a_n + b_n$，则$C(x) = A(x) + B(x)$

乘积性质：

3. $c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$，则$C(x) = A(x) \cdot B(x)$

生成函数的性质——移位

$$4.\ b_n = \begin{cases} 0 & n < l \\ a_{n-l} & n \geq l \end{cases}，\ 则B(x) = x^l A(x)$$

$$a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$$

$$\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{l个0},\ b_l, b_{l+1}, \ldots, b_{l+n}, \ldots$$

$$5.\ b_n = a_{n+l}，\ 则B(x) = \frac{A(x) - \sum_{n=0}^{l-1} a_n x^n}{x^l}$$

$$a_0, a_1, \ldots, a_l, a_{l+1}, \ldots$$

$$b_0, b_1, \ldots$$

生成函数的性质——求和

6. $b_n=\sum_{i=0}^{n}a_i$，则$B(x)=\frac{A(x)}{1-x}$

$$b_0=a_0$$

$$b_1x=a_0x+a_1x$$

$$\dots$$

$$b_nx^n=a_0x^n+a_1x^n+\cdots+a_nx^n$$

$$\dots$$

$$B(x)=a_0\frac{1}{1-x}+a_1x\frac{1}{1-x}+\cdots+a_nx^n\frac{1}{1-x}+\cdots$$

生成函数的性质——求和

7. $b_n = \sum_{i=n}^{\infty} a_i$，且$A(1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_i$收敛，则$B(x) = \frac{A(1)-xA(x)}{1-x}$

证：因为$A(1) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i$收敛，故$b_n = \sum_{i=n}^{\infty} a_i$存在。

$b_0 \quad = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots = A(1),$

$b_1 x \;=\; a_1 x + a_2 x + \cdots = [A(1) - a_0]x,$

$b_2 x^2 = \quad a_2 x^2 + \cdots = [A(1) - a_0 - a_1]x^2,$

…

$b_n x^n = \quad a_n x^n + \cdots = [A(1) - a_0 - \cdots - a_{n-1}]x^n,$

…

将以上各式两边分别相加得

$B(x) = A(1) + [A(1) - a_0]x + [A(1) - a_0 - a_1] + \cdots + [A(1) - a_0 - \cdots - a_{n-1}]x^n + \cdots$

$= A(1)(1 + x + x^2 + \cdots) - a_0 x(1 + x + x^2 + \cdots) - a_1 x^2(1 + x + x^2 + \cdots) - \cdots$

$= [A(1) - x(a_0 + a_1 x + \cdots)](1 + x + x^2 + \cdots)$

$= \dfrac{A(1) - xA(x)}{1 - x}$

生成函数性质—换元与微积分

换元性质：

8． $b_n=\alpha^n a_n$, 则$B(x)=A(\alpha x)$

求导与积分性质：

9． $b_n = na_n$, 则$B(x) = xA'(x)$

10． $b_n = \frac{a_n}{n+1}$, 则$B(x) = \frac{1}{x}\int_0^x A(x)dx$

生成函数与序列的对应

1. 给定序列$\{a_n\}$或关于a_n的递推方程, 求生成函数$G(x)$

利用级数的性质和下述重要级数

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{k} x^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!} x^k$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} 1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2k-3)}{2^k k!} x^k$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} (2k-2)!}{2^k k! \cdot 2^{k-1} (k-1)!} x^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2^{2k-1} k} \binom{2k-2}{k-1} x^k$$

实例

8．$b_n=\alpha^n a_n$，则 $B(x)=A(\alpha x)$
1．$b_n=\alpha a_n$，则 $B(x)=\alpha A(x)$

例1 求序列$\{a_n\}$的生成函数

(1) $a_n = 7\cdot 3^n$　　(2) $a_n = n(n+1)$

解：(1) 设$b_n=1$，则$\{b_n\}$的生成函数为$\frac{1}{1-x}$，令

$$c_n = 3^n = 3^n b_n$$

由性质8知$\{c_n\}$的生成函数为$\frac{1}{1-3x}$，进而由性质1知

$\{a_n\}$的生成函数为$\frac{7}{1-3x}$.

也可如下直接求：

$$G(x) = 7\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n = 7\sum_{n=0}^{\infty} (3x)^n = \frac{7}{1-3x}$$

实例

例1 求序列$\{a_n\}$的生成函数

(1) $a_n = 7\cdot 3^n$　　(2) $a_n = n(n+1)$

解：(2) $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)x^n$

$$\int_0^x G(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n+1} = x^2 H(x), H(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$$

$$\int_0^x H(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}, \qquad H(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\int_0^x G(x)dx = \frac{x^2}{(1-x)^2} \qquad G(x) = \left(\frac{x^2}{(1-x)^2}\right)' = \frac{2x}{(1-x)^3}$$

生成函数与序列的对应(续)

2. 给定序列$\{a_n\}$的生成函数$G(x)$, 求a_n

待定系数法

例2 $G(x)=\frac{2}{1-3x+2x^2}=\frac{A}{1-x}+\frac{B}{1-2x}$

$$\begin{cases} A+B=2 \\ -2A-B=0 \end{cases} \Rightarrow A=-2,\ B=4$$

$$G(x)=\frac{-2}{1-x}+\frac{4}{1-2x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-2)x^n+\sum_{n=0}^{\infty}4(2x)^n$$

$$a_n=-2+4\cdot 2^n$$

22.4 生成函数的应用

- 求解递推方程
- 计数多重集的r组合数
- 不定方程的解
- 整数拆分

求解递推方程

例1 $a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 0$， $a_0 = 1, a_1 = -2$

$$
\begin{aligned}
G(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots \\
-5xG(x) &= \quad -5a_0x - 5a_1x^2 - 5a_2x^3 - \ldots \\
6x^2G(x) &= \quad\quad +6a_0x^2 + 6a_1x^3 + \ldots
\end{aligned}
$$

$$(1-5x+6x^2)G(x) = a_0 + (a_1-5a_0)x$$

$$G(x) = \frac{1-7x}{1-5x+6x^2} = \frac{5}{1-2x} - \frac{4}{1-3x}$$

$$= 5\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n - 4\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n$$

$$a_n = 5 \cdot 2^n - 4 \cdot 3^n$$

求解递推方程(续)

例2 $\begin{cases} h_n = \sum_{k=1}^{n-1} h_k h_{n-k}, & n \geq 2 \\ h_1 = 1 \end{cases}$

解：设$\{h_n\}$的生成函数为$H(x) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n x^n$

$$\begin{aligned} H^2(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} h_k x^k \cdot \sum_{l=1}^{\infty} h_l x^l \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} x^n \sum_{k=1}^{n-1} h_k h_{n-k} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} h_n x^n \\ &= H(x) - h_1 x \\ &= H(x) - x \end{aligned}$$

求解递推方程(续)

$$(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2^{2k-1}k}\binom{2k-2}{k-1}x^k$$

$$H^2(x)-H(x)+x=0,$$

$$H(x)=\frac{1-(1-4x)^{\frac{1}{2}}}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(1-4x)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n2^{2n-1}}\binom{2n-2}{n-1}(-4)^n\right]$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n2^{2n}}\binom{2n-2}{n-1}(-1)^n2^{2n}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}x^n$$

$$h_n=\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$$

(0, 0)到(n, n)除端点外不接触对角线的非降路径数$=\frac{2}{n}\binom{2n-2}{n-1}$

多重集的r组合数

$S=\{n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2,\ldots, n_k\cdot a_k\}$的$r$组合数就是不定方程

$$x_1+x_2+\cdots+x_k=r$$

$$x_i \le n_i$$

的非负整数解的个数。

$N = C(k+r-1,r)$, 当$r \le n_i$

证明：一个r组合为

$\{x_1\cdot a_1, x_2\cdot a_2, \ldots, x_k\cdot a_k\}$,

其中 $x_1+x_2+\ldots+x_k=r$, x_i为非负整数

这个不定方程的非负整数解对应于下述排列

$$\underbrace{1\ldots1}_{x_1个}\ 0\ \underbrace{1\ldots1}_{x_2个}\ 0\ \underbrace{1\ldots1}_{x_3个}\ 0\ \ldots\ldots\ 0\ \underbrace{1\ldots1}_{x_k个}$$

r个1，$k-1$个0的全排列数为

$$N=\frac{(r+k-1)!}{r!(k-1)!}=C(k+r-1,r)$$

生成函数

$$G(y) = (1+y+\cdots+y^{n_1})(1+y+\cdots+y^{n_2})\cdots(1+y+\cdots+y^{n_k})$$

中y^r的系数。

多重集的 r 组合数(续)

例3 S ={ $3\cdot a$, $4\cdot b$, $5\cdot c$ }的10组合数

解：生成函数$G(y)$

$= (1+y+y^2+y^3)(1+y+y^2+y^3+y^4)(1+y+y^2+y^3+y^4+y^5)$

$= (1+2y+3y^2+4y^3+4y^4+3y^5+2y^6+y^7)(1+y+y^2+y^3+y^4+y^5)$

$= (1 + \cdots +3y^{10}+2y^{10}+y^{10} + \cdots)$

$N = 6$

{$a, a, a, b, b, b, b, c, c, c$}, {$a, a, a, b, b, b, c, c, c, c$},

{$a, a, a, b, b, c, c, c, c, c$}, {$a, a, b, b, b, b, c, c, c, c$},

{$a, a, b, b, b, c, c, c, c, c$}, {$a, b, b, b, b, c, c, c, c, c$}

不定方程非负整数解的个数

基本模型：$x_1+x_2+\cdots+x_k=r$，x_i为自然数

$$G(y)=(1+y+\cdots)^k=\frac{1}{(1-y)^k}$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-k)(-k-1)\cdots(-k-r+1)}{r!}(-y)^r$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r k(k+1)\cdots(k+r-1)}{r!}(-1)^r y^r$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\binom{k+r-1}{r}y^r \quad \Longrightarrow N=\binom{k+r-1}{r}$$

$N=C(k+r-1,r)$, 当$r\le n_i$

证明：一个r组合为

$$\{x_1\cdot a_1, x_2\cdot a_2, \ldots, x_k\cdot a_k\},$$

其中$x_1+x_2+\ldots+x_k=r$，x_i为非负整数

这个不定方程的非负整数解对应于下述排列

$$\underbrace{1\ldots1}_{x_1个}\ 0\ \underbrace{1\ldots1}_{x_2个}\ 0\ \underbrace{1\ldots1}_{x_3个}\ 0\ \ldots\ldots\ 0\ \underbrace{1\ldots1}_{x_k个}$$

r个1，$k-1$个0的全排列数为

$$N=\frac{(r+k-1)!}{r!(k-1)!}=C(k+r-1,r)$$

不定方程非负整数解的个数(续)

带限制条件：$x_1+x_2+\cdots+x_k=r$，$l_i \le x_i \le n_i$

生成函数

$$G(y) = \left(y^{l_1} + y^{l_1+1} + \cdots + y^{n_1}\right)\left(y^{l_2} + y^{l_2+1} + \cdots + y^{n_2}\right)$$
$$\cdots\left(y^{l_k} + y^{l_k+1} + \cdots + y^{n_k}\right)$$

带系数：$p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_kx_k=r$，$x_i \in N$

生成函数

$$G(y) = \left(1 + y^{p_1} + y^{2p_1} + \cdots\right)\left(1 + y^{p_2} + y^{2p_2} + \cdots\right)$$
$$\cdots\left(1 + y^{p_k} + y^{2p_k} + \cdots\right)$$

不定方程非负整数解的个数(续)

例4 1克砝码2个，2克砝码1个，4克砝码2个，问能称出哪些重量，方案有多少？

解：$x_1+2x_2+4x_3=r$

$$0 \le x_1 \le 2,\ 0 \le x_2 \le 1,\ 0 \le x_3 \le 2$$

$$G(y) = (1+y+y^2)(1+y^2)(1+y^4+y^8)$$

$$= 1+y+2y^2+y^3+2y^4+y^5+2y^6+y^7+2y^8+y^9+2y^{10}+y^{11}+y^{12}$$

重量	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
方案	1	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	1

不定方程非负整数解的个数(续)

如果重物放右边，允许砝码放在天平两边（同种砝码放一侧），则

$G(y)=(y^{-2}+y^{-1}+1+y+y^2)(y^{-2}+1+y^2)(y^{-8}+y^{-4}+1+y^4+y^8)$

$=\cdots+5+3y+4y^2+3y^3+5y^4+3y^5+4y^6+3y^7+4y^8+2y^9+2y^{10}+y^{11}+y^{12}$

称0克： | ； 1, 1 | 2； 1, 1, 2 | 4； 4 | 1, 1, 2； 2 | 1, 1

称1克： 1 | 1； 2 | 1, 1； 4 | 1, 2, 1

称2克： 1, 1 | 2； 2 | 2； 4 | 1, 1, 2； 4 | 2, 2

正整数的拆分

- 拆分的定义与分类
- 无序拆分
- 有序拆分

拆分的定义与分类

	有序	无序
不重复	4 = 4 4 = 1+3 4 = 3+1	4 = 4 4 = 1+3
重复	4 = 4 4 = 1+3 4 = 3+1 4 = 2+2 4 = 2+1+1 4 = 1+2+1 4 = 1+1+2 4 = 1+1+1+1	4 = 4 4 = 1+3 4 = 2+2 4 = 2+1+1 4 = 1+1+1+1

无序拆分

基本模型：将N无序拆分成正整数$a_1, a_2, \ldots, a_n$

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=N$$

不允许重复$G(y)=(1+y^{a_1})(1+y^{a_2})\ldots(1+y^{a_n})$

允许重复

$$G(y)=\left(1+y^{a_1}+y^{2a_1}+\cdots\right)\left(1+y^{a_2}+y^{2a_2}+\cdots\right)$$
$$\cdots\left(1+y^{a_n}+y^{2a_n}+\cdots\right)$$
$$=\frac{1}{(1-y^{a_1})(1-y^{a_2})\ldots(1-y^{a_n})}$$

实例

例5 证明任何正整数都可以唯一表示成2进制数。

证： 对应于将任何正整数N拆分成2的幂，

$2^0, 2^1, 2^2, 2^3, \ldots,$ 且不允许重复。

$$G(y) = (1+y)(1+y^2)(1+y^4)(1+y^8)\cdots$$

$$= \frac{1-y^2}{1-y}\frac{1-y^4}{1-y^2}\frac{1-y^8}{1-y^4}\cdots$$

$$= \frac{1}{1-y}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} y^n$$

对于所有的n, a_n=1，这就证明了存在且仅有一种表法。

有限制条件的无序拆分

将N无序拆分成正整数$a_1, a_2, \dots, a_n$

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = N$$

限制条件：$l_i \le x_i \le t_i$,

转变为方程非负整数解的问题：

$$G(y) = \cdots\left(y^{l_i a_i} + y^{(l_i+1)a_i} + \dots + y^{t_i a_i}\right)\cdots$$

有限制条件的无序拆分

例6 给定r, 求N允许重复无序拆分成k个数($k \le r$)的方法数。

解 N允许重复无序拆分成k个数($k \le r$)的方案

$\Leftrightarrow$ N允许重复无序拆分成不超过k, $k \le r$, 的正整数的方案

做下述Ferrers图

将图以$y=x$对角线翻转180度，

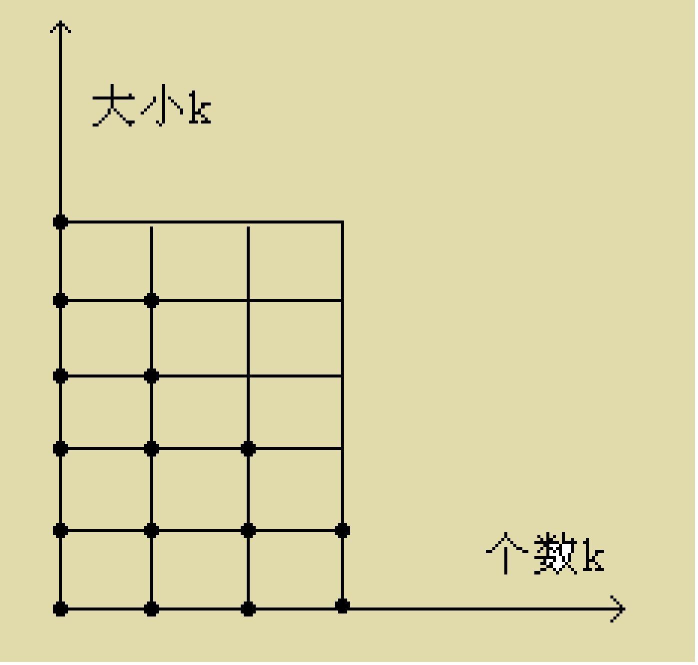
得到共轭的Ferrers图，

16 = 6+5+3+2 （$k \le 4$）

对应每个数不超过4的拆分.

16 = 4+4+3+2+2+1

这种拆分数的生成函数为



$$G(y) = \frac{1}{(1-y)(1-y^2)\dots(1-y^r)}$$

有序拆分

(1) 将N允许重复地有序拆分成r个部分的方案数为$C(N\text{-}1, r\text{-}1)$

方法一：一一对应. 设 $N= a_1+a_2+\cdots+a_r$ 是满足条件的拆分，则令

$$S_i=\sum_{k=1}^{i}a_i\,,\ \ i=1,2,\dots,r$$

$$0<S_1<S_2<\cdots<S_r=N$$

r-1个S_i取值为1, 2,…, N-1，方法数为$C(N\text{-}1, r\text{-}1)$

推论： 对N做任意重复的有序拆分，方案数为

$$\sum_{r=1}^{N}\binom{N-1}{r-1}=2^{N-1}$$

有序拆分(续)

$$\frac{1}{(1-y)^k}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-k)(-k-1)\ldots(-k-r+1)}{r!}(-y)^r$$
$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r k(k+1)\ldots(k+r-1)}{r!}(-1)^r y^r=\sum_{r=0}^{\infty}\binom{k+r-1}{r}y^r$$

方法二：生成函数. $G(y) = (y+y^2+y^3+\ldots)^r$ 中 y^N 项的系数.

$$G(y)=\left(y+y^2+\cdots\right)^r=\frac{y^r}{(1-y)^r}$$

$$=\sum_{N=0}^{\infty}\binom{N-r+r-1}{N-r}y^N=\sum_{N=0}^{\infty}\binom{N-1}{N-r}y^N=\sum_{N=0}^{\infty}\binom{N-1}{r-1}y^N$$

所求的方法数为$\binom{N-1}{r-1}$

(2) 不允许重复有序拆分：不允许重复无序拆分+全排列 (see PPT p.26)