单元2.6 序关系

第一编 集合论　第2章 二元关系

2.8 序关系

内容提要

- 偏序关系、偏序集、哈斯图；
- 全序关系、全序集
- 拟序关系、拟序集、三歧性
- 拟全序关系、拟全序序集；
- 良序、良序集
- 最大元、最小元、极大元、极小元、上界、下界、上确界、下确界
- 链、反链

偏序关系、偏序集

定义2. 19 设 $A\neq\varnothing$，$R\subseteq A\times A$，若R是自反、反对称、传递的，则称 R 为 A 上的**偏序关系**。常用 $\preccurlyeq$ 表示偏序关系，读作“小于等于”

$$<x,y>\in R \ \Leftrightarrow\ xRy \ \Leftrightarrow\ x\preccurlyeq y$$

定义2. 20 设 $\preccurlyeq$ 是 A 上偏序关系，称 $<A,\preccurlyeq>$ 为**偏序集**。

例2.15(1)(2)

- (1) $\varnothing \neq A \subseteq R$, $<A,\leq>$, $<A,\geq>$

$$\leq \, = \{ <x,y> \mid x,y \in A \wedge x \leq y \}$$

$$\geq \, = \{ <x,y> \mid x,y \in A \wedge x \geq y \}$$

- (2) $\varnothing \neq A \subseteq Z_+ = \{x \mid x \in Z \wedge x > 0\}$, $<A,\mid>$

$$\mid \, = \{ <x,y> \mid x,y \in A \wedge x \mid y \}$$

北京大学

例2.15(3) $<\mathcal{A},\subseteq>$

- $\mathcal{A}\subseteq P(A)$, $\subseteq=\{<x,y>|x,y\in\mathcal{A}\wedge x\subseteq y\}$
- $A=\{a,b\}$, $\mathcal{A}_1=\{\varnothing,\{a\},\{b\}\}$, $\mathcal{A}_2=\{\{a\},\{a,b\}\}$,

$\mathcal{A}_3=P(A)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$

$\subseteq_1=I_{\mathcal{A}1}\cup\{<\varnothing,\{a\}>,<\varnothing,\{b\}>\}$

$\subseteq_2=I_{\mathcal{A}2}\cup\{<\{a\},\{a,b\}>\}$

$\subseteq_3=I_{\mathcal{A}3}\cup\{<\varnothing,\{a\}>,<\varnothing,\{b\}>,<\varnothing,\{a,b\}>,$

$<\{a\},\{a,b\}>, <\{b\},\{a,b\}>\}$

例2.15(4) $<\pi,\preccurlyeq_{加细}>$

- $A\neq\varnothing$, π是由A的一些划分组成的集合

$$\preccurlyeq_{加细}=\{<x,y>|x,y\in\pi\wedge x是y的加细\}$$

- $A=\{a,b,c\}$, $\mathcal{A}_1=\{\{a,b,c\}\}$, $\mathcal{A}_2=\{\{a\},\{b,c\}\}$,

$\mathcal{A}_3=\{\{b\},\{a,c\}\}$,$\mathcal{A}_4=\{\{c\},\{a,b\}\}$,$\mathcal{A}_5=\{\{a\},\{b\},\{c\}\}$

$\pi_1=\{\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2\}$, $\pi_2=\{\mathcal{A}_2,\mathcal{A}_3\}$, $\pi_3=\{\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2,\mathcal{A}_3,\mathcal{A}_4,\mathcal{A}_5\}$

$\preccurlyeq_1=I_{\pi1}\cup\{<\mathcal{A}_2,\mathcal{A}_1>\}$, $\preccurlyeq_2=I_{\pi2}$,

$\preccurlyeq_3=I_{\pi3}\cup\{<\mathcal{A}_2,\mathcal{A}_1>,<\mathcal{A}_3,\mathcal{A}_1>,<\mathcal{A}_4,\mathcal{A}_1>,<\mathcal{A}_5,\mathcal{A}_1>,$

$<\mathcal{A}_5,\mathcal{A}_2>,<\mathcal{A}_5,\mathcal{A}_3>,<\mathcal{A}_5,\mathcal{A}_4>\}$

可比, 严格小于, 覆盖

定义2. 21 设$<A,\preccurlyeq>$是偏序集，$x,y\in A$。

若 $x\preccurlyeq y \vee y\preccurlyeq x$，则称 x 与 y **可比**。

若 x 与 y 可比且不相等，则说 x 严格小于 y，即

$$x\preccurlyeq y \wedge x\neq y \Leftrightarrow x\prec y$$

若 x 严格小于 y，且不存在 z，使得 x 严格小于 z、z 严格小于 y，则称 y **覆盖** x，即

$$x\prec y \wedge \neg\exists z(\, z\in A\wedge x\prec z\prec y\,)$$

哈斯图

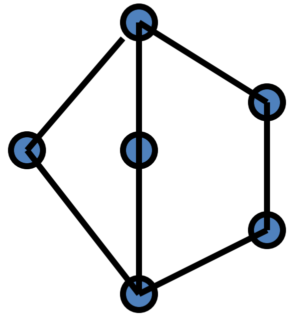
- 设<A,≼>是偏序集，x,y∈A。

- **哈斯图**：

  (1) 用顶点表示A中元素

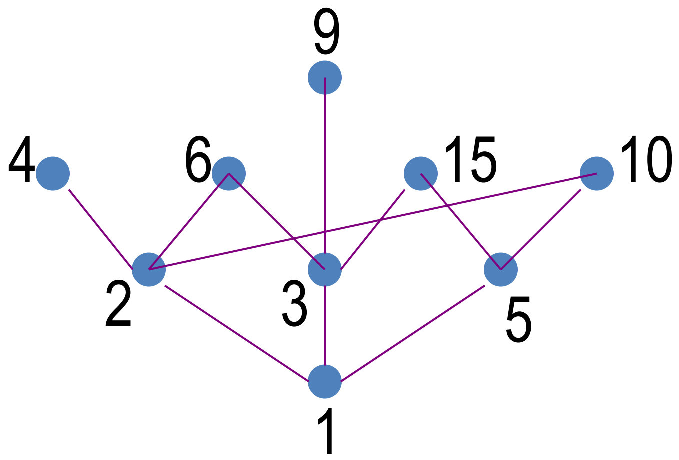
  (2) 当且仅当y覆盖x时, y在x上方,

  在x与y之间画无向边



例16(1)

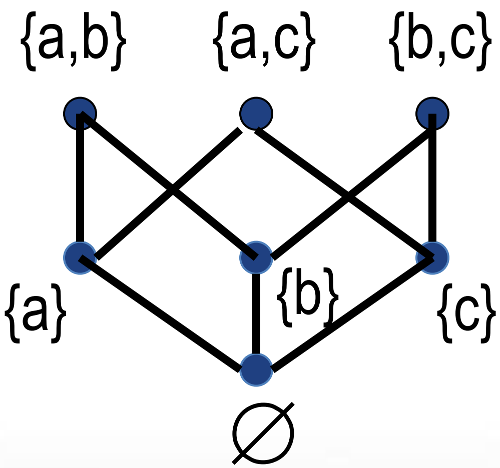
- A={1,2,3,4,5,6,9,10,15}, <A,|>



例16(2)

- A={a,b,c}, $\mathcal{A}\subseteq$P(A), <$\mathcal{A}$,$\subseteq$>

  $\mathcal{A}$={∅,{a},{b},{c},{a,b},{b,c},{a,c}}



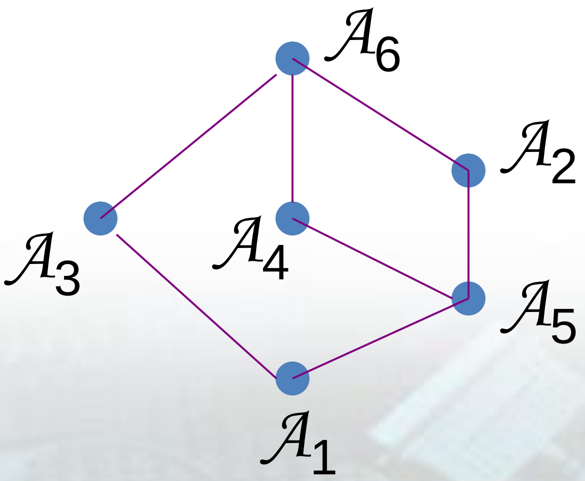
例16(3)

- A={a,b,c,d}, $\pi=\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_6\}$, $<\pi, \preccurlyeq_{\text{加细}}>$

$\mathcal{A}_1$={ {a},{b},{c},{d} }, $\mathcal{A}_2$={ {a,b},{c,d} },

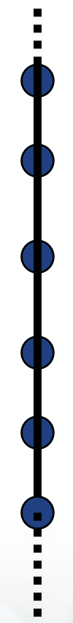
$\mathcal{A}_3$={ {a,c},{b,d} }, $\mathcal{A}_4$={ {a},{b,c,d} },

$\mathcal{A}_5$={ {a},{b},{c,d} }, $\mathcal{A}_6$={ {a,b,c,d} }



全序关系(线序关系)

定义2. 22 设 <A,≼> 是偏序集，若 A 中任意元素 x,y 都可比，则称 ≼ 为 A 上的**全序关系(线性关系)**，称 <A,≼>为**全序集(线序集)**。



例： $\varnothing \neq A \subseteq R$ (实数) , <A, ≤ >, <A, ≥ >

充要条件：哈斯图是一条“直线”

拟序关系

定义2.23 设A≠∅，R⊆A×A。若 R 是反自反、传递的，则称 R 为 A 上的**拟序关系**，常用 $\prec$ 表示拟序关系，称 $<A,\prec>$ 为拟序集。

说明：反自反性 与 传递性 蕴涵 反对称性

(反证) $x\prec y \wedge y\prec x \Rightarrow x\prec x$, 矛盾!

拟序关系举例

- 设$\emptyset \neq A \subseteq R$ (实数集), $<A, < >, <A, > >$

- $\emptyset \neq B \subseteq Z_+$ (正整数集), $<B, |'>$,

  $$|' = \{ <x,y> \mid x,y \in B \wedge x|y \wedge x \neq y \}$$

- $<\mathcal{A}, \subset >$

定理2.29

定理2. 29 设 $\preccurlyeq$ 是非空集合 **A** 上偏序关系， $\prec$ 是 **A** 上拟序关系，则

(1) $\prec$ 是反对称的；

(2) $\preccurlyeq - I_A$ 是**A**上拟序关系；

(3) $\prec \cup I_A$ 是**A**上偏序关系。 **#**

定理2.30

定理2.30 设$\prec$是非空集合A上拟序关系，则

(1) $x\prec y$, $x=y$, $y\prec x$中至多有一式成立

(2) $(x\prec y \vee x=y) \wedge (y\prec x \vee x=y) \Rightarrow x=y$

证明 (1) (反证) 两式以上成立导致 $x\prec x$，矛盾！

(2) (反证) 由左端已知条件，

$x\neq y \Rightarrow (x\prec y) \wedge (y\prec x)$，与(1)矛盾！ #

三歧性、拟线序

定义2.24 设 $A\neq\varnothing$，$\prec$ 是 A 上拟序关系，若

$$x\prec y,\ x=y,\ y\prec x$$

中有且仅有一式成立，则称 $\prec$ 具有**三歧性**，同时称 $\prec$ 为 A 上的**拟线序关系(拟全序关系)**，称 $\langle A,\prec\rangle$ 为**拟线序集**。

偏序关系中的特殊元素

- 最大元, 最小元
- 极大元, 极小元
- 上界, 下界
- 最小上界(上确界), 最大下界(下确界)

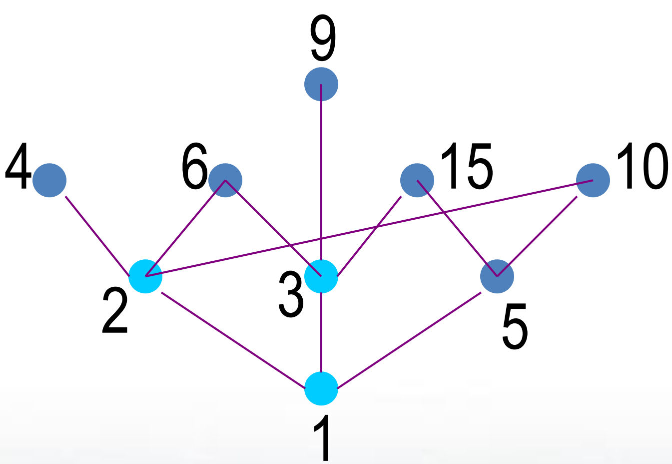
最大元, 最小元

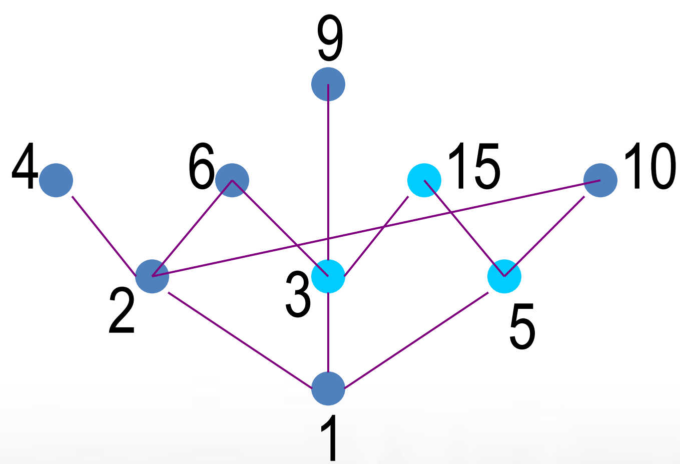
- 设$\langle A,\preccurlyeq\rangle$为偏序集, $B\subseteq A$, $y\in B$
- y是B的最大元(maximum/greatest element) $\Leftrightarrow$
  $\forall x(\, x\in B \rightarrow x\preccurlyeq y\,)$
- y是B的最小元(minimum/least element) $\Leftrightarrow$
  $\forall x(\, x\in B \rightarrow y\preccurlyeq x\,)$

北京大学

最大元, 最小元举例

- B_1={1,2,3}, B_2={3,5,15}, B_3=A
  最大元: B_1 无 , B_2 15, B_3 无
  最小元: B_1 1, B_2 无, B_3 1





极大元, 极小元

- 设$<A,\preccurlyeq>$为偏序集, $B\subseteq A$, $y\in B$
- y是B的极大元(maximal element) $\Leftrightarrow$

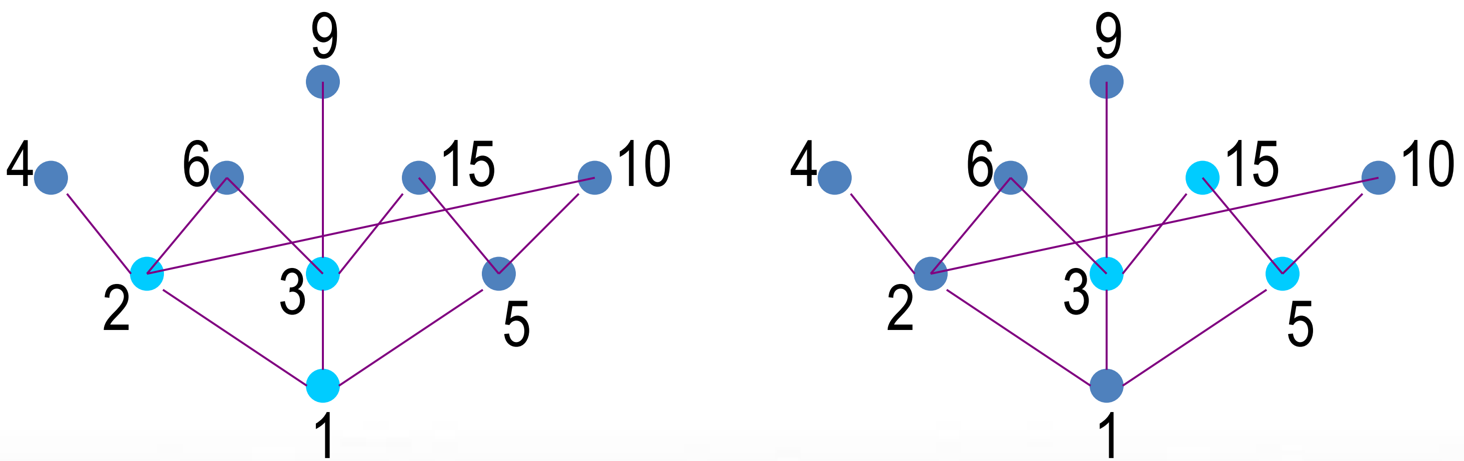
  $$\forall x(\ x\in B \land y\preccurlyeq x \to x=y\ )$$

- y是B的极小元(minimal element) $\Leftrightarrow$

  $$\forall x(\ x\in B \land x\preccurlyeq y \to x=y\ )$$

极大元, 极小元举例

- 极大元: B_1 2,3, B_2 15, B_3 4,6,9,15,10,
  极小元: B_1 1, B_2 3,5, B_3 1



上界, 下界

- 设$\langle A, \preccurlyeq \rangle$为偏序集, $B \subseteq A$, $y \in A$
- y是B的上界(upper bound) $\Leftrightarrow$

  $$\forall x(x \in B \rightarrow x \preccurlyeq y)$$

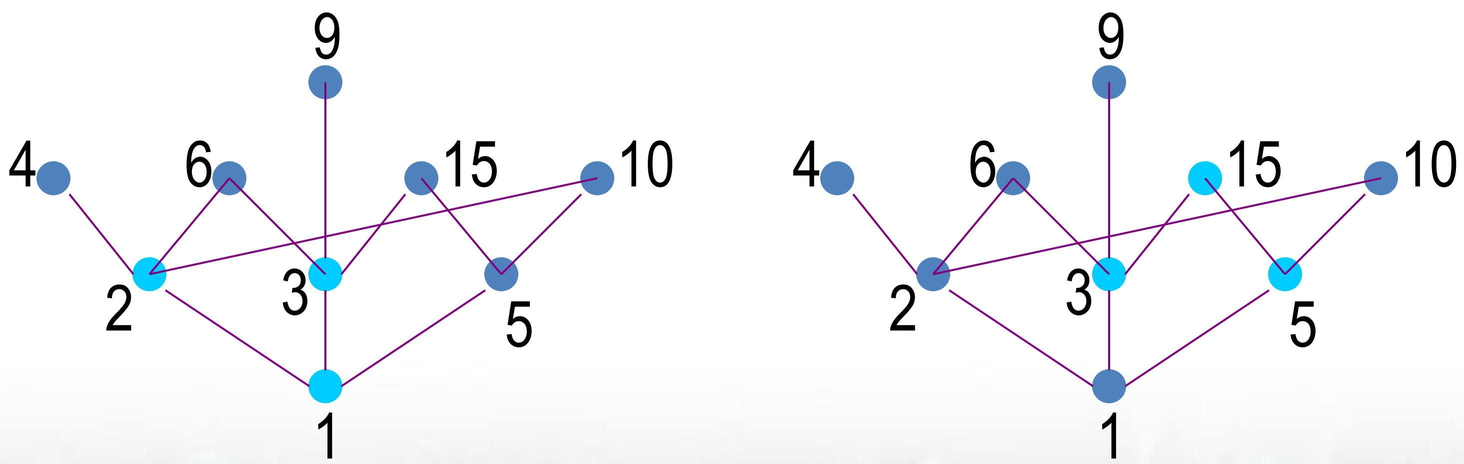
- y是B的下界(lower bound) $\Leftrightarrow$

  $$\forall x(x \in B \rightarrow y \preccurlyeq x)$$

上界, 下界举例

- 上界: B_1 6, B_2 15, B_3 无

- 下界: B_1 1, B_2 1, B_3 1



最小上界, 最大下界

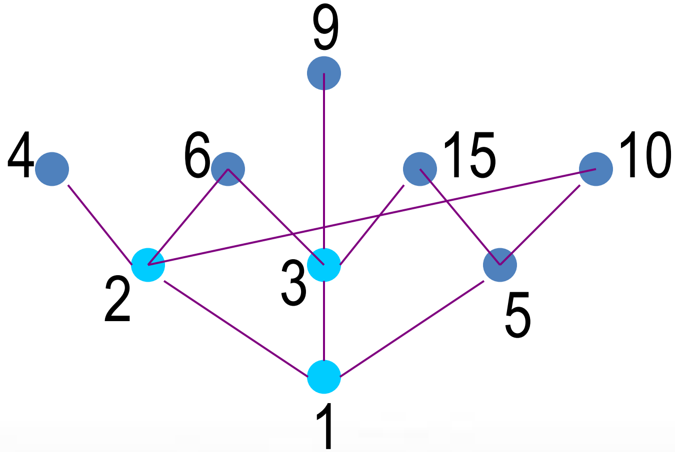
- 设<A,≼>为偏序集, B⊆A

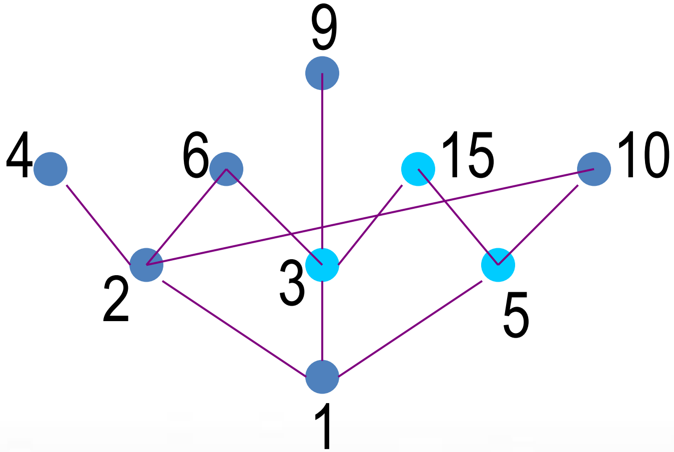
- C={y|y是B的上界}, C的最小元称为B的最小上界(least upper bound), 或上确界

- D={y|y是B的下界}, D的最大元称为B的最大下界(greatest lower bound), 或下确界

最小上界,最大下界举例

- 最小上界: B_1 6, B_2 15, B_3 无
- 最大下界: B_1 1, B_2 1, B_3 1





链, 反链

- 设<A,≼>为偏序集, B⊆A,
- B是A中的链(chain) ⇔

$$\forall x \forall y(\ x \in B \wedge y \in B \rightarrow x\text{与}y\text{可比}\ )$$

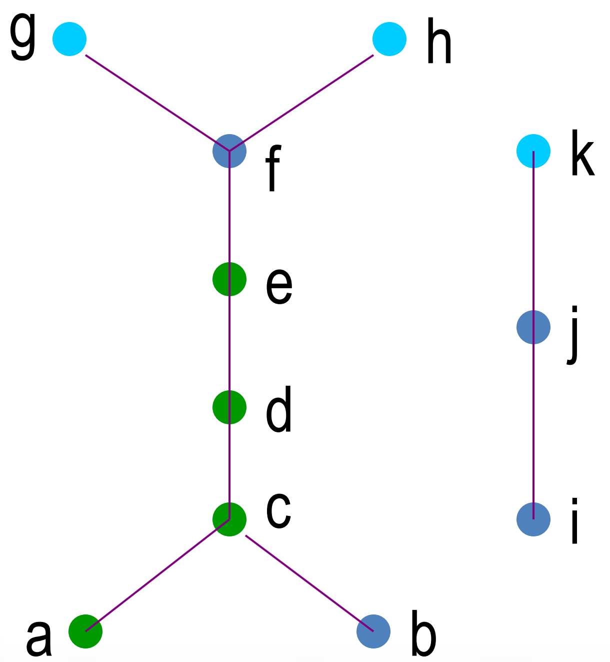
- B是A中的反链(antichain) ⇔

$$\forall x \forall y(\ x \in B \wedge y \in B \wedge x \neq y \rightarrow x\text{与}y\text{不可比}\ )$$

- |B|称为(反)链的长度

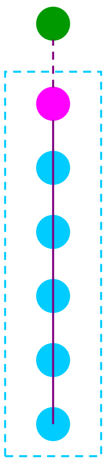
链, 反链举例

- A={a,b,…,k}.
- 链: {a,c,d,e}, {a,e,h}, {b,g}
- 反链: {g,h,k}, {e,j}, {a,k}
- {a}既是链, 也是反链
- {a,b,g,h}既非链, 亦非反链



定理2.31

定理2. 31 设$\langle A,\preccurlyeq\rangle$为偏序集，A中最长链长度为n，则(1) A中存在极大元； (2) A存在n个划分块的划分，使得每个划分块都是反链。



证明 (1)设B是A中最长链, |B|=n，则B有最大元y，y是A的极大元, 否则A中还有比y “大”的元素z， B就不是最长链.

(2) 令 A_1={ x | x是A中的极大元 },

A_2={ x | x是$(A-A_1)$中的极大元 }, ……

A_n={ x | x是$(A-A_1-\ldots-A_{n-1})$中的极大元 },

$\mathcal{A}=\{A_1,A_2,\ldots,A_n\}$是所求的划分. #

定理31(2)举例

最长链长度为6,

$A_1 = \{ g, h, k \}$,

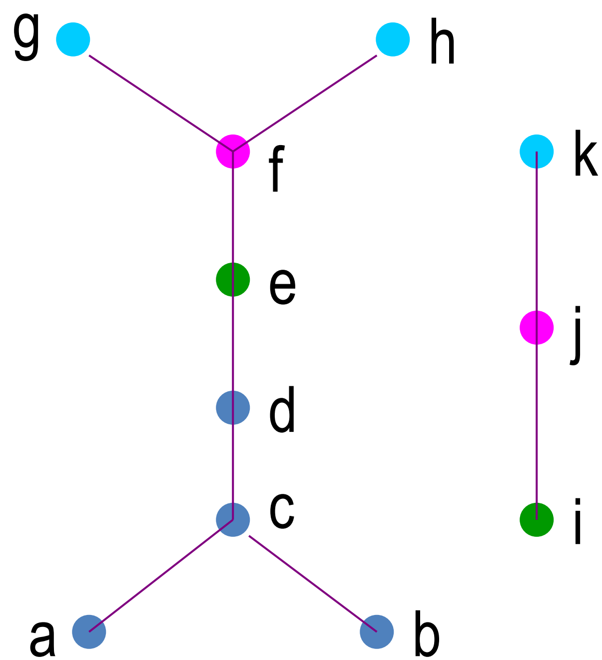
$A_2 = \{ f, j \}$,

$A_3 = \{ e, i \}$,

$A_4 = \{ d \}$,

$A_5 = \{ c \}$,

$A_6 = \{ a, b \}$,



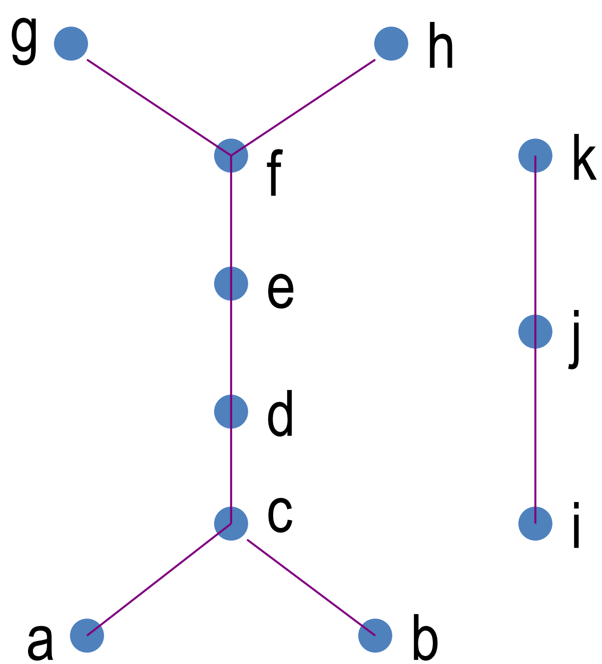
$\mathcal{A} = \{ \{a,b\}, \{c\}, \{d\}, \{e,i\}, \{f,j\}, \{g,h,k\} \}$

推论

推论 设<A,≼>为偏序集, 若|A|=mn+1, 则A中要么存在长度为m+1的反链, 要么存在长度为n+1的链

证明 (反证) 假设A中既没有长度为m+1的反链, 也没有长度为n+1的链, 则按照定理31(2)中要求来划分A, A至多划分成n块, 每块至多m个元素, 于是A中至多有mn个元素, 这与|A|=mn+1矛盾! #

例



最长链长度为6, 如

$B_1=\{a,c,d,e,f,h\}$, $B_2=\{a,c,d,e,f,g\}$,

$A=\{a,b,\ldots,k\}$可以划分为

$\mathcal{A}_1=\{\ \{a,b,i\}, \{c,j\}, \{d\}, \{e\}, \{f\}, \{g,h,k\}\ \}$,

$\mathcal{A}_2=\{\ \{a,b\}, \{c,i\}, \{d,j\}, \{e,k\}, \{f\}, \{g,h\}\ \}$

$|A|=11=2\times5+1$,

A中既有长度为2+1=3的反链,

也有长度为5+1=6的链

良序关系

定义2. 28 设<A,<>为(拟)全序集，若 A 的任何非空子集 B 均有最小元，则称 ≺ 为 A 上的良序关系，称 <A,<> 为良序集 。

例: <N,< >是良序集，<Z,< >不是良序集

小结

- $\preccurlyeq$ 偏序关系(自反、反对称、传递)
  - 哈斯图
  - 特殊元素
  - 链, 反链
  - 线序
- $\prec$拟序(反自反、反对称、传递)
  - 三歧性
  - 良序