单元5.1 集合的等势、有穷集与无穷集

第一编 集合论 第5章 基数

5.1 集合的等势

5.2 有穷集与无穷集

内容提要

- 集合的等势
- 有穷集合与无穷集合

自然数的两个基本性质

- 匹配(matching): 多少,大小(基数)----双射

$$\{a\} \to \{0\}=1$$

$$\{a,b\} \to \{0,1\}=2$$

$$\{a,b,c\} \to \{0,1,2\}=3\ldots$$

- 计数(counting): 首尾,先后(序数)----良序

$$0\to1\to2\to3\to\ldots$$

$$a\to b$$

$$a\to b\to c$$

……

等势

集合A与B等势 $\Leftrightarrow$ ∃双射 $f: A \to B$。记作 $A \approx B$

例子： $N \approx N_{偶} = \{ n \mid n \in N \wedge n为偶数 \}$

$f: N \to N_{偶}$, $f(n)=2n$

$N \approx N_{奇} = \{ n \mid n \in N \wedge n为奇数 \}$

$g: N \to N_{奇}$, $g(n)=2n+1$

$N \approx N_{2^n} = \{ x \mid x=2^n \wedge n \in N \}$

$h: N \to N_{2^n}$, $h(n)=2^n$

容易证明，f,g,h都是双射

定理5.1

(1) $Z \approx N$

(2) $N \times N \approx N$

(3) $N \approx Q$

(4) $(0,1) \approx R$

(5) $[0,1] \approx (0,1)$

定理5.1证明(1)

- (1) $Z \approx N$

- 证明: 取$f: Z \to N$,

$$f(n) = \begin{cases} 0, & n=0 \\ 2n, & n>0 \\ 2|n|-1, & n<0 \end{cases}$$

容易证明, f是双射. $\therefore Z \approx N$

定理5.1证明(2)

- (2) $N \times N \approx N$

- 证明: 例3.6, $f:N \times N \to N$,

$$f(\langle i,j \rangle)=2^i(2j+1)-1$$

定理5.1证明(3)

- (3) N ≈ Q
- 证明: f:N→Q, f(n)=编号[n]的既约分数

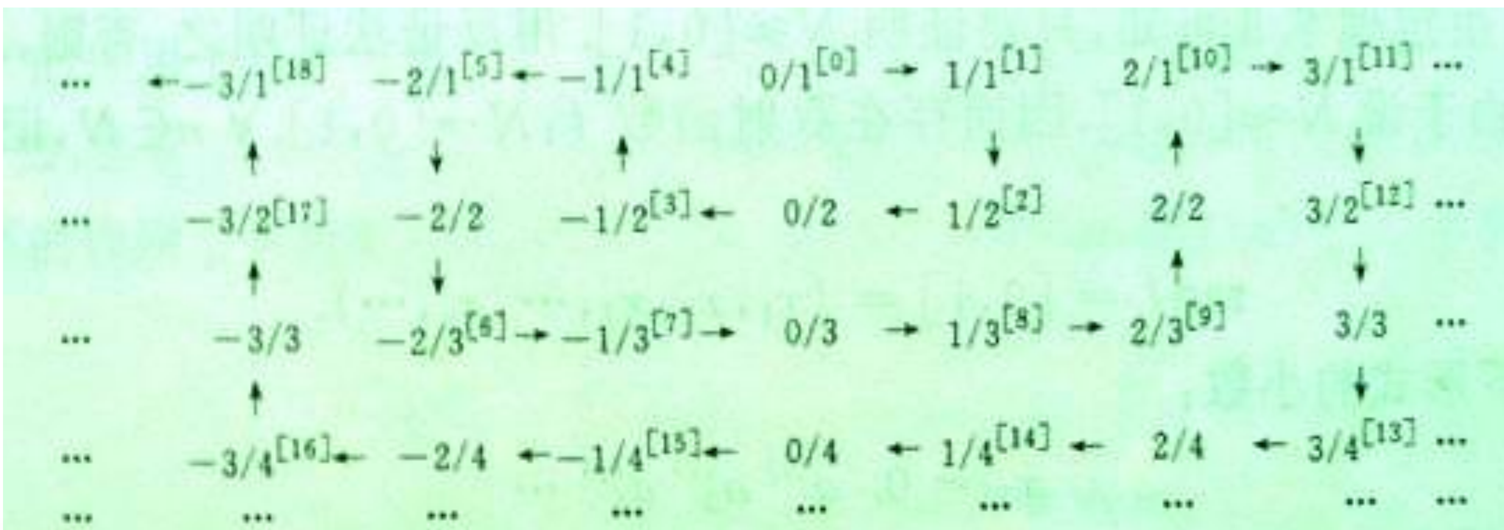
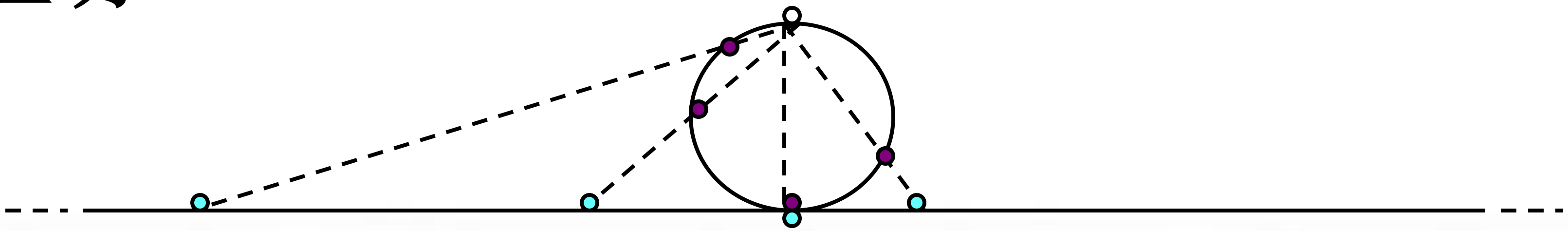


图 5.1

定理5.1证明(4)

- (4) $(0,1) \approx R$
- 证明一: f: $(0,1)\to R$, $f(x)=tg\,(x-1/2)\pi$
- 证明二:



定理5.1证明(5)

- (5) $[0,1] \approx (0,1)$

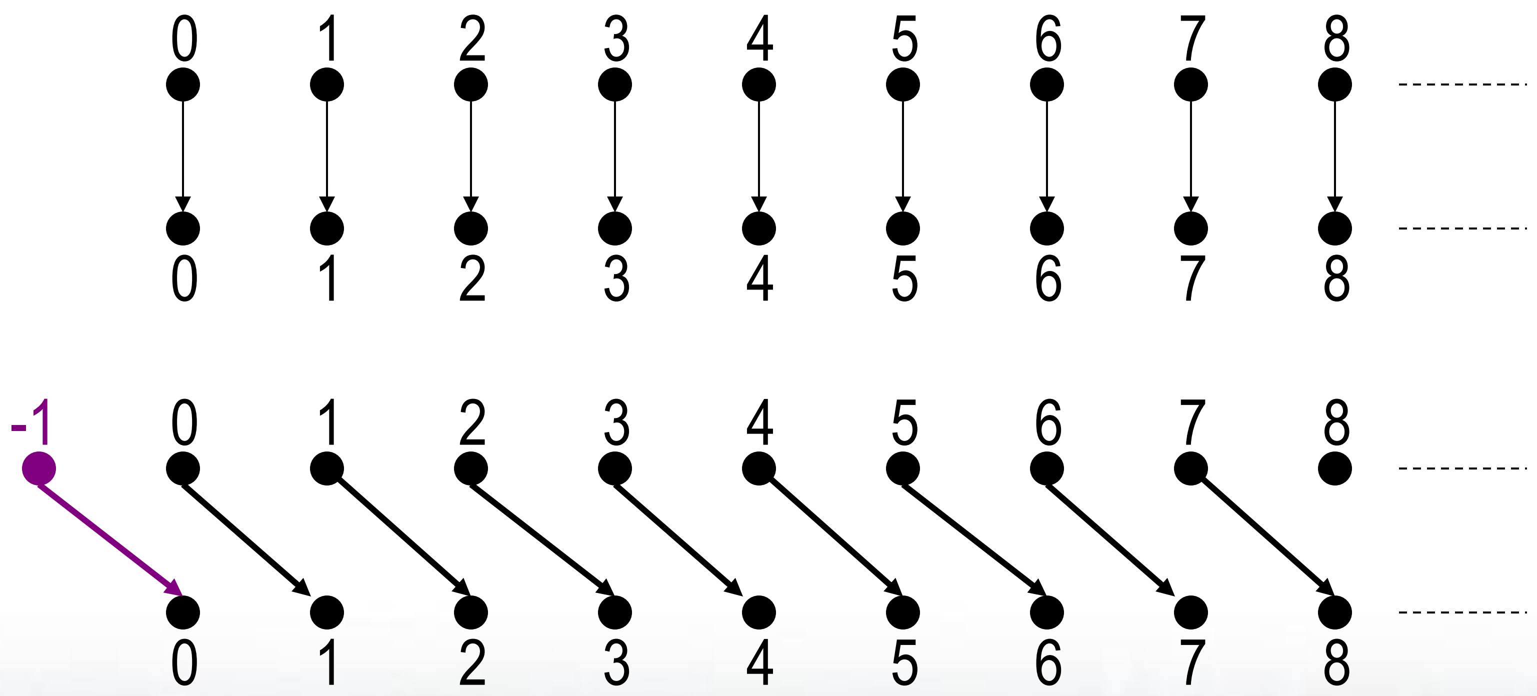
- 证明: $f: [0,1]\to(0,1)$,

$$f(x) = \begin{cases} 1/2, & x=0 \\ 1/(n+2), & x=1/n,\ n\in N-\{0\} \\ x, & \text{其他} \end{cases}$$

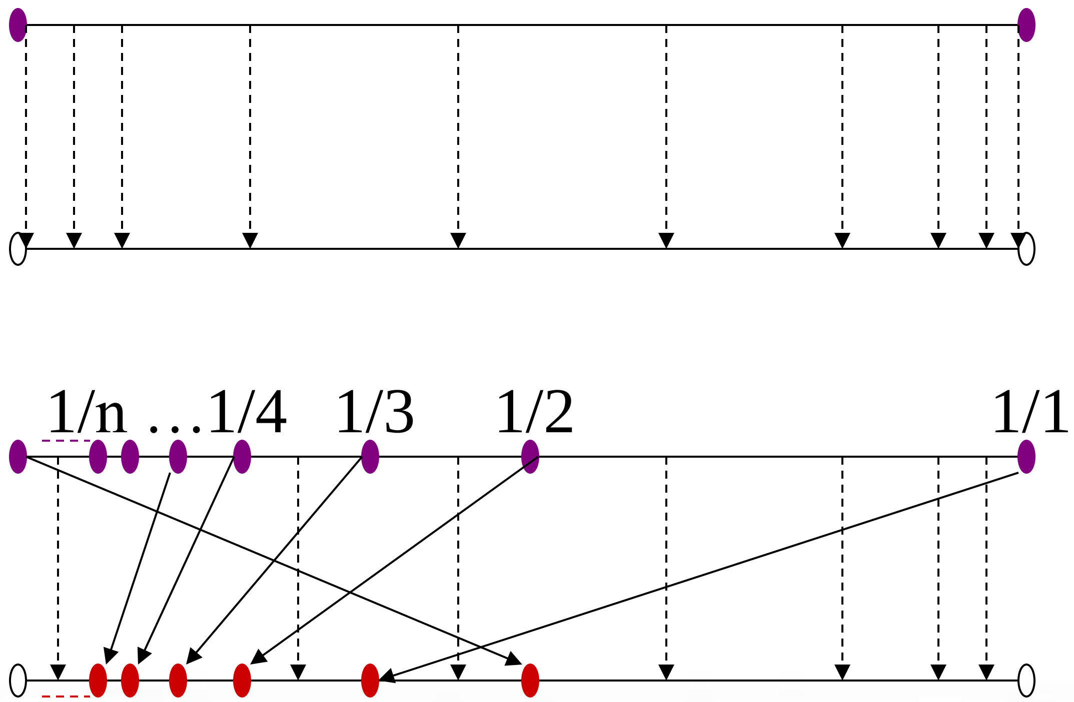
可以证明, f是双射, $\therefore [0,1]\approx(0,1)$ #

Hilbert旅馆

- 有自然数那么多间房子



[0,1]≈(0,1)



定理5.2

定理5. 2　$P(A) \approx 2^A = A \to 2$

(说明　$2^A=\{0,1\}^A=A\to\{0,1\}=\{f \mid f:A\to 2\}$)

证明:　取$H: P(A)\to 2^A$, $H(B)=\chi_B:A\to\{0,1\}$,

χ_B是B的特征函数, $\chi_B(x)=1 \Leftrightarrow x\in B$.

(1) H是单射. 设$B_1,B_2 \subseteq A$且$B_1\neq B_2$, 则

$H(B_1)=\chi_{B1}\neq\chi_{B2}=H(B_2)$.

(2) H是满射. 任给$f:A\to 2$, 令

$B=\{x\in A \mid f(x)=1\}\subseteq A$, 则$H(B)=\chi_B=f$.　#

定理5.3

- 对任意集合A,B,C,

  (1) $A \approx A$

  (2) $A \approx B \Rightarrow B \approx A$

  (3) $A \approx B \wedge B \approx C \Rightarrow A \approx C$

- 等势关系是等价关系

定理5.3证明要点

- 自反: $A \approx A$

  $I_A: A \to A$ 双射

- 对称: $A \approx B \Rightarrow B \approx A$

  $f: A \to B$ 双射 $\Rightarrow f^{-1}: B \to A$ 双射

- 传递: $A \approx B \wedge B \approx C \Rightarrow A \approx C$

  $f: A \to B,\ g: B \to C$ 双射 $\Rightarrow g \circ f: A \to C$ 双射

已知等势关系

- $N \approx Z \approx Q \approx N \times N$
- $(0,1) \approx [0,1] \approx R$
- $N \approx R$?

定理5.4(康托定理)

(1) $\mathbf{N} \not\approx \mathbf{R}$

(2) 对任意集合A,

$A \not\approx P(A)$

康托定理证明(1)

- (1) $N \not\approx R$

- 证明: (反证) 假设$N \approx R \approx [0,1]$,

  则存在$f: N \to [0,1]$双射,

  $\forall n \in N$, 令$f(n)=x_{n+1}$,

  于是$\mathrm{ran}\, f = [0,1] = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots\}$

  将x_i表示成如下小数:

康托定理证明(1)

$$x_1=0.a_1^{(1)}a_2^{(1)}a_3^{(1)}\ldots\ldots$$

$$x_2=0.a_1^{(2)}a_2^{(2)}a_3^{(2)}\ldots\ldots$$

$$x_3=0.a_1^{(3)}a_2^{(3)}a_3^{(3)}\ldots\ldots$$

$$\vdots$$

$$x_n=0.a_1^{(n)}a_2^{(n)}a_3^{(n)}\ldots\ldots$$

$$\vdots$$

其中 $0\leq a_j^{(i)}\leq 9$, $i,j=1,2,\ldots$

康托定理证明(1)

为了使这种表示法惟一,

当第r位本身不是9, 但第r位以后全为9时,

将这些9都改为0, 在第r位上加1.

例如,

0.9999…记作1.0000…

0.14999…记作0.15000…

康托定理证明(1)

下面选一个[0,1]中的小数

$x=0.b_1b_2b_3\ldots\ldots$

使得

(1) $0\le b_j\le 9$, $i=1,2,\ldots$

(2) $b_n\neq a_n^{(n)}$

(3) 对x也注意表示的惟一性

康托定理证明(1)

由x的构造可知,

$x \in [0,1]$,

$x \notin \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots\}$

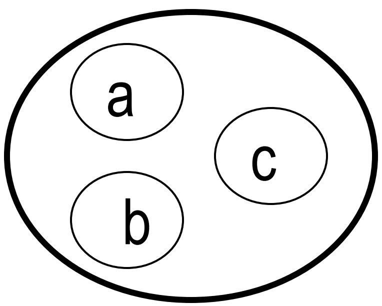
(x与x_n在第n位上不同).

这与

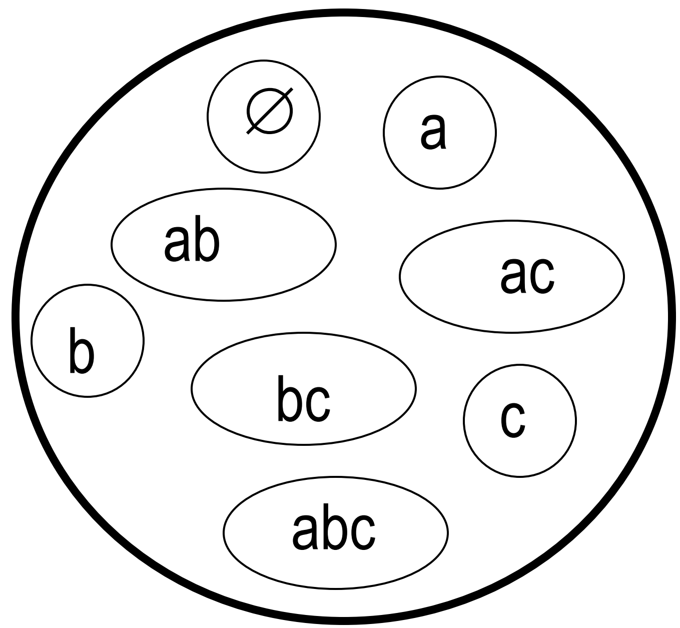
$[0,1]=\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots\}$矛盾!

康托定理证明(2)

- (2) $A \not\approx P(A)$

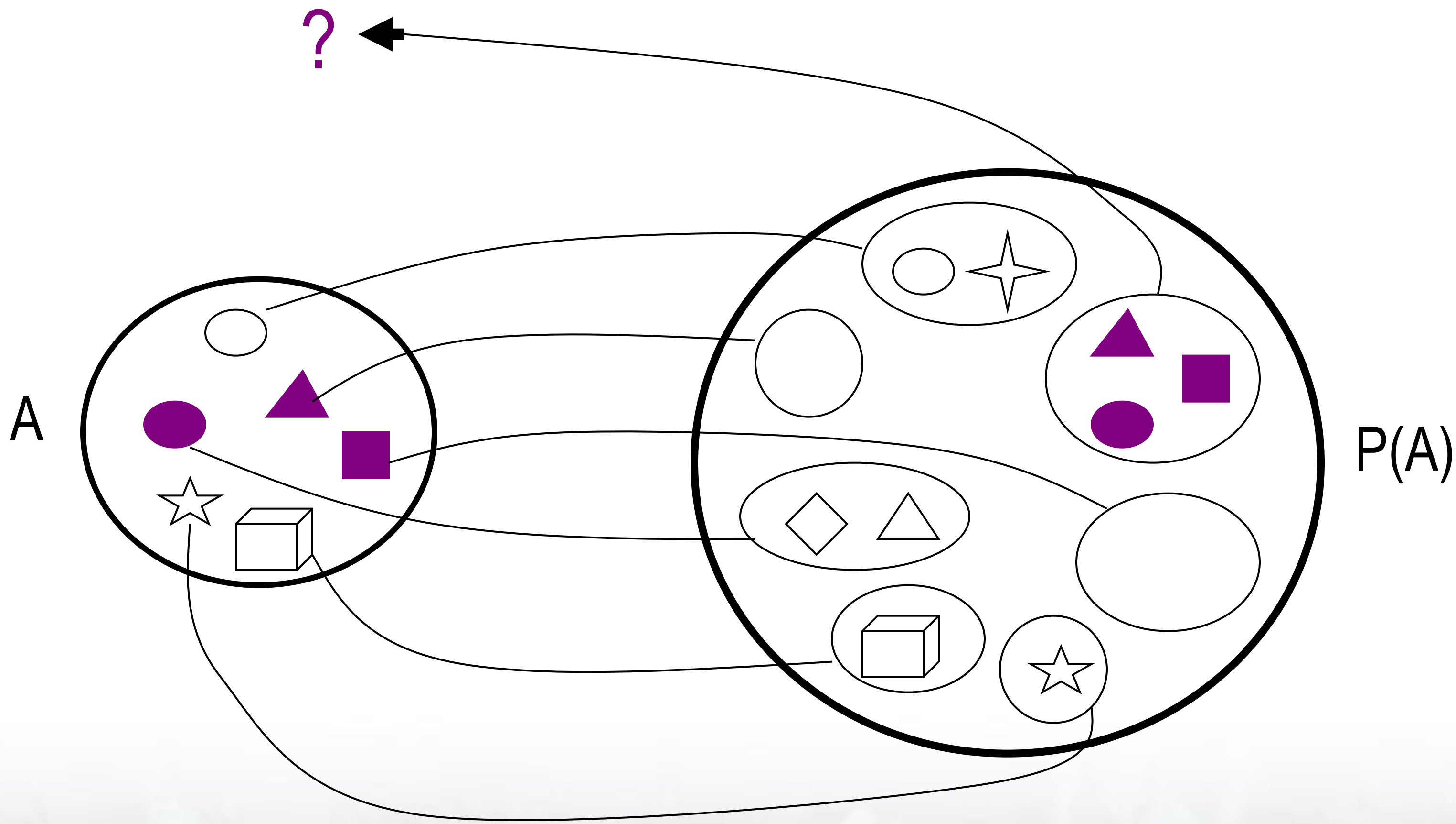


A



P(A)

康托定理证明(2)



康托定理证明(2)

- (2) 对任意集合A, $A \not\approx P(A)$.

- 证明: (反证) 假设存在双射 $f:A \to P(A)$, 令
  $B = \{ x \in A \mid x \notin f(x) \} \in P(A)$
  由于f是双射, 存在x_0使得$f(x_0)=B$, 则
  $$x_0 \in B \Leftrightarrow x_0 \notin f(x_0) \Leftrightarrow x_0 \notin B,$$
  矛盾! #

有穷集

- 有穷集(finite set) ⇔

与某个自然数n等势的集合

⇔ 不能与自身真子集建立双射的集合

无穷集

- 无穷集(infinite set) ⇔

  不与某个自然数n等势的集合

  ⇔ 能与自身真子集建立双射的集合

Bernhard Bolzano

- Bernhard Bolzano(1781~1848),
  - Czech人, 1851,“Paradoxes of the Infinite”
  - 首次使用“set”一词
  - 给出无穷集的上述定义

定理5.5

定理5. 5 不存在与自己的真子集等势的自然数.

证明 令 $S=\{\, n\in N \mid \forall f(\, f\in(n\to n) \wedge f单射 \to f满射\,)\}$.

(1) $0\in S$: $f\in(0\to 0) \Rightarrow f$是空函数 $\Rightarrow f$满射.

(2) $n\in S\Rightarrow n^+\in S$: 即$f{:}n^+\to n^+$单射$\Rightarrow f$满射:

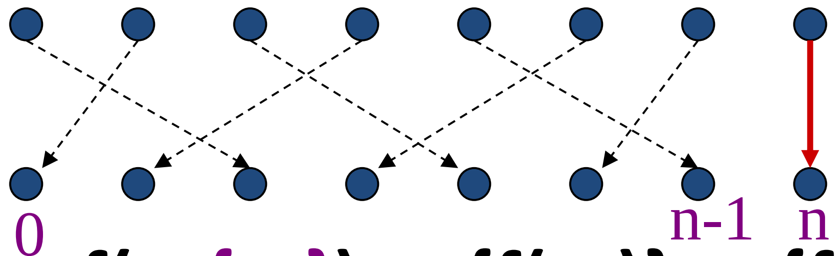
设 $g = f\upharpoonright n: n\to n^+$, 分两种情形:

(a) 假设 n 在 f 下封闭.

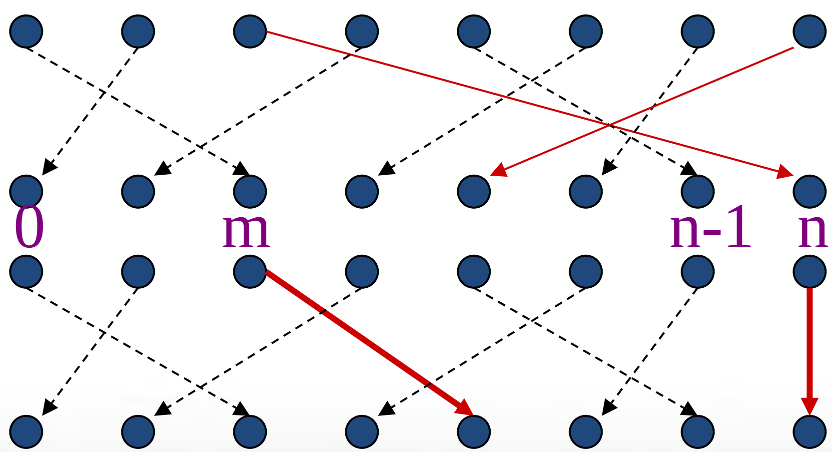
(b) 假设 n 在 f 下不封闭.

定理5.5示意图

- (a) ran f = ran $f{\uparrow}n \cup \{f(n)\}$



- (b) ran f = $f(n-\{m\}) \cup \{f(m)\} \cup \{f(n)\}$



定理5.5(续)

(a) 假设 n 在 f 下封闭，则$g:n\to n$单射，由归纳假设, ran g=n. 由于f是单射, 必有f(n)=n. 于是, $\mathrm{ran}\, f = \mathrm{ran}\, g \cup \{n\} = n \cup \{n\} = n^+$.

(b) 假设 n 在 f 下不封闭, 设$m\in n$, $f(m)=n$, 令 $h:n^+\to n^+$,

$$h(x) = \begin{cases} f(n), & x=m \\ n, & x=n \\ f(x), & x\neq m \wedge x\neq n \end{cases}$$

则n在h下封闭,

化为(a)情况. $\mathrm{ran}\, f = \mathrm{ran}\, h = n^+$. $\therefore$ S=N. #

推论1、推论2

推论1 不存在与自己的真子集等势的有穷集.

证明 (反证法) 假设存在有穷集$A \supset B$和$f:A \to B$双射, 自然数n和$g:A \to n$双射.

令$h=(g \upharpoonright B) \circ f \circ g^{-1}: n \to g(B)$, h双射,

但是$g(B) \subset n$　(若$g(B)=n$, 则g不是单射),

与定理5.5矛盾!　#

推论2　(1)与自己的真子集等势的集合都是无穷集;(2) N是无穷集.　#

推论3

推论3 任何有穷集都与唯一的自然数等势.

证明 如果有穷集$A \approx n$, $A \approx m$, $m,n \in N$.

则$n \approx m$. 又由N上三歧性,

$m \in n, m=n, n \in m$中恰有一个成立.

但是$m \in n \Rightarrow m \subset n$, 与定理5.5矛盾,

$n \in m$与之类似, 故只有$m=n$成立. #

定理5.6

引理　$c \subset n \in N \Rightarrow \exists m(c \approx m \in n)$.

定理5. 6　有穷集的子集仍为有穷集.

证明　设有穷集$A \supseteq B$.

若$A=B$, 结论显然成立.

设$B \subset A$, 则$\exists! n \in N$使$A \approx n$. 故$\exists f:A \to n$双射.

因为$f \upharpoonright B: B \to f(B)$双射, $B \approx f(B) \subset n$.

由引理, $\exists m \in n$, $B \approx m \in N$, B是有穷集. #

小结

- 等势
  - 构造双射技巧：Hilbert旅馆
  - 康托定理: 对角化方法

- 有穷集, 无穷集