单元2.4-关系的幂运算和闭包

第一编 集合论 第2章 二元关系

2.5 二元关系的幂运算

2.6 二元关系的闭包

内容提要

- 关系的n次幂
- 关系的自反闭包
- 关系的对称闭包
- 关系的传递闭包
- 闭包的性质和反例
- 闭包的求法

关系的n次幂

- $R \subseteq A \times A,\ n \in N$

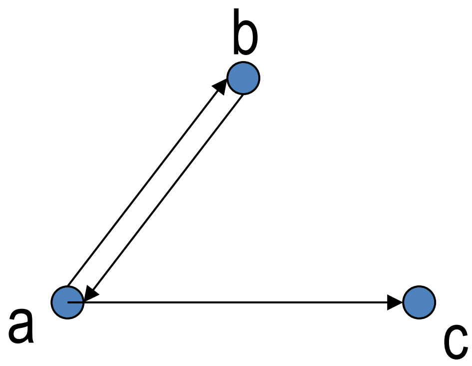
$$\begin{cases} R^0 = I_A \\ R^{n+1} = R^n \circ R \quad (n \geq 0) \end{cases}$$

- 显然$R^n \subseteq A \times A,\ n \in N$

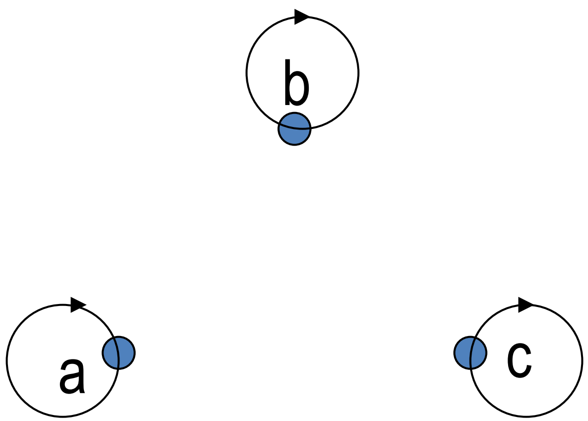
$$R^n = \underbrace{R \circ R \circ \cdots \circ R}_{n\text{个}R}$$

关系幂运算举例

- 设 $A=\{a,b,c\}$, $R\subseteq A\times A$ $R=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle a,c\rangle\}$, 求R的各次幂.
- 解: $R^0 = I_A$, $R^1 = R$



G(R)



G(R^0)

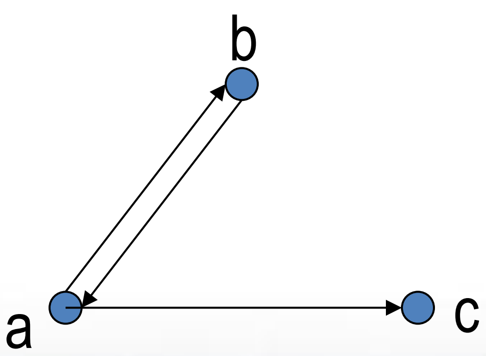
关系幂运算举例

$R^2 = R\circ R = \{<a,a>,<b,b>,<b,c>\}$,

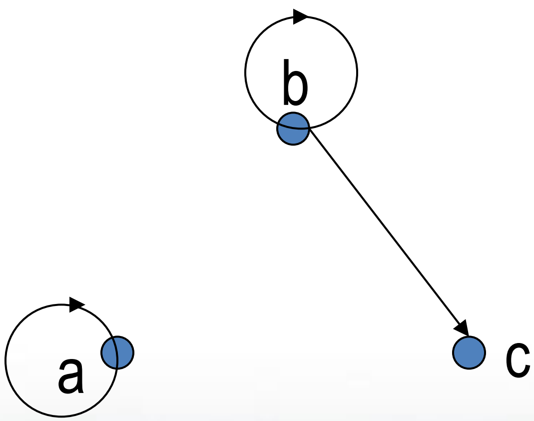
$R^3 = R^2\circ R = \{<a,b>,<b,a>,<a,c>\} = R^1$,

所以， $R^{2k+1}=R$, $k=0,1,2,\ldots$,

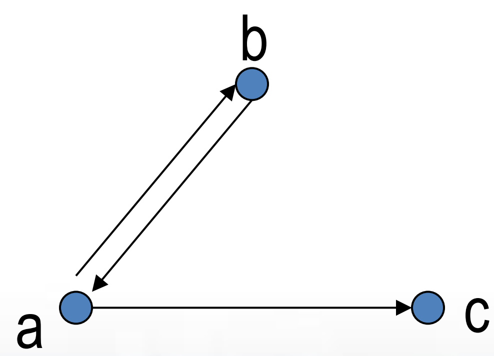
$R^{2k}=R^2$, $k=1,2,\ldots,$. $R^0 = I_A$. #



G(R)



G(R^2)



G(R^3)

定理2.17

定理2. 17 设 $R\subseteq A\times A$, $m,n\in N$, 则

(1) $R^m o R^n = R^{m+n}$; (2) $(R^m)^n = R^{mn}$.

证明 (1) 给定m, 对n归纳.

n=0时, $R^m o R^n = R^m o R^0 = R^m o I_A = R^m = R^{m+0}$.

假设 $R^m o R^n = R^{m+n}$, 则 $R^m o R^{n+1} = R^m o (R^n o R^1)$

$= (R^m o R^n) o R^1 = R^{m+n} o R = R^{(m+n)+1} = R^{m+(n+1)}$.

(2) 可类似证明. #

关系的闭包

- 自反闭包r(R)
- 对称闭包s(R)
- 传递闭包t(R)

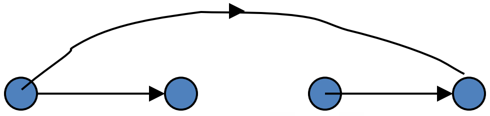
自反闭包

- 自反闭包r(R)

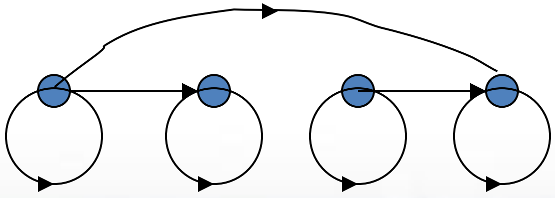
  (1) $R \subseteq r(R)$

  (2) r(R)是自反的

  (3) $\forall S((R \subseteq S \wedge S$自反$) \rightarrow r(R) \subseteq S)$



G(R)



G(r(R))

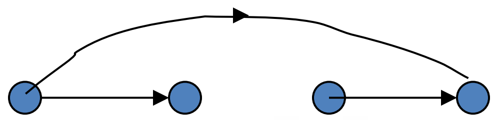
对称闭包

- 对称闭包**s(R)**

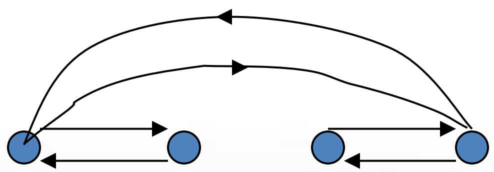
  (1) $R \subseteq s(R)$

  (2) $s(R)$是对称的

  (3) $\forall S((R \subseteq S \wedge S\text{对称}) \rightarrow s(R) \subseteq S)$



G(R)



G(s(R))

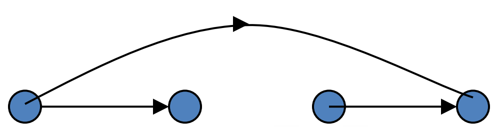
传递闭包

- 传递闭包**t(R)**

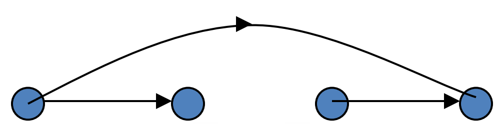
  (1) $R \subseteq t(R)$

  (2) $t(R)$是传递的

  (3) $\forall S(\ (R \subseteq S \wedge S$传递$) \rightarrow t(R) \subseteq S\ )$



G(R)



G(t(R))

定理2.19-2.20

定理2. 19 设$R \subseteq A \times A$且$A \neq \varnothing$, 则

(1) R自反 $\Leftrightarrow r(R)=R$; (2) R对称 $\Leftrightarrow s(R)=R$;

(3) R传递 $\Leftrightarrow t(R)=R$. #

定理2. 20 设 $R_1 \subseteq R_2 \subseteq A \times A$ 且 $A \neq \varnothing$, 则

(1) $r(R_1) \subseteq r(R_2)$; (2) $s(R_1) \subseteq s(R_2)$;

(3) $t(R_1) \subseteq t(R_2)$. #

定理2.21

定理2. 21 设 $R_1,R_2\subseteq A\times A$ 且 $A\neq\varnothing$, 则

(1) $r(R_1\cup R_2)=r(R_1)\cup r(R_2)$; (2) $s(R_1\cup R_2)=s(R_1)\cup s(R_2)$;

(3) $t(R_1\cup R_2)\supseteq t(R_1)\cup t(R_2)$.

证明(1) $R_1\cup R_2 \subseteq r(R_1)\cup r(R_2) \subseteq r(R_1\cup R_2)$ (定理2.20).

再由$r(R_1)\cup r(R_2)$自反, 所以 $r(R_1\cup R_2)\subseteq r(R_1)\cup r(R_2)$.

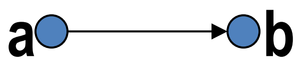
(2)可类似证明.

(3) $t(R_1)\cup t(R_2)\subseteq t(R_1\cup R_2)$ (定理2.20). #

注意: $t(R_1)\cup t(R_2)$不一定传递,

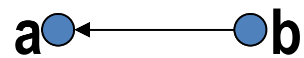
所以没有 $t(R_1\cup R_2)\subseteq t(R_1)\cup t(R_2)$.

反例



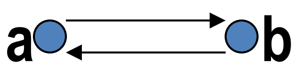
$G(R_1)=G(t(R_1))$

传递



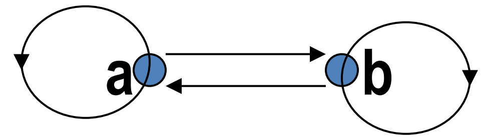
$G(R_2)=G(t(R_2))$

传递



$G(t(R_1)\cup t(R_2))$

非传递



$G(t(R_1\cup R_2))$

传递

闭包的求法

- 设 $R \subseteq A \times A$ 且 $A \neq \varnothing$, 则

(定理2.22)　$r(R)=R \cup I_A$

(定理2.23)　$s(R)=R \cup R^{-1}$

(定理2.24)　$t(R)=R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$

- 对比:　R自反 $\Leftrightarrow I_A \subseteq R$

　R对称 $\Leftrightarrow R=R^{-1}$

　R传递 $\Leftrightarrow R^2 \subseteq R$

定理2.22

定理2. 22　$r(R)=R\cup I_A$

证明　(1) $R\subseteq R\cup I_A$

(2) $I_A\subseteq R\cup I_A \Leftrightarrow R\cup I_A$ 自反 $\Rightarrow r(R)\subseteq R\cup I_A$

(3) $R\subseteq r(R)\wedge r(R)$ 自反

$\Rightarrow R\subseteq r(R)\wedge I_A\subseteq r(R)\Rightarrow R\cup I_A\subseteq r(R)$

$\therefore\ r(R)=R\cup I_A$　　　#

定理2.23

定理2. 23 $s(R)=R\cup R^{-1}$

证明 (1) $R\subseteq R\cup R^{-1}$

(2) $(R\cup R^{-1})^{-1}=R\cup R^{-1}\Leftrightarrow R\cup R^{-1}$对称

$\Rightarrow s(R)\subseteq R\cup R^{-1}$

(3) $R\subseteq s(R)\wedge s(R)$对称

$\Rightarrow R\subseteq s(R)\wedge R^{-1}\subseteq s(R)\Rightarrow R\cup R^{-1}\subseteq s(R)$

$\therefore\ s(R)=R\cup R^{-1}$ #

定理2.24

定理2. 24 $t(R) = R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots$

证明 (1) $R\subseteq R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots$

(2) $(R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots)^2=R^2\cup R^3\cup\ldots\subseteq R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots$

$\Leftrightarrow R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots$传递 $\Rightarrow t(R)\subseteq R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots$

(3) $R\subseteq t(R)\wedge t(R)$传递

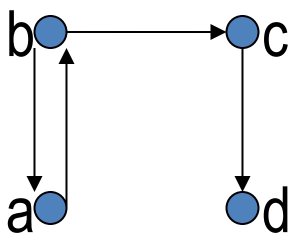
$\Rightarrow R\subseteq t(R)\wedge R^2\subseteq t(R)\wedge R^3\subseteq t(R)\wedge\ldots$

$\Rightarrow R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots\subseteq t(R)$ $\therefore$ $t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots$ #

推论 设 $R\subseteq A\times A$ 且 $0<|A|<\infty$, 则$\exists \ell\in N$, 使得

$t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots\cup R^{\ell}$. #

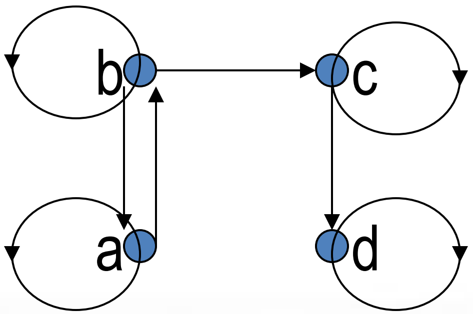
例2.8

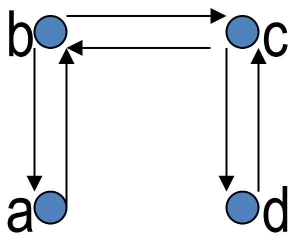


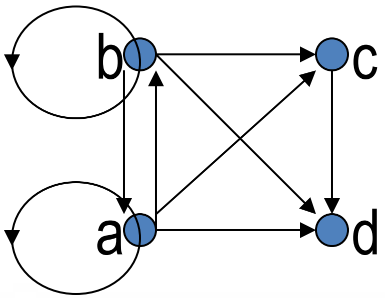
- A={a,b,c,d},

  R={<a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,d>}.

  求 r(R), s(R), t(R).







例2.8

- R={<a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,d>}

$$M(R) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$M(r(R)) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$M(s(R)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

例2.8

$$M(R)=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}.\quad M(R^2)=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

$$M(R^3)=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

$$M(R^4)=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=M(R^2).$$

例2.8

$$M(t(R)) = M(R) \vee M(R^2) \vee M(R^3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad \#$$

闭包运算与关系性质

- 定理2.25

	自反性	对称性	传递性
r(R)	√ (定义)	√(2)	√(3)
s(R)	√(1)	√(定义)	×(反例)
t(R)	√(1)	√(2)	√(定义)

定理2.25(1)

定理2. 25 （1） R自反⇒ s(R)和t(R)自反

证明 $I_A \subseteq R \cup R^{-1} = s(R)$

$\therefore$ s(R)自反.

$I_A \subseteq R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots = t(R)$

$\therefore$ t(R)自反.

定理25(2)

定理2. 25 R对称 $\Rightarrow$ r(R)和t(R)对称;

证明 $r(R)^{-1}=(I\cup R)^{-1}=I_A^{-1}\cup R^{-1}=I_A\cup R^{-1}=I_A\cup R=r(R)$

$\therefore$ r(R)对称.

$t(R)^{-1}=(R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots)^{-1}$

$=R^{-1}\cup(R^2)^{-1}\cup(R^3)^{-1}\cup\ldots$

$=R^{-1}\cup(R^{-1})^2\cup(R^{-1})^3\cup\ldots$ ($(FoG)^{-1}=G^{-1}oF^{-1}$)

$=R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots$

$=t(R)$ $\therefore$ t(R)对称.

定理25(3)

定理2. 25 （3） R传递 $\Rightarrow$ r(R)传递

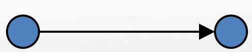
证明： $r(R)\circ r(R)=(I_A\cup R)\circ(I_A\cup R)$

$= (I_A\circ I_A)\cup(I_A\circ R)\cup(R\circ I_A)\cup(R\circ R)$

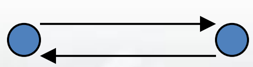
$\subseteq I_A\cup R\cup R\cup R = I_A\cup R = r(R)$

$\therefore$ r(R)传递. #

反例 R传递, 但是s(R)非传递

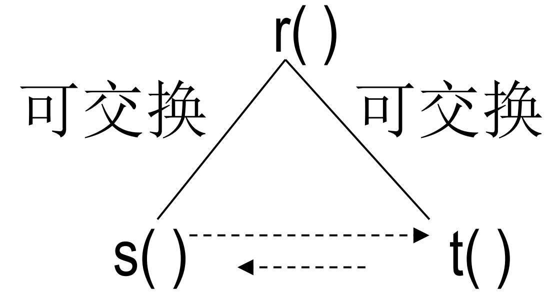


G(R)



G(s(R))

定理2.26



定理2. 26 设 $R\subseteq A\times A$ 且 $A\neq\varnothing$, 则

(1) $rs(R) = sr(R)$ (2) $rt(R) = tr(R)$ (3) $st(R) \subseteq ts(R)$

说明: $rs(R)=r(s(R))$

证明 (1) $rs(R) = r(s(R)) = r(R\cup R^{-1}) = I_A\cup(R\cup R^{-1})$

$= (I_A\cup R)\cup(I_A^{-1}\cup R^{-1}) = (I_A\cup R)\cup(I_A\cup R)^{-1}$

$= r(R)\cup r(R)^{-1} = s(r(R)) = sr(R).$

(2) $rt(R)=r(t(R)) = r(R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots) = I_A\cup(R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots)$

$= (I_A\cup R)\cup(I_A\cup R\cup R^2)\cup(I_A\cup R\cup R^2\cup R^3)\cup\ldots$

$= (I_A\cup R)\cup(I_A\cup R)^2\cup(I_A\cup R)^3\cup\ldots$

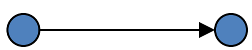
$= r(R)\cup r(R)^2\cup r(R)^3\cup\ldots=t(r(R))$

定理26(3)

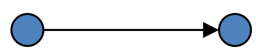
证明 (3) $st(R) \subseteq st(s(R)) = sts(R) = s(ts(R)) = ts(R)$

($ts(R)$对称, 定理2.25(2)). #

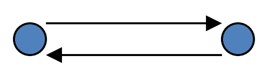
反例 $st(R) \subset ts(R)$



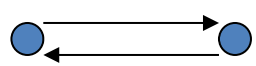
G(R)



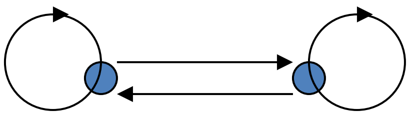
G(t(R))



G(s(t(R)))



G(s(R))



G(t(s(R)))

小结

- R^n
- $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$
- 反例