复习

- 检验问题. $H_0 : \theta \in \Theta_0 \leftrightarrow H_1 : \theta \in \Theta_1$.
- 检验方法. 否定域$\mathcal{W}$
- (显著性)水平α: $P_\theta(\vec{X} \in \mathcal{W}) \leqslant \alpha, \forall \theta \in \Theta_0$.
  控制第一类错误“H_0 为真”被错判为“H_0 为假”的概率.
- UMP否定域: $P_\theta(\vec{X} \notin \mathcal{W}) \leqslant P_\theta(\vec{X} \notin \tilde{\mathcal{W}}), \forall \theta \in \Theta_1$.
  尽量减小第二类错误的概率.
- 似然比检验: $\mathcal{W} = \{\vec{x} : L(\vec{x}, \theta_1) > \lambda_0 L(\vec{x}, \theta_0)\}$.

§8.3 单参数模型中的检验

定义3.1. 单参数指数族 指: 总体X的密度为

$$f(x,\theta)=S(\theta)h(x)\exp\{C(\theta)T(x)\},\quad \theta\in\Theta.$$

其中Θ 为区间, $C(\theta)$ 严格增.

- 指数族$S(\theta)h(x)\exp\{\sum_{k=1}^m C_k(\theta)T_k(x)\}$,
  第七章定理4.2+4.3, UMVU估计, m 为θ 中参数的个数.
  现在$m=1$, 单参数.
- 正态: $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, σ^2已知. $\theta=\mu$.
  $f(x,\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{x^2-2\mu x+\mu^2}{2\sigma^2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}}\underline{e^{-\frac{1}{2\sigma^2}x^2}}e^{\frac{\mu}{\sigma^2}x}$.
  $C(\theta)=\frac{1}{\sigma^2}\mu$ 关于μ 严格增, $\Theta=\mathbb{R}^1$.
- 特点: θ 越大, $T(\vec{x})$ 越大(定理3.3, 证明不要求). 例: μ 越大, $\sum_{i=1}^n x_i$ 越大.

单边假设检验问题:

(1) $H_0: \theta \leqslant \theta_0 \leftrightarrow H_1: \theta > \theta_0$, (2) $H_0: \theta \geqslant \theta_0 \leftrightarrow H_1: \theta < \theta_0$.

- 总体分布密度$f(x,\theta) = S(\theta)h(x)\exp\{C(\theta)T(x)\}$, Θ 是区间. (特点: θ 越大, $T(\vec{x})$ 越大.)
- 否定域$\mathcal{W}$ 形如:

  (1) $\{\vec{x} : \sum_{i=1}^{n} T(x_i) > c\}$, (2) $\{\vec{x} : \sum_{i=1}^{n} T(x_i) < c\}$.
- 若$P_{\theta_0}(\vec{X} \in \mathcal{W}) = \alpha$, 则$\mathcal{W}$ 是相应假设检验问题的水平为α 的UMP 否定域(定理3.4, 证明不要求).

三步: (1)检查总体分布; (2)写否定域形式; (3)根据α 求c.

例3.2. $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, σ^2 已知$(=1.21)$, 测得6个数据$\vec{x}$. $\mu \geqslant 30$ 则合格. 问: 设水平为$\alpha = 0.05$, 是否可以出厂?

- $H_0: \mu \leqslant \mu_0 = 30 \leftrightarrow H_1: \mu > \mu_0$. (防止不合格品出厂).
- $f(x,\mu) = S(\mu)h(x)e^{\frac{\mu}{\sigma^2}x}$, $T(x) = x$.
- $\mathcal{W} = \{\vec{x}: \sum_{i=1}^n x_i > c\}$.
- $P_{\mu_0}(\vec{X} \in \mathcal{W}) = P_{\mu_0}(\sqrt{n}\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma} > \tilde{c}) = P(Z > \tilde{c}) = \alpha$.
  查表得$\tilde{c} = 1.65$. 将否定域写为$\mathcal{W} = \{\vec{x}: \sqrt{n}\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma} > 1.65\}$.
- 代入数据: $\sqrt{n}\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma} = 2.212$, 故否定$H_0$. 可出厂!
  “一旦否定了零假设, 就可以大胆地做出否定零假设的结论”.

例3.3. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ 已知$(=3)$, 测得9个数据$\vec{x}$(见书P.383). $\sigma < \sigma_0 = 0.005$ 则合格. 问: 设水平为$\alpha = 0.05$, 是否合格?

- $H_0 : \sigma^2 \geqslant \sigma_0^2 \leftrightarrow H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$.
- $f(x, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\}$, $T(x) = (x-\mu)^2$.
  $C(\theta) = -\frac{1}{2\sigma^2}$ 在$\sigma^2 \in (0, \infty)$ 严格增.
- σ^2 越大, $T(\vec{x})$ 越大. 故否定域$\mathcal{W} = \{\vec{x} : \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 < c\}$.
- $P_{\sigma_0^2}(\vec{X} \in \mathcal{W}) = P_{\sigma_0^2}(\sum_{i=1}^n (\frac{X_i - \mu}{\sigma_0})^2 < \tilde{c}) = P(\chi^2(n) < \tilde{c}) = \alpha$.
  查表得$\tilde{c} = 3.325$. $\mathcal{W} = \{\vec{x} : \frac{1}{\sigma_0^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 < 3.325\}$.
- 代入数据: $\frac{1}{\sigma_0^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 = 13.2563 > 3.325$, 故接受$H_0$.
  "不能否定零假设, 即可以认为...不合要求. 但... 结论不强".
- 双边问题$H_0 : \theta = \theta_0 \leftrightarrow H_1 : \theta \neq \theta_0$ (定理3.6+3.7, 略)

§8.4 广义似然比检验和关于正态总体参数的检验

一、广义似然比检验的思想

假设检验问题: $H_0 : \theta \in \Theta_0 \leftrightarrow H_1 : \theta \in \Theta_1$.

- 似然比检验: $H_0 : \theta = \theta_0 \leftrightarrow H_1 : \theta = \theta_1$.

  $\mathcal{W} = \{\vec{x} : L(\vec{x}, \theta_1) > \lambda_0 L(\vec{x}, \theta_0)\}$.

- 广义似然比检验:

  用$\max_{\theta\in\Theta_0} L(\vec{x}, \theta)$ 代替$L(\vec{x}, \theta_0)$;

  用$\max_{\theta\in\Theta} L(\vec{x}, \theta)$代替$L(\vec{x}, \theta_1)$.

  注:一般Θ_0 是Θ 的低维, $\max_{\theta\in\Theta_1} L(\vec{x}, \theta) = \max_{\theta\in\Theta} L(\vec{x}, \theta)$.

- $\hat{\theta}_0$, $\hat{\theta}$ 分别是$\theta \in \Theta_0$ 和$\theta \in \Theta$ 的最大似然估计.

  似然比$\lambda(\vec{x}) = L(\vec{x}, \hat{\theta})/L(\vec{x}, \hat{\theta}_0)$.

  广义似然比否定域$\mathcal{W} = \{\vec{x} : \lambda(\vec{x}) > c\}$. 选$c$使得

$$\sup_{\theta\in\Theta_0} P_\theta(\vec{X} \in \mathcal{W}) = \alpha.$$

假设检验问题:

二、正态总体均值检验

(1) σ^2 已知;　(2) σ^2 未知.

三、正态总体方差检验

四、关于两正态总体中的参数检验

二、正态总体$X \sim N(\mu,\sigma^2)$ 均值μ 的检验

(1) σ^2 已知, 检验μ.

双边问题: $H_0: \mu = \mu_0 \leftrightarrow H_1: \mu \neq \mu_0$.

- 最大似然估计: $\hat{\mu} = \bar{x}$, $\hat{\mu}_0 = \mu_0$.
- 似然比:

$$
\begin{aligned}
\lambda(\vec{x}) &= \frac{L(\vec{x},\hat{\mu})}{L(\vec{x},\hat{\mu}_0)} = \frac{(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma})^n \exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n (x_i-\bar{x})^2\}}{(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma})^n \exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n (x_i-\mu_0)^2\}} \\
&= e^{\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n \left((x_i-\mu_0)^2-(x_i-\bar{x})^2\right)} = e^{\frac{1}{2\sigma^2}n(\mu_0-\bar{x})^2} \\
&= e^{\frac{1}{2}(\frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu_0)}{\sigma})^2}.
\end{aligned}
$$

- 否定域类型$\mathcal{W} = \{\vec{x}: \lambda(\vec{x}) > c\}$, 即$\{\vec{x}: |\frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu_0)}{\sigma}| > \tilde{c}\}$.
- 根据α 求$\tilde{c}$. $P_{\mu_0}(\vec{X} \in \mathcal{W}) = P(|Z| > \tilde{c}) = \alpha$.

(1) σ^2 已知, 检验μ.

单边问题: $H_0: \mu \leqslant \mu_0 \leftrightarrow H_1: \mu > \mu_0$.

- 最大似然估计: $\hat{\mu} = \bar{x}$, $\hat{\mu}_0 = \begin{cases} \bar{x}, & 若\bar{x} \leqslant \mu_0, \\ \mu_0, & 若\bar{x} > \mu_0. \end{cases}$
- 似然比: $\lambda(\vec{x}) = \begin{cases} 1, & 若\bar{x} \leqslant \mu_0, \\ e^{\frac{1}{2}(\frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu_0)}{\sigma})^2}, & 若\bar{x} > \mu_0. \end{cases}$
- 否定域类型$\mathcal{W} = \{\vec{x} : \lambda(\vec{x}) > c\}$, 其中$c \geqslant 1$.

  $\because$若$c < 1$, $\{\vec{x} : \bar{x} \leqslant \mu_0\} \subset \mathcal{W}$. 于是对$\forall \mu \leqslant \mu_0$,

  $P_\mu(\vec{X} \in \mathcal{W}) \geqslant P_\mu(\bar{X} \leqslant \mu_0) \geqslant P_\mu(\bar{X} \leqslant \mu) \geqslant 1/2$.
- $\mathcal{W} = \{\vec{x} : \bar{x} > \mu_0, |\frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu_0)}{\sigma}| > \tilde{c}\} = \{\vec{x} : \frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu_0)}{\sigma} > \tilde{c}\}$.
- 目标: 根据α 求$\tilde{c}$. 求$\tilde{c}$ 使得$P_\mu(\vec{X} \in \mathcal{W}) \leqslant \alpha$, $\forall \mu \leqslant \mu_0$.

  $P_\mu(\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu_0)}{\sigma} > \tilde{c}) = P_\mu(\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma} > \tilde{c} + \frac{\sqrt{n}(\mu_0-\mu)}{\sigma})$.

  $\max_{\mu \leqslant \mu_0} P_\mu(\vec{X} \in \mathcal{W}) = P(Z > \tilde{c}) = \alpha$.

(2) σ^2 未知, 检验μ.

双边问题: $H_0: \mu = \mu_0 \leftrightarrow H_1: \mu \neq \mu_0$.

- 最大似然估计: $\hat{\mu} = \bar{x}$,

  $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\mu})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$,

  $\hat{\mu}_0 = \mu_0$, $\hat{\sigma}_0^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\mu}_0)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2$.

  $L(\hat{\theta}) = (\frac{1}{\sqrt{2\pi}\hat{\sigma}})^n \exp\{-\frac{1}{2\hat{\sigma}^2}\sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\mu})^2\} = (\frac{1}{\sqrt{2\pi}\hat{\sigma}})^n e^{-\frac{n}{2}}$.

  $L(\hat{\theta}_0) = (\frac{1}{\sqrt{2\pi}\hat{\sigma}_0})^n e^{-\frac{n}{2}}$.

- 似然比: $\lambda(\vec{x}) = \frac{L(\vec{x},\hat{\theta})}{L(\vec{x},\hat{\theta}_0)} = \frac{(\frac{1}{\hat{\sigma}})^n}{(\frac{1}{\hat{\sigma}_0})^n} = (\frac{\hat{\sigma}_0^2}{\hat{\sigma}^2})^{\frac{n}{2}}$.

- 否定域类型$\mathcal{W} = \{\vec{x} : \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\hat{\sigma}^2} > c\}$.

  $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + (\mu_0 - \bar{x})^2$.

  即$\hat{\sigma}_0^2 = \hat{\sigma}^2 + (\bar{x} - \mu_0)^2$,

  $\frac{\hat{\sigma}_0^2}{\hat{\sigma}^2} = 1 + \frac{n(\bar{x}-\mu_0)^2}{\underline{(n-1)\cdot}\underline{\frac{1}{n-1}}\sum_{i=1}^n (x_i-\bar{x})^2} = 1 + \frac{T^2}{n-1}$. $\mathcal{W} = \{\vec{x} : T^2 > \tilde{c}\}$.

- 根据α 求$\tilde{c}$. $P_{\mu_0}(\vec{X} \in \mathcal{W}) = P(T_{n-1}^2 > \tilde{c}) = \alpha$.

(2) σ^2 未知, 检验μ.

单边问题: $H_0: \mu \geqslant \mu_0 \leftrightarrow H_1: \mu < \mu_0$.

- 最大似然估计: $\hat{\mu} = \bar{x}$, $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$,
  $\hat{\mu}_0 = \begin{cases} \bar{x}, & 若\bar{x} \geqslant \mu_0, \\ \mu_0, & 若\bar{x} < \mu_0. \end{cases}$ $\hat{\sigma}_0^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\mu}_0)^2$
- 似然比: $\lambda(\vec{x}) = \begin{cases} 1, & 若\bar{x} \geqslant \mu_0, \\ (\frac{\hat{\sigma}_0^2}{\hat{\sigma}^2})^{\frac{n}{2}}, & 若\bar{x} < \mu_0. \end{cases}$.
- 否定域类型$\mathcal{W} = \{\vec{x} : \lambda(\vec{x}) > c\}$, 其中$c \geqslant 1$.
  $\because$若$c < 1$, $\{\vec{x} : \bar{x} \geqslant \mu_0\} \subset \mathcal{W}$. 于是$\forall \mu \geqslant \mu_0$,
  $P_\mu(\vec{X} \in \mathcal{W}) \geqslant P_\mu(\bar{X} \geqslant \mu_0) \geqslant P_\mu(\bar{X} \geqslant \mu) \geqslant 1/2$.
  $\therefore$否定域类型$\mathcal{W} = \{\vec{x} : \bar{x} < \mu_0, \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\hat{\sigma}^2} > c\}$, 其中$c \geqslant 1$.
  令$T = \frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu_0)}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (x_i-\bar{x})^2}}$, 则$\frac{\hat{\sigma}_0^2}{\hat{\sigma}^2} = 1 + \frac{T^2}{n-1}$.
  $\mathcal{W} = \{\vec{x} : \bar{x} < \mu_0, T^2 > \tilde{c}^2\} = \{\vec{x} : T < -\tilde{c}\}$.

- $\mathcal{W} = \{\vec{x} : T < -\tilde{c}\}$.
- 根据α 求$\tilde{c}$.

  注意：$\forall \mu \geqslant \mu_0$,

$$T = \frac{\sqrt{n}(\bar{x} - \mu_0)}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}} \geqslant \frac{\sqrt{n}(\bar{x} - \mu)}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}} =: T_{n-1},$$

  且等号在$\mu = \mu_0$ 达到.

  $\forall \mu \geqslant \mu_0$, $P_\mu(T < -\tilde{c}) \leqslant P_\mu(T_{n-1} < -\tilde{c}) = \alpha$.

正态总体均值μ 的假设检验问题总结:

- (1) σ^2 已知. 检验统计量: $T(\vec{x}) = \frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu_0)}{\sigma}$.
  - 双边检验问题$H_0: \mu = \mu_0 \leftrightarrow H_1: \mu \neq \mu_0$.
    $\mathcal{W} = \{\vec{x} : |T(\vec{x})| > c\}$, $P(|Z| > c) = \alpha$.
  - 单边$H_0: \mu \leqslant (\geqslant)\mu_0 \leftrightarrow H_1: \mu > \mu_0$.
    $\mathcal{W} = \{\vec{x} : T(\vec{x}) > (< -)c\}$, $P(Z > c) = \alpha$,
- (2) σ^2 未知. 检验统计量: $T(\vec{x}) = \frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu_0)}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}}$.
  - 双边检验问题$H_0: \mu = \mu_0 \leftrightarrow H_1: \mu \neq \mu_0$.
    $\mathcal{W} = \{\vec{x} : |T(\vec{x})| > c\}$, $P(|T_{n-1}| > c) = \alpha$.
  - 单边$H_0: \mu \leqslant (\geqslant)\mu_0 \leftrightarrow H_1: \mu > (<)\mu_0$.
    $\mathcal{W} = \{\vec{x} : T(\vec{x}) > (< -)c\}$,
    $P(T_{n-1} > (< -)c) = \alpha$.