Ch-15 代数系统

15. 1 二元运算及其性质

定义 15. 1 设 A 为集合，函数 f：$A\times A\to A$ 称为 A 上的一个**二元代数运算**，简称为**二元运算**。对 $\forall x,y\in A$，如果 $f(\langle x,y\rangle)=c$，则称 x 和 y 是**运算数**，c 是 x 和 y 的运算结果。

定义 15. 2 设 A 为集合，n 为正整数，$A^n=\overbrace{A\times A\times\cdots\times A}^{n个}$ 表示 A 的 n 阶笛卡尔积。函数 $f:A^n\to A$ 称为 A 上的一个 **n 元代数运算**，简称为 **n 元运算**。若 f 是 A 上的运算，也可以称 A 在运算 f 下是**封闭**的。

当 A 为有穷集时，A 上的一元和二元运算可以用**运算表**来给出。设
$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，$\circ$ 和 Δ 分别是 A 上的二元和一元运算，给出运算表：

$\circ$	a_1	a_2	$\cdots$	a_n
a_1	$a_1\circ a_1$	$a_1\circ a_2$	$\cdots$	$a_1\circ a_n$
a_2	$a_2\circ a_1$	$a_2\circ a_2$	$\cdots$	$a_2\circ a_n$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
a_n	$a_n\circ a_1$	$a_n\circ a_2$	$\cdots$	$a_n\circ a_n$

Δ	Δa_i
a_1	Δa_1
a_2	Δa_2
$\vdots$	$\vdots$
a_n	Δa_n

定义 15. 3 设 A 为集合，$\circ$ 为 A 上的二元运算

1. 若 $\forall x,y\in A$，$x\circ y=y\circ x$，则称 $\circ$ 运算在 A 上是**可交换的**，也称 $\circ$ 运算在 A 上满足**交换律**。
2. 若 $\forall x,y,z\in A$，$(x\circ y)\circ z=x\circ(y\circ z)$，则称 $\circ$ 运算在 A 上是**可结合的**，也称 $\circ$ 运算在 A 上满足**结合律**。
3. 若 $\forall x\in A$，$x\circ x=x$，则称 $\circ$ 运算在 A 上是**幂等的**，也称 $\circ$ 运算在 A 上满足**幂等律**。满足 $x\circ x=x$ 的元素被称为**幂等元**。

定义 15. 4 设 $\circ$ 是 A 上的二元运算，如果对于 A 中任取的 n 个元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，$n\geq 3$，在 $a_1\circ a_2\circ\cdots\circ a_n$ 中任意加括号所得的运算结果都相等，则称 $\circ$ 运算在 A 上是**广义可结合的**，或称 $\circ$ 运算在 A 上适合**广义结合律**。

定理 15. 1 设 $\circ$ 为 A 上的二元运算，若 $\circ$ 满足结合律，则 $\circ$ 满足广义结合律。

定义 15.5 设 $\circ$ 和 $*$ 是集合 A 上的二元运算。

1. 若 $\forall x,y,z\in A$，$x\circ(y*z)=(x\circ y)*(x\circ z)$ 和 $(y*z)\circ x=(y\circ x)*(z\circ x)$ 成立，则称 $\circ$ 运算对 $*$ 运算是**可分配的**，或称 $\circ$ 运算对 $*$ 运算满足**分配律**。
2. 若 $\circ$ 和 $*$ 满足交换律且 $\forall x,y\in A$，$x\circ(x*y)=x$ 和 $x*(x\circ y)=x$ 成立，则称 $\circ$ 和 $*$ 运算是**可吸收的**，或称 $\circ$ 和 $*$ 运算满足**吸收律**。

定义 15.6 设 $\circ$ 为集合 A 上的二元运算

减法没有单位元！

1. 若 $\exists e_l\in A$(或 $e_r\in A$) 使得 $\forall x\in A$，$e_l\circ x=x$(或 $x\circ e_r=x$)，则称 e_l(或 e_r) 是 A 中关于 $\circ$ 运算的**左(或右)单位元**。若 $\exists e\in A$ 关于 $\circ$ 运算既为左单位元又为右单位元，则称 e 为 A 中关于 $\circ$ 运算的**单位元**。
2. 若 $\exists\theta_l\in A$(或 $\theta_r\in A$) 使得 $\forall x\in A$ 都有 $\theta_l\circ x=\theta_l$(或 $x\circ\theta_r=\theta_r$)，则称 θ_l(或 θ_r) 是 A 中关于 $\circ$ 运算的**左(或右)零元**。若 $\exists\theta\in A$ 关于 $\circ$ 运算既为左零元又为右零元，则称 θ 为 A 中关于 $\circ$ 运算的**零元**。

定理 15.2 设 $\circ$ 是集合 A 上的二元运算，若 $\exists e_l,e_r\in A$ 满足 $\forall x\in A$，$e_l\circ x=x$ 和 $x\circ e_r=x$，则 $e_l=e_r=e$，且 e 为 A 中关于 $\circ$ 运算的唯一单位元。

定理 15.3 设 $\circ$ 是集合 A 上的二元运算，若 $\exists\theta_l,\theta_r\in A$ 满足 $\forall x\in A$，$\theta_l\circ x=\theta_l$ 和 $x\circ\theta_r=\theta_r$，则 $\theta_l=\theta_r=\theta$，且 θ 为 A 中关于 $\circ$ 运算的唯一零元。

定理 15.4 设集合 A 至少含有两个元素，e 和 θ 分别为 A 中关于 $\circ$ 运算的单位元和零元，则 $e\neq\theta$.

定义 15.7 设 $\circ$ 是集合 A 上的二元运算，$e\in A$ 是关于 $\circ$ 运算的单位元。对于 $x\in A$ 若 $\exists y_l\in A$(或 $y_r\in A$) 使得 $y_l\circ x=e$(或 $x\circ y_r=e$)，则称 y_l(或 y_r) 是 x 关于 $\circ$ 运算的**左(或右)逆元**。若 $y\in A$ 既是 x 关于 $\circ$ 运算的左逆元又是 x 关于 $\circ$ 运算的右逆元，则称 y 是 x 关于 $\circ$ 运算的**逆元**。

定理 15.5 设 $\circ$ 是集合 A 上可结合的二元运算且单位元为 e，对 $\forall x\in A$ 若 $\exists y_l,y_r\in A$ 满足 $y_l\circ x=e$ 和 $x\circ y_r=e$，则 $y_l=y_r=y$，且 y 为 A 中关于 $\circ$ 运算的唯一逆元，记作 $y=x^{-1}$ 。

定义 15.8 设 $\circ$ 为集合 A 上的二元运算，若对于 $\forall a,b,c\in A$（a 不是 $\circ$ 运算的零元）都有

$$a\circ b=a\circ c\Rightarrow b=c,\qquad b\circ a=c\circ a\Rightarrow b=c$$

则称 $\circ$ 运算在 A 中适合**消去律**。

15. 2 代数系统、子代数和积代数

定义 15. 9 一个**代数系统**是一个三元组 $V=\langle A,\Omega,K\rangle$，其中 A 是一个非空的对象集合，称为 V 的载体；Ω 是一个非空的运算集合，即 $\Omega=\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}\Omega_j$，$\Omega_j=\{\,o\mid o\,是\,A\,上的\,j\,元运算\,\}$；$K\subseteq A$ 是**代数常数**的集合。

对于任何代数常数 $k\in K$，可以把 k 看成 A 上的**零元运算**，即 $k:\to A$，可将代数系统 V 写作 $\langle A,\Omega\rangle$，其中 $\Omega=\bigcup\limits_{j=0}^{\infty}\Omega_j$，$\Omega_0=K.$

当 Ω 中含有 r 个代数运算时，r 是正整数，常常将 V 记作 $\langle A,o_1,o_2,\cdots,o_r\rangle$，其中 $o_1,o_2,\cdots,o_r$ 是代数运算，通常从高元运算到低元运算排列。

定义 15. 10 设 $V_1=\langle A,o_1,o_2,\cdots,o_r\rangle$，$V_2=\langle B,\overline{o_1},\overline{o_2},\cdots,\overline{o_r}\rangle$ 是具有 r 个运算的代数系统，$r\geq 1.$ 若对 $\forall i=1,2,\cdots,r$，o_i 和 $\overline{o_i}$ 运算具有同样的元数，则称 V_1 和 V_2 是**同类型的代数系统**。若对 $\forall i=1,2,\cdots,r$，o_i 和 $\overline{o_i}$ 运算都有相同的运算性质，则称 V_1 和 V_2 是**同种的代数系统**。

定义 15. 11 设 $V=\langle A,o_1,o_2,\cdots,o_r\rangle$ 是代数系统，B 是 A 的非空子集，若 B 对 V 中所有的运算封闭，则称 $V'=\langle B,o_1,o_2,\cdots,o_r\rangle$ 是 V 的子代数系统，简称**子代数**。当 B 是 A 的真子集时，称 V' 是 V 的**真子代数**。

定义 15. 12 设 $V=\langle A,o_1,o_2,\cdots,o_r\rangle$ 是代数系统，其中零元运算的集合是 $K\subseteq A$，若 K 对 V 中所有的运算封闭，则 $\langle K,o_1,o_2,\cdots,o_r\rangle$ 是 V 的子代数，称这个子代数和 V 自身是 V 的**平凡子代数**。

定义 15. 13 设 $V_1=\langle A,o_{11},o_{12},\cdots,o_{1r}\rangle$，$V_2=\langle B,o_{21},o_{22},\cdots,o_{2r}\rangle$ 是同类型的代数系统，且对于 $i=1,2,\cdots,r$，o_{1i} 和 o_{2i} 是 k_i 元运算。V_1 和 V_2 的**积代数**记作 $V_1\times V_2=\langle A\times B,o_1,o_2,\cdots,o_r\rangle$，其中 o_i（$i=1,2,\cdots,r$）是 k_i 元运算。对$\forall\,\langle x_1,y_1\rangle,\langle x_2,y_2\rangle,\cdots,\langle x_k,y_k\rangle\in A\times B$ 有

$$o_i(\langle x_1,y_1\rangle,\langle x_2,y_2\rangle,\cdots,\langle x_k,y_k\rangle)=\langle o_{1i}(x_1,x_2,\cdots,x_k),o_{2i}(y_1,y_2,\cdots,y_k)\rangle$$

称 V 是 V_1 与 V_2 的积代数，也称 V_1 和 V_2 是 V 的**因子代数**。

定理 15. 6 设代数系统 $V_1=\langle A,o_{11},o_{12},\cdots,o_{1r}\rangle$，$V_2=\langle B,o_{21},o_{22},\cdots,o_{2r}\rangle$ 同类型， $V=V_1\times V_2=\langle A\times B,o_1,o_2,\cdots,o_r\rangle$，对任意二元运算 $o_{1i},o_{1j},o_{2i},o_{2j}$，

1. 若 o_{1i}，o_{2i} 在 V_1 和 V_2 中是可交换的（或可结合的，幂等的），则 o_i 在 V 中也是可交换的（或可结合的，幂等的）。
2. 若 o_{1i} 对 o_{1j} 在 V_1 上是可分配的， o_{2i} 对 o_{2j} 在 V_2 上是可分配的，则 o_i 对 o_j 在 V 上也是可分配的。
3. 若 o_{1i}，o_{1j} 在 V_1 上是可吸收的， o_{2i}，o_{2j} 在 V_2 上是可吸收的，则 o_i，o_j 在 V 上也是可吸收的。
4. 若 e_{1i}(或 θ_{1i}) 为 V_1 中关于 o_{1i} 运算的单位元(或零元)，e_{2i}(或 θ_{2i}) 为 V_2 中关于 o_{2i} 运算的单位元(或零元)，则 $\langle e_{1i},e_{2i}\rangle$(或 $\langle\theta_{1i},\theta_{2i}\rangle$) V 中关于 o_i 运算的单位元(或零元)。
5. 若 o_{1i}，o_{2i} 为含有单位元的二元运算，且 $a\in A$, $b\in B$ 关于 o_{1i} 和 o_{2i} 运算的逆元分别为 a^{-1}, b^{-1}，则 $\langle a^{-1},\,b^{-1}\rangle$ 是 $\langle a,b\rangle$ 在 V 中关于 o_i 运算的逆元。

定义 15.14 设 $V_1, V_2, \cdots, V_n$ 是同类型的代数系统，对于 $i=1,2,\cdots,n$, $V_i=\langle Ai, o_{i1}, o_{i2}, \cdots, o_{ir}\rangle$. 设 o_{it} 为 k_t 元运算，$t=1,2,\cdots,r$. 则

$$V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n = \langle A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n, o_1, o_2, \cdots, o_r\rangle.$$

其中 o_t 是 k_t 元运算，$t=1,2,\cdots,r$. 对于任意的 $\langle x_{1j}, x_{2j}, \cdots, x_{nj}\rangle \in A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$，$j=1,2,\cdots,k_t$ 有

$$\begin{aligned} & o_t(\langle x_{11}, x_{21}, \cdots, x_{n1}\rangle, \langle x_{12}, x_{22}, \cdots, x_{n2}\rangle, \cdots, \langle x_{1k_t}, x_{2k_t}, \cdots, x_{nk_t}\rangle) \\ = & \langle o_{1t}(x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{1k_t}), o_{2t}(x_{21}, x_{22}, \cdots, x_{2k_t}), \cdots, o_{nt}(x_{n1}, x_{n2}, \cdots, x_{nk_t})\rangle \end{aligned}$$

15.3 代数结构的同态与同构

定义 15.15 设 $V_1=\langle A, o_1, o_2, \cdots, o_r\rangle$，$V_2=\langle B, \overline{o_1}, \overline{o_2}, \cdots, \overline{o_r}\rangle$ 是同类型的代数系统。对 $\forall i=1,2,\cdots,r$，o_i 和 $\overline{o_i}$ 是 k_i 元运算。函数 ϕ：$A \to B$，如果对所有的运算 o_i，$\overline{o_i}$ 都有

$$\phi(o_i(x1, x2, \cdots, x_{k_i})) = \overline{o_i}(\phi(x_1), \phi(x_2), \cdots, \phi(x_{k_t})), \qquad \forall x_1, x_2, \cdots, x_{k_i} \in A$$

则称 ϕ 是代数系统 V_1 到 V_2 的**同态映射**，简称同态。

定义 15.16 设 $V_1=\langle A, o_1, o_2, \cdots, o_r\rangle$，$V_2=\langle B, \overline{o_1}, \overline{o_2}, \cdots, \overline{o_r}\rangle$ 是同类型的代数系统。ϕ：$A \to B$ 是 V_1 到 V_2 的同态。

- 若 ϕ 为满射，则称 ϕ 为**满同态**，记为 $V_1 \overset{\phi}{\sim} V_2$.
- 若 ϕ 为单射，则称 ϕ 为**单同态**。
- 若 ϕ 为双射，则称 ϕ 为**同构**，记为 $V_1 \overset{\phi}{\cong} V_2$，称 V_1 同构于 V_2.
- 若 $V_1=V_2$，则称 ϕ 是**自同态**，若 ϕ 是双射则称 ϕ 为**自同构**。

定理 15.7 设 $V_1=\langle A, o_1, o_2, \cdots, o_r\rangle$，$V_2=\langle B, \overline{o_1}, \overline{o_2}, \cdots, \overline{o_r}\rangle$ 是同类型的代数系统。对 $\forall i=1,2,\cdots,r$，o_i 和 $\overline{o_i}$ 是 k_i 元运算。ϕ：$A \to B$ 是 V_1 到 V_2 的同态，则 $\phi(A)$ 关于 V_2 中的运算构成代数系统，且是 V_2 的子代数，称为 V_1 在 ϕ 下的**同态像**。

定理 15.8 设 $V_1=\langle A, o_1, o_2, \cdots, o_r\rangle$，$V_2=\langle B, \overline{o_1}, \overline{o_2}, \cdots, \overline{o_r}\rangle$ 是同类型的代数系统。ϕ：$A \to B$ 是 V_1 到 V_2 的满同态，o_i, o_j 是 V_1 中的两个二元运算。

1. 若 o_i 是可交换的（或可结合的，幂等的），则 $\overline{o_i}$ 也是可交换的（或可结合的，幂等的）。
2. 若 o_i 对 o_j 是可分配的，则 $\overline{o_i}$ 对 $\overline{o_j}$ 也是可分配的。
3. 若 o_i, o_j 是可吸收的，则 $\overline{o_i}, \overline{o_j}$ 也是可吸收的。
4. 若 e（或 θ）是 V_1 中关于 o_i 运算的单位元（或零元），则 $\phi(e)$（或 $\phi(\theta)$）是 V_2 中关于 $\overline{o_i}$ 运算的单位元（或零元）。
5. 若 o_i 是含有单位元的运算，$x^{-1} \in A$ 是 x 关于 o_i 运算的逆元，则 $\phi(x^{-1})$ 是 $\phi(x)$ 关于 $\overline{o_i}$ 运算的逆元。

补充 习题 23 对任意代数系统 V_1, V_2, V_3 有

$$(1) V_1 \cong V_1 \quad (2) V_1 \cong V_2 \Leftrightarrow V_2 \cong V_1 \quad (3) V_1 \cong V_2 \wedge V_2 \cong V_3 \Rightarrow V_1 \cong V_3$$

15.4 同余关系和商代数

定义 15.17 设代数系统 $V=\langle A,o_1,o_2,\cdots,o_r\rangle$，其中 o_i 是 k_i 元运算。关系 $\sim$ 是 A 上的等价关系。任取 A 上 $2k_i$ 个元素 $a_1,a_2,\cdots,a_{k_i},b_1,b_2,\cdots,b_{k_i}$，如果对 $\forall j=1,2,\cdots,k_i$，$a_i\sim b_i$ 就有

$$o_i(a_1,a_2,\cdots,a_{k_i})\sim o_i(b_1,b_2,\cdots,b_{k_i})$$

成立。则称等价关系 $\sim$ 对元素 o_i 具有**置换性质**。如果等价关系 $\sim$ 对 V 上所有的运算都具有置换性质，则称关系 $\sim$ 是 V 上的**同余关系**，称 A 中关于 $\sim$ 的等价类为 V 上的**同余类**。

定义 15.18 设代数系统 $V=\langle A,o_1,o_2,\cdots,o_r\rangle$，其中 o_i 是 k_i 元运算。$\sim$ 是 V 上的同余关系，V 关于同余关系 $\sim$ 的商代数记作 $V/\sim=\langle A/\sim,\overline{o_1},\overline{o_2},\cdots,\overline{o_r}\rangle$，其中 $A/\sim$ 是 A 关于同余关系 $\sim$ 的商集。对 $\forall i=1,2,\cdots,r$，运算 $\overline{o_i}$ 规定为：$\forall [a_1],[a_2],\cdots,[a_{k_i}]\in A/\sim$，有

$$\overline{o_i}([a_1],[a_2],\cdots,[a_{k_i}])=[o_i(a_1,a_2,\cdots,a_{k_i})]$$

为说明商代数 $V/\sim$ 是有意义的，必须证明 $V/\sim$ 中的所有运算都是**良定义的**，即证明运算结果与代表元的选取无关。对 $\forall i=1,2,\cdots,r$，考虑 $V/\sim$ 中的运算 $\overline{o_i}$，任取 k_i 个同余类 $[a_1],[a_2],\cdots,[a_{k_i}]$. 假设 A 中存在 $b_1,b_2,\cdots,b_{k_i}$，使得 $b_j\in[a_j],j=1,2,\cdots,k_i$，则

$$\overline{o_i}([a_1],[a_2],\cdots,[a_{k_i}])=\overline{o_i}([b_1],[b_2],\cdots,[b_{k_i}])$$

定理 15.9 设代数系统 $V=\langle A,o_1,o_2,\cdots,o_r\rangle$，其中 o_i 是 k_i 元运算。$\sim$ 是 V 上的同余关系，V 关于 $\sim$ 的商代数 $V/\sim=\langle A/\sim,\overline{o_1},\overline{o_2},\cdots,\overline{o_r}\rangle$，令 o_i,o_j 是 V 中任意的二元运算。

1. 若 o_i 是可交换的（或可结合的，幂等的），则 $\overline{o_i}$ 在 $V/\sim$ 中也是可交换的（或可结合的，幂等的）。
2. 若 o_i 对 o_j 是可分配的，则 $\overline{o_i}$ 对 $\overline{o_j}$ 在 $V/\sim$ 中也是可分配的。
3. 若 o_i,o_j 是可吸收的，则 $\overline{o_i},\overline{o_j}$ 在 $V/\sim$ 中也是可吸收的。
4. 若 e（或 θ）是 V 中关于 o_i 运算的单位元（或零元），则 $[e]$（或 $[\theta]$）是 $V/\sim$ 中关于 $\overline{o_i}$ 运算的单位元（或零元）。
5. 若 o_i 是含有单位元的运算，$x^{-1}\in A$ 是 x 关于 o_i 运算的逆元，则 $[x]$ 在 $V/\sim$ 中关于 $\overline{o_i}$ 运算的逆元是 $[x^{-1}]$。

定理 15.10 设 $V_1=\langle A,o_1,o_2,\cdots,o_r\rangle$，$V_2=\langle B,\overline{o_1},\overline{o_2},\cdots,\overline{o_r}\rangle$ 是同类型的代数系统。对 $\forall i=1,2,\cdots,r$，o_i 和 $\overline{o_i}$ 是 k_i 元运算。ϕ：$A\to B$ 是 V_1 到 V_2 的同态，则由 ϕ 导出的 A 上的等价关系 $\sim$ 是 V_1 上的同余关系。

定理 15.11 设代数系统 $V=\langle A,o_1,o_2,\cdots,o_r\rangle$，其中 o_i 是 k_i 元运算。$\sim$ 是 V 上的同余关系，则**自然映射** g：$A\to A/\sim,\ g(A)=[a],\ \forall a\in A$ 是从 V 到 $V/\sim$ 上的同态映射。

定理 15.12 同态基本定理 设 $V_1 = \langle A, o_1, o_2, \cdots, o_r \rangle$，$V_2 = \langle B, \overline{o_1}, \overline{o_2}, \cdots, \overline{o_r} \rangle$ 是同类型的代数系统。对 $\forall i = 1, 2, \cdots, r$，$o_i$ 和 $\overline{o_i}$ 是 k_i 元运算。ϕ：$A \to B$ 是 V_1 到 V_2 的同态，关系 $\sim$ 是 ϕ 导出的 V_1 上的同余关系，则 V_1 关于同余关系 $\sim$ 的商代数同构于 V_1 在 ϕ 下的同态像，即 $V_1 / \sim \cong \langle \phi(A), \overline{o_1}, \overline{o_2}, \cdots, \overline{o_r} \rangle$.

- 任何代数系统 V 的商代数是它的一个同态像
- 如果 V' 是 V 的同态像，则 V' 必与 V 的一个商代数同构，V' 就是 V 的商代数。

15.5 $\sum$ 代数

定义 15.19 一个 $\sum$ **代数** V 是一个二元组 $\langle F, \Omega \rangle$，其中 F 是一个非空集合构成的集合族，$\forall A \in F$，称 A 是 V 的**基集**。Ω 是一个非空的运算集，$\forall o \in \Omega, o$: $A_{t_1} \times A_{t_2} \times \cdots \times A_{t_n} \to A_t$，$A_{t_1}, A_{t_2}, \cdots, A_{t_n}, A_t \in F, n \in \mathbb{N}$.