- 复习:
  样本(点) ω、样本空间Ω (全集)、事件$A, B, \cdots$ (子集)
  古典概型
- 今天讲授:
  §1.2 事件、概率的运算
  §1.4 概率的定义、性质
  §1.5 条件概率、独立性

§1.2, §1.4. 事件的运算、概率的定义、性质

目标: 已知一些事件的概率, 计算某事件的概率.

1. 事件(集合)的运算.

事件A发生: (本次)试验结果$\omega \in A$.

- "并", $A \cup B$: 事件A 发生或事件B 发生.
- $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$: $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$, 某个事件$A_i$ 发生, $\{\omega : \exists\ 1 \leqslant i \leqslant n$ 使得$\omega \in A_i\}$.
- $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$: $\bigcup_i A_i$, $A_1 \cup A_2 \cup \cdots$, $\{\omega : \exists\ i$ 使得$\omega \in A_i\}$,
- 例: 若$A_i = [1/i, 1]$, 则$\bigcup_i A_i = (0, 1]$.
- 若$A_1 \subset A_2 \subset \cdots$, 则 $\lim_i A_i (= \lim_{i\to\infty} A_i) := \bigcup_i A_i$.

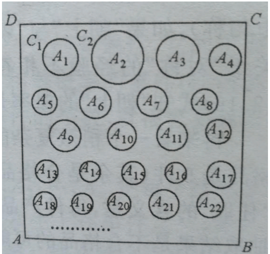

图 1.2.2 无穷个事件的并的示意图

- “交”, $A \cap B$, AB : 事件A 发生且事件B 发生.
- $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cdots A_n$, $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcap_i A_i$.
- 例: $A_i = [0, 1/i]$, 则$\bigcap_i A_i = \{0\}$.

  $A_i = (0, 1/i]$, 则$\bigcap_i A_i = \varnothing$.
- 若$A_1 \supset A_2 \supset \cdots$, 则$\lim_i A_i := \bigcap_i A_i$;
- “补”, $\bar{A}$: 事件A 不发生.
- “差”, $A \backslash B := A\bar{B}$.
- 对偶律:

  $\overline{\bigcup_i A_i} = \bigcap_i \overline{A_i}$, (2.16)

  $\overline{\bigcap_i A_i} = \bigcup_i \overline{A_i}$, (2.17)

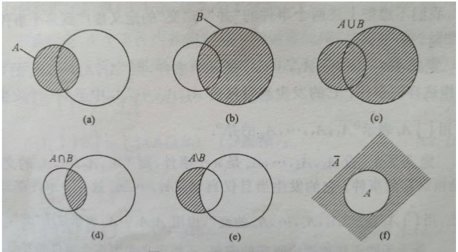

图 1.2.1 事件运算示意图

2. 事件关系:

- $A \subset B$: 如果A发生，则B一定发生.
- $A = B$: $A \subset B$且$B \subset A$
- A, B互不相容: $A \cap B = \emptyset$.
- $A_1, A_2, \cdots, A_n$两两不相容(简称：互不相容)：若对任意$i \neq j$, $A_iA_j = \emptyset$.

3. 概率的定义和性质

基本假设和直观要求:

- $P(A) \geqslant 0$, $P(\Omega) = 1$. (非负、归一化, 基本假设!)
- 若$AB = \varnothing$, 则$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
  (可加性, 直观要求!)
- 若$A_1 \subset A_2 \subset \cdots$, 则$\lim_i P(A_i) = P(\lim_i A_i)$.
  (连续性, 直观要求!)

在非负、归一化的基本假设下,
可加性、连续性的直观要求有如下推论:

- 单调性: 若$A \subset B$, 则$P(B) \geqslant P(A)$. $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.

推导: $P(B) = P(A) + P(B \backslash A) \geqslant P(A)$.

- 有限可加性: (推导: 数学归纳法.)

$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 互不相容, 则$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)$.

- 可列可加性:

若$A_1, A_2, \cdots$ 互不相容, 则$\sum_i P(A_i) = P(\bigcup_i A_i)$.

推导: $\sum_i P(A_i) (\overset{\text{定义}}{:=} \lim_n \sum_{i=1}^{n} P(A_i)) \overset{\text{有限可加性}}{=} \lim_n P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \overset{\text{连续性}}{=}$

$P(\lim_n \bigcup_{i=1}^{n} A_i) = P(\bigcup_i A_i)$.

在非负、归一化的基本假设下,
反过来, 可列可加性从逻辑上可推出如下结论:

- $P(\varnothing) = 0.$

推导: 取$A_1 = \Omega$, $A_2 = A_3 = \cdots = \varnothing$, 则它们互不相容, $\bigcup_i A_i = \Omega$, 于是,

$1 + P(\varnothing) + P(\varnothing) + \cdots = 1$, 从而$P(\varnothing) = 0$.

- 可加性: 若$AB = \varnothing$, 则$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

推导: 取$A_1 = A$, $A_2 = B$, $A_3 = A_4 = \cdots = \varnothing$ 即可.

- 连续性: 若$A_1 \subset A_2 \subset \cdots$, 则$\lim_i P(A_i) = P(\lim_i A_i)$.

推导: 取$B_1 = A_1$, $B_2 = A_2 \backslash A_1$, $B_3 = A_3 \backslash A_2$, $\cdots$, 则$\lim_i A_i = \bigcup_i A_i = \bigcup_i B_i$. 于是,

$P(\lim_i A_i) = P(\bigcup_i B_i) \overset{\text{可列可加性}}{=} \sum_i P(B_i) = \lim_n \sum_{i=1}^n P(B_i) \overset{\text{有限可加性}}{=}$

$\lim_n P(\bigcup_{i=1}^n B_i) = \lim_n P(A_n)$.

总结：在非负、归一化的基本假设下，

可加性+连续性等价于可列可加性!

定义 (概率的定义)

概率指事件的函数，它满足如下三个条件：

(1) 非负性：$P(A) \geqslant 0,\ \forall A$.

(2) 归一化：$P(\Omega) = 1$.

(3) 可列可加性：

若$A_1, A_2, \cdots$ 互不相容，则$\sum_i P(A_i) = P(\bigcup_i A_i)$.

概率的性质：可加、连续、单调、有限可加、$P(\varnothing) = 0$.

注：(1) 古典概率模型中的$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ 满足概率定义的三个条件.

(2) 略过集合系$\mathcal{F}$，定义4.9 (σ代数)，定理4.1. 自习定理4.2.

1. 条件概率

例5.1 设盒中有3个白球、2个红球, 从中取出一个球, 发现是白球. 从剩下的4个球中任取一个, 求: 它还是白球的概率(记为p).

- 建模: 不放回抽样, 白球$1\sim 3$, 红球$4,5$. $\omega=(i,j)$.
- $A=\{\omega: i\leqslant 3\}$, $B=\{\omega: j\leqslant 3\}$.
- $$\begin{array}{ccccc} & (1,2)\surd & (1,3)\surd & (1,4) & (1,5) \\ (2,1)\surd & & (2,3)\surd & (2,4) & (2,5) \\ (3,1)\surd & (3,2)\surd & & (3,4) & (3,5) \\ (4,1)\surd & (4,2)\surd & (4,3)\surd & & (4,5) \\ (5,1)\surd & (5,2)\surd & (5,3)\surd & (5,4) & \end{array}$$
- $p=P(AB)/P(A)=6/12=1/2$, $p\neq 3/5=P(B)$.

定义 (条件概率)

假设$P(A)>0$. 称$\frac{P(AB)}{P(A)}$ 为已知A 发生的条件下, B 的条件概率. 记为$P(B|A)$.

- 按照定义直接计算条件概率$P(B|A)$.
- 条件概率指"重新分配权重": $P(B|A)$ vs $P(B)=P(B|\Omega)$. 给定A, 条件概率$P(\cdot|A)$ 满足概率定义的三个条件.
- 简化模型给出条件概率: 在假设A 发生时, 简化模型.
  例5.1 3白2红. $A=$"第一次白", $B=$"第二次白". (若) A 发生, 则第二次在2白2红中抽取, $P(B|A)=2/4$.

乘法公式:

若$P(A)>0$, 则$P(AB)=P(A)P(B|A)$.

若$P(A_1\cdots A_{n-1})>0$, 则

$$P(A_1\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1\cdots A_{n-1}).$$

例5.4 将52张牌随机均分4堆, 求: 各堆都含Ace的概率.

- $A_1=$ 红心Ace与黑桃Ace不在一组;
  $A_2=$ 梅花Ace与红心Ace黑桃Ace都不在一组;
  $A_3=$ 方块Ace与其他Ace都不在一组.
  则$A=A_1A_2A_3$.
- $P(A_1)=\frac{C_{50}^{12}}{C_{51}^{12}}$, $P(A_2|A_1)=\frac{C_{49}^{24}}{C_{50}^{24}}=\frac{26}{50}$,
  $P(A_3|A_1A_2)=\frac{C_{48}^{36}}{C_{49}^{36}}=13/49$. 故$P(A)=\frac{39\times26\times13}{51\times50\times49}$.
- 巧妙分解A. 略过例5.5

2. 独立性

直观: $P(B|A)=P(B)$, A 的发生不改变B 的概率.

定义 (两个事件相互独立、多个事件两两独立)

(1) 若$P(AB)=P(A)P(B)$, 则称A, B (相互)独立.

(2) 若可数(有限或可列)个事件A_i, 满足$P(A_iA_j)=P(A_i)P(A_j)$, $\forall i\neq j$, 则称它们两两独立.

- 两个事件是否独立, 依赖于概率的选择. 例如: $\Omega=\{(i,j):i,j\leqslant n\}$. 放回抽样: $P(\{(i,j)\})=\frac{1}{n^2}$, 不放回抽样: 若$i\neq j$, $\widetilde{P}(\{(i,j)\})=\frac{1}{n(n-1)}$; 若$i=j$, $\widetilde{P}(\{(i,j)\})=0$.
- 自习例5.6 (放回抽样vs 不放回抽样, 通过直观判断独立性), 5.7 (模型假设相互独立), 5.8 (通过计算判断独立性).
- 自习定理5.2: A 发生与否不影响B 发生与否的概率.

例: 甲乙玩石头剪子布. $A=$甲出剪刀, $B=$乙出布, $C=$甲赢.

- $0 :=$ 石头 $\quad 2 :=$ 剪子 $\quad 5 :=$ 布.

$$(0,0) \quad (0,2)_C \quad (0,5)_B$$

- $$(2,0)_A \quad (2,2)_A \quad (2,5)_{A,B,C}$$

$$(5,0)_C \quad (5,2) \quad (5,5)_B$$

- $P(A)=P(B)=P(C)=1/3$,
  $P(AB)=P(AC)=P(BC)=1/9$. 故A,B,C 两两独立.
- $P(C|AB)=1$.

定义 (相互独立)

若可数个事件A_i 满足: 其中任意k 个事件都有

$P(A_{i_1}\cdots A_{i_k}) = P(A_{i_1})\cdots P(A_{i_k})$, 则称它们相互独立.

- 自习定理5.3, 若干事件发生与否, 不影响另一事件发生的概率.
- 自习例5.9, 5.10 (假设独立性, 计算可靠性), 5.11 (两两独立但不相互独立)