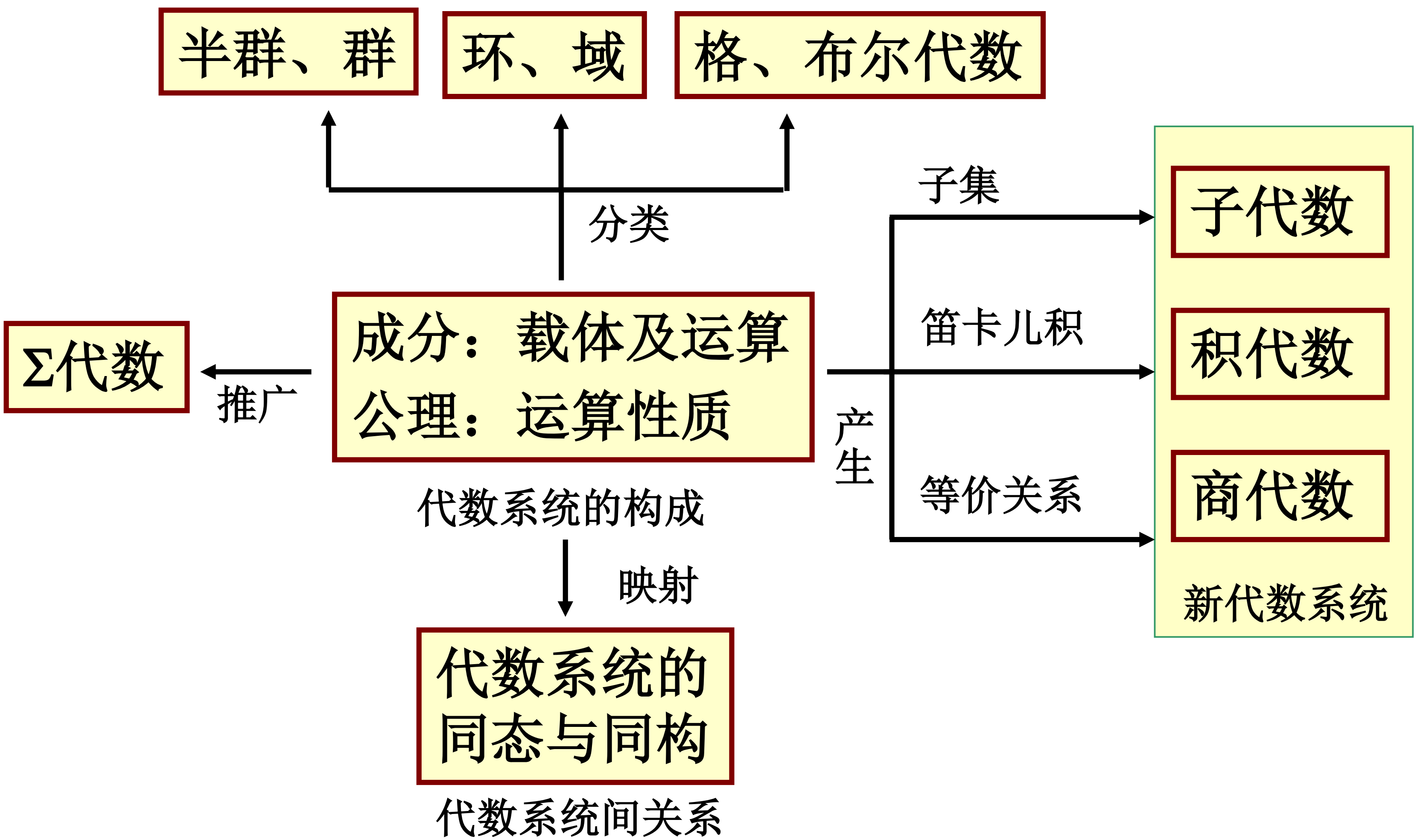
代数结构
Algebraic Structure

代数系统　半群与独异点
群 环　域　格与布尔代数

第十五章 代数系统



半群、群
环、域
格、布尔代数
分类
Σ代数
推广
成分：载体及运算
公理：运算性质
代数系统的构成
映射
代数系统的同态与同构
代数系统间关系
产生
子集
笛卡儿积
等价关系
子代数
积代数
商代数
新代数系统

15.1 二元运算及其性质

- *n*元运算的定义及实例
- *n*元运算的表示
- 二元运算的算律
- 二元运算的特异元素

n元运算的定义

定义 设A为集合，函数 $f: A\times A\to A$称为A上的二元运算。

定义 设A为集合，函数 $f: A^n\to A$称为A上的 n元运算。

$n=0$, 0元运算，$f: \to A$，A中的一个元素

$n=1$, 一元运算，$f: A\to A$

封闭性:

运算结果均属于A

n元运算的实例

集合	二元运算	一元运算	0元运算
Z, Q, R, C	$+, \times$	$-$	$0, 1$
$M_n(R)$	$+, \times$	$-$	θ, E
$P(B)$	$\cup, \cap, -, \oplus$	$\sim$	$\emptyset, B$
$R(B)$	$\circ$	$-$	I_B
A^A	$\circ$		I_A

$A \oplus B = (A-B) \cup (B-A)$ 对称差

$R(B)$: B上二元关系的集合

n元运算的表示

算符记号：$\circ$，$*$，$\bullet$，$\square$，$\Diamond$，$\triangle$等，

表达式：

$$\circ(x_1, x_2, \ldots, x_n) = y$$

$$x_1 \circ x_2 = y$$

$$\Delta x = y$$

表示方法：

解析表达式

运算表（适用于有穷集上的一元和二元运算）

n元运算的表示实例

- 表达式：$\circ$是实数集 R上的二元运算

$$x \circ y = x + y - 2xy$$

- 运算表

$A = P(\{a, b\})$, A上的二元运算$\oplus$，一元运算~

$\oplus$	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$
$\{a\}$	$\{a\}$	$\emptyset$	$\{a,b\}$	$\{b\}$
$\{b\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$	$\emptyset$	$\{a\}$
$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	$\{b\}$	$\{a\}$	$\emptyset$

X	$\sim X$
$\emptyset$	$\{a,b\}$
$\{a\}$	$\{b\}$
$\{b\}$	$\{a\}$
$\{a,b\}$	$\emptyset$

运算表的一般形式

适用于有穷集

$\circ$	a_1	a_2	$\cdots$	a_n
a_1	$a_1 \circ a_1$	$a_1 \circ a_2$	$\cdots$	$a_1 \circ a_n$
a_2	$a_2 \circ a_1$	$a_2 \circ a_2$	$\cdots$	$a_2 \circ a_n$
	$\cdots\cdots$			
a_n	$a_n \circ a_1$	$a_n \circ a_2$	$\cdots$	$a_n \circ a_n$

a_i	Δa_i
a_1	Δa_1
a_2	Δa_2
a_n	Δa_n

二元运算的算律

- 涉及一个二元运算的算律
  - 交换
  - 结合——广义结合
  - 幂等
  - 消去
- 涉及两个不同的二元运算的算律
  - 分配——广义分配
  - 吸收（以交换为前提）

算律的定义

设$\circ$, $*$为A上的二元运算

交换律　$\forall a, b \in A,\quad a \circ b = b \circ a$

结合律　$\forall a, b, c \in A,\quad (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$

幂等律　$\forall a \in A,\quad a \circ a = a$

分配律　$\forall a, b, c \in A,$

$$a \circ (b * c) = (a \circ b) * (a \circ c)$$

$$(b * c) \circ a = (b \circ a) * (c \circ a)$$

吸收律　设$\circ$, $*$可交换　$\forall a, b \in A,$

$$a \circ (a * b) = a,\quad a * (a \circ b) = a$$

推广：结合律、幂等律、分配律推广到有限项

实例：交换、结合、幂等律

集合	运算	交换律	结合律	幂等律
Z, Q, R	普通加法+	有	有	无
	普通乘法×	有	有	无
$M_n(R)$	矩阵加法+	有	有	无
	矩阵乘法×	无	有	无
$P(B)$	并∪	有	有	有
	交∩	有	有	有
	相对补−	无	无	无
	对称差⊕	有	有	无
A^A	函数复合∘	无	有	无

实例：分配、吸收律

集合	运算	分配律	吸收律
Z, Q, R	普通加法+与乘法×	×对+可分配 +对×不分配	无
$M_n(R)$	矩阵加法+与乘法×	×对+可分配 +对×不分配	无
$P(B)$	并∪与交∩	∪对∩可分配 ∩对∪可分配	有
	交∩与对称差⊕	∩对⊕可分配 ⊕对∩不分配	无

分配律　$\forall a, b, c \in A,\ a \circ (b * c) = (a \circ b) * (a \circ c)$

$$(b * c) \circ a = (b \circ a) * (c \circ a)$$

吸收律　设$\circ$, $*$可交换　$\forall a, b \in A,\ \ a \circ (a * b) = a$，$a * (a \circ b) = a$

二元运算的特异元素

- 特异元素名称
  单位元（幺元）e
  零元 θ
  幂等元
  可逆元和逆元
- 说明：存在特异元素也可以作为算律
  同一律（存在单位元）
  零律（存在零元）

特异元素的定义与性质

定义 设$\circ$为A上二元运算

单位元 e, $\forall a \in A,\ e \circ a = a \circ e = a$

零元 θ, $\forall a \in A,\ \theta \circ a = a \circ \theta = \theta$

幂等元 a $a \in A,\ a \circ a = a$

可逆元 x (逆元y) $x \in A, \exists y \in A,\ x \circ y = y \circ x = e$

特异元素的性质

单位元及零元的唯一性

如果 $|A| > 1$，那么$e \neq \theta$

可结合运算逆元的唯一性：x 的逆元记为 x^{-1}.

定理证明

定理1 对于给定集合A和A上的二元运算$\circ$，如果存在 $e_l \in A$ 和 $e_r \in A$ 使得 $\forall x \in A$ 满足

$$e_l \circ x = x = x \circ e_r,$$

则$e_l = e_r = e$, 且e 就是A中关于$\circ$ 运算的唯一的单位元.

证 $e_l = e_l \circ e_r = e_r$, 令 $e_l = e_r = e$, 则e为单位元.

假设 e'也为单位元，则 $e' = e' \circ e = e$

定理2 对于给定集合A和A上的二元运算$\circ$，如果存在 $\theta_l \in A$和$\theta_r \in A$ 使得 $\forall x \in A$ 满足

$$\theta_l \circ x = \theta_l, \quad x \circ \theta_r = \theta_r,$$

则 $\theta_l = \theta_r = \theta$, 且$\theta$ 就是A中关于$\circ$ 运算的唯一的零元.

定理证明（续）

定理3 设$\circ$是A 上可结合的二元运算， e为单位元，如果对于A 中元素 x, 存在元素 y_l和 y_r使得

$$y_l \circ x = x \circ y_r = e,$$

则 $y_l = y_r = y$, 且 y 是 x 的唯一的逆元。

证 $y_l = y_l \circ e = y_l \circ (x \circ y_r) = (y_l \circ x) \circ y_r = e \circ y_r = y_r$

令 $y_l = y_r = y$, y 是 x 的逆元。

假设y'也是 x 的逆元，则

$$y' = y' \circ e = y' \circ (x \circ y) = (y' \circ x) \circ y = e \circ y = y$$

实例：单位元、零元、可逆元

集合	运算	单位元	零元	逆元
Z,Q,R	普通加法+	**0**	无	x的逆元 $-x$
	普通乘法×	**1**	**0**	可逆元x存在x^{-1}
$M_n(R)$	矩阵加法+	全0矩阵	无	X的逆元 $-X$
	矩阵乘法×	单位矩阵	全0矩阵	可逆元X存在X^{-1}
$P(B)$	并∪	$\varnothing$	B	$\varnothing$的逆元为$\varnothing$
	交∩	B	$\varnothing$	B的逆元为B
	对称差⊕	$\varnothing$	无	X的逆元为X

注意：只有可逆元 x 存在逆元； x^{-1}必须属于给定集合

消去律定义及实例

定义　设A为集合，$\circ$为A上二元运算，若 $\forall a, b, c \in A$,

$$a \circ b = a \circ c \wedge a \neq \theta \Rightarrow b = c$$

$$b \circ a = c \circ a \wedge a \neq \theta \Rightarrow b = c$$

则称$\circ$运算满足消去律

实例：

Z, Q, R，+，× 满足消去律

$M_n(R)$，矩阵+满足消去律，矩阵×不满足消去律

$P(B)$，$\oplus$ 满足消去律，$\cup$、$\cap$、$-$ 一般不满足消去律

A^A，$\circ$ 一般不满足消去律

例题分析

例1 设 ∘ 运算为 Q 上的二元运算，

$\forall x, y \in Q,\quad x \circ y = x + y + 2xy,$

(1) 判断 ∘ 运算是否满足交换、结合、幂等、消去律.

(2) 求出 ∘运算的单位元、零元和所有可逆元素的逆元.

证明算律成立：根据定义验证；证明算律不成立：举反例。

解 (1) ∘ 运算可交换，可结合，可消去，不幂等.

结合律成立，任取 $x, y, z \in Q$,

$$(x \circ y) \circ z = (x + y + 2xy) + z + 2(x + y + 2xy)z$$
$$= x + y + z + 2xy + 2xz + 2yz + 4xyz$$
$$x \circ (y \circ z) = x + (y + z + 2yz) + 2x(y + z + 2yz)$$
$$= x + y + z + 2xy + 2xz + 2yz + 4xyz$$

幂等律不成立，因为 $1 \circ 1 = 1 + 1 + 2 = 4 \neq 1$.

例题分析（续）

(2) 设 $\circ$运算的单位元和零元分别为 e 和 θ，则对于任意 x 有 $x \circ e = x$ 成立，即

$$x + e + 2xe = x \Rightarrow e = 0$$

由于$\circ$ 运算可交换，所以 0 是单位元.

对于任意 x 有 $x\circ\theta = \theta$成立，即

$$x+\theta + 2\,x\theta = \theta \Rightarrow\ x + 2\,x\theta = 0\ \Rightarrow\ \theta = -1/2$$

给定 x，设 x 的逆元为 y, 则有 $x \circ y = 0$ 成立，即

$$x + y + 2xy = 0 \Rightarrow y = -\frac{x}{1+2x}\quad (x \neq -1/2)$$

因此当 $x \neq -1/2$时，$y = -\frac{x}{1+2x}$是x的逆元.

例题分析（续）

例2 下面是三个运算表
(1) 说明那些运算是可交换的、可结合的、幂等的.
(2) 求出每个运算的单位元、零元、所有可逆元素的逆元.

$*$	a	b	c
a	c	a	b
b	a	b	c
c	b	c	a

$\circ$	a	b	c
a	a	a	a
b	b	b	b
c	c	c	c

$\bullet$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	c
c	c	c	c

解

(1) $*$ 满足交换律、结合律； $\circ$ 满足结合律、幂等律；
$\bullet$ 满足交换律、结合律.

(2) $*$ 的单位元为 b, 没有零元， $a^{-1}=c, b^{-1}=b, c^{-1}=a$
$\circ$ 的单位元和零元都不存在，没有可逆元素.
$\bullet$ 的单位元为 a，零元为c, $a^{-1}=a$. b, c不是可逆元素.

第二节 代数系统

- 代数系统的定义

  构成成分（载体+运算）、公理

- 代数系统的分类

  同类型的代数系统

  同种的代数系统

- 构造代数系统的方法

  子代数

  积代数

代数系统构成：成分+公理

记法一　$V = <A, \Omega, K>$,

A：载体，非空　　　　Ω：运算集，非空，

K：代数常数集，$\emptyset \subseteq K \subseteq A$

$$\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Omega_j \qquad \Omega_j = \{o \mid o\text{为}A\text{上的 }j\text{ 元运算}\}$$

记法二　$V = <A, \Omega>$, 其中

$$\Omega = \bigcup_{j=0}^{\infty} \Omega_j \qquad \Omega_j = \{o \mid o\text{为}A\text{上的 }j\text{ 元运算}\}$$

记法三　$V = < A, o_1, o_2, \ldots, o_r >$

代数系统的实例

$<\boldsymbol{Z},+,\cdot>,<\boldsymbol{Q},+,\cdot>,<\boldsymbol{R},+,\cdot>$

$<\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{R}),+,\cdot>,$

$<\boldsymbol{P}(\boldsymbol{B}),\cap,\cup>,$

$<\{\mathbf{0},\mathbf{1}\},\wedge,\vee>,$

$<\boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{n}},\oplus,\otimes>,$

$$\boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{n}}=\{\mathbf{0},\mathbf{1},\ldots,\boldsymbol{n}-\mathbf{1}\},$$

$$\boldsymbol{x}\oplus\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\pmod{\boldsymbol{n}}$$

$$\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}\pmod{\boldsymbol{n}}$$

$<\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{A}},\circ>$

代数系统的分类

同类型的：构成成分（主要是运算）相同；定义15.10

构成成分：载体、运算（运算个数+对应运算的元数）

$V_1 = < A, o_{11}, o_{12}, \ldots, o_{1r} >, V_2 = < B, o_{21}, o_{22}, \ldots, o_{2r} >, o_{1i}$ 和 o_{2i} 具有同样的元数

同种的：构成成分与运算性质都相同

运算性质：交换，结合，幂等，吸收，分配，消去律

$< A, \circ, * >$：$*$可结合；$*$对$\circ$可分配

$< Z, +, \cdot >, < Z_n, \oplus, \otimes >, < M_n(R), +, \cdot >$ 与 $< A, \circ, * >$ 是同种的

$< S, \circ', *' >$: 可交换、结合、幂等；$\circ', *'$相互分配、吸收

$< P(B), \cap, \cup >, < \{0, 1\}, \wedge, \vee >$ 与$< S, \circ', *' >$是同种的

$< A, \circ, * >$ 与 $< S, \circ', *' >$ 同类型的

子代数

定义 设$V=<A, o_1, o_2,\ldots, o_r>$是代数系统，$B$是$A$的非空子集. 若$B$对于$V$中的所有运算封闭（含0元运算在内），则称$V'=<B, o_1, o_2,\ldots, o_r>$为$V$的子代数.

若$B\subset A$,子代数V'称为V的真子代数.

平凡子代数：V是V的平凡子代数. 除此之外，若$V=<A, o_1, o_2,\ldots, o_r>$的代数常数集合为$K$，且$K$对$V$上所有的运算封闭，那么$<K, o_1, o_2,\ldots, o_r>$也为$V$的平凡子代数.

说明：

子代数一定存在（至少存在平凡子代数）

实例

例1 $V = \langle Z, +, 0\rangle$

公理：+满足结合律，每个元素可逆

子代数：nZ, $n \in N$,

$n=0$ 平凡的真子代数

$n=1$ 平凡子代数

$n>1$ 非平凡的真子代数

$V = \langle Z, +\rangle$

公理：+满足结合律

子代数：nZ（$n \in N$），N，Z^+（Z^+中每个元素均不可逆）等.

积代数

定义 设V_1=<A, o_{11}, o_{12},…, o_{1r}>与V_2=<B, o_{21}, o_{22}, … , o_{2r}>是同类型的代数系统，对于i=1, 2,…, r, o_{1i} 和 o_{2i} 是 k_i 元运算，定义

$$V_1 \times V_2 = \langle A \times B, o_1, o_2, \ldots, o_r \rangle$$

其中 o_i 是 k_i 元运算，i=1, 2, …, r, 对于任意的 $\langle x_1, y_1 \rangle$, $\langle x_2, y_2 \rangle$, … , $\langle x_{k_i}, y_{k_i} \rangle \in A \times B$,

$$o_i(\langle x_1, y_1 \rangle, \ldots, \langle x_{k_i}, y_{k_i} \rangle) \overset{\text{def}}{=}$$

$$\langle o_{1i}(x_1, \ldots, x_{k_i}), o_{2i}(y_1, \ldots, y_{k_i}) \rangle$$

称V= $V_1 \times V_2$是V_1与V_2的积代数,

也称V_1和V_2是V 的因子代数.

积代数的性质

定理1 设$V_1=\langle A, o_{11}, o_{12},\ldots, o_{1r}\rangle$与$V_2=\langle B, o_{21}, o_{22},\ldots, o_{2r}\rangle$是同类型的代数系统，$V_1$与$V_2$的积代数是

$$V_1\times V_2=\langle A\times B, o_1, o_2, \ldots, o_r\rangle,$$

(1) 若o_{1i}, o_{2i}分别在V_1与V_2中可交换（可结合或幂等），则o_i在V中也可交换（可结合或幂等）；

(2) 若o_{1i}对o_{1j}, o_{2i}对o_{2j}在V_1与V_2中分别适合分配律，则o_i对o_j在V中也适合分配律；

(3) 若o_{1i}, o_{1j}与o_{2i}, o_{2j}在V_1与V_2中分别适合吸收律，则o_i与o_j在V中也适合吸收律；

积代数的性质（定理续）

(4) 若e_{1i} (θ_{1i})，e_{2i} (θ_{2i})分别为V_1与V_2中关于o_{1i}和 o_{2i} 运算的单位元（零元），则$<e_{1i}, e_{2i}>$ ($<\theta_{1i}, \theta_{2i}>$)为$V$中关于$o_i$运算的单位元（零元）；

(5) 若o_{1i}和 o_{2i}分别为 V_1与 V_2中含单位元的运算，$a\in A$, $b\in B$ 分别关于 o_{1i}和 o_{2i}运算存在逆元 a^{-1}和 b^{-1}, 则 $<a^{-1}, b^{-1}>$ 是V 中$<a, b>$关于o_i运算的逆元。

积代数的性质小结

(1) 积代数能够保持因子代数的如下性质：

算律：交换律，结合律，幂等律，分配律，吸收律

特异元素：单位元，零元，幂等元，可逆元素及其逆元

消去律不一定能够保持，反例：

$$V_1=\langle Z_2, \otimes_2\rangle,\ V_2=\langle Z_3, \otimes_3\rangle$$

(2) 积代数与因子代数是同类型的

若系统公理不含消去律，积代数与因子代数同种；

若系统公理含消去律，不保证积代数与因子代数同种。

(3) 积代数可以推广到有限多个同类型的代数系统

(4) 直积分解是研究代数结构的有效手段

(5) 笛卡儿积是构造同种离散结构的有效手段