

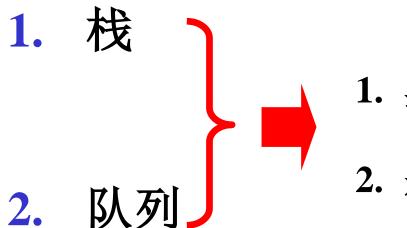


第三章 栈和队列

宋国杰

北京大学 信息科学技术学院

课程内容



- 1. 典型的线性结构
- 2. 是操作受限的线性结构

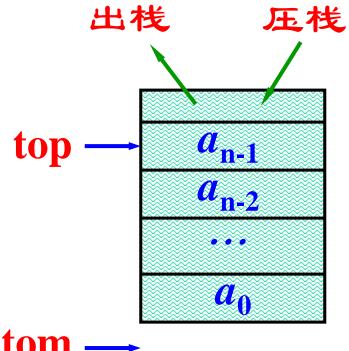
3. 栈和队列的讨论

3.1 栈

- >后进先出(Last-In First-Out,

LIFO),也称"下推表"

- ▶'压栈'与'出栈'
- >'栈顶'与'栈底'



bottom —

栈的主要操作

- ▶入栈 (push)
- ➤出栈 (pop)
- ▶取栈顶元素 (top)
- ▶判断栈是否为空(isEmpty)
- ▶判断栈是否为满 (isFull)

3.1.1 栈的ADT

```
// 栈的元素类型为 T
template <class T>
class Stack {
                        // 栈的运算集
public:
                        // 变为空栈
  void clear();
                        // item入栈,成功则返回真,否则返回假
  bool push(const T item);
  bool pop(T & item); // 返回栈顶内容并弹出,成功返回真,否则返回假
  bool top(T& item); // 返回栈顶内容但不弹出,成功返回真,否则返回假
                        // 若栈已空返回真
  bool is Empty(;
                        // 若栈已满返回真
  bool isFull();
};
```

- > 若入栈顺序为1,2,3,4的话,则出栈的顺序可以有哪些?
 - **→**

 - **→**

• • • • •

思考题

▶若元素a、b、c、d依次进栈,则可能的出栈序 列有(14)种;若有元素a、b、c、d、e依次 进栈,则可能的出栈序列有(42)种。

▶ 卡特兰数: 1/(n+1) *C(2n,n)种

栈的存储结构

- >顺序栈(Array-based Stack)
 - ▶ 用向量(数组)实现

- ▶链式栈(Linked Stack)
 - ▶用链表实现

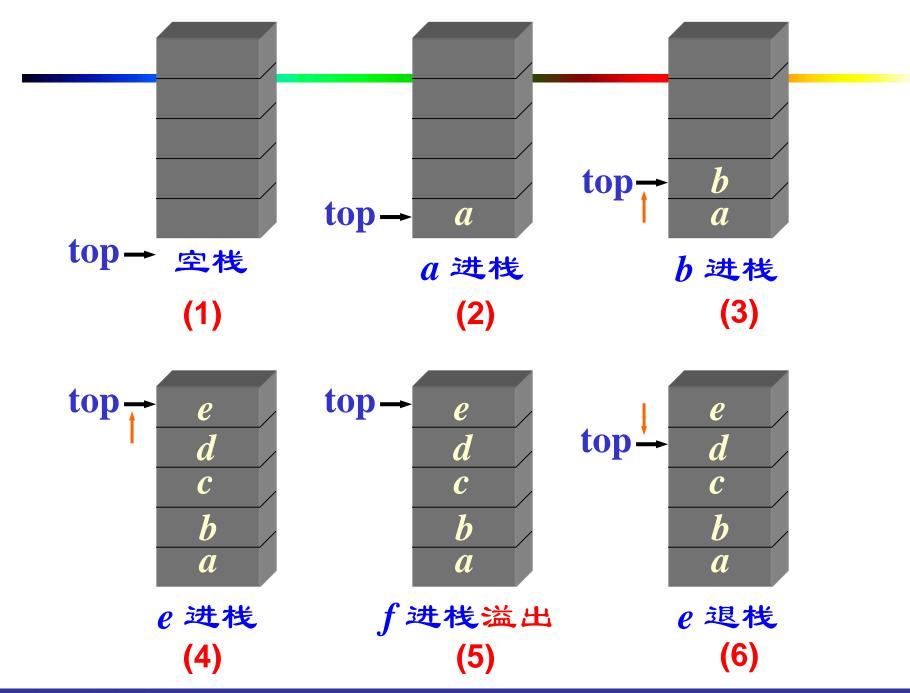
3.1.2 顺序栈

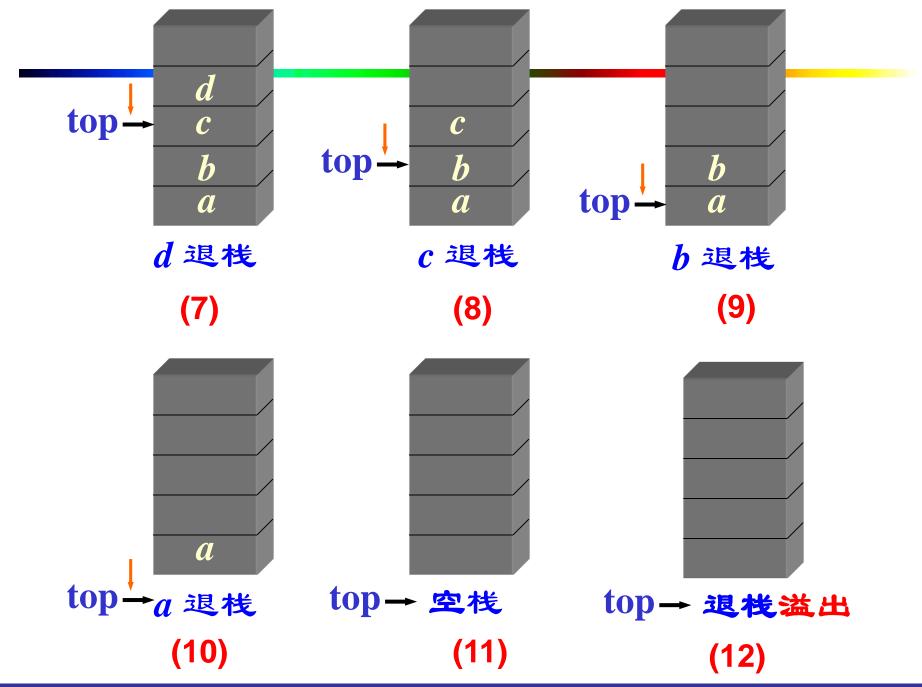
```
template <class T> class arrStack: public Stack <T> {
                       // 栈的顺序存储
 private:
                       // 栈中最多可存放的元素个数
     int
           mSize;
                       // 栈顶位置,应小于mSize
     int
           top;
                       // 存放栈元素的数组
           *st;
                       // 栈的运算的顺序实现
 public:
     arrStack(int size) { // 创建顺序栈实例
           mSize = size;
           st = new T[mSize];
           top = -1;
```

```
// 创建一个顺序栈的实例
arrStack() {
   top = -1;
                   // 析构函数
~arrStack() {
   delete [] st;
                   // 清空栈内容
void clear() {
   top = -1;
```

运算集

- > 入栈
- ▶出栈
- >从栈顶读取,但不弹出
- > 变空栈
- > 栈满时,返回非零值





顺序栈的溢出

- > 上溢 (Overflow)
 - → 当栈中已经有maxsize个元素时,如果再做进栈 操作,所产生的"无空间可用"现象

- > 下溢 (Underflow)
 - ▶ 空栈进行出栈所产生的"无元素可删"现象

入栈

```
bool arrStack<T>::push(const T item) {
                            // 栈已满
 if (top == mSize-1) {
     cout << ''栈满溢出'' << endl;
     return false;
                             // 新元素入栈并修改栈顶指针
  else {
                      "先执行++,而后执行进栈操作!"
     st[++top] = item;
     return true;
```

出栈

```
// 出栈的顺序实现
bool arrStack<T>::pop(T & item) {
                          // 栈为空
  if (top == -1) {
     cout << ''栈为空,不能执行出栈操作''<< endl;
     return false;
  else {
    item = st[top--]; // "<u>先返回栈顶元素,后修改栈顶指针</u>"
     return true;
```

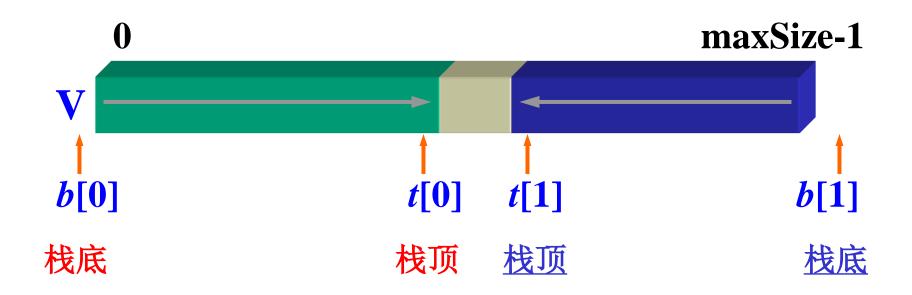
从栈顶读取,但不弹出

```
bool arrStack<T>:: top(T & item) {
                  // 返回栈顶内容, 但不弹出
                              // 栈空
  if (top == -1) {
     cout << " 栈为空,不能读取栈顶元素"<< endl;
     return false;
  else {
     item = st[top];
     return true;
```

其他算法

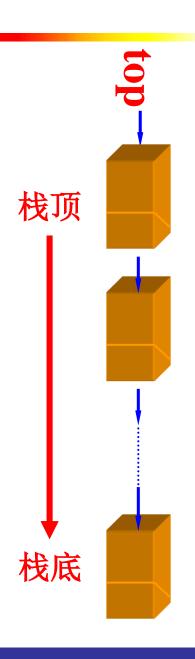
```
清空栈
  void arrStack<T>::clear() {
    top = -1;
判断栈满:返回非零值(真值true)
  bool arrStack<T>:: isFull() {
    return (top == mSize-1);
```

双栈共享一个栈空间



3.1.3 链式栈

- > 链式栈
 - ▶ 栈的链式存储,是运算受限的链表
 - ▶ 指针方向: 从栈顶向栈底
 - ▶ 只在链表头部操作, 不需附加头结点
 - → 栈顶指针就是链表的头指针(top)
 - ▶ 无栈满问题(但存在栈空约束)



链式栈的创建

```
template <class T>
class lnkStack : public Stack <T> {
                                   // 栈的链式存储
private:
                                   // 指向栈顶的指针
  Link<T>*
             top;
                                   // 存放有效元素的个数
  int
              size;
                                   // 栈运算的链式实现
public:
                                   // 构造函数
  lnkStack(int defSize) {
      top = NULL;
       size = 0;
                                   // 析构函数
  ~lnkStack() {
       clear();
```

运算集: 压栈

// 入栈操作的链式实现

```
bool lnkStack<T>:: push(const T item) {
  //创建一个新节点,并使其next域赋值top;
  Link < T > * tmp = new <u>Link < T > (item, top)</u>;
  top = tmp;
  size++;
                       Link(const T info, Link* nextValue) {
                           data = info;
  return true;
                           next = nextValue;
```

运算集: 出栈

bool lnkStack<T>:: pop(T& item) {// 出栈操作的链式实现

```
Link <T>*tmp;
if (\underline{\text{size}} == 0)
  cout << "栈为空,不能执行出栈操作"<< endl;
  return false;
item = top->data;
tmp = top->next;
delete top;
top = tmp;
size--;
return true;
```

顺序栈和链式栈的比较

> 时间效率

- ▶ 所有操作都只需常数时间
- ▶ 顺序栈和链式栈在时间效率上难分伯仲

> 空间效率

- ▶ 顺序栈须说明一个固定的长度
- ▶ 链式栈的长度可变,但增加结构性开销
- > 实际应用中,顺序栈比链式栈用得更广泛些

3.1.4 栈的应用

- >满足后进先出特性,皆可使用栈
- ▶常用来处理具有递归结构的应用
 - → 深度优先搜索
 - → 子程序 / 函数调用的管理
 - ▶ (消除) 递归
- > 应用举例
 - →递归
 - ▶表达式求值

1、栈与递归

> 递归概念

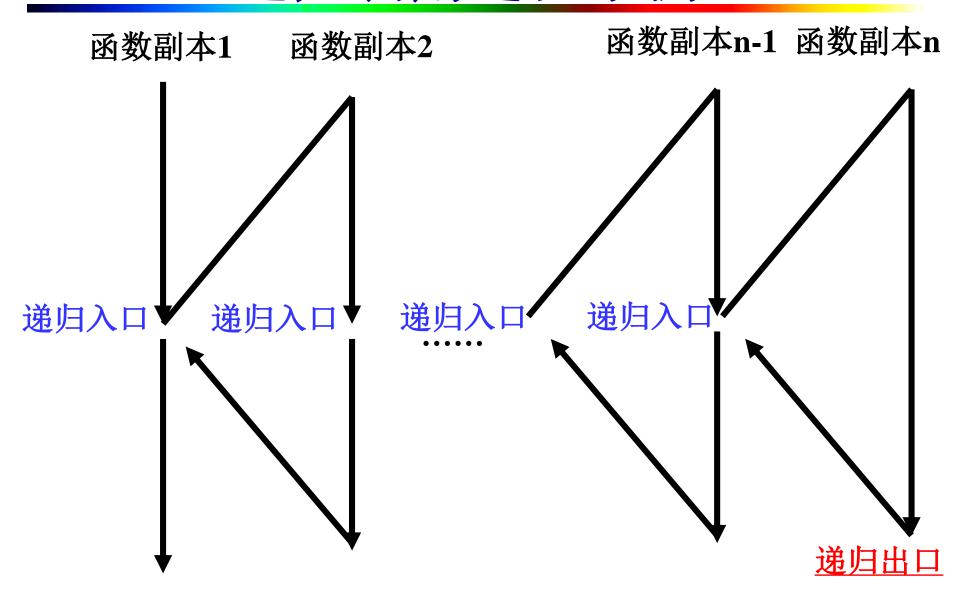
→ 是指在调用一个函数的过程 中又<u>直接调用</u>或<u>间接调用</u>了 函数自身

▶直接调用

```
long fact(int n) {//求阶乘
if (n==1)
return 1;
return n*fact(n-1);
```

```
▶间接调用
int f1(int a)
     int b;
     b=f_2(a+1);
int f2(int s)
     int c;
     c=f_1(s-1);
```

递归调用过程示例



递归的实现

- >一个问题能否用递归实现,看其是否具有下面特点
 - ▶ 有递推公式(1个或多个)
 - ▶ 有递归结束条件(1个)
- > 编写递归函数时,程序中必须有相应的语句
 - ▶ 一个(或者多个)递归调用语句
 - ▶ 测试结束语句
 - ▶ 先测试,后递归调用
- > 递归程序的特点
 - ▶ 易读、易编,但占用额外内存空间。

函数运行时的存储分配

> 静态分配

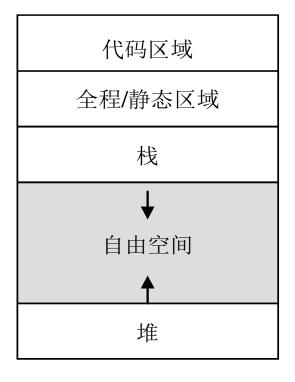
- ◆ <u>在非递归情况下</u>,数据区的分配可以在程序运行前进行,一直到整 个程序运行结束才释放,这种分配称为静态分配
- → 采用静态分配时,函数的调用和返回处理比较简单,不需要每次分配和释放被调函数的数据区

> 动态分配

- ◆ <u>在递归(函数)调用的情况下</u>,被调函数的局部变量不能静态地分配某些固定单元,而必须每调用一次就分配一份,以存放当前所使用的数据,当返回时随即释放。【大小不确定,值不确定】
- → 动态分配在内存中开辟一个称为
 运行栈的足够大的动态区

动态存储分配

- > 用作动态数据分配的存储区,分为堆(heap)和栈(stack)
 - ▶ <u>栈</u>用于分配发生在后进先出LIFO风格中的数据(诸如函数的调用)
 - ◆ 堆区域则用于不符合LIFO(诸如指针的分配)的动态分配



运行栈中的活动记录

- > 函数活动记录是动态存储分配中的基本单元
 - ▶ 调用函数时,活动记录包含为局部数据分配的存储空间

自变量(参数)

用做记录信息
诸如返回地址

局部变量

用作局部
临时变量的空间

运行栈中的活动记录

- > 运行栈随着程序执行时发生的调用链或生长或缩小
 - ▶ 每次调用执行进栈操作,把被调函数的活动信息压入栈顶
 - ▶ 函数返回执行出栈操作,恢复到上次调用所分配的数据区
- ▶一个函数在运行栈上可以有若干不同的活动记录,每个都代表了一个不同的调用
 - ▶ 递归深度决定运行栈中活动记录的数目
 - ▶ 同一局部变量在不同的递归层次被分配给不同的存储空间

举例1: 阶乘 n!

➤ 阶乘n! 的递归定义

$$factorial(n) = \begin{bmatrix} 1, & if \ n \le 0 \\ n*factorial(n-1), & if \ n > 0 \end{bmatrix}$$

- ▶递归入口
 - **→** factorial(n-1)
- > 递归出口
 - **→** n≤0

程序实现

//递归函数

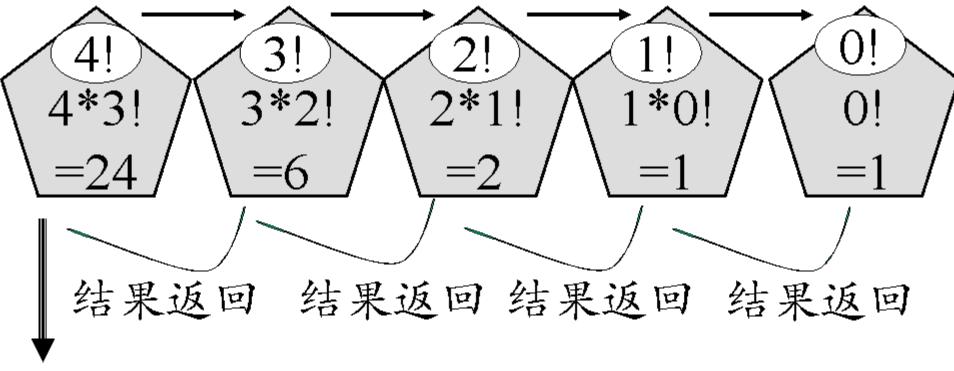
```
long factorial(long n)
  if (n==0)
    return 1;
  else
   //递归调用
  return n * factorial(n-1);
```

//非递归函数

```
long factorial(long n)
   int m = 1;
   int i;
   if (n>0)
         for (i = 1; i \le n; i++)
                  \mathbf{m} = \mathbf{m} * \mathbf{i};
   return m;
```

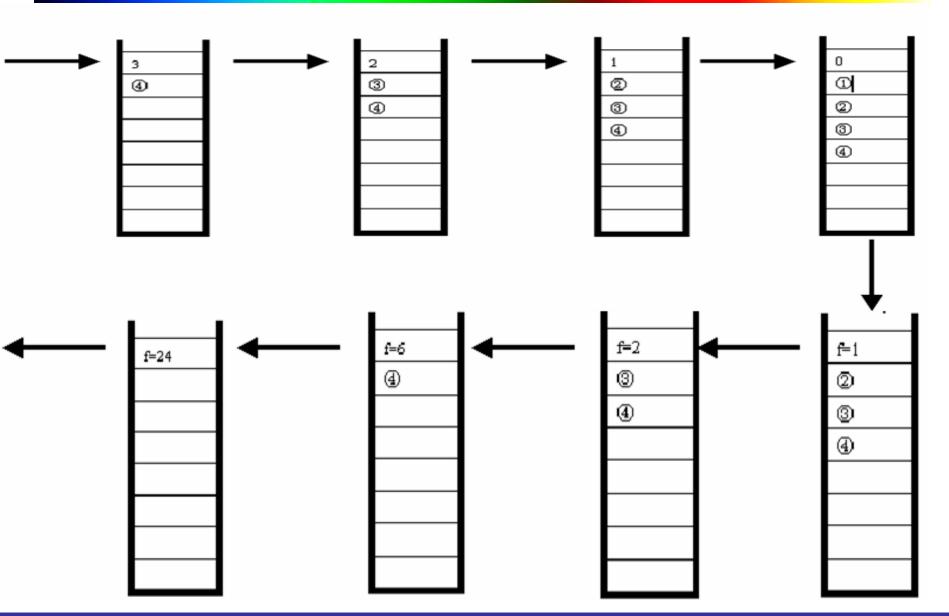
递归过程示意图(4!)

递归调 递归调 递归调 递归调 子程序 子程序



factorial(4)=24

栈的变化



2、表达式的求值

- > 表达式的组成
 - → 基本符号集: 由{0, 1, ..., 9, +, -, *, /, (,)} 等16

 个基本符号组成
 - ▶ <u>语法成分集</u>: 由{ <表达式>,<项>,<因子>,<常数>,<数字> } 5个语法成分组成
 - ▶ 语法公式集: "::="是规则定义符
- ▶一个表达式由操作数(亦称运算对象)、操作符(亦称运算符)和分界符组成

表达式的分类

- >算术表达式有三种表示:
 - →中缀(infix)表示

<操作数><操作符><操作数>, 如 A+B;

➡前缀(prefix)表示

<操作符><操作数><操作数>,如+AB;

→后缀(postfix)表示

<操作数><操作数><操作符>,如 AB+;

中缀表达式的递归定义

- > 中缀计算表达式的递归定义
 - ➡ <表达式> ∷ = <项> + <项> | <项> <项> | <项>
 - ▶ <项> :: = <因子> * <因子> |<因子> / <因子> |<因子> |
 - ▶ <因子> :: = <常数> | (<表达式>)
 - ▶ <常数> :: = <数字> |<数字> <常数>
 - → <数字> ∷ = 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9

中缀表达式的计算次序

- ▶ 有括号时: 先括号内,后括号外
 - ▶ 多层括号时,按层次反复脱括号
 - → 左右括号须配对
- ➤ 无括号时: 先乘(*)、除(/),后加(+)、减(-)
- ▶同层次时:若有多个乘除(*、/)或加減(+,-)时, 自左至右顺序执行

后缀表达式 (逆波兰式)

- > <表达式>::= <项><项>+|<项><项>-|<项>
- > <项>::=<因子><因子>*|<因子><因子>/|<因子>
- ▶ <因子> ::= <常数>
- ><常数>::=<数字>|<数字><常数>|
- > < 数字> ::= 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9

在高级语言程序设计中,使用后缀表达式进行算术表达式的求值计算!

后缀求值示例

> 中缀表达式

$$(23 + 34 * 45 / (5 + 6 + 7))$$

> 后缀表达式

后缀表达的计算规则

- >后缀表达式不含括号!
- >运算符放在两个参与运算的语法成分的后面
- ▶ 所有求值计算皆按<u>运算符出现的顺序</u>,严格<u>从</u> 左向右进行。

如何转换?

- 产在中缀和后缀表达式中
 - ▶ 操作数的次序保持不变、操作符的次序发生改变
- > 后缀表达式中相邻操作符的运算次序受下列因素影响
 - ◆ 先括号内、后括号外
 - → 先乘除而后加减
 - ➡ 同级别先左后右
- ▶ 后缀表达式中,操作符的次序要与中缀表达式中的计算次序保持一致!!

如何保持一致?借助栈进行排序

中缀到后缀表达式的转换

- > 当输入是操作数,直接输出到后缀表达式序列
- ▶当输入的是<u>左括号</u>时,也把它压栈
- ▶当输入的是<u>运算符</u>时
 - **▶** While
 - If (栈非空 and 栈顶不是左括号 and 输入运算符的优先 级 "≤"栈顶运算符的优先级) 时
 - ・弹栈,并放到后缀表达式序列中
 - Else 把输入的运算符压栈(>当前栈顶运算符才压栈!)

…转换(续)

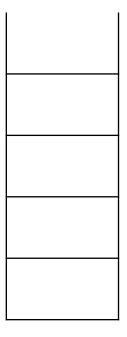
- ▶当输入的是<u>右括号</u>时,先判断栈是否为空
 - → 若为空(括号不匹配), 异常处理, 清栈退出;
 - ★ 若非空,则把栈中的元素依次弹出
 - <u>遇到</u>第一个左括号为止,将弹出的元素输出到后缀表达 式的序列中(弹出的开括号不放到序列中)
 - 若<u>没有遇到</u>开括号,说明括号也不匹配,做异常处理, 清栈退出

…转换(续)

- ▶最后,当中缀表达式的符号序列全部读入时,若栈内仍有元素,把它们全部依次 弹出,都放到后缀表达式序列尾部
 - →若弹出的元素遇到括号时,则说明括号不匹配, 做错误异常处理, 清栈退出

中缀表达式一后缀表达式

栈的状态



输出后缀表达式:

后缀表达式求值

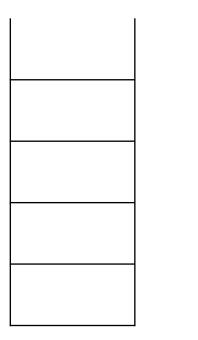
- ▶循环:依次顺序读用户键入的符号序列,组成并判别 语法成分的类别
 - ▶ 1.当遇到的是操作数,则压入栈顶;
 - ▶ 2.当遇到的是运算符,就从栈中两次取出栈顶,按照运算符 对这两个操作数进行计算。然后将计算结果压入栈顶。
- ▶如此继续,直到遇到符号=,这时栈顶的值就是输入 表达式的值。

后缀表达式求值

待处理后缀表达式:



栈状态的变化



1530 11 18

108

85

计算器类的实现

```
// Class Declaration 类的说明
class Calculator {
private:
  Stack<double>s; // 这个栈用于压入保存操作数
  bool GetTwoOperands(double& opd1,double& opd2); // 从弹出两个操作数
  void Compute(char op); // 取两个操作数,并按op对两个操作数进行计算
public:
  Calculator(void){}; // 创建计算器实例,开辟一个空栈
                 // 读入后缀表达式,遇到符号"="时,求值计算结束
  void Run(void);
                 // 计算器的清除,为随后的下一次计算做准备
  void Clear(void);
```

部分成员函数的程序实现

```
bool Calculator::GetTwoOperands(double& opd1, double& opd2) {
   if (s.isEmpty()) {
        cerr << ''Missing operand!'' <<endl;</pre>
        return false;
                                                  // 右操作数
  s.pop(&opd1);
   if (s.isEmpty()) {
        cerr << ''Missing operand!'' <<endl;</pre>
        return false;
                                                  // 左操作数
   s.pop(&opd2)
   return true;
```

```
void Calculator::Compute (char op)
  Boolean result;
  double operand1, operand1;
  result = GetTwoOperands(operand1,operand2);
  if(result == True)
     switch(op)
```

```
case '+': S.Push(operand2 + operand1);
             break;
     case '-': S.Push(operand2 - operand1);
             break;
     case '*': S.Push(operand2 * operand1);
             break;
     case '/': if(operand1 == 0.0)
             cerr<<"Divided by 0!"<<endl;
             S.ClearStack();
     else
             S.Push(operand2 / operand1);
     break;
else
     S.ClearStack();
```

```
void Calculator::Run(void)//读入表达式,遇到操作数则入栈,遇到操作符则
  从栈中连续弹出两个操作数计算,直至遇到"="结束。{
  char c;
  double newoperand;
  while(cin>>c, c != '=') {
      case '+':
      case '-':
      case '*':
      case '/':
             Compute(c);
             break;
      default:
             cin >> newoperand;
             push(newoperand);
             break;
```

```
if (!S.IsEmpty())
     cout << S.top() << endl; //印出求值的最后结果
} //end calculator::run(void)
void Calculator::Clear(void)
  S.ClearStack();
[后缀计算器的类定义,结束]
```

3.2 队列(Queue)

- > 队列是只允许在一端删除,另一端插入的线性表
 - → 允许删除的一端叫做 队头 (front)
 - → 允许插入的一端叫做 <mark>队尾 (rear)</mark>
- >特性
 - ➡ 先进先出 (FIFO, First In First Out)

$$a_0$$
 a_1 a_2 \cdots a_{n-1} $rear$

队列的主要操作

- ▶ 入队列 (enQueue)
- ➤出队列(deQueue)
- >取队首元素 (getFront)
- >判断队列是否为空 (isEmpty)

抽象数据类型

```
template <class T>
class Queue {
                        // 队列的运算集
public:
                        // 变为空队列
  void clear();
  bool enqueuer (const T item);
            // 将item插入队尾,成功返回真,否则返回假
  bool dequeuer (T& item);
            // 返回队头元素并将其从队列中删除,成功则返回真
  bool getFront (T& item);
            // 返回队头元素,但不删除,成功则返回真
                        // 返回真,若队列已空
  bool is Empty ();
                        // 返回真,若队列已满
  bool isFull ();
};
```

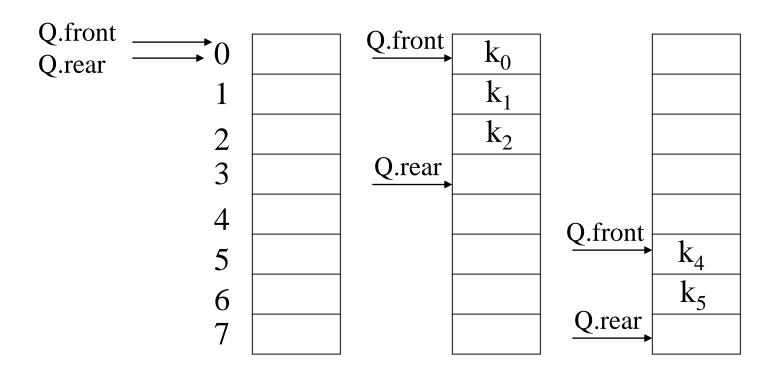
队列的物理实现

- > 顺序队列
 - ▶ 顺序表实现
- > 链式队列
 - ▶ 单链表实现

3.2.1 顺序队列

- > 用向量存储队列,两个变量分别指向首、尾两端
 - ➡ 首 (front): 指向当前待出队元素位置(实的!)
 - ▶ 尾 (rear): 指向当前待入队元素位置(虚的!)

队列示意



队列空

再进队一个元素如何?

队列的溢出

> 上溢

▶ 当队列满时,再做进队操作,所出现的现象

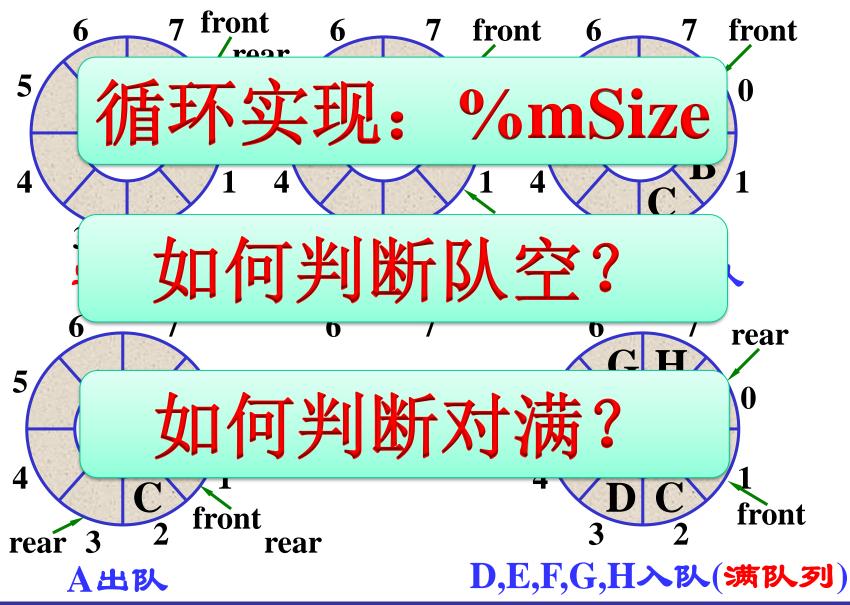
> 下溢

▶ 当队列空时,再做删除操作,所出现的现象

> 假溢出

⇒ 当 rear = mSize-1 时,再作插入运算就会产生溢出,如果 这时队列的前端还有许多空位置,这种现象称为假溢出

循环队列运行示意图



队列的类定义

```
class arrQueue: public Queue<T> {
   private:
                              // 存放队列的数组的大小
    int
            mSize;
                              // 表示队头所在位置的下标
    int
            front;
                              // 表示待入队元素所在位置的下标
    int
            rear;
                              // 存放类型为T的队列元素的数组
    T
            *qu;
                              // 队列的运算集
  public:
    arrQueue(int size) { // 创建队列的实例
                       // 多申请一个存储空间,以区别队空和队满
      mSize = size +1;
      qu = new T [mSize];
      front = rear = 0;
                       // 消除该实例,并释放其空间
    ~arrQueue() {
      delete [] qu;
```

入队列操作

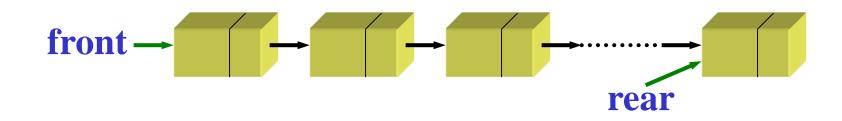
```
bool arrQueue<T> :: enQueue(const T item) {
                                 // item入队,插入队尾
  if \underline{(((rear + 1) \% mSize) == front)} {
      cout << "队列已满,溢出" << endl;
      return false;
  qu[rear] = item;
                                        //循环后继
  rear = (rear + 1) \% mSize;
  return true;
```

出队列操作

```
bool arrQueue<T> :: deQueue(T& item) {
                            //返回队头元素并从队列中删除
  if (\underline{front} == \underline{rear})
      cout << "队列为空" << endl;
      return false;
  item = qu[front];
  front = (front +1) \% mSize;
  return true;
```

3.2.2 链式队列

- > 单链表队列:链接指针的方向是从队头指向队尾
- > 队头在链头,队尾在链尾
- > 链式队列在进队时无队满问题,但有队空问题
- ➤ 队空条件: front == rear==NULL



队列的类定义

```
template <class T>
 class <a href="mailto:linkQueue">lnkQueue</a>: public Queue <a href="mailto:lnkqueue">lnkQueue</a>: public queue <a href="mailto:lnkqueue">lnkqueue<a href="mailto:lnkqueue">lnkqueue<a href="m
private:
                                                                                                                                                                             // 队列中当前元素的个数
                                                         size;
                     int
                                                                                                                                                                          // 表示队头的指针
                      Link<T>* front;
                                                                                                                                      // 表示队尾的指针
                     Link<T>* rear;
                                                                                                                                                                                                                                        // 队列的运算集
public:
                                                                                                                                                                                                                                                                                                  // 创建队列的实例
                      lnkQueue(int size) {
                                                          size = 0;
                                                         front = rear = NULL;
                                                                                                                                                                                                                                        // 消除该实例,并释放其空间
                      ~lnkQueue() {
                                                          clear();
```

运算集: 入队

```
bool lnkQueue <T>:: enQueue(const T item) { // 入队插入队尾
     front = rear = new Link<T> (item, NULL);
                           // 添加新的元素
     else {
          rear-> next = new Link<T> (item, NULL);
          rear = rear ->next;
     size++;
     return true;
```

运算集: 出队

```
// 返回队头元素并从队列中删除
bool lnkQueue <T> :: deQueue(T& item) {
       Link<T> *tmp;
                             // 队列为空,没有元素可出队
       if (size == 0) {
              cout << "队列为空" << endl;
              return false;
       &item = front->data;
       tmp = front;
       front = front -> next;
       delete tmp;
       if (front == NULL)
         rear = NULL;
       size--;
       return true;
```

队列的应用

- 只要满足先来先服务特性的应用均可采用队列作为 其数据组织方式或中间数据结构。
- > 调度或缓冲
 - ▶ 消息缓冲器
 - ▶ 邮件缓冲器
 - ▶ 计算机的硬设备之间的通信也需要队列作为数据缓冲
 - ▶ 操作系统的资源管理
- > 宽度优先搜索

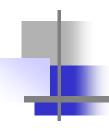
顺序队列与链式队列的比较

- > 变种的栈或队列结构
 - → 双端队列: 在队首和队尾都可以插入、删除的队列
 - → 双枝: 两个底部相连的栈,共享一块数据空间
 - → 超队列: 是一种被限制的双端队列,删除操作只允许在
 - 一端进行,插入操作却可以在两端同时进行
 - → 超枝: 是一种插入受限的双端队列,即插入限制在一端而
 删除却允许在两端进行

思考题: 栈和队列的互模拟

>如何用两个栈模拟一个队列?

>如何用两个队列模拟一个栈?



再见…

联系信息:

电子邮件: gjsong@pku.edu.cn

电 话: 62754785

办公地点:理科2号楼2307室