第五章、随机过程

- 第十一次课

  §5.3 马尔可夫链

- 第十二次课

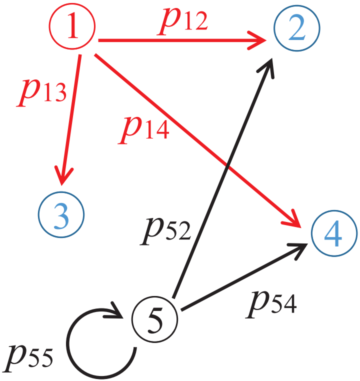
  §5.3 马尔可夫链(续)

  §5.2 独立增量过程(泊松过程, 布朗运动)

- 参考书: 1. S.M. Ross著，龚光鲁译：《应用随机过程：概率模型导论(第11版)》，人民邮电出版社2016 (英文版，S.M. Ross: Introduction to Probability Models, 11th Ed., Elsevier 2014)

  2. 钱敏平、龚光鲁、陈大岳、章复熹：《应用随机过程》，高等教育出版社2011

§5.3 马尔可夫链



- 状态空间 S: 可数集.

  转移矩阵 $\mathbf{P} = (p_{ij})_{i,j\in S}$:

  (1) $p_{ij} \geqslant 0,\ \forall i, j$;

  (2) $\sum_j p_{ij} = 1,\ \forall i$.

- 定义3.1, 3.2: (时间齐次)马氏链:

  $X_0, X_1, X_2, \cdots$ 取值于S,

  满足: $\forall n; i, j$,

  $P(X_{n+1} = j | X_n = i; X_0 = i_0, \cdots, X_{n-1} = i_{n-1}) =$

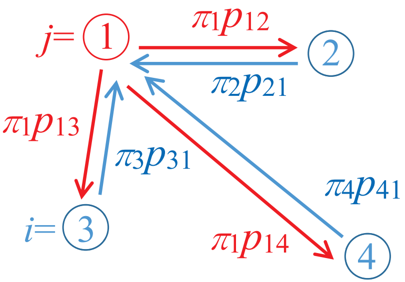
  $P(X_{n+1} = j | X_n = i) = p_{ij}$.

- 马氏性: $C=\{X_n=i\}$ (现在).
  $A=\{X_m=i_m, m<n\}$ (过去),
  $B=\{X_m=j_m, n+1\leqslant m\leqslant n+\tilde{n}\}$ (将来).
  $P(AB|C)(=P(A|C)P(B|C\cap A))=P(A|C)P(B|C)$.
  (在已知现在的条件下, 将来与过去独立)
- 初分布 μ: $\mu_i=P(X_0=i)$; 发展机制: $\mathbf{P}=(p_{ij})$.
  $P(X_0=i_0, X_1=i_1, \cdots, X_n=i_n)=\mu_{i_0}p_{i_0i_1}\cdots p_{i_{n-1}i_n}$.
  P_μ: $P(X_0=i)=\mu_i$.
  P_i: $P_i(X_n=j)=P(X_n=j|X_0=i)=p_{ij}^{(n)}, P_i(X_0=i)=1$.
- n 步转移矩阵(定理3.2): $(p_{ij}^{(n)})=\mathbf{P}^n$.
  $p_{ij}^{(2)}=\sum_k p_{ik}p_{kj}$. $p_{ij}^{(n)}=\sum_k p_{ik}^{(m)}p_{kj}^{(n-m)}(1\leqslant m\leqslant n)$.
- $X_0\sim\mu$ 则$X_n\sim\mu\mathbf{P}^n$:
  $P(X_n=j)=\sum_i P(X_0=i)P(X_n=j|X_0=i)=\sum_i \mu_i p_{ij}^{(n)}$.

习题五、2. 假设一天下雨则第二天也下雨的概率是0.7, 一天不下雨则第二天下雨的概率是0.4. 已知今天下雨的可能性是0.8, 试求从明天起连续三天都下雨的概率.

- $S = \{0, 1\}$, $1 =$下雨, $0 =$ 不下雨.
- $p_{11} = 0.7$, 从而$p_{10} = 0.3$; $p_{01} = 0.4$, 从而$p_{00} = 0.6$.
- $\mu_1 = 0.8$, 从而$\mu_0 = 0.2$.
- $P(X_1 = X_2 = X_3 = 1) = \mu_1 p_{11}^3 + \mu_0 p_{01} p_{11}^2 = (\mu_1 p_{11} + \mu_0 p_{01}) p_{11}^2 = (0.8 \times 0.7 + 0.2 \times 0.4) \times 0.7^2$.

- 不变分布(平稳分布, (3.10)) π:
  $\sum_i \pi_i p_{ij} = \pi_j$, $\forall i$, 即$\pi\mathbf{P} = \pi$.
  若$X_0 \sim \pi$, 则$X_n \sim \pi$, $\forall n$.
- 逆过程Y: 初分布π;
  Y的发展机制: $q_{ji} = \frac{\pi_i p_{ij}}{\pi_j}$,
  即$\pi_i p_{ij} = \pi_j q_{ji}$.
  $P(Y_0 = j_0, \cdots, Y_n = j_n)$
  $= P(X_0 = j_n, \cdots, X_n = j_0)$.
  即$\{Y_k, k = 0, 1, \cdots n\} \overset{d}{=} \{X_{n-k}, k = 0, 1, \cdots, n\}$.
- 可逆: $q_{ij} = p_{ij}$, $\forall i, j \Leftrightarrow$
  细致平衡: $\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji}$, $\forall i, j$.

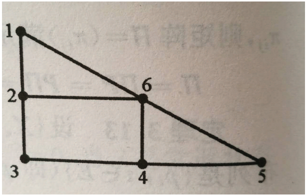


习题五、6.

$$\circlearrowright 1 \rightleftharpoons 2 \rightleftharpoons 3 \circlearrowleft$$

- 待定π_1;
- 表达$\pi_i = a_i \pi_1$: 解方程$\pi P = \pi \iff \pi_2 = \pi_1$; $\pi_3 = \pi_2 = \pi_1$;
- 检查细致平衡条件. (成立)
- 归一化: $1 = \sum_i \pi_i = 3\pi_1$, 故$\pi_1 = \frac{1}{3}$; 从而$\pi_i = \frac{1}{3}$, $\forall i$.

例3.6 (图上的随机游动).



- $\pi_1 \times \frac{1}{d_1} = \pi_2 \times \frac{1}{d_2} = \pi_3 \times \frac{1}{d_3} = \cdots = c.$
  $\pi_i = cd_i, \forall i$
  满足细致平衡条件： $\pi_i p_{ij} = c, \forall i, j.$
  $\sum_i \pi_i = 1 \implies \frac{1}{c} = \sum_i d_i = 16.$
  故$\pi = \frac{1}{16}(2, 3, 2, 3, 2, 4).$
- 更一般地, $\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji} = w_e$. 固定$i$, $p_{ij} \propto w_e$.

- i可达j(定义3.5): $\exists n \geqslant 1$ 使得$p_{ij}^{(n)} > 0$, 等价地,
  $f_{ij}^* := P_i(\exists n \geqslant 1$ 使得$X_n = j) > 0$,
- 互通马氏链: $\forall i, j$, $\exists n$ 使得$p_{ij}^{(n)} > 0$, 等价地,
  $\forall i, j$, $P_i(\exists n$ 使得$X_n = j) > 0$.
- i常返(定义3.3): $f_{ii}^* := P_i(\exists n \geqslant 1$ 使得$X_n = i) = 1$.
  等价地, P_i(回访无穷次) $= 1$.
- 马氏链常返: 任意状态i常返.
- **定理3.6** 若i常返, i可达j, 则j可达i, 且j是常返的.

考虑**互通**马氏链$X_n, n \geqslant 0$:

- 击中概率. 固定i_0, 令$x_i = P_i(\exists n \geqslant 0$ 使得$X_n = i_0)$, $\forall i$. 则
$$\begin{cases} x_{i_0} = 1, \\ x_i = \sum_j p_{ij} x_j, \quad \text{若} i \neq i_0. \end{cases}$$
常返$\Leftrightarrow$ 上述方程的非零解只有$x_i \equiv 1$.

- 格林函数. 令$G_{ii} = \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)}$
$= \sum_{n=1}^{\infty} P_i(X_n = i) = E_i \sum_{n=1}^{\infty} 1_{\{X_n = i\}} =$ 平均回访总次数.
常返$\Leftrightarrow$ $G_{ii} = \infty$ (定理3.4).

- **定理3.5**

  若i常返, 则P(有无穷多个n使得$X_n = i | X_0 = i) = 1$;

  若i非常返, 则P(有无穷多个n使得$X_n = i | X_0 = i) = 0$.

判断常返

- $\mathbb{Z}^1$ 上的非对称随机游动非常返.

  $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, $P(X_1 = 1) = 1 - P(X_1 = -1) = p > \frac{1}{2}$.

  SLLN: $\frac{1}{n}S_n \to EX_1 > 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \infty$, 回访有限次.

- $x = P_0(\exists\ n\text{使得}S_n = -1)$.

  $x = pP_1(\exists\ n\text{使得}S_n = -1) + 1 - p = px^2 + 1 - p$.

  $x = 1$ (舍) 或$\frac{1-p}{p}$ (留).

- $\mathbb{Z}^1$上对称随机游动常返.

$$p_{ii}^{(2n)} = C_{2n}^n \frac{1}{2^{2n}} = \frac{(2n)!}{n!^2}\frac{1}{2^{2n}} \approx \frac{\sqrt{2\pi 2n}(\frac{2n}{e})^{2n}}{2\pi n(\frac{n}{e})^{2n}}\frac{1}{2^{2n}} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

- $\mathbb{Z}^2$ 常返; $\mathbb{Z}^d$, $d \geqslant 3$ 非常返.