

# 17.5 群的分解

---

- 陪集及其性质
- Lagrange定理
- Lagrange定理的应用
- 共轭关系与共轭类
- 群的分类方程

# 陪集定义及其实例

---

**陪集定义**  $G$ 为群,  $H \leq G$ ,  $a \in G$ ,  
称  $Ha = \{ha \mid h \in H\}$  是子群  $H$  在  $G$  中的一个**右陪集**。  
 $Ha$  中的  $a$  称为该陪集的代表元素。

**实例:**

$$S_3, H = \{(1), (12)\}$$

$$H(1) = H(12)$$

$$H(13) = H(132) = \{(13), (132)\}$$

$$H(23) = H(123) = \{(23), (123)\}$$

# 陪集的性质

---

**定理**  $G$ 为群,  $H$  是  $G$  的子群, 则

(1)  $He = H$ ; (2)  $a \in Ha$ ; (3)  $Ha \approx H$ ;

(4)  $a \in Hb \Leftrightarrow Ha = Hb \Leftrightarrow ab^{-1} \in H$

(5) 在 $G$ 上定义二元关系 $R$ ,  $aRb \Leftrightarrow ab^{-1} \in H$ , 则 $R$ 为等价关系, 且 $[a]_R = Ha$

(6)  $a, b \in G$ ,  $Ha \cap Hb = \emptyset$  或  $Ha = Hb$ ,  $\cup Ha = G$

**说明** 定义左陪集  $aH = \{ah \mid h \in H\}$

性质类似  $a \in bH \Leftrightarrow aH = bH \Leftrightarrow a^{-1}b \in H$

# 陪集性质的证明

---

(4)  $a \in Hb \Leftrightarrow Ha = Hb \ (\Leftrightarrow ab^{-1} \in H)$

证 必要性.  $a \in Hb \Leftrightarrow a = h'b \Leftrightarrow b = h'^{-1}a$

$$ha \in Ha \Rightarrow ha = hh'b \in Hb$$

$$hb \in Hb \Rightarrow hb = hh'^{-1}a \in Ha$$

(5) 等价关系易证, 下证  $Ha = [a]$

证  $b \in [a] \Leftrightarrow aRb \Leftrightarrow ab^{-1} \in H$

$$\Leftrightarrow Ha = Hb \Leftrightarrow b \in Ha$$

# Lagrange定理的引理

---

**引理**  $H$  的左陪集和右陪集个数相等。

**证：**  $f: T \rightarrow S, f(Ha) = a^{-1}H$ ,  
 $T, S$  分别为右和左陪集的集合  
 $f$  的良好定义性与单射性：

$$\begin{aligned} Ha = Hb &\Leftrightarrow ab^{-1} \in H \Leftrightarrow (a^{-1})^{-1}b^{-1} \in H \\ &\Leftrightarrow a^{-1}H = b^{-1}H \Leftrightarrow f(Ha) = f(Hb) \end{aligned}$$

$f$  满射 ...

$H$  在  $G$  中的**指数** $[G: H]$  定义为

$H$  在  $G$  中的右（或者左）陪集个数

# Lagrange定理及其推论

**Lagrange定理**:  $G$ 是有限群,  $H \leq G$ , 则  $|G| = |H|[G:H]$

**证**: 令  $G$  的不同的陪集为  $Ha_1, Ha_2, \dots, Ha_r$ ,

$$|G| = |Ha_1| + |Ha_2| + \dots + |Ha_r| = |H|r = |H|[G:H]$$

**说明**: 仅适用于有限群, 逆不一定为真.

## 推论

(1) 有限群中, 元素的阶是群的阶的因子.

**证**: 构造子群  $\langle a \rangle$ ,  $|\langle a \rangle| = |a|$ .

(2) 素数阶群一定是循环群.

**证**:  $|G| = p, p > 1$ , 存在非单位元  $a$ ,

$|a|$ 的阶是 $p$ 的因子, 只能是 $|a| = p$ . 故 $G = \langle a \rangle$ .

# Lagrange定理的应用

---

**例1** 6阶群必含3阶元.

**证** 若存在 $a$ ,  $|a|=6$ , 则 $a^2$ 为3阶元.

假若没有6阶元. 如果没有3阶元, 则 $\forall a \in G$ ,  $a^2 = e$ , 则 $G$ 为Abel群,  $\{a, b, ab, e\}$ 为 $G$ 的子群, 与Lagrange定理矛盾.

# Lagrange定理的应用(续)

---

**例2** 6阶群在同构意义下只有 2 个.

**证明思路:**

若 $G$ 含6阶元, 是循环群 $Z_6$ .

若不含6阶元, 则含 3 阶元 $a$ ,

取 $c \notin \{e, a, a^2\}$ , 则 $c, ac, a^2c$ 两两不等 (消去律)

可以证明 $G = \{e, a, a^2, c, ac, a^2c\}$ 同构于 $S_3$ .

**推广**

10 阶群只有2个,  $2p$ 阶群只有2个.

4 阶群只有2个: 循环群 $Z_4$ 和 Klein 四元群.



# 小群

## Numbers of isomorphism types of finite groups of given order

+++	+0	+1	+2	+3	+4	+5	+6	+7	+8	+9	+10	+11	+12	+13	+14	+15	+16	+17	+18	+19
0+	.	1	1	1	2	1	2	1	5	2	2	1	5	1	2	1	14	1	5	1
20+	5	2	2	1	15	2	2	5	4	1	4	1	51	1	2	1	14	1	2	2
40+	14	1	6	1	4	2	2	1	52	2	5	1	5	1	15	2	13	2	2	1
60+	13	1	2	4	267	1	4	1	5	1	4	1	50	1	2	3	4	1	6	1
80+	52	15	2	1	15	1	2	1	12	1	10	1	4	2	2	1	231	1	5	2
100+	16	1	4	1	14	2	2	1	45	1	6	2	43	1	6	1	5	4	2	1
120+	47	2	2	1	4	5	16	1	2328	2	4	1	10	1	2	5	15	1	4	1
140+	11	1	2	1	197	1	2	6	5	1	13	1	12	2	4	2	18	1	2	1
160+	238	1	55	1	5	2	2	1	57	2	4	5	4	1	4	2	42	1	2	1
180+	37	1	4	2	12	1	6	1	4	13	4	1	1543	1	2	2	12	1	10	1

[http://www.icm.tu-bs.de/ag\\_algebra/software/small/](http://www.icm.tu-bs.de/ag_algebra/software/small/)

[https://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_small\\_groups](https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_small_groups)

1024阶的非同构的群有49487365422个！

# 共轭关系与共轭类

---

**定义** 设 $G$ 为群，定义 $G$ 上二元关系 $R$ ，

$$aRb \Leftrightarrow \exists x \in G \text{ 使得 } b = x^{-1}ax$$

称 $R$ 为 $G$ 上的**共轭关系**

共轭关系是 $G$ 上等价关系，等价类为**共轭类** $\bar{a}$

**共轭类的性质：**

$$a \in C \Leftrightarrow \bar{a} = \{a\}$$

$$|\bar{a}| = [G:N(a)], \text{ 其中 } N(a) = \{x \in G | xa = ax\}$$

# 证明

---

证明  $|\bar{a}|=[G:N(a)]$

其中  $N(a)=\{x \in G | xa=ax\}$

证  $\forall x, y \in G,$

$$xax^{-1}=yay^{-1} \Leftrightarrow ax^{-1}y=x^{-1}ya$$

$$\Leftrightarrow x^{-1}y \in N(a) \Leftrightarrow xN(a)=yN(a)$$

故存在双射:  $\{xax^{-1} | x \in G\} \leftrightarrow \{xN(a) | x \in G\}$

# 两种分解的实例

$S_3 = \{(1), (12), (13), (23), (123), (132)\}$ ,  $H = \{(1), (12)\}$ ,

按照陪集分解:

$$H(13) = \{(13), (132)\}, H(23) = \{(23), (123)\}$$

$$\{\{(1), (12)\}, \{(13), (132)\}, \{(23), (123)\}\}$$

按照共轭类分解:

$$\{\{(1)\}, \{(12), (13), (23)\}, \{(123), (132)\}\}$$

区别:

- (1) 陪集分解等价类等势, 共轭类分解一般不等势
- (2) 共轭类中置换的轮换结构相同(练习34; 反过来也对),  
陪集分解不是
- (3) 陪集分解计数导致Lagrange定理, 共轭类分解计数导致  
群的分类方程

# 群的分类方程

## 群的分类方程

$G$ 为有限群,  $C$ 为中心,  $G$ 中至少含两个元素的共轭类有 $k$ 个,  $a_1, a_2, \dots, a_k$ 为代表元素, 则

$$|G| = |C| + [G:N(a_1)] + [G:N(a_2)] + \cdots + [G:N(a_k)]$$

证: 设 $|C|=l$ ,  $C=\{a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_{k+l}\}$

$$G = \bar{a}_1 \cup \bar{a}_2 \cup \cdots \cup \bar{a}_k \cup \{a_{k+1}\} \cup \{a_{k+2}\} \cup \cdots \cup \{a_{k+l}\}$$

$$|G| = [G:N(a_1)] + [G:N(a_2)] + \cdots + [G:N(a_k)] + |C|$$

注: 对任意 $i=1, 2, \dots, k$ ,  $N(a_i) < G$ .  
(否则 $N(a_i)=G$ ,  $|\bar{a}_i|=[G:N(a_i)]=1$ )

# 群分类方程的应用

**例3**  $|G|=p^s$ ,  $p$ 为素数, 则 $p||C|$ .

证:

$$|G| = |C| + [G:N(a_1)] + [G:N(a_2)] + \cdots + [G:N(a_k)]$$

对于 $i = 1, 2, \dots, k$ ,

$[G:N(a_i)]$ 是 $|G|$ 的因子,  $|G| = p^s$ ,

$[G:N(a_i)] = p^t$  或者  $[G:N(a_i)] = 1$

$[G:N(a_i)] = 1 \Rightarrow \bar{a}_i = \{a_i\} \Rightarrow a_i \in C$ , 矛盾

$$p|[G:N(a_i)] \Rightarrow p||C|$$

# 17.6 正规子群与商群

---

## □ 正规子群及判定

- 定义
- 判别定理
- 判别法

## □ 商群

- 定义及其实例
- 性质

# 正规子群及其判定

---

对一般的群 $G$ 及 $N \leq G$ , 左、右陪集不一定相等, 即一般 $gN \neq Ng$ , 但对某些群及其子群, 总有性质:

$$\forall g \in G, gN = Ng$$

例如:  $G$ 是Abel群;  
 $N = \{e\}$ ,  $C$ , 或  $G$   
.....

**正规子群 (Normal subgroup) :**

设 $G$ 是群,  $N \leq G$ , 且 $\forall g \in G, gN = Ng$ , 则称 $N$ 是 $G$ 的正规子群, 记为 $N \trianglelefteq G$ .



# 正规子群及其判定

**判定定理：**  $N \leq G$ , 则下述条件等价：

(1)  $N$  是  $G$  的正规子群

(2)  $\forall g \in G, gNg^{-1} = N$

(3)  $\forall g \in G, \forall n \in N, gng^{-1} \in N$

**证：** (1) $\Rightarrow$ (2):  $gN = Ng \Rightarrow gNg^{-1} = N$

(2) $\Rightarrow$ (3):  $gng^{-1} \in gNg^{-1} = N$

(3) $\Rightarrow$ (1):  $\forall ng \in Ng \Rightarrow n \in N, g^{-1} \in G \Rightarrow$   
 $g^{-1}ng \in N \Rightarrow ng \in gN$

$\forall gn \in gN \Rightarrow n \in N, g \in G \Rightarrow gng^{-1} \in N$   
 $\Rightarrow gn \in Ng$

# 正规子群及其判定

---

判定方法: (1) 判定定理

例1: 若 $N \trianglelefteq G$ ,  $H \trianglelefteq G$ , 则 $N \cap H \trianglelefteq G$ .

证: 因为 $N \leq G$ ,  $H \leq G$ , 故 $N \cap H \leq G$ .

又 $\forall g \in G, \forall x \in N \cap H$ , 有 $x \in N$ 且 $x \in H$ . 因为 $N \trianglelefteq G$ ,  $H \trianglelefteq G$ , 所以 $gxg^{-1} \in N$ 且 $gxg^{-1} \in H$ , 即 $gxg^{-1} \in N \cap H$ .

# 正规子群及其判定

例2：设 $H$ 是群 $G$ 的子群，假设 $H$ 的任意两个左陪集的乘积仍是一个左陪集，证明： $H$ 是 $G$ 的正规子群。

证：任取 $a \in G$ ，由于 $H$ 是 $G$ 的左陪集，因此存在 $H$ 的左陪集 $bH$ ，使得 $(Ha)H = H(aH) = bH$ ，由此可见 $Ha \subseteq bH$ ， $a \in bH$ ，从而 $aH = bH$ 。所以 $Ha \subseteq aH$ ，于是 $a^{-1}Ha \subseteq H$ 。由于 $a$ 的任意性， $H$ 是 $G$ 的正规子群。

# 正规子群及其判定

---

判定方法：

(1) 判定定理

(2)  $|N|=n$ ,  $N$ 是 $G$ 的唯一 $n$ 阶子群

(3) 指数为2的子群

# 证明

---

例3:  $N$ 是 $G$ 的唯一的  $n$  阶子群, 则 $N \trianglelefteq G$ .

证: 任取 $g \in G$ ,  $gNg^{-1} \leq G$ , 且 $|gNg^{-1}| = |N|$ , 从而得到  $gNg^{-1} = N$ , 因此 $N$ 是正规的.

例4:  $N$ 是 $G$ 的子群, 且 $[G:N]=2$ , 则 $N \trianglelefteq G$ .

证: 任取 $g \in G$ , 若 $g \in N$ , 则 $gN = N = Ng$ ; 若 $g \notin N$ , 则 $gN = G - N = Ng$ , 因此 $N$ 是正规的.

# 证明

---

例5:  $A_4$ 没有6阶子群.

证:  $A_4 = \{(1), (123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ .

假设  $A_4$  有6阶子群  $N$ , 则有  $[A_4 : N] = 2$ , 故  $N$  是正规的, 并且  $N$  中一定有3阶元, 从而可以验证  $N$  包含所有的3阶元。事实上,  $A_4$  中的3阶元分成两个共轭类(see W.

**R. Scott, Group Theory, 1987, § 11.1, p. 299):**

$T = \{(123), (142), (134), (243)\}$ ,  $T' = \{(132), (124), (143), (234)\}$ 。不妨设  $T$  中某个3阶元  $a \in N$ , 则知  $a^2 \in T'$ , 且  $T \subseteq N, T' \subseteq N$ , 所以  $|N| > 8$ , 矛盾!

# 证明

---

例5:  $A_4$ 没有6阶子群.

证: 也可以利用事实: “6阶群, 在同构的意义下只有 $Z_6$ 和 $S_3$ ”去证明。

注: 1) 由习题十七, p. 283第34题的逆命题: “ $S_n$ 中轮换指数相同的置换在同一个共轭类中”知,  $(123)$ 和 $(132)$ 在 $S_4$ 中是共轭的, 但不能得出它们在 $A_4$ 中是共轭的。实际上, 这两个置换在 $A_4$ 中不共轭!

2)  $A_4$ 是说明拉格朗日定理的逆命题一般不成立的最小群: 给定一个有限群 $G$ 和 $|G|$ 的一个因子 $d$ , 不一定存在 $G$ 的一个 $d$ 阶子群。

# 商群定义

**商群**  $G$ 是群,  $N \trianglelefteq G$ , 定义:  $G/N = \{Na | a \in G\}$   
 $(Na)(Nb) = Nab$

说明:

良定义性质:  $Na = Nx, Nb = Ny \Rightarrow Nab = Nxy$

$G/N$ 关于上面的运算构成群, 称为 $G$ 关于 $N$ 的**商群**

商群 $G/N$  就是商代数

$$aRb \Leftrightarrow Na = Nb \Leftrightarrow ab^{-1} \in N$$

$$aRb, cRd \Rightarrow ac(bd)^{-1} \in N \Rightarrow acRbd$$

$$aRb \Rightarrow ab^{-1} \in N \Rightarrow a^{-1}(b^{-1})^{-1} \in N \Rightarrow a^{-1}Rb^{-1}$$



# 商群实例

---

$G = \langle Z_{12}, \oplus \rangle$ ,  $Z_{12} = \{0, 1, \dots, 11\}$ , 模12加群

子群  $H = \langle 3 \rangle = \{0, 3, 6, 9\}$

商群  $G/H = \{H, H+1, H+2\}$

$H+1 = \{1, 4, 7, 10\}$ ,  $H+2 = \{2, 5, 8, 11\}$

$S_3 = \{(1), (12), (13), (23), (123), (132)\}$

$A_3 = \{(1), (123), (132)\}$

$S_3/A_3 = \{A_3, A_3(12)\}$ ,

$A_3(12) = \{(12), (13), (23)\}$

# 商群实例

---

**命题：** 设 $G$ 是一个群， $N$ 是 $G$ 的正规子群.

(1) 若 $H$ 是 $G$ 的子群且 $N \subseteq H$ ，则 $N$ 是 $H$ 的正规子群， $H/N$ 是 $G/N$ 的子群.

(2) 若 $L$ 是 $G/N$ 的子群，则存在 $G$ 的子群 $H$ ，使得 $N \subseteq H$ 且 $L = H/N$ .

# 商群实例

(1) 若  $H$  是  $G$  的子群且  $N \subseteq H$ , 则  $N$  是  $H$  的正规子群,  $H/N$  是  $G/N$  的子群;

**证** (1) 假设  $H$  是  $G$  的子群且  $N \subseteq H$ . 显然  $N$  是  $H$  的正规子群, 并且  $H/N \subseteq G/N$ . 对于任意的  $Na, Nb \in H/N$ , 我们有

$$(Na)(Nb)^{-1} = (Na)(Nb^{-1}) = N(ab^{-1}) \in H/N$$

所以  $H/N$  是  $G/N$  的子群。

也可直接由

$H/N \subseteq G/N$ ,  $H/N$  是与  $G/N$  运算相同的商群知,  $H/N$  是  $G/N$  的子群。

# 商群实例

(2) 若  $L$  是  $G/N$  的子群, 则存在  $G$  的子群  $H$ , 使得  $N \subseteq H$  且  $L = H/N$ .

(2) 假设  $L$  是  $G/N$  的子群. 令

$$H = \{a \in G \mid Na \in L\}.$$

显然  $N \subseteq H \subseteq G$ , 从而,  $H \neq \emptyset$ . 对于任意的  $a, b \in H$ , 我们有

$$N(ab^{-1}) = (Na)(Nb^{-1}) = (Na)(Nb)^{-1} \in L,$$

从而,  $ab^{-1} \in H$ . 所以  $H$  是  $G$  的子群. 根据(1),  $N$  是  $H$  的正规子群, 从而,  $H/N$  有意义. 最后, 根据  $H$  的定义, 我们有  $H/N = L$ .

# 商群的性质

$|G/H|=[G:H]$ , 商群的阶是 $|G|$ 的因子  
保持群 $G$ 的性质: 交换性, 循环性等

对一般有限群都是成立的, 柯西定理

例6  $G$ 为Abel群,  $|G|=n$ , 素数 $p$ 整除 $n$ , 则 $G$ 中有 $p$ 阶元.

证明思路: 归纳法——商群满足性质推出原来群中性质.  
归纳步骤. 假设对一切 $m < n$ 为真, 证明对于 $n$ 为真.

设 $|G|=n$ , 取 $a \in G$ ,  $a \neq e$ , 寻找 $p$ 阶元.

(1)  $p$ 整除 $|a|$ , 则 $a^{|a|/p}$ 为 $p$ 阶元.

(2)  $p$ 不整除 $|a|$ , 令 $H=\langle a \rangle$ , 构造 $G/H$ ,  $|G/H|=m$ ,  $p|m$ .

$G/H$ 中有 $p$ 阶元 $Hb$ , 导出 $b$ 与 $a$ 的关系

$$(Hb)^p = H \Rightarrow b^p \in H \Rightarrow b^p = a^t$$

$$(b^{|a|})^p = e \Rightarrow b^{|a|} \text{ 为 } p \text{ 阶元 (否则 } b^{|a|} = e \Rightarrow (Hb)^{|a|} = H \Rightarrow p || a|)$$

# 商群的性质

$$(4) \quad |a|=n, |b|=m, ab=ba \Rightarrow |ab| \mid [n, m],$$

若  $(n, m) = 1$ ,  $|ab| = nm$

**推论** 设 $p, q$ 为互异素数, 则 $pq$ 阶Abel群必为循环群。

**证:** 设 $|G|=pq$ ,  $G$ 为Abel群。由前面例6知,  $G$ 中有 $p$ 阶元 $a$ 和 $q$ 阶元 $b$ 。

又因为 $p, q$ 为互异素数, 且 $ab=ba$ , 所以 $|ab|=pq=|G|$ , 从而 $G$ 是由 $ab$ 生成的循环群。

**例如**,  $6=2 \times 3$ 阶交换群只能是6阶循环群;  $10=2 \times 5$ 阶交换群只能是10阶循环群, ...

**注意:** 推论对非交换群不成立。例如,

$|S_3|=6=2 \times 3$ ,  $S_3$ 不是循环群。