# 单元4.2-自然数的性质

第一编 集合论 第4章 自然数

4.2 传递集

4.3 自然数的运算

4.3 自然数上的序

# 内容提要

- 传递集
  - 传递集的等价条件
- 递归定理、递归定义
  - 加m函数、加法
  - 乘m函数、乘法
  - 加法和乘法的运算律
- 自然数集上的序

# 传递集

- A为传递集 $\Leftrightarrow$

  A的元素的元素还是A的元素

  $\Leftrightarrow \forall x \forall y( x \in y \wedge y \in A \to x \in A)$

# 定理4.10

- (1) A为传递集

$\Leftrightarrow$ (2) $\cup A \subseteq A$

$\Leftrightarrow$ (3) $\forall x( x \in A \rightarrow x \subseteq A )$

$\Leftrightarrow$ (4) $A \subseteq P(A)$

# 例4.2

下列集合是否传递集?

- A={∅,{∅},{{∅}}}
- B={0,1,2}
- C={{a}}
- D=<0,1>

# 例4.2：是否传递集？

- $A=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\}\}$ 是
- $B=\{0,1,2\}$ 是
- $C=\{\{a\}\}$ 不是
- $D=\langle 0,1\rangle=\{\{0\},\{0,1\}\}$ 不是

- 自然数 ?
- 自然数集 ?

# 定理4.11

**定理4. 11**　A为传递集 $\Leftrightarrow$ P(A)为传递集

**证明**　A为传递集

$\Leftrightarrow A \subseteq P(A)$　（定理4.10）

$\Leftrightarrow \cup P(A) \subseteq P(A)$　（$A=\cup P(A)$）

$\Leftrightarrow$ P(A)是传递集　（定理4.10）

\#

# 定理4.12

**定理4. 12　A为传递集 $\Rightarrow$ $\cup(A^+)=A$**

**证明　$\cup(A^+)$**

$= \cup(A\cup\{A\})$ 　　($A^+$定义)

$= (\cup A)\cup(\cup\{A\})$ 　( $\cup(A\cup B)=(\cup A)\cup(\cup B)$ )

$= (\cup A)\cup A$

$= A$ 　　( 因为$\cup A\subseteq A$ )　　#

# 定理4.13

**定理4. 13　每个自然数都是传递集**

**证明** 令$S = \{ n \mid n \in N \wedge n$是传递集$\}$

(1) $0 \in S$: 显然.

(2) $\forall n \in N$, $n \in S \Rightarrow n^+ \in S$: $n \in S$

$\Rightarrow n$是传递集 $\Rightarrow \cup(n^+)=n \subseteq n^+$ (定理4.12)

$\Rightarrow n^+$是传递集 (定理4.10) $\Rightarrow n^+ \in S$.

$\therefore$ $S=N$ #

# 定理4.14

**定理4. 14　自然数集N是传递集**

**证明　令$S = \{ n \mid n \in N \wedge n \subseteq N \}$**

**(1) $0 \in S$:　显然.**

**(2) $\forall n \in N$, $n \in S \Rightarrow n^+ \in S$:　$n \in S$**

**$\Rightarrow n \subseteq N \Rightarrow n \cup \{n\} = n^+ \subseteq N$　( $\{n\} \subseteq N$ )**

**$\Rightarrow n^+ \in S$. $\therefore$ $S=N$,　即$\forall n(n \in N \rightarrow n \subseteq N)$.**

**由定理4.10，N是传递集.　　#**

# 自然数集上的二元运算

- 加法:

$$+: N \times N \rightarrow N,$$

$$+(<2,3>)=5,\ \ 2+3=5$$

- 乘法:

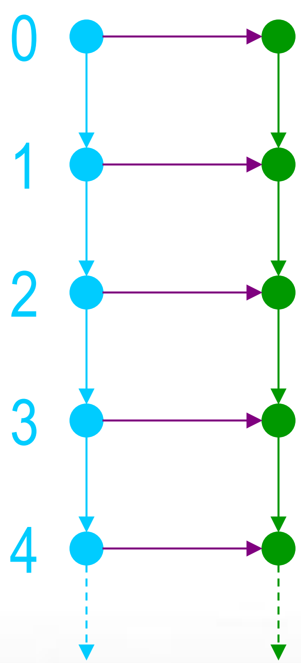
$$\bullet: N \times N \rightarrow N,$$

$$\bullet(<2,3>)=6,\ \ 2\bullet 3=6$$

# N上的递归定理

- 设A为集合, $a \in A$, $F:A \to A$, 则存在唯一函数$h:N \to A$, 使得$h(0)=a$, 且$\forall n \in N$, $h(n^+)=F(h(n))$. #

# 当F是单射时




$a=h(0)$

$F(a)=F(h(0))=h(1)=h(0^+)$

$F^2(a)=F(F(a))=F(h(1))=h(2)=h(1^+)$

$F^3(a)=F(F^2(a))=F(h(2))=h(3)=h(2^+)$

$F^4(a)=F(F^3(a))=F(h(3))=h(4)=h(3^+)$

# 递归定义

- $a \in A$, $F: A \to A$

$$\begin{cases} h(0)=a \\ h(n+1)=F(h(n)), \ \forall n \in N \end{cases}$$

- 递归定理说: $h: N \to A$ 存在唯一

# 一元函数“加m”

- m固定，$A_m$: N→N,

$$\begin{cases} A_m(0)=m, \\ A_m(n^+)=(A_m(n))^+. \end{cases}$$

$$A_m = \underbrace{\sigma \circ \sigma \circ \cdots \circ \sigma}_{m\text{个}\sigma} = \sigma^m$$

# 一元函数“加m”举例

- $A_m(n)=m+n$

$$\begin{cases} A_m(0)=m \\ A_m(n^+)=A_m(n)^+=(m+n)^+=(m+n)+1 \end{cases}$$

$$=m+(n+1)=m+n^+$$

- $A_2(3)=A_2(2^+)=A_2(2)^+=A_2(1^+)^+$

$=A_2(1)^{++}=A_2(0^+)^{++}=A_2(0)^{+++}$

$=2^{+++}=3^{++}=4^{+}=5.$

# 二元函数加法

- $+ : N\times N\to N,\ \ m+n=A_m(n)$

- $3+3 = A_3(3)$

  $= A_3(2^+) = A_3(2)^+$

  $= A_3(1^+)^+ = A_3(1)^{++}$

  $= A_3(0^+)^{++} = A_3(0)^{+++}$

  $= 3^{+++} = 4^{++} = 5^+ = 6$

# 定理4.15

**定理4. 15** $\forall m,n\in N$, $m+0 = m$

$m+n^+ = (m+n)^+$

**证明** $m+0=A_m(0)=m.$

$m+n^+ = A_m(n^+)$ (+定义)

$= (A_m(n))^+$ ($A_m$定义)

$= (m+n)^+$ (+定义) . #

# 定理

- $\forall m,n \in N,\quad 0+n = n$

  $m^{+}+n = (m+n)^{+}$

- 用归纳法证明

# 加法交换律

**定理** $\forall m,n\in N,\ m+n=n+m.$

**证明** $\forall m\in N$, 令$S=\{n\,|\,n\in N\wedge m+n=n+m\}$

(1) $0\in S$: $m+0 = m = 0+m.$

(2) $n\in S \Rightarrow n^+\in S$:

$m+n^+=A_m(n^+)=A_m(n)^+=(m+n)^+$

$=(n+m)^+$ (归纳假设)

$= n^++m$ (前一个定理)

$\therefore S = N.$ #

# 加法性质总结

- 单位元: $0+n = n+0 = n$
- 交换律: $n+m = m+n$
- 结合律: $(m+n)+k = m+(n+k)$
- 消去律: $m+k=n+k \Rightarrow m=n$

- 用归纳法证明

# 乘法

- “乘m”: m固定, $M_m:N\to N$,
$$\begin{cases} M_m(0) = 0, \\ M_m(n^+) = M_m(n)+m. \end{cases}$$
- 乘法: $\bullet:N\times N\to N$, $m\bullet n=M_m(n)$

# 乘法性质总结

- 单位元: $1 \bullet n = n \bullet 1 = n$
- 交换律: $n \bullet m = m \bullet n$
- 结合律: $(m \bullet n) \bullet k = m \bullet (n \bullet k)$
- 消去律: $m \bullet k = n \bullet k \Rightarrow m = n \quad (k \neq 0)$
- 分配律: $m \bullet (n+k) = (m \bullet n) + (m \bullet k)$

- 用归纳法证明

# 自然数的序

- “属于等于”： $m \underline{\in} n \Leftrightarrow m \in n \vee m=n$

  (线序, 良序)

- $m<n \Leftrightarrow m \in n$
- $m>n \Leftrightarrow n \in m$
- $m \leq n \Leftrightarrow m \underline{\in} n$
- $m \geq n \Leftrightarrow n \underline{\in} m$

# 小结

- 传递集
  - 传递集的等价条件：$\cup A \subseteq A$， $A \subseteq P(A)$
- 递归定理、递归定义
  - 加m函数、加法
  - 乘m函数、乘法
  - 加法和乘法的运算律
- 自然数集上的序： $m \underline{\in} n \Leftrightarrow m \in n \vee m = n$