Ch-01 函数

数学分析主要由**微积分**和**级数理论**组成，研究对象为**实函数**，即以**实数**为自变量并且在**实数**中取值的函数（$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$）。首先介绍**实数系的连续性**，然后介绍**函数**的概念和有关的基本知识。

1.1 实数

1.1.1 数集

集合是将具有某种特性的对象的全体放在一起得到的整体，这些对象称为**元素**。
集合通常用大写字母表示，集合中的元素通常用小写字母表示。若 a 是 A 中的元素，则记为 $a \in A$，读作 a 属于 A；如果 a 不是 A 中的元素，则记为 $a \notin A$，读作 a 不属于 A.

集合有**列举法**和**描述法**两种表示法，后者更为常用。若集合 A 中的每一个元素 x 都属于集合 B，则称 B **包含** A，记作 $A \subseteq B$，也称 A 是 B 的**子集**。如果 $A \subseteq B$ 和 $B \subseteq A$ 同时成立，则认为 A, B 为同一个集合，记为 $A = B$.

若 $A \subseteq B$ 且 $A \neq B$，则称 A 是 B 的**真子集**，记作 $A \subset B$. 我们引入空集 $\varnothing$，$\varnothing$ 中不包含任何元素，$\varnothing$ 是任何集合的子集。

$A \cup B = \{x : x \in A$ 或 $x \in B\}$ 称为 A 与 B 的**并**。
$A \cap B = \{x : x \in A$ 且 $x \in B\}$ 称为 A 与 B 的**交**。
$A \backslash B = \{x : x \in A$ 且 $x \notin B\}$ 称为 A 与 B 的**差**。

1.1.2 实数系的连续性

自然数系不是一个完整的数系，只能自由地进行加、乘运算，而不能自由地进行加、乘运算的逆运算，具有**离散性**和**不完备性**。引入负数后得到**整数系**，可以自由地进行加、减运算。对整数系中的任意两个数进行加、减、乘、除（除数非零）后得到的数的全体记为**有理数系**。

对一个数集 K，若 K 中至少含有一个非零元素，且 K 中任意两个元素的加、减、乘、除（除数非零）运算后的结果仍属于 K，则称 K 关于四则运算**封闭**，称 K 是一个**数域**。有理数集是一个数域（且**任何一个数域都包含有理数集**）。任何两个有理数之间必有有理数存在（有理数有**稠密性**），但没有连续性。

定义 1.1.1 设 S 是一个有大小顺序的非空数集，A 和 B 是它的两个子集，如果它们满足以下条件：
(1) $A \neq \varnothing, B \neq \varnothing$ (2) $A \cup B = S$
(3) $\forall a \in A, \forall b \in B$，都有 $a < b$ (4) A 中无最大数
则我们将 A, B 称为 S 的一个**分划**，记为 $(A|B)$.

考虑有理数 $\mathbb{Q}$ 的分划，对 $\mathbb{Q}$ 的任意分划 $(A|B)$，必有以下两种情形之一发生:
(1) B 中存在最小数，此时称 $(A|B)$ 是一个**有理分划**
(2) B 中不存在最小数，此时称 $(A|B)$ 是一个**无理分划**

有理数系 $\mathbb{Q}$ 的所有分划构成了一个集合，我们称这个集合为**实数系**，并记为 $\mathbb{R}$. 有理数集与 $\mathbb{R}$ 中的有理分划是一一对应的，故 $\mathbb{R}$ 可以被认为是由有理数集加上无理分划所构成。我们称 $\mathbb{R}$ 中的这些无理分划为**无理数**，即 $\mathbb{R}$ 是由全体有理数与无理数所构成的集合。

定理 1.1.1 戴德金分割定理 对 $\mathbb{R}$ 的任一分划 $(A|B)$，B 中必有最小数

戴德金分割定理说明实数系具有**连续性**。对于一个数集 A，若任意两个数 $a, b \in A$, a, b 之间的所有的数都在 A 中，则称 A 是**连通**的。实数集是一个有序的连通域，$\mathbb{R}$ 中的数与数轴上的点之间一一对应。

1.1.3 有界集与确界

设集合 $E \subseteq \mathbb{R}$，$E \neq \varnothing$，如果存在 $M \in \mathbb{R}$，使得对 $\forall x \in E$，有 $x \leq M$，则称 E 是有**上界**的，并且说 M 是 E 的一个**上界**。如果存在 $m \in \mathbb{R}$，使得对 $\forall x \in E$，有 $x \geq m$，则称 E 是有**下界**的，并且说 m 是 E 的一个**下界**。如果 E 既有上界又有下界，则称 E 是**有界**的。E 是有界的 $\Leftrightarrow \exists M > 0, \forall x \in E,$ $|x| \leq M$.

定义 1.1.2 设 $E \subset \mathbb{R}$ 为一个非空数集，若有 $M \in \mathbb{R}$ 满足
(1) M 是 E 的一个上界，$\forall x \in E, x \leq M$ (2) 对 $\forall \epsilon > 0, \exists x' \in E,$ $x' > M - \epsilon$
则称 M 是 E 的**上确界**，记为 $M = \sup E = \sup\limits_{x \in E}\{x\}$.
若有 $m \in \mathbb{R}$ 满足
(1) m 是 E 的一个下界，$\forall x \in E, x \geq m$ (2) 对 $\forall \epsilon > 0, \exists x' \in E, x' < m + \epsilon$
则称 m 是 E 的**下确界**，记为 $m = \inf E = \inf\limits_{x \in E}\{x\}$.

如果 $\sup E \in E$，则 $\sup E$ 可记为 $\max E$，上确界即为 E 中最大数。如果 $\inf E \in E$，则 $\inf E$ 可记为 $\min E$，下确界即为 E 中最小数。

引入记号 $+\infty$ 和 $-\infty$，分别表示正无穷大和负无穷大。当数集 E 无上界时，记做