



单元1.4 集合的概念及 集合之间的关系

第一编 集合论 第一章 集合

1.2 集合的概念及集合之间的关系



清华大学



内容提要

关于集合论

集合的基本概念

集合之间的关系



北京大学

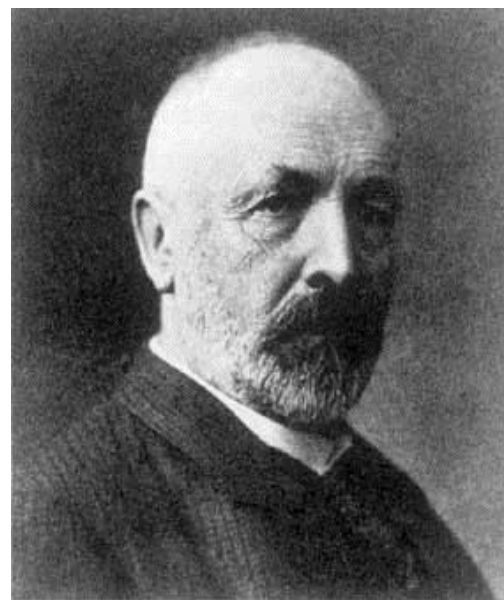
关于集合论

集合论是基本的数学描述工具

- 集合是数学中的基本概念
- 诞生于十九世纪
- 创始人是康托

集合论体系

- 朴素集合论（教材1-6章）
- 公理集合论



康托（1845~1918）



北京大学



集合

在朴素集合论中，不能精确地定义什么是集合。

（为什么？）

人们用大写英文字母 A, B, C, \dots 表示集合；

用小写英文字母 a, b, c, \dots 表示集合中的元素；

用 $a \in A$ 表示 a 是 A 的元素，读作“ a 属于 A ”；

用 $a \notin A$ 表示 a 不是 A 的元素，读作“ a 不属于 A ”。



清华大学



集合的表示

(1) **列举法**: 列出集合中的全体元素, 元素之间用逗号分开, 然后用花括号括起来, 例如, $A=\{a,b,c,d\}$,

$B=\{2,4,6,\dots\}$ 。

(2) **描述法**: 用谓词 $P(x)$ 表示 x 具有性质 P , 用 $\{x|P(x)\}$ 表示具有性质 P 的集合。 例如, $P_1(x)$: x 是英文字母,

$P_2(x)$: x 是十进制数字, $C=\{x|P_1(x)\}$ 表示26个英文字母的集合, $D=\{x|P_2(x)\}$ 表示10个十进制数字的集合。



清华大学



集合表示的注意事项

- (1) 集合中的元素是各不相同的。
- (2) 集合中的元素不规定顺序。
- (3) 集合的两种表示法可以互相转化，

例如， $B=\{2,4,6,\dots\}$ 可用描述法表示为

$B=\{x \mid x>0 \text{ 且 } x \text{ 是偶数}\}$ 或

$B=\{x \mid x=2(k+1), k \text{ 为非负整数}\}$ 。



北京大学



常用的数集合

N: 自然数集合 $N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

Z: 整数集合 $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

Q: 有理数集合

R: 实数集合

C: 复数集合



北京大学



集合之间的关系

定义1.1 设A,B为二集合，若B中的元素都是A中的元素，则称B是A的子集，也称A包含B，或B包含于A，记作 $B \subseteq A$ ，其符号化形式为 $B \subseteq A \Leftrightarrow \forall x(x \in B \rightarrow x \in A)$ 。

若B不是A的子集，则记作 $B \not\subseteq A$ ，其符号化形式为 $B \not\subseteq A \Leftrightarrow \exists x(x \in B \wedge x \notin A)$ 。

例：设 $A=\{a,b,c\}$ ， $B=\{a,b,c,d\}$ ， $C=\{a,b\}$ ，则 $A \subseteq B$ ， $C \subseteq A$ ， $C \subseteq B$ 。





相等

定义1.2 设 A, B 为二集合，若 A 包含 B 且 B 包含 A ，则称 A 与 B 相等，记作 $A=B$ ，即 $A=B \Leftrightarrow \forall x(x \in B \leftrightarrow x \in A)$ 。

例：设 $A=\{2\}$ ， $B=\{1,4\}$ ， $C=\{x|x^2-5x+4=0\}$ ，

$D=\{x|x \text{ 为偶素数}\}$ ， 则 $A=D$ ， 且 $B=C$ 。





集合之间包含关系的性质

设 A, B, C 为三个集合，则以下三命题为真

(1) $A \subseteq A$;

(2) 若 $A \subseteq B$ 且 $A \neq B$ ，则 $B \not\subseteq A$;

(3) 若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq C$ ，则 $A \subseteq C$ 。





真子集

定义1.3 设 A, B 为二集合，若 A 为 B 的子集且 $A \neq B$ ，则称 A 为 B 的**真子集**，或称 B 真包含 A ，记作 $A \subset B$ ，即 $A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B$ 。若 A 不是 B 的真子集，则记作 $A \not\subset B$ ，其符号化形式为 $A \not\subset B \Leftrightarrow \exists x(x \in A \wedge x \notin B) \vee A = B$ 。

设 A, B, C 为三个集合，下面三命题为真：(1) $A \not\subset A$ ；
(2) 若 $A \subset B$ ，则 $B \not\subset A$ ；(3) 若 $A \subset B$ ，且 $B \subset C$ ，则 $A \subset C$ 。





空集

定义1.4 不拥有任何元素的集合称为空集合，简称为空集，记作 \emptyset 。（ \emptyset 读ugh）

$\{x | x^2 + 1 = 0 \wedge x \in \mathbb{R}\}$ 和 $\{(x, y) | x^2 + y^2 < 0 \wedge x, y \in \mathbb{R}\}$ 都是空集。

定理1.1 空集是一切集合的子集。

证明 对于任意集合A，均有 $\emptyset \subseteq A$ 成立，这是因为

$$\emptyset \subseteq A \Leftrightarrow \forall x (x \in \emptyset \rightarrow x \in A) \Leftrightarrow 1. \quad \square$$





空集的惟一性

推论 空集是惟一的。

证明 设 \emptyset_1 与 \emptyset_2 都是空集，由定理1.1可知 $\emptyset_1 \subseteq \emptyset_2 \wedge \emptyset_2 \subseteq \emptyset_1$ ，所以 $\emptyset_1 = \emptyset_2$ 。 \square

由推论可知，无论空集以什么形式出现，它们都是相等的，所以 $\{x | x \neq x\} = \{x | x^2 + 1 = 0 \wedge x \in \mathbb{R}\} = \emptyset$ 。

空集是“最小”的集合，有没有最大的集合呢？





全集

定义1.5 如果限定所讨论的集合都是某个集合的子集，则称该集合为**全集**，记作 **E** 。

从定义可以看出，全集是相对的，视具体情况而定，因此**不唯一**。例如，讨论区间 **(a,b)** 上的实数性质时，可以取 **(a,b)** 为全集，也可以取 **$[a,b)$** 、 **$(a,b]$** 、 **$(a,+\infty)$** 、 **\mathbf{R}** 等为全集。

给定若干个集合之后，都可以找到包含它们的全集。在今后讨论中，所涉及的集合都可以看成是某个全集 **E** 的子集。





幂集

定义1.6 设 A 为一个集合，称由 A 的全体子集组成的集合为 A 的幂集，记作 $P(A)$ 。

用描述法表示为 $P(A) = \{x | x \subseteq A\}$ 。

说明：

- (1) 在概率论中，用 $P(A)$ 表示事件 A 的概率。
- (2) 有的书上用 2^A 表示 A 的幂集。(为什么?)





集合的元素个数

规定： \emptyset 为0元集，含1个元素的集合为单元集或1元集，含2个元素的集合为2元集，……，含n个元素的集合为n元集($n \geq 1$)。

用 $|A|$ 表示集合A中的元素个数，当A中的元素个数为有限数时，A为有穷集或有限集。

定理1.2 设集合A的元素个数 $|A|=n$ ，则 $|P(A)|=2^n$ 。



北京大学



求 $P(A)$ 的步骤

为了求出给定集合 A 的幂集，先求 A 的由低到高元的所有子集，再将它们组成集合。

设 $A=\{a,b,c\}$ ，求 $P(A)$ 的步骤如下：

0元子集为 \emptyset ；1元子集为 $\{a\}$ 、 $\{b\}$ 、 $\{c\}$ ；

2元子集为 $\{a,b\}$ 、 $\{a,c\}$ 、 $\{b,c\}$ ；3元子集为 $\{a,b,c\}=A$ ；

所以， A 的幂集为

$$P(A)=\{\emptyset,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}.$$





集族

除了 $\mathbf{P(A)}$ 以外，还有其他形式的由集合构成的集合，统称为**集族**。若集族中的集合都赋予记号，则可得带指标集的集族。

定义1.7 设 \mathcal{A} 为一个集族， S 为一个集合，若对于任意的 $\alpha \in S$ ，存在惟一的 $A_\alpha \in \mathcal{A}$ 与之对应，而且 \mathcal{A} 中的任何集合都对应 S 中的某一元素，则称 \mathcal{A} 是以 S 为指标集的**集族**， S 称为 \mathcal{A} 的**指标集**。记为 $\mathcal{A} = \{A_\alpha \mid \alpha \in S\}$ ，或 $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}_{\alpha \in S}$ 。

如果把 \emptyset 看成集族，则称 \emptyset 为**空集族**。





集族的例子(1)(2)

(1) 设 $A_1 = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ 为奇数}\}$, $A_2 = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ 为偶数}\}$,

则 $\{A_1, A_2\}$ 是以 $\{1, 2\}$ 为指标集的集族。

(2) 设 p 为一素数, $A_k = \{x \mid x \equiv k \pmod{p}\}$, $k = 0, 1, \dots, p-1$ 。

则 $\mathcal{A} = \{A_0, A_1, \dots, A_{p-1}\}$ 是以 $\{0, 1, 2, \dots, p-1\}$ 为指标集的集族,

记为 $\mathcal{A} = \{A_k \mid k \in \{0, 1, \dots, p-1\}\}$, 或 $\mathcal{A} = \{A_k\}_{k \in \{0, 1, 2, \dots, p-1\}}$ 。





集族的例子(3)(4)

(3) 设 $A_n = \{x \in \mathbb{N} \mid x = n\}$,

则 $\mathcal{A} = \{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ 是以 \mathbb{N} 为指标集的集族,
其元素为以各自然数为元素的单元集。

(4) 设 $\mathbb{N}_+ = \mathbb{N} - \{0\}$, $A_n = \{x \mid 0 \leq x < 1/n \wedge n \in \mathbb{N}_+\}$,

则 $\mathcal{A} = \{A_n \mid n \in \mathbb{N}_+\}$ 是以 \mathbb{N}_+ 为指标集的集族,
其元素为半开半闭区间 $[0, 1/n)$, $n = 1, 2, \dots$ 。





多重集

设全集为 E ， E 中元素可以不止一次在 A 中出现的集合 A 称为多重集。若 E 中元素 a 在 A 中出现 k 次($k \geq 0$)，则称 a 在 A 中重复度为 k 。

例子：设全集 $E=\{a,b,c,d,e\}$ ， $A=\{a,a,b,b,c\}$ 为多重集，其中 a 、 b 的重复度为2， c 的重复度为1，而 d 、 e 的重复度为0。

集合可看作重复度均小于等于1的多重集。





小结

- 集合的基本概念
 - 集合
 - 集合的表示
- 集合之间的关系
 - 子集、相等、真子集、空集、全集
 - 幂集、集合的元素个数
 - 集族、带指标集的集族
 - 多重集

