北京大學

经典逻辑推理

·AIPKU·

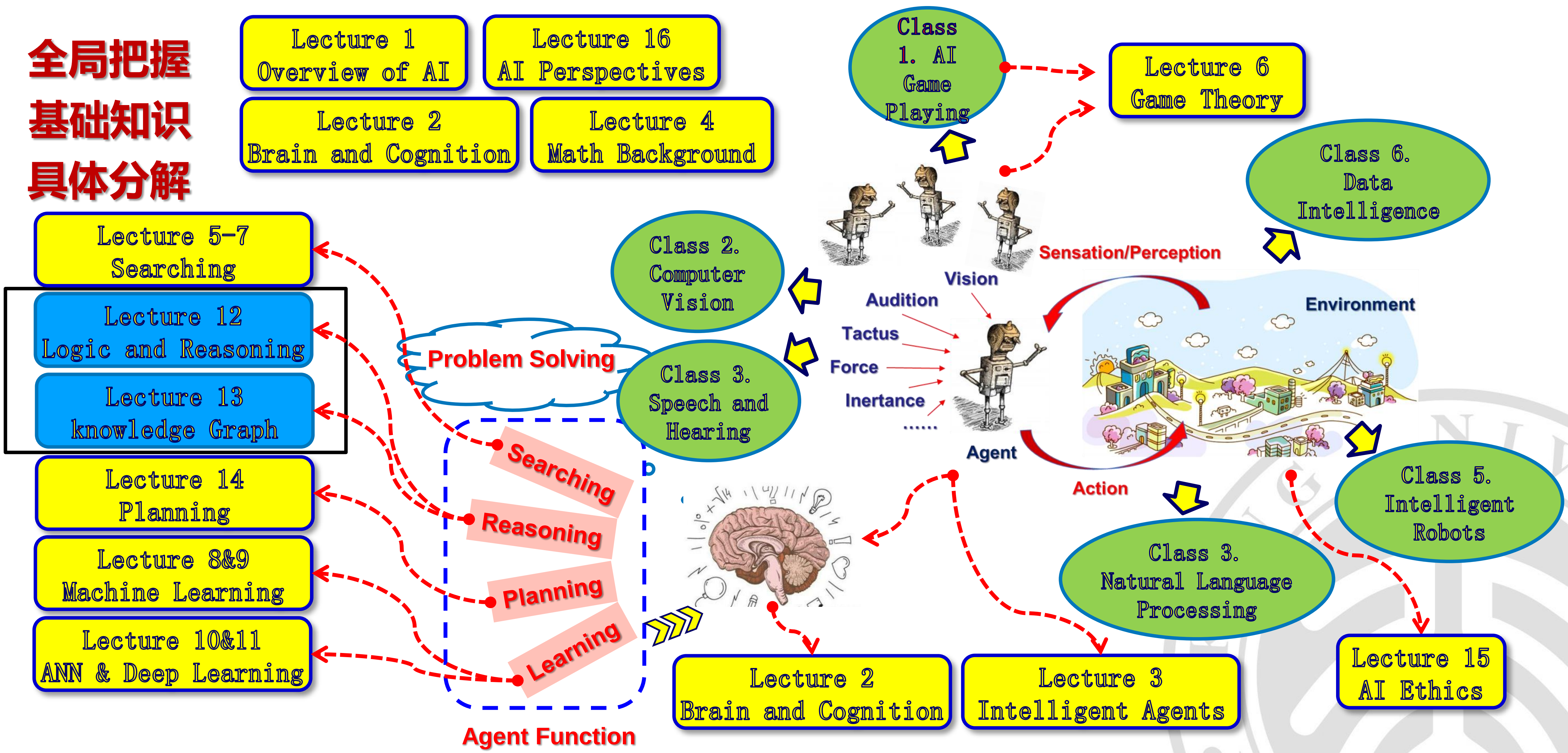
人工智能引论●第十二课

主讲人：童云海

2019年4月22日

课程组织的逻辑结构

全局把握
基础知识
具体分解



问题求解技术的再理解

- 问题求解涉及学习、推断、归约、决策、规划等问题及其相关求解过程的核心概念
- 问题求解技术的两个方面：问题表示、求解方法
- 对同一个问题，可以有多种不同的表示方法（涉及不同的表示空间）
- 试探性的搜索方法，通过某个可能的解空间内寻找一个解来求解问题的
- 以符号和逻辑为基础的传统人工智能问题求解是通过知识表示和知识推理（搜索）来实现的
- 选择合适的知识表示方法（即用一组符号将知识表示成计算机可以接受的某种结构），将极大的提高问题求解的效率
  - 状态空间法：八数码问题，猴子和香蕉问题
  - 问题归约法：梵塔问题
  - 谓词逻辑法：涉及逻辑语句、形式语言；谓词演算等
  - 语义网络法
  - 深度网络法
  - … …

主要内容

- 推理的基本概念
  - 什么是推理?
  - 推理方法的类型
  - 推理的控制策略
  - 模式匹配
- 经典逻辑推理及其数学基础
- 自然演绎推理
- 归结演绎推理
- 与/或形演绎推理
- 本章小结

推理的基本概念

- **推理**：根据一定的策略（公理、原则、规则、规划等），从已知事实（判断）推出新事实的**思维过程**。其中，推理所依据的事实称为**前提**（**条件**），由前提所推出的新事实称为**结论**

已知事实（判断）
前提（条件）

$\xrightarrow{\text{公理、原则、规则、规划等}}$

新事实
结论

- 若前提为$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$，结论为$\beta$，则将这样的推理形式称为：

$$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n \quad \text{推出} \quad \beta$$

人工智能系统中的推理

- 在人工智能系统（例如：专家系统）中，推理以知识库中已有知识为根据，是一种基于知识的推理；基于知识推理的计算机实现构成了推理机
- 知识库和推理机是专家系统的核心部分
  - 一个高性能的专家系统要拥有大量的专门知识
  - 具有选择和运用知识的能力
  - 推理机的主要任务是在问题求解过程中适时地决定知识的选择和运用。
- 推理机的**控制策略**用来确定知识的选择，推理方式确定具体知识的运用

主要内容

- 推理的基本概念
  - 什么是推理?
  - 推理方法的类型
  - 推理的控制策略
  - 模式匹配
- 经典逻辑推理及其数学基础
- 自然演绎推理
- 归结演绎推理
- 与/或形演绎推理
- 本章小结

推理方法的类型

- 按结论产生的途径来分
  - 演绎推理：从一般到特殊。由普遍性的前提而进行的代入性推理，有三段论、假言推理和选言推理等形式
    - 足球运动员很强壮 （大前提）
    - 高波是一名足球运动员 （小前提）
    - 高波很强壮 （ 结 论 ）
  - 归纳推理：从个别到一般。由特殊的前提推出普遍性结论的推理，分为完全归纳和不完全归纳，不完全归纳包括：简单枚举和科学归纳等
  - 默认推理：又称为缺省推理，它是在知识不完全的情况下假设某些条件已经具备所进行的推理

- 按照知识的确定性来分
  - 确定性推理：推理中所使用的知识都是精确的，结论也是确定的
  - 不确定性推理：推理中所使用的知识不都是精确的，结论也是不完全肯定的

推理方法的类型（续）

- 按结论的单调性来分
  - 单调性推理：随着推理的向前和新知识的引入，结论越来越接近最终目标，不存在反复的情况
  - 非单调性推理：由于新知识的引入，有可能否认现有的推理结果，使得推理需要退回到先前的某一步骤

- 按照是否应用启发性知识来分
  - 启发性推理：引入了与问题有关，而且能够加快推理过程，求得问题最优解的知识
  - 非启发性推理

- 按照方法论来分
  - 基于知识的推理：专家系统
  - 统计推理
  - 直觉推理：常识推理

主要内容

- 推理的基本概念
  - 什么是推理?
  - 推理方法的类型
  - 推理的控制策略
  - 模式匹配
- 经典逻辑推理及其数学基础
- 自然演绎推理
- 归结演绎推理
- 与/或形演绎推理
- 本章小结

推理的控制策略

- 推理是一个思维过程，问题求解过程。推理的控制策略即求解问题的策略
  - 包括：推理的效果、推理的效率、推理策略、推理方向、求解策略、冲突消解策略、限制策略、搜索策略等
- 推理的效果：若问题有解，控制策略应能保证经过推理得到解。若有多个解，能选出最优解，并能终止推理过程
- 推理的效率：推理时尽量使用与问题本身有关的启发性信息
- 推理策略：初始态到目标态所启用的知识形成了一个推理链，称之为推理策略（也叫推理路线）

推理的控制策略：推理方向

- **推理方向：即推理的驱动方向**
- 正向推理：亦称数据驱动推理、前件推理。以初始证据作为出发点
- 反向推理：亦称目标驱动推理、后件推理。以假设结论作为出发点
- 混合推理：正向、后向推理的结合。又分为：
  - 先正向后反向的混合推理
  - 先后向后正向的混合推理
- 双向推理：正向、反向推理同时进行

推理的控制策略：冲突消解

- 冲突消解策略解决如何在多条可用知识中，合理选择其中一条知识的问题，是一种基本的推理控制策略

- 在专家系统问题求解过程中，知识与当前数据库中的内容进行匹配。如果匹配，则成为可用知识。当可用知识不止一条时，会发生“冲突”，在多条可用知识中，选择一条知识启用的过程，称为“冲突消解”

- 常用的冲突消解策略

  - 按就近原则排序：最近使用规则
  - 按知识特殊性排序
  - 按上下文限制排序：上下文匹配度
  - 按知识的新鲜性排序：后生成的事实
  - 按知识的差异性排序
  - 按领域问题的特点排序：按领域对知识进行排序
  - 按规则的次序排序：对规则进行排序
  - 按前提条件的规模排序

推理的控制策略

- 求解策略：指推理是求一个解，还是求所有解以及最优解等

- 限制策略：防止无穷的推理。对推理的深度、宽度、时间、空间等进行限制。

- 搜索策略

主要内容

- 推理的基本概念
  - 什么是推理?
  - 推理方法的类型
  - 推理的控制策略
  - 模式匹配
- 经典逻辑推理及其数学基础
- 自然演绎推理
- 归结演绎推理
- 与/或形演绎推理
- 本章小结

模式匹配的概念

- 模式匹配：对于两个知识模式（例如：谓词公式、框架片段、语义网络片段）的比较与耦合，即它们是否完全一致或近似一致
  - 确定性匹配（完全匹配、精确匹配）：两者完全一致，或者经过**变量代换**以后完全一致

    知识：IF Father（X，Y）and Man（Y） THEN SON（Y,X）

    事实：Father（张三，张小三），Man（张小三）
  - 不确定匹配：两者不完全一致，但是相似程度在一定的范围之内

- 只有模式匹配，才能从知识库中选出适当的知识，进而推理

模式匹配：变量代换

- 无论确定性匹配还是不确定匹配，在进行匹配时一般都需要进行变量代换

定义：**代换**是形如： $\{t_1/x_1, t_2/x_2, \ldots, t_n/x_n\}$的有限集合

其中：t_1，$t_2, \ldots, t_n$ 是项（常量、变量、函数）

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ 是互不相同的变元

t_i/x_i 表示用 t_i 代换 x_i

条件：不允许 t_i 与 x_i 相同（即$t_i \neq x_i$），也不允许变元 x_i 循环地出现在另一个 t_j 中，且$x_i \neq x_j$（$i \neq j$，$i, j = 1,2, \ldots, n$）

模式匹配：变量代换

例： $\{a/x, f(b)/y, w/z\}$ 是一个代换

$\{g(y)/x, f(x)/y\}$ 不是一个代换

将其改成：$\{g(x)/x, f(x)/y\}$ ， $\{g(a)/x, f(x)/y\}$

- 令 θ = $\{t_1/x_1, t_2/x_2, \ldots, t_n/x_n\}$为一个变量代换，F 为表达式，则 F_θ 表示对 F 用 t_i 代换 x_i 后得到的表达式。 F_θ 称为 F 的特例

知识：IF Father（X，Y）and Man（Y） THEN SON（Y,X）

事实：Father（张三，张小三），Man（张小三）

F= Father（X，Y）∧ Man（Y）

θ ={ 张三/X，张小三/Y}

F_θ = Father（张三，张小三）∧ Man（张小三）

结论：SON（张小三，张三）

模式匹配：可合一的公式集

- 定义：设有一个公式集F={$F_1, F_2, \ldots, F_n$}，若存在一个代换λ，可使 $F_1\lambda = F_2\lambda = F_n\lambda$ ，则称 λ为F的一个合一，且称F是可合一的

  例如：假设有公式集，F={P(x，y，f(y))，P(a, g(x), z)}

  则有 λ ={a/x, g(a)/y, f(g(a))/z} 为F的一个合一

  定理：F的合一一般不是唯一的

- 定义：设σ是一个公式集F的一个合一，若对任一合一θ，都存在一个代换λ，可使得 $\theta = \sigma ° \lambda$ (代换的复合)，则称σ是一个最一般的合一

代换的过程，是一个用项代替变元的过程，因此是一个从一般到特殊的过程

定理：最一般的合一是唯一的

模式匹配：求最一般合一的算法

1. 置 $k=0$，$F_k=F$，$\delta_k=\varepsilon$. 这里，F是欲求其最一般合一的公式集，是空代换，它表示不做代换
2. 若F_k只含一个表达式，则算法停止，δ_k就是最一般的合一
3. 求F_k的差异集D_k
4. 求D_k中存在元素x_k和t_k，其中x_k是变元，t_k是项，且x_k不在t_k中出现，则置 $\delta_{k+1}=\delta_k\ {}^\circ\{t_k/x_k\}$, $F_{k+1}=F_k\cdot\{t_k/x_k\}$，k=k+1，转步骤（2）
5. 算法停止，F的最一般合一不存在

例：求公式集F={$P(a,x,f(g(y))), P(z,f(z),f(y))$} 的最一般合一

解：k=0时,

（1）令$k=0$，$F_0=F$，$\delta_0=\varepsilon$; 因为F_0中含有两个表达式，δ_0不是最一般的合一

（2）差异集$D_0=\{a,z\}$

（3）$\delta_1=\delta_0\,°\{a/z\}=\{\mathrm{a/z}\}$

$$F_1=F_0\cdot\{a/z\}=\{\mathrm{P}\left(\mathrm{a,x,f(g(y))}\right),\mathrm{P(a,f(a),f(u))}\}$$

模式匹配

k=1时:

（4）差异集$D_1 = \{x, f(a)\}$

（5）$\delta_2 = \delta_1 \circ\{\mathrm{f}(a)/\mathrm{x}\} = \{\mathrm{a/z}, \mathrm{f(a)/x}\}$

$$F_2 = F_1 \cdot \{\mathrm{f}(a)/\mathrm{x}\} = \{\mathrm{P}\left(\mathrm{a}, \mathrm{f(a)}, \mathrm{f}(\mathrm{g}(\mathrm{y}))\right), \mathrm{P(a, f(a), f(u))}\}$$

k=2时:

（6）差异集$D_2 = \{g(y), u\}$

（7）$\delta_3 = \delta_2 \circ\{\mathrm{g}(y)/\mathrm{u}\} = \{\mathrm{a/z}, \mathrm{f(a)/x}\} \circ\{g(y)/u\}$

$=\{\mathrm{a/z},\ \mathrm{f(a)/x}, g(y)/u\}$

$$F_3 = F_2 \cdot \{\mathrm{g}(y)/\mathrm{u}\} = \{\mathrm{P(a, f(a), f(g(y))}\}$$

k=3时:

因为F_3只含一个表达式（即单一元素）

所以δ_3是最一般的合一， 即

$$\delta_3 = \{a/z,\ f(a)/x, g(y)/u\}$$

是F的最一般合一

主要内容

- 推理的基本概念
- 经典逻辑推理及其数学基础
- 自然演绎推理
- 归结演绎推理
- 与/或形演绎推理
- 本章小结

经典逻辑推理的概念

- 经典逻辑推理是根据经典逻辑的逻辑规则进行的一种推理，又称为机械-自动定理证明（Mechanical-automatic theorem proving）

- 由于该推理是基于经典逻辑的，其真值只有真和假两种。是一种确定性推理

谓词演算基础：谓词

- 将表示个体性质和彼此之间关系的词称为谓词
- 常用F,G,H,…表示谓词常元或谓词变元，用F(x)表示“x具有性质F”，用F(x,y)表示“x和y具有关系F”
- 例如，若F(x)表示“x是黑色的”， a表示黑板，则F(a)表示“黑板是黑色的”； 若F(x,y)表示“x大于y”，则F(7, 6)表示“7大于6”

谓词演算基础：量词

- 表示数量的词称为量词
- 全称量词：自然语言中的“所有的”、“一切的”、“**任意的**”、“每一个”、“都”等的统称，用符号“∀”表示，用∀ x表示个体域里的所有x；用∀x A表示个体域里所有x都有性质A
- 存在量词：自然语言中的“有一个”、“至少有一个”、“**存在着**”、“有的”等的统称，用符号“∃”表示，用∃ x表示个体域里存在着x；用∃x A表示个体域里存在x具有性质A

谓词逻辑基础：谓词公式

- 一阶谓词逻辑公式也简称为公式，若A是公式，则∀x A及∃x A也都是公式

- 在公式∀ x A和∃ x A中，称x为指导变元，称A为相应量词的辖域。在∀ x和∃ x的辖域中，x的所有出现都称为是约束出现，约束出现的个体变元x称为约束变元，A中不是约束出现的变元称为自由出现，自由出现的个体变元称为自由变元

谓词逻辑基础：谓词公式

- $\forall x\,(F(x) \to \exists y\,(G(y) \vee H(x,y,z)))$

  $\forall x$ 的辖域为 $(F(x) \to \exists y\,(G(y) \vee H(x,y,z)))$

  $\exists y$ 的辖域为 $(G(y) \vee H(x,y,z))$

  除 z 是自由出现的变元外，其他变元都是约束出现的

- 金子闪光, 但闪光的不一定都是金子

  G(x): x是金子，F(x): x闪光

  $\forall x(G(x)\to F(x))\wedge\neg\forall x(F(x)\to G(x))$

  $\forall x(G(x)\to F(x))\wedge\exists x(F(x)\wedge\neg G(x))$

- 有些液体可以溶解所有固体

  F(x): x是液体， S(x): x是固体，
  D(x,y): x可溶解y

  $\exists x(F(x)\wedge\forall y(S(y)\to D(x,y)))$

谓词逻辑基础：谓词演算

- 设A是以D为论域的谓词公式，如果在关于D的任一解释之下，A的值都为真（或1）时，称公式A是D上的永真公式(重言式)
- 设A是以D为论域的谓词公式，如果在关于D的任一解释之下，A的值都为假（或0）时，称公式A是D上的永假公式(矛盾式，不可满足式)
- 设A是以D为论域的谓词公式，如果在关于D的某个解释之下，A取值为真（或1），称公式A是D上的可满足公式
- 若A→B是永真式，则称A蕴含B，记为A⇒B
- 若A↔B是永真式，则称A与B是等值的，记为A⇔B，并称A⇔B为等值式

谓词逻辑基础：谓词演算

- 在有限个体域$D=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$中消去量词等值式：

（1） $\forall xA(x) \Leftrightarrow A(a_1)\wedge A(a_2)\wedge\dots\wedge A(a_n)$

（2） $\exists xA(x) \Leftrightarrow A(a_1)\vee A(a_2)\vee\dots\vee A(a_n)$

- 量词否定等值式：

(1) $\neg\forall xA(x) \Leftrightarrow \exists x\neg A(x)$

(2) $\neg\exists xA(x) \Leftrightarrow \forall x\neg A(x)$

基本等值式

■ 量词辖域收缩与扩张等值式

(1)$\forall xA(x) \lor B \Leftrightarrow \forall x(A(x) \lor B)$

(2)$\forall xA(x) \land B \Leftrightarrow \forall x(A(x) \land B)$

(3)$\exists xA(x) \lor B \Leftrightarrow \exists x(A(x) \lor B)$

(4)$\exists xA(x) \land B \Leftrightarrow \exists x(A(x) \land B)$

(5)$B \to \forall xA(x) \Leftrightarrow \forall x(B \to A(x))$

(6)$B \to \exists xA(x) \Leftrightarrow \exists x(B \to A(x))$

(7)$\forall xA(x) \to B \Leftrightarrow \exists x(A(x) \to B)$

(8)$\exists xA(x) \to B \Leftrightarrow \forall x(A(x) \to B)$

■ 量词分配等值式

(1)$\exists x(A(x) \lor B(x)) \Leftrightarrow \exists xA(x) \lor \exists xB(x)$

(2)$\forall x(A(x) \land B(x)) \Leftrightarrow \forall xA(x) \land \forall xB(x)$

(3)$\exists x(A(x) \land B(x)) \Rightarrow \exists xA(x) \land \exists xB(x)$

(4)$\forall xA(x) \lor \forall xB(x) \Rightarrow \forall x(A(x) \lor B(x))$

基本等值式

例： 设论域为{1,2},$A(x,y)$:$x+y=xy$, 求$\neg\forall x\exists yA(x,y)$的真值.

$\neg\forall x\exists yA(x,y)\Leftrightarrow \exists x\forall y\neg A(x,y)$

$\Leftrightarrow\forall y\neg A(1,y)\vee\forall y\neg A(2,y)$

$\Leftrightarrow(\neg A(1,1)\wedge\neg A(1,2))\vee(\neg A(2,1)\wedge\neg A(2,2))$

$\Leftrightarrow(T\wedge T)\vee(T\wedge F)\Leftrightarrow T$

主要内容

- 推理的基本概念
- 经典逻辑推理及其数学基础
- 自然演绎推理
- 归结演绎推理
- 与/或形演绎推理
- 本章小结

自然演绎推理

- 自然演绎推理：从一组已知为真的事实出发，直接运用经典逻辑推理规则推出结果的过程。例：鸟会飞，特威蒂是鸟，推出特威蒂会飞

- 自然演绎推理的推理规则：
- 假言推理：P, P→Q ⇒Q （最为基本）

  - 铜是金属；
  - 如果x是金属，则x能导电；

  ➡ 铜能导电

- 拒取式：P→Q,¬Q ⇒¬P

  - 如果下雨，地上会湿；
  - 地上没有湿；

  ➡ 天没有下雨

- 假言三段论：P→Q,Q→R⇒P→R

- 优点：使用逻辑规则证明，过程灵活，表达自然，易于理解；便于嵌入领域知识
- 缺点：推理过程中得到的中间结论一般呈指数形式递增，容易产生组合爆炸

自然演绎推理

- 避免两类错误：肯定后件的错误和否定前件的错误

- 肯定后件的错误：当P→Q为真时，希望通过肯定后件Q为真来推出前件P为真，这是不允许的。因为当P→Q且Q为真时，前件P既可能为真，也可能为假

伽利略在证明哥白尼的日心说时，曾使用了如下推理：

- 如果行星系统是以太阳为中心的，则金星会显示出相位的变化；
- 金星显示出相位的变化；

→ 所以，行星系统是以太阳为中心的；

- 否定前件的错误：当P→Q为真时，希望通过否认前件P为假来推出后件Q为假，这是不允许的。因为当P→Q且P为假时，后件Q既可能为真，也可能为假

- 如果天上下雨，则地上是湿的；
- 天上没有下雨；

→

- 地上不会湿

用自然演绎推理解决问题

- 已知如下事实：
  - 凡是容易的课程小王（Wang）都喜欢；
  - C班的课程都是容易的；
  - ds是C班的一门课程；
- 求证：小王喜欢ds这门课

首先定义谓词：

- EASY（x）：课程 x 是容易的
- LIKE（x，y）：x 喜欢 y
- C (x)：x 是 C 班的一门课程

上述的事实和待求证问题用谓词公式来表示：

- EASY（x）→ LIKE（Wang，X）
- ∀x（C(x) → EASY(x)）
- C (ds)
- LIKE（Wang，ds）

因为：∀x（C(x) → EASY(x)）

所以：C（y） → EASY（y）　（全称固化）

因为：C(ds)，C(y) → EASY(y) ⇒ Easy（ds）

所以：EASY(ds),EASY(x)→ LIKE(Wang，x) ⇒

LIKE（Wang，ds）

即：小王喜欢ds课程

主要内容

- 推理的基本概念
- 经典逻辑推理及其数学基础
- 自然演绎推理
- 归结演绎推理
  - 基本思路
  - 谓词公式化为子句集
  - 海伯伦理论
  - 归结原理
  - 基于归结反演的问题求解
- 与/或形演绎推理
- 本章小结

基本思路

- 自动定理证明是人工智能领域的一个重要研究领域。不仅在许多数学问题需要通过定理证明得以解决，而且很多非数学问题，如医疗诊断、机器人行动规划等，也可以归结为一个定理证明问题
- 定理证明的实质是对前提P和结论Q，证明$P \rightarrow Q$的永真性。要证明一个谓词公式的永真性是很困难的。利用反证法的思想可把关于永真性的证明转化为不可满足性的证明
- 欲证明$P \rightarrow Q$（$\neg P \vee Q$）永真，只要证明其否定式（$P \wedge \neg Q$）不满足就可以了
- 海伯伦（Herbrand）定理为自动定理证明奠定了理论基础
- 鲁滨逊（RObinson）提出的归结原理使机器定理证明成为现实
- 归结（Resolution），也称为消解，消解原理

主要内容

- 推理的基本概念
- 经典逻辑推理及其数学基础
- 自然演绎推理
- 归结演绎推理
  - 基本思路
  - 谓词公式化为子句集
  - 海伯伦理论
  - 归结原理
  - 基于归结反演的问题求解
- 与/或形演绎推理
- 本章小结

AIPKU

文字、子句、空子句和子句集的概念

- 定义：原子谓词公式及其否定统称为文字
- 定义：任何文字的析取式称为子句

  例如：　$P(x) \vee Q(x)$；　$\neg P(x,f(x)) \vee Q(x,g(x))$
- 定义：不含任何文字的子句称为空子句

  注：空子句是永假的，不可满足的
- 定义：由子句构成的集合称为子句集

  注：**约定各子句间的关系是合取关系**，子句集中出现的个体变元均受全称量词的约束

在谓词逻辑中，任何一个谓词公式都可通过应用等价关系及推理规则化成相应的子句集

谓词公式化为子句集步骤

- Step 1：利用下列等价关系消去谓词公式中的“→” “↔”

$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q \quad P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$ （连接词化规律）

例如：公式 $(\forall x)((\forall y)P(x,y) \rightarrow \neg(\forall y)(Q(x,y) \rightarrow R(x,y)))$

经等价变换后得： $(\forall x)(\neg(\forall y)P(x,y) \vee \neg(\forall y)(\neg Q(x,y) \vee R(x,y)))$

- Step 2：利用等价关系把“¬”到紧靠谓词的位置，减小否定的辖域

$\neg(\forall x)P \Leftrightarrow (\exists x)(\neg P)$ （量词转换律）

$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$ （德.摩根律）

经等价变换后得： $(\forall x)((\exists y)\neg P(x,y) \vee (\exists y)(Q(x,y) \wedge \neg R(x,y)))$

- Step 3：变量标准化：重新命名变元名，使不同的量词约束的变元有不同的名字

经等价变换后得： $(\forall x)((\exists y)\neg P(x,y) \vee (\exists z)(Q(x,z) \wedge \neg R(x,z)))$

谓词公式化为子句集步骤

- Step 4：消去存在量词。这里分两种情况：

（1）存在量词不出现在全称量词的辖域内，此时只要用一个新的个体常量替换受该存在量词约束的变元就可以消去存在量词

（2）存在量词位于一个或多个全称量词的辖域内，此时需要用斯柯林（Skolem）函数替换受该存在量词约束的变元，然后才能消去存在量词

$$(\forall x)((\exists y)\neg P(x,y)\vee (\exists z)(Q(x,z)\wedge \neg R(x,z)))$$

上式中，存在量词$(\exists y)$、 $(\exists z)$都位于 $(\forall x)$的辖域内，所以都需要用skolem函数替换，设y和z的skolem函数分别为f(x)和 g(x)，

上式经等价变换后得： $(\forall x)(\neg P(x,f(x))\vee (Q(x,g(x))\wedge \neg R(x,g(x))))$

谓词公式化为子句集步骤

- Step 5：化为前束型，把全称量词全部移到公式的左边

$$(\forall x)(\neg P(x,f(x)) \vee (Q(x,g(x)) \wedge \neg R(x,g(x))))$$

- Step 6：利用等价关系 $P\vee(Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q)\wedge(P \vee R)$ 把公式化为Skolem标准形

skolem标准形为： $(\forall x1)(\forall x2)\ldots(\forall xn)M$， 其中M是子句的合取式，称为skolem标准形的母式。

上式经等价变换后得： $(\forall x)((\neg P(x,f(x)) \vee (Q(x,g(x))) \wedge (\neg P(x,f(x)) \vee \neg R(x,g(x))))$

- Step 7：消去全称量词

由于此时公式中所有变量都是约束的，全称变量不必要，故可消去：

$$(\neg P(x,f(x)) \vee (Q(x,g(x))) \wedge (\neg P(x,f(x)) \vee \neg R(x,g(x)))$$

谓词公式化为子句集步骤

- Step 8：对变元更名，使不同子句中的变元不同名

上式经更名后得到： $(\neg P(x,f(x)) \vee (Q(x,g(x))) \wedge (\neg P(y,f(y)) \vee \neg R(y,g(y)))$

- Step 9：消去合取词，即用子句集合表示

消去合取词后，上式变为下述子句集：

$\neg P(x,f(x)) \vee Q(x,g(x))$, $\neg P(y,f(y)) \vee \neg R(y,g(y))$

谓词公式与相应子句集合的等价性

- 如果谓词公式是不可满足的，则其子句集也一定是不可满足的，反之亦然。两者在不可满足的意义上等价。

- 下述定理保证了它的正确性：

定理：设有为此公式F，其标准形的子句集为S，则F不可满足的充要条件是S不可满足。

主要内容

- 推理的基本概念
- 经典逻辑推理及其数学基础
- 自然演绎推理
- 归结演绎推理
  - 基本思路
  - 谓词公式化为子句集
  - 海伯伦理论
  - 归结原理
  - 基于归结反演的问题求解
- 与/或形演绎推理
- 本章小结

海伯伦理论

- 为了判断一个子句的不可满足性，需要对个体域上的一切解释逐个进行判定，只有当该子句对任何非空的个体域上的任何一个解释都是不可满足的，才能判断该子句不可满足。这几乎是不可实现的。
- 对此，海伯伦构造了一个特殊的域，并证明只要对这个特殊域上的一切解释进行判定，就可得知子句集是否不可满足。这个特殊域称为海伯伦域。
- [定义] 设S为子句集，则按下述方法构造的域H_∞称为海伯伦域，简记为H域。
  - (1) 令H_0是S中所有个体常量的集合，若S中不包含个体常量，则令$H_0=\{a\}$，其中a为任意指定的一个个体常量。
  - (2) 令$H_{i+1}=H_i \cup \{S$中所有n元函数$f(x_1,x_2,\ldots x_n) | x_j(j=1,2\ldots n)$是$H_i$中的元素$\}$, 其中 $i=1,2,\ldots$

H域举例

例1：求子句集$S=\{P(x)\vee Q(x),R(f(y))\}$的 H域。

解：此例中没有个体常量，故任意指定一个为a，则:

$H_0=\{a\}$

$H_1=\{a,f(a)\}$

$H_2=\{a,f(a),f(f(a))\}$

$H_3=\{a,f(a),f(f(f(a)))\}$

……

$H_\infty=\{a,f(a),f(f(f(a)))\dots\}$

例2: 求子句集$S=\{P(a),Q(b),R(f(x))\}$的 H域

解：根据H域的定义：

$H_0=\{a,b\}$

$H_1=\{a,b,f(a),f(b)\}$

$H_2=\{a,b,f(a),f(b),f(f(a)),f(f(b))\}$

H域举例

例3: 求子句集S={P(a),Q(f(x),R(g(y)))的 H域

解：根据H域的定义得到

H_0={a}

H_1={a,f(a),g(a)}

H_2={a,f(a),g(a),f(g(a)),g(f(a)),f(f(a)),g(g(a))}

……

例4: 求子句集S={P(x),Q(y) ∨ R(y)}的 H域

解：由于该子句集中既无个体常量，又无函数，所以可任意指定一个常量a作为个体常量，从而得到 $H_0=H_1=\ldots=H=\{a\}$

子句集在H域上的解释

- 基子句：如果用H域的元素代换子句中的变元，则所得的子句为基子句；
- 基原子：基子句中的谓词称为基原子；
- 原子集：子句集中的所有基原子构成的集合称为原子集。

- 子句集S在H域上的解释就是对S中出现的常量、函数及谓词取值，一次取值就是一个解释。

- [定义] 子句集S在H域上的一个解释I满足下列条件：

（1）在解释I下，常量映射到自身；

（2） S中的任一个n元函数是$H^n \rightarrow H$的映射。即，设$h_1, h_2, \ldots \in H$，则$f(h_1, h_2, \ldots h_n) \in H$

（3） S中的任一个n元谓词是$H^n \rightarrow \{T, F\}$的映射。谓词的真值可以指派为T，也可以指派为F。

例如：设子句集$S=\{P(a), Q(f(x))\}$，它的 H域为$\{a, f(a), f(f(a)), \ldots\}$。

S的原子集为$\{P(a), Q(f(a)), Q(f(f(a))), \ldots\}$， 则S的解释为：

$I_1=\{P(a), Q(f(a)), Q(f(f(a))), \ldots\}$

$I_2=\{P(a), \neg Q(f(a)), Q(f(f(a))), \ldots\}$

……

海伯伦定理

- 一般来说，一个子句集的基原子有无限多个，它在H域上的解释也有无限多个。
- 可以证明，对给定域D上的任一个解释，总能在H域上构造一个解释与它对应，如果D域上的解释能满足子句集S，则在H域上的相应解释也能满足S，由此可推出如下两个定理：
- [定理]　子句集S不可满足的充要条件是 S 对 H 域上的一切解释为假；
- [定理]　　子句集不可满足的充要条件是存在一个有限的不可满足的基子句集S′。该定理称为海伯伦定理。
- 海伯伦定理只从理论上给出了证明子句集不可满足性的可行性及方法，但要在计算机上实现其证明过程是很困难的。
- 1965年鲁滨逊提出了归结原理，这才使机器定理证明变为现实。

主要内容

- 推理的基本概念
- 经典逻辑推理及其数学基础
- 自然演绎推理
- 归结演绎推理
  - 基本思路
  - 谓词公式化为子句集
  - 海伯伦理论
  - 归结原理
  - 基于归结反演的问题求解
- 与/或形演绎推理
- 本章小结

鲁滨逊归结原理

- 归结原理又称为消解原理，是鲁滨逊提出的一种证明子句集不可满足性，从而实现定理证明的一种理论及方法。

- 由谓词公式转化子句集的过程可以看出，在子句集中子句之间是合取关系，其中只要有一个子句不可满足，则子句集就不可满足;

- 空子句是不可满足的，若一个子句集包含空子句集，则这个子句集一定是不可满足的。

- 鲁滨逊归结原理就是基于这一认识提出来的，其基本思想是：

检查子句集S中是否包含空子句，若包含，则S不可满足；若不包含，就在子句集中选择合适的子句进行归结，一旦通过归结能推出空子句，就说明子句集S是不可满足的。

命题逻辑中的归结原理

- [定义]　若P是原子谓词公式，则称P与$\neg$P为互补文字。

- ［定义］设C_1与C_2是子句集中的任意两个子句，如果C_1中的文字L_1与C_2中的文字L_2互补，那么从C_1与C_2中分别消去L_1和L_2，并将两个子句中余下的部分析取，构成一个新子句C_{12}，则称这一过程为归结，称C_{12}为C_1和C_2的归结式，称C_1和C_2为C_{12}的亲本子句。

例1：　设 $C_1 = \neg P \vee Q \vee R$,　$C_2 = \neg Q \vee S$

这里 $L_1=Q$,　$L_2= \neg Q$,　通过归结可得：

$C_{12} = \neg P \vee R \vee S$

例2：　设　$C_1=P$,　$C_2= \neg P$

通过归结可得：

$C_{12}=NIL$

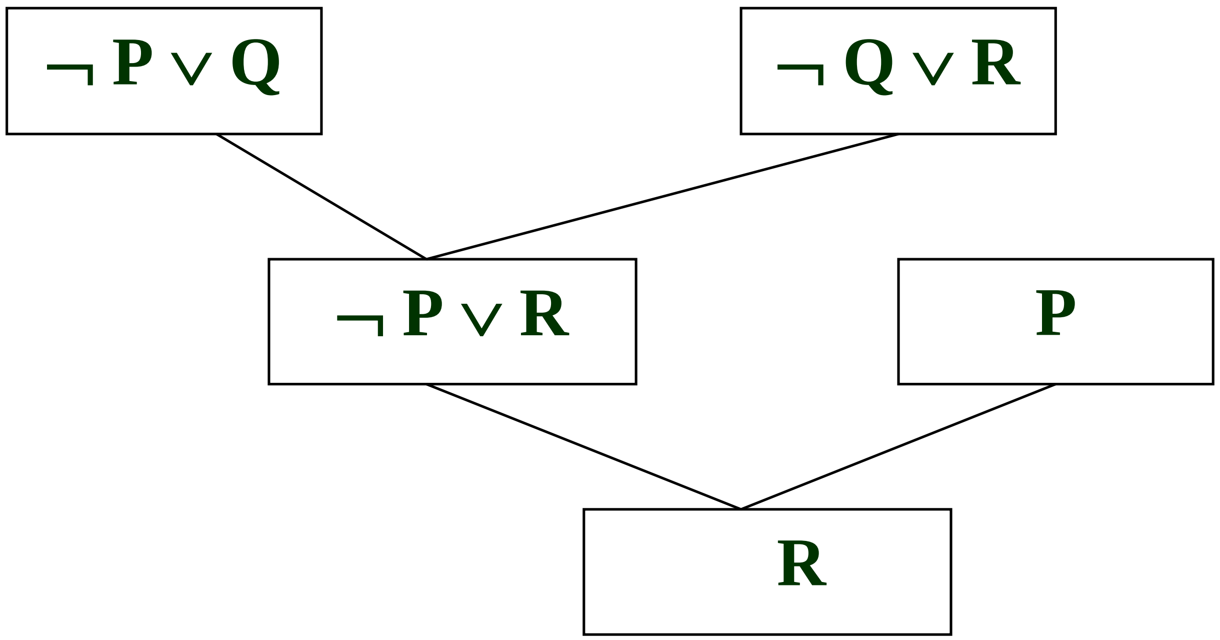
命题逻辑中的归结原理

例3： 设 $C_1 = \neg P \vee Q$, $C_2 = \neg Q \vee R$, $C_3 = P$

首先对C_1与C_2进行归结， 得到： $C_{12} = \neg P \vee R$

然后再对C_{12}与C_3进行归结，得到： $C_{123} = R$

归结可用一棵树直观的表示出来，如上例可用下图表示其归结过程：



命题逻辑中的归结原理

- [定理] 归结式C_{12}是其亲本子句C_1与C_2的逻辑结论。

  这是归结原理中很重要的一个定理，由此可得到如下两个推论：

- [推论] 设C_1与C_2是子句集S中的两个子句，C_{12}是它们的归结式，若用C_{12}代替C_1和C_2后得到新子句集S_1,则由S_1的不可满足性可推出原子句集S的不可满足性，即：

  S_1的不可满足性 ⇔ S的不可满足性。

- [推论] 设C_1与C_2是子句集S中的两个子句，C_{12}是它们的归结式，若把C_{12}加入S中，得到新子句集S_2，则S与S_2在不可满足的意义上是等价的，即：

  S_2的不可满足性 ⇔ S的不可满足性。

- 这两个推论告诉我们：

为要证明子句集S的不可满足性，只要对其中可进行归结的子句进行归结，并把归结式加入子句集S，或者用归结式替换它的亲本子句，然后对新子句集证明不可满足性就可以了。如果经过归结能得到空子句，根据空子句的不可满足性，立即可得到原子句集S是不可满足的结论。这就是用归结原理证明子句集不可满足的基本思想。

谓词逻辑中的归结原理

- 在谓词逻辑中，由于子句中含有变元，所以不像命题逻辑那样可直接消去互补文字，而需要先用最一般合一对变元进行代换，然后才能进行归结。

例：　设由如下两个子句：

$C_1=P(x)\vee Q(x)$　　　　$C_2=\neg P(a)\vee R(y)$

由于$P(x)$与$P(a)$不同，所以C_1与C_2不能直接进行归结，但若用最一般合一

$\sigma=\{a/x\}$

对两个子句分别进行代换：

$C_1\sigma = P(a)\vee Q(a)$

$C_2\sigma = \neg P(a)\vee R(y)$

就可对他们进行归结，消去$P(a)$与$P(a)$，得到如下的归结式：

$Q(a)\vee R(y)$

谓词逻辑中的归结原理

- [定义] 设C_1与C_2是两个没有相同变元的子句，L_1和L_2分别是C_1和C_2中的文字，若σ 是 L_1和$\neg L_2$的最一般合一，则称：

$$C_{12} = (C_1\sigma - \{L_1\sigma\}) \cup (C_2\sigma - \{L_2\sigma\})$$

为C_1和C_2的二元归结式，L_1和L_2称为归结式上的文字。

谓词逻辑中的归结举例

例1： 设 $C_1=P(a)\vee\neg Q(x)\vee R(x)$ $C_2=\neg P(y)\vee Q(b)$

(1) 若选$L_1=P(a)$， $L_2=\neg P(y)$，则 $\sigma=\{a/y\}$ 是 L_1与 $\neg L_2$的最一般合一。

根据[定义]可得：

$$C_{12}=(C_1\sigma-\{L_1\sigma\})\cup(C_2\sigma-\{L_2\sigma\})$$

$$=(\{P(a),\neg Q(x),R(x)\}-\{P(a)\})\cup(\{\neg P(a),Q(b)\}-\{\neg P(a)\})$$

$$=(\{\neg Q(x),R(x)\})\cup(\{Q(b)\})$$

$$=\{\neg Q(x),R(x),Q(b)\}$$

$$=\neg Q(x)\vee R(x)\vee Q(b)$$

(2) 若选$L_1=\neg Q(x)$， $L_2=Q(b)$， $\sigma=\{b/x\}$，则可得：

$$C_{12}=(\{P(a),\neg Q(b),R(b)\}-\{\neg Q(b)\})\cup(\{\neg P(y),Q(b)\}-\{Q(b)\})$$

$$=(\{P(a),R(b)\})\cup(\{\neg P(y)\})$$

$$=\{P(a),R(b),\neg P(y)\}$$

$$=P(a)\vee R(b)\vee\neg P(y)$$

谓词逻辑中的归结举例

例2： 设 $C_1=P(x)\vee Q(a)$， $C_2=\neg P(b)\vee R(x)$

由于C_1与C_2有相同的变元，不符合[定义]的要求。为了进行归结，需修改C_2中变元的名字，令$C_2=\neg P(b)\vee R(y)$。此时 $L_1=P(x)$， $L_2=\neg P(b)$

L_1与L_2的最一般合一 $\sigma=\{b/x\}$。则：

$$C_{12}=(\{P(b),Q(a)\}-\{P(b)\})\cup(\{\neg P(b),R(y)\}-\{\neg P(b)\})$$

$$=\{Q(a),R(y)\}$$

$$=Q(a)\vee R(y)$$

[注意]

1. 如果在参加归结的子句内部含有可合一的文字，则在进行归结之前应对这些文字先进行合一 。

2. 对于谓词逻辑，定理仍然适用，即归结式是它的亲本子句的逻辑结论。用归结式取代它在子句集S中的亲本子句所得的新子句集仍然保持着原子句集S的不可满足性。

3. 对于一阶谓词逻辑，从不可满足的意义上说，归结原理也是完备的。即若子句集是不可满足的，则必然存在一个从该子句集到空子句的归结演绎；若从子句集存在一个到空子句的演绎，则该子句集是不可满足的。

主要内容

- 推理的基本概念
- 经典逻辑推理及其数学基础
- 自然演绎推理
- 归结演绎推理
  - 基本思路
  - 谓词公式化为子句集
  - 海伯伦理论
  - 归结原理
  - 基于归结反演的问题求解
- 与/或形演绎推理
- 本章小结

归结反演

- 归结原理给出了证明子句集不可满足性的方法。
- 如欲证明Q为$P_1,P_2,\dots P_n$的逻辑推论，只需证明 $(P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n) \wedge \neg Q$ 是不可满足的。
- 公式 $(P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n) \wedge \neg Q$的不可满足性与其子句集的不可满足性是等价的。
- 因此我们可用归结原理来进行定理的自动证明。
- 应用归结原理证明定理的过程称为归结反演。设F为已知前提的公式集，Q为目标公式（结论）。
- 用归结反演证明Q为真的步骤是：
  - (1) 否定Q，得到$\neg$Q;
  - (2) 把$\neg$Q并入到公式集F中，得到{F, $\neg$Q}
  - (3) 把公式集{F, $\neg$Q} 化为子句集S;
  - (4) 应用归结原理对子句集S中的子句进行归结，并把每次归结到的归结式都并入S中。如此反复进行，若出现了空子句，则停止归结，此时就证明了Q 为真。

归结反演举例

例1：已知： F_1：$(\forall x)((N(x)\rightarrow GZ(x)\wedge I(x))$ 自然数都是大于零的整数；

F_2：$(\forall x)(I(x)\rightarrow E(x)\vee O(x))$ 所有整数不是偶数就是奇数；

F_3：$(\forall x)(E(x)\rightarrow I(S(x)))$ 偶数除以2是整数；

求证：所有自然数不是奇数就是其一半为整数的数。

证明：

- 首先把要证明的问题用谓词公式表达出来：

  G：$(\forall x)(N(x)\rightarrow O(x)\vee I(S(x)))$

- 把 $F_{1,}F_{2,}F_3$及G化成子句集：

(1)	$\neg N(x)\vee GZ(x)$	F_1
(2)	$\neg N(u)\vee I(u)$	
(3)	$\neg I(y)\vee E(y)\vee O(y)$	F_2
(4)	$\neg E(z)\vee I(S(z))$	F_3
(5)	$N(t)$	$\neg G$
(6)	$\neg O(t)$	
(7)	$\neg I(S(t))$	

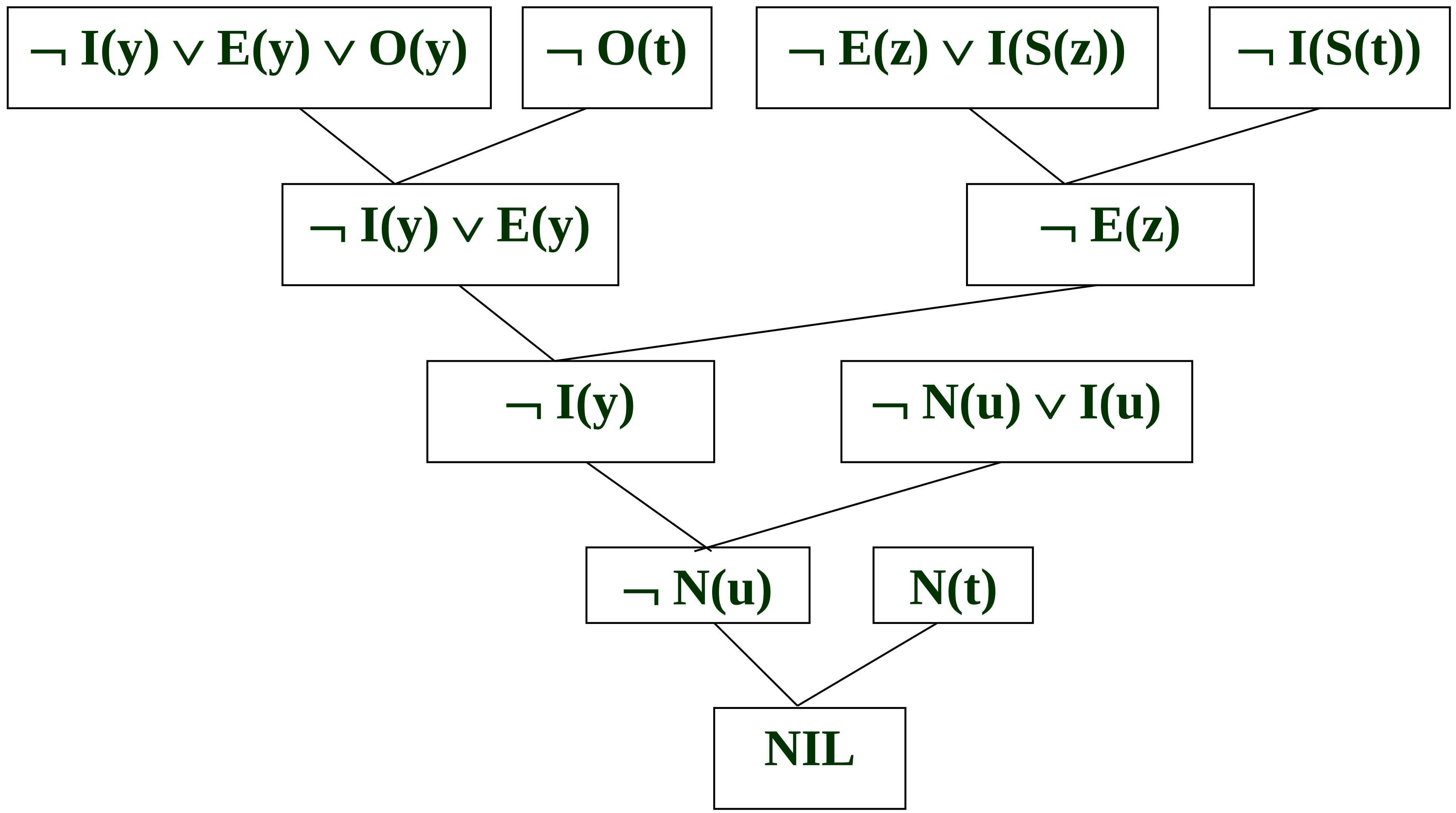
对子句进行归结：

(8)	$\neg I(y)\vee E(y)$	(3)与(6)归结	$\{y/t\}$
(9)	$\neg E(z)$	(4)与(7)归结	$\{z/t\}$
(10)	$\neg I(y)$	(8)与(9)归结	$\{y/z\}$
(11)	$\neg N(u)$	(2)与(10)归结	$\{u/y\}$
(12)	NIL	(5)与(11)归结	$\{u/t\}$

∴所有自然数不是奇数就是其一半为整数的数

归结反演举例

上述过程可用如下归结树表示：



例2：某公司招聘工作人员，A、B、C三人应试，经面试后公司表示如下想法：

(1) 三人中至少录取一人；

(2) 如果录取A而不录取B，则一定录取C；

(3) 如果录取B，则一定录取C；

求证：公司一定录取C。

证明： 设用 P(x) 表示录取 x。

把公司的想法用谓词公式表示如下：

F_1: $P(A) \vee P(B) \vee P(C)$

F_2: $P(A) \wedge \neg P(B) \rightarrow P(C)$

F_3: $P(B) \rightarrow P(C)$

把要求证的问题否定，并用谓词公式表示出来：

G: $\neg P(C)$

把上述公式化成子句集：

(1) $P(A) \vee P(B) \vee P(C)$

(2) $\neg P(A) \vee P(B) \vee P(C)$

(3) $\neg P(B) \vee P(C)$

(4) $\neg P(C)$

应用归结原理进行归结：

(5) $P(B) \vee P(C)$ (1)与(2)归结

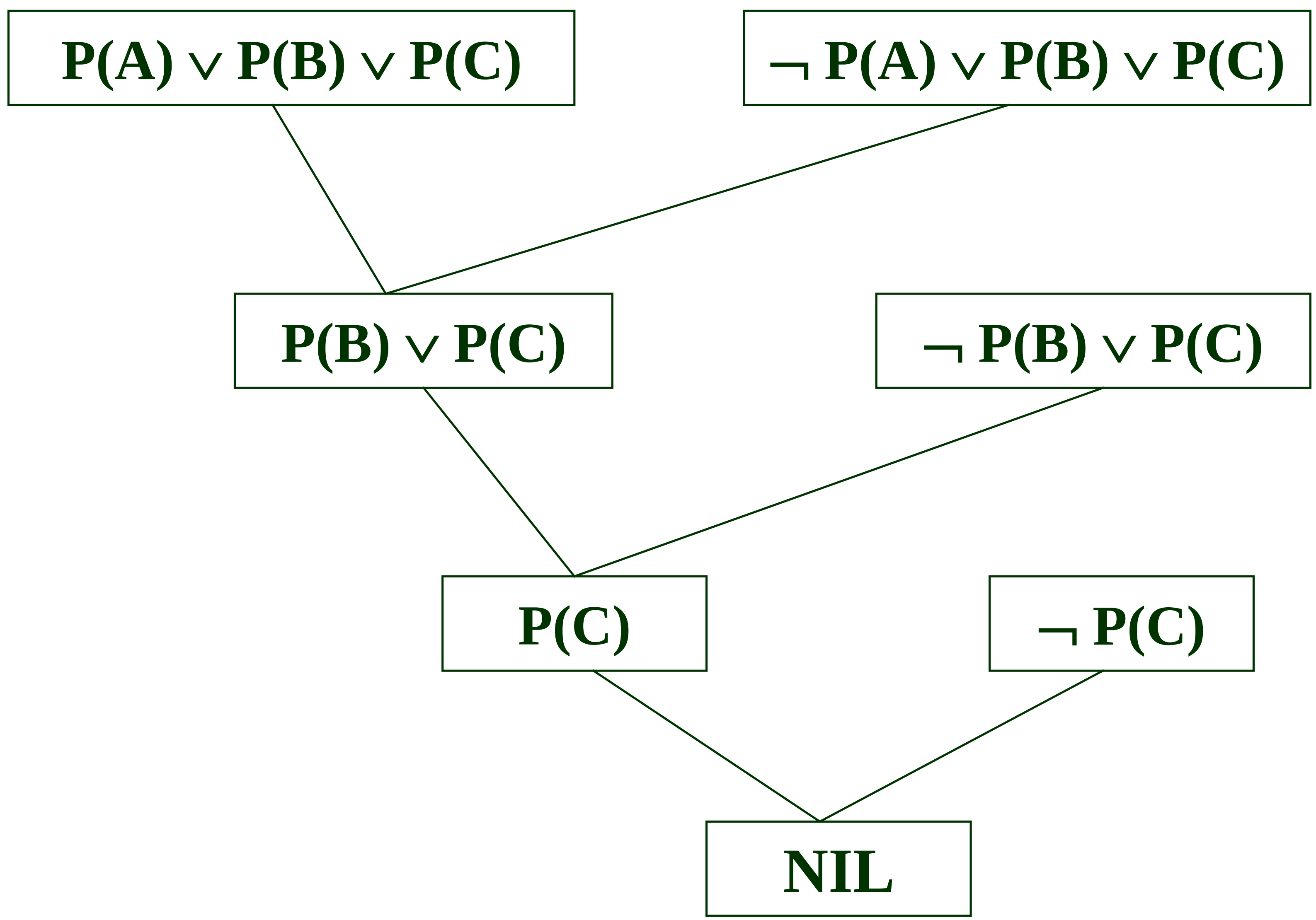
(6) $P(C)$ (3)与(5)归结

(7) NIL (4)与(6)归结

∴ 公司一定录取C。

归结反演举例

上述过程可用如下归结树表示：



应用归结原理求取问题的答案

- 归结原理除了可用于定理证明外，还可用来求取问题的答案，其思想和定理证明类似，求解的步骤如下：

Ⅰ. 把已知前提用谓词公式表示出来，并且化为相应的子句集，设该子句集的名字为S；

Ⅱ. 把待求解的问题也用谓词公式表示出来，然后把它否定，并与谓词ANSWER构成析取式，（ANSWER是一个为求解问题而专设的谓词，其变元必须与问题公式的变元一致。）；

Ⅲ. 把此析取式化为子句集，并且把该子句集并入到子句集S中，得到子句集S’；

Ⅳ. 对S’应用归结原理进行归结；

Ⅴ. 若得到归结式ANSWER，则答案就在ANSWER中。

应用归结原理求取实际问题举例

例1：已知：

F_1：王（Wang）先生是小李（Li）的老师；

F_2：小李与小张（Zhang）是同班同学；

F_3：如果 x与 y 是同班同学，则 x 的老师也是 y 的老师。

求：小张的老师是谁？

解：首先定义谓词：

$T(x, y)$：x 是 y 的老师；

$C(x, y)$：x 与 y 是同班同学。

把已知前提及待求解的问题表示成谓词公式：

F_1：$T(Wang, Li)$

F_2：$C(Li, Zhang)$

F_3：$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(C(x, y)\wedge T(z, x)\rightarrow T(z, y))$

G：$\neg(\exists x)T(x, Zhang)\vee ANSWER(x)$

把上述公式化为子句集：

(1) $T(Wang, Li)$

(2) $C(Li, Zhang)$

(3) $\neg C(x, y)\vee\neg T(z, x)\vee T(z, y)$

(4) $\neg T(u, Zhang)\vee ANSWER(u)$

用归结原理进行归结：

(5) $\neg C(Li, y) \vee T(Wang, y)$

(1)与(3)归结

(6) $\neg C(Li, Zhang) \vee ANSWER(Wang)$

(4)与(5)归结

(7) ANSWER(Wang)

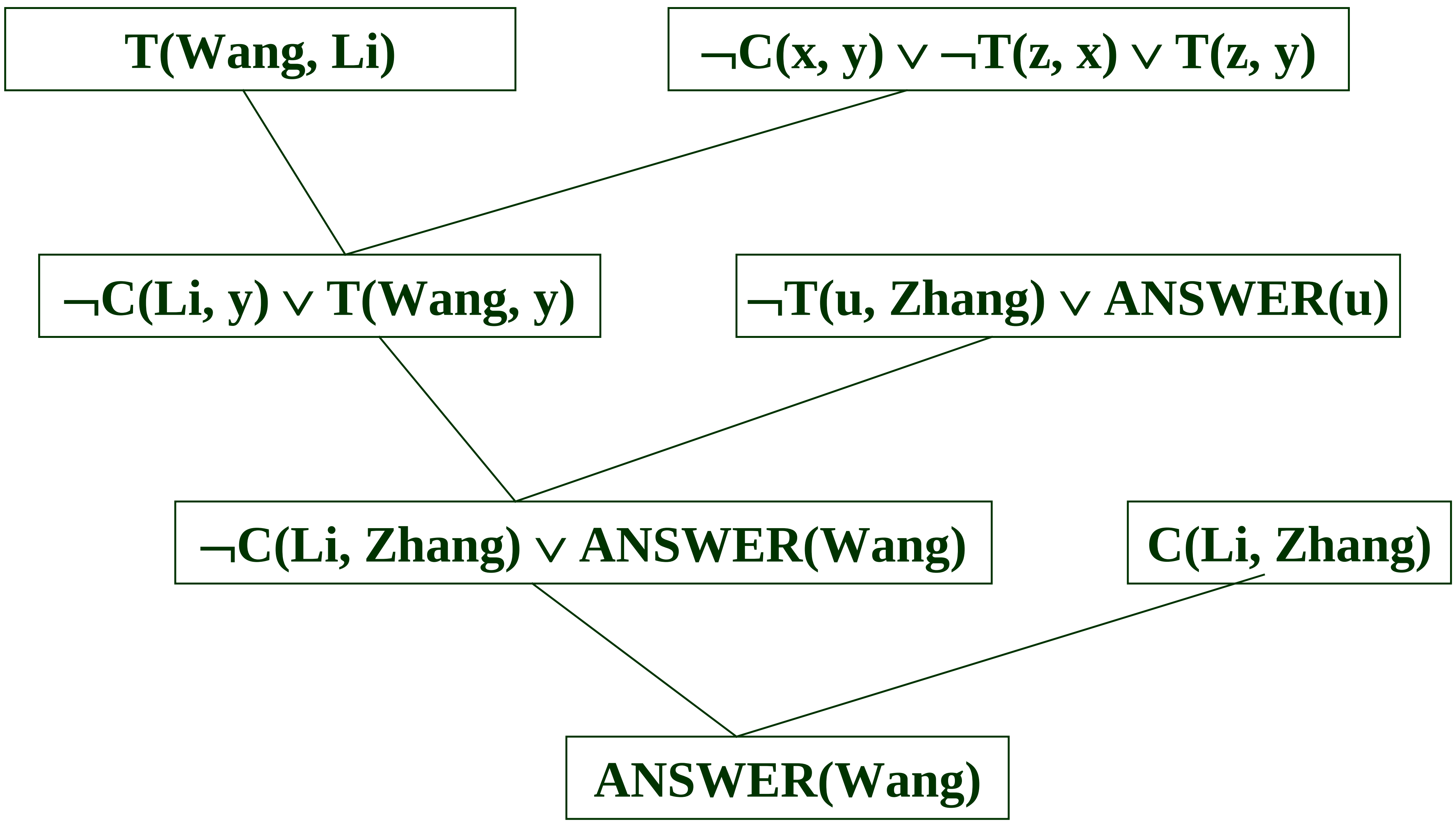
(2)与(6)归结

由**ANSWER(Wang)** 得知，

小张的老师是王老师。

应用归结原理求取实际问题举例

上述过程可用归结树表示：



应用归结原理求取实际问题举例

例2：设A, B, C三人中有人从不说真话，也有人从不说假话，某人向着三人分别提出一个问题：谁是说谎者？A答：“B和C都是说谎者“；B答：“A和C都是说谎者“；C答：A和B至少有一个是说谎者“。求谁是老实人，谁是说谎者?

解：设用T(x)表示x说真话。

如果A说的是真话，则有 $T(A) \rightarrow \neg T(B) \wedge \neg T(C)$

如果A说的是假话，则有 $\neg T(A) \rightarrow T(B) \vee T(C)$

如果B说的是真话，则有 $T(B) \rightarrow \neg T(A) \wedge \neg T(C)$

如果B说的是假话，则有 $\neg T(B) \rightarrow T(A) \vee T(C)$

如果C说的是真话，则有 $T(C) \rightarrow \neg T(A) \vee \neg T(B)$

如果C说的是假话，则有 $\neg T(C) \rightarrow T(A) \wedge T(B)$

应用归结原理求取实际问题举例

把上面这些公式化成子句集，得到 S

(1) $\neg T(A) \vee \neg T(B)$

(2) $\neg T(A) \vee \neg T(C)$

(3) $T(A) \vee T(B) \vee T(C)$

(4) $\neg T(B) \vee \neg T(C)$

(5) $\neg T(C) \vee \neg T(A) \vee \neg T(B)$

(6) $T(C) \vee T(A)$

(7) $T(C) \vee T(B)$

下面首先证明谁是老实人. 把T(x) ANSWER(x)并入S得到S_1, 即S_1比S多如下一个子句：

(8) $\neg T(x) \vee ANSWER(x)$

应用归结原理对S_1进行归结：

(9) $\neg T(A) \vee T(C)$	(1)和(7)进行归结
(10) $T(C)$	(6)和(9)进行归结
(11) $ANSWER(C)$	(8)和(10)进行归结

C是老实人。

应用归结原理求取实际问题举例

在此题中，无论如何对S_1进行归结，都推不出ANSWER(B)与ANSWER(A)。

下面来证明A与B不是老实人：

设A不是老实人，则有T(A)，把它否定并入S中，得到子句集S_2，即子句集S_2

比S多如下一个子句：

(8)　$\neg(\neg T(A))$，即T(A)

应用归结原理对S_2进行归结：

(9)　$\neg T(A) \vee T(C)$　　(1)和(7)进行归结

(10)　$\neg T(A)$　　(2)和(9)进行归结

(11)　NIL　　(8)和(10)进行归结

归结策略

- 对子句集进行归结时，关键的一步是从子句集找出可进行归结的一对子句。由于不知道哪两个子句可以进行归结，更不知道通过哪些子句对的归结可以尽快得到空子句。因而必须对子句集中的所有子句逐个的进行比较，对任何一对可归结的字句对都进行归结，这样不仅要耗费很多时间，而且还会因为归结出了许多无用的归结式而多占用了许多存储空间。造成了时空的浪费，降低了效率。为解决这些问题，人们研究出了许多种归结策略。

- 这些归结策略大致可分为两大类：
  - 删除策略：通过删除某些无用的子句来缩小归结的范围；
  - 限制策略：通过对参加归结的子句进行种种限制，尽可能减小归结的盲目性，使其尽快的归结出空子句。

归结的一般过程

- 设有子句集 $S=\{C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4\}$，其中$C_1, C_2, C_3, C_4$是S中的子句。计算机对此子句集进行归结的一般过程是：
  - 从子句C_1开始，逐个与C_2, C_3, C_4进行比较，看哪两个子句可进行归结。若能找到，就求出归结式。然后用C_2与C_3，C_4进行比较，凡可归结的都进行归，最后用C_3与C_4比较，若能归结也对他们进行归结。经过这一轮的比较和归结后，就会得到一组归结式，称为第一级归结式。
  - 再从C_1开始，用S中的子句分别与第一级归结式中的子句逐个地进行比较、归结，这样又会得到一组归结式，称为第二级归结式。
  - 仍然从C_1开始，用S中的子句及第一级归结式中的子句逐个地与第二级归结式中的子句进行比较，得到第三级归结式。
  - ……
  - 如此继续，直到出现了空子句或者不能再进行归结时为止。只要子句是不可满足的，上述归结过程一定会归结出空子句而终止。

归结过程举例

例：设有子句集 $S=\{P, \neg R, \neg P\vee Q, \neg Q\vee R\}$ 归结过程为：

S：	(1) P		
	(2) $\neg R$		
	(3) $\neg P \vee Q$		
	(4) $\neg Q \vee R$		
S_1：	(5) Q	(1)与(3)进行归结	第一级归结式
	(6) $\neg Q$	(2)与(4)进行归结	
	(7) $\neg P \vee R$	(3)与(4)进行归结	
S_2：	(8) R	(1)与(7)进行归结	第二级归结式
	(9) $\neg P$	(2)与(7)进行归结	
	(10) $\neg P$	(3)与(6)进行归结	
	(11) R	(4)与(5)进行归结	
S_3：	(12) NIL	(1)与(9)进行归结	第三级归结式

由本例看出：按一般归结过程进行归结时，归结出了许多无用子句，而且有些归结式还是重复的。

删除策略

- 删除策略的提出：如果在归结时能把子句集中的无用子句删除掉，这样就会缩小寻找范围，减少比较次数，从而提高归结的效率。
  - 纯文字删除法
  - 纯文字——如果某文字L在子句集中不存在可与之互补的文字 $\neg$L,则称该文字为纯文字。
  - 在归结时纯文字不可能被消去，因而用包含它的子句进行归结时不可能得到空子句，即这样的子句对归结是无意义的，所以可把它所在的子句从子句集中删去，这样不会影响子句集的可满足性。

例如，设有子句集： $S=\{P\vee Q\vee R,\ \neg Q\vee R,\ Q,\ \neg R\}$

其中，P 是纯文字，因此可将子句 $P\vee Q\vee R$ 从 S中删去。

删除策略

- 重言式删除法
  - 重言式——如果一个子句同时包含互补文字对，则称该子句为重言式。

例如：$P(x) \vee \neg P(x)$ ，　$P(x) \vee Q(x) \vee \neg P(x)$

重言式是真值为真的子句。对于一个子句集来说，不管增加或者删去一个真值为真的子句都不会影响它的不可满足性，因而可从子句集中删去重言式。

- 包孕删除法
  - 包孕——设有子句C_1和C_2，如果存在一个代换σ，使得$C_1\sigma \subseteq C_2\sigma$，则称$C_1$包孕于 C_2。

例如：　$P(x)$　包孕于　$P(y) \vee Q(z)$　　$\sigma = \{y/x\}$

$P(x)$　包孕于　$P(a)$　　$\sigma = \{a/x\}$

$P(x) \vee Q(a)$　包孕于　$P(f(a)) \vee Q(a) \vee R(y)$　　$\sigma = \{ f(a)/x \}$

限制策略

■ 支持集策略

支持集策略是沃斯(Wos)等人在1965年提出的一种归结策略。

支持集策略:

对参加归结的子句作出如下限制：每一次归结时，亲本子句至少应有一个是由目标公式的否定所得到的子句，或者是他们的后裔。

可以证明，支持集策略是完备的，即若子句集是不可满足的，则由支持集策略一定可以归结出空子句。

限制策略

例：设有子句集 $S=\{\neg I(x)\vee R(x),\ I(a),\ \neg R(y)\vee\neg L(y),\ L(a)\}$

其中 $\neg I(x)\vee R(x)$ 是目标公式否定后得到的子句。

用支持集策略进行归结的过程是：

S:	(1)	$\neg I(x)\vee R(x)$	
	(2)	$I(a)$	
	(3)	$\neg R(y)\vee\neg L(y)$	
	(4)	$L(a)$	
S_1:	(5)	$R(a)$	(1)与 (2)进行归结
	(6)	$\neg I(x)\vee\neg L(x)$	(1)与 (3)进行归结
S_2:	(7)	$\neg L(a)$	(2)与 (6)进行归结
	(8)	$\neg L(a)$	(3)与 (5)进行归结
	(9)	$\neg I(a)$	(4)与 (6)进行归结
S_3:	(10)	NIL	(2)与 (9)进行归结

(2)与 (3)， (2)与(4)， (3)与(4) 都不参与归结。

限制策略

■ 线性输入策略

参加归结的两个子句必须至少有一个是初始子句集中的子句。所谓初始子句集是指初始时要求进行归结的那个子句集。例如在归结反演中，初始子句集就是由已知前提及结论的否定化来的子句集。

■ 单文字子句策略

如果一个子句只包含一个文字，则称它为单文字子句。

单文字子句策略要求参加归结的两个子句必须至少有一个是单文字子句。

■ 祖先过滤形策略

该策略与线性输入策略比较相似，但放宽了限制。当对两个子句C_1和C_2进行归结，只要他们满足下面两个条件的一个就可进行归结：

(1) C_1和C_2中至少有一个是初始子句集中的子句；

(2) 如果两个都不是初始子句集中的子句，则一个应是另一个的祖先。所谓一个子句是（例如C_1）另一个子句(例如C_2)的祖先是指是C_2由C_1与别的子句归结后得到的归结式。

归纳演绎推理小结

- 归纳演绎推理是在自动证明领域影响较大的一种推理方法。
- 优点：比较简单； 便于在计算机上实现。 $\neg\vee$
- 缺点： 主要因为它要求将逻辑公式转换为子句集，因而带来一些问题：
  - 不便于阅读和理解

    $(\forall x)(Bird(x) \rightarrow Canfly(x))$ “鸟能飞”

    用子句表示 $\neg Bird(x) \vee Canfly(x)$ 则不好理解。
  - 在转化成子句的过程中有可能丢失一些重要的控制信息 。

主要内容

- 推理的基本概念
- 经典逻辑推理及其数学基础
- 自然演绎推理
- 归结演绎推理
- 与/或形演绎推理
- 本章小结

与/或形演绎推理

- 在前述的归结演绎推理中存在以下问题：

（1）将所有表达式转为子句形式，虽然逻辑上等价，但是变换导致丧失了有用的信息（如$P \rightarrow Q$被 $\neg P \vee Q$ 取代）

（2）转换表达式为子句时，降低了求解效率

- 在与/或形演绎推理中：

（1）尽量采用表达式原来的形式

（2）将有关问题的知识和信息分为规则（由包含蕴含形式的表达式表示）和事实（由无蕴含形式的与/或形式表示）

与/或形正向演绎推理(FR推理)

- 从已知事实出发，正向地使用F规则（蕴含式）进行演绎推理，直至得到某个目标公式的一个终止条件为止
- 对已知事实、F规则及目标公式的表示形式有要求
- 1、事实表达式的与/或形变化及其树形表示：为无蕴含（符号“→”）的任意与/或形式。具体步骤如下：

（1）利用等价公式，消去公式中的蕴含符号“ →”

（2）利用德·摩根律及量词转换律把“¬”移到靠近谓词的位置

与/或形正向演绎推理(FR推理)

（3）变量标准化：利用等价公即重新命名变元名，使不同量词约束的变元有不同的名字

（4）消去存在量词

（5）将公式化为前束形

（6）消去全称量词

（7）重新命名变量

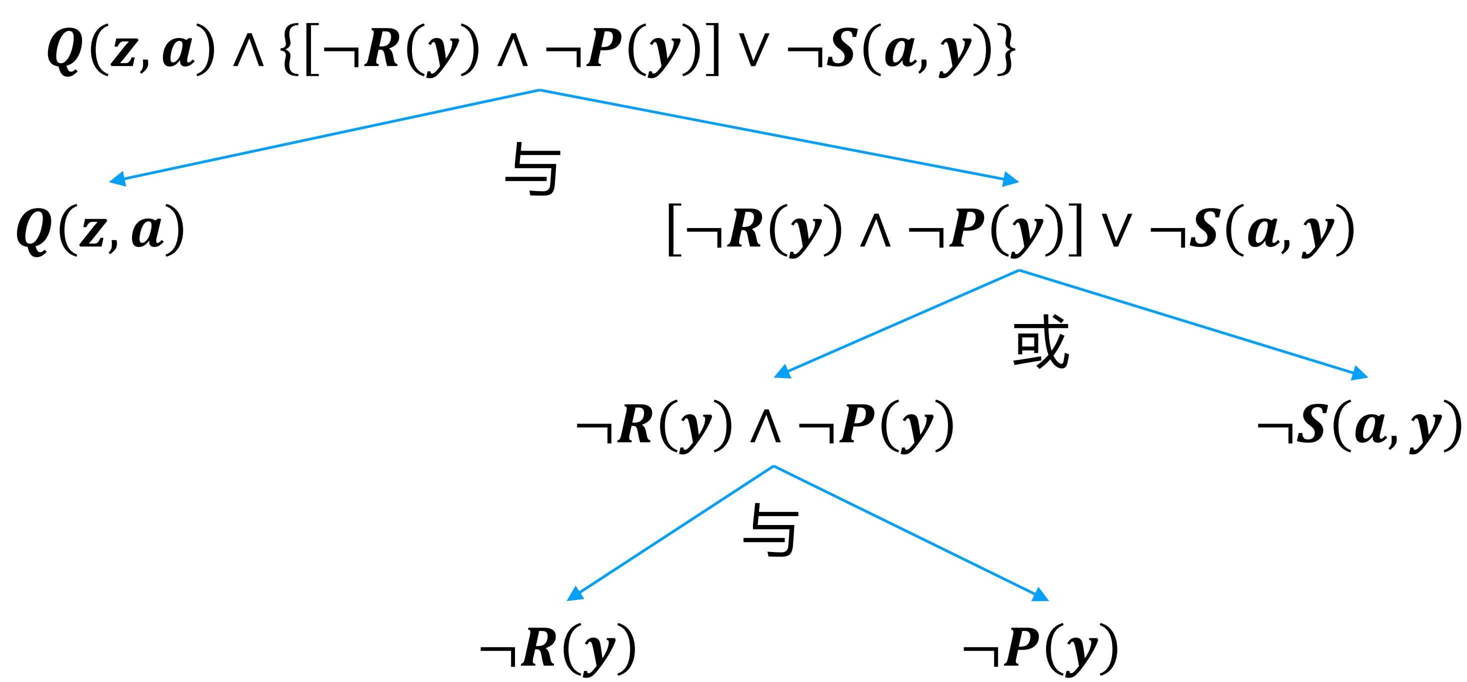
与/或形正向演绎推理(FR推理)

例：$(\exists x)(\forall y)\{Q(y,x) \wedge \neg[(\mathrm{R}(y) \vee P(y)) \wedge S(x,y)]\}$

按照上述步骤进行转化得到与/或形：

$$Q(z,a) \wedge \{[\neg R(y) \wedge \neg P(y)] \vee \neg S(a,y)\}$$

用树来进行表示：



与/或形正向演绎推理(FR推理)

- 2、F规则表示形式：L→ W

（1）L为单文字，W为与/或形

（2）L和W中的所有变量都是全称量词量化的，默认的全称量词作用于整个蕴含式

（3）各条规则中的变量各不相同，且规则中的变量与事实表达式中的变量也不相同

（4）规则作用于叶节点，一个节点可应用多个规则

与/或形正向演绎推理(FR推理)

例：$(\forall x)\{(\exists y)(\forall z)P(x,y,z) \rightarrow (\forall u)Q(x,u)\}$

转化：(1)消去→

$$(\forall x)\{\neg(\exists y)(\forall z)P(x,y,z) \vee (\forall u)Q(x,u)\}$$

(2)移动¬到紧靠谓词的位置

$$(\forall x)\{(\forall y)(\exists z)\neg P(x,y,z) \vee (\forall u)Q(x,u)\}$$

(3)消去存在量词∃

$$(\forall x)\{(\forall y)[\neg P\big(x,y,f(x,y)\big)] \vee (\forall u)Q(x,u)\}$$

(4)化为前束型，并消去∀

$$\neg P\big(x,y,f(x,y)\big) \vee Q(x,u)$$

(5) $P\big(x,y,f(x,y)\big) \rightarrow Q(x,u)$

与/或形正向演绎推理(FR推理)

■ 3、目标公式的表示形式

（1）为文字的析取形式

（2）当一个目标文字和与/或图中的一个文字匹配时，该目标文字和与/或图中的文字用匹配弧“⇒”相连

（3）表示目标文字的节点称为目标节点

（4）当推理产生的与/或图包括一个在目标节点上结束的解图时，系统便成功结束

与/或形逆向演绎推理(BR推理)

- 从待证明的问题（目标）出发，通过逆向地使用蕴含式（B规则）进行演绎推理，直至得到包含已知事实的终止条件为止

- 1、目标表达式：为无蕴含（符号“→”）的任意与/或形式。注意：

（1）其转换过程与正向演绎推理中对已知事实的转换相似

（2）用Skolem函数替换由全称量词约束的相关变元，并消去全称量词

（3）消去存在量词

（4）目标表达式中尚存的变量都认为是存在量词量化的变量

（5）同一变量名不出现在不同的主要析取式中

与/或形逆向演绎推理(BR推理)

- 2、B规则表示形式：W→L

（1）L为单文字，W为与/或形

（2）若给定的表达式不满足B规则，需要转换（类似F规则中的转换）　例：$W \rightarrow L_1 \wedge L_2$ 可转换为：$W \rightarrow L_1$ 和 $W \rightarrow L_2$

- 3、已知事实的表示形式

要求已知事实是文字的合取式，并且其作为结束条件

主要内容

- 推理的基本概念
- 经典逻辑推理及其数学基础
- 自然演绎推理
- 归结演绎推理
- 与/或形演绎推理
- 本章小结

本章小结

- 目的：学习运用知识进行推理，求解问题 。
- 介绍了推理相关的知识：如推理方式及分类、推理的控制策略、模式匹配、冲突消解策略等。
- 介绍了谓词、谓词公式、谓词演算方法；
- 重点介绍了经典逻辑推理的方法。包括：自然演绎推理、归结演绎推理和与/或形演绎推理。

作业

1. 请用归结原理证明G是F1、F2和F3的逻辑结论。

F1： $(\forall x)\ (R(x) \rightarrow L(x))$

F2： $(\forall y)\ (D(y) \rightarrow L(y))$

F3： $(\exists z)\ (D(z) \wedge I(z))$

G： $(\exists w)\ (I(w) \rightarrow \neg R(w))$

作业

2、张某被盗，公安局派出5名侦查员：A、B、C、D、E。研究案情时，

A说：″ 赵和钱中至少有1人作案 “；

B说：″ 钱和孙中至少有1人作案 “；

C说：″ 孙和李中至少有一人作案″ ；

D说： “赵和孙中至少有1人与此案无关″ ；

E说： “钱和李中至少有1人与此案无关″ 。

如果5个侦查员的话都是可信的，试用归结原理推理出谁是盗窃犯。

谢谢大家！

·AIPKU·

人工智能引论●第十二课

主讲人：童云海

2019年4月22日