单元6.3 无向图的连通性

第二编 图论　第七章 图

7.3 无向图的连通性

7.5 有向图的连通性

内容提要

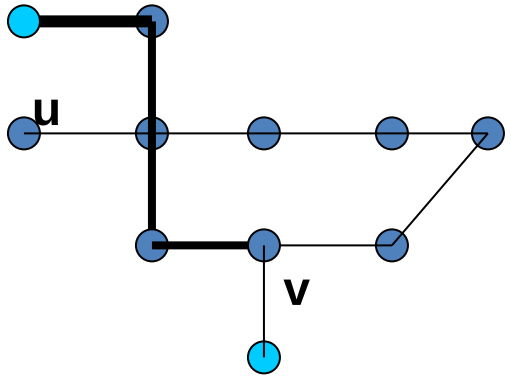
- 连通, 连通分支, 连通分支数
- 二部图 ⇔ 无奇圈
- 强连通(双向),单向连通,弱连通

连通

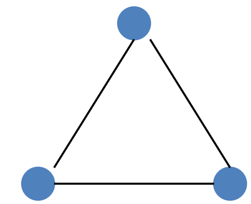
- 无向图G=<V,E>, u~v $\Leftrightarrow$ u与v之间有通路, 规定u~u
- 连通关系~是等价关系
  - 自反: u~u
  - 对称: u~v $\Rightarrow$ v~u
  - 传递: u~v $\wedge$ v~w $\Rightarrow$ u~w
- 连通分支: $G[V_i]$, $(i=1,\ldots,k)$
  - 设 $V/\sim = \{ V_i \mid i=1,\ldots,k \}$
  - 连通分支数: $p(G) = |V/\sim| = k$
- 连通图: p(G)=1; 非连通图(分离图): p(G)>1

短程线(测地线)

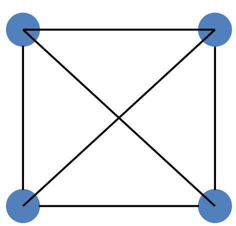
u,v之间长度最短的通路



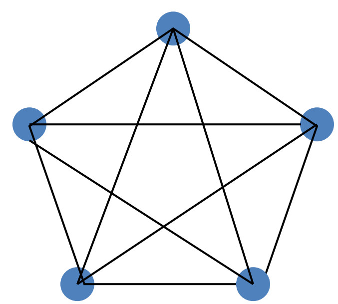
距离、直径



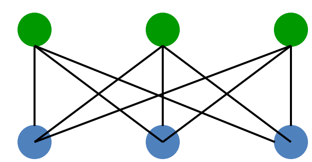
- 距离：$d_G(u,v)$ = u,v之间短程线的长度(或∞)
- 直径：$d(G) = \max\{ d_G(u,v) \mid u,v\in V(G) \}$
- 例：$d(K_n)=1(n\ge2)$, $d(C_n)=\lfloor n/2\rfloor$, $d(N_1)=0$, $d(N_n)=\infty\ (n\ge2)$



K_4



K_5



$K_{3,3}$

距离函数

- 非负性：$d(u,v) \geq 0$,

  $d(u,v)=0 \Leftrightarrow u=v$
- 对称性：$d(u,v) = d(v,u)$
- Δ不等式：$d(u,v) + d(v,w) \geq d(u,w)$
- 任何函数只要满足上述三条性质，就可以当作距离函数使用

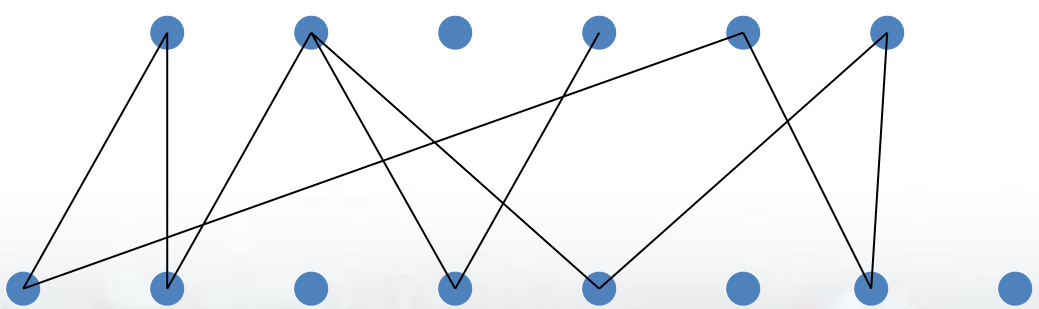
定理7.8

- 定理7.8 G是二部图 $\Leftrightarrow$ G中无奇圈
- 证明: ($\Rightarrow$) 设$G=(V_1,V_2;E)$,

  设$C=v_1v_2\ldots v_{l-1}\, v_lv_1$是G中的任意圈, 设$v_1\in V_1$, 则

  $v_3,v_5,\ldots,v_{l-1}\in V_1$, $v_2,v_4,\ldots,v_l\in V_2$,

  于是$l=|C|$是偶数, C是偶圈.

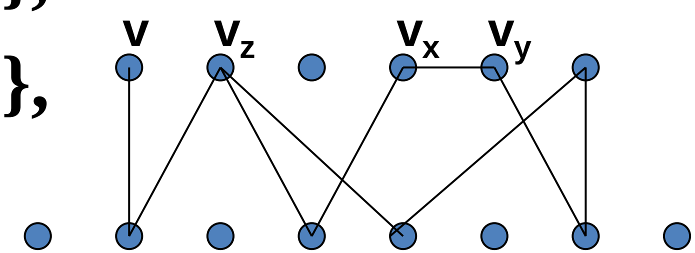


定理7.8

- 证: $(\Leftarrow)$ 设G连通(否则对每个连通分支进行讨论), 设$v\in V(G)$, 令

  V_1={ $u\in V(G)$ | $d(u,v)$为偶数 },

  V_2={ $u\in V(G)$ | $d(u,v)$为奇数 },

  则 $V_1\cup V_2=V(G)$, $V_1\cap V_2=\varnothing$.

  下证 $E(G)\subseteq V_1\&V_2$.

  (反证)若存在$e=(v_x,v_y)$, $v_x,v_y\in V_1$, 设Γ_{vx}和Γ_{vy}是v到v_x和v_y的短程线. $|\Gamma_{vx}|$和$|\Gamma_{vy}|$都是偶数.设v_z是Γ_{vx}与Γ_{vy}的最后一个公共点, 若$v_z\in V_1$, 则$|\Gamma_{zx}|$和$|\Gamma_{zy}|$都是偶数;若$v_z\in V_2$, 则$|\Gamma_{zx}|$和$|\Gamma_{zy}|$都是奇数. 于是$\Gamma_{zx}\cup(v_x,v_y)\cup\Gamma_{zx}$是G中奇圈, 矛盾!

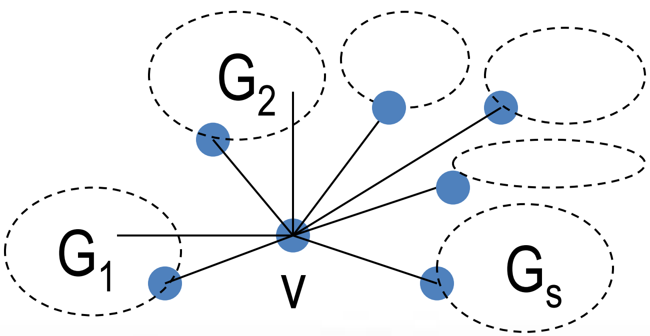
定理7.9

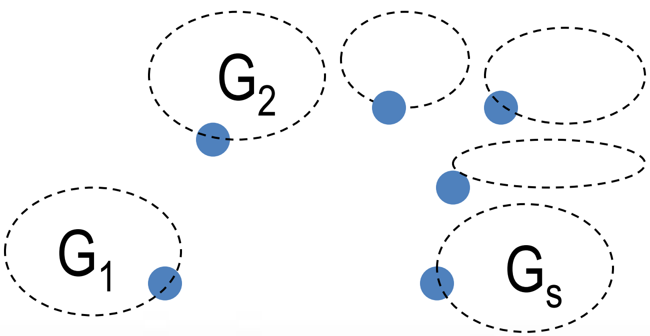
定理7.9　若无向图G是连通的, 则G的边数$m \geq n-1$

证明: (对n归纳) 不妨设G是简单图.

(1) $G=N_1$: $n=1$, $m=0$. 

(2) 设$n \leq k$时命题成立,下证$n=k+1$时也成立.





定理7.9证明

- $\forall v \in V(G)$, 设$p(G-v)=s$, 则$d_G(v) \geq s$.

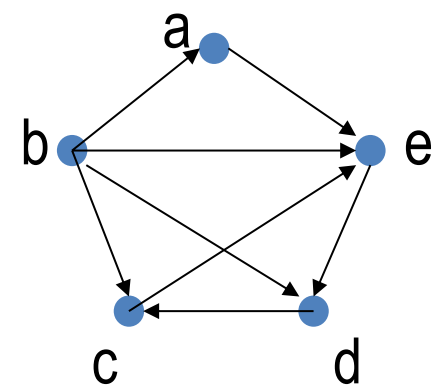
  对G-v的连通分支$G_1,G_2,\ldots,G_s$使用归纳假设,设
  $|V(G_i)|=n_i$, $|E(G_i)|=m_i$,则

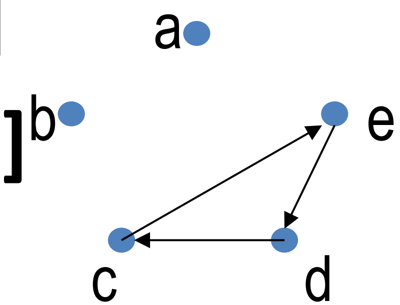
  $$m = m_1+m_2+\ldots+m_s+d_G(v)$$
  $$\geq (n_1-1)+(n_2-1)+\ldots+(n_s-1)+s$$
  $$= n_1+n_2+\ldots+n_s = n-1. \quad \#$$

(双向)可达

- 有向图D=<V,E>, u→v ⇔ 从u到v有(有向)通路
  - 规定u→u，可达关系是自反, 传递的
- 有向图D=<V,E>, u↔v ⇔ u→v ∧ v→u
  - 双向可达关系是等价关系
  - 其等价类的导出子图称为强连通分支
- 例: b→a→e→d→c, c→e→d, c↔e↔d

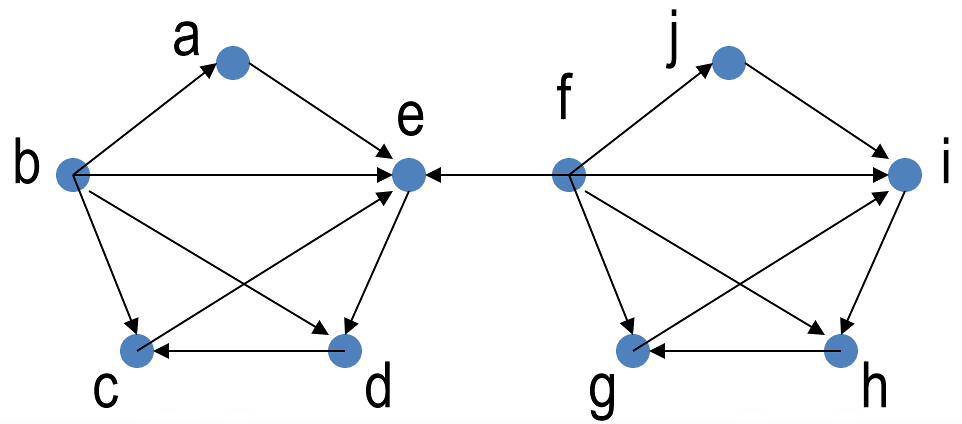
  强连通分支: G[{a}],G[{b}],G[{c,e,d}]





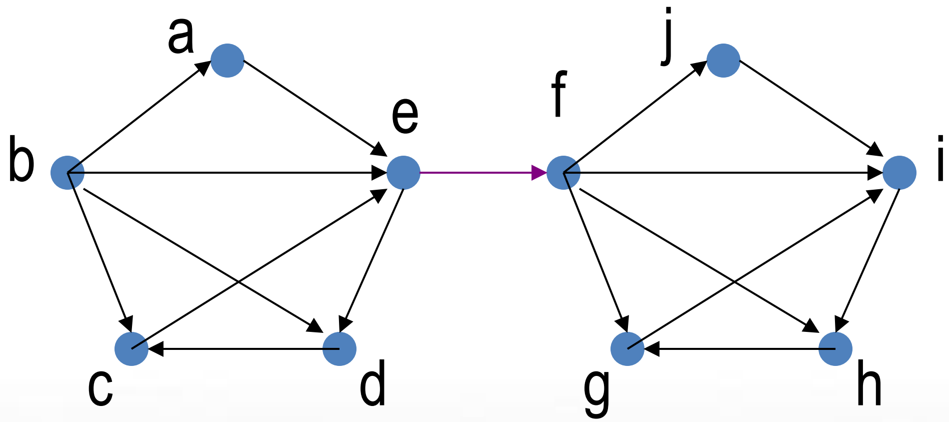
弱连通

- 有向图的基图是连通图

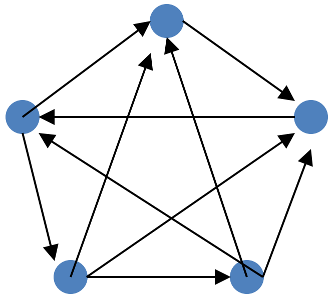


单向连通

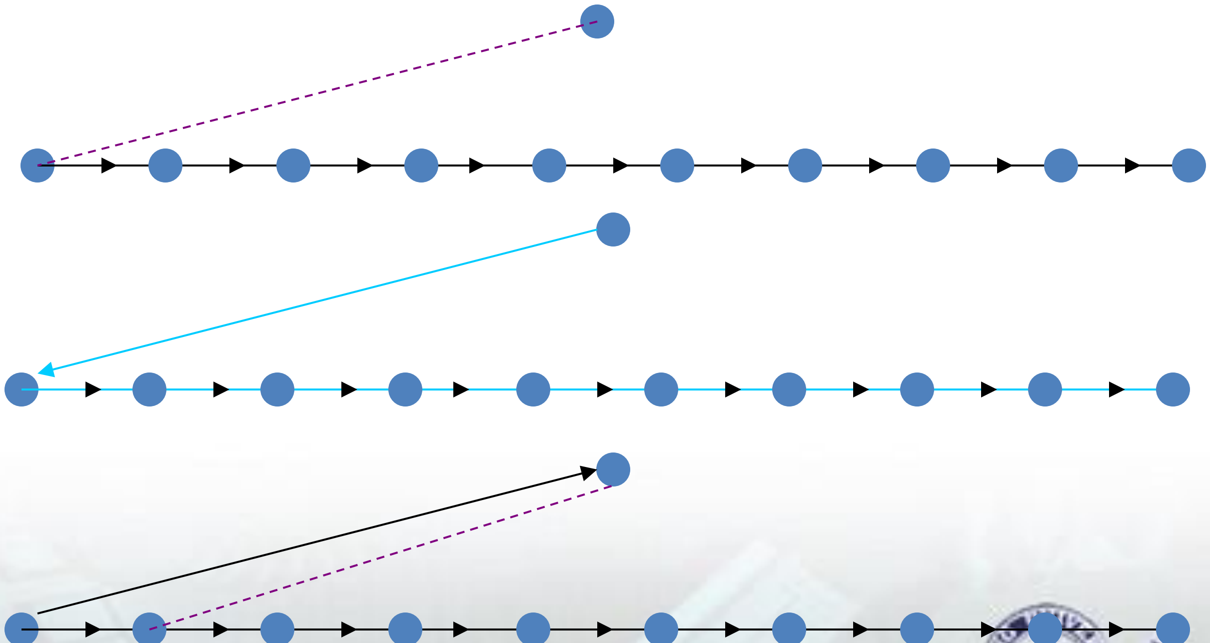
- 有向图的任何一对顶点之间至少单向可达



命题

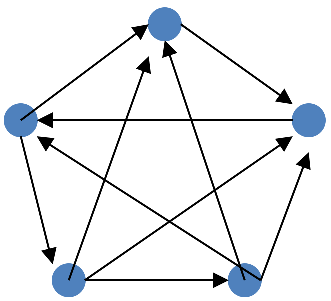


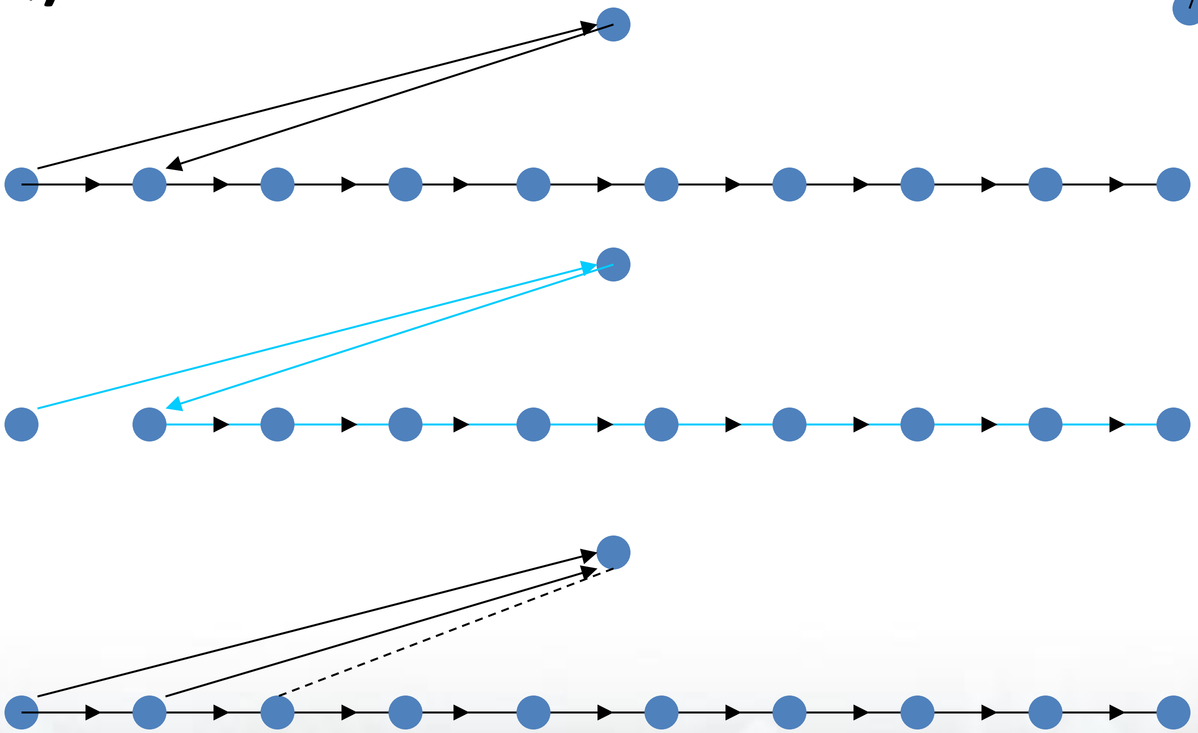
- 竞赛图一定有初级通路(路径)过每个顶点恰好一次
- 证明:



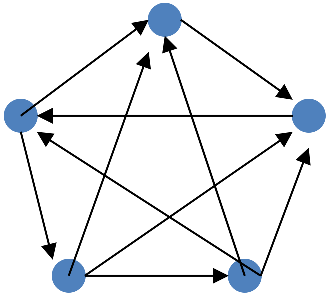
命题证明

- 证明(续):

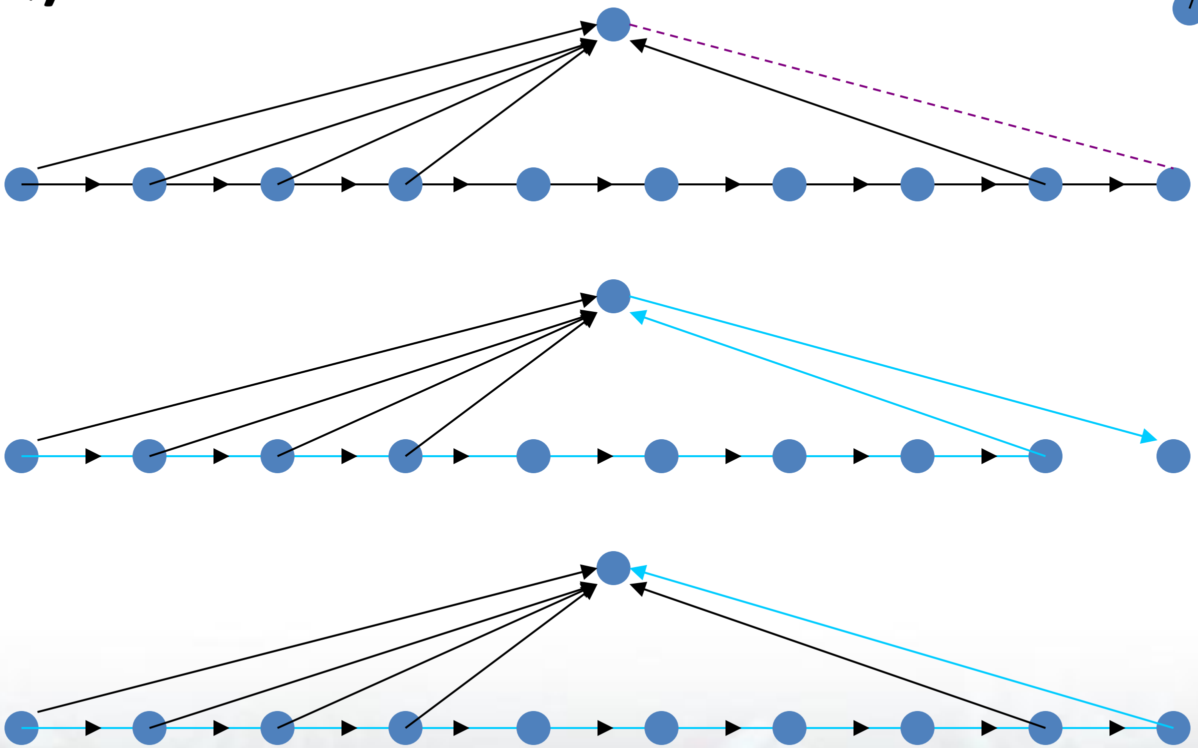




命题证明

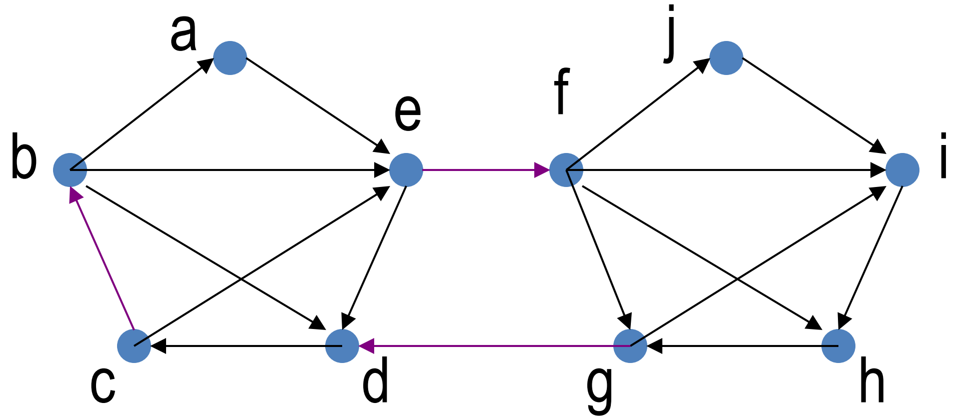


- 证明(续):



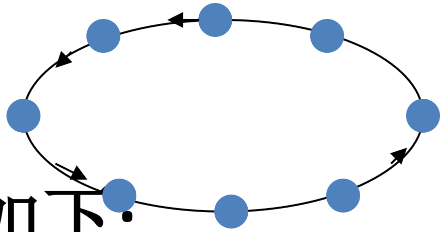
强连通

- 强连通(双向连通): 有向图的任何一对顶点之间都双向可达

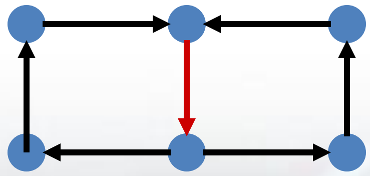


定理7.21

- 有向图D强连通 ⇔ D中有回路过每个顶点至少一次.



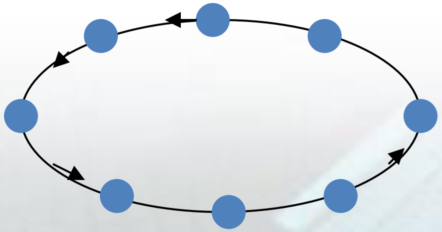
- 说明: 不一定有简单回路,反例如下:



定理7.21证明

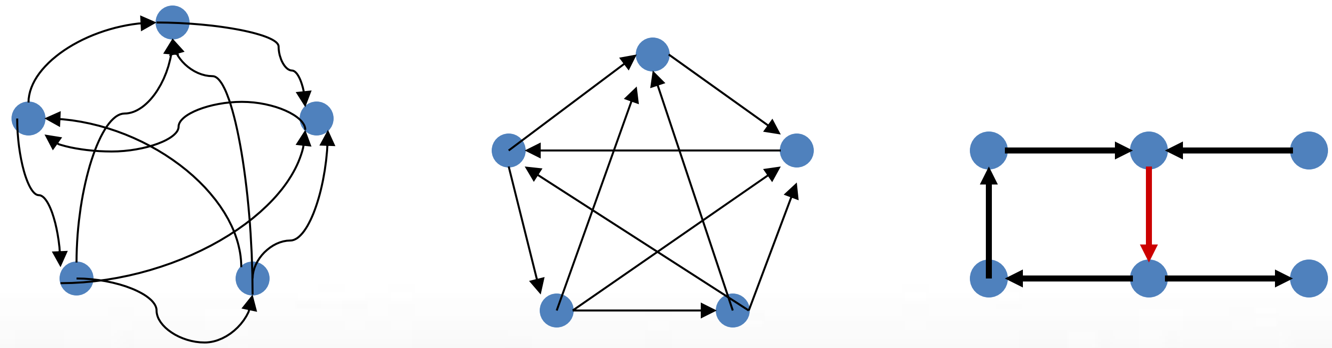
- 证明: (⇐) 显然

(⇒) 设$V(D)=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$, 设$\Gamma_{i,j}$是从$v_i$到$v_j$的有向通路, 则$\Gamma_{1,2}+\Gamma_{2,3}+\ldots+\Gamma_{n-1,n}+\Gamma_{n,1}$是过每个顶点至少一次的回路. #



定理7.22

- 有向图D单向连通 $\Leftrightarrow$ D中有通路过每个顶点至少一次. #
- 说明: 不一定有简单通路,反例如下:

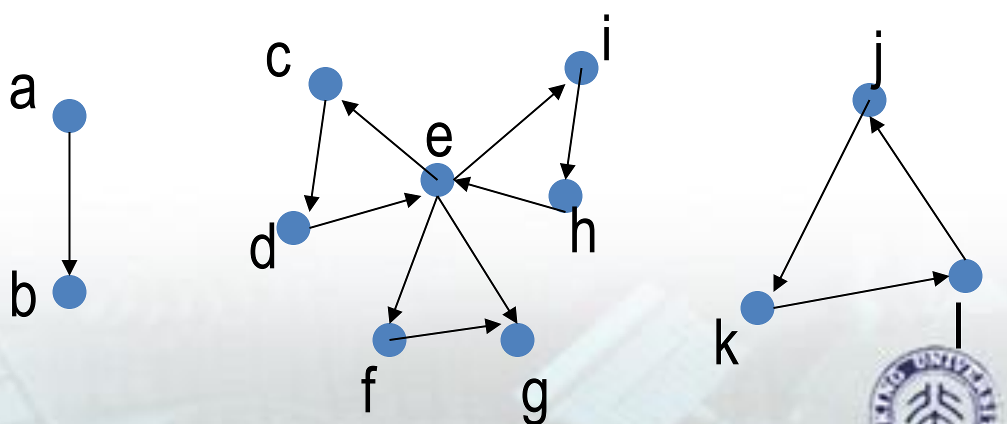


有向图的连通分支

- 强连通分支: 极大强连通子图
- 单向连通分支: 极大单向连通子图
- 弱连通分支: 极大弱连通子图

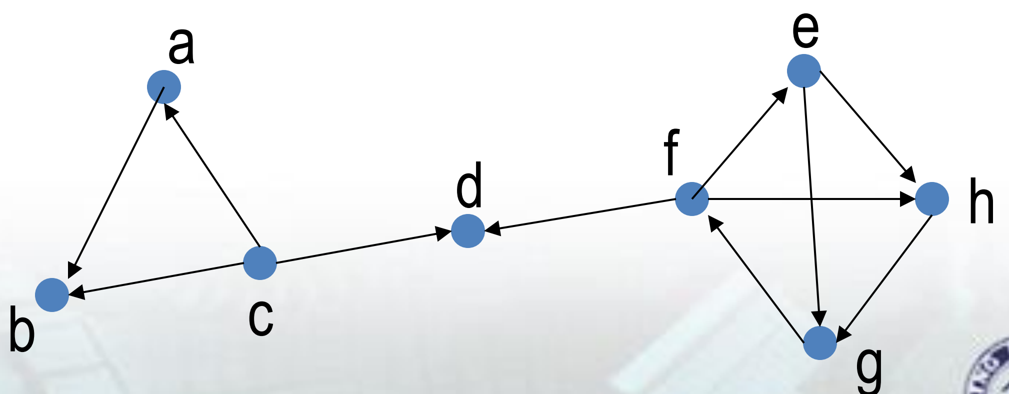
有向图的连通分支(例7.8(a))

- 强连通分支: [{a}], G[{b}], G[{c,d,e,h,i}], G[{f}],G[{g}],G[{j,k,l}]
- 单向连通分支: G[{a,b}],G[{c,d,e,h,i,f,g}], G[{j,k,l}]
- (弱)连通分支: 与单向连通分支相同



有向图的连通分支(例7.8(b))

- 强连通分支: G[{a}], G[{b}], G[{c}], G[{d}], G[{e,f,g,h}]
- 单向连通分支: G[{a,b,c}], G[{c,d}], G[{d,e,f,g,h}]
- (弱)连通分支: G



小结

- 连通, 连通分支, 连通分支数
- 二部图 ⇔ 无奇圈
- 强连通(双向),单向连通,弱连通