



# 单元10.1 平面图的概念

第二编 图论 第十一章 平面图

11.1 平面图的基本概念



北京大學



# 内容提要

- 四色问题
- 平面图、平面表示、球面表示
- 面、面的边界、面的次数
- 极小非平面图
- 极大平面图





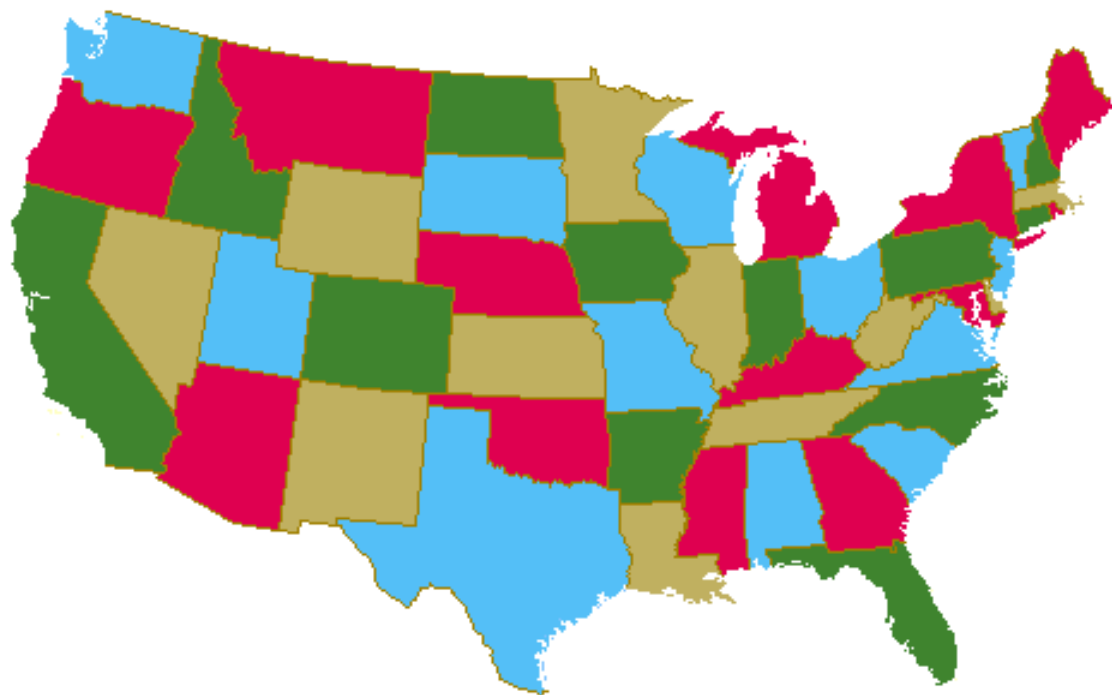
# 四色问题

中华人民共和国地图





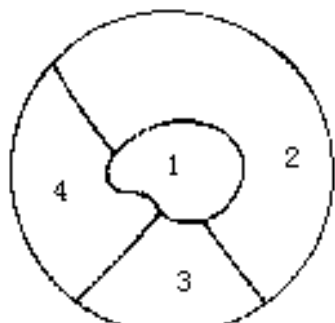
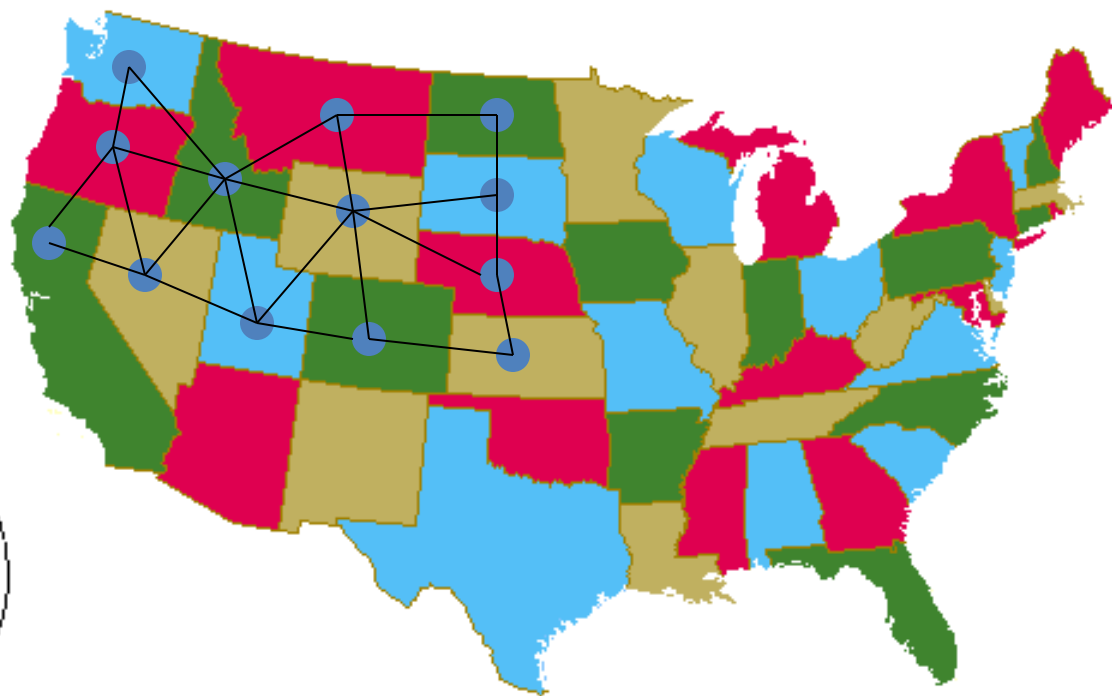
# 四色问题



北京大学



# 四色问题



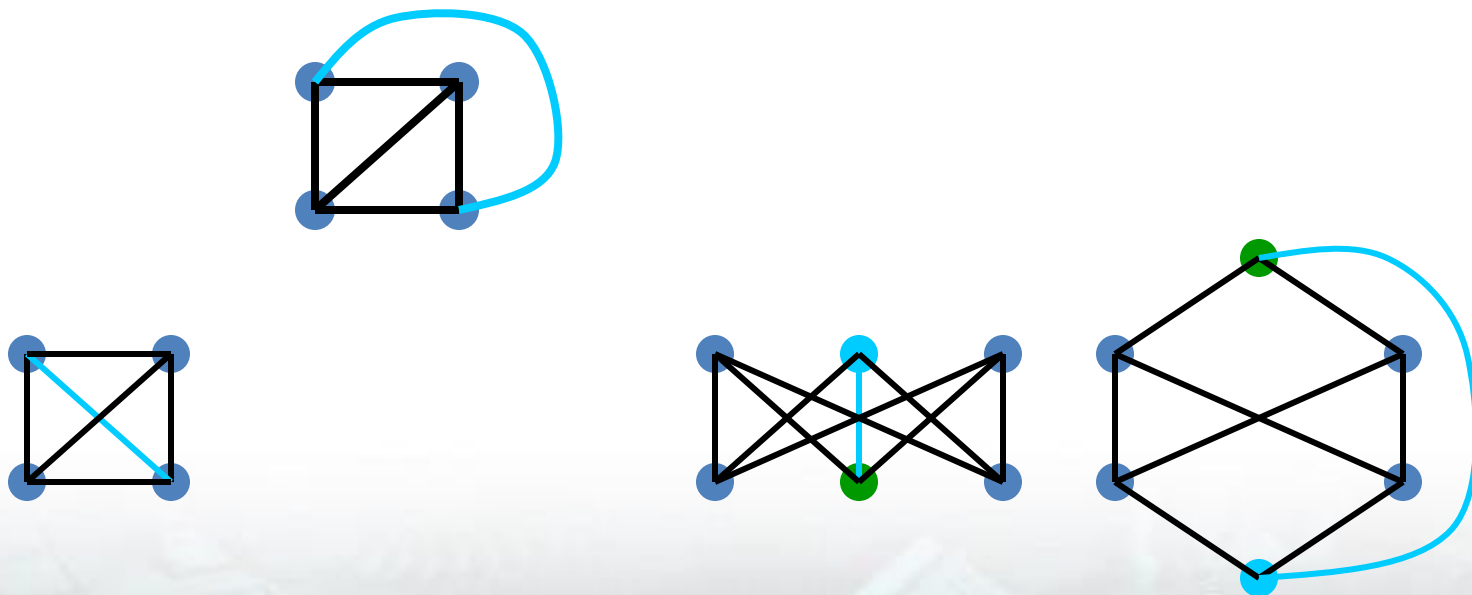
图一



北京大学

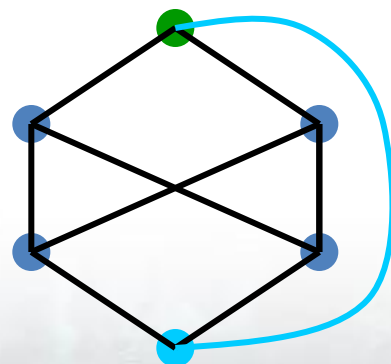
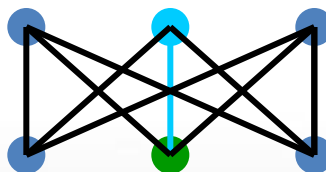
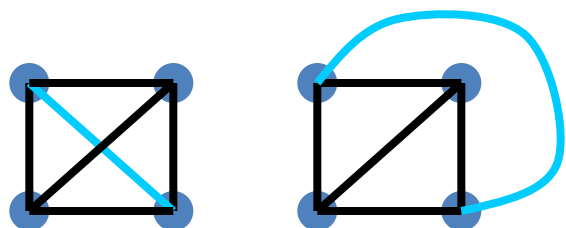
# 平面图

- 在平面上边与边不在非顶点处相交的图



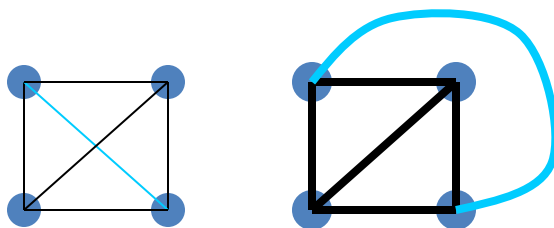
# 可平面图

- 可以画在平面上,使得边与边不在非顶点处相交的图



# 平面嵌入

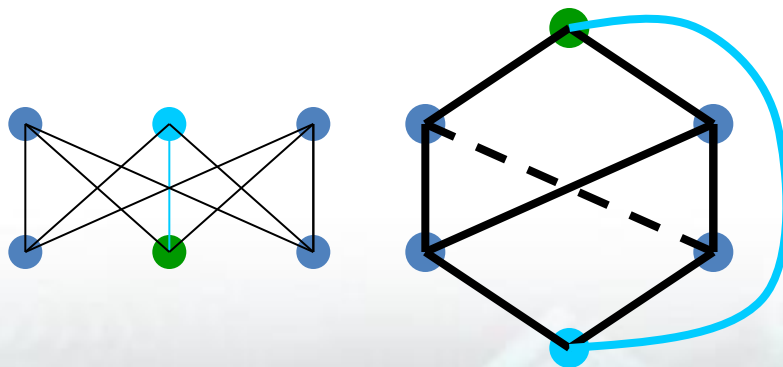
- 画在平面上使得边与边不在非顶点处相交





# 球面嵌入, 曲面嵌入

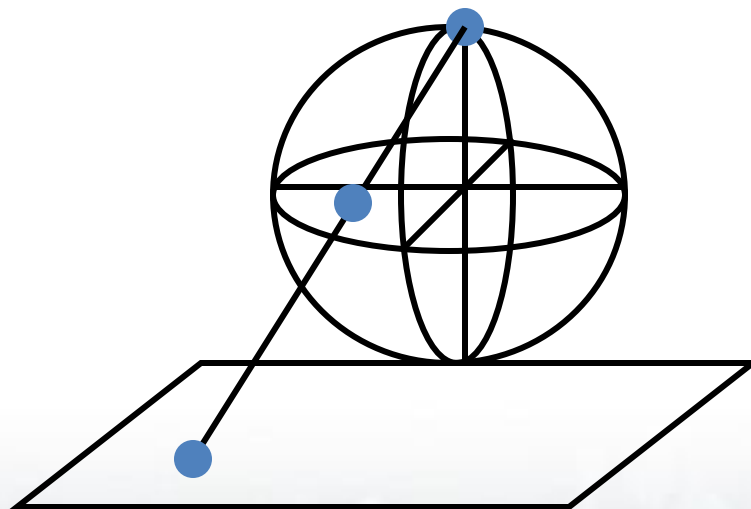
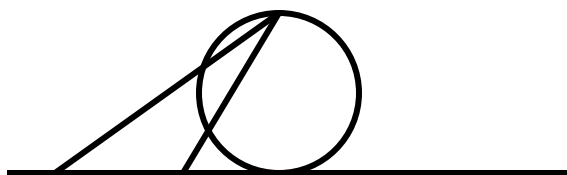
- **球面嵌入**: 画在球面上使得边与边不在非顶点处相交
- **曲面嵌入**: 画在曲面上使得边与边不在非顶点处相交, 如环面嵌入



# 定理11.1

定理11.1 可平面嵌入  $\Leftrightarrow$  可球面嵌入

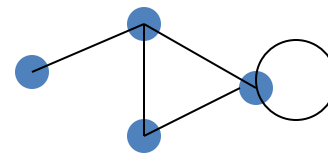
证明 连续球极投影. #



北京大学

# 面

- 区域: 不含顶点与边的极大连通曲面,  $R$
- 外部区域: 面积无限的区域,  $R_0$
- 区域边界: 与 $R$ 关联的边和顶点构成的子图,  $\partial R$
- 面: 区域及其边界
- 面的次数:  $\deg(R) = \text{边界长度}$





## 定理11.2

$$\sum_{i=1}^r \deg(R_i) = 2m. \quad \#$$



北京大學



## 定理11.3

**定理11.3** 任何平面嵌入的内部面都可以在另一种平面嵌入下成为外部面

**证明:** 平面嵌入  $\rightarrow$  球面嵌入  $\rightarrow$  把该面旋转到北极  $\rightarrow$  平面嵌入.      #



北京大學



# 极大平面图

- 是平面图,但是在任意两个不相邻顶点之间加边就是非平面图
- 例如,  $K_5$  删除任意一边





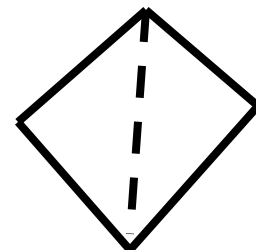
## 定理11.4

定理11.4  $n(\geq 3)$ 阶简单连通平面图是极大平面图  $\Leftrightarrow \forall R, \deg(R)=3$

证明:  $(\Rightarrow)$  简单图  $\Rightarrow \deg(R) \geq 3$ ,

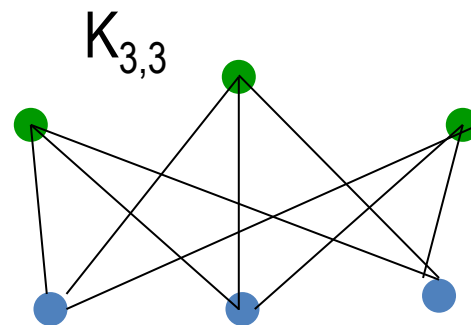
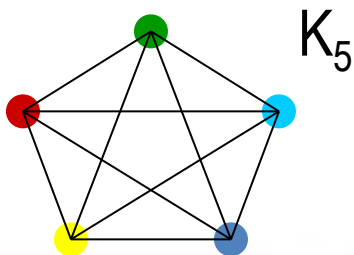
极大平面图  $\Rightarrow \deg(R) \leq 3$ .

$(\Leftarrow) \forall R, \deg(R)=3 \Rightarrow$  不能加边而不交叉. #



# 极小非平面图

- 是非平面图, 但是删除任意1边就是平面图
- 例如,  $K_5$ ,  $K_{3,3}$







# 小结

- 平面图、平面表示、球面表示
- 面、面的边界、面的次数
- 极小非平面图
- 极大平面图

