Ch-03 随机向量

3. 1 随机向量的概念

定义 1. 1 我们称 n 个随机变量 $X_1,\cdots,X_n$ 的整体 $\xi=(X_1,\cdots,X_n)$ 为 n **维随机向量**（或 n **维随机变量**）。一维随机向量简称随机变量。

定义 1. 1' 数学上的精确定义 设 $X_1=X_1(\omega),\cdots,X_n=X_n(\omega)$ 都是概率空间 (Ω,F,P) 上的随机变量，则称 $\xi=\xi(\omega)\triangleq(X_1(\omega),\cdots,X_n(\omega))$ 为概率空间 (Ω,F,P) 上的 n **维随机向（变）量**。

定义 1. 2 设 $X_1=X_1(\omega),\cdots,X_n=X_n(\omega)$ 是 n 个随机变量，$f(x_1,\cdots,x_n)$ 是 n 元实值函数，则称随机变量 $Y\triangleq f(X_1,\cdots,X_n)$ 为随机变量 $X_1,\cdots,X_n$ 的函数（即随机向量（$X_1,\cdots,X_n$）的函数）。

3. 2 二维随机向量的联合分布与边缘分布

1. 离散型情形

定义 2. 1 称二维随机向量 $\xi=(X,Y)$ 是**离散型**的，若它只取至多可列个不同的值，即 ξ 可能取的值可以排成一个（有限或无穷）序列。

定义 2. 2 设 $\xi=(X,Y)$ 是离散型随机变量，其可能的值为 $a_1,a_2,\cdots$（有限个或可列无穷个），$p_i\triangleq P(\xi=a_i)$ $(i=1,2,\cdots)$，则称 $\{p_i:i=1,2,\cdots\}$ 为 ξ 的**概率分布**（也叫概率函数或概率分布列）。ξ 的概率分布也叫做 X 与 Y 的**联合分布**。

定义 2. 3 对于二维随机向量 $\xi=(X,Y)$，分量 X 的概率分布称为 ξ 关于 X 的**边缘分布**，分量 Y 的概率分布称为 ξ 关于 Y 的**边缘分布**。

2. 连续型情形

定义 2. 4 设 $\xi=(X,Y)$ 是随机向量，如果存在非负函数 $p(x,y)$（x,y 是任意实数）使得对于任何矩形 $D=\{(x,y):a<x<b,c<y<d\}$（a,b,c,d 任意，$a<b,c<d$）均成立

$$P((X,Y)\in D)=\iint_D p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

则称 ξ 是**连续型**的，并称 $p(x,y)$ 为 ξ 的**概率密度函数**（简称**分布密度**，也称**密度函数**），也称 $p(x,y)$ 为 (X,Y) 的**联合分布密度**（简称**联合密度**）。

对于连续型的随机向量 $\xi=(X,Y)$，可以证明对于平面上相当任意的集合 A 均成立：

$$P((X,Y)\in A)=\iint_A p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 $p(x,y)$ 是 (X,Y) 的联合密度。$\iint_A p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\triangleq\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}I_A(x,y)p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

定义 2.5 设 G 是平面上面积为 a 的区域（$0<a<+\infty$），称 $\xi=(X,Y)$ 服从 G 上的**均匀分布**，若 $P((X,Y)\in G)=1$ 而且 (X,Y) 取值属于 G 的任何部分 A（A 是 G 的子区域）的概率与 A 面积成正比。(X,Y) 有联合密度

$$p(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{a}, & (x,y)\in G\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

定理 2.1 设 $p(x,y)$ 是 $\xi=(X,Y)$ 的联合密度，则

$$p_X(x)\triangleq\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)\mathrm{d}y,\quad p_Y(y)\triangleq\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)\mathrm{d}x$$

分别是 X,Y 的分布密度。

3. 一般情形

定义 2.7 设 $\xi=(X,Y)$ 是随机向量，则称

$$F(x,y)=P(X\leq x\text{ 且 }Y\leq y)\quad(\forall\, x,y)$$

为 ξ 的分布函数，也称为 (X,Y) 的**联合分布函数**。

3.3 随机变量的独立性

定义 3.1 设 X 和 Y 都是随机变量，如果对任意 $a<b,c<d$，事件 $\{a<X<b\}$ 与事件 $\{c<Y<d\}$ 相互独立，则称 X 与 Y **相互独立**（简称**独立**）

定理 3.1 设 X 的可能值是 $x_1,x_2,\cdots$（有限个或无穷个），Y 的可能值是 $y_1,y_2,\cdots$（有限个或无穷个），则 X 和 Y 相互独立的充要条件是：

$$\forall\, x,y,\quad P(X=x_i,Y=y_i)=P(X=x_i)P(Y=y_i)$$

定理 3.2 设 X,Y 分别有分布密度 $p_X(x),p_Y(y)$，则 X 与 Y 相互独立的充要条件是二元函数 $p(x,y)=p_X(x)p_Y(y)$ 是随机向量 (X,Y) 的联合密度。

定理 3.3 设 $\xi=(X,Y)$ 是随机向量，X 的分布函数是 $F_X(x)$，Y 的分布函数是 $F_Y(y)$，则 X 与 Y 相互独立的充要条件是 ξ 的分布函数 $F(x,y)=F_X(x)F_Y(y),\forall\, x,y.$

3.4 两个随机变量的函数

1. 随机向量函数的概率分布

定理 4.1 设 (X,Y) 有联合密度 $p(x,y)$，$Z=X+Y$，则 Z 的分布密度为

$$p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,z-x)\mathrm{d}x$$

定理 4.2 设 (X,Y) 有联合密度 $p(x,y)$，$Z=X/Y$，则 Z 的分布密度为

$$p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|p(zy,y)\mathrm{d}y$$

定理 4.3

2. 两个随机变量的函数的数学期望

定理 4.4 设 X 与 Y 相互独立且 $E(X)$ 和 $E(Y)$ 都存在，则

$$E(XY)=E(X)\cdot E(Y)$$

定理 4.5 设 X 与 Y 相互独立，X 的期望和方差存在，Y 的期望和方差也存在，则

$$var(X+Y)=var(X)+var(Y)$$

定理 4.6 均值公式 (1) 设 (X,Y) 的可能值是 $a_1,a_2,\cdots$（有限个或可列无穷个），$f(x,y)$ 是任何二元函数，则

$$Ef(X,Y)=\sum_i f(a_i)P((X,Y)=a_i)$$

(2) 设 (X,Y) 有联合分布密度 $p(x,y),f(x,y)$ 满足：积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mid f(x,y)\mid p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

收敛，则

$$Ef(X,Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

3.5 二维随机向量的数字特征

定义 5.1 设 X 和 Y 是两个随机变量，分别有期望和方差，则称

$$E(X-E(X))(Y-E(Y))$$

为 X 和 Y 的协方差，记作 $cov(X,Y)$ 或 σ_{XY}. 当 $\sigma_{XY}=0$ 时，称 X 与 Y 不相关。

$$cov(X,Y) = E(X - E(X))(Y - E(Y)) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$var(X+Y) = var(X) + var(Y) + 2cov(X,Y)$$

定理 5.1 设 X 和 Y 的方差都存在，则

$$|cov(X,Y)|^2 \le var(X) \cdot var(Y)$$

定义 5.2 设 X 和 Y 的方差都是正数，则称

$$\rho \triangleq \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{var(X)} \cdot \sqrt{var(Y)}}$$

为 X 和 Y 的**相关系数**，记为 ρ_{XY}.

定理 5.2 设 ρ 是 X 与 Y 的相关系数，则

1. $|\rho| \le 1$
2. 若 X 与 Y 独立，则 $\rho = 0$（逆定理不成立）
3. $|\rho| = 1$ 的充要条件是存在常数 a, b 使得

$$P(Y = a + bX) = 1$$

3.6 n 维随机向量

1. n 维随机向量

定义 6.1 设 $\xi = (X_1, \cdots, X_n)$ $(n \ge 1)$ 是 n 维随机向量，称 n 元函数

$$F(x_1, \cdots, x_n) = P(X_1 \le x_1, \cdots, X_n \le x_n)$$

为 ξ 的**（联合）分布函数**。

定义 6.2 称 n 维随机向量 $\xi = (X_1, \cdots, X_n)$ 是**离散型**的，若 ξ 只能取有限个或可列无穷个值。

定义 6.3 称 n 维随机向量 $\xi = (X_1, \cdots, X_n)$ 是**连续型**的，若存在非负可积函数 $p(x_1, \cdots, x_n)$ 满足：对任何 $a_1 < b_1, a_2 < b_2, \cdots, a_n < b_n$，有

$$\begin{aligned} &P(a_1 < X_1 < b_1, a_2 < X_2 < b_2, \cdots, a_n < X_n < b_n) \\ &= \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \cdots \int_{a_n}^{b_n} p(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n \end{aligned}$$

这个 $p(x_1, \cdots, x_n)$ 叫做 ξ 的**（联合）分布密度函数**，简称**密度函数**或**密度**。

定义 6.4 设 $\xi=(X_1,\cdots,X_n)$ 是 n 维随机变量。若 $1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n$ $(1\le k<n)$，这些 i_j 都是整数，则称随机变量 $(X_{i_1},X_{i_2},\cdots,X_{i_k})$ 的概率分布为 ξ 的边缘分布。

定义 6.5 设 n 个随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ $(n\ge 2)$ 是相互独立的，若对任何 $a_i<b_i$ $(i=1,\cdots,n)$ 均成立

$$\begin{aligned}&P(a_1<X_1<b_1,a_2<X_2<b_2,\cdots,a_n<X_n<b_n)\\=&P(a_1<X_1<b_1)P(a_2<X_2<b_2)\cdots P(a_n<X_n<b_n)\end{aligned}$$

定理 6.1 设 $X_1,\cdots,X_n$ 都是随机变量 $(n\ge 2)$，分别有密度函数 $p_1(x),\cdots,p_n(x)$，则 $X_1,\cdots,X_n$ 相互独立的充要条件是：n 元函数

$$p(x_1,\cdots,x_n)=p_1(x_1)p_2(x_2)\cdots p_n(x_n)$$

是 $(X_1,\cdots,X_n)$ 的联合分布密度。

2. n **维随机变量的数字特征**

定义 6.6 称 $E(\xi)\triangleq(E(X_1),E(X_2),\cdots,E(X_n))$ 为随机变量 $\xi=(X_1,\cdots,X_n)$ 的**期望**（**或均值**）。

定义 6.7 设 $\xi=(X_1,\cdots,X_n)$，并记

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}&=cov(X_i,X_j), &\qquad \rho_{ij}&=\sigma_{ij}/\sqrt{\sigma_{ii}\sigma_{jj}}\\ \Sigma&=(\sigma_{ij})_{n\times n}, &\qquad R&=(\rho_{ij})_{n\times n}\end{aligned}$$

称 Σ 为 ξ 的**协方差阵**，R 为 ξ 的**相关阵**。

3.7 条件分布和条件期望

2. 连续型随机变量

$$p_{X|Y}(x|y)=\frac{p(x,y)}{p_Y(y)}$$