



单元1.2 命题逻辑预备知识

第一编 集合论 第一章 集合

1.1 预备知识（上）



北京大学



内容提要

命题逻辑中

- 最基本的逻辑符号、逻辑公式
- 基本的等值式
- 重要的推理定律（重言蕴涵式）



北京大学



原子命题

用 p, q, r, \dots 表示原子命题(简单命题);

用 “1” 表示命题的真值为真;

用 “0” 表示命题的真值为假。



北京大学



联结词

用5种连接词给出最基本的复合命题。

- ① $\neg p$ 称为 p 的否定式
- ② $p \wedge q$ 称为 p 与 q 的合取式
- ③ $p \vee q$ 称为 p 与 q 的析取式
- ④ $p \rightarrow q$ 称为 p 与 q 的蕴涵式
- ⑤ $p \leftrightarrow q$ 称为 p 与 q 的等价式





命题公式

用 p, q, r, \dots 表示命题(命题常元)或命题变元

- ① 单个命题变元(或常元)是命题公式;
- ② 若 A 是命题公式, 则 $(\neg A)$ 也是;
- ③ 若 A, B 是命题公式, 则 $(A \wedge B), (A \vee B), (A \rightarrow B), (A \leftrightarrow B)$ 也是;
- ④ 只有有限次应用(1)-(3)形成的符号串才是命题公式(命题形式), 简称公式。





命题公式的赋值

设命题公式 A 中有 n 个命题变元 p_1, p_2, \dots, p_n ,

给 p_i 指定一个值 α_i (α_i 为0或1, $i=1, 2, \dots, n$),

所得字符串 $\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n$ 称为 A 的一个赋值,

A 共有 2^n 个赋值。

如果在 $\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n$ 下 A 的真值为1, 则称它为 A 的成真赋值, 否则, A 的真值为0, 则称它为 A 的成假赋值。





永真、永假、可满足、等值式

若公式 A 没有成假赋值，则称 A 为**重言式(永真式)**。

若公式 A 没有成真赋值，则称 A 为**矛盾式(永假式)**。

若公式 A 至少存在一个成真赋值，则称 A 为**可满足式**。

若 $A \leftrightarrow B$ 是重言式，则称 A 与 B 是**等值的**，记为 $A \Leftrightarrow B$ ，
并称 $A \Leftrightarrow B$ 为**等值式**。





基本的等值式(①~④)

① 幂等律 $A \Leftrightarrow A \vee A, A \Leftrightarrow A \wedge A$

② 交换律 $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A, A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$

③ 结合律 $(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$

$$(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$$

④ 分配律 $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

$$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$





基本的等值式(⑤~⑩)

⑤ 德•摩根律 $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B, \neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

⑥ 吸收律 $A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A, A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$

⑦ 零律 $A \vee 1 \Leftrightarrow 1, A \wedge 0 \Leftrightarrow 0$

⑧ 同一律 $A \vee 0 \Leftrightarrow A, A \wedge 1 \Leftrightarrow A$

⑨ 排中律 $A \vee \neg A \Leftrightarrow 1$

⑩ 矛盾律 $A \wedge \neg A \Leftrightarrow 0$





基本的等值式(⑪~⑯)

⑪ 双重否定律

$$\neg\neg A \Leftrightarrow A$$

⑫ 蕴涵等值式

$$A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$$

⑬ 等价等值式

$$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$$

⑭ 等价否定等值式

$$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow \neg A \leftrightarrow \neg B$$

⑮ 假言易位

$$A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \rightarrow \neg A$$

⑯ 归谬论 $(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \neg B) \Leftrightarrow \neg A$





置换规则

置换规则：

设 $\Phi(A)$ 是含公式 A 的公式，

用公式 B 置换 $\Phi(A)$ 中的 A ，得公式 $\Phi(B)$ ，

如果 $A \Leftrightarrow B$ ，则 $\Phi(A) \Leftrightarrow \Phi(B)$ 。



北京大学



等值演算

$$p \rightarrow (q \rightarrow r)$$

$$\Leftrightarrow p \rightarrow (\neg q \vee r) \quad (\text{蕴涵等值式, 置换规则})$$

$$\Leftrightarrow \neg p \vee (\neg q \vee r) \quad (\text{蕴涵等值式, 置换规则})$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \vee r \quad (\text{结合律, 置换规则})$$

$$\Leftrightarrow \neg(p \wedge q) \vee r \quad (\text{德•摩根律, 置换规则})$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge q) \rightarrow r \quad (\text{蕴涵等值式, 置换规则})$$





推理的形式结构

- 前提: A_1, A_2, \dots, A_k 结论: B

推理的形式结构: $(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k) \rightarrow B$

- 当推理的形式结构为重言式，则称推理正确，否则称推理不正确
- 用 “ $A \Rightarrow B$ ” 表示 “ $A \rightarrow B$ ” 是永真式，当推理正确时，记为 $(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k) \Rightarrow B$ ，称为推理定律





重要的推理定律(①~④)

① 附加律

$$A \Rightarrow (A \vee B)$$

② 化简律

$$(A \wedge B) \Rightarrow A$$

$$(A \wedge B) \Rightarrow B$$

③ 假言推理

$$(A \rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$$

④ 拒取式

$$(A \rightarrow B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$$





重要的推理定律(⑤~⑧)

⑤ 析取三段论

$$(A \vee B) \wedge \neg A \Rightarrow B$$

$$(A \vee B) \wedge \neg B \Rightarrow A$$

⑥ 假言三段论

$$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \Rightarrow (A \rightarrow C)$$

⑦ 等价三段论

$$(A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C) \Rightarrow (A \leftrightarrow C)$$

⑧ 构造性两难 $(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \wedge (A \vee C) \Rightarrow (B \vee D)$



北京大學



判断推理正确的方法

判断推理是否正确，就是判断推理的形式结构

$(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k) \rightarrow B$ 是否为重言式

判断重言式的方法：真值表法、等值演算法

方法一： $(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k) \rightarrow B \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow 1$

方法二： $(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k) \Rightarrow \dots \Rightarrow B$

例： 前提： $p \rightarrow (q \rightarrow r), p, q$ 结论： r



北京大学



方法一

$$(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \wedge p \wedge q \rightarrow r \Leftrightarrow (\neg p \vee (\neg q \vee r)) \wedge p \wedge q \rightarrow r$$

$$\Leftrightarrow ((\neg p \wedge p) \vee ((\neg q \vee r) \wedge p)) \wedge q \rightarrow r$$

$$\Leftrightarrow ((\neg q \vee r) \wedge q) \wedge p \rightarrow r$$

$$\Leftrightarrow ((\neg q \wedge q) \vee (r \wedge q)) \wedge p \rightarrow r \Leftrightarrow (r \wedge q \wedge p) \rightarrow r$$

$$\Leftrightarrow \neg(r \wedge q \wedge p) \vee r \Leftrightarrow \neg r \vee \neg q \vee \neg p \vee r$$

$$\Leftrightarrow \neg q \vee \neg p \vee (\neg r \vee r) \Leftrightarrow \neg q \vee \neg p \vee 1 \Leftrightarrow 1$$





方法二

$$(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \wedge p \wedge q$$

$$\Leftrightarrow ((p \rightarrow (q \rightarrow r)) \wedge p) \wedge q \quad (\text{结合律})$$

$$\Rightarrow (q \rightarrow r) \wedge q \quad (\text{假言推理})$$

$$\Rightarrow r \quad (\text{假言推理})$$





小结

逻辑符号： 原子命题 p, q, r, \dots 、真值 $0, 1$ 、

联结词 $\neg \wedge \vee \rightarrow \leftrightarrow$ 、等值 \Leftrightarrow 、推出 \Rightarrow

逻辑概念： 公式、赋值、永真式、永假式、可满足式、

等值式、等值演算、推理的形式结构、

推理定律

逻辑规则： 置换规则

