



单元11.2 地图着色与 平面图点着色、边着色

第二编 图论 第十一章 平面图

12.3 地图着色与平面图点着色

12.4 边着色



北京大學



内容提要

- 平面图的点着色
 - 面色数
 - 六色定理
 - 五色定理
- 边着色
 - 边色数
 - Vizing定理





(平面)地图

- 连通无桥平面图平面嵌入及其所有的面
- 国家: 平面地图的面
- 相邻: 两国的公共边界至少有一条公共边
- k-面着色, k-色地图, 面色数 $\chi^*(G)$



面着色与对偶图点着色

- **定理12.13:** 地图 G 可 k -面着色 \Leftrightarrow
对偶图 G^* 可 k -着色. #
- **定理12.14:** 连通无环平面图 G 可 k -面着色
 \Leftrightarrow 对偶图 G^* 可 k -着色. #
- 研究平面图面着色 \Leftrightarrow 研究平面图点着色



六色定理

- 定理12.15:

任何平面图都可6-着色

六色定理证明

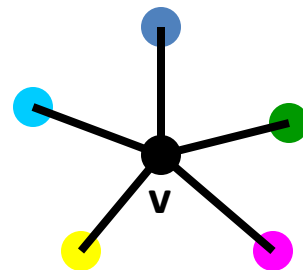
- 证明: (归纳法) (1) $n \leq 7$: 结论为真.

(2) 设 $n = k (\geq 7)$ 时结论为真.

$n = k + 1$ 时, $\exists v \in V(G)$, $d(v) \leq 5$.

令 $G_1 = G - v$, 对 G_1 用归纳假设, G_1 可 6-着色.

模仿 G_1 对 G 着色, 与 v 相邻的点不超过 5 个, 至少剩 1 种颜色给 v 着色, 所以 G 可 6-着色. #





五色定理

- 定理12.16(Heawood,1890):

任何平面图都可5-着色

五色定理证明

- 证明: (归纳法) (1) $n \leq 5$: 结论为真.

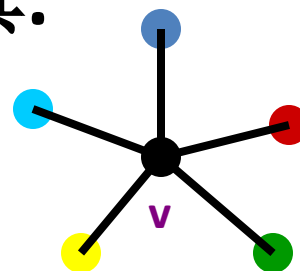
(2) 设 $n = k (\geq 5)$ 时结论为真.

$n = k + 1$ 时, $\exists v \in V(G), d(v) \leq 5$.

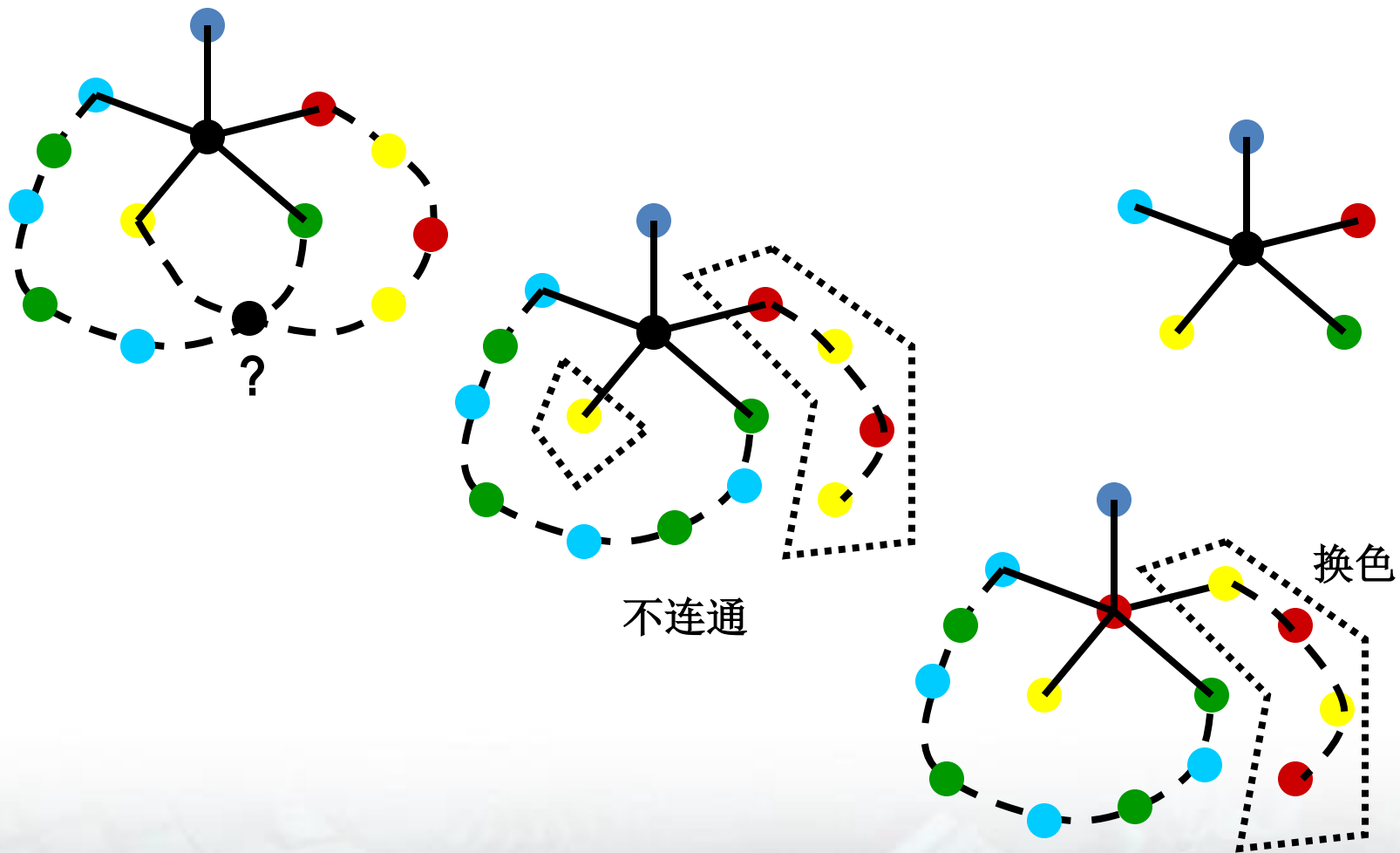
令 $G_1 = G - v$, 对 G_1 用归纳假设, G_1 可 5-着色.

模仿 G_1 对 G 着色. 当 $d(v) < 5$,

或 $d(v) = 5$ 但与 v 相邻的点用了少于 5 种颜色时,
至少剩 1 种颜色给 v 着色.



五色定理证明示意图





五色定理证明

- 当 $d(v)=5$ 且与 v 相邻的点用了5种颜色时, 设 v_i 与 v 相邻且着颜色 i , $i=1, 2, \dots, 5$.

根据Jordan定理, 从 v_1 到 v_3 只有 $\{1,3\}$ 这2种颜色的路径, 和从 v_2 到 v_4 只有 $\{2,4\}$ 这2种颜色的路径, 不能同时存在. 不妨设在只有 $\{1,3\}$ 这2种颜色的顶点的导出子图中, v_1 与 v_3 是在不同的连通分支中, 于是把 v_1 所在分支里1与3颜色互换, 然后把颜色1给 v .

#



边着色

- 定理12.17(Vizing):

G 是简单图 $\Rightarrow \Delta(G) \leq \chi' (G) \leq \Delta(G)+1$ #

- 边色数 $\chi' (G)$





例12.5

G 是二部图 $\Rightarrow \chi'(G) = \Delta(G)$



例12.5证明

- 证: (归纳法) (1) $m=0,1$: 结论为真.

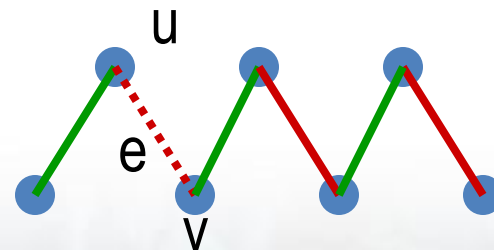
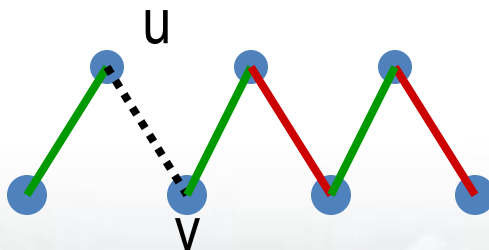
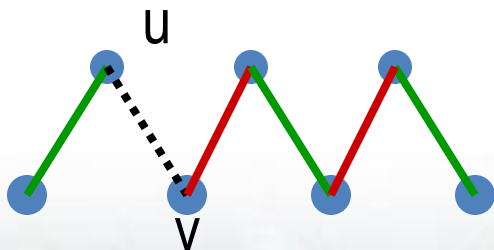
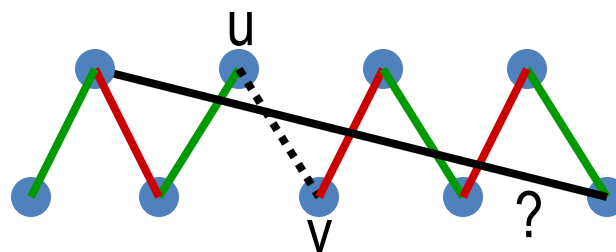
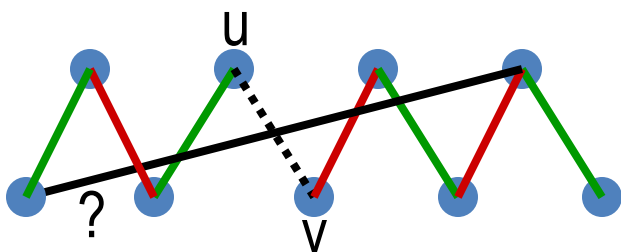
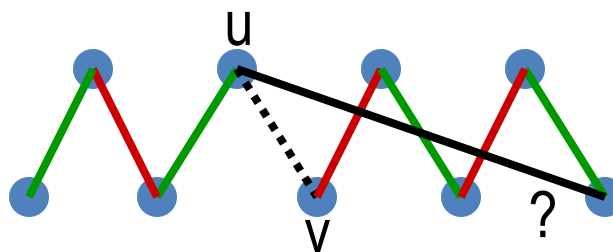
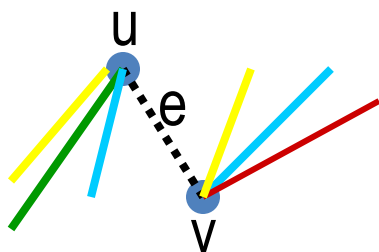
(2) 设 $m=k(\geq 1)$ 时结论为真.

$m=k+1$ 时, $\exists e=(u,v) \in E(G)$. 令 $G_1=G-e$.

$\Delta(G_1) \leq \Delta(G) = \Delta$, 由归纳假设, G_1 可 Δ -边着色.

模仿 G_1 对 G 边着色, 当存在颜色 α 既不出现在 u 也不出现在 v 时, 用颜色 α 给 e 着色.

例12.5证明示意图





例12.5证明

- 设 颜色 β 出现在 u 而不出现在 v ,

颜色 γ 出现在 v 而不出现在 u .

则不存在从 v 到 u 只有 $\{\beta, \gamma\}$ 这2种颜色的路径.

即在只有 $\{\beta, \gamma\}$ 这2种颜色的边的导出子图中,

v 与 u 是在不同的连通分支中.

于是把 v 所在分支里 β 与 γ 颜色互换,

然后把颜色 γ 给 $e=(u, v)$. #



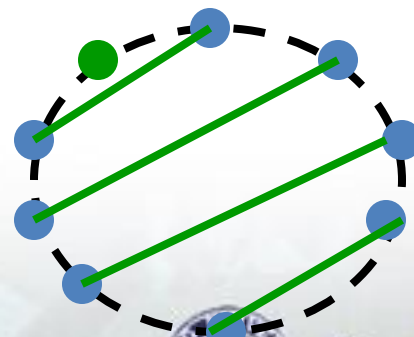
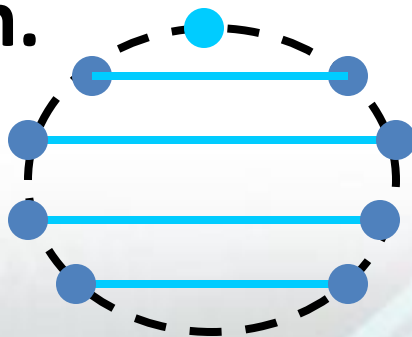
例12.6

- $n > 1$ 时,

$$\chi' (K_n) = \begin{cases} n, & n \text{ 为奇数} \\ n-1, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$$

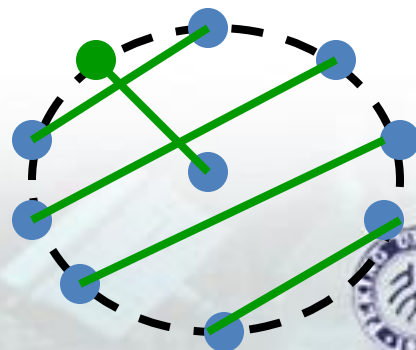
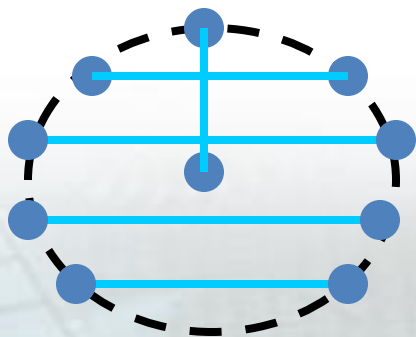
例12.6(n 为奇数)

- n 为奇数时, $\chi'(K_n)=n$.
- 每边关联2个不同端点, 同色边没有公共端点, 同色边至多有 $(n-1)/2$ 条, 至少需要 n 种颜色, $\chi'(K_n) \geq n$. 又存在 n -边着色, $\chi'(K_n) \leq n$. 所以 $\chi'(K_n)=n$.



例12.6(n 为偶数)

- n 为偶数时, $\chi'(K_n) = n-1$.
- 每边关联2个不同端点, 同色边没有公共端点, 同色边至多有 $n/2$ 条, 至少需要 $n-1$ 种颜色, $\chi'(K_n) \geq n-1$. 又存在 $(n-1)$ -边着色, $\chi'(K_n) \leq n-1$. 所以 $\chi'(K_n) = n-1$. #





同色边

- 无环图 $G=\langle V, E \rangle$ 进行 k -边着色, $k \geq \chi'(G)$. 令

$$R = \{ (e_i, e_j) \mid e_i \text{ 与 } e_j \text{ 着同色} \}$$

则 R 是 E 上等价关系, 商集合

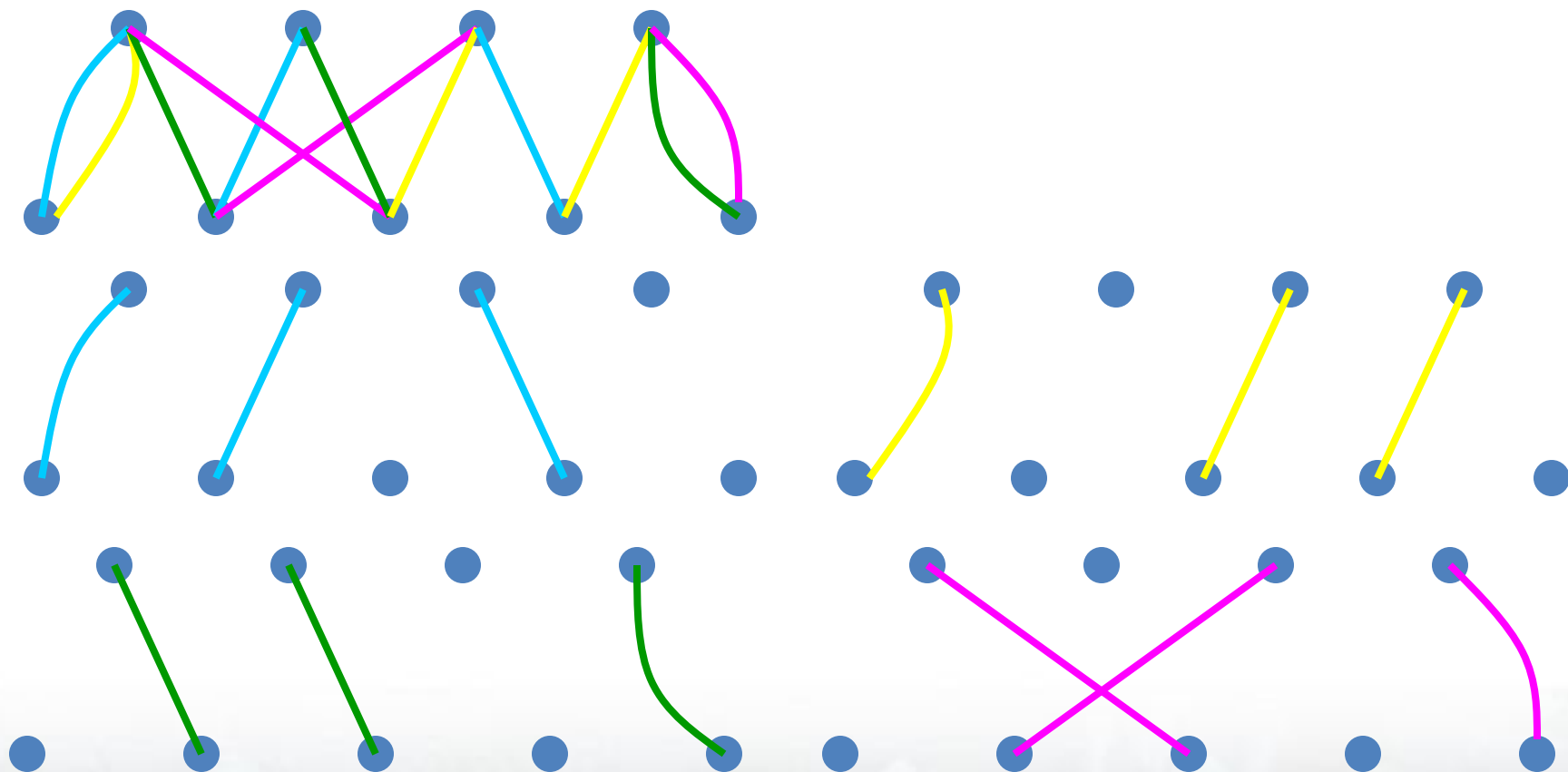
$$E/R = \{E_1, E_2, \dots, E_k\}$$

是 E 的划分, 划分块中元素着同色

- 说明: 同色边构成“边独立集”, 或“匹配”



例





例12.7

- 某一天内有 n 个教师给 m 个班上课. 每个教师在同课时只能给一个班上课.
 - (1) 这一天至少排多少节课?
 - (2) 不增加节数情况下至少需要几个教室?
 - (3) 若 $n=4, m=5$. 教师是 t_1, t_2, t_3, t_4 , 班是 c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 . 已知 t_1 给 c_1, c_2, c_3 上2节, 1节, 1节课, t_2 给 c_2, c_3 各上1节课, t_3 给 c_2, c_3, c_4 各上1节课, t_4 给 c_4, c_5 上1节, 2节课. 求最省教室的课表.

例12.7

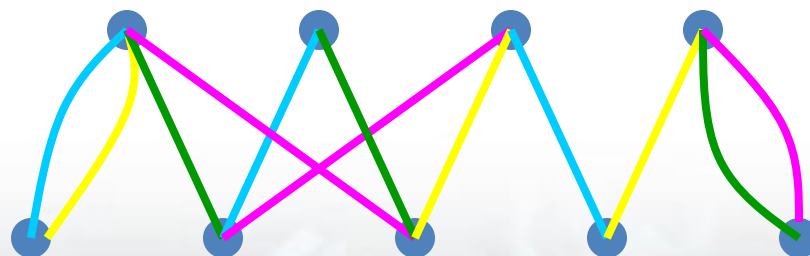
- 令二部图 $G = \langle T, C; E \rangle$, 其中

$$T = \{ t_1, t_2, \dots, t_n \}$$

$$C = \{ c_1, c_2, \dots, c_m \}$$

$$E = \{ (t_i, c_j) \mid t_i \text{ 给 } c_j \text{ 上一节课} \}$$

给 G 进行边着色.



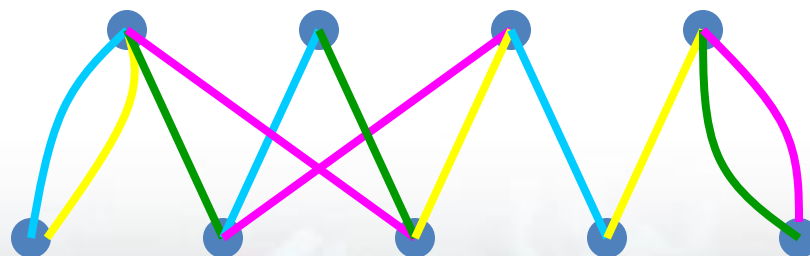
例12.7(1)(2)

- 同色边代表的教学可以同时进行.
所以颜色数就是节数, 同色边数就是教室数.

(1) 最少节数 = $\chi'(G) = \Delta(G)$.

(2) 最少教室数 = $\min_{\Delta\text{-边着色}} \max \{k_1, k_2, \dots, k_{\Delta}\}$.

其中 k_i 是着颜色 i 的边数.



例12.7(3)

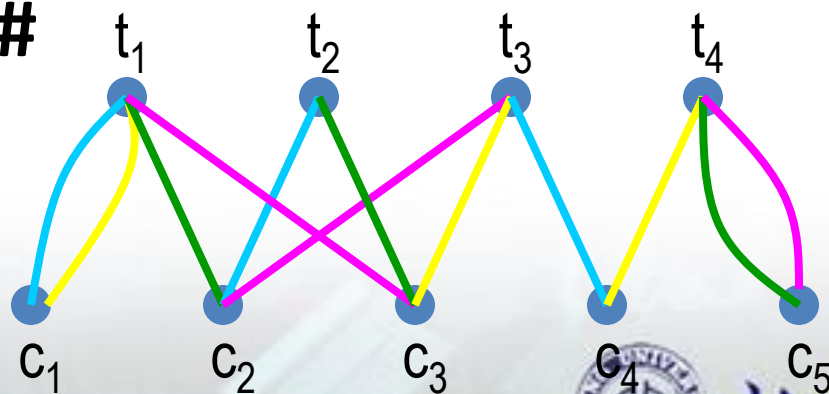
- (3) 已知条件下得出下图G,

其中 $T=\{t_1, t_2, \dots, t_4\}$, $C=\{c_1, c_2, \dots, c_5\}$.

$\Delta(G)=4$, 节数最少是4.

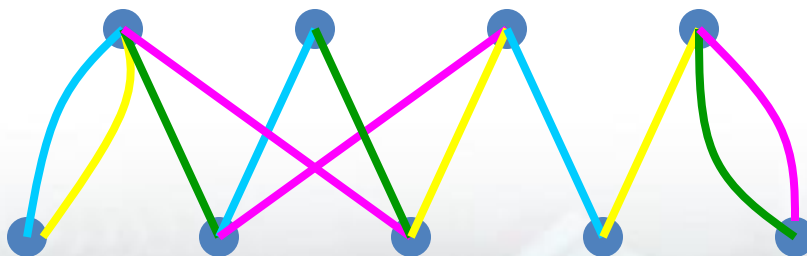
$\min \max \{k_1, k_2, \dots, k_4\}=3$, 教室数最少是3.

课表如下页所示. #



例12.7(3)

节	t_1	t_2	t_3	t_4
1	c_1	c_2	c_4	--
2	c_1	--	c_3	c_4
3	c_2	c_3	--	c_5
4	c_3	--	c_2	c_5





小结

- 面色数 $\chi^*(G)$, 边色数 $\chi'(G)$
- (五色定理) 平面图 $\chi^* \leq 5$
- (Vizing定理) 简单图 $\Delta \leq \chi' \leq \Delta + 1$
 - 二部图, 偶阶完全图 $\chi' = \Delta$
 - 奇阶完全图 $\chi' = \Delta + 1$