第十六章 半群与独异点

- 半群、独异点的定义与性质
  - 半群与独异点定义
  - 半群与独异点性质
- 半群、独异点的子代数、积代数、商代数
  - 子半群与子独异点
  - 半群与独异点的直积
  - 商半群与商独异点
- 半群与独异点的同态
  - 独异点的表示定理

半群与独异点的定义

广群、半群、独异点（幺半群）的定义

- 广群：封闭二元运算
- 半群：封闭二元运算，结合律
- 独异点：封闭二元运算，结合律，单位元

说明：任何半群都可以扩张成独异点

表示式中可以省略运算符

半群与独异点性质

幂运算的定义

半群　　　独异点

$a^1 = a$　　　$a^0 = e$

$a^{n+1} = a^n a$

性质：

(1) 定理1 幂运算的等式

$$a^n a^m = a^{n+m}$$

$$(a^n)^m = a^{nm}$$

(2) 结合律

实例

例 1 V为半群，任取$a,b\in S$，如果$a\neq b$,则有$ab\neq ba$,
证明

(1) V中成立幂等律

(2) $\forall a,b\in V$，$aba=a$

(3) $\forall a,b,c\in V$，$abc=ac$

证 (1) 假若$aa\neq a$, 则

$(aa)a\neq a(aa)\Rightarrow aaa\neq aaa$，矛盾！

(2) 假若 $aba\neq a$, 则

$(aba)a\neq a(aba)\Rightarrow aba\neq aba$，矛盾！

(3) 假若 $abc\neq ac$, 则

$(abc)(ac)\neq(ac)(abc)\Rightarrow abcac\neq acabc\Rightarrow abc\neq abc$，
矛盾！

子半群、子独异点

子半群、子独异点 ***B*** 的判别

非空子集***B***,

B 对于***V*** 中的运算（含**0**元运算）封闭.

定理2 若干子半群的非空交集仍为子半群;

若干子独异点的交集仍为子独异点.

重要的子半群---子集合***B*生成的子半群**

$V=<S, *>, B \subseteq S$, 包含***B*** 的最小的半群

$\langle B \rangle = \cap \{A \mid A$是 S 的子半群，$B \subseteq A\}$

$\langle B \rangle = \bigcup_{n \in Z^+} B^n,\ B^n = \{b_1 b_2 \cdots b_n \mid b_i \in B, i = 1, 2, \ldots, n\}$

实例

例 2 $V=<Z,+>$半群，$B=\{4,6\}$，

$$\langle B\rangle=\{\,4i+6j\mid i,j\in N,i\text{和}j\text{ 不同时为}0\,\}$$

$$=\{\,4,6,8,10,12,14,16,\ldots\}=\ 2Z^{+}-\{2\}$$

例 3 Σ有穷字母表，Σ^{+}为不含空串字的集合, Σ^{*}为所有字的集合。

$$a_1a_2\cdots a_n=b_1b_2\cdots b_n\Leftrightarrow a_1=b_1,a_2=b_2,\ldots,a_n=b_n$$

每个字可以唯一分解为Σ中的元素之积。

Σ^{+}上的连接运算满足结合律，$V=<\Sigma^{+},\cdot>$构成半群，称为Σ上的自由半群，Σ为这个自由半群的生成元集，即$\langle\Sigma\rangle=V$.

Σ^{*}构成自由独异点。

半群独异点的直积、商代数、同态

- 半群与独异点的直积

  半群的直积仍是半群

  独异点的直积仍是独异点

- 半群与独异点的商代数

  半群$<A, \circ>$，商半群$<A/R, \bar{\circ}>$

  独异点$<A, \circ, e>$，商独异点$<A/R, \bar{\circ}, [e]>$

- 半群与独异点的同态和同构

  半群 $f(xy) = f(x)f(y)$

  独异点 $f(xy) = f(x)f(y)$，$f(e) = e'$

半群同态的性质

定理3 设$V=<S,*>$为半群，$V'=<S^S,\circ>$，$\circ$为合成，则V'也是半群，且存在 V 到 V' 的同态.

证： 只证同态. 令$f_a: S\to S$, $f_a(x)=a*x$,

$f_a\in S^S$, 且$\{f_a|a\in S\}\subseteq S^S$,

令$\varphi: S\to S^S, \varphi(a)=f_a$,

$\varphi(a*b)=f_{a*b}$, $\varphi(a)\circ\varphi(b)=f_a\circ f_b$

为证同态只需证明$f_{a*b}=f_a\circ f_b$

$\forall x\in S$

$f_{a*b}(x)=(a*b)*x=a*b*x$

$f_a\circ f_b(x)=f_a(f_b(x))=f_a(b*x)=a*(b*x)=a*b*x$

独异点的表示定理

定理4 设$V=<S,\ *,\ e>$为独异点，则存在$T\subseteq S^S$, 使得$<S,\ *,\ e>$同构于$<T,\ \circ,\ I_S>$

证：令 $\varphi: S\rightarrow S^S, \varphi(a)=f_a$, 则

$$\varphi(a*b)=\varphi(a)\circ\varphi(b)$$
$$\varphi(e)=f_e=I_S$$

φ为独异点V到$<S^S,\ \circ,\ I_S>$的同态.

$\varphi(a)=\varphi(b)\Rightarrow f_a=f_b\Rightarrow\forall x\in S\,(a*x=b*x)$
$\Rightarrow a*e=b*e\Rightarrow a=b$, 故$\varphi$为单射。

令$T=\varphi(S)$，则$T\subseteq S^S$, 且$\varphi: S\rightarrow T$为双射，

$$<S,\ *,\ e>\cong<T,\ \circ,I_S>$$

实例

例4 $S = Z_3 = \{ 0, 1, 2 \}$，独异点 $V = \langle S, \oplus, 0 \rangle$,

$S^S = \{ f_0, f_1, f_2, \ldots, f_{26} \}$，其中

$f_0 = \{\langle 0, 0\rangle, \langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle\}$

$f_1 = \{\langle 0, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 0\rangle\}$

$f_2 = \{\langle 0, 2\rangle, \langle 1, 0\rangle, \langle 2, 1\rangle\}$

$\varphi: S \to S^S$, $\varphi(0) = f_0$, $\varphi(1) = f_1$, $\varphi(2) = f_2$

$\varphi(S) = \{ f_0, f_1, f_2 \} \subseteq S^S$

$\oplus$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$\circ$	f_0	f_1	f_2
f_0	f_0	f_1	f_2
f_1	f_1	f_2	f_0
f_2	f_2	f_0	f_1