单元3.1-函数

第一编 集合论　第3章 函数

3.1 函数的基本概念、3.2 函数的性质、

3.3 函数的合成、3.4 反函数

北京大学

内容提要

- 函数的基本概念
- 函数性质：单射、满射、双射
- 函数合成
- 反函数

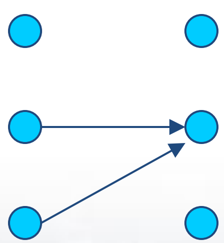
函数(映射)

- 函数(function), 映射(mapping):

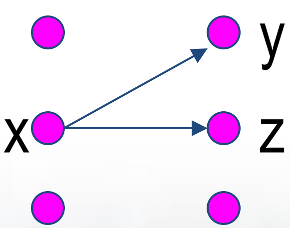
  单值的二元关系

- 单值: $\forall x \in domF, \forall y,z \in ranF,$

  $$xFy \wedge xFz \rightarrow y=z$$



单值



非单值

函数的记号

- $F(x)=y \Leftrightarrow \langle x,y\rangle \in F \Leftrightarrow xFy$
- $\varnothing$是空函数
- 常用F,G,H,…,f,g,h,…表示函数.

偏函数

- 设F是函数
- A到B的偏函数(partial function)

  $$\mathrm{dom}F \subseteq A \wedge \mathrm{ran}F \subseteq B$$

- A称为F的前域

偏函数的记号

- 从A到B的偏函数F记作

$$F:A\nrightarrow B$$

- A到B的全体偏函数记为

$$A\nrightarrow B = \{ F \mid F:A\nrightarrow B \}$$

- 显然 $A\nrightarrow B \subseteq P(A\times B)$

例3.1

- $A=\{a,b\}$, $B=\{1,2\}$.
- $|P(A\times B)|=2^4=16$.　　　$f_0=\varnothing$,

$f_1=\{<a,1>\}$, $f_2=\{<a,2>\}$, $f_3=\{<b,1>\}$, $f_4=\{<b,2>\}$,

$f_5=\{<a,1>,<b,1>\}$, $f_6=\{<a,1>,<b,2>\}$,

$f_7=\{<a,2>,<b,1>\}$, $f_8=\{<a,2>,<b,2>\}$.

$A \mapstochar\rightarrow B = \{f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8\}$.　　#

- 非函数: $\{<a,1>,<a,2>\}$, $\{<a,1>,<a,2>,<b,1>\}$

全函数

- 全函数(total function) :

  domF=A

- 全函数记作 F:A→B

- A到B的全体全函数记为

  $B^A = A \to B = \{ F \mid F:A \to B \}$

关于B^A的说明

- $|B^A| = |B|^{|A|}$
- 当$A=\varnothing$时，$B^A=\{\varnothing\}$
- 当 $A\neq\varnothing \wedge B=\varnothing$ 时，
  $B^A=A\to B=\varnothing$， $B\to A=\{\varnothing\}$.

例3.1

- $A=\{a,b\}$, $B=\{1,2\}$,
- $f_0=\varnothing$,

$f_1=\{<a,1>\}$, $f_2=\{<a,2>\}$, $f_3=\{<b,1>\}$, $f_4=\{<b,2>\}$,

$f_5=\{<a,1>,<b,1>\}$, $f_6=\{<a,1>,<b,2>\}$,

$f_7=\{<a,2>,<b,1>\}$, $f_8=\{<a,2>,<b,2>\}$.

$A\rightarrow B = \{f_5,f_6,f_7,f_8\}$

北京大学

真偏函数

- 真偏函数(proper partial function) :

$$\mathrm{dom}F \subset A$$

- 真偏函数记作 $F:A \nrightarrow B$

- A到B的全体真偏函数记为

$$A \nrightarrow B = \{ F \mid F:A \nrightarrow B \}$$

例3.1

- $A=\{a,b\}$, $B=\{1,2\}$

  $f_0=\varnothing$,

$f_1=\{<a,1>\}$, $f_2=\{<a,2>\}$, $f_3=\{<b,1>\}$, $f_4=\{<b,2>\}$,

$f_5=\{<a,1>,<b,1>\}$, $f_6=\{<a,1>,<b,2>\}$,

$f_7=\{<a,2>,<b,1>\}$,$f_8=\{<a,2>,<b,2>\}$.

A⇻B$=\{f_0, f_1, f_2, f_3, f_4\}$. #

讨论

- $A \nrightarrow B = A \rightarrow B \cup A ⇻ B$
- $F: A \nrightarrow B \;\Rightarrow\; F: \mathrm{dom}\, F \rightarrow B$
- 以下只讨论全函数

全函数性质

- 设 F:A→B

- 单射(injection): F是单根的
- 满射(surjection, onto): ranF=B
- 双射(bijection), 一一对应(1-1 mapping) :

  F既是单射又是满射

例3.2

- $A_1=\{a,b\}$, $B_1=\{1,2,3\}$
- $A_2=\{a,b,c\}$, $B_2=\{1,2\}$
- $A_3=\{a,b,c\}$, $B_3=\{1,2,3\}$

- 求$A_1\to B_1$, $A_2\to B_2$, $A_3\to B_3$中的单射,满射,双射.

例3.2(1)

- $A_1=\{a,b\}$, $B_1=\{1,2,3\}$

- $A_1\to B_1$中无满射, 无双射, 单射6个:
  $f_1=\{<a,1>,<b,2>\}$, $f_2=\{<a,1>,<b,3>\}$,
  $f_3=\{<a,2>,<b,1>\}$, $f_4=\{<a,2>,<b,3>\}$,
  $f_5=\{<a,3>,<b,1>\}$, $f_6=\{<a,3>,<b,2>\}$.

例3.2 (2)

- $A_2=\{a,b,c\}$, $B_2=\{1,2\}$

- $A_2 \to B_2$中无单射, 无双射, 满射6个:

$f_1=\{<a,1>,<b,1>,<c,2>\}$, $f_2=\{<a,1>,<b,2>,<c,1>\}$,

$f_3=\{<a,2>,<b,1>,<c,1>\}$, $f_4=\{<a,1>,<b,2>,<c,2>\}$,

$f_5=\{<a,2>,<b,1>,<c,2>\}$, $f_6=\{<a,2>,<b,2>,<c,1>\}$.

例3.2(3)

- $A_3=\{a,b,c\}$, $B_3=\{1,2,3\}$,

- $A_2 \rightarrow B_2$中双射6个:

$f_1=\{<a,1>,<b,2>,<c,3>\}$, $f_2=\{<a,1>,<b,3>,<c,2>\}$

$f_3=\{<a,2>,<b,1>,<c,3>\}$, $f_4=\{<a,2>,<b,3>,<c,1>\}$

$f_5=\{<a,3>,<b,1>,<c,2>\}$, $f_6=\{<a,3>,<b,2>,<c,1>\}$

#

有多少个单射,满射,双射?

- 设|A|=n, |B|=m

- n<m时, A→B中无满射, 无双射, 单射个数为 m(m-1)…(m-n+1)
- n>m时, A→B中无单射, 无双射, 满射个数为

$$m!\left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\}.$$

- n=m时, A→B中双射个数为 n!

例3.3

例3. 3 A,B是非空有穷集,讨论下列函数的性质

1. $f:A\to B$, $g:A\to A\times B$, $\forall a\in A$,

$$g(a)=\langle a,f(a)\rangle$$

2. $f:A\times B\to A$, $\forall \langle a,b\rangle\in A\times B$,

$$f(\langle a,b\rangle)=a$$

3. $f:A\times B\to B\times A$, $\forall \langle a,b\rangle\in A\times B$,

$$f(\langle a,b\rangle)=\langle b,a\rangle$$

例3.3(1)

- 1. $f:A\to B$, $g:A\to A\times B$, $\forall a\in A$,

  $g(a)=\langle a,f(a)\rangle$

- 当$|B|>1$时, g是单射, 非满射, 非双射

- 当$|B|=1$时, g是单射, 满射, 双射

例3.3(2)

- 2. $f:A\times B\to A$, $\forall\langle a,b\rangle\in A\times B$,

  $f(\langle a,b\rangle)=a$

- 当$|B|>1$时, f非单射, 是满射, 非双射

- 当$|B|=1$时, f是单射, 满射, 双射

例3.3(3)

- 3. $f:A\times B\to B\times A, \forall \langle a,b\rangle \in A\times B,$

  $f(\langle a,b\rangle)=\langle b,a\rangle$

- f是单射, 满射, 双射。 #

象, 原象

- 设 $f:A\to B$, $A'\subseteq A$, $B'\subseteq B$

- A'的象(image)是

$$f(A') = \{\, y \mid \exists x(\, x\in A' \wedge f(x)=y\,)\,\} \subseteq B$$

- B'的原象(preimage)是

$$f^{-1}(B') = \{x \mid \exists y(y\in B' \wedge f(x)=y)\} \subseteq A$$

象, 原象(举例)

- $f(A)=\mathrm{ran}\, f$, $f^{-1}(B)=\mathrm{dom}\, f=A$
- $f:R\to R$, $f(x)=x^2$.

  $A_1=[0,+\infty)$, $A_2=[1,3)$, $A_3=R$

  $f(A_1)=[0,+\infty)$, $f(A_2)=[1,9)$, $f(A_3)=[0,+\infty)$

  $B_1=(1,4)$, $B_2=[0,1]$, $B_3=R$

  $f^{-1}(B_1)=(-2,-1)\cup(1,2)$, $f^{-1}(B_2)=[-1,1]$, $f^{-1}(B_3)=R$

特殊函数

- 常数函数:

  $$f:A\to B,\ \exists b\in B,\ \forall x\in A,\ f(x)=b$$

- 恒等函数:

  $$I_A:A\to A,\ I_A(x)=x$$

特征函数

- 特征函数:

$$\chi_A:E\to\{0,1\},\ \chi_A(x)=1\Leftrightarrow x\in A$$

- 当 $\varnothing\subset A\subset E$时, χ_A是满射

单调函数

- 设$f:A \to B$, $<A,\leq_A>$, $<B,\leq_B>$是偏序集
- 单调增:

  $$\forall x,y \in A,\ x \leq_A y \Rightarrow f(x) \leq_B f(y)$$
- 单调减:

  $$\forall x,y \in A,\ x \leq_A y \Rightarrow f(y) \leq_B f(x)$$
- 严格单调: 把≤换成<, 是单射

北京大学

自然映射

- 设R为A上等价关系
- 自然映射, 典型映射:

  $$f:A\to A/R,\ \ f(x)=[x]_R$$

- 当$R=I_A$时, f是单射.

自然映射(举例)

- $A=\{a,b,c,d\}$, $A/R=\{\{a,b\},\{c\},\{d\}\}$
- $F:A\to A/R$, $F(x)=[x]$

$$F(a)=\{a,b\},$$
$$F(b)=\{a,b\},$$
$$F(c)=\{c\},$$
$$F(d)=\{d\}$$

定理3.3

定理3. 3 设 g:A→B, f:B→C, 则

$$f \circ g : A \to C, \quad f \circ g(x) = f(g(x))$$

证明思路

(1) fog单值 (即fog是函数)

(2) dom fog = A, ran fog $\subseteq$ C

(3) fog(x)=f(g(x))

定理3证明(1)

- fog是单值的, 即fog是函数.
- $\forall x \in dom(fog)$, 若$\exists z_1, z_2 \in ran(fog)$, 使得 $x(fog)z_1 \wedge x(fog)z_2$，则

$$x(fog)z_1 \wedge x(fog)z_2$$

$$\Leftrightarrow \exists y_1(y_1 \in B \wedge xgy_1 \wedge y_1fz_1) \wedge \exists y_2(y_2 \in B \wedge xgy_2 \wedge y_2fz_2)$$

$$\Leftrightarrow \exists y_1 \exists y_2(y_1 \in B \wedge y_2 \in B \wedge xgy_1 \wedge xgy_2 \wedge y_1fz_1 \wedge y_2fz_2)$$

$$\Rightarrow \exists y(y \in B \wedge yfz_1 \wedge yfz_2) \Rightarrow z_1 = z_2$$

定理3证明(2)

- dom(fog) = A, ran(fog)$\subseteq$C.
- 显然dom(fog)$\subseteq$A, ran(fog)$\subseteq$C.

  下证A$\subseteq$dom(fog), $\forall x$,

$$
\begin{aligned}
x\in A &\Rightarrow \exists! y(y\in B \wedge xgy) \\
&\Rightarrow \exists! y \exists! z(y\in B \wedge z\in C \wedge xgy \wedge yfz) \\
&\Rightarrow \exists! z(z\in C \wedge x(fog)z) \\
&\Rightarrow x\in \mathrm{dom}(fog).
\end{aligned}
$$

定理3证明(3)

- $f \circ g(x)=f(g(x))$.
- $\forall x$,

$$
\begin{aligned}
& x \in A \\
\Rightarrow\ & \exists! z(z \in C \wedge z=f \circ g(x)) \\
\Leftrightarrow\ & \exists! z \exists! y(z \in C \wedge y \in B \wedge y=g(x) \wedge z=f(y)) \\
\Leftrightarrow\ & \exists! z(z \in C \wedge z=f(g(x)))
\end{aligned}
$$

所以对任意$x \in A$，有$f \circ g(x)=f(g(x))$. #

定理3.4、定理3.5

定理3. 4 设 $g:A\to B$, $f:B\to C$, $f\circ g:A\to C$,则

(1) 若 f,g 均为满射, 则 fog 也是满射.

(2) 若 f,g 均为单射, 则 fog 也是单射.

(3) 若 f,g 均为双射, 则 fog 也是双射. #

定理3. 5 设 $g:A\to B$, $f:B\to C$, 则

(1) 若 fog 为满射, 则 f 是满射.

(2) 若 fog 为单射, 则 g 是单射.

(3) 若 fog 为双射, 则 g 是单射, f 是满射. #

定理3.6、定理3.7

定理3. 6 设 $f:A\to B$, 则 $f=f\circ I_A=I_B\circ f$. #

定理3. 7 设 $f:R\to R$, $g:R\to R$, 且f,g按≤都是单调增的, 则fog也是单调增的.

证明 $x\le y \Rightarrow g(x)\le g(y) \Rightarrow f(g(x))\le f(g(y))$. #

- 若f,g都是单调减的, 则fog也是单调增的

定理3.8

定理3. 8 设A为集合,则

A^{-1}为函数 $\Leftrightarrow$ A为单根的. #

推论 设R为二元关系, 则

R为函数 $\Leftrightarrow$ R^{-1}为单根的. #

反函数

定理3.9 设 $f:A\to B$，且f为双射，则

$f^{-1}:B\to A$，且f^{-1}也为双射. #

定义3.10 若 $f: A\to B$ 为双射，则 $f^{-1}: B\to A$ 称为 f 的**反函数**。

单边逆

- 设$f:A \to B$, $g:B \to A$
- 左逆:

  g是f的左逆 $\Leftrightarrow$ $g \circ f = I_A$

- 右逆:

  g是f的右逆 $\Leftrightarrow$ $f \circ g = I_B$

定理3.10

定理3. 10 设 **f:A→B**, 且**A≠∅**, 则

(1) f 存在左逆 ⇔ **f** 是单射;

(2) f 存在右逆 ⇔ **f** 是满射;

(3) f 存在左逆, 右逆 ⇔ **f** 是双射

⇔ **f** 的左逆和右逆相等. **#**

北京大学

小结

- 函数,偏函数,全函数,真偏函数
- 单射, 满射, 双射, 计数
- 象, 原象
- 常值函数,恒等函数,特征函数,单调函数,自然映射
- 合成函数,构造双射
- 反函数, 单边逆