



单元-4.1-自然数的定义

第一编 集合论 第4章 自然数

4.1 自然数的定义



北京大学



内容提要

- 皮亚诺系统
- 用集合构造皮亚诺系统
- 后继、归纳集
- 数学归纳法原理





封闭

- F 是函数, $A \subseteq \text{dom } F$
- A 在函数 F 下封闭(closed) \Leftrightarrow
$$F(A) \subseteq A$$

$$\Leftrightarrow F: A \rightarrow A$$

$$\Leftrightarrow F \text{ 是 } A \text{ 上一元运算}$$
- 例: $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(x) = x + 1,$
 $A = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$ 在 f 下不封闭
 $B = \{2, 3, 4, \dots\}$ 在 f 下封闭



Peano系统

• 三元组 $\langle M, F, e \rangle$, $F: M \rightarrow M$

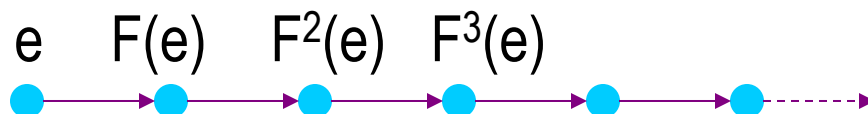
(1) $e \in M$

(2) M 在 F 下封闭

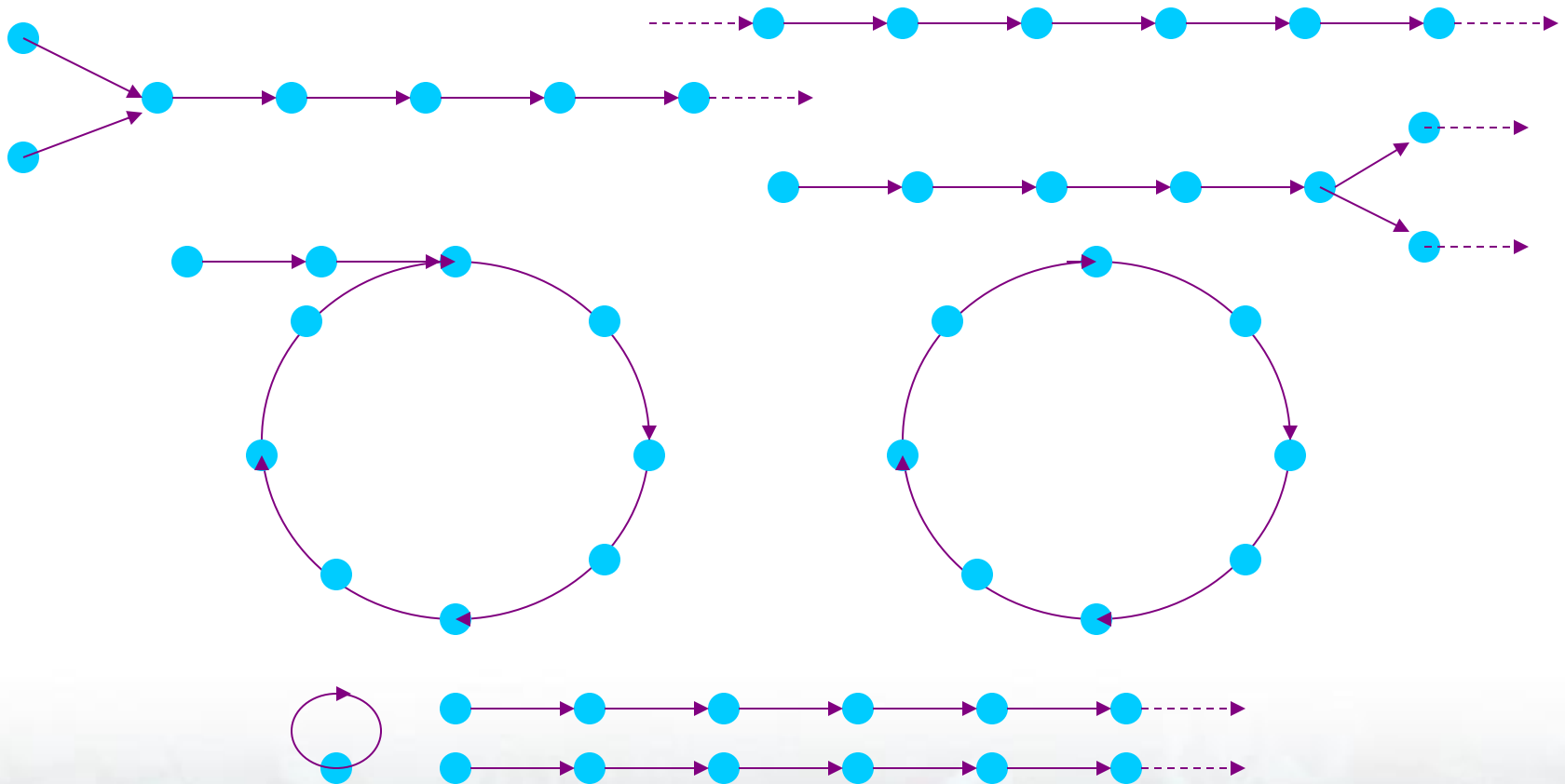
(3) $e \notin \text{ran} F$

(4) F 是单射

(5) $A \subseteq M \wedge e \in A \wedge A \text{ 在 } F \text{ 下封闭} \Rightarrow A = M$
(极小性公理)

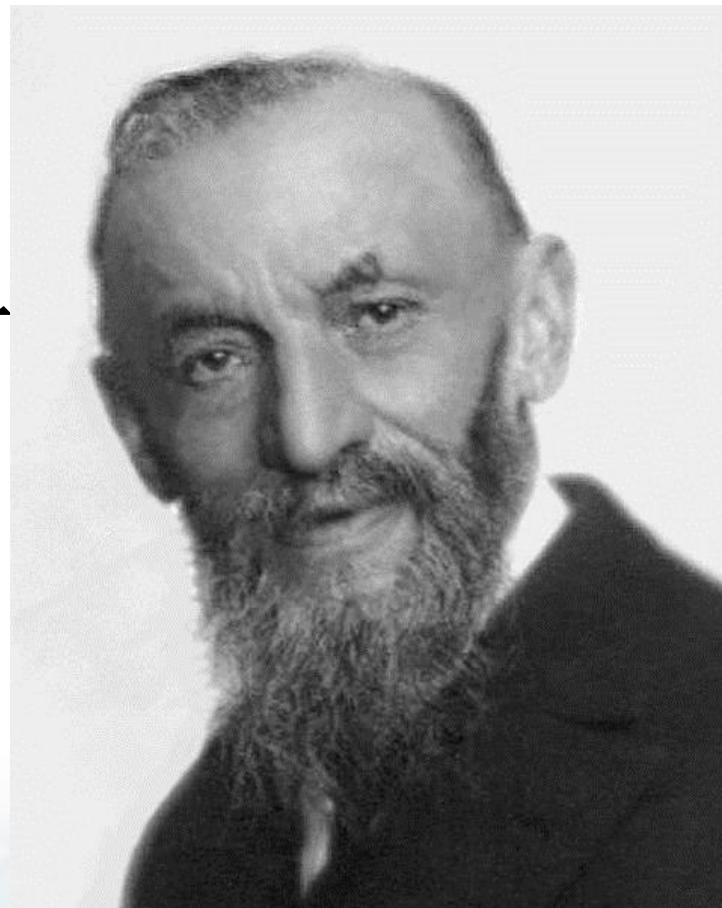


为何如此定义?



Giuseppe Peano

- **Giuseppe Peano**
 - 1858-1932, 意大利数学家
 - 数理逻辑集合论奠基人之一
 - 引入 ϵ 和 \subset 记号
(他最初用的是 ε 和 \supset)
 - 皮亚诺公理 (最初是9条)
 - 皮亚诺曲线
 - 一条充满平面的连续曲线





如何实现?

- 如何利用集合来构造Peano系统?
- 借助于下面两个概念
 - 后继
 - 归纳集





冯•诺依曼

- **John von Neumann**
 - 1903-1957, 匈牙利裔美国科学家
 - 数学(以集合论为例)
 - 基础公理,类(1925博士论文)
 - 后继,归纳集(自然数构造)
 - 量子力学 (奠基人之一)
 - 博弈论(奠基人)
 - 计算机(冯•诺依曼体系结构)



北京大学



后继

- A 是集合
- A 的后继(successor):

$$A^+ = A \cup \{A\}$$

- 特征: $A \subseteq A^+ \wedge A \in A^+$



后继举例

- $\emptyset^+ = \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\}$
 $\emptyset^{++} = \{\emptyset\}^+ = \{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
 $\emptyset^{+++} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
- $\{a\}^+ = \{a\} \cup \{\{a\}\} = \{a, \{a\}\}$
 $\{a\}^{++} = \{a, \{a\}, \{a, \{a\}\}$
 $\{a\}^{+++} = \{a, \{a\}, \{a, \{a\}\}, \{a, \{a\}, \{a, \{a\}\}\}$
- $\{\emptyset, a\}^+ = \{\emptyset, a, \{\emptyset, a\}\}$
 $\{\emptyset, a\}^{++} = \{\emptyset, a, \{\emptyset, a\}, \{\emptyset, a, \{\emptyset, a\}\}$





归纳集

- A 是归纳集 \Leftrightarrow

- (1) $\emptyset \in A$

- (2) $\forall x (x \in A \rightarrow x^+ \in A)$

- A 是归纳集 $\Leftrightarrow A$ 含有 \emptyset 且对后继封闭





归纳集举例

- $A = \{\emptyset, \emptyset^+, \emptyset^{++}, \emptyset^{+++}, \dots\}$
- $A = \{\emptyset, \emptyset^+, \emptyset^{++}, \emptyset^{+++}, \dots, a, a^+, a^{++}, a^{+++}, \dots\}$
- $A = \{\emptyset^+, \emptyset^{++}, \emptyset^{+++}\}$
 - 不是归纳集, 少 \emptyset
- $A = \{\emptyset, \emptyset^+, \emptyset^{++}, \emptyset^{+++}, \dots, a\}$
 - 不是归纳集, 少 $a^+, a^{++}, a^{+++}, \dots$





自然数

- 自然数是属于每个归纳集的集合
- \emptyset
- $\emptyset^+ = \{ \emptyset \}$
- $\emptyset^{++} = \{ \emptyset, \{ \emptyset \} \}$
- $\emptyset^{+++} = \{ \emptyset, \{ \emptyset \}, \{ \emptyset, \{ \emptyset \} \} \}$
- $\emptyset^{++++} = \{ \emptyset, \{ \emptyset \}, \{ \emptyset, \{ \emptyset \} \}, \{ \emptyset, \{ \emptyset \}, \{ \emptyset, \{ \emptyset \} \} \} \}$
-





自然数的记号

- $0 = \emptyset$
- $1 = \emptyset^+ = \{\emptyset\} = \{0\}$
- $2 = \emptyset^{++} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{0, 1\}$
- $3 = \emptyset^{+++} = \{0, 1, 2\}$
-
- $n = (n-1)^+ = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$





自然数作为集合

$$2 \cap 3 = \{0, 1\} \cap \{0, 1, 2\} = \{0, 1\} = 2 = \min(2, 3)$$

$$2 \cup 3 = \{0, 1\} \cup \{0, 1, 2\} = \{0, 1, 2\} = 3 = \max(2, 3)$$

$$3 - 2 = \{0, 1, 2\} - \{0, 1\} = \{2\} \quad (- \text{是集合运算})$$

$$2 - 3 = \{0, 1\} - \{0, 1, 2\} = \emptyset = 0$$

$$\cup n = \cup \{0, 1, \dots, n-1\} = n-1 = \max(0, 1, \dots, n-1)$$

$$\cap n = \cap \{0, 1, \dots, n-1\} = 0 = \min(0, 1, \dots, n-1)$$

$$\bullet \quad 0 \in 1 \in 2 \in 3 \in \dots \qquad 0 \subseteq 1 \subseteq 2 \subseteq 3 \subseteq \dots$$





自然数集

- $D = \{ v \mid v \text{ 是归纳集} \}$
 - D 不是集合, 否则导致悖论!
 - D 是“类”
- 自然数集 $N = \cap D$
- \Rightarrow 自然数集是包含于每个归纳集的集合





对比

- 自然数 是 属于每个归纳集的集合
- 自然数集是包含于每个归纳集的集合



定理4.1

定理4.1 N 是归纳集

证明 $N = \cap D = \cap \{ v \mid v \text{是归纳集} \}$

$$= \{ x \mid \forall v (v \text{是归纳集} \rightarrow x \in v) \}.$$

(1) $\forall v, v \text{是归纳集} \Rightarrow \emptyset \in v. \therefore \emptyset \in N.$

(2) $\forall a, a \in N \Rightarrow \forall v (v \text{是归纳集} \rightarrow a \in v)$ (N定义)

$\Rightarrow \forall v (v \text{是归纳集} \rightarrow a^+ \in v)$ (归纳集定义)

$\Rightarrow a^+ \in N. \therefore N$ 对后继封闭.

由(1)(2), N 是归纳集. #





N是最小的归纳集

- N是最小的归纳集:

$$\forall v(v \text{ 是归纳集} \rightarrow N \subseteq v)$$

- $N = \{ 0, 1, 2, 3, \dots \}$





后继函数

- 后继函数: $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \sigma(n) = n^+$
- 例: $\sigma(0) = 0^+ = 1,$
 $\sigma(1) = 1^+ = 2 = 0^{++},$
 $\sigma(2) = 2^+ = 3 = 1^{++} = 0^{+++},$
.....





定理4.2

- $\langle \mathbb{N}, \sigma, 0 \rangle$ 是 Peano 系统





定理4.2

定理4.2 $\langle N, \sigma, 0 \rangle$ 是 Peano 系统

证明 (1) $\emptyset \in N$: 定理4.1.

(2) $\forall n (n \in N \rightarrow \sigma(n) = n^+ \in N)$: 定理4.1.

(3) $\emptyset \notin \text{ran } \sigma$: $\forall n \in N, \sigma(n) = n^+ = n \cup \{n\} \neq \emptyset$

(4) σ 是单射的: 定理4.3(后面)

(5) $S \subseteq N \wedge \emptyset \in S \wedge \forall n \in S (n^+ \in S) \Rightarrow S = N$:

$\emptyset \in S \wedge \forall n \in S (n^+ \in S) \Rightarrow S$ 是归纳集 $\Rightarrow N \subseteq S$. #

• 注意: 不用(4)证明(5), 用(5)证明(4)





数学归纳法原理

- 目标: 证明 $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ 为真
- 步骤: (一) 构造 $S = \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge P(n)\}$
(二) 证明 S 是归纳集
 - (1) $\emptyset \in S$
 - (2) $\forall n (n \in S \rightarrow n^+ \in S)$ $\therefore S = \mathbb{N}$





定理4.3

定理4.3 任何自然数的元素均为它的子集

证明 令 $S = \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge \forall x (x \in n \rightarrow x \subseteq n)\}$

$$(1) \emptyset \in S: \emptyset \in \mathbb{N} \wedge \forall x (x \in \emptyset \rightarrow x \subseteq \emptyset)$$

$$(2) n \in S \Rightarrow n^+ \in S, \text{ 即 } \forall x, x \in n^+ \Rightarrow x \subseteq n^+:$$

$$\forall x, x \in n^+ = n \cup \{n\} \Rightarrow x \in n \vee x \in \{n\}$$

$$\Rightarrow x \in n \vee x = n \Rightarrow x \subseteq n \vee x = n \quad (\text{归纳假设})$$

$$\Rightarrow x \subseteq n^+ \quad (n \subseteq n^+) \quad \therefore S = \mathbb{N}. \quad \#$$



定理4.2证明(4)

- σ 是单射, 即 $\sigma(m)=\sigma(n) \Rightarrow m=n$ 或
 $m^+=n^+ \Rightarrow m=n$

- 证明: $m^+=n^+ \Rightarrow n \in n^+ = m^+ = m \cup \{m\}$
 $\Rightarrow n \in m \vee n = m \Rightarrow n \subseteq m \vee n = m$ (定理4.3)

同理, $m^+=n^+ \Rightarrow m \subseteq n \vee m = n$.

但是 $n \subseteq m \wedge m \subseteq n \Rightarrow m = n$. #





定理4.4

- $\forall m, n \in N, m^+ \in n^+ \Leftrightarrow m \in n.$

- 证明: (\Rightarrow)

$$m^+ \in n^+ = n \cup \{n\}$$

$$\Rightarrow m^+ \in n \vee m^+ = n$$

$$\Rightarrow m^+ \subseteq n \quad (\text{定理4.3})$$

$$\Rightarrow m \in m^+ \subseteq n$$



定理4.4证明(\Leftarrow)

- $\forall m, n \in \mathbb{N}, m^+ \in n^+ \Leftarrow m \in n$.
- 证明: 令 $S = \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge \forall m (m \in n \rightarrow m^+ \in n^+)\}$
 - (1) $\emptyset \in S$: $\emptyset \in \mathbb{N} \wedge \forall m (m \in \emptyset \rightarrow m^+ \in \emptyset^+)$.
 - (2) $n \in S \Rightarrow n^+ \in S$, 即 $\forall m (m \in n^+ \Rightarrow m^+ \in n^{++})$:
 $m \in n^+ = n \cup \{n\} \Rightarrow m \in n \vee m = n$
 $\Rightarrow m^+ \in n^+ \vee m^+ = n^+$ (归纳假设) $\Rightarrow m^+ \in n^{++}$
($n^+ \subseteq n^{++} \wedge n^+ \in n^{++}$). $\therefore S = \mathbb{N}$. #





定理4.5

定理4.5 任何自然数都不是自己的元素.

证明 令 $S = \{ n \mid n \in N \wedge n \notin n \}$.

(1) $\emptyset \in S$: $\emptyset \in N \wedge \emptyset \notin \emptyset$.

(2) $n \in S \Rightarrow n^+ \in S$:

$n \notin n \Rightarrow n^+ \notin n^+$ (定理4.4)

$\therefore S = N$. #





定理4.6

定理4.6 \emptyset 属于除0外的任何自然数.

证明 令 $S = \{n | n \in \mathbb{N} \wedge n \neq 0 \wedge \emptyset \in n\} \cup \{0\}$

(1) $\emptyset \in S$: 显然

(2) $n \in S \Rightarrow n^+ \in S$:

$$n \in S \Rightarrow n = 0 \vee \emptyset \in n \Rightarrow \emptyset \in n^+ \Rightarrow n^+ \in S.$$

$\therefore S = \mathbb{N}. \quad \#$





定理4.7 (三歧性)

- $\forall m, n \in N, m \in n, m = n, n \in m$ 中恰有一式成立
- 证明概要:
- 至多成立一式:
 - $m \in n \wedge n \in m \Rightarrow m \in n \subseteq m$ (定理4.3) $\Rightarrow m \in m$
 - $m \in n \wedge m = n \Rightarrow m \in m$, 与定理4.5矛盾!
- 至少成立一式:
 - $S = \{n \mid n \in N \wedge \forall m (m \in N \rightarrow m \in n \vee m = n \vee n \in m)\}$





小结

- Peano系统
- 后继, 归纳集, 自然数, 自然数集
- 数学归纳法原理
- 自然数性质的证明

