



基本可行解的性质

引理1 $Ax=b$ 的解 α 是基本解 $\Leftrightarrow \alpha$ 中非零分量对应的列向量线性无关.

定理1 如果标准形有可行解, 则必有基本可行解.

定理2 如果标准形有最优解, 则必存在一个基本可行解是最优解.



北京大學



6.3 单纯形法

基本步骤

(1) 确定初始基本可行解.

(2) 检查当前的基本可行解.

若是最优解或无最优解, 计算结束;

否则作基变换, 用一个非基变量替换一个基变量, 得到一个新的可行基和对应的基本可行解, 且使目标函数值下降 (至少不升).

(3) 重复 (2).



北京大學

确定初始基本可行解

先考虑最简单的情况, 设约束条件为

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i, b_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m$$

引入 m 个松弛变量 $x_{n+i} \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$),

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n + x_{n+i} = b_i, \quad i=1, 2, \dots, m$$

取 x_{n+i} ($i = 1, 2, \dots, m$) 作为基变量, 初始基本可行解为

$$x^{(0)} = (0, 0, \dots, 0, b_1, b_2, \dots, b_m)^T$$

$$\begin{aligned} \min z' &= -12x_1 - 15x_2 \\ \text{s.t. } 0.25x_1 + 0.50x_2 + x_3 &= 120 \\ 0.50x_1 + 0.50x_2 + x_4 &= 150 \\ 0.25x_1 + x_5 &= 50 \\ x_j &\geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, 5 \end{aligned}$$

例 $\max z = 12x + 15y$

$$\begin{aligned} \text{s.t. } 0.25x + 0.50y &\leq 120 \\ 0.50x + 0.50y &\leq 150 \\ 0.25x &\leq 50 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{aligned}$$

取 x_3, x_4, x_5 作为基变量, $x^{(0)} = (0, 0, 120, 150, 50)^T$



最优性检验

给定可行基 $B=(P_{\pi(1)}, P_{\pi(2)}, \dots, P_{\pi(m)})$, $Ax=b$ 两边同乘 B^{-1} , 得 $B^{-1}Ax = B^{-1}b$. 记 A 中对应非基变量的列构成的矩阵为 N ,

$$x_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b$$

解得

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$$

代入目标函数

$$\begin{aligned} z &= c^T x = c_B^T x_B + c_N^T x_N \\ &= c_B^T (B^{-1}b - B^{-1}Nx_N) + c_N^T x_N \\ &= c_B^T B^{-1}b + (c_N^T - c_B^T B^{-1}N)x_N \end{aligned}$$

基本可行解 $x_B^{(0)} = B^{-1}b$, $x_N^{(0)} = 0$, 目标函数值 $z_0 = c_B^T B^{-1}b$



北京大学

最优性检验

$$z = c^T x$$

$$= z_0 + (c_N^T - c_B^T B^{-1} N) x_N$$

$$= z_0 + (c_B^T - c_B^T B^{-1} B) x_B + (c_N^T - c_B^T B^{-1} N) x_N$$

$$= z_0 + (c^T - c_B^T B^{-1} A) x$$

记 $\lambda^T = c^T - c_B^T B^{-1} A$ 检验数

$z = z_0 + \lambda^T x$ 简化的目标函数



最优性检验

$$z = z_0 + \lambda^T x$$
$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}N x_N$$

记 $B^{-1}A = (\alpha_{ij})_{m \times n}$, $P'_j = B^{-1}P_j$ ($1 \leq j \leq n$), $\beta = B^{-1}b$.

定理 3 给定基本可行解 $x^{(0)}$,

(1) 若所有检验数大于等于0, 则 $x^{(0)}$ 是最优解.

(2) 若存在检验数 $\lambda_k < 0$ 且所有 $\alpha_{ik} \leq 0$ ($1 \leq i \leq m$), 则无最优解.

证 (1) 如果 $\lambda \geq 0$, 则对任意可行解, $x \geq 0$, $z \geq z_0$, 故 $x^{(0)}$ 是最优解.

(2) 若存在 $\lambda_k < 0$ (λ_k 必对应非基变量) 且所有 $\alpha_{ik} \leq 0$ ($1 \leq i \leq m$), 取 $x_k = M > 0$, 其余非基变量 $x_j = 0$, 解得

$$x_{\pi(i)} = \beta_i - \alpha_{ik} M \geq 0, \quad 1 \leq i \leq m$$

这是一个可行解, 其目标函数值为

$$z = z_0 + \lambda_k M$$

当 $M \rightarrow +\infty$ 时, $z \rightarrow -\infty$. 得证无最优解.

问题 存在检验数 $\lambda_k < 0$ 且有 $\alpha_{lk} > 0$, 做基变换.



北京大学

基变换

给定可行基 $B=(P_{\pi(1)}, P_{\pi(2)}, \dots, P_{\pi(m)})$, 设 $\lambda_k < 0$ 且 $\alpha_{lk} > 0$, x_k 必是非基变量.

基变换: 用非基变量 x_k 替换基变量 $x_{\pi(l)}$, 用 P_k 替换 B 中的 $P_{\pi(l)}$, 新的基为 $B'=(P_{\pi(1)}, \dots, P_{\pi(l-1)}, P_k, P_{\pi(l+1)}, \dots, P_{\pi(m)})$.
称 x_k 为**换入变量**, $x_{\pi(l)}$ 为**换出变量**.



基变换

计算公式

$$\alpha_{lj}' = \alpha_{lj} / \alpha_{lk}, \quad 1 \leq j \leq n$$

$$\alpha_{ij}' = \alpha_{ij} - \alpha_{ik} \alpha_{lj} / \alpha_{lk}, \quad 1 \leq i \leq m \text{ 且 } i \neq l, 1 \leq j \leq n$$

$$\beta_l' = \beta_l / \alpha_{lk}$$

$$\beta_i' = \beta_i - \alpha_{ik} \beta_l / \alpha_{lk}, \quad 1 \leq i \leq m \text{ 且 } i \neq l$$

为保证 B' 是可行的, 只需

$$\beta_i' = \beta_i - \alpha_{ik} \beta_l / \alpha_{lk} \geq 0, \quad 1 \leq i \leq m \text{ 且 } i \neq l$$

$\beta_i \geq 0, \beta_l \geq 0, \alpha_{lk} > 0$. $\alpha_{ik} \leq 0$ 时不等式成立; $\alpha_{ik} > 0$ 时 $\beta_l / \alpha_{lk} \leq \beta_i / \alpha_{ik}$

取 l 使得 $\beta_l / \alpha_{lk} = \min \{ \beta_i / \alpha_{ik} \mid \alpha_{ik} > 0, 1 \leq i \leq m \}$

用第 l 个方程消去简化的目标函数中的 x_k ,

$$\lambda_j' = \lambda_j - \lambda_k \alpha_{lj} / \alpha_{lk}, \quad 1 \leq j \leq m$$

$$z_0' = z_0 + \lambda_k \beta_l / \alpha_{lk}$$



北京大學

单纯形法

算法 单纯形法 (针对最小化)

1. 设初始可行基 $B = (P_{\pi(1)}, P_{\pi(2)}, \dots, P_{\pi(m)})$, $\alpha = B^{-1}A$, $\beta = B^{-1}b$,
 $\lambda^T = c^T - c_B^T B^{-1}A$, $z_0 = B^{-1}b$.
2. 若所有 $\lambda_j \geq 0$ ($1 \leq j \leq n$), 则 $x_B = \beta$, $x_N = 0$ 是最优解, 计算结束.
3. 取 $\lambda_k < 0$. 若所有 $\alpha_{ik} \leq 0$ ($1 \leq i \leq m$), 则无最优解, 计算结束.
4. 取 l 使得
$$\beta_l / \alpha_{lk} = \min \{ \beta_i / \alpha_{ik} \mid \alpha_{ik} > 0, 1 \leq i \leq m \}$$
5. 以 x_k 为换入变量、 $x_{\pi(l)}$ 为换出变量做基变换.
6. 转 2.

对最大化, 2中 $\lambda_j \geq 0$ 改为 $\lambda_j \leq 0$, 3中 $\lambda_k < 0$ 改为 $\lambda_k > 0$.





单纯形表

			c_1	c_2	\dots	c_n	θ
c_B	x_B	b	x_1	x_2	\dots	x_n	
$c_{\pi(1)}$	$x_{\pi(1)}$	β_1	α_{11}	α_{12}	\dots	α_{1n}	
$c_{\pi(2)}$	$x_{\pi(2)}$	β_2	α_{21}	α_{22}	\dots	α_{2n}	
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\dots	\vdots	
$c_{\pi(m)}$	$x_{\pi(m)}$	β_m	α_{m1}	α_{m2}	\dots	α_{mn}	
	$-z$	$-z_0$	λ_1	λ_2	\dots	λ_n	

$$-z + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n = -z_0$$





例1

$$\begin{aligned}
 \min z &= -12x_1 - 15x_2 \\
 \text{s.t. } &0.25x_1 + 0.50x_2 + x_3 = 120 \\
 &0.50x_1 + 0.50x_2 + x_4 = 150 \\
 &0.25x_1 + x_5 = 50
 \end{aligned}$$

			-12	-15	0	0	0	θ
c_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	120	0.25	0.50	1	0	0	240
0	x_4	150	0.50	0.50	0	1	0	300
0	x_5	50	0.25	0	0	0	1	
	$-z$	0	-12	-15	0	0	0	
-15	x_2	240	0.50	1	2	0	0	480
0	x_4	30	0.25	0	-1	1	0	120
0	x_5	50	0.25	0	0	0	1	200
	$-z$	3600	-4.5	0	30	0	0	
-15	x_2	180	0	1	4	-2	0	
-12	x_1	120	1	0	-4	4	0	
0	x_5	20	0	0	1	-1	1	
	$-z$	4140	0	0	12	18	0	

例 2

用单纯形法解下述线性规划

$$\min z = x_1 - 2x_2$$

$$\text{s.t. } x_1 - x_2 \leq 1$$

$$-2x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

解 引入2个松弛变量 x_3, x_4 , 得到标准形

$$\min z = x_1 - 2x_2$$

$$\text{s.t. } x_1 - x_2 + x_3 = 1$$

$$-2x_1 + x_2 + x_4 = 4$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4$$



例2的单纯形表

			1	-2	0	0	
c_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	θ
0	x_3	1	1	-1	1	0	4
0	x_4	4	-2	1	0	1	
	$-z$	0	1	-2	0	0	
0	x_3	5	-1	0	1	1	
-2	x_2	4	-2	1	0	1	
	$-z$	8	-3	0	0	2	

目标函数值没有下界, 无最优解



其他约束条件的情况

现考虑剩余的两种情况:

$$(1) \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i$$

$$(2) \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i$$

其中 $b_i \geq 0$. 对于(1), 引入剩余变量转化成 (2).

对(2)引入人工变量 $y_j \geq 0$,

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + y_j = b_i$$

取所有松弛变量和人工变量作为基变量, 得到初始可行基.

根据辅助问题的解判断原始问题是否存在基本可行解.

方法: 两阶段法.



北京大学

6.4 对偶性

例3 公司甲用 3 种原料混合成 2 种清洁剂.

问：这 2 种清洁剂应各配制多少才能使总价值最大？

	原料1	原料2	原料3	售价(万元/吨)
清洁剂A	0.25	0.50	0.25	12
清洁剂B	0.50	0.50		15
存量 (吨)	120	150	50	

公司乙急需这 3 种原料, 打算向公司甲购买, 应出什么价钱？



例3（续）

公司甲：

设清洁剂 A 和 B 分别配制 x_1 和 x_2

$$\max z = 12x_1 + 15x_2$$

$$\text{s.t. } 0.25x_1 + 0.50x_2 \leq 120$$

$$0.50x_1 + 0.50x_2 \leq 150$$

$$0.25x_1 \leq 50$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

公司乙向甲买3种原料存量，
出价每吨分别为 y_1, y_2, y_3 万元。
希望总价尽可能的小，但又不能低于公司甲用这些原料生产清洁剂所产生的价值

$$\min w = 120y_1 + 150y_2 + 50y_3$$

$$\text{s.t. } 0.25y_1 + 0.50y_2 + 0.25y_3 \geq 12$$

$$0.50y_1 + 0.50y_2 \geq 15$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0$$



北京大学

对偶线性规划

定义 原始线性规划 (P)

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & A x \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

对偶线性规划 (D)

$$\begin{aligned} \min \quad & b^T y \\ \text{s.t.} \quad & A^T y \geq c \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

定理4 对偶的对偶是原始线性规划.

证 (D)可改写成 (D')

$$\begin{aligned} \max \quad & -b^T y \\ \text{s.t.} \quad & -A^T y \leq -c \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

(D') 的对偶为

$$\begin{aligned} \min \quad & -c^T x \\ \text{s.t.} \quad & (-A^T)^T x \geq -b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$



北京大學

例4

写出下述线性规划的对偶

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 - x_2 + 3x_3 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + 3x_2 - 2x_3 \leq 5 \\ & -x_1 - 2x_2 + x_3 = 8 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \text{ 任意} \end{aligned}$$

对偶规划为

$$\begin{aligned} \min \quad & 5y_1 + 8y_2' - 8y_2'' \\ \text{s.t.} \quad & y_1 - y_2' + y_2'' \geq 2 \\ & 3y_1 - 2y_2' + 2y_2'' \geq -1 \\ & -2y_1 + y_2' - y_2'' \geq 3 \\ & 2y_1 - y_2' + y_2'' \geq -3 \\ & y_1 \geq 0, y_2' \geq 0, y_2'' \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{令 } x_3 &= x_3' - x_3'', \\ A=B \text{ 等价于 } A \leq B \text{ 和 } -A \leq -B, \\ \max \quad & 2x_1 - x_2 + 3x_3' - 3x_3'' \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + 3x_2 - 2x_3' + 2x_3'' \leq 5 \\ & -x_1 - 2x_2 + x_3' - x_3'' \leq 8 \\ & x_1 + 2x_2 - x_3' + x_3'' \leq -8 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3' \geq 0, x_3'' \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{令 } y_2 &= y_2' - y_2'', \text{ 合并后2个不等式} \\ \min \quad & 5y_1 + 8y_2 \\ \text{s.t.} \quad & y_1 - y_2 \geq 2 \\ & 3y_1 - 2y_2 \geq -1 \\ & -2y_1 + y_2 = 3 \\ & y_1 \geq 0, y_2 \text{ 任意} \end{aligned}$$



对偶规划的一般形式

原始规划

$$\max \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, 1 \leq i \leq s$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, s+1 \leq i \leq m$$

$$x_j \geq 0, 1 \leq j \leq t$$

$$x_j \text{ 任意}, t+1 \leq j \leq n$$

对偶规划

$$\min \sum_{i=1}^m b_i y_i$$

$$y_i \geq 0, 1 \leq i \leq s$$

$$y_i \text{ 任意}, s+1 \leq i \leq m$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \leq c_j, 1 \leq j \leq t$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i = c_j, t+1 \leq j \leq n$$





性质

定理5 设 x 是原始规划 (P) 的可行解, y 是对偶规划 (D) 的可行解, 则恒有

$$c^T x \leq b^T y$$

证 $c^T x \leq (A^T y)^T x = y^T (Ax) \leq y^T b = b^T y$

定理6 如果 x 和 y 分别是原始规划(P)和对偶规划(D)的可行解, 且 $c^T x = b^T y$, 则 x 和 y 分别是它们的最优解.

定理7 如果原始规划(P)有最优解, 则对偶规划(D)也有最优解, 且它们的最优值相等. 反之亦然.





原始规划和对偶规划的解

- (1) 都有最优解, 且最优值相等.
- (2) 一个有可行解且目标函数值无界, 而另一个无可行解.
- (3) 都没有可行解.

		对偶规划		
		有最优解	有可行解且无界	无可行解
原始规划	有最优解	(1)	×	×
	有可行解且无界	×	×	(2)
	无可行解	×	(2)	(3)



整数线性规划的 分支限界算法

整数线性规划 在线性规划上对变量增添整数的要求

纯整数线性规划(全整数线性规划) 要求所有变量是整数

混合整数线性规划 只要求部分变量是整数

0-1型整数线性规划 要求所有变量是0或1

松弛规划(简称松弛) 删去整数

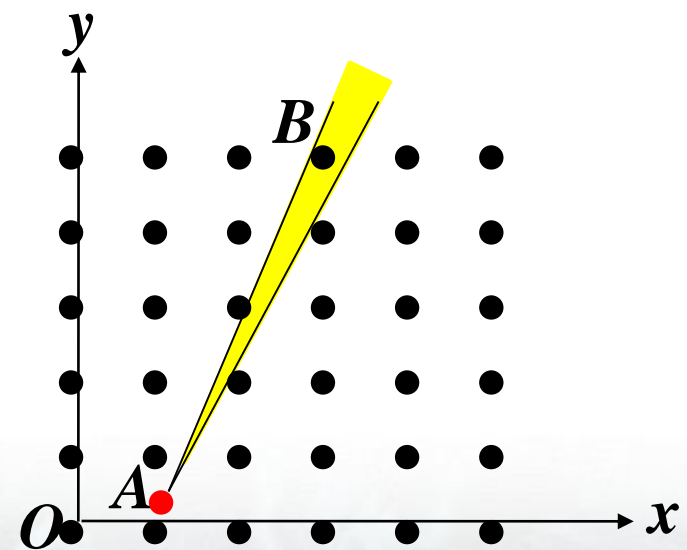
要求后得到的线性规划

松弛规划的最优值是原整数规

划的最优值的界限(最小化的

下界,最大化的上界),但通常不

是原整数规划的最优解



北京大学

分支限界法

记整数线性规划为 ILP, 其松弛为 LP. 如果 LP 的最优解 α 满足整数要求, 则 α 是 ILP 的最优解.

否则, 设 α_1 不满足整数要求, 在 LP 上分别添加

$$x_1 \leq \lfloor \alpha_1 \rfloor \quad \text{和} \quad x_1 \geq \lfloor \alpha_1 \rfloor + 1,$$

记作 LP_1 和 LP_2 . 如果 LP_1 或 LP_2 的最优解符合整数要求, 那么这个解也是 ILP 的可行解, 得到 ILP 的最优值的一个界限 (最小化上界, 最大化下界), 该子问题的计算结束.

如果子问题的最优解不满足整数要求, 则继续分支计算.

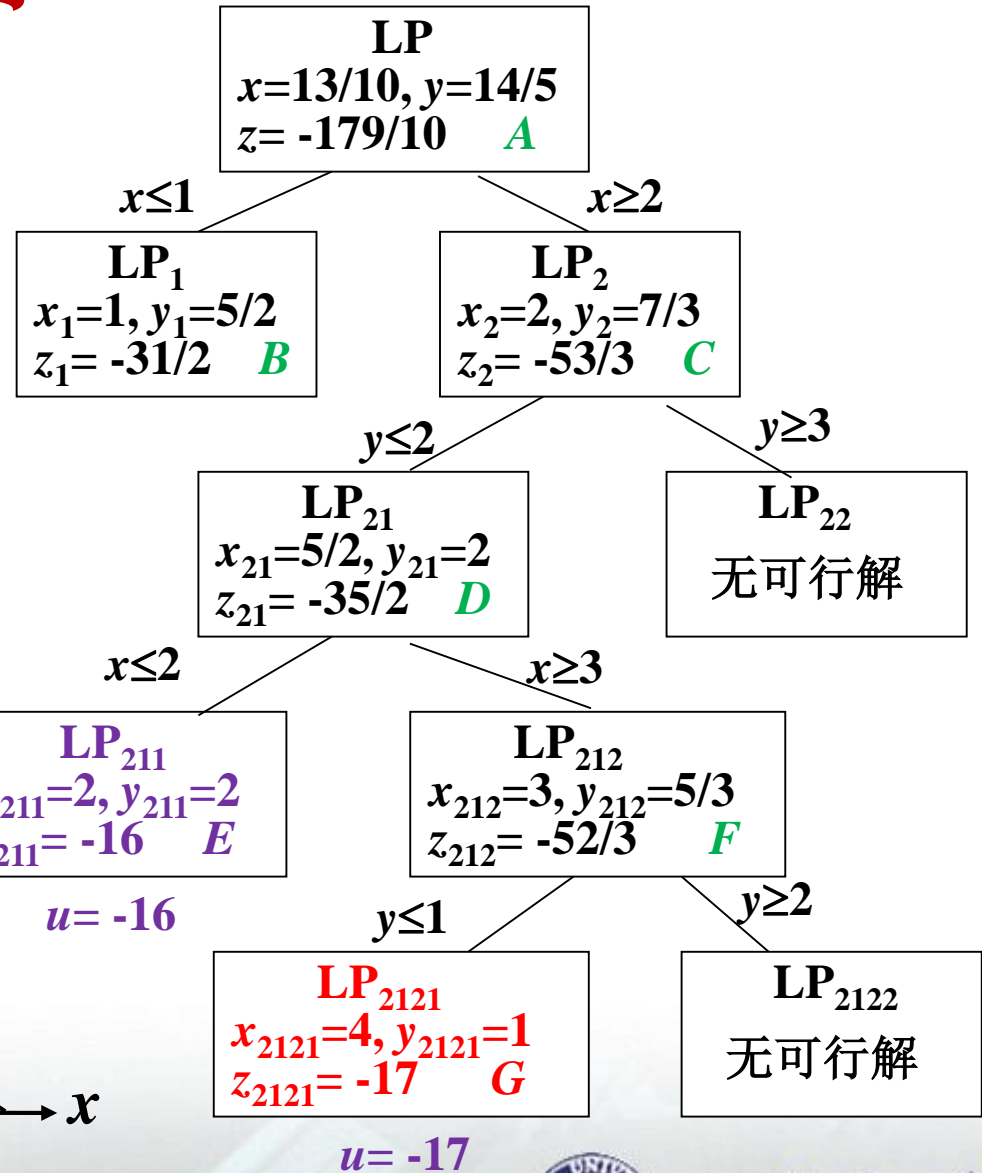
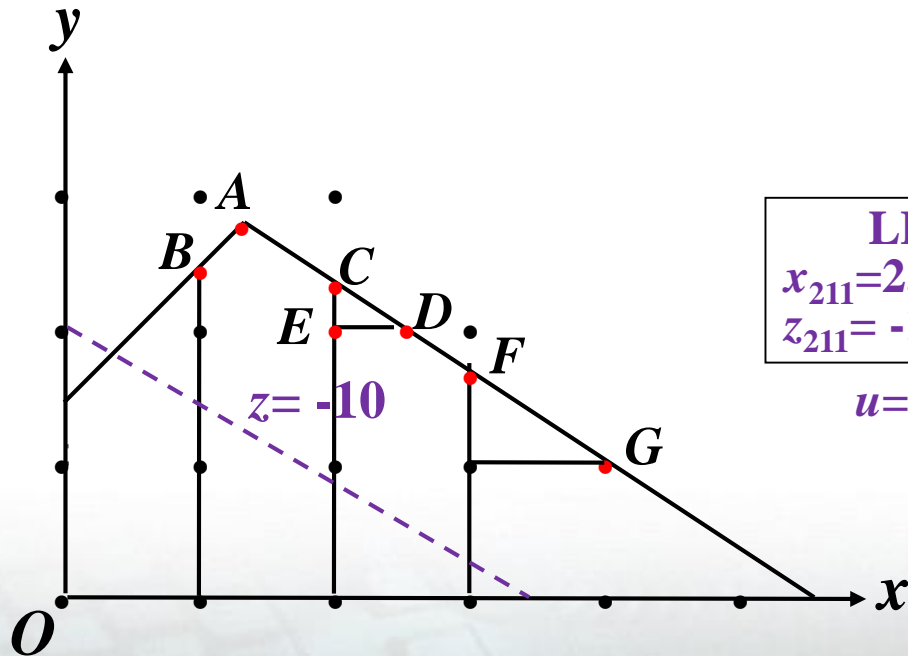
如果子问题的最优值超过界限 (最小化大于界限, 最大化小于界限), 则往下计算不可能得到 ILP 的最优解, 计算结束.

当没有待计算的子问题时, 所有可行解中最好的是 ILP 的最优解.



例5

$$\begin{aligned} \min z &= -3x - 5y \\ \text{s.t. } -x + y &\leq 3/2 \\ 2x + 3y &\leq 11 \\ x, y &\geq 0, \text{ 整数} \end{aligned}$$



北京大学

应用：最小顶点覆盖

- 顶点覆盖问题

给定图 $G = (V, E)$, G 的顶点覆盖是顶点子集 $S \subseteq V$, 使得每条边至少有一个端点属于 S . 求 G 的最小的顶点覆盖.

- 转化为线性规划问题

令 $V = \{1, 2, \dots, n\}$, $\forall e \in E$, 存在 $i, j \in V$, 使得 $e = (i, j)$

$\forall i \in V$, 定义变量 $x_i = 0, 1$, 且 $x_i = 1 \Leftrightarrow i \in S$

$\forall e = (i, j) \in E, x_i + x_j \geq 1$

$$\min \sum_{i \in V} x_i$$

$$\begin{aligned} \text{s.t. } & x_i + x_j \geq 1 & (i, j) \in E \\ & x_i = 0, 1 & i \in V \end{aligned}$$





设计算法

- 顶点覆盖是整数规划问题，属于NP难问题。
- 近似算法的设计思想：
 1. 放松 $x_i = 0, 1$ 的约束条件，令 x_i 为 $[0, 1]$ 区间任意实数，转化为线性规划问题。
 2. 用线性规划算法找到一组 $x_i \in [0, 1]$, $i = 1, 2, \dots, n$ ，使得其和达到最小。
 3. 令 $S = \{i \mid x_i \geq 1/2\}$ 。
- 算法分析
可以证明上述 S 是 G 的顶点覆盖，且 $|S| \leq 2|S^*|$ ，其中 S^* 为最优解。



应用：负载均衡问题

- 负载均衡问题

给定作业集合 $J = \{1, 2, \dots, n\}$, 作业 j 加工时间为 t_j , $j = 1, 2, \dots, n$. 机器集合 $M = \{1, 2, \dots, m\}$, 对每个作业分配一台机器, 作业 j 可分配的机器集合为 M_j . J_i 是分配到机器 i 上的作业集合. 机器 i 的负载是 L_i . 设分配方案的负载为 L , 其中

$$L = \max_{i \in \{1, 2, \dots, m\}} L_i, \quad L_i = \sum_{j \in J_i} t_j$$

问题：求分配方案 使得 L 达到最小。

转变为线性规划

x_{ij} : 任务 j 在机器 i 上的负载

$\min L$

$$\text{s.t. } \sum_i x_{ij} = t_j \quad \forall j \in J$$

任务 j 在各机器的负载之和等于加工时间

$$\sum_j x_{ij} \leq L \quad \forall i \in M$$

任何机器的负载总量不超过 L

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall j \in J, i \in M_j$$

- 如果上述线性规划有值不超过 L 的解，那么最优负载的值至少是 L .
- 线性规划的最优解有可能把一个作业分配到多台机器上，即负载是分数。需要调整这个解，以满足原问题的需求：每个作业只能分配到一台机器上。

