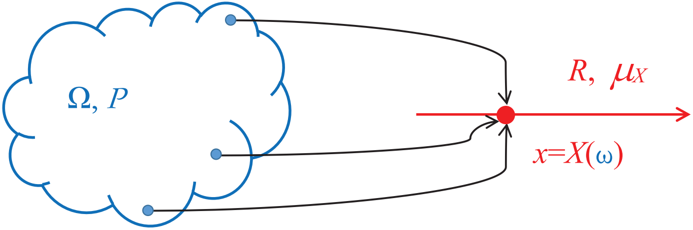


- 伯努利、二项、泊松、几何；超几何、负二项、均匀、退化.
- 二项分布: $P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$, $k=0,1,\cdots,n$.
- 泊松分布: $P(Y=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, $k=0,1,2,\cdots$.
- 当$n\to\infty$, $np\to\lambda$ 时, $P(X=k)\to P(Y=k)$, $\forall k$.

§2.3 连续型随机变量

定义 (连续型随机变量)

假设存在$p(x) \geqslant 0$ 使得对任意$a < b$, $P(a < X < b) = \int_a^b p(x)dx$, 则称$X$ 是连续型随机变量, 并称$p(x)$为(概率)密度(函数).

密度函数: $\int p(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1$.

- $p(x) \neq P(X = x)$,
- $P(X \in [x, x + \Delta x]) = p(x)\Delta x + o(\Delta x)$,
- $P(X = x) = 0$,
- 对任意$a < b$, $P(a < X < b) = \int_a^b p(x)dx$ 等价于 对任意$a < b$, $P(a < X \leqslant b) = \int_a^b p(x)dx$.
- 单独谈论一个点x 对应的$p(x)$ 没有意义.

1. 均匀分布(uniform distribution, $X \sim U(a,b)$)

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}; & 若 a \leqslant x \leqslant b, (或 a < x < b); \\ 0, & 否则. \end{cases}$$

- 也可以表达如下：

$$p(x) = \frac{1}{b-a} 1_{\{a \leqslant x \leqslant b\}};$$

或者

$$p(x) = \frac{1}{b-a}, \quad 其中 a \leqslant x \leqslant b.$$

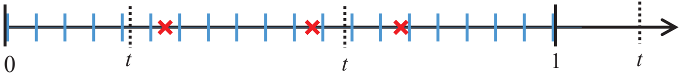
2. 指数分布(exponential distribution, $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$) X的密度为：

$$p(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad \text{其中} x > 0.(\text{ 或} x \geqslant 0)$$

X: 等待时间、寿命.

例2.3 X = 第一个粒子的放射时刻. 以8分钟为宏观单位时间1.

- $\frac{1}{n}$: 微观单位时间,
  在一个微观单位时间内放射粒子的概率为$p = \lambda \times \frac{1}{n}$.

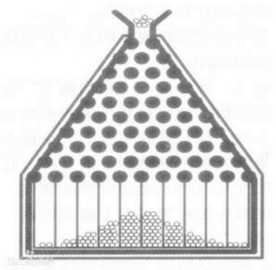


- $X \approx \frac{Y}{n}$, 其中Y 是参数为p 的几何分布. 于是,
  $P(X > t) \approx P(Y > nt) \approx (1-p)^{nt} = (1 - \frac{\lambda}{n})^{nt} \to e^{-\lambda t}$.
- $P(X > t) = e^{-\lambda t}$.
- $P(X - t > s | X > t) = e^{-\lambda s}$. 无记忆性.

3. 正态分布(normal distribution, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$)

标准正态分布$N(0,1)$: $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$. (中心极限定理, §4.3.)

高尔顿钉板试验



- $N(\mu, \sigma^2)$: $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\}$.
- $p(x) = Ce^{-ax^2+bx}$, 其中$a > 0$.
- 自习分布$4 \sim 7$.

§2.4 随机变量的严格定义与分布函数

定义 (随机变量的严格定义)

设$(\Omega, \mathcal{F}, P)$是概率空间，$X = X(\omega)$是Ω上的函数，如果对任意$x \in \mathbf{R}^1$，$\{\omega : X(\omega) \leqslant x\} \in \mathcal{F}$，则称$X$是定义在概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, P)$上随机变量.

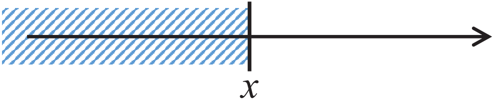
- $\mathbf{R}^1$上Borel集定义：令$\mathcal{P} = \{(a, b] : \quad a < b,\ a,\ b \in \mathbf{R}^1\}$
  $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbf{R}^1)$：包含$\mathcal{P}$ 的最小的对余、可列并封闭的集类.
  称$\mathcal{B}(\mathbf{R}^1)$ 中集合为Borel(可测)集.
- $\mathbf{R}^1$ 中有现实意义的集合都是Borel(可测)集.
- 假设X 是随机变量，则对任意$B \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^1)$，
  $\{\omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$，从而$P(X \in B)$ 有意义.

定义 (随机变量的分布函数)

随机变量X 的分布函数定义为

$$F_X(x) := P(X \leqslant x), \quad x \in (-\infty, \infty).$$

若$F_X = F_Y$, 则称X 与Y 同分布, 记为$X \overset{d}{=} Y$.



- 由$F_X(x)$ 可求出$P(X \in B), \forall B \in \mathcal{B}(R^1)$. 它依赖于$X, P$.
- $X \overset{a.s.}{=} Y$, 即$P(X = Y) = 1$, 则$F_X = F_Y$. 反之不然.
- 分布函数的三条性质(定理4.2, 5.4):

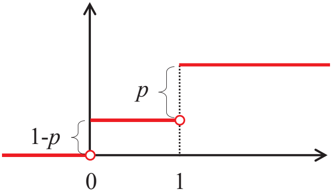
  (1) 单调性: 若$x \leqslant y$, 则$F(x) \leqslant F(y)$.

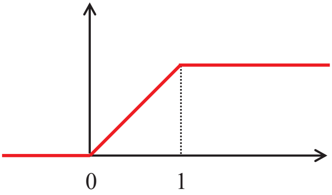
  (2) 归一性: $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$; $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$.

  (3) 右连续性: $\lim_{y\to x+} F(y) = F(x)$.

$F_X(x) = P(X \leqslant x)$.

- 离散型: $P(X = x_i) = p_i$. x_i 为F_X 的跳点, p_i 为跳跃幅度.





- 连续型: $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} p(z)dz$, 且

$$p(x) = F'_X(x).$$

F_X “几乎”可导(定理4.4).

通过分布函数求一些事件的概率:

- $P(X < b) = F(b-)$;
- $P(X = a) = F(a) - F(a-)$;
- $P(a < X \leqslant b) = F(b) - F(a)$;
- $P(X > b) = 1 - F(b)$.

- 令$G(x) = P(X > x) = 1 - F(x)$, $p(x) = -G'(x)$.

例 $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$.

  - $G(x) = \begin{cases} 1 & 若 x \leqslant 0; \\ e^{-\lambda x}, & 若 x > 0. \end{cases}$
  - $G'(x) = \begin{cases} 0 & 若 x < 0; \\ -\lambda e^{-\lambda x}, & 若 x > 0. \end{cases}$ $G'(0)$ 不存在.

- **注：** 存在既不是连续型也不是离散型的随机变量. 存在分布函数满足定理4.2的三条性质, 连续但不可导.

§2.5 随机变量的函数

函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto y=f(x)$.

随机变量X 的函数指一个新随机变量

$$Y=f(X):\omega\mapsto f(X(\omega)).$$

目标: 求Y 的分布列或密度函数.

- **离散型**　假设X 的分布列为$P(X=x_i)=p_i,\ i\geqslant 1$. 则$Y$ 也是离散型, 将其可能取值记为$y_j,\ j\geqslant 1$.

$$P(Y=y_j)=\sum_{i:f(x_i)=y_j}p_i.$$

- **连续型 方法 I: 先求分布函数再求导**

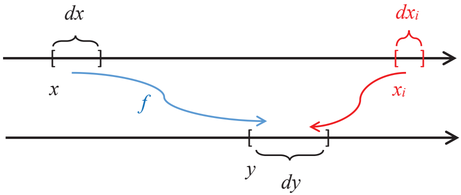
例5.1 假设$X \sim N(0,1)$. $f(x) = \mu + \sigma x$, 其中$\sigma > 0$.
则$Y = f(X) \sim N(\mu, \sigma^2)$.

- $Y \leqslant y$ 当且仅当$\mu + \sigma X \leqslant y$, 即$X \leqslant \frac{y-\mu}{\sigma}$.
- $F_Y(y) = P(Y \leqslant y) = P(X \leqslant \frac{y-\mu}{\sigma}) = \int_{-\infty}^{\frac{y-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-\frac{z^2}{2}\} dz$.
- $p_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\}$.

- **注:** 反过来, 若$Y \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则$X := \frac{Y-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$.
  更一般地, $Z := a + bY \sim N(\tilde{\mu}, \tilde{\sigma}^2)$, 其中$b \neq 0$. (求$\tilde{\mu}$, $\tilde{\sigma}$).

- **连续型 方法 II: 公式法**

$$p_X(x)|dx| = p_Y(y)|dy| \Longrightarrow p_Y(y) = p_X(x)\left|\frac{dx}{dy}\right| = \cdots.$$



$$p_Y(y) = \sum_{x_i: f(x_i)=y} p_X(x_i)\left|\frac{dx_i}{dy}\right| = \cdots.$$

- 注 若 $X \overset{d}{=} \tilde{X}$, 则 $f(X) \overset{d}{=} f(\tilde{X})$.

例5.2 假设$X \sim N(0,1)$, $Y = X^2$. 求Y 的密度函数.

- 确定Y 的取值范围: $y > 0$ 或$y \geqslant 0$.
- 确定每个y 的原像点: $x_1 = \sqrt{y}$, $x_2 = -\sqrt{y}$.
- 求出每个x_i 的贡献:
  $p_X(x_i)|\frac{dx_i}{dy}| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\{-\frac{x_i^2}{2}\}\frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi y}}e^{-\frac{y}{2}}$.
- 对i 求和:

$$p_Y(y) = \sum_i p_X(x_i)|\frac{dx_i}{dy}| = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}}e^{-\frac{y}{2}}, \quad \text{其中} y > 0.$$

- 自习: 例5.3, 5.4 (要求会)
- 自习: 定义5.1, 定理5.3, 5.4 (自愿)