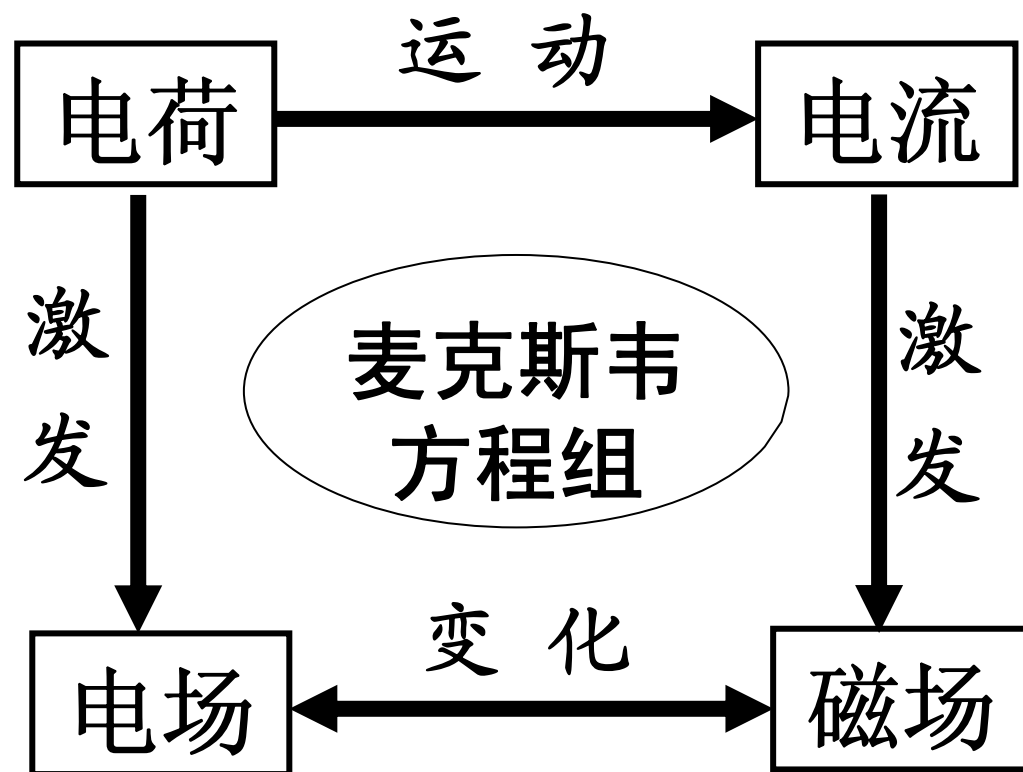


- 静电场中的电介质
- 静电场中的导体
- 带电体在真空中产生的静电场

● 稳恒电流



- 磁场中的磁介质
- 磁场对电流和运动电荷的磁场力
- 稳恒电流在真空中产生的磁场

- 电磁感应
- 位移电流

第六章 变化电磁场

§ 1 法拉第电磁感应定律

§ 2 动生电动势

§ 3 感生电动势

§ 4 自感、互感

§ 5 磁场的能量

§ 6 位移电流

§ 7 麦克斯韦方程组

§ 1 法拉第电磁感应定律

法拉第 Michael Faraday
(1791—1867)

英国物理学家和化学家。


他创造性地提出场的思想，
是电磁理论的创始人之一。



主要从事电学、磁学、磁光学、电化学方面的研究，并在这些领域取得了一系列重大发现。

1831年发现电磁感应现象，后又相继发现电解定律，物质的抗磁性和顺磁性，以及光的偏振面在磁场中的旋转。

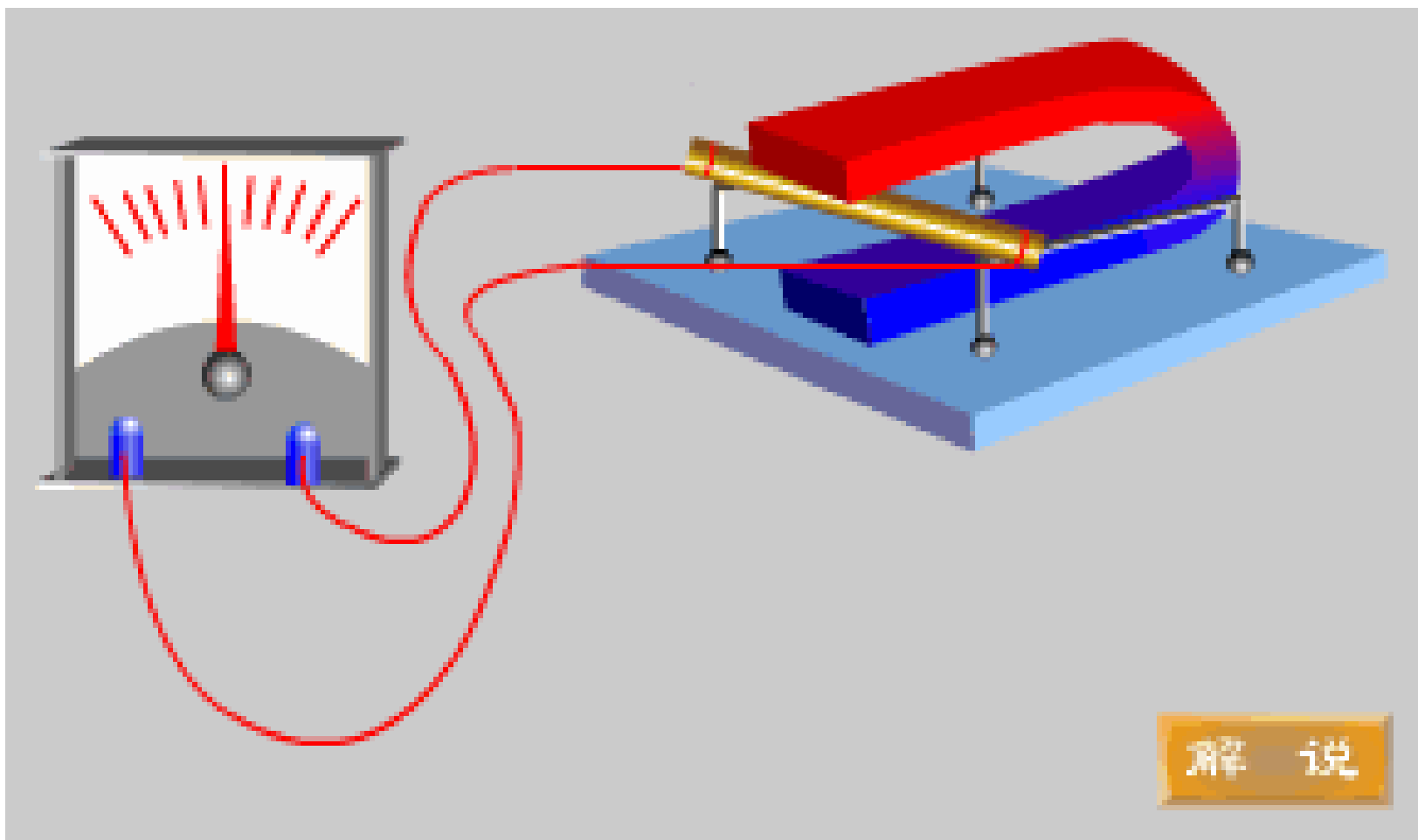
1.1 电磁感应现象

电流的磁效应  电生磁

磁的电效应  磁生电 ?

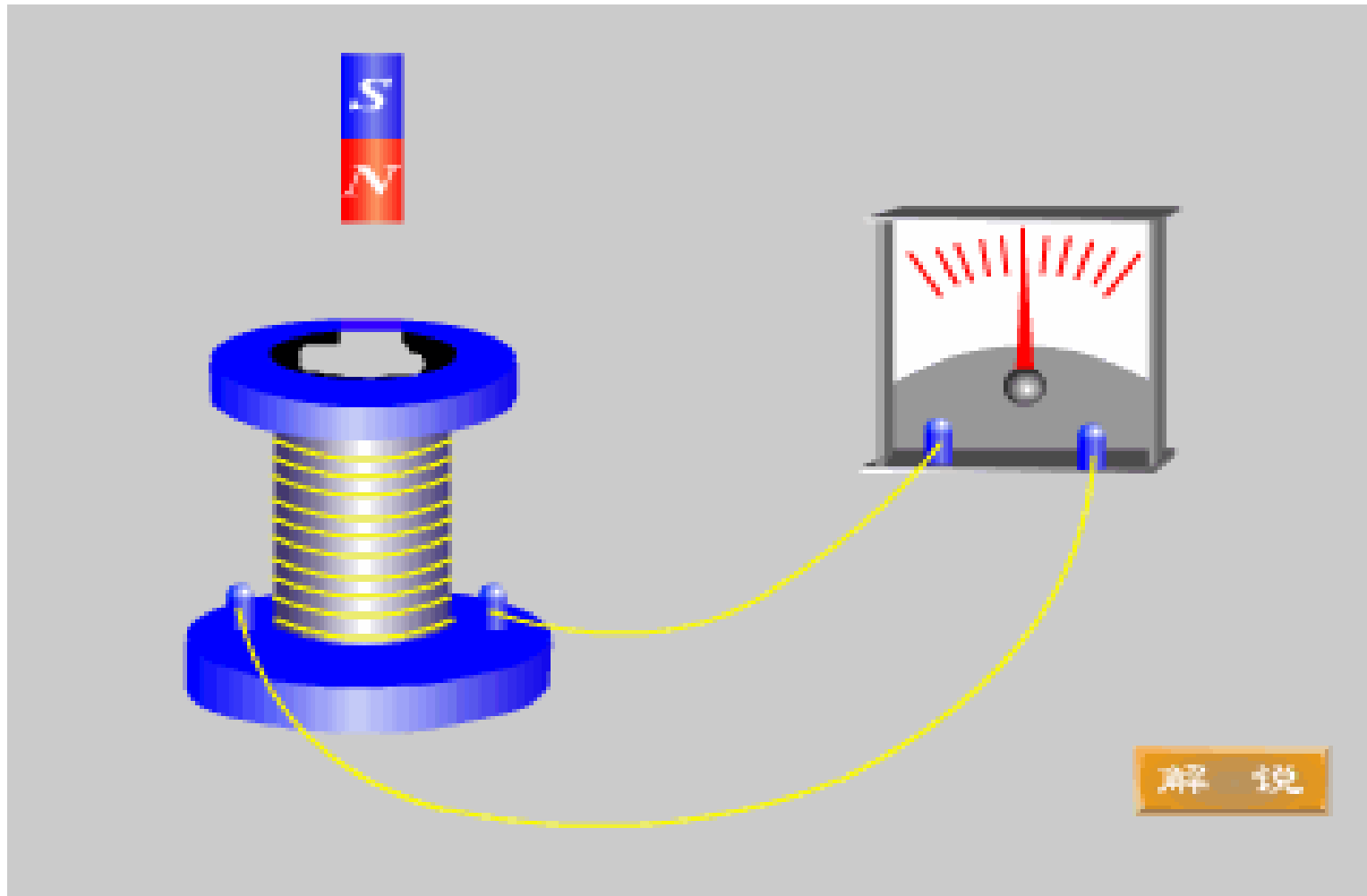
- 1820年，**Oersted**发现了电流的磁效应。
- 1831年11月24日，**Faraday**发现电磁感应现象。
- 1833年，**Lenz**在分析实验的基础上，总结出了简便的判断感应电流方向的法则。
- 1845年，**Neumann**借助于安培的分析，从理论上推出了电磁感应定律的数学形式。

当导体棒在恒定磁场中切割磁感应线时，就会在回路中产生感应电流。运动越快，感应电流越大。



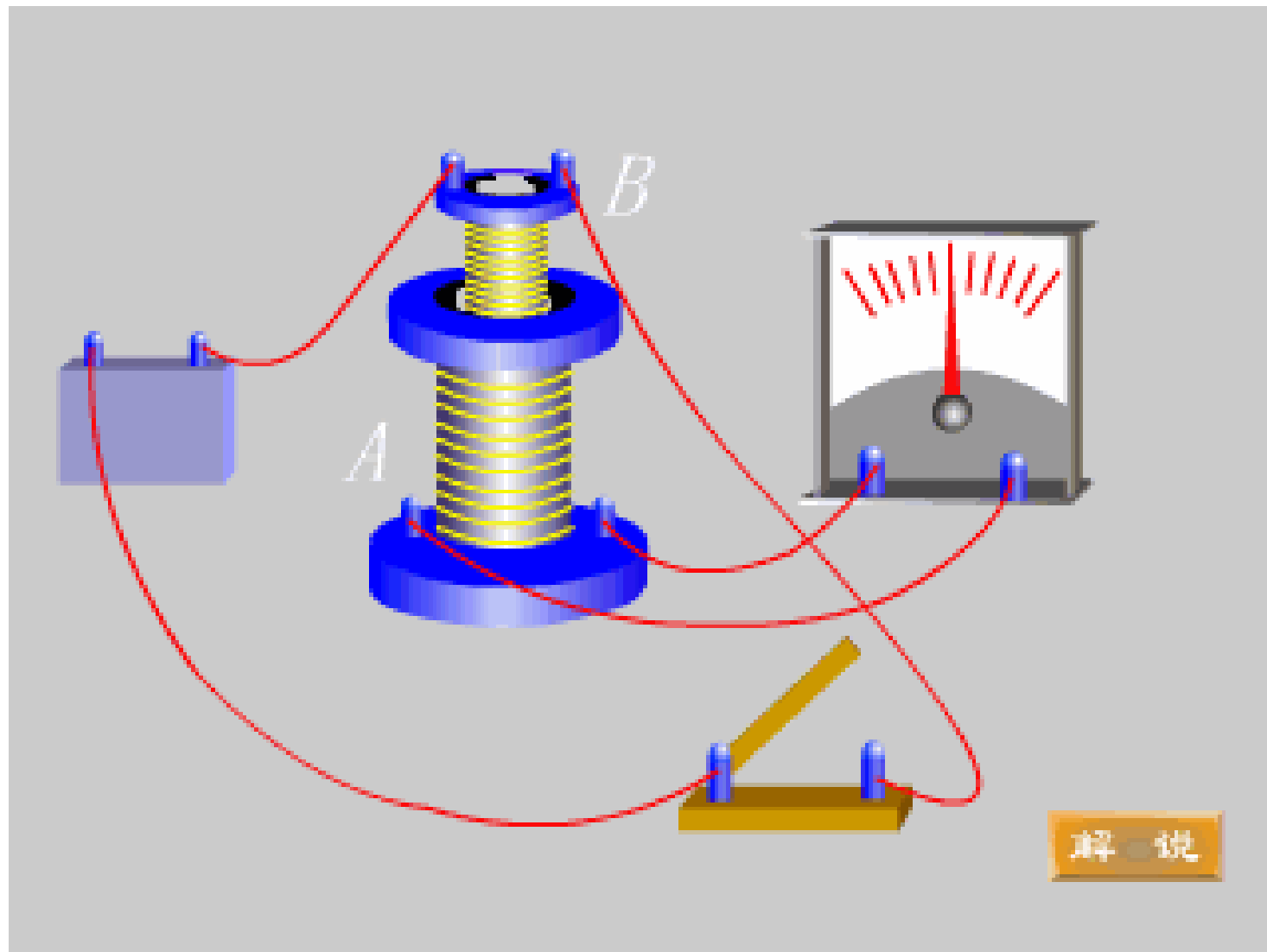
磁场没有变化，但回路面积发生了变化


当磁棒相对线圈运动时，线圈中产生感应电流。
磁棒相对线圈运动得越快，感应电流越大。



线圈回路中的磁场发生了变化

两线圈相对静止，接通或断开线圈**B**中的电流，在线圈**A**中会产生类似的情形。



 $\left. \begin{array}{l} \text{S变化} \\ \text{B变化} \end{array} \right\} \text{磁通量}\Phi\text{变化} \rightarrow \text{感应电动势} \rightarrow \text{感应电流}$


不同导线中的感应电流与金属的电导率有关

感应电流是由感应电动势驱动产生的，

感应电流只是导体回路中感应电动势的对外表现。

感应电动势可以在非闭合电路中、介质中产生

 磁通量变化越快 \rightarrow 感应电动势越大 \rightarrow 感应电流越大
磁通量变化越慢 \rightarrow 感应电动势越小 \rightarrow 感应电流越小

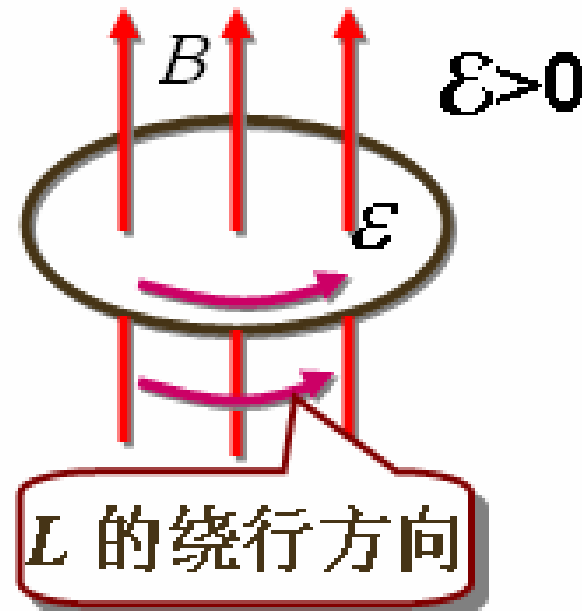
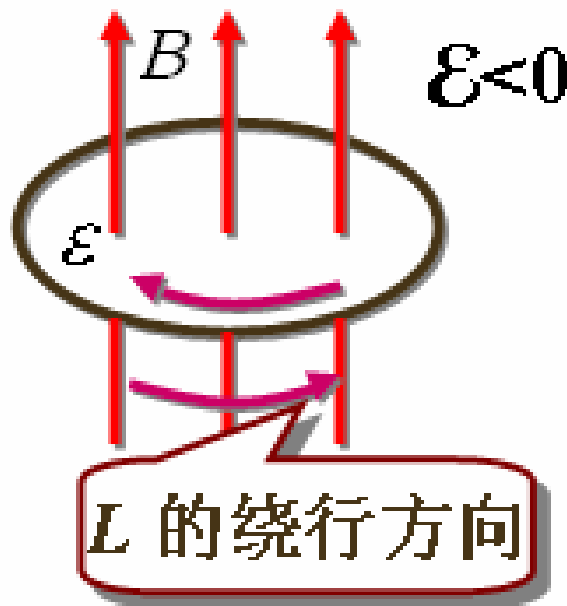
 感应电流的方向与磁通量是增加还是减少有关
感应电动势的方向与磁通量是增加还是减少有关

1.2 法拉第电磁感应定律

回路中产生的感应电动势的大小与穿过回路的磁通量的变化率成正比，负号确定回路中感应电动势的方向

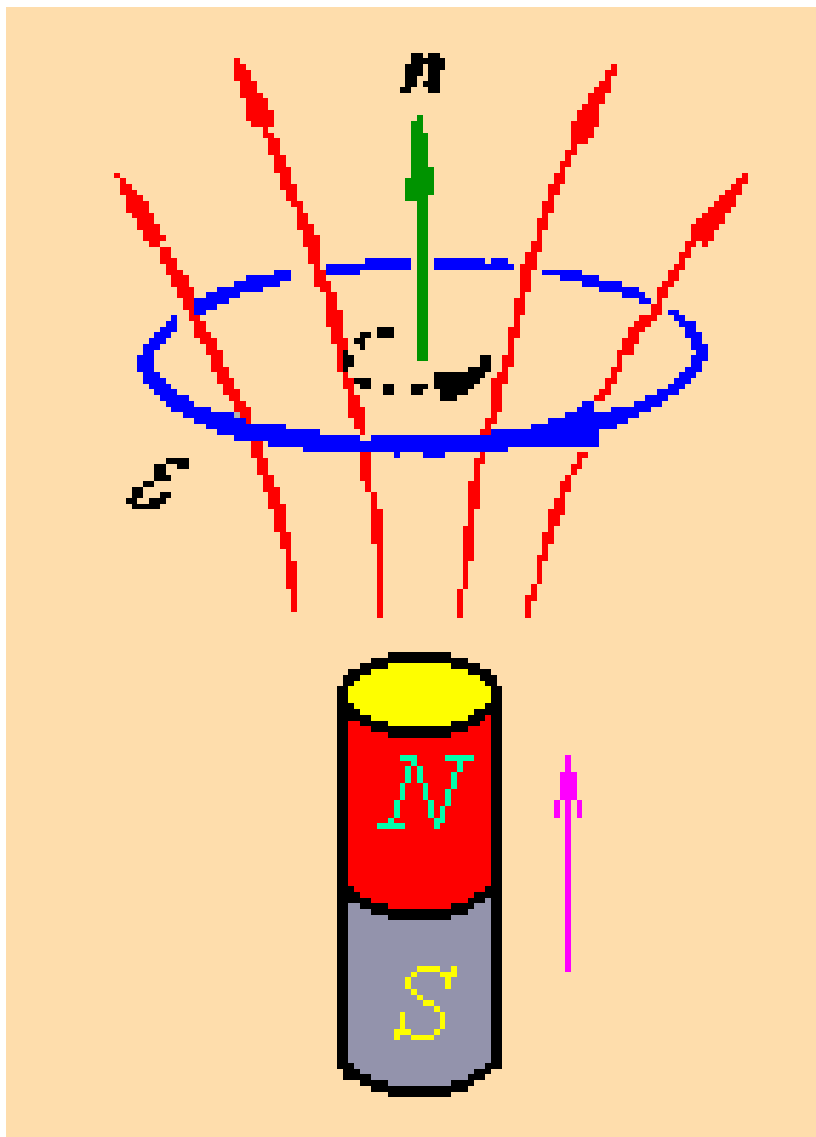
$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

规定电动势方向与回路绕行方向一致时为正

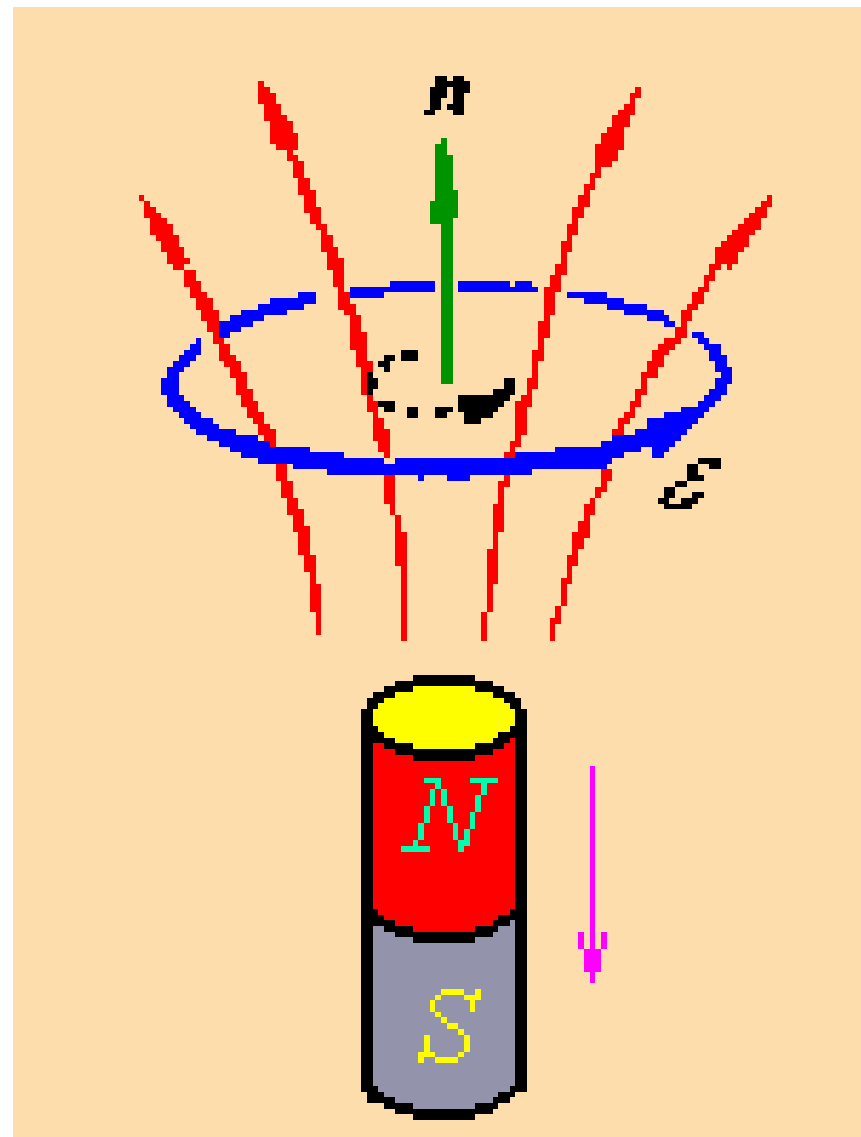


S 与回路 L 绕行方向成右手螺旋，上图中， $B//S$ ， $\Phi > 0$

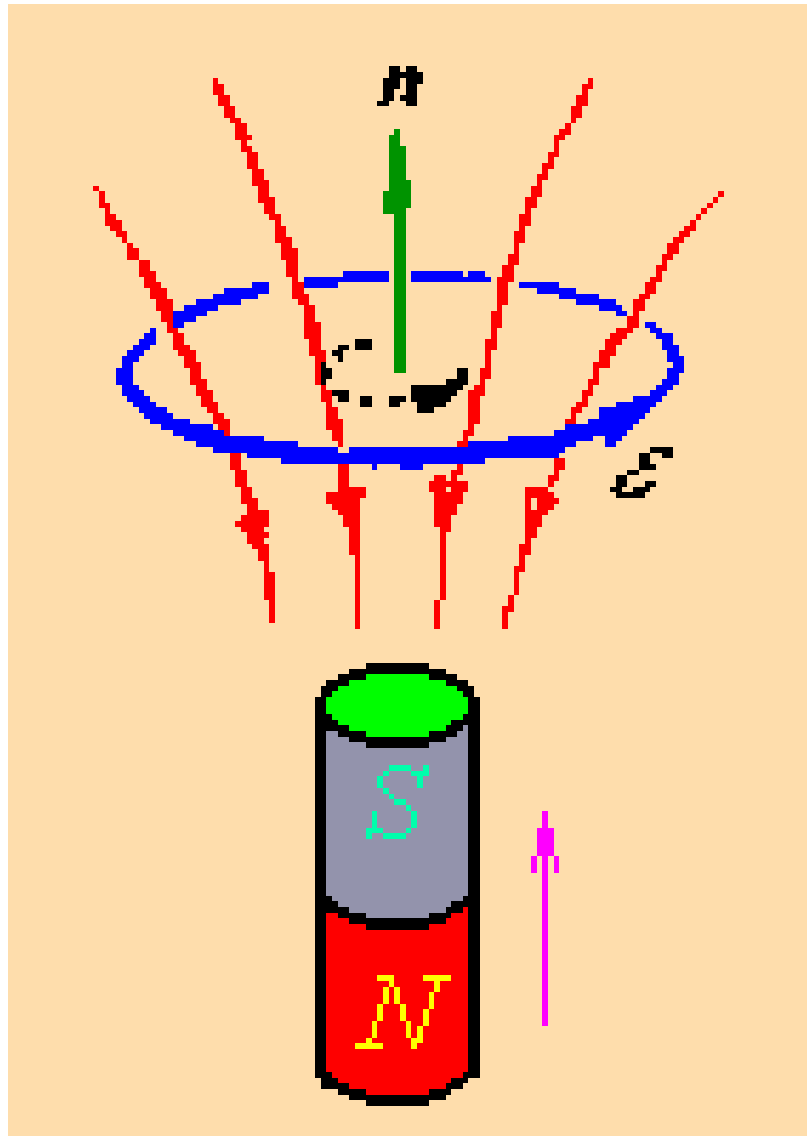
$\Phi > 0$ 磁棒向上运动
 $d\Phi > 0$ $\mathcal{E} < 0$ 沿顺时针方向



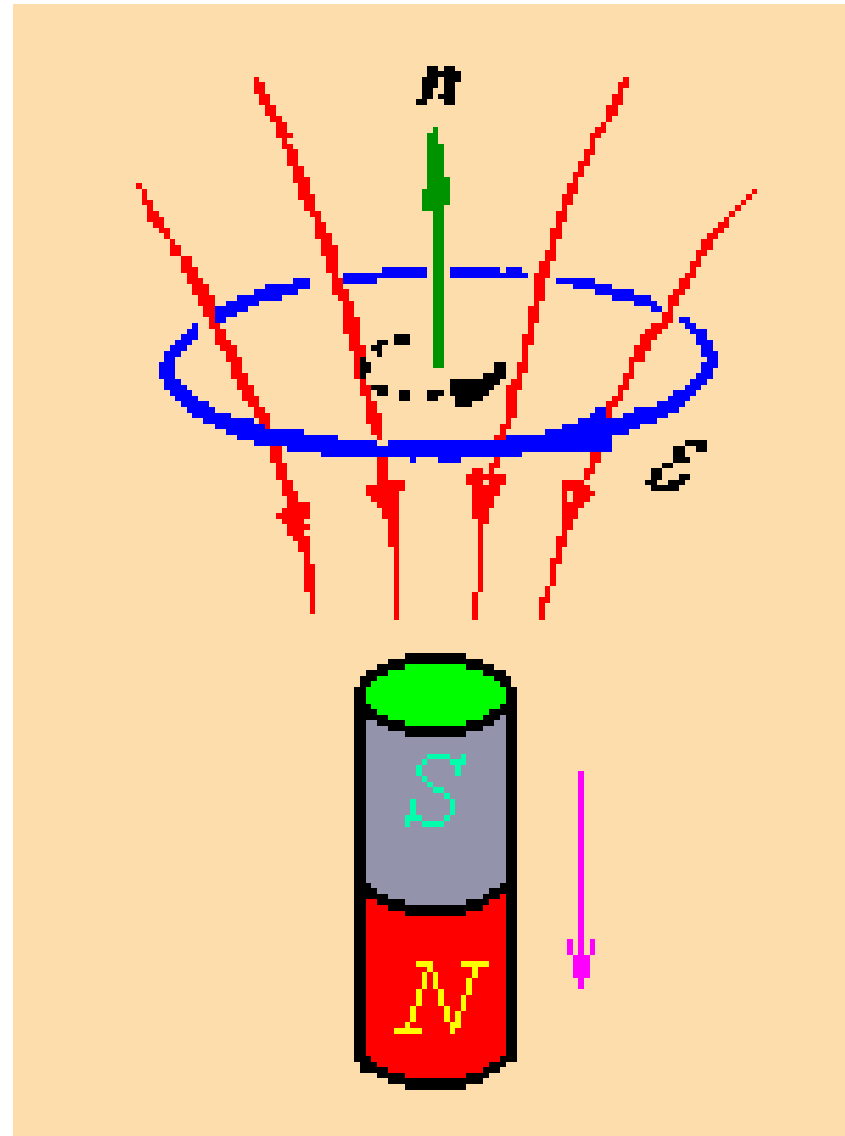
$\Phi > 0$ 磁棒向下运动
 $d\Phi < 0$ $\mathcal{E} > 0$ 沿逆时针方向



$\Phi < 0$ 磁棒向上运动
 $d\Phi < 0$ $\mathcal{E} > 0$ 沿逆时针方向



$\Phi < 0$ 磁棒向下运动
 $d\Phi > 0$ $\mathcal{E} < 0$ 沿顺时针方向



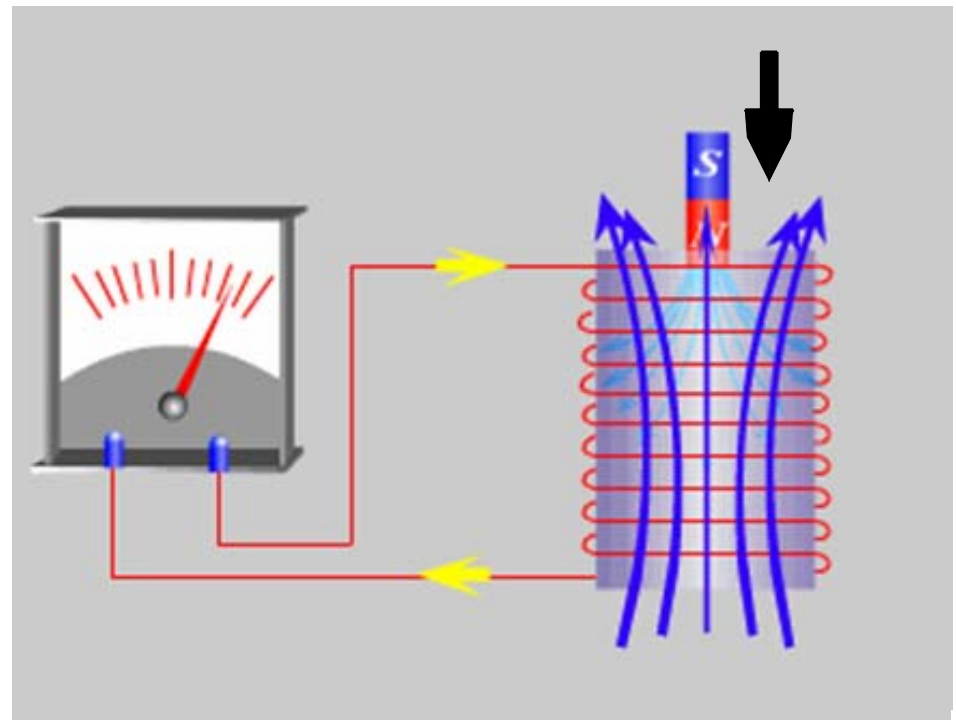
1.3 楞次定律

1833年俄国物理学家楞次提出一种判断感应电流、感应电动势方向的简便方法——楞次定律：

闭合回路中，感应电流的方向总是使得它所产生的磁通量**阻碍**引起感应电流的磁通量变化。

磁棒向下运动时，线圈中向下的磁感应线增多→产生了向上的磁感应线，以阻碍这一变化。

- 电磁惯性的表现；
- 阻碍并不意味着抵消；
- 阻碍的是“磁通量的变化”，而不是磁通量本身。



判断题： #T2601.

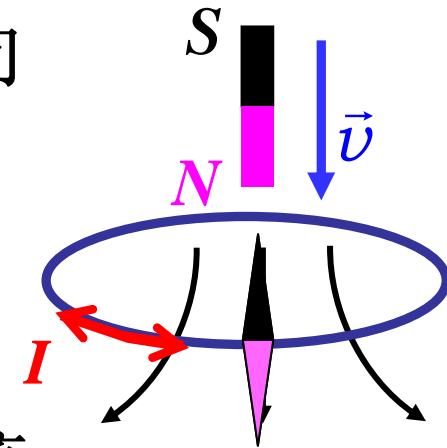
根据楞次定律，感应电流产生的磁通量总与原磁通量相反。

➤楞次定律本质上符合能量守恒定律

•外界克服磁力做功，将能量转化为线圈中的电能

假如磁棒向下进入时，感应电流的方向是顺时针的→磁棒运动被加强

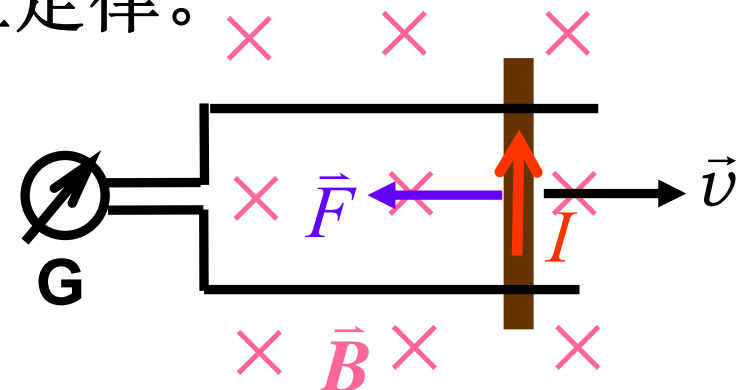
外界不需要做功，却获得了机械能和电能，违反了能量守恒定律。



•向下的磁场增强 \rightarrow 顺时针的感应电流

线圈中将有持续的电流流过，产生无限大的电能，这种正反馈过程破坏了能量守恒定律。

•外界克服安培力做功，将能量转化为机械能和电能，符合能量守恒定律。

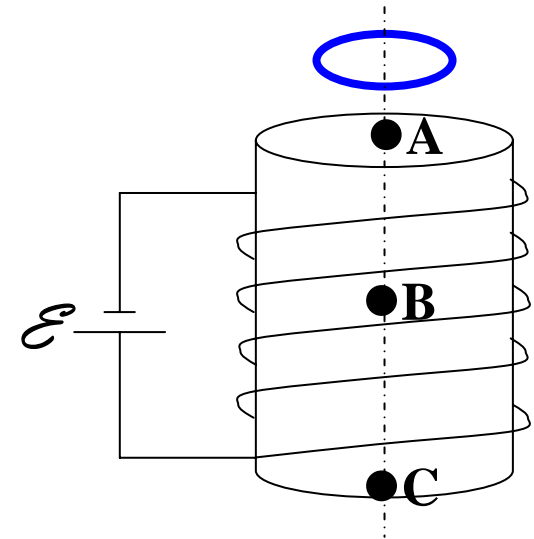


选择题： #S2601.

如图，一螺线管铅直放置，通有直流电，有一导体圆环沿螺线管轴线下落，下落过程环面恒保持水平，则圆环经过图中A、B、C三点时，加速度大小满足（ ）

- (A) $a_A < a_B < a_C$ (B) $a_A < a_C < a_B$
(C) $a_C < a_A < a_B$ (D) $a_B < a_A < a_C$

答：圆环因重力而下落，但要经过一个磁场区域，圆环中会产生电动势，形成感应电流，因而受到安培阻力。



$mg - F = ma$ 螺线管中为匀强磁场, $d\Phi=0$, $F_B=0$, a_B 最大

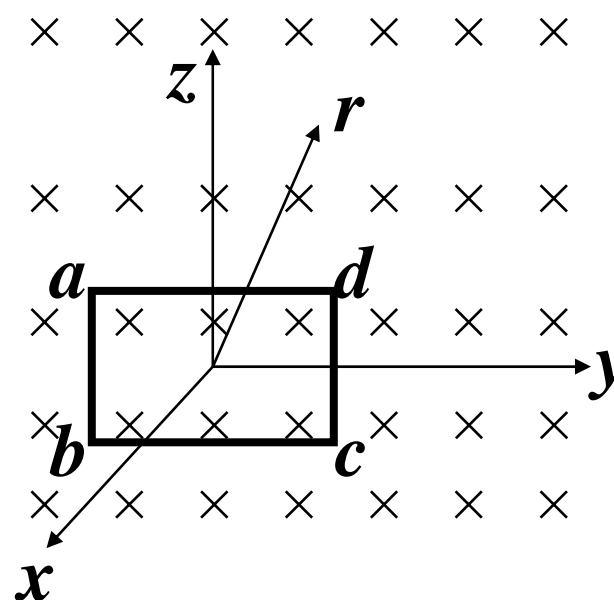
安培力 \leftarrow 感应电流 \leftarrow 感应电动势 $\leftarrow d\Phi/dt$

加速下落 $v_C > v_A$ $(d\Phi/dt)_C > (d\Phi/dt)_A$ $F_C > F_A \Rightarrow a_C < a_A$

选择题： #S2602.

如图，导体线框 $abcd$ 在下列几种运动中，不会产生感生电流的是：

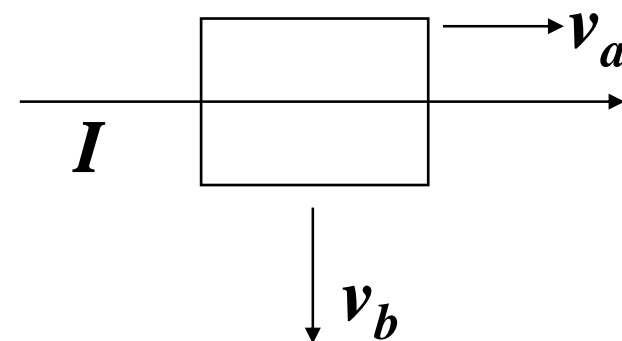
- (1)沿 y 轴方向平动
- (2)沿 z 轴方向平动
- (3)绕 x 轴转动
- (4)沿 yz 平面上某一方向 r 平动
- (5)以 bc 为轴转动



选择题： #S2603.

如图，矩形线圈在通有电流 I 的无限长载流直线产生的磁场中运动，开始时线圈与导线共面，且线圈的两边与导线平行，下面几种情况中不产生感应电流的有：

- (a)沿直导线方向平动；
- (b)保持共面，垂直于导线平动；
- (c)垂直于导线及线圈平面平动；
- (d)以直导线为轴旋转；
- (e)绕过线圈中心垂直于线圈平面的轴旋转。



例：在无限长直载流导线的磁场中，有一向右运动的导体线框，导体线框与载流导线共面

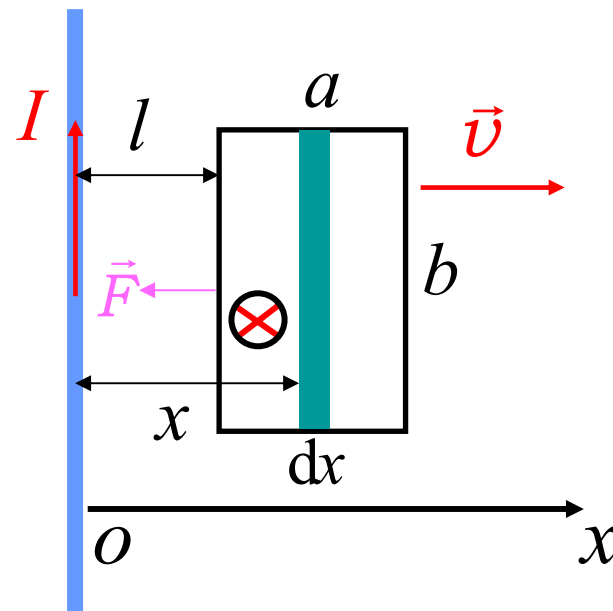
求：线框中的感应电动势

解：以顺时针方向为正绕行方向
选取宽为 dx 的面积元，通过它的磁通量为

$$d\Phi_m = B dS = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} b dx$$

$$\Phi_m = \int d\Phi_m = \int_l^{l+a} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} b dx = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln\left(\frac{l+a}{l}\right)$$

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{\mu_0 I b}{2\pi} \left[\frac{dl/dt}{l+a} - \frac{dl/dt}{l} \right] = \frac{\mu_0 I a b v}{2\pi l(l+a)} \quad \text{顺时针}$$



◆磁通计(冲击电流计)

若闭合回路中电阻为 R

$$\text{感应电流为 } I = \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt}$$

$$\Rightarrow dq = Idt = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt} dt = -\frac{d\Phi}{R}$$

若 t_1 时刻磁通量为 Φ_1 , t_2 时刻磁通量为 Φ_2

$$\text{感应电量 } q = -\int_{\Phi_1}^{\Phi_2} \frac{d\Phi}{R} = \frac{1}{R} (\Phi_1 - \Phi_2)$$

回路中通过的感应电量与磁通量的增量有关

若已知初始 Φ_1 , 可测量末态 $\Phi_2 \rightarrow$ 制成磁通计



◆全磁通

法拉第电磁感应定律是针对单匝线圈而言的
实际用到的线圈常常是有许多匝，彼此串联而成
总电动势等于各匝线圈所产生的电动势之和

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_1}{dt} - \frac{d\Phi_2}{dt} \dots = -\frac{d(\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \dots)}{dt}$$

全磁通、磁通链数 $\Psi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \dots = \sum_i \Phi_i$

对多匝线圈 $\mathcal{E} = -\frac{d\Psi}{dt}$

若有 N 匝线圈，每匝磁通量相同 $\Psi = N\Phi$

$$\mathcal{E} = -N \frac{d\Phi}{dt}$$

◆交流发电机

例： N 匝面积为 S 的线圈放在均匀磁场 \mathbf{B} 中，可绕 OO' 轴转动，角速度为 ω

求： 线圈中的感应电动势。

解： 设 $t=0$ 时线圈平面的正法线 \mathbf{n} 方向与 \mathbf{B} 的方向平行

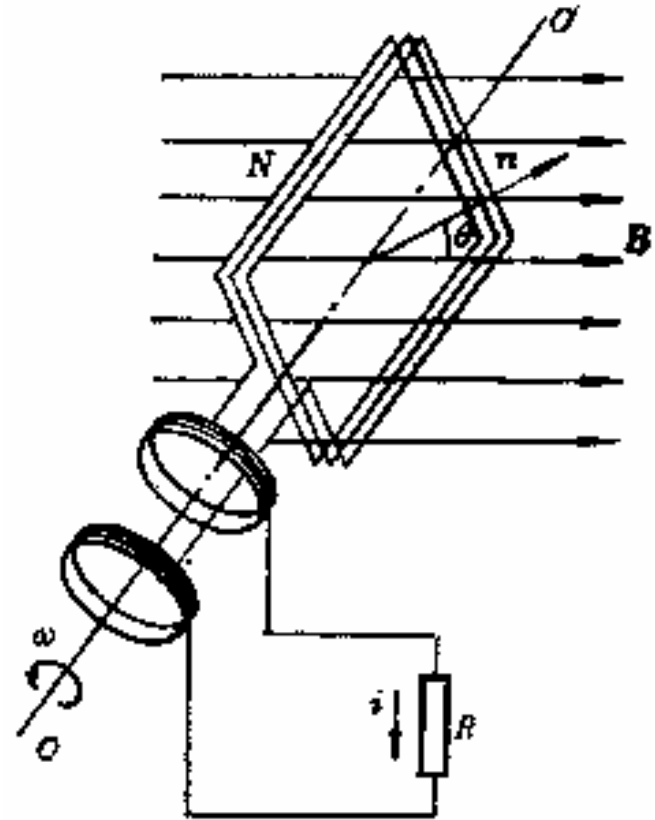
t 时刻法线与 \mathbf{B} 之间的夹角 $\theta = \omega t$

此时穿过 N 匝线圈的全磁通为：

$$\psi = NBS \cos \theta = NBS \cos \omega t$$

线圈中的感应电动势为：

$$\mathcal{E} = -\frac{d\psi}{dt} = -\frac{d}{dt}(NBS \cos \omega t) = NBS\omega \sin \omega t$$



$$\mathcal{E} = NBS\omega \sin \omega t$$

感应电动势随时间按
正弦规律变化

感应电动势的方向
周期性的反向

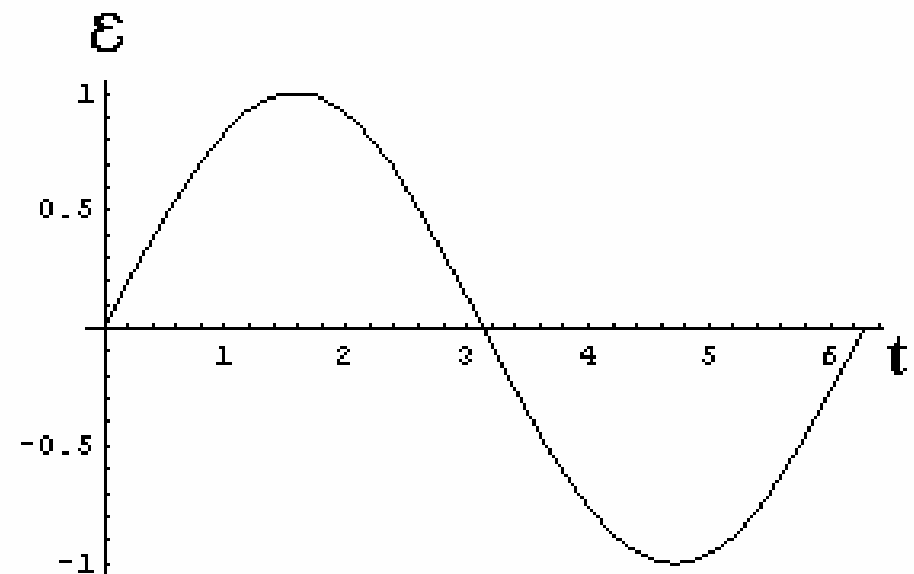
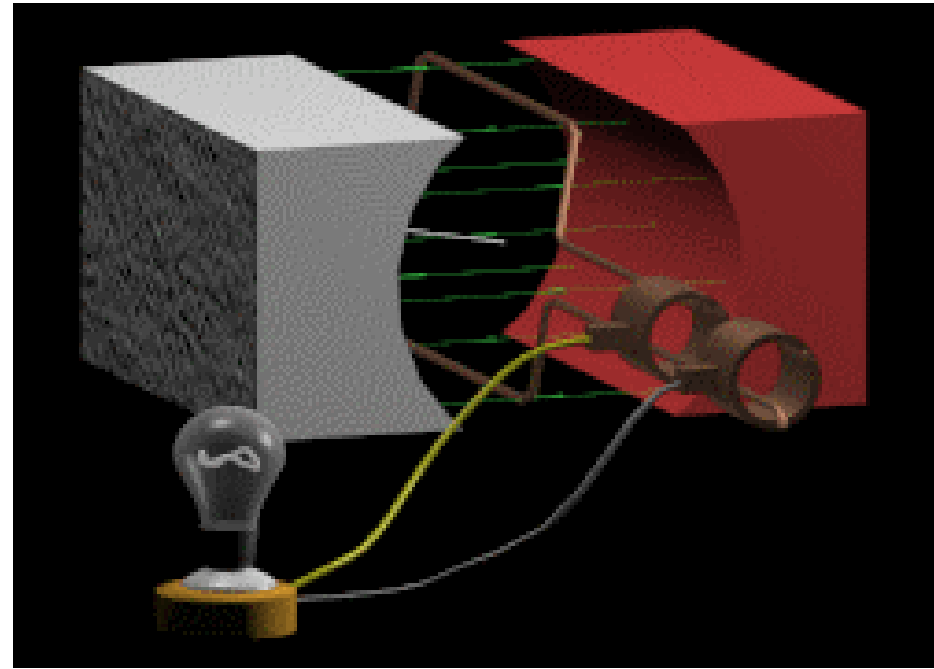
正弦交流电

令 $\mathcal{E}_m = NBS\omega$,

$$\omega = 2\pi f$$

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_m \sin 2\pi f t$$

中国: $f = 50\text{Hz}$



§ 2 动生电动势

引起 Φ 变化 $\left\{ \begin{array}{ll} \text{导线运动引起} & \text{动生电动势} \\ \text{磁场变化引起} & \text{感生电动势} \end{array} \right\}$ 感应电动势

导线运动+磁场变化 \rightarrow 动生电动势+感生电动势

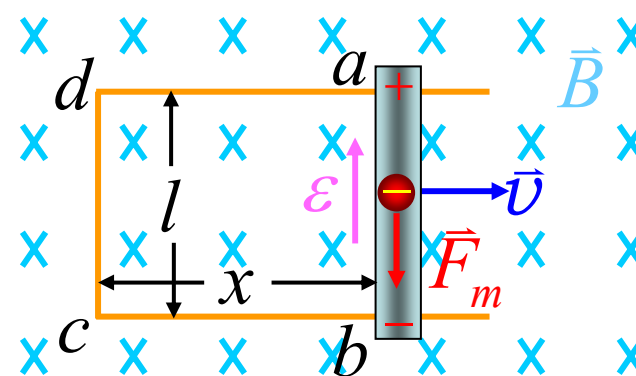
2.1 动生电动势的产生

电源电动势定义 $\mathcal{E} = \int_b^a \vec{E}_k \cdot d\vec{l} = \int_b^a (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$

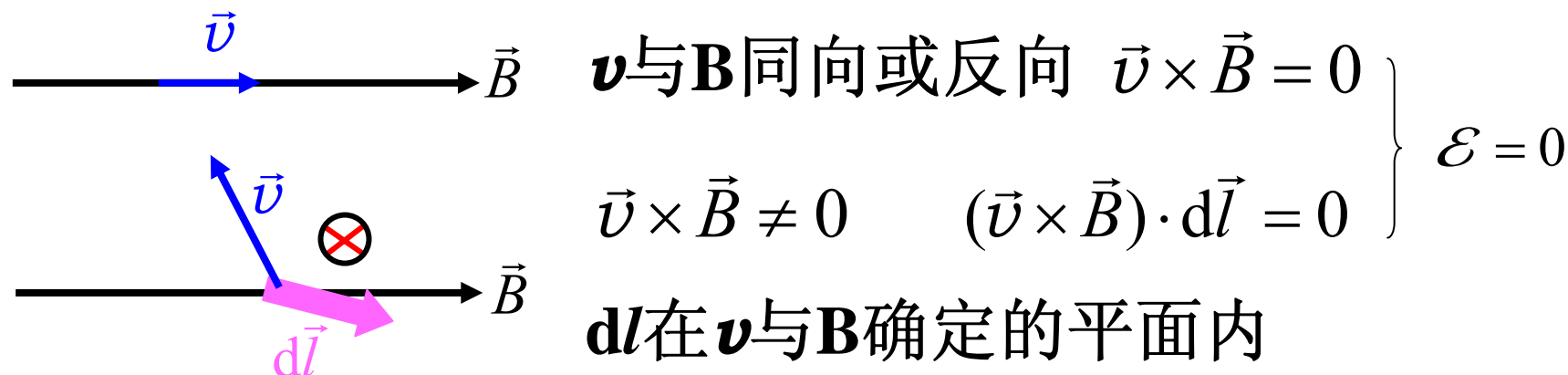
洛伦茨力提供了非静电力

$$\vec{F}_m = -e(\vec{v} \times \vec{B})$$

非静电场强 $\vec{E}_k = \frac{\vec{F}_m}{-e} = \vec{v} \times \vec{B}$



动生电动势 $\mathcal{E} = \int_b^a \vec{E}_k \cdot d\vec{l} = \int_b^a (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$



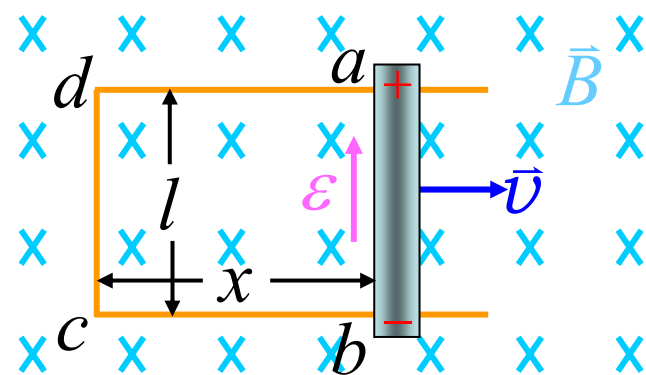
两种情况下，导线都不切割磁力线

只有ab切割磁力线， \mathcal{E} 只存在于ab中

取向上为 $d\vec{l}$ 方向

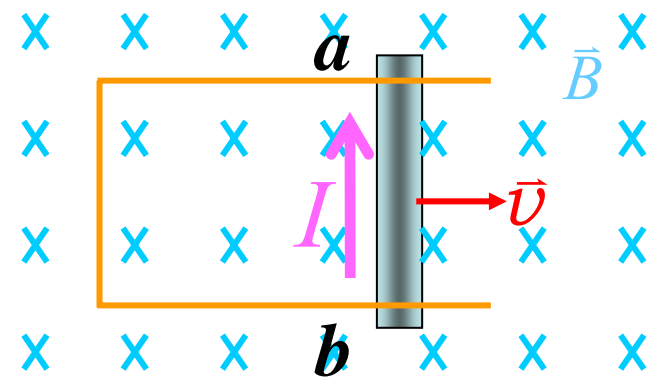
$$\mathcal{E} = \int_b^a (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = Blv$$

$\mathcal{E} > 0$ ，方向由b→a，即a为正极



判断题： #T2602.

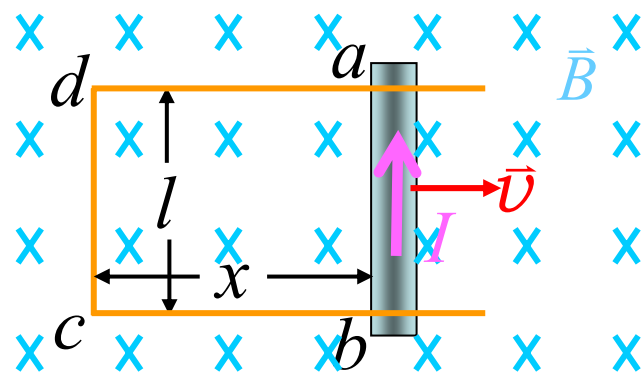
如图，当金属杆向右运动时，感应电流从**b**流向**a**，
由于电荷总是从高电位流向低电位，因此**b**点的电位
比**a**点高。



2.2 动生电动势的计算

$$|\mathcal{E}| = \left| -\frac{d\Phi_m}{dt} \right| = \left| -\frac{d(BS)}{dt} \right|$$

$$= Bl \left| -\frac{dx}{dt} \right| = Blv$$



大小等于单位时间内导线切割的磁感应线的条数
方向：楞次定律→逆时针方向

非闭合路径

闭合回路

电动势定义

$$\mathcal{E} = \int_b^a (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

$$\mathcal{E} = \oint_L (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

电磁感应定律 需设计一个闭合回路

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

例：在匀强磁场 \vec{B} 中，长为 R 的铜棒绕其一端 O 在垂直于 \vec{B} 的平面内转动，角速度为 ω

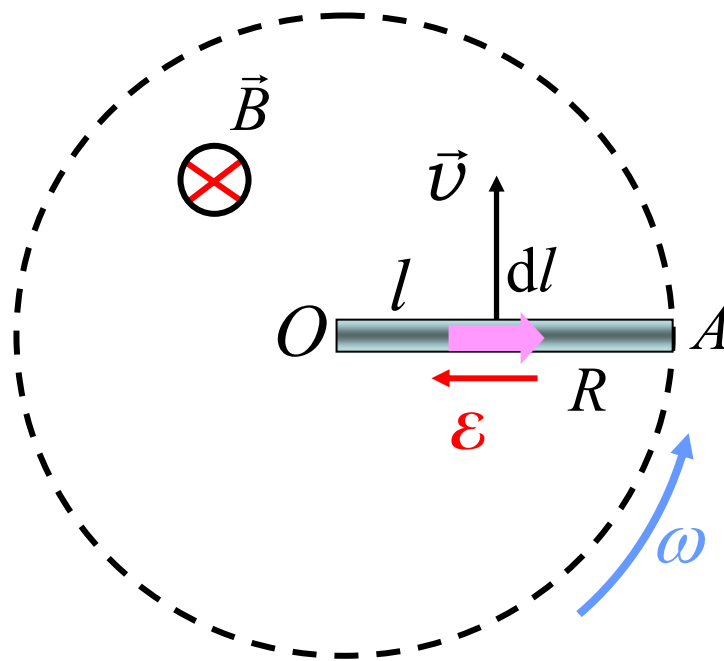
求：棒上的电动势。

解：方法一（动生电动势）

取 l 处线元 $d\vec{l}$ ，方向 $O \rightarrow A$

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \int_O^A (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \\ &= -\int_0^R v B dl = -\int_0^R l \omega B dl \\ &= -\frac{BR^2}{2} \omega\end{aligned}$$

电动势的方向： $A \rightarrow O$



O 端的正电荷集中、
为正极，电势较高

方法二(法拉第电磁感应定律)

设计一个扇形回路**OPA**

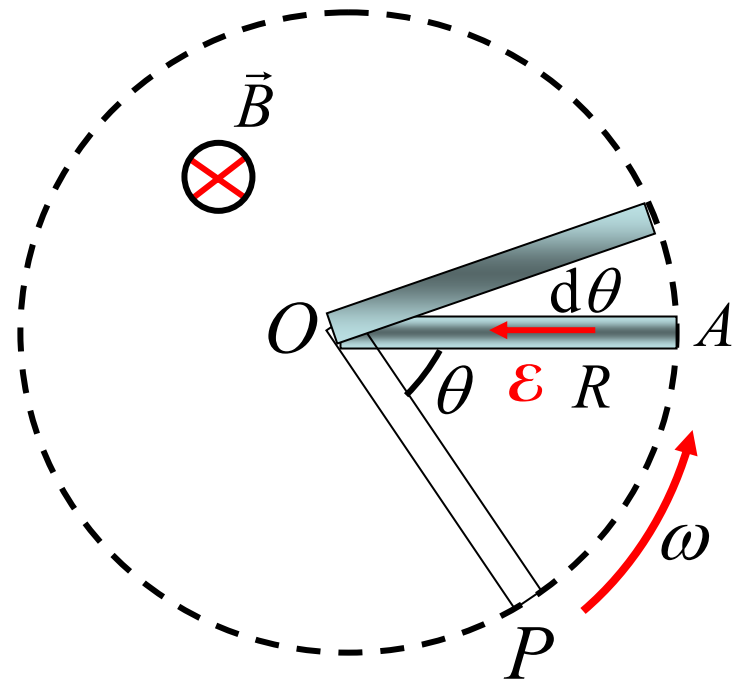
设**OP**固定不动, **OA**旋转

在**dt** 时间内转过**dθ**

通过**OPA**的磁通量的变化为

$$|d\Phi| = \frac{1}{2} R^2 d\theta B$$

$$|\mathcal{E}| = \left| -\frac{d\Phi}{dt} \right| = \frac{1}{2} BR^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} BR^2 \omega$$



规定顺时针为正, $d\Phi > 0$

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{2} BR^2 \omega$$

方向由楞次定律确定 逆时针 **P→A→O**

由于圆弧段不切割磁力线, 电动势只存在于**OA**中

例：一导线被弯成右图形状，**abc**是半径为**R**的3/4圆弧，直线**oa**长也为**R**，若此导线放在匀强磁场**B**中，导线以角速度 ω 在平面内绕**o**点逆时针匀速转动。

求：此导线中的动生电动势。

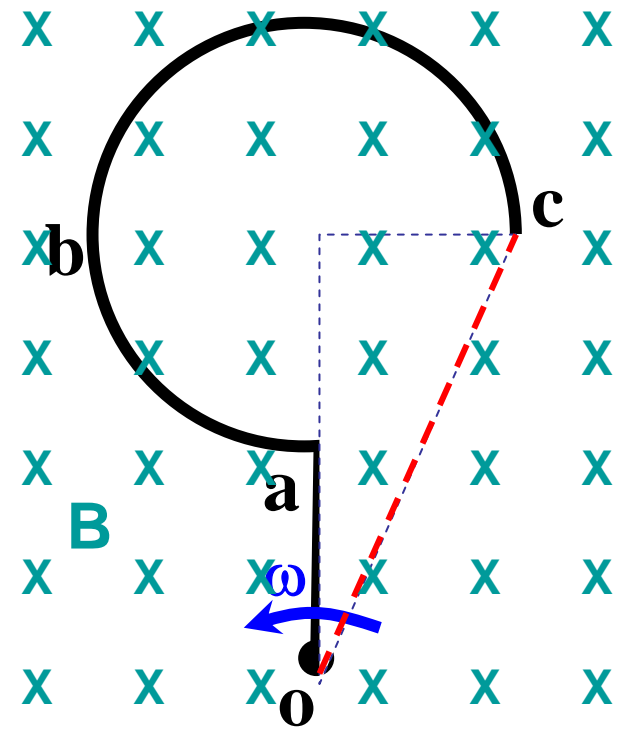
解：用直线连接**oc**，形成回路
该闭合回路绕**o**点在平面内旋转过程中面积不变，穿过该回路的磁通量也保持不变。

$$0 = \mathcal{E}_{oabco} = \mathcal{E}_{oabc} + \mathcal{E}_{co}$$

$$\Rightarrow \mathcal{E}_{oabc} = -\mathcal{E}_{co} = \mathcal{E}_{oc}$$

$$\mathcal{E}_{oc} = -\frac{1}{2}\omega B(oc)^2 = -\frac{1}{2}\omega B[(2R)^2 + R^2] = -\frac{5}{2}\omega BR^2$$

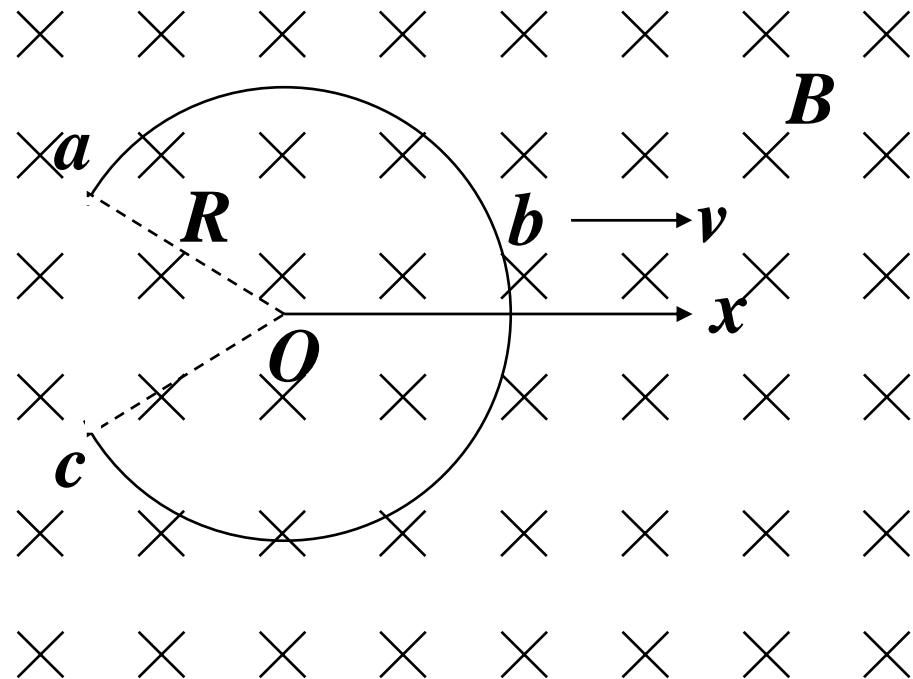
o点积累正电荷，电势高，电动势方向：**c-b-a-o**



选择题： #S2604.

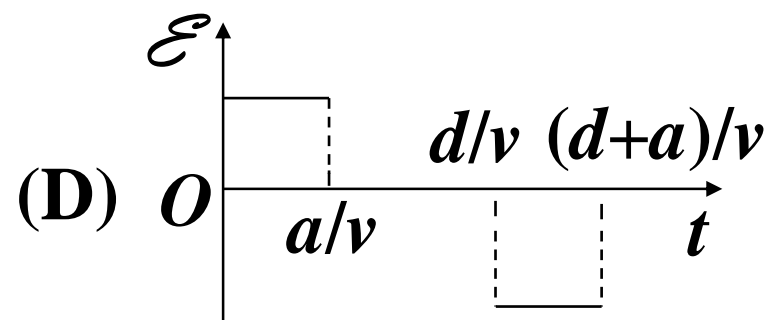
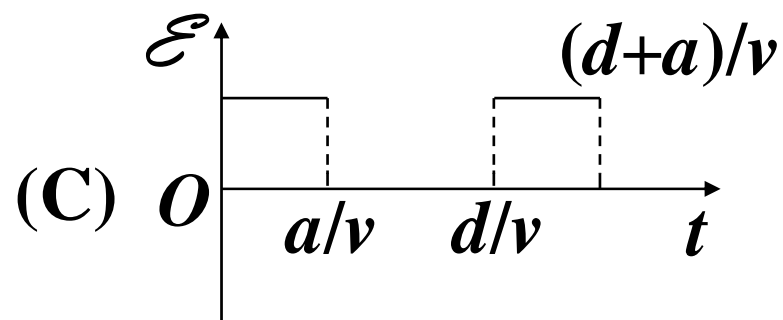
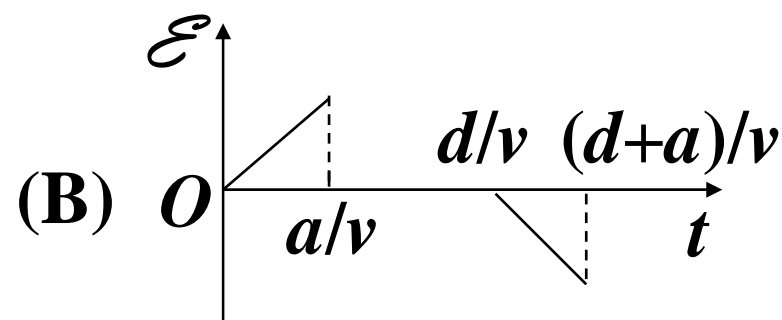
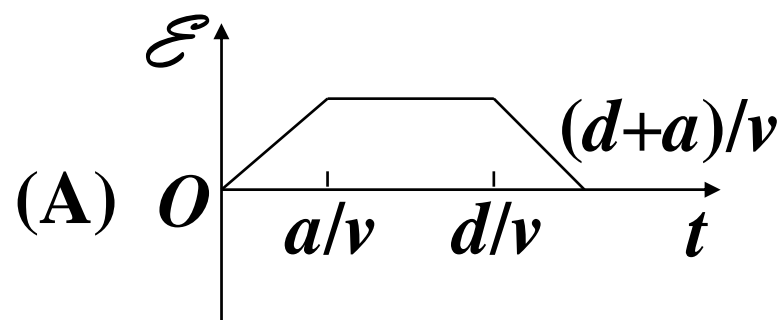
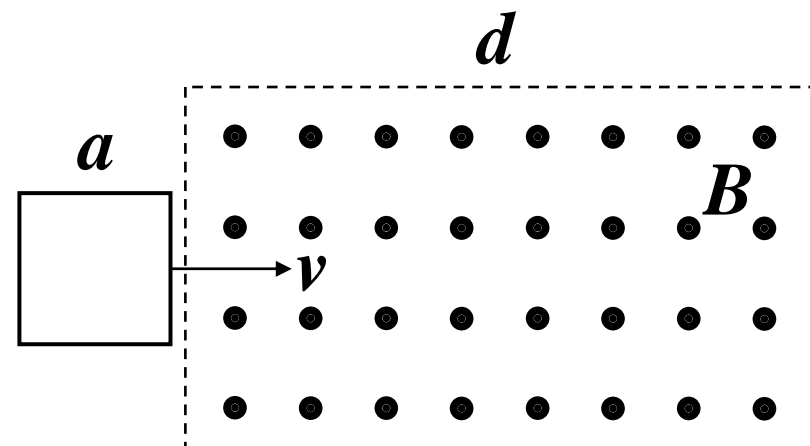
如图，半径为 R 的圆弧形导线 abc ，在匀强磁场 \mathbf{B} 中沿 Ox 轴以速度 v 向右运动，已知 $\angle aOc=60^\circ$ ，则弧上的动生电动势为

- (A) $\sqrt{2}RvB$
- (B) $RvB/\sqrt{2}$
- (C) RvB
- (D) 0



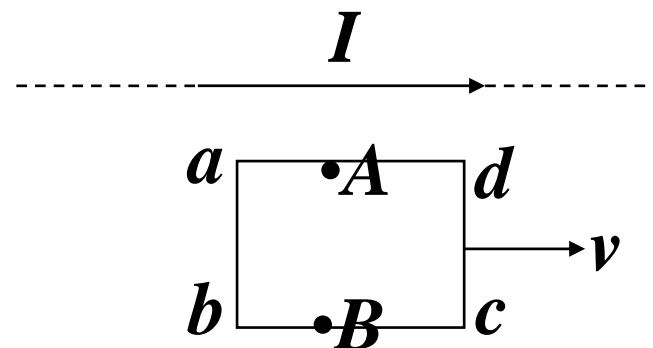
选择题： #S2605.

如图，导线框以恒定速度 v 经过均匀磁场区域，取顺时针方向为正，则框中感应电动势与时间的关系为：



选择题： #S2606.

如图，通有电流 I 的无限长载流直线旁，共面放一矩形导线框，当线框以速度 v 平行于导线向右匀速运动时



- (1)线框四边都不产生电动势，所以感应电流为0；
- (2)线框四边都产生电动势，互相抵消，感应电流为0；
- (3)感应电流为0，整个线框为一等势体；
- (4)ab和cd两边产生相等的电动势，而使 $V_A = V_B$ ；
- (5)ab和cd两边产生相等的电动势，而使 $V_A > V_B$ ；
- (6)ab和cd两边产生相等的电动势，而使 $V_A < V_B$ ；
- (7)线框内总电动势为ab边产生电动势的两倍。

例：法拉第电机，设铜盘的半径为 R ，角速度为 ω

求：盘上沿半径方向产生的电动势。

解：铜盘可视为无数铜棒的**并联**

其电动势等于一根铜棒绕其 O 端
旋转产生的电动势

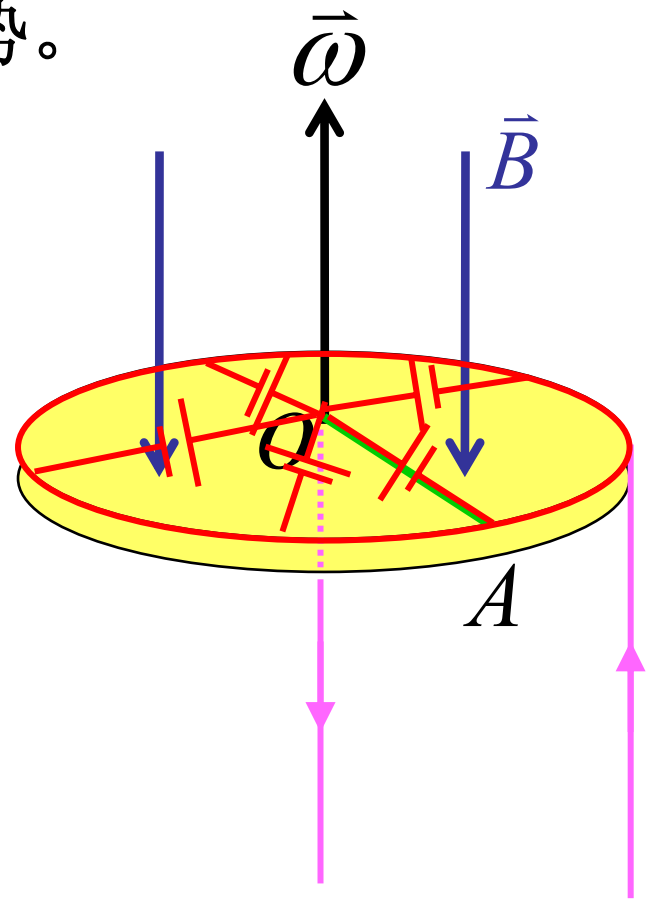
$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{2}BR^2\omega$$

电动势的方向 $A \rightarrow O$

O 端为正极，电势高

圆盘发电机产生的电动势太小，不实用

若不考虑内阻， OA 电势差 $U_O - U_A = \frac{1}{2}BR^2\omega$



2.3 功能关系的分析

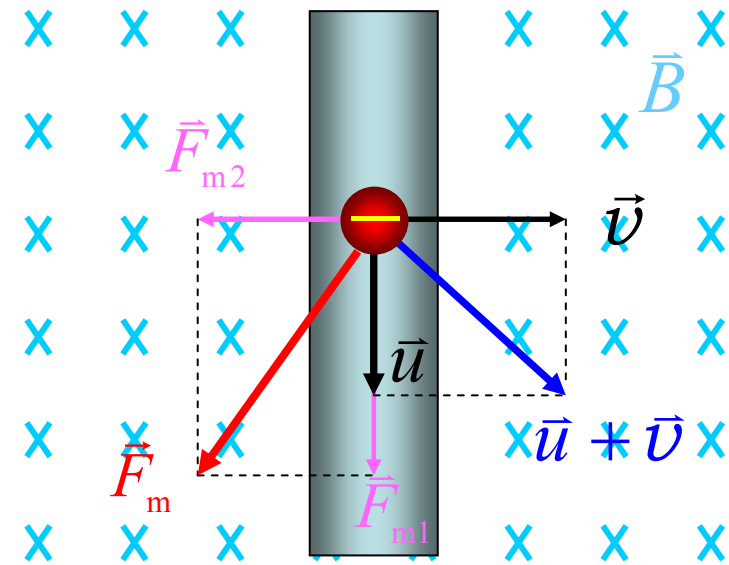
电荷流动时，感应电动势(非静电力)要做功

非静电力是洛伦茨力，与洛伦茨力不作功矛盾？

$$\vec{F}_{m1} = -e(\vec{v} \times \vec{B})$$

$$\vec{F}_{m2} = -e(\vec{u} \times \vec{B})$$

$$\vec{F}_m = -e(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{B}$$



$\vec{F}_m \perp (\vec{u} + \vec{v})$ 对电子不作功，只改变速度方向

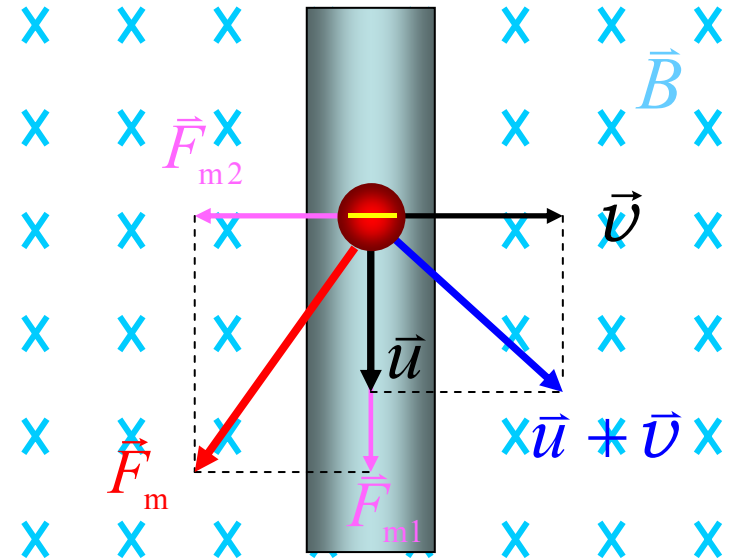
提供非静电力的只是洛伦茨力的一个分力 F_{m1}

两个分力的功率

$$\begin{aligned}\vec{F}_{m1} \cdot (\vec{v} + \vec{u}) &= \vec{F}_{m1} \cdot \vec{u} = (-e\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{u} \\ &= e v B u > 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{F}_{m2} \cdot (\vec{v} + \vec{u}) &= \vec{F}_{m2} \cdot \vec{v} = (-e\vec{u} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} \\ &= -e u B v < 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{F}_m \cdot (\vec{u} + \vec{v}) &= (\vec{F}_{m1} + \vec{F}_{m2}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) \\ &= 0\end{aligned}$$



洛伦茨力对电子做功的代数和为零

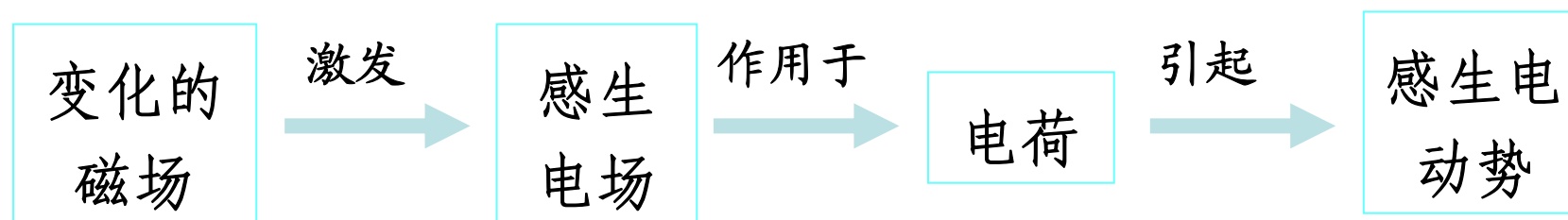
洛伦茨力的作用并不提供能量，而只是传递能量，外力克服洛伦茨力的一个分量 F_{m2} 所做的功，通过另一个分量 F_{m1} 转换为动生电流的能量。

§ 3 感生电动势

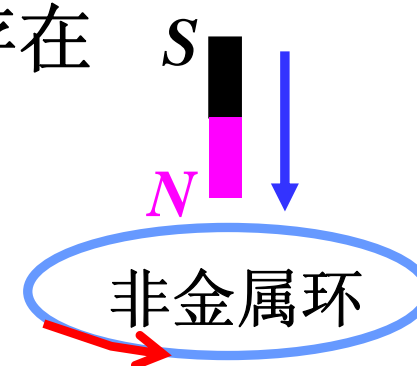
由于磁场的变化产生的感应电动势——感生电动势

3.1 感生电场

Maxwell提出：变化的磁场在其周围空间激发一种能产生感生电动势的电场→感生电场，或涡旋电场



• 无论有无介质或导体，感生电场都可存在
将磁铁插入非金属环中，感生电场会引起介质极化，形成感生电动势，但无感生电流。



选择题： #S2607.

将磁铁插入环形回路中，下列说法正确的是：

- (1)若回路为非金属环，则环上没有感生电场，没有感生电动势，也没有感生电流；
- (2)若为未闭合的环，则环中无感生电流，插入时不会受到阻力；
- (3)若为闭合金属环，则环在高温时的阻力较大。
- (4)若为闭合金属环，插入越快，通过环上某截面的感应电荷量越多；
- (5)若为闭合金属环，插入越快，做功越多；
- (6)若一为铜环，一为木环，两环尺寸相同，用同样的磁铁以同样的速度插入，则同一时刻，通过两环的磁通量相同。

感生电场力充当非静电力

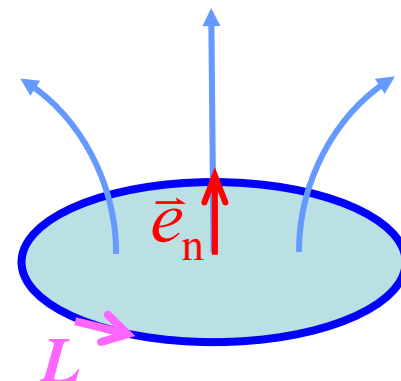
电动势的定义 $\mathcal{E} = \int_b^a \vec{E}_V \cdot d\vec{l}$ \vec{E}_V 是感生电场

闭合回路中 $\mathcal{E} = \oint_L \vec{E}_V \cdot d\vec{l}$

电磁感应定律 $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$

感生电场与变化磁场之间的关系

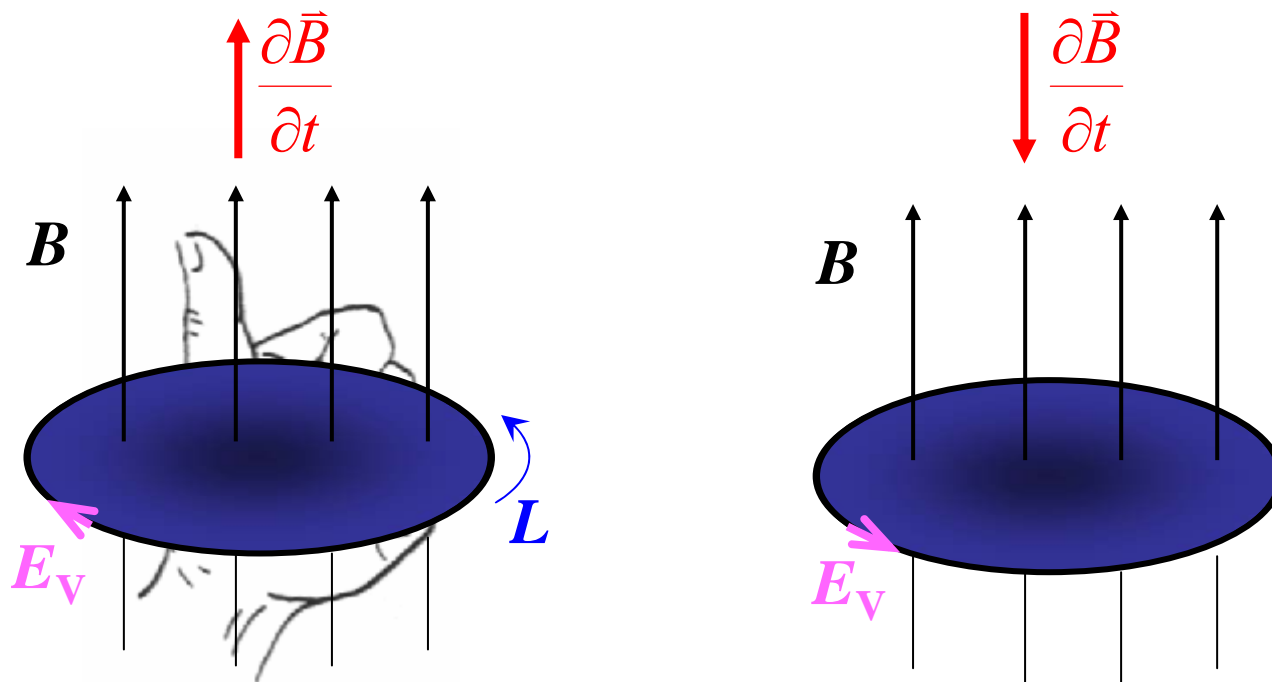
$$\oint_L \vec{E}_V \cdot d\vec{l} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$



- 环流 $\neq 0$ ，感生电场是**有旋场，非保守场**
- 积分曲面S是以闭合路径L为周界的

$$\oint_L \vec{E}_V \cdot d\vec{l} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

感生电场 \vec{E}_V 与磁场的变化率 $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ 成左手螺旋关系



左手螺旋关系正是楞次定律所要求的结果

➤ 静电场与感生电场的比较

	静电场	感生电场
激发方式	静止电荷	变化的磁场
环流	保守场，有势，无旋 $\oint_L \vec{E}_{\text{静}} \cdot d\vec{l} = 0$	非保守场， 无势 ，有旋 $\oint_L \vec{E}_V \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt} \neq 0$
通量	电场线不闭合，有源 $\oint_S \vec{E}_{\text{静}} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{\text{内}} q_i$	电场线闭合，无源场 $\oint_S \vec{E}_V \cdot d\vec{S} = 0$

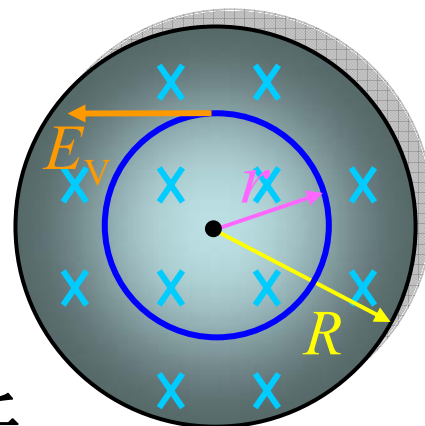
对电荷都有作用力 $F = Eq$ ，在导体中都能形成电流。

3.2 感生电场及感生电动势的计算:

例：一半径为 R 的长直螺线管载有变化电流，当它产生的均匀磁场以恒定的速率随时间增加时

求：管内外的感生电场

解：由磁场分布的轴对称性，可知感生电场的电场线是以轴为圆心的一系列同心圆



以半径 r 作一逆时针圆形环路 L ，其上任一点 E_v 大小相等，方向与环路相切

感生电场沿此环路的环流为 $\oint_L \vec{E}_v \cdot d\vec{l} = E_v \cdot 2\pi r$

根据感生电场与变化磁场之间的关系

$$\oint_L \vec{E}_v \cdot d\vec{l} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = \iint_S \frac{\partial B}{\partial t} dS = \frac{dB}{dt} \iint_S dS$$

$$E_V \cdot 2\pi r = \frac{dB}{dt} \iint_S dS$$

管内： $r < R$ ，则 $\iint_S dS = \pi r^2$

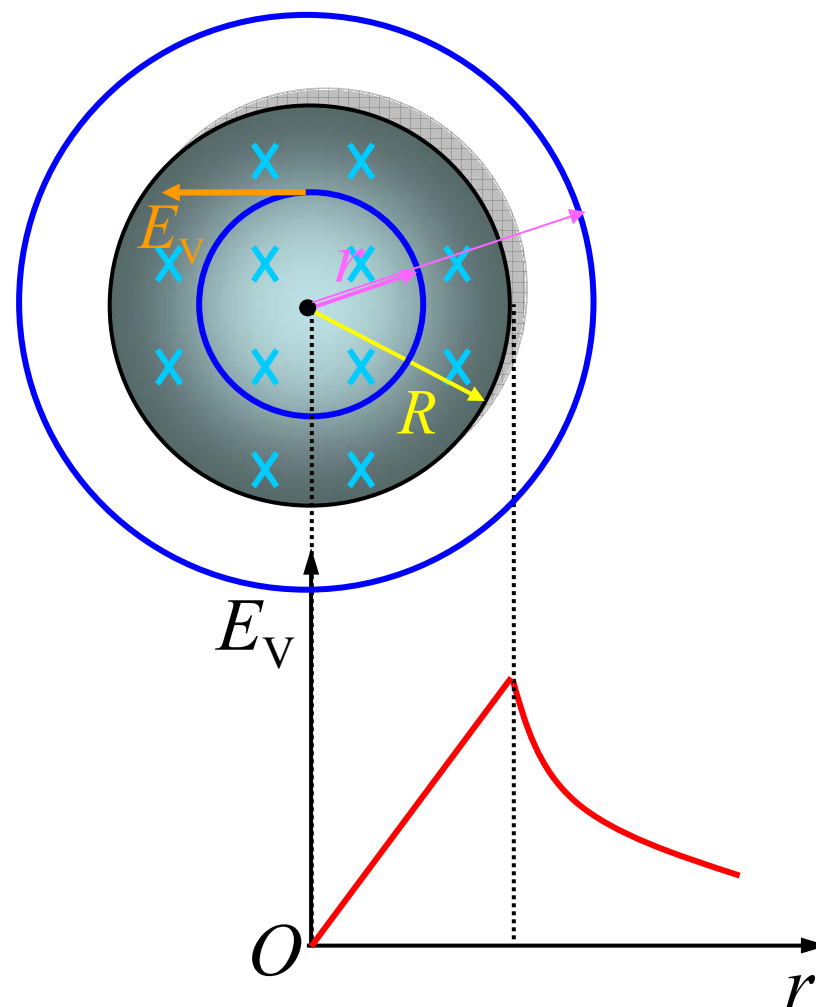
$$E_V \cdot 2\pi r = \frac{dB}{dt} \pi r^2$$

$$E_V = \frac{r}{2} \frac{dB}{dt}$$

管外： $r \geq R$ ，则 $\iint_S dS = \pi R^2$

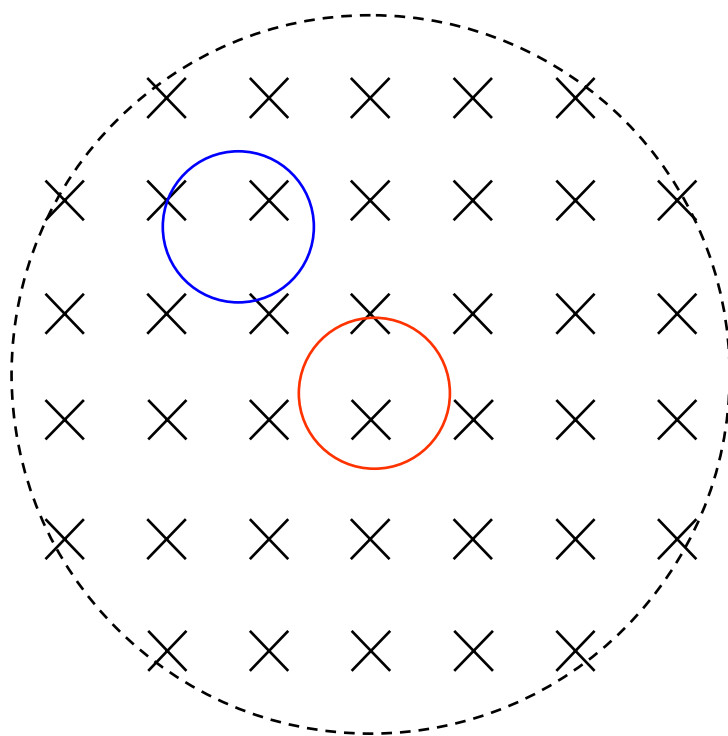
$$E_V \cdot 2\pi r = \frac{dB}{dt} \pi R^2$$

$$E_V = \frac{R^2}{2r} \frac{dB}{dt}$$



判断题： #T2603.

两个完全相同的金属环，适当放置在同一磁场中，使通过两环内的磁通量变化率相同，则两环上的感生电动势相同，感生电场也相同。



$$\mathcal{E} = \oint \vec{E}_v \cdot d\vec{l}$$

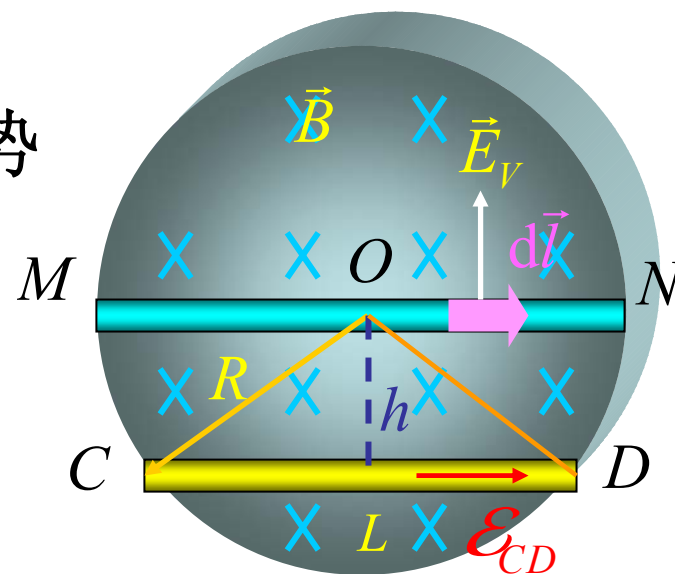
例：均匀磁场 B 被限制在半径为 R 的无限长圆柱内， B 均匀增加， B 的方向如图所示

求：导体棒 MN 、 CD 的感生电动势

解：直径处的导体棒 MN

$$E_v = \frac{r}{2} \frac{dB}{dt} \quad (r < R) \quad \text{方向沿切向}$$

$$\mathcal{E}_{MN} = \int_M^N \vec{E}_v \cdot d\vec{l} = 0 \leftarrow \vec{E}_v \perp d\vec{l}$$



• 对棒 CD ：补上半径方向的线段构成逆时针回路 $OCDO$
再由法拉第电磁感应定律

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(\vec{B} \cdot \vec{S})}{dt} = \frac{d(BS)}{dt} = \frac{dB}{dt} S = \frac{dB}{dt} \frac{hL}{2}$$

$$= \mathcal{E}_{OC} + \mathcal{E}_{CD} + \mathcal{E}_{DO} = \mathcal{E}_{CD} \quad \text{方向：} C \rightarrow D$$

•对导体棒**C'D'**

构造逆时针回路**OC'D'O**

$$\mathcal{E}_{C'D'} = \mathcal{E}$$

$$= \frac{d(BL'h'/2)}{dt} = \frac{h'L'}{2} \frac{dB}{dt}$$

•对导体棒**AB**:

构造逆时针回路**OABO**

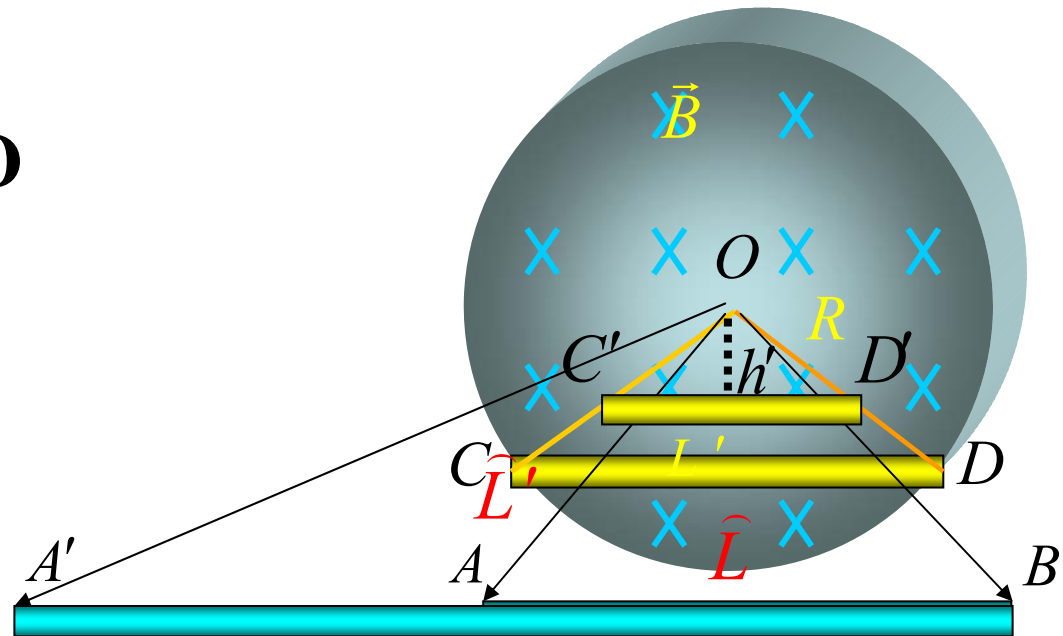
$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d(BS_{\text{扇形}})}{dt} = \frac{R\hat{L}}{2} \frac{dB}{dt} = \mathcal{E}_{AB}$$

•对导体棒**A'B**:

$$\mathcal{E}_{A'B} = \mathcal{E}_{A'A} + \mathcal{E}_{AB}$$

$$\mathcal{E}_{AB} = \frac{R\hat{L}}{2} \frac{dB}{dt}$$

$$\mathcal{E}_{A'A} = \frac{R\hat{L}'}{2} \frac{dB}{dt}$$



选择题： #S2608.

如图，均匀磁场被限制在半径为 R 的无限长圆柱内，
磁场随时间作线性变化，对两个闭合导体回路 L_1 和 L_2

(1)两回路上各点 $\frac{\partial B}{\partial t} \neq 0$

(2)回路2上没有感生电场

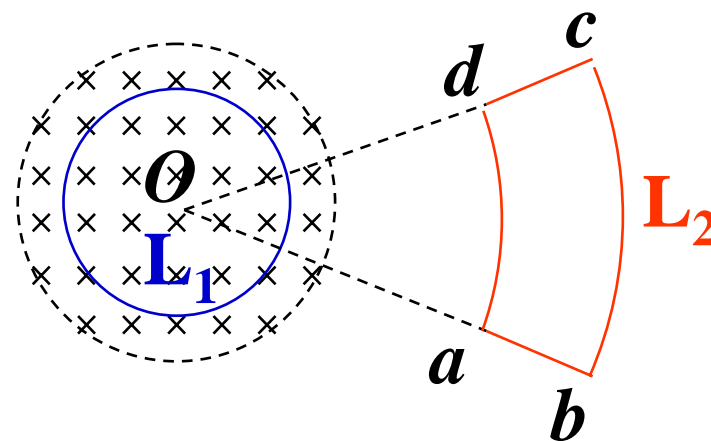
(3)回路2上各段均无感应电动势

(4)回路1上存在电势差，从而形成感应电流

(5)回路1上不存在静电场，所以任意两点间无电势差

(6)回路2上没有感应电流，任意两点间无电势差

(7)回路2上 $V_a = V_b > V_c = V_d$



3.3 电子感应加速器

1、加速器的发展

美国实验物理学家劳伦斯**1932**年建成回旋加速器

由于相对论效应，粒子的质量随速度的增加而增加

粒子在磁场中的回转周期将随速度增加而变长

$$T = \frac{2\pi m(v)}{qB}$$

- 加速电场的频率要随被加速粒子能量的增加而降低，保持粒子回旋频率与加速电场同步。
- 使用磁感应强度随粒子能量提高而增加的环形磁铁来维持粒子运动的重转周期，而不需要去改变加速场的频率。

随着能量的提高，加速器中使用的磁铁重量和造价急剧上升，提高能量受到了经济上的限制。

1940年美国的科斯特(D.W.Kerst)研制出电子感应加速器。

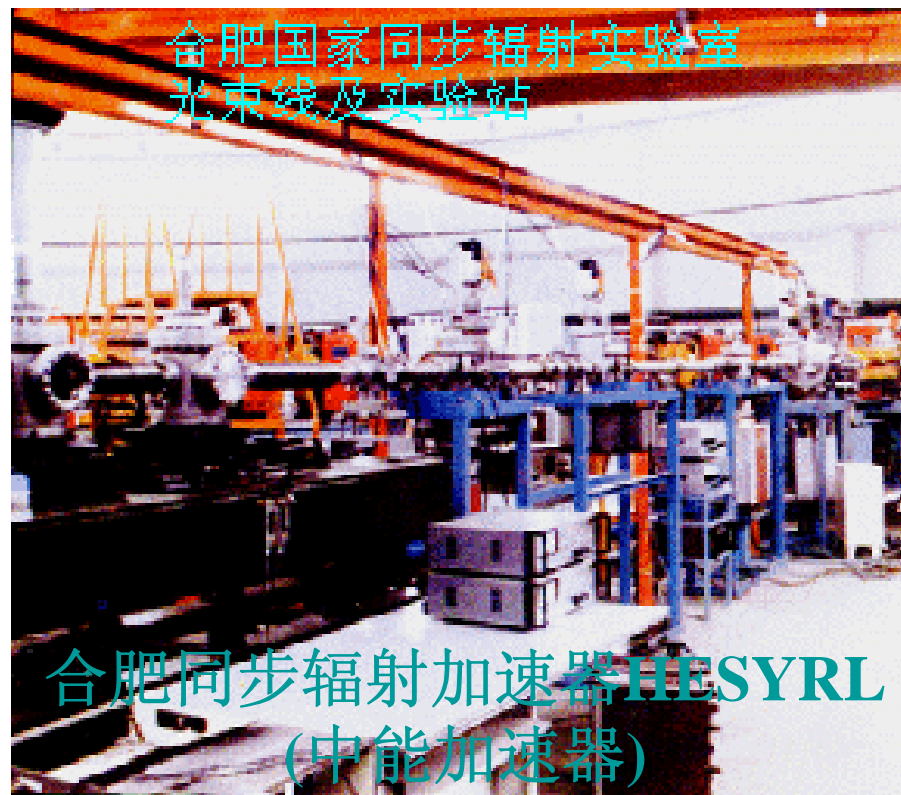
1960年意大利的陶歇克(B.Touschek)在意大利的Frascati国家实验室建成了直径约1米的AdA对撞机，开辟了加速器发展的新纪元。

一般的高能物理实验是用被加速的粒子轰击静止靶中的核子。

如果采取两束被加速粒子对撞的方式，可以使加速的粒子能量充分地用于高能反应或新粒子的产生。



北京正负电子对撞机BEPC
的储存环(中科院高能所)



合肥国家同步辐射实验室
光束线及实验站

合肥同步辐射加速器HESYRL
(中能加速器)



兰州离子装置注入器

兰州重离子加速器HIRFL
(直径7.2米, 中能)

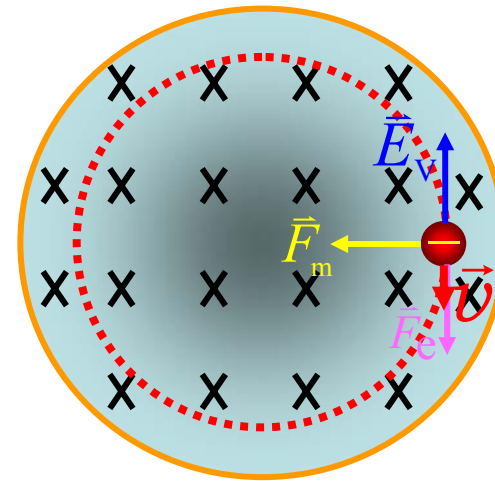
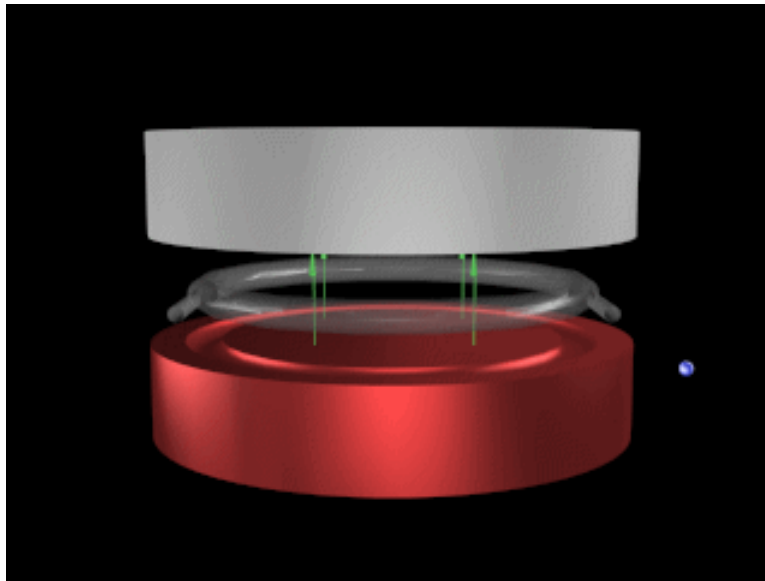


直径2km的美国费米国立加速器

2、电子感应加速器的原理

利用感生电场来加速电子等带电粒子

在电磁铁两极间安置一个环形真空室，用交变电流激励电磁铁，环形室内就会产生同心环状的感生电场



用电子枪将电子注入环形室，电子在**切向**受到感生电场的作用被加速，并在**径向**受到洛伦茨力的作用，电子沿圆形轨道做加速圆周运动。

问题1. 如何使电子稳定在给定圆形轨道上?

洛伦茨力提供向心力

$$e\nu B_R = m \frac{\nu^2}{R} \Rightarrow R = \frac{m\nu}{eB_R}$$

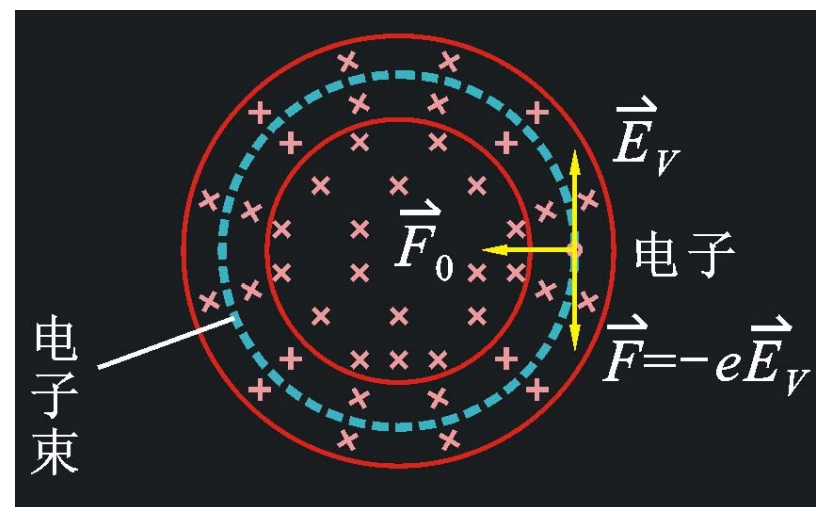
若 R 固定, 则 $d(m\nu) = eRdB_R$

电子受切向感生电场力而加速

$$eE_V = \frac{d(m\nu)}{dt} = eR \frac{dB_R}{dt} \Rightarrow E_V = R \frac{dB_R}{dt} \longrightarrow \mathbf{B}_R = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{B}}$$

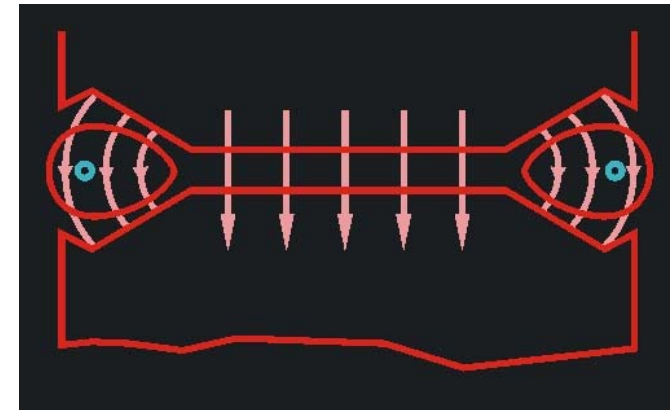
$$\text{又} \because \oint_L \vec{E}_V \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt} \Rightarrow E_V \cdot 2\pi R = \pi R^2 \frac{d\bar{B}}{dt} \Rightarrow E_V = \frac{R}{2} \cdot \frac{d\bar{B}}{dt}$$

加速器半径较大, 磁场并不均匀, 用平均磁场来描述
轨道处的磁场等于它围绕的面积内磁场平均值的一半

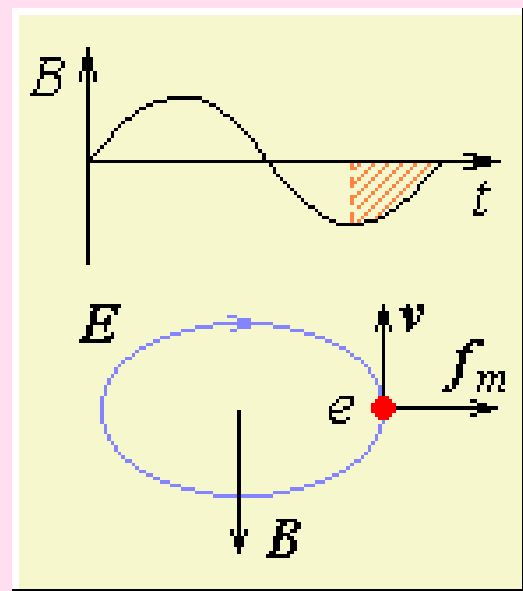


$$B_R = \frac{1}{2} \overline{B}$$

在电子感应加速器设计中，使两极间的空隙从中心向外逐渐增大。



问题2. 怎样保证电子只被交流电加速，不被减速？



在磁场变化的第四个1/4周期，磁场反向减弱，故感生电场的方向为顺时针方向，电子受到的加速电场力的方向为逆时针方向，电子的运动得到加速，但洛伦兹力的方向不能使电子在规定的圆形轨道上运动，故第四个1/4周期亦不能加速电子。

只利用交变场的第一个1/4周期对电子进行加速就已经可以使电子绕行几十万圈而获得很高的能量了。

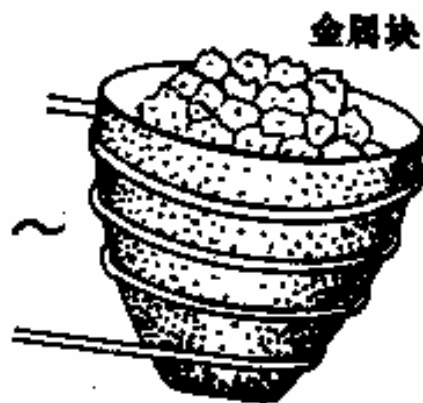
3.4 涡电流

如果大块导体处在变化磁场中，或使其在非均匀磁场中运动时，在导体内部会产生感应电流。

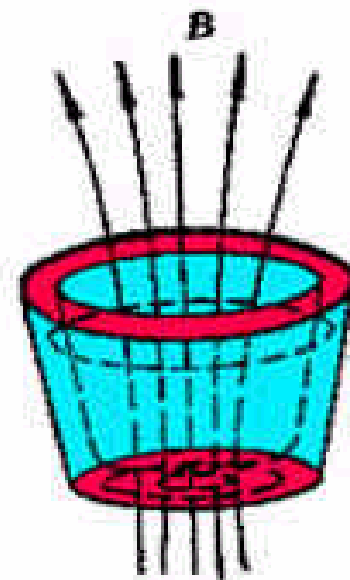
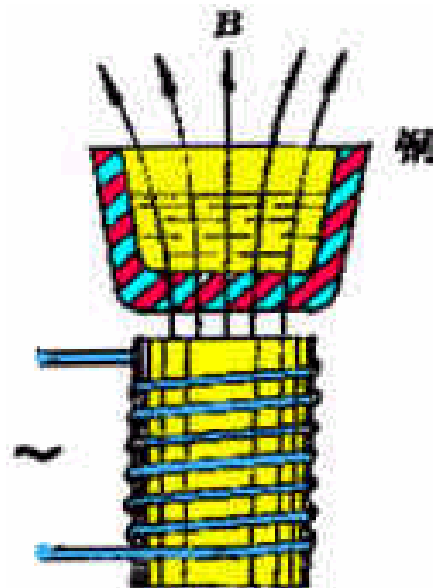
这些感应电流在大块导体内的电流线呈闭合的涡旋状，被称为涡电流或涡流。

► 涡流的热效应

电阻小，电流大，能够产生大量的热量。



高频感应炉



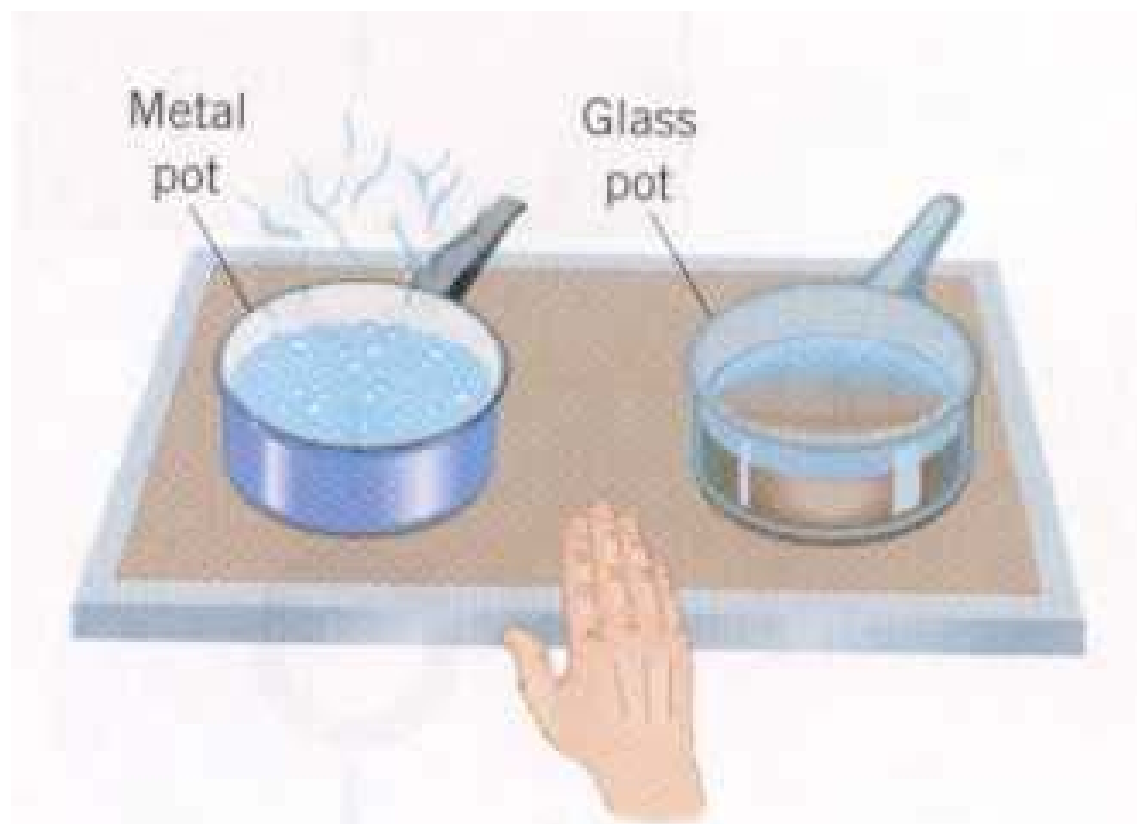
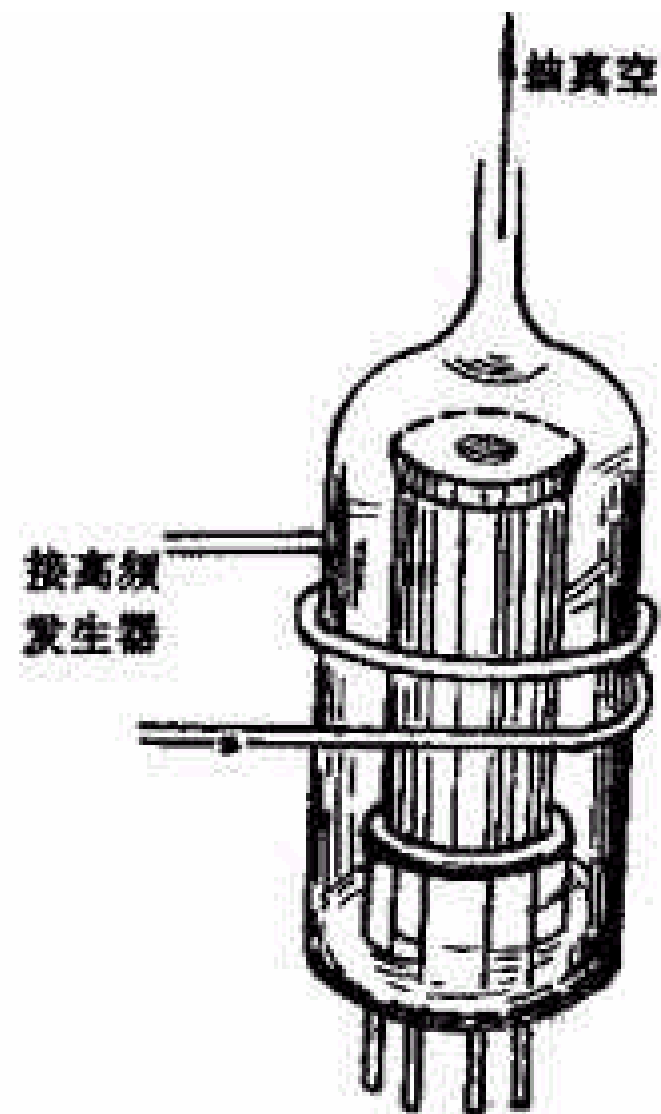


Figure 22.15 The water in the metal pot is boiling. Yet, the water in the glass pot is not boiling, and the stove top is cool to the touch. The stove operates in this way by using electromagnetic induction.



真空无接触加热

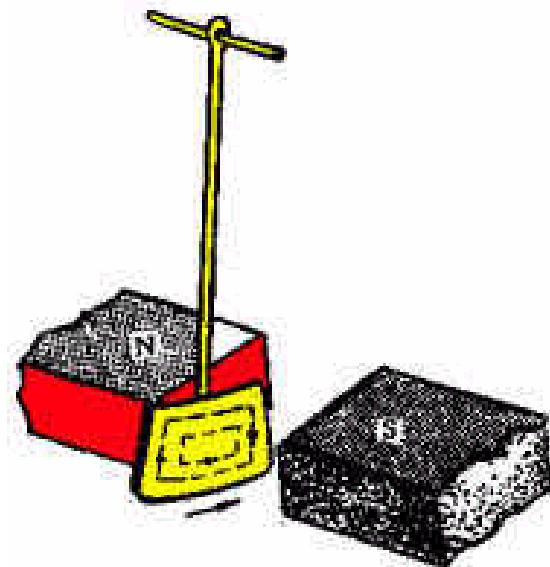


清华大学出版社

➤ 涡流的机械效应

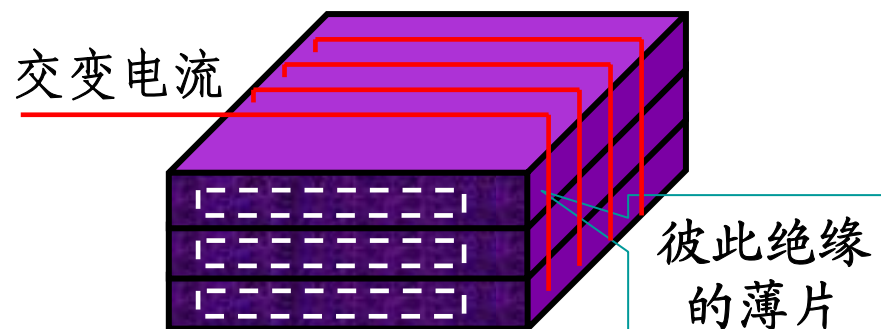
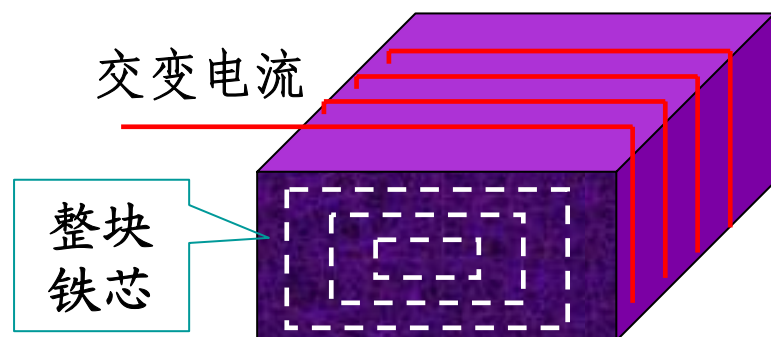
当铝片摆动时，铝片内将产生涡流。
根据楞次定律，铝片的摆动会受到阻滞而停止，这就是电磁阻尼。

*铝片运动，切割磁力线，产生动生电动势。
换个参考系，认为回路静止，磁铁运动，则回路中的磁场发生变化，产生感生电动势。



电磁仪表中的阻尼电键、电气火车中的电磁制动器

➤ 涡流的防止 ← 损失能量、烧坏电器



减小电流截面，增大电阻，减少涡流

3. 涡流现象的实验

3.5 趋肤效应

交流电通过导线时，随着频率的增加，电流将趋向导线表面附近。

趋肤效应→导线的有效截面积减小→等效电阻增加

- 为了减少这种效应，在频率不太高时常采用辫线。
- 用于金属的表面淬火，用高频强电流通过一块金属，由于趋肤效应，表面首先被加热，迅速达到可淬火的温度，而内部温度较低，这时立即淬火使之冷却，表面就会变得很硬，内部仍保持原有的韧性。
- 严格解释是在电动力学中根据电磁场方程求解电流密度和深度的关系而得出：

$$\vec{j} = \vec{j}_0 e^{-d/d_s}$$

j_0 为导体表面的电流密度， d_s 为趋肤深度

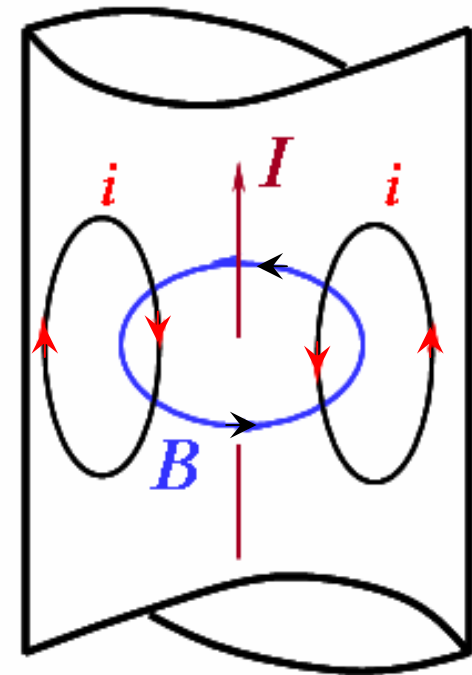
- 普通物理中，可以利用电磁感应做出粗略的定性解释
当导体中通有交变电流 I 时，在它周围会产生变化的
环形磁场

这个变化的磁场将在导体中产生涡旋
电场，从而生成感应电流 i

考虑到感应电流和交流电的位相关系，
在交流电的一个周期的大部分时间内，
表面附近的 I 与 i 是同向的（加强）

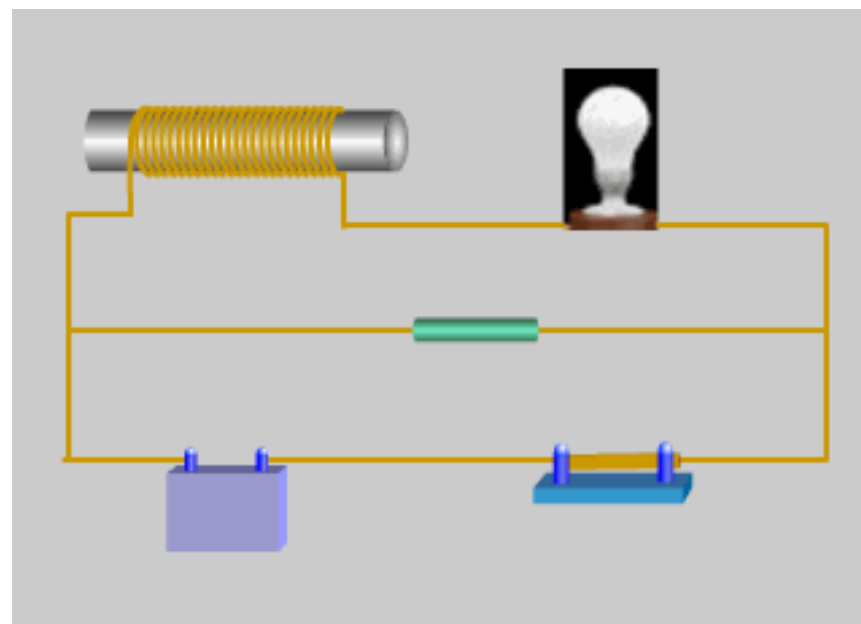
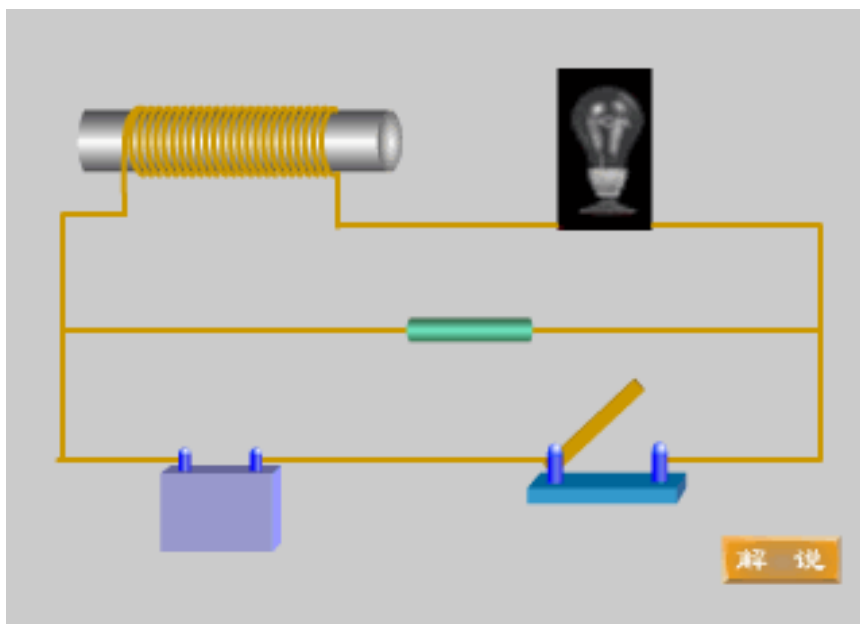
轴线附近的 I 与 i 是反向的（部分抵消）

∴ 导体的横截面上电流密度的分布将是 边缘 > 中心



§ 4 自感、互感

4.1 自感



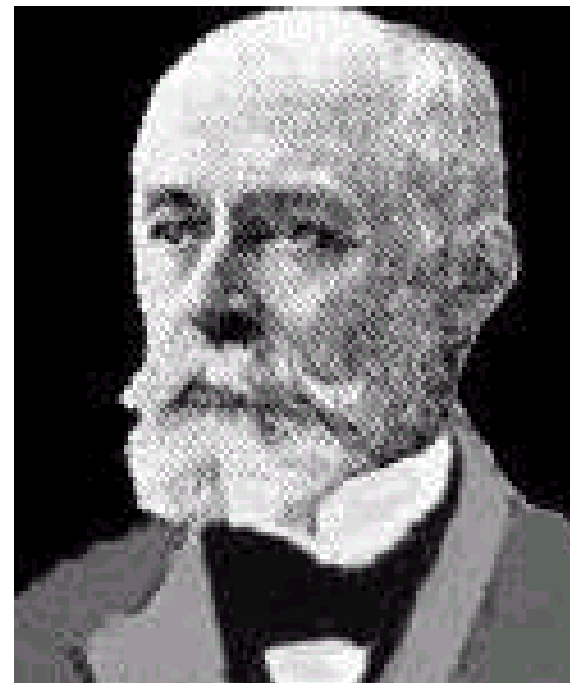
当线圈中的电流发生**变化**时
→ 穿过自身线圈的磁通量发生变化
→ 在自身线圈中产生感应电动势

——自感现象

亨利 Henry (1797-1878)

美国物理学家，1867年被选为美国国家科学院院长。

他在1830年观察到自感现象，直到1832年7月才将题为《长螺线管中的电自感》的论文，发表在《美国科学杂志》上。



亨利与法拉第是各自独立地发现电磁感应的，但发表稍晚些。强力实用的电磁铁继电器是亨利发明的，他还指导莫尔斯发明了第一架实用电报机。

为了纪念亨利，用他的名字命名了自感系数和互感系数的单位，简称：亨、H

若为无限长螺线管，电流为 I ，没有铁磁质时

$$B = \mu n I \quad B \propto I$$

对任一通有电流 I 的线圈回路，回路形状不变，
没有铁磁质时，根据Biot-Savart定律 $\rightarrow B \propto I$

$\Psi \propto B \propto I$ 则有 $\Psi = LI$ L 是线圈回路的自感(系数)

自感电动势 $\mathcal{E} = -\frac{d\Psi}{dt} = -L \frac{dI}{dt}$ \leftarrow 若自感系数是常量

负号表示自感电动势总是要阻碍回路本身电流的变化

自感具有保持原电路状态的能力——电磁惯性

L 就是这种能力大小的量度，表征了电磁惯性的大小

$F = m \frac{dv}{dt}$ 同样的电流变化率， L 越大， $|\mathcal{E}|$ 也越大

- 有利的方面：共振电路，滤波电路，[镇流器](#)

- 不利的方面：

对大电流电路，拉闸时会产生强烈的电弧，
可能因自感现象而引起事故。

L 与回路的大小、形状、匝数以及周围的磁介质有关，

L 的计算一般比较复杂，常采用实验方法测定。

$L = \frac{\psi}{I}$ 线圈中通有单位电流时，通过线圈自身的
磁通链数，等于该线圈的自感系数。

$L = \frac{d\psi}{dI} = - \frac{\mathcal{E}}{dI / dt}$ 等于线圈中磁通链数的时间变化率
除以电流强度的变化率。

此式更普遍，不论是否有铁磁质，是否密绕，都适用。

判断题： #T2604.

线圈中电流越大，说明其阻碍作用越小，自感系数 L 也越小。线圈中电流为0时，自感系数为无穷大。

例. 长直螺线管, 长度为 l , 横截面积为 S , 线圈总匝数为 N , 管中介质磁导率为 μ , 求: 自感系数。

解: 当有电流 I 通过时, 长直螺线管内的均匀磁场的大小为:

$$B = \mu \frac{N}{l} I = \mu n I$$

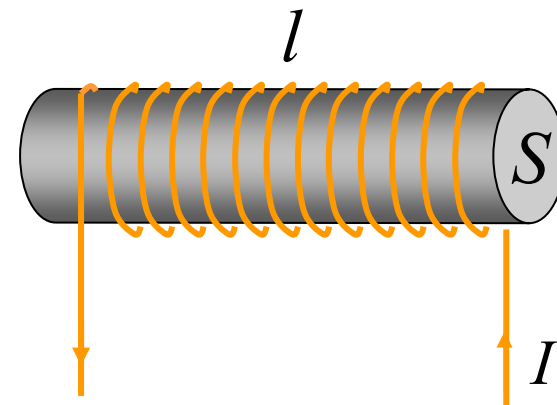
穿过螺线管的磁通匝链数等于

$$\psi = NBS = N\mu n IS$$

自感系数为 $L = \frac{\psi}{I} = N\mu n S = \mu \frac{N^2}{l} S = \mu n^2 Sl$

令 $V=Sl$ 为螺线管的体积 $L = \mu n^2 V$

增大 L 的方法: (1)密绕, 增大 n (2)放入铁芯, 增大 μ



例：同轴电缆由半径分别为 R_1 和 R_2 的两个无限长同轴柱面组成，**求：**单位长度上的自感。

解：由安培环路定理可知 $r < R_1, r > R_2$ $B = 0$

$$R_1 < r < R_2 \quad B = \frac{\mu_0 \mu_r I}{2\pi r} \quad \text{水平切向}$$

考虑高度为 l 的纵截面元 dS

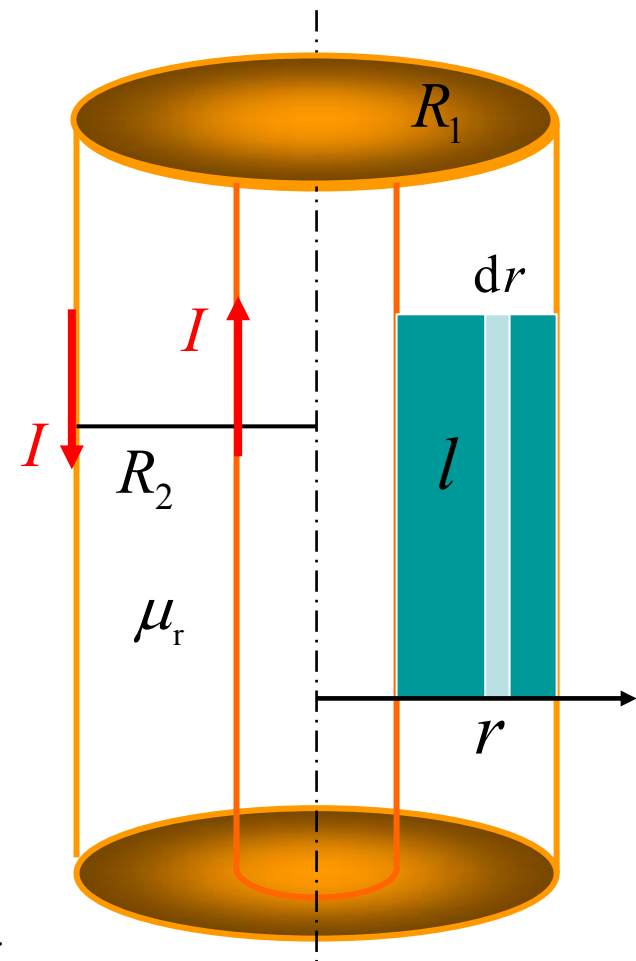
$$d\Phi_m = B dS = \frac{\mu_0 \mu_r I}{2\pi r} l dr$$

通过高为 l 的纵截面的磁通量

$$\Phi_m = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_0 \mu_r I}{2\pi r} l dr = \frac{\mu_0 \mu_r I l}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

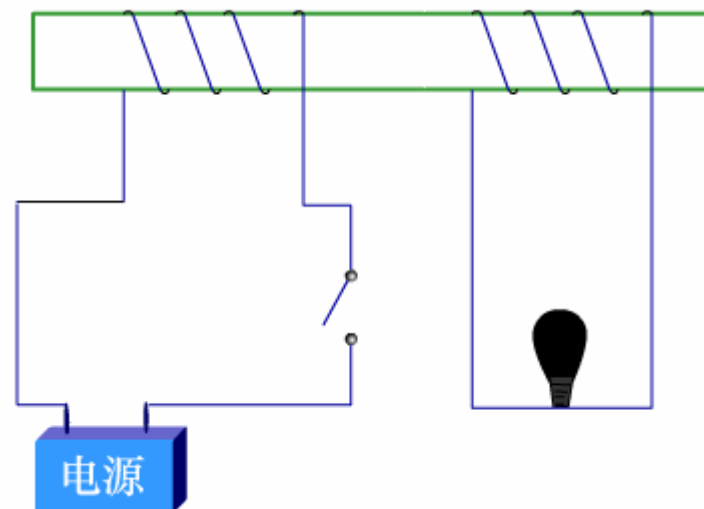
各纵截面并联 $\psi = \Phi_m$

$$\text{单位长度的自感} \quad L = \frac{\Phi_m}{Il} = \frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$



4.2 互感

当线圈1中的电流变化时→
引起线圈2中的磁通变化→
线圈2中产生感应电动势
——互感现象



线圈的互感现象

根据毕 — 萨定律：

穿过线圈2的磁通量正比于激发磁场的线圈1中的电流

$$\psi_{21} = M_{21} I_1 \quad M_{21} \text{是线圈1对线圈2的互感系数}$$

线圈2所激发的磁场通过线圈1的磁通量 $\psi_{12} = M_{12} I_2$

理论和实验证明： $M_{12} = M_{21} = M$

$$\psi_{21} = M I_1 \quad \psi_{12} = M I_2$$

$M = \frac{\psi_{21}}{I_1} = \frac{\psi_{12}}{I_2}$ 互感系数等于其中一个线圈中通有单位电流时，穿过另一线圈的磁通量。

$$\mathcal{E}_{21} = -\frac{d\psi_{21}}{dt} = -M \frac{dI_1}{dt} \quad \mathcal{E}_{12} = -\frac{d\psi_{12}}{dt} = -M \frac{dI_2}{dt}$$

$$M = -\frac{\mathcal{E}_{21}}{dI_1/dt} = -\frac{\mathcal{E}_{12}}{dI_2/dt} \quad \text{不论有无铁磁质均适用}$$

等于一个线圈中电流的时间变化率为一个单位时，在另一个线圈中所引起的互感电动势的绝对值。

负号表明，在一个线圈中所引起的互感电动势要反抗另一线圈中电流的变化引起的磁通的变化；互感同样反映了电磁惯性。

M 与线圈形状、大小、匝数、**相对位置**以及周围介质的磁导率有关。

東 亞 同 盟

选择题： #S2609.

两任意形状的导体回路1与2，通有相同的稳恒电流，若以 Ψ_{12} 表示回路2中的电流产生的磁场穿过回路1的磁通， Ψ_{21} 表示回路1中的电流产生的磁场穿过回路2的磁通，则

(A) $|\Psi_{12}| = |\Psi_{21}|$

(B) $|\Psi_{12}| > |\Psi_{21}|$

(C) $|\Psi_{12}| < |\Psi_{21}|$

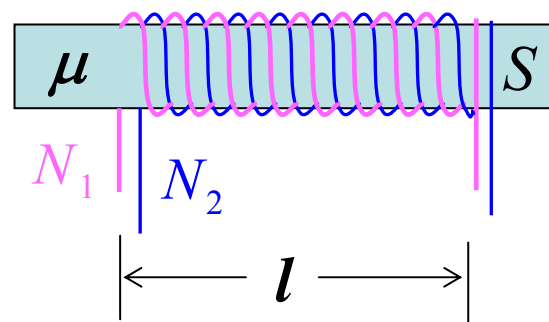
(D) 因两回路的大小形状未给定，所以无法比较。

例：设有两个长度均为 l 、横截面积为 S ，总匝数分别为 N_1 和 N_2 的同轴长直密绕螺线管，

求：互感系数（管内充满磁导率为 μ 的磁介质）

解：假设在长直螺线管 N_1 上通有电流 I_1 ，则螺线管内的磁场

$$B_1 = \mu \frac{N_1}{l} I_1$$



穿过 N_2 匝线圈的全磁通为： $\psi_{21} = N_2 B_1 S = \mu \frac{N_1 N_2}{l} I_1 S$

两同轴线圈的互感系数为： $M_{21} = \frac{\psi_{21}}{I_1} = \mu \frac{N_1 N_2}{l} S$

或假设在 N_2 上通有电流 I_2 $M_{12} = \frac{\psi_{12}}{I_2} = \frac{N_1 B_2 S}{I_2} = \mu \frac{N_2 N_1}{l} S$

$$M_{12} = M_{21} = M = \mu \frac{N_2 N_1}{l} S$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{线圈1的自感系数: } L_1 = \mu \frac{N_1^2}{l} S \\ \text{线圈2的自感系数: } L_2 = \mu \frac{N_2^2}{l} S \end{array} \right\} \begin{array}{l} M^2 = L_1 L_2 \\ M = \sqrt{L_1 L_2} \end{array}$$

以上只是无漏磁的情况，即彼此磁场相互完全穿过。

当有漏磁时： $M^2 \leq L_1 L_2$, $M \leq \sqrt{L_1 L_2}$

$M = k \sqrt{L_1 L_2}$ k : 两线圈的耦合系数, $0 \leq k \leq 1$

如它们相距无限远或垂直时，一线圈在另一线圈中的磁通量为零， $k=0$, $M=0$

k 与线圈的相对位置有关

- 互感的利用

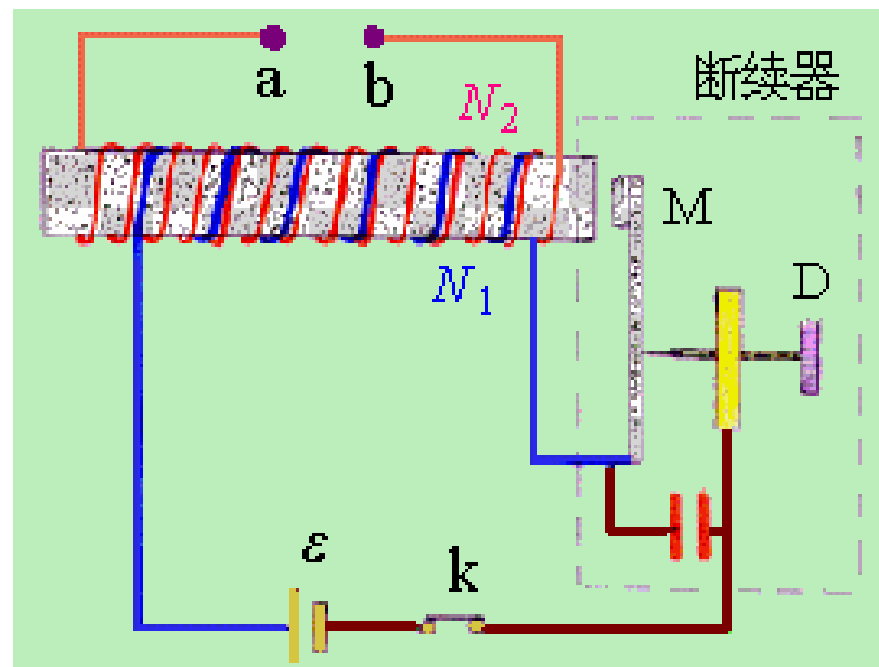
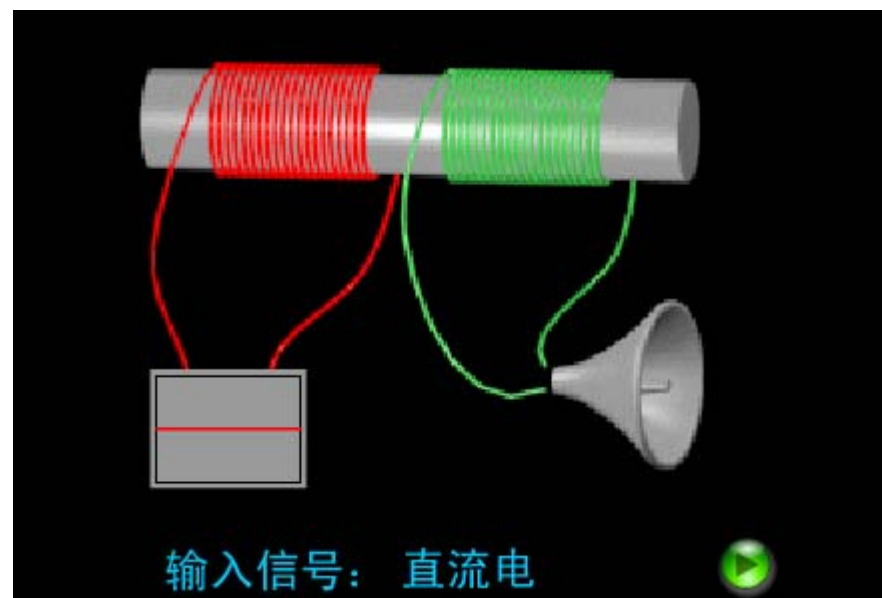
互感器：通过互感线圈能够使能量或信号由一个线圈传递到另一个线圈。

如电工、无线电技术中使用的各种**变压器**。

感应圈：**a,b**火花放电，
汽车发动机的点火器

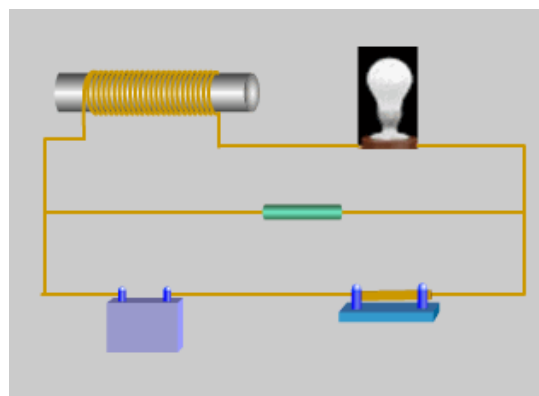
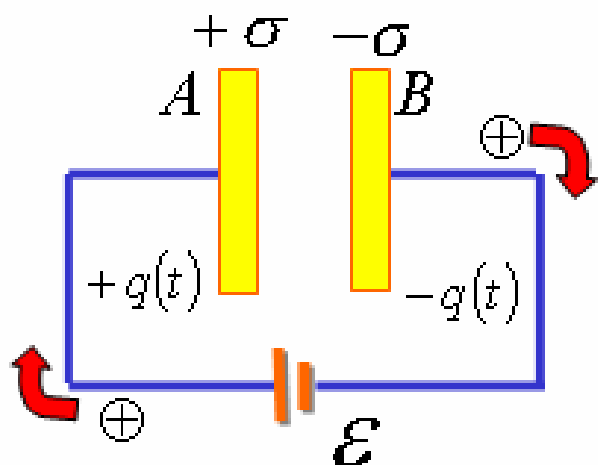
- 不利的方面：
如打电话窜线

要减小两线圈的互感，
可使它们互相垂直放置。



§ 5 磁场的能量

电容器充电过程中，外力(电源)必须克服静电力做功，将电源的能量转化为电容器的储能(电场能量)。



同样，要在线圈中通以电流，外力(电源)必须克服线圈中的自感电动势以及线圈之间的互感电动势做功，将电源的能量转化为线圈中的储能。

这个的储能就是线圈中电流激发的磁场的能量。

5.1 线圈的储能

对于如图所示的**RL**电路，根据全电路欧姆定律

$$\mathcal{E} - L \frac{dI}{dt} = RI \quad \mathcal{E} I dt = L I dI + R I^2 dt$$

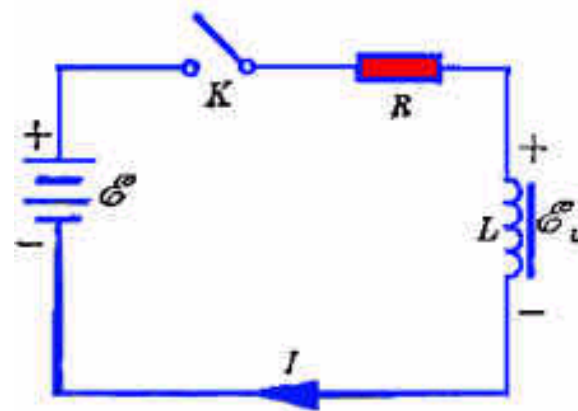
当电流在 t 时刻达到 I 时

$$\int_0^t \mathcal{E} I dt = \int_0^I L I dI + \int_0^t R I^2 dt$$

电源供给的能量

线圈的储能

焦耳热



此时线圈的储能 $W_m = \int_0^I L I dI = \frac{1}{2} L I^2$ 比较 $W_e = \frac{1}{2} C U^2$

- 电感线圈也是储能元件
- 自感系数反映线圈储能的本领

$$L = \frac{2W_m}{I^2} \text{ 由磁能求自感}$$

5.2 磁场的能量

以长直螺线管为例：当通有电流 I 时

$$B = \mu n I \Rightarrow I = \frac{B}{\mu n} \quad L = \mu n^2 V$$

长直螺线管的储能 $W_m = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} \mu n^2 V \left(\frac{B}{\mu n} \right)^2 = \frac{B^2}{2\mu} V$

W_m 与磁场区域的体积 V 有关，能量储存在管内磁场中

螺线管中的磁场是均匀的，单位体积内的磁场能量

$$w_m = \frac{B^2}{2\mu} = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2} B H = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} \quad \text{磁场能量密度}$$

普遍适用于均匀、非均匀磁场

任意磁场所储存的总能量:

$$W_m = \int_V w_m dV = \int_V \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} dV \quad \text{积分遍及磁场存在的空间}$$

对于各向同性均匀磁介质 $W_m = \int \frac{B^2}{2\mu} dV = \int \frac{1}{2} \mu H^2 dV$

比较电场能量

$$w_e = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} \quad W_e = \int_V w_e dV = \int_V \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} dV = \int_V \frac{1}{2} \epsilon E^2 dV$$

磁场能量公式与电场能量公式具有完全对称的形式

电场+磁场

$$w = w_e + w_m = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} + \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} \quad \text{普遍适用于各种电磁场}$$

例：同轴电缆由半径分别为 R_1 和 R_2 的两个无限长同轴圆柱面组成，其间介质的磁导率为 μ

求：单位长度上的磁场能量和自感系数

解：由安培环路定理可知

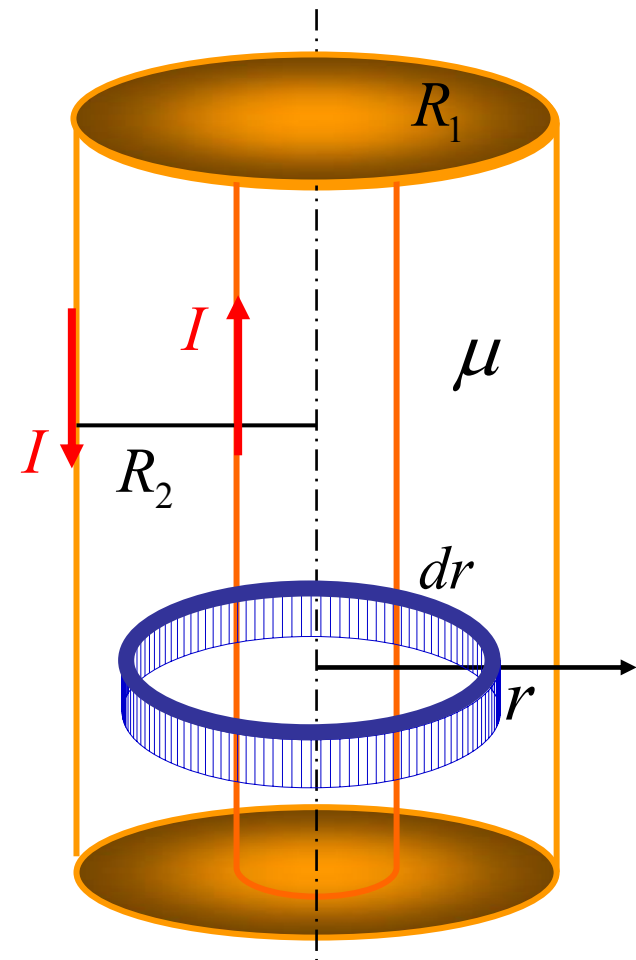
$$H = \begin{cases} 0 & (r < R_1, r > R_2) \\ \frac{I}{2\pi r} & (R_1 < r < R_2) \end{cases} \Rightarrow \frac{\mu I}{2\pi r} = B$$

$$\text{磁能密度 } w_m = \frac{1}{2} BH = \frac{\mu I^2}{8\pi^2 r^2}$$

单位长度上的磁能

$$W_m = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu I^2}{8\pi^2 r^2} 2\pi r \cdot 1 \cdot dr = \frac{\mu I^2}{4\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

$$\text{自感系数 } L = \frac{2W_m}{I^2} = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$



例：证明两个线圈的互感系数相等，即 $M_{12}=M_{21}$

证：先接通线圈1，使电流由 $0 \rightarrow I_1$ ，则线圈1中的自感磁能

$$W_1 = \frac{1}{2} L_1 I_1^2$$

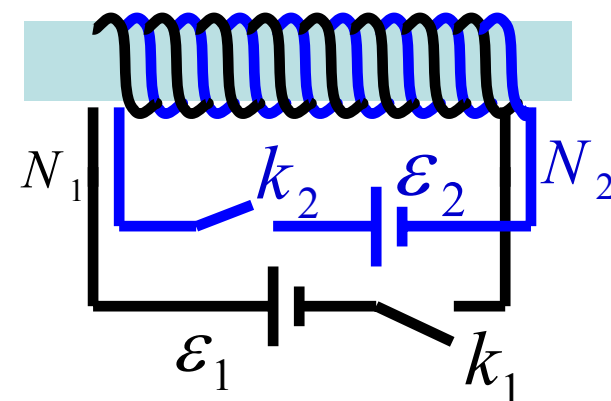
再接通线圈2，使电流由 $0 \rightarrow I_2$ ，
则线圈2中储存了自感磁能 W_2

另外，线圈2接通时，线圈1中
会产生互感电动势

$$\mathcal{E}_{12} = -M_{12} \frac{dI_2}{dt}$$

线圈1的电源维持 I_1 ，反抗互感电动势做功 \rightarrow 互感磁能

$$W_{12} = -\int_0^t \mathcal{E}_{12} I_1 dt = \int_0^t M_{12} \frac{dI_2}{dt} I_1 dt = \int_0^{I_2} M_{12} I_1 dI_2 = M_{12} I_1 I_2$$



$$W_2 = \frac{1}{2} L_2 I_2^2$$

两线圈组成的系统中，总磁能为

$$W_m = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M_{12} I_1 I_2$$

也可以先在线圈2中产生电流 I_2 ，
然后在1中产生 I_1 ，同样可得出

$$\text{互感磁能 } W_{21} = -\int_0^t \mathcal{E}_{21} I_2 dt = \int_0^t M_{21} \frac{dI_1}{dt} I_2 dt = \int_0^{I_1} M_{21} I_2 dI_1 = M_{21} I_2 I_1$$

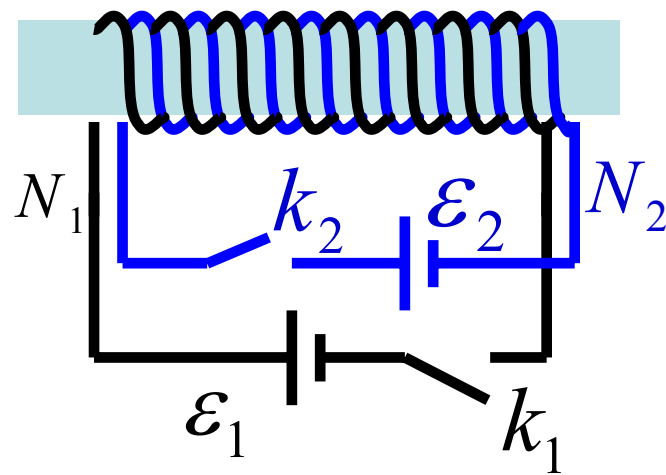
$$\text{总磁能为 } W'_m = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M_{21} I_1 I_2$$

两种通电方式的最后状态相同，

即线圈2中通有电流 I_2 ，线圈1中通有电流 I_1

能量是状态量，与达到此状态的过程无关，所以具有

$$\text{相同的能量 } W_m = W'_m \Rightarrow M_{12} = M_{21}$$



选择题： #S2610.

关于磁场能量，下列说法正确的是：

- (1)通以同样的电流，将导线卷成螺线管后比拉直时磁场能量要大；
- (2)螺绕环(环式螺线管)中内半径附近磁能密度大；
- (3)两个长度相同，匝数相同的细长线圈(可看作无限长)，它们的截面积不同，通有相同电流时，截面积较小的线圈中磁场能量密度较大；
- (4)若传导电流为0，则磁场能量也为0。

§ 6 位移电流

✓ 静电荷 → 静电场

✓ 变化的磁场 → 感生电场

✓ 稳恒电流 → 稳恒磁场

? 变化的电场 → 磁场

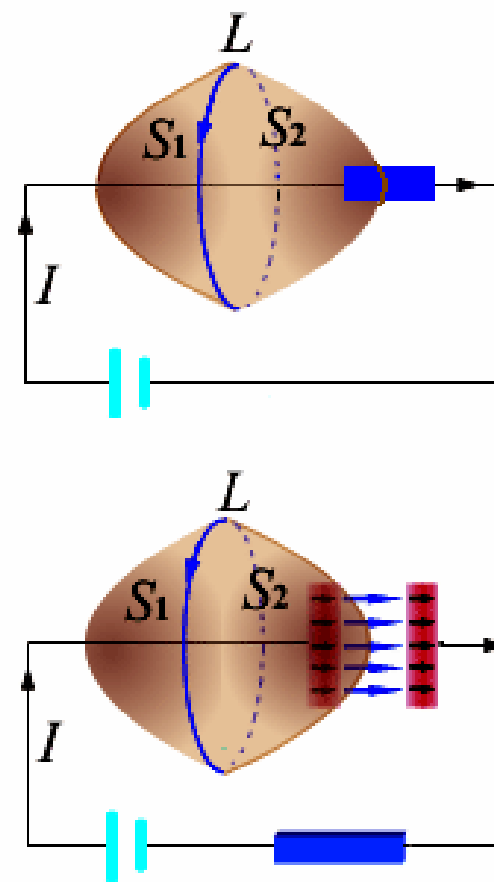
6.1 安培环路定理遇到的问题

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = I = \iint_{S_1} \vec{j} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_2} \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

穿过以环路 L 为边界的任意曲面

$$\left. \begin{array}{l} \text{对曲面 } S_1 \quad \oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_{S_1} \vec{j} \cdot d\vec{S} = I \\ \text{对曲面 } S_2 \quad \oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_{S_2} \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0 \end{array} \right\} \text{矛盾}$$

环路与电流没有套连，或传导电流变化且不连续，是非稳恒电流，原来的安培环路定理不成立。



6.2 位移电流

对非稳恒电流，根据电流的连续性方程，
对 S_1 和 S_2 组成的闭合曲面 S_0

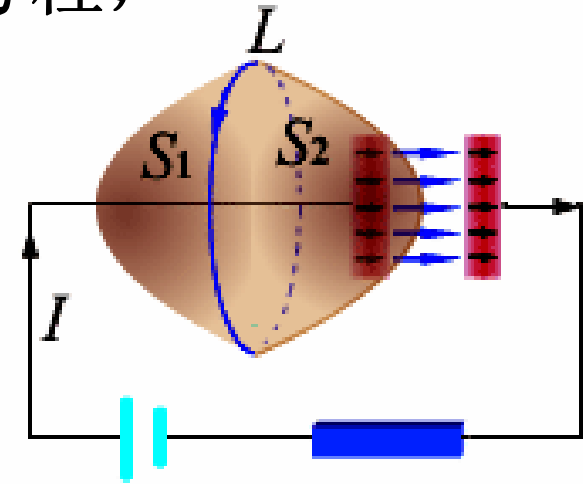
$$\oiint_{S_0} \vec{j} \cdot d\vec{S} = -\frac{dQ_{\text{内}}}{dt}$$

又根据高斯定理 $\oiint_{S_0} \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{\text{内}}$

$$\frac{dQ_{\text{内}}}{dt} = \frac{d}{dt} \oiint_{S_0} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \oiint_{S_0} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \oiint_{S_0} \vec{j} \cdot d\vec{S} = -\oiint_{S_0} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\Rightarrow \oiint_{S_0} \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow \iint_{S_1} \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} = \iint_{S_2} \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}$$

S_1 和 S_2 均以环路 L 为边界，且满足右手螺旋关系



$$\iint_{S_1} (\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot d\vec{S} = \iint_{S_2} (\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot d\vec{S} \quad I + \frac{d\Phi_D}{dt} \text{ 是连续的}$$

$$\text{电位移通量 } \Phi_D = \iint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \frac{d\Phi_D}{dt} = \iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\text{引入位移电流 } I_D = \frac{d\Phi_D}{dt} \quad \text{位移电流密度: } \vec{j}_D = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\text{全电流 } I_{\text{全}} = I + I_D \quad \iint_{S_1} (\vec{j} + \vec{j}_D) \cdot d\vec{S} = \iint_{S_2} (\vec{j} + \vec{j}_D) \cdot d\vec{S}$$

考虑到全电流的连续性，可将安培环路定理推广为

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = I + I_D = \iint_S (\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot d\vec{S}$$

S 以环路 L 为边界 —— 全电流安培环路定理

麦克斯韦认为：变化的电场也象电流一样产生磁场

电容器充(放)电过程中，电容器极板间虽无传导电流，但却存在着不断变化的电场→位移电流

$$\text{对 } S_1 \quad \oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_{S_1} (\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot d\vec{S} = I$$

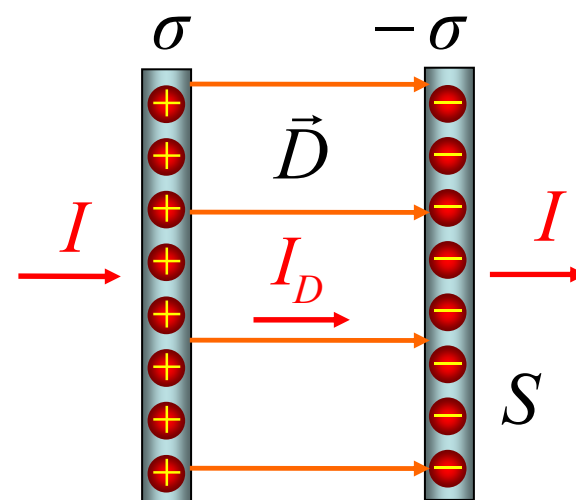
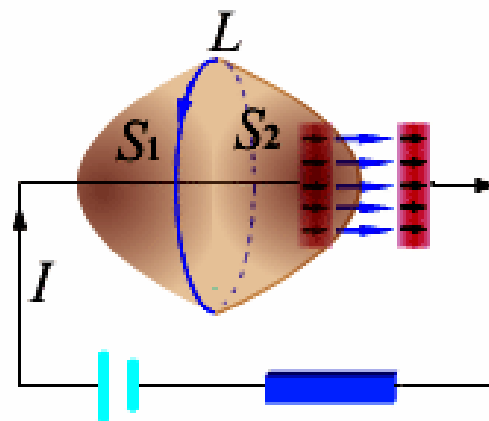
$$\text{对 } S_2 \quad \oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_{S_2} (\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot d\vec{S} = I_D$$

对电容器，根据高斯定理有 $D = \sigma$

电位移通量 $\Phi_D = DS = \sigma S = q$

$$\Rightarrow I_D = \frac{d\Phi_D}{dt} = \frac{d}{dt}(\sigma S) = \frac{dq}{dt} = I$$

对非稳恒电流，满足全电流安培环路定理。



选择题： #S2611.

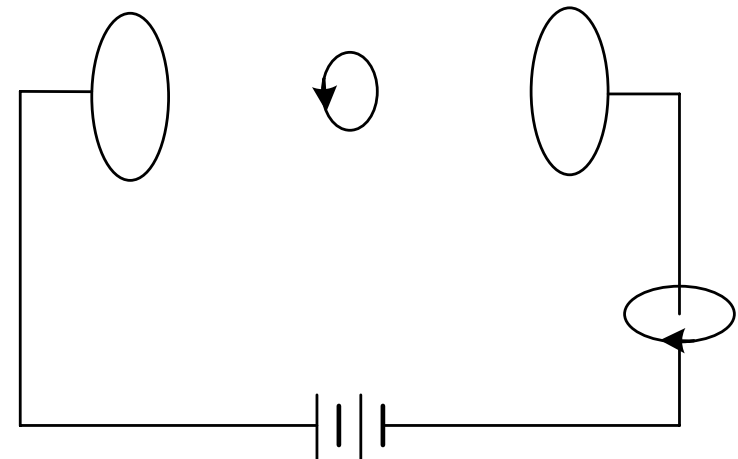
半径为 R 的两圆形电极板组成的平行板电容器(忽略边缘效应)，充电时分别沿图示的两环路 L_1 和 L_2 (半径 $r < R$)的磁场强度环流为

(A) $\oint_{L_1} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \oint_{L_2} \vec{H} \cdot d\vec{l}$

(B) $\oint_{L_1} \vec{H} \cdot d\vec{l} > \oint_{L_2} \vec{H} \cdot d\vec{l}$

(C) $\oint_{L_1} \vec{H} \cdot d\vec{l} < \oint_{L_2} \vec{H} \cdot d\vec{l}$

(D) $\oint_{L_1} \vec{H} \cdot d\vec{l} = 0$



★位移电流与传导电流的比较

产生根源	$\vec{j}_{\text{传}} = qn\vec{v}_{\text{漂}}$	$\vec{j}_{\text{位}} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$
	q 定向运动	电场的变化
存在于	导体	实物、真空
热效应	产生焦耳热	不产生焦耳热
磁效应	产生磁场	
单位(SI)	安培	

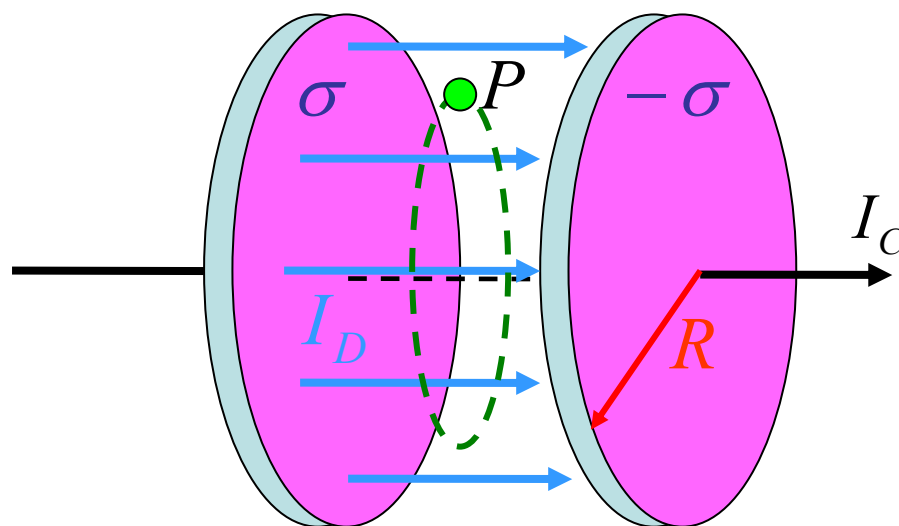
它们只是在产生磁场方面是**等效**的，故都称为电流。

二者**本质是不同的**，位移电流的本质是变化着的电场，而传导电流则是自由电荷的定向运动。

例：一平板电容器两极板都是半径**5.0cm**的圆导体片，
设充电时电荷在极板上均匀分布，两极间电场强度的
时间变化率为 **$dE/dt=2.0 \times 10^{13} \text{V} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$** ，

求：(1)两极板间的位移电流；(2)磁场的分布

解：(1)
$$I_D = \frac{d\Phi_D}{dt} = S \frac{dD}{dt}$$
$$= \pi R^2 \varepsilon_0 \frac{dE}{dt} = 1.4 \text{A}$$



(2) 电流分布具有轴对称性

取垂直于轴，并以轴为圆心，以 **r** 为半径的圆形环路，
环路与电流成右手螺旋

由对称性，在此积分环路上磁场强度
大小相等，方向沿切线方向

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = H 2\pi r$$

由全电流安培环路定理

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_C + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

对板间P点处 $r < R$

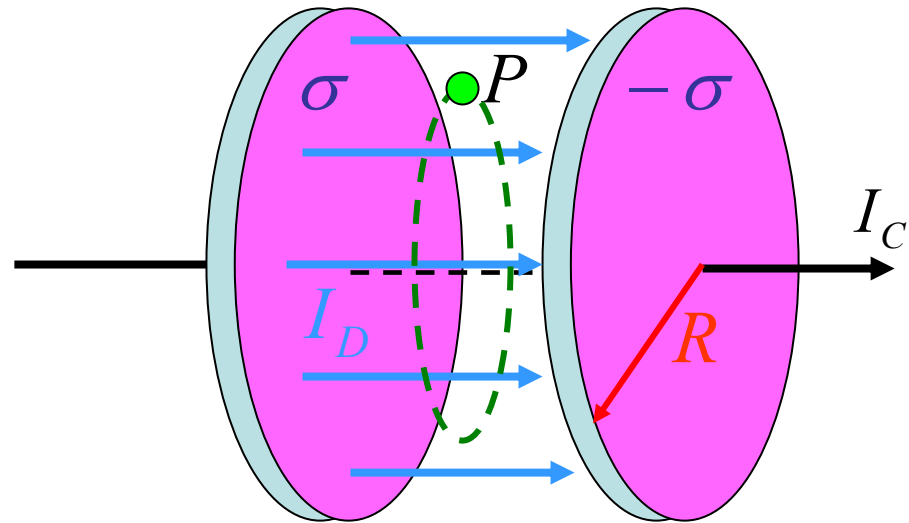
$$\int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = S \frac{dD}{dt} = \pi r^2 \varepsilon_0 \frac{dE}{dt}$$

$$I_C = 0 \quad H 2\pi r = \pi r^2 \varepsilon_0 \frac{dE}{dt} \quad H = \frac{\varepsilon_0 r}{2} \frac{dE}{dt} \quad B = \frac{\mu_0 \varepsilon_0 r}{2} \frac{dE}{dt}$$

$$\text{板外 } r > R \quad H 2\pi r = \pi R^2 \varepsilon_0 \frac{dE}{dt} \quad H = \frac{\varepsilon_0 R^2}{2r} \frac{dE}{dt} \quad B = \frac{\mu_0 \varepsilon_0 R^2}{2r} \frac{dE}{dt}$$

$$\text{在极板边缘处 } r = R \quad B = \frac{\mu_0 \varepsilon_0 R}{2} \frac{dE}{dt} = 5.6 \times 10^{-6} T$$

dE/dt 很大，但它所激发的磁场很弱，不易测量到。



§ 7 麦克斯韦方程组

麦克斯韦 **James Clerk Maxwell**
(1831——1879)



19世纪英国物理学家、数学家
经典电磁理论的奠基人，
气体动理论的创始人之一。

- 提出了有旋电场和位移电流，建立经典电磁理论，
- 预言了以光速传播的电磁波的存在。
- 他的《电磁学通论》与牛顿时代的《自然哲学的数学原理》并驾齐驱，是人类探索电磁规律的里程碑。
- 在气体动理论方面，提出气体分子按速率分布的统计规律。

•静电场

静电场的高斯定理

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_0$$

静电场的环路定理

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

•稳恒磁场

磁场的高斯定理

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

安培环路定理

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_C$$

微分形式

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}_C$$

在19世纪中期，Maxwell确立了电荷、电流和电场与磁场之间的普遍关系，建立了统一的电磁场理论

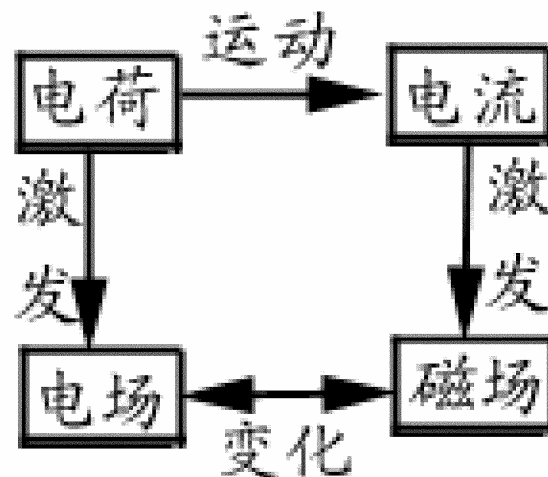
变化的电场与变化的磁场相互激发组成统一的整体，即电磁场，静电场与稳恒磁场是电磁场的特殊形式。

静止电荷 → 无旋电场

变化的磁场 → 涡旋电场

电流
 变化的电场

} 涡旋磁场



$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_C + I_D = \iint_S \left(\vec{j}_C + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}$$

麦克斯韦方程组

微分形式

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_0$$

静电场是有源场、感应电场是涡旋场

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

静电场是保守场，变化磁场可以激发涡旋电场

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

传导电流、位移电流产生的磁场都是无源场

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_S \left(\vec{j}_C + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}_C + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

传导电流和变化电场均可以激发涡旋磁场

判断题： #T2605.

变化的电场产生的磁场，也一定是随时间变化的；
变化的磁场产生的电场，也一定是随时间变化的。

➤麦克斯韦电磁场理论预言了电磁波的存在

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{取旋度} \quad \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{B})$$

利用公式 $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \cdot \vec{E}$

考虑真空中，没有电荷和电流的情形 $\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases}$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\nabla^2 \cdot \vec{E} \quad -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \cdot \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \nabla^2 \cdot \vec{H} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} \quad \text{——波动方程}$$

1888年赫兹实验证实了这个预言，导致了无线电的诞生

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 2.998 \times 10^8 \text{ m/s} \quad \text{麦克斯韦预言：光就是电磁波}$$

- 麦克斯韦方程组
- 各向同性介质中，物质方程组

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} = \mu_r \mu_0 \vec{H}$$

- 欧姆定律的微分形式

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

- 运动电荷受到的洛伦茨力

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

可以解决宏观电
磁场的各种问题

完整的宏观电
磁场理论，即
经典电动力学

对于分子、原子等微观过程中的电磁现象，
需由更普遍的量子电动力学来解决。

本章小结

1. 法拉第电磁感应定律

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi_m}{dt}$$

2. 楞次定律

闭合回路中，感应电流的方向总是使得它自身所产生的磁通量反抗引起感应电流的磁通量变化。

3. 动生电动势

非静电力

$$\vec{F}_m = q(\vec{v} \times \vec{B})$$

动生电动势

$$\mathcal{E} = \int_b^a \vec{E}_K \cdot d\vec{l} = \int_b^a (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

4. 感生电动势

非静电场——有旋电场

感生电动势 $\mathcal{E} = \int_a^b \vec{E}_V \cdot d\vec{l}$

有旋电场与变化磁场之间的关系：

$$\oint_L \vec{E}_V \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad S \text{ 以环路 } L \text{ 为边界}$$

感生电场与磁场的变化率成左手螺旋关系

5. 自感与互感

(1) 自感

$$\Psi = LI \quad L \text{ 自感系数}; \quad \mathcal{E}_L = -L \frac{dI}{dt} \quad \text{自感电动势}$$

(2)互感

$\Psi_{21} = M_{21}I_1$ M_{21} 是回路1对回路2的互感系数。

互感电动势 $\mathcal{E}_{21} = -M_{21} \frac{dI_1}{dt}$ $\mathcal{E}_{12} = -M_{12} \frac{dI_2}{dt}$

可以证明: $M_{21} = M_{12} = M$

6. 磁场能量

电感线圈贮存的能量 $W_m = \frac{1}{2}LI^2$

磁场能量密度 $w_m = \frac{W_m}{V} = \frac{1}{2}BH$

磁场的能量 $W_m = \int_V w_m dV = \int_V \frac{1}{2}BH dV$

积分遍及磁场存在的空间

7. 麦克斯韦电磁场理论简介

(1) 位移电流（变化的电场）

$$I_D = \frac{d\Phi_D}{dt} = \frac{d}{dt} \int_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

(2) 麦克斯韦方程组的积分形式

$$\left\{ \begin{array}{l} \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum_{S \text{ 内}} q_{0i} \\ \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \\ \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \\ \oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot d\vec{S} \end{array} \right.$$

例：一半径为 a ，电阻为 R 的小线圈，起初和一半径为 $b(>>a)$ 的大线圈共面并同心，大线圈中通以稳恒电流 I 并保持固定，小线圈以角速度 ω 绕直径匀速转动，**求：**(1)小线圈中的感应电流；(2)使小线圈匀速转动所需施加的外力矩。

解：(1)大线圈在小线圈处的磁场 $B = \frac{\mu_0 I}{2b}$

某时刻 t 通过小线圈的磁通量 $\Phi = BS \cos \omega t$

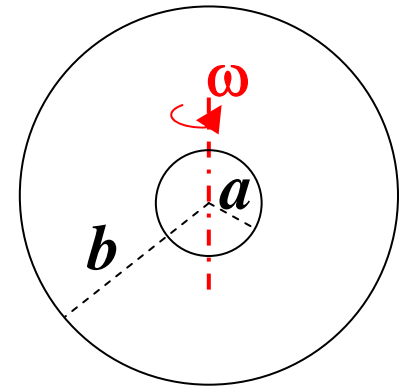
小线圈中的感应电动势 $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$

小线圈中的感应电流 $i = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{\mu_0 I \pi a^2 \omega}{2bR} \sin \omega t$

(2)小线圈中的感应电流会受到大线圈磁场的磁力矩

$$M = iSB = \frac{\mu_0 I \pi a^2 \omega \sin \omega t}{2bR} \pi a^2 \frac{\mu_0 I}{2b} = \left(\frac{\mu_0 I \pi a^2}{2b} \right)^2 \frac{\omega}{R} \sin \omega t$$

需施加方向与 \mathbf{M} 相反，大小与 \mathbf{M} 相同的外力矩



作业 P161

7, 10, 11, 15, 16, 18, 20, 24

