$\Sigma: z=z(x,y), \quad (x,y)\in D_{xy}$

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,dS$$

$$= \iint_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$$

例. $I=\iint_{\Sigma}(x+z)\,dS = \iint_{\Sigma} x\,dS + \iint_{\Sigma} z\,dS \xlongequal{对称性} \iint_{\Sigma} z\,dS$

其中 $\Sigma: z=\sqrt{1-x^2-y^2}$. Σ关于yoz和zox面对称

yoz面 $(x,y,z)\longleftrightarrow(-x,y,z)$

解: $D_{xy}: x^2+y^2\le 1$.

$$z_x=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \qquad z_y=-\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

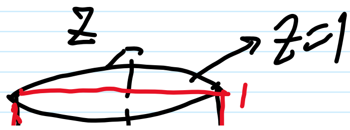
$$I=\iint_{D_{xy}}\left(x+\sqrt{1-x^2-y^2}\right)\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2-y^2}+\frac{y^2}{1-x^2-y^2}}\,dxdy$$

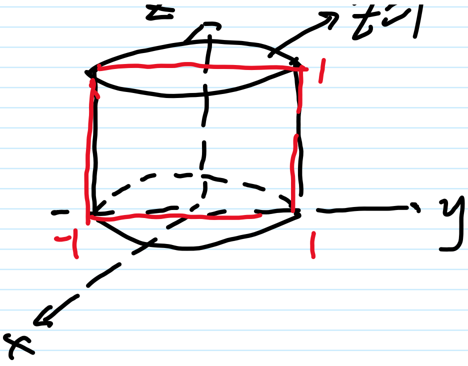
$$=\iint_{D_{xy}}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}+1\right)dxdy$$

$$=\iint_{D_{xy}}\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,dxdy+\pi\cdot 1^2 = 0+\pi=\pi.$$

例. $I=\iint_{\Sigma}(x+z)\,dS$

其中Σ: $x^2+y^2=1$. 在$z=0$和$z=1$之间的部分





解: Σ 关于 yoz 面与 zox 面对称

故 $I=\iint_{\Sigma} z\,dS \xlongequal{\text{对称性}} 2\iint_{\Sigma_{前}} z\,dS$

Σ 投影在 yoz 面: $D_{yz}: -1\le y\le 1,\ 0\le z\le 1.$

$\Sigma=\Sigma_{前}+\Sigma_{后}.$

$\Sigma_{前}$: $x=\sqrt{1-y^2}$ $\quad x_y=-\dfrac{y}{\sqrt{1-y^2}}$ $\quad x_z=0$

$\Sigma_{后}$: $x=-\sqrt{1-y^2},$ $\quad x_y=\dfrac{y}{\sqrt{1-y^2}}$ $\quad x_z=0$

$$I=I_{\Sigma_{前}}+I_{\Sigma_{后}}=\iint_{D_{yz}} z\cdot\sqrt{1+\frac{y^2}{1-y^2}+0^2}\,dydz+\iint_{D_{yz}} z\sqrt{1+\frac{y^2}{1-y^2}+0^2}\,dydz$$

$$=2\iint_{D_{yz}} z\cdot\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,dydz=2\left(\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,dy\right)\left(\int_0^1 z\,dz\right)=\cdots$$

例: $I=\iint_{\Sigma}(x^2+y^2)\,dS$

其中 ① Σ: $x^2+y^2+z^2=1.$

② Σ: $x^2+y^2+z^2=2x+2y+2z.$

解: ① Σ 轮换对称性. $I=\dfrac{2}{3}\iint_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\,dS=\dfrac{2}{3}\iint_{\Sigma}1\,dS$

$=\dfrac{2}{3}\cdot 4\pi\cdot 1^2=\dfrac{8}{3}\pi.$

$= \frac{\;}{3}\cdot 4\pi r \cdots 8$

② Σ 具有轮换对称性

$$I=\frac{2}{3}\iint_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\,dS=\frac{2}{3}\iint_{\Sigma}(2x+2y+2z)\,dS$$

$$=\frac{4}{3}\underbrace{\iint_{\Sigma}(x+y+z)\,dS}=\frac{4}{3}\cdot 3\iint_{\Sigma}x\,dS=4\iint_{\Sigma}x\,dS$$

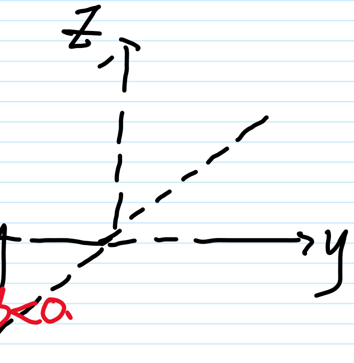
$$=4\cdot\bar{x}\cdot S=4\times1\times4\pi 1^2$$

形心公式：

$$\bar{x}=\frac{\iint_D x\,d\sigma}{\iint_D 1\,d\sigma}=\frac{\iint_D x\,d\sigma}{\sigma}\qquad \bar{x}=\frac{\iiint_\Omega x\,dv}{V}$$

$$\bar{x}=\frac{\int_L x\,ds}{s}\qquad \bar{x}=\frac{\iint_\Sigma x\,dS}{S}$$

第五节 对坐标的曲面积分 (Ⅱ型)



定义：双侧曲面.

xoy面、yoz面、zox面

上侧 下侧 前侧 后侧 左侧 右侧

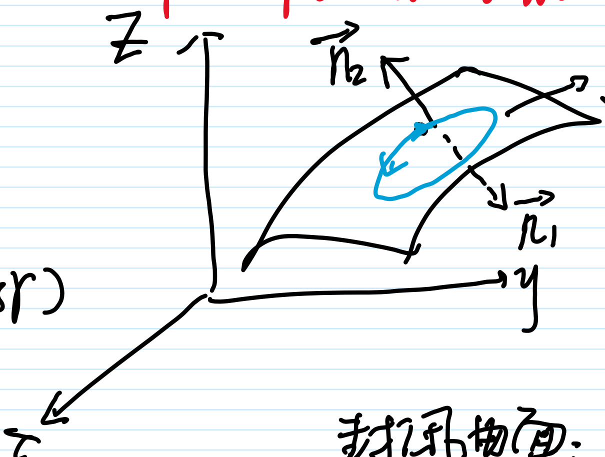
$\cos\gamma>0$ $\cos\gamma<0$ $\cos\alpha>0$ $\cos\alpha<0$ $\cos\beta>0$ $\cos\beta<0$

法向量 $\vec{n}$,

方向余弦

$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$

$=\frac{1}{|\vec{n}|}\vec{n}$



$z=z(x,y)$, $\vec{n}_1$

一个法向量 $(z_x, z_y, -1)$

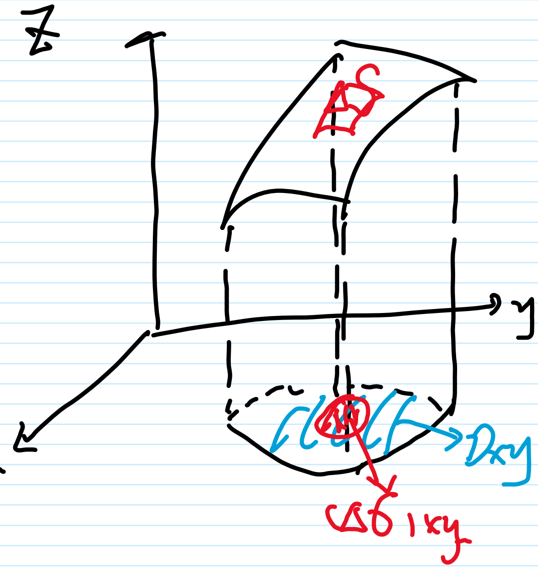
或者 $(-z_x,-z_y,1)$ $=\vec{n}_2$

封闭曲面：内侧、外侧

定义：单侧曲面.

定义：有向曲面的投影 —实数

有向 ΔS 在 xOy 面上的投影记为 $(\Delta S)_{xy}$

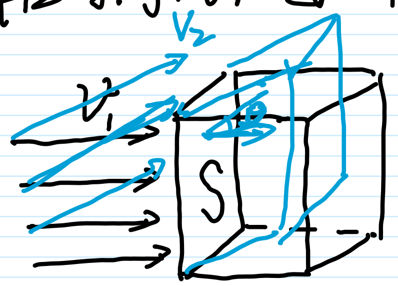


$$(\Delta S)_{xy}=\begin{cases}+(\Delta\sigma)_{xy}, & \cos\gamma>0\\ 0, & \cos\gamma=0\\ -(\Delta\sigma)_{xy}, & \cos\gamma<0\end{cases}$$

引例. 不可压缩流体（ρ=常数）

$$\vec{v}=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$$

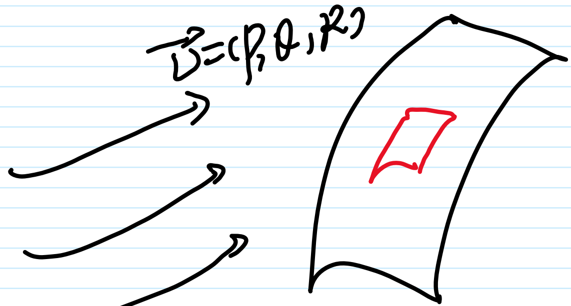
单位时间内经过一个有向曲面 Σ 的体积（流量）



$$V_1=v_1\cdot 1\times S$$

$$V_2=v_2\cdot 1\cdot\cos\theta\times S=|\vec{v}|\,|\vec{n}^0|\cos\theta\cdot S$$

$$=\vec{v}\cdot\vec{n}^0\cdot S$$



定义：若 P,Q,R 在有向 Σ 有界，① 任意分割 ② 任意取点

若 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}(P_i,Q_i,R_i)\cdot(\cos\alpha_i,\cos\beta_i,\cos\gamma_i)\Delta S_i$ 存在

……曲面积分（第二类）

则称为 $\vec{A}=(P,Q,R)$ 在有向Σ上对坐标的曲面积分（II型）.

记为 $\iint\limits_{\Sigma}\vec{A}\cdot\vec{dS}$　其中 $\vec{dS}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)dS$

$=(\cos\alpha dS,\cos\beta dS,\cos\gamma dS)$

$\cos\alpha dS = dydz$，$\cos\beta dS = dzdx$，$\cos\gamma dS = dxdy$

$$\boxed{\begin{aligned}&=\iint\limits_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS \quad \text{I型曲面积分}\\ &\text{两者之间联系}\\ &=\iint\limits_{\Sigma}P\cdot dydz+Q\,dzdx+R\,dxdy \quad \text{II型曲面积分}\end{aligned}}$$

$$\int_L Pdx+Qdy+Rdz=\int_L (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)ds.$$

性质：(1) 有向性

$$\iint\limits_{\Sigma}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$$

$$=-\iint\limits_{\Sigma^-}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$$

(2) 不要使用对称性

II型曲面积分的计算 ⟶ 二重积分

(1). $\iint\limits_{\Sigma}R(x,y,z)\,dxdy$.　$\Sigma: z=z(x,y)$ 投影到 xoy 面 D_{xy}.

$$=\pm\iint\limits_{D_{xy}}R(x,y,z(x,y))\,dxdy.$$

$= \pm \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x,y)) \, dxdy.$

上侧 $\cos\gamma > 0$，取"+"；下侧 $\cos\gamma < 0$，取"-"。

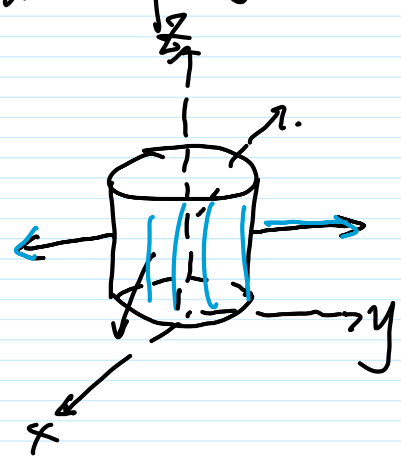
(2). $\iint_{\Sigma} P(x,y,z) dydz = \pm \iint_{D_{yz}} P(x(y,z), y, z) \, dydz.$

$\cos\alpha > 0$ 取"+"；$\cos\alpha < 0$ 取"-"

(3) $\iint_{\Sigma} Q(x,y,z) dzdx = \pm \iint_{D_{zx}} Q(x, y(z,x), z) \, dzdx$

$\cos\beta > 0$ 取"+"，$\cos\beta < 0$，取"-"。

例. Σ: $x^2+y^2=1$. 位于 $z=0$ 和 $z=1$ 之间部分 "外侧"



$\Sigma \perp xoy$ 面.

在 xoy 面上的投影 $dxdy = 0$

$\iint_{\Sigma} R(x,y,z) dxdy = 0$

推论：(1) $\Sigma \perp xoy$ 面 $\xRightarrow{dxdy=0}$ $\iint_{\Sigma} R \, dxdy = 0$

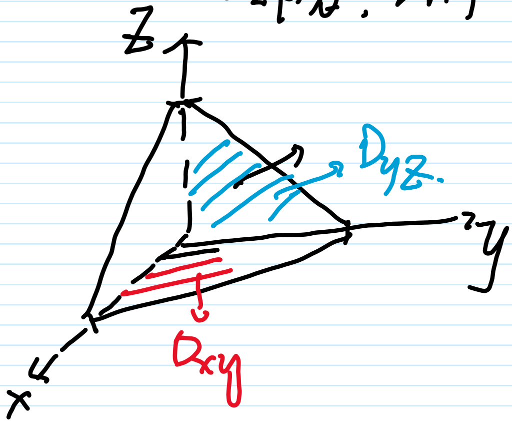
(2) $\Sigma \perp yoz$ 面 $\xRightarrow{dydz=0}$ $\iint_{\Sigma} P \, dydz = 0$

(3) $\Sigma \perp zox$ 面 $\xRightarrow{dzdx=0}$ $\iint_{\Sigma} Q. \, dzdx = 0$

例. $I=\iint_{\Sigma} 1\, dS$ Σ: $x^2+y^2=1$ 介于 $z=0$ 和 $z=1$ 部分

解, $I = S = 2\pi\cdot 1\times 1 = 2\pi \neq 0$

例. $I=\iint_{\Sigma} (x+1)\,dydz + 1\cdot dxdy$. Σ: $x+y+z=1$ 在第一卦限部分, "上侧"



解: $I_1=\iint_{\Sigma} (x+1)\,dydz$

($\cos\alpha>0$) $= +\iint_{D_{yz}} (1-y-z+1)\,dydz$

$I_2=\iint_{\Sigma} 1\,dxdy = +\iint_{D_{xy}} 1\,dxdy$