2023-2024高数下期中

2024年4月25日 8:41

一、

1. ① $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{\ln n}}$ ② $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$ ③ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n!}{n^n}$ ④ $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}\ln^3 n}$ 中收敛（ C ）

A. ①③ B. ③④ C. ②③ D. ②④

解: ① $2^{\ln n}=(e^{\ln 2})^{\ln n}=e^{\ln 2\cdot \ln n}=e^{\ln n^{\ln 2}}=n^{\ln 2}$.

$0<\ln 2<1$. 故①发散;

② $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$. 积分法判断收敛. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^p n}\begin{cases} p>1 & 收敛 \\ p\le 1 & 发散\end{cases}$.

③ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}\cdot(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{2^n\cdot n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{2}{e}<1$.

由比值判别法. $\rho<1$. 故③收敛

④ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n}\ln^3 n}}{\frac{1}{n\ln n}}=+\infty$. 或者. $\exists N$. 当$n>N$时. $\frac{1}{\sqrt{n}\ln^3 n}>\frac{1}{n\ln n}$

故由 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ 发散, 得④发散.

2. $\sum_{n=1}^{\infty}(a-\frac{1}{n})^n$ 收敛, 则 a 取值范围（ A ）.

A. $(-1,1)$ B. $[-1,1]$. C. $[-1,1)$. D. $(-1,1]$.

解: $|u_n|=|a-\frac{1}{n}|^n$. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}|a-\frac{1}{n}|=|a|$.

i) 当 $|a|<1$ 即 $-1<a<1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛, 可得 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛

ii) 当 $|a|>1$ 即 $a>1$或$a<-1$时. $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散. 可得 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散. (由比值/根值判断)

iii). 当 $|a|=1$ 即 $a=1$或-1 时. 易得 $\lim\limits_{n\to\infty}(a-\frac{1}{n})^n\neq 0$, 可得 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

iii) 可直接排除B.C.D.

3. $\{a_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{na_n}{\ln(1+\frac{1}{n})}=0$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$（ B ）

A. 条件收敛 B. 绝对收敛 C. 发散 D. 不确定

解: $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{na_n}{\ln(1+\frac{1}{n})}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{\frac{1}{n^2}}=0$.

解: $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{n a_n}{\ln(1+\frac{1}{\sqrt n})}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_n|}{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\sqrt n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_n|}{\frac{1}{n^{\frac32}}} = 0.$

由比较法极限形式，可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac32}}$ 收敛，得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛.

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 绝对收敛.

4. $f(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$，则 $f^{(99)}(0)=$ (B)

A. $\frac{1}{99}$　　B. $-\frac{1}{99}$　　C. $\frac{1}{99!}$　　D. $-\frac{1}{99!}$

解:
$$\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt = \int_0^x \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}t^{2n+1}}{t}dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\int_0^x t^{2n}dt$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\,\frac{1}{2n+1}\cdot x^{2n+1}$$

由 $a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)$ 得 $f^{(99)}(0)=99!\,a_{99}$. 是 x^{99} 的系数

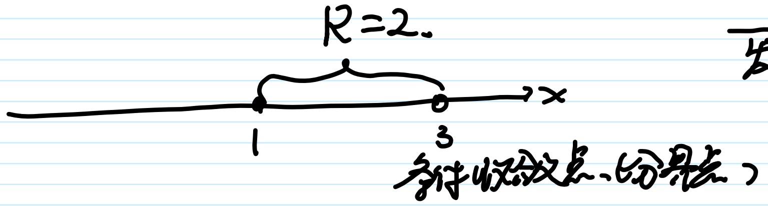
$a_{99}=\frac{(-1)^{49}}{99!}\cdot\frac{1}{99}$　故 $f^{(99)}(0)=-\frac{1}{99}$

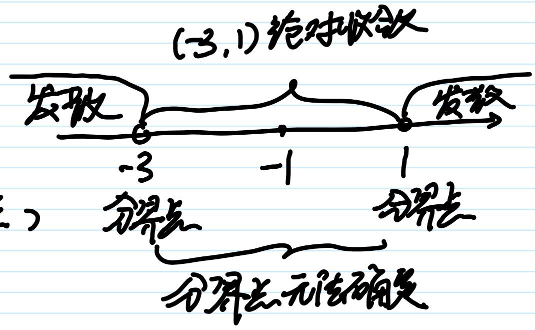
5. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 在 $x=3$ 条件收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(n+1)a_n(x+1)^n$ (D)

A. $x=-\frac52$ 条件收敛　　B. $x=2$ 绝对收敛

C. $x=-3$ 条件收敛　　D. $x=-4$ 发散

解





6. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$ 则 (C)

A. $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 连续.　　B. $f(x,y)$ 在 $(1,0)$ 处不可微

C. $f_x(x,y)$. $f_y(x,y)$ 在 $(0,1)$ 连续.　　D. $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 可微

C. $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$在$(0,1)$连续.　　D. $f(x,y)$在$(0,0)$可微

解: $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx^2}} \frac{x^2\cdot kx^2}{x^4+k^2x^4} = \frac{k}{1+k^2}$ 与k有关，故不连续.

由可微必连续可知，不连续必不可微

而 $\frac{x^2y}{x^4+y^2}$ 在除$(0,0)$之外连续、可微且各阶偏导连续.

二、

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\ln\cos(xy)}{\sqrt{1+x^2y}-1}$ = ___-1___

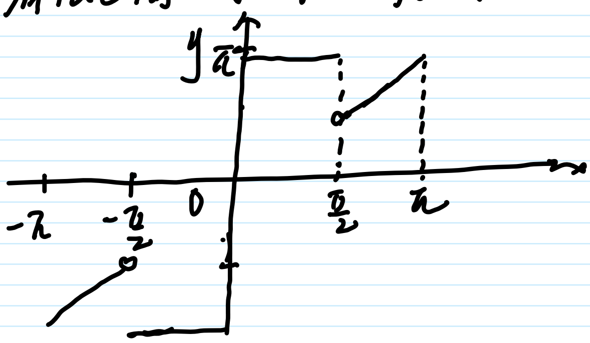
解. 原式 $= \lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\ln(1+\cos(xy)-1)}{\frac{1}{2}x^2y} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\cos(xy)-1}{\frac{1}{2}x^2y}$

$= \lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \frac{-\frac{1}{2}(xy)^2}{\frac{1}{2}x^2y} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} -y = -1$

2. $f(x)=\begin{cases}\pi, & 0\le x\le \frac{\pi}{2}\\ x, & \frac{\pi}{2}<x\le\pi.\end{cases}$　　$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$.

$b_n = 2\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$, 则 $S(\frac{3\pi}{2})=$ ___$-\frac{3}{4}\pi^2$___

解: 有限区间上的函数奇延拓得到正弦级数.



$T=2\pi$　$l=\frac{T}{2}=\pi$.

$[0,\pi]$上间断点 $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$, $x=\pi$.

$S(\frac{3}{2}\pi) = S(\frac{3}{2}\pi-2\pi) = S(-\frac{\pi}{2})$

$= -S(\frac{\pi}{2}) = -\frac{f(\frac{\pi}{2}^-)+f(\frac{\pi}{2}^+)}{2}$

公式计算得傅里叶系数 $= -\frac{\pi+\frac{\pi}{2}}{2} = -\frac{3}{4}\pi$.

注意: 但是正弦级数的 $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$. 题目中的$b_n$(记为$b_n'$)

{注意:} 但是正弦级数的 $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0 f(x)\sin nx\,dx$. 题目中的 b_n ……

$b_n' = \pi b_n$. 故题目中的 $S(\frac{3}{2}\pi)$ (记为 $S'(\frac{3}{2}\pi)$)

$S'(\frac{3}{2}\pi) = \pi S(\frac{3}{2}\pi) = \pi\cdot(-\frac{3}{4}\pi) = -\frac{3}{4}\pi^2$

课程中的正弦级数.

3. $f(x) = \ln(2-x)$ 的麦克劳林级数展开式为 $\underline{\ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}x^n,\ x\in[-2,2)}$

解: $\ln(2-x) = \ln(2\cdot(1-\frac{x}{2})) = \ln 2 + \ln(1-\frac{x}{2})$

$= \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(-\frac{x}{2})^n = \ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}x^n.$

$-1 < -\frac{x}{2} \le 1$ 即 $-2 \le x < 2$.

4. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin x - xy^2}{x^2 y}, & xy \ne 0 \\ 0, & xy = 0 \end{cases}$. 则 $f_x(0,-1) = \underline{\frac{1}{6}}$.

解: $f_x(0,-1) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,-1) - f(0,-1)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\sin\Delta x - \Delta x}{-(\Delta x)^2} - 0}{\Delta x}$

$= \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x - \sin\Delta x}{(\Delta x)^3} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x - (\Delta x - \frac{1}{3!}(\Delta x)^3 + o(\Delta x^3))}{(\Delta x)^3} = \frac{1}{6}$

5. 在 $u = \lambda x$, $v = x^2+y^2$ 下, 方程 $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = y$. 转化为 $\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{1}{2}$.

则 $\lambda = \underline{2}$

解: $z = f(u,v) = f(\lambda x, x^2+y^2)$

$\frac{\partial z}{\partial x} = f_1'\cdot\lambda + f_2'\cdot 2x$. $\frac{\partial z}{\partial y} = f_1'\cdot 0 + f_2'\cdot 2y$

$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = \lambda y f_1' + 2xyf_2' - 2xyf_2' = \lambda y f_1' = y$.

其中 $f_1' = \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{1}{2}$ 故 $\frac{1}{2}\lambda y = y$ 即 $\lambda = 2$.

6.

其中 $f_1 = \frac{\partial f}{\partial u} = \ldots$

6. $z=z(x,y)$ 由 $z=f(xyz, z-y)$ 确定. f 一阶偏导连续. 且 $xyf_1'+f_2'\neq 1$. 则 $dz=$ $\underline{\frac{yzf_1'}{1-xyf_1'-f_2'}dx+\frac{xzf_1'-f_2'}{1-xyf_1'-f_2'}dy}$

解: 利用微分法. 方程两边微分

$$dz=d\,f(xyz, z-y)=f_1'\,d(xyz)+f_2'\,d(z-y)$$

即 $dz=yzf_1'dx+xzf_1'dy+xyf_1'dz+f_2'dz-f_2'dy$

即 $(1-xyf_1'-f_2')dz=yzf_1'dx+(xzf_1'-f_2')dy$.

三. 1. 判断 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}+(-1)^{n-1}}$ 敛散性.

解: ①法

$$u_n=\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}+(-1)^{n-1}}=\underbrace{\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}}_{\text{记为}v_n}\cdot\frac{1}{1+\boxed{\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}}}$$

利用 $\frac{1}{1+x}=1-x+o(x^2)$

$$=v_n\cdot\left[1-\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right]=v_n-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

得 $v_n-u_n=\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$ 即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{v_n-u_n}{\frac{1}{n}}=1$.

即 $\sum_{n=1}^{\infty}(v_n-u_n)$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 同发散. 而 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛 (莱布尼茨判别法)

故由性质2. 收敛+发散 $\Rightarrow$ 发散. 得 $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}u_n\text{发散.}}$

②法:

$$u_n=\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}+(-1)^{n-1}}\cdot\frac{\sqrt{n}-(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}-(-1)^{n-1}}=\frac{(-1)^{n-1}}{n-1}(\sqrt{n}-(-1)^{n-1})$$

$$=(-1)^{n-1}\frac{\sqrt{n}}{n-1}-\frac{1}{n-1}$$

$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sqrt{n}}{n-1}$ 收敛, $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}$ 发散. 得原级数发散

2. 求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}(x-1)^{2n-1}$ 的收敛域. 及和函数. 并求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\cdot 2^n}$

解：$\rho(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\frac{1}{2n+1}(x-1)^{2n+1}}{\frac{1}{2n-1}(x-1)^{2n-1}}\right|=(x-1)^2$.

由 $\rho(x)<1$ 可得 $0<x<2$.

当 $x=0$ 或 $x=2$ 时，发散，故 $\boxed{收敛域为\ (0,2)}$

设 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}(x-1)^{2n-1}$ 两边求导.

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(x-1)^{2n-2}=\frac{1}{1-(x-1)^2}=\frac{1}{(2-x)x}\quad 两边积分$$

$$\int_1^x S'(t)\,dt=\int_1^x\frac{1}{(2-t)t}\,dt.$$

即 $S(x)-S(1)=\frac{1}{2}\int_1^x\left(\frac{1}{2-t}+\frac{1}{t}\right)dt=\frac{1}{2}(\ln|x|-\ln|2-x|)$

故 $S(x)=S(1)+\frac{1}{2}\ln\frac{x}{2-x}=\boxed{\frac{1}{2}\ln\frac{x}{2-x}\quad x\in(0,2)}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\cdot 2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2n-1}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}S\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}\ln\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\frac{(2+\sqrt{2})^2}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{2}}{4}\ln(\sqrt{2}+1)^2$$

$$=\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}\ln(1+\sqrt{2})}$$

3. 已知 $(ax\cos 2y-y^2\sin 3x-1)dx+(by\cos 3x+x^2\sin 2y+2y)dy$ 为某函数的全微分，求 a,b 及 $f(x,y)$ 的表达式

解. $df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=ax\cos 2y-y^2\sin 3x-1,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=by\cos 3x+x^2\sin 2y+2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=ax\cdot(-\sin 2y\cdot 2)-2y\sin 3x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=by\cdot(-\sin 3x\cdot 3)+2x\sin 2y$$

由 $\frac{\partial^2 f}{\ }$ $\frac{\partial^2 f}{\ }$ 可得 $-2a=2$ $\boxed{a=-1}$

由 $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$，可得 $\begin{cases}-2a=2\\-2=-3b\end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases}a=-1\\b=\frac{2}{3}\end{cases}}$

对 $\frac{\partial f}{\partial x}=-x\cos 2y-y^2\sin 3x-1$，两边关于 x 积分，可得

$$f(x,y)=\int(-x\cos 2y-y^2\sin 3x-1)\,dx$$

即 $f(x,y)=-\frac{x^2}{2}\cos 2y+\frac{1}{3}y^2\cos 3x-x+\varphi(y)$ 积分常数

上式两边关于 y 求偏导.

$$\frac{\partial f}{\partial y}=x^2\sin 2y+\frac{2}{3}y\cos 3x-0+\varphi'(y)$$

由已知 $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{2}{3}y\cos 3x+x^2\sin 2y+2y$. 故 $\varphi'(y)=2y$

得 $\varphi(y)=y^2+C$.

综上 $\boxed{f(x,y)=-\frac{x^2}{2}\cos 2y+\frac{y^2}{3}\cos 3x-x+y^2+C}$