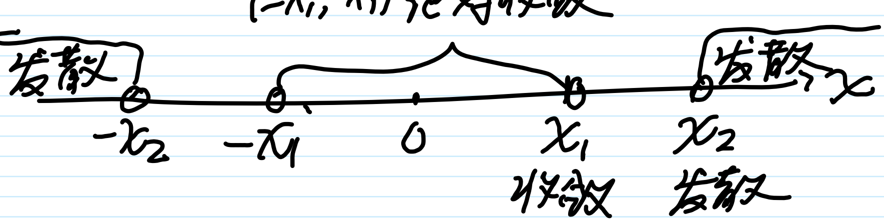
1. 幂级数收敛域.

① $\rho(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|$

由 $\rho(x)<1$ 得 $x\in(-R,R)$. $x=\pm R$的敛散性

② $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ 得 $R=\frac{1}{\rho}$. …

2. Abel定理



$x_1\le R\le x_2$.

条件收敛点 $\Longrightarrow$ 分界点.

例: $\underbrace{\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^{2n}}$. 与. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^{2n+1}$ 有相同的收敛域

$\Downarrow$

设$x_1\in$收敛域. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x_1^{2n}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x_1^{2n+1}=x_1\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x_1^{2n}$.

收敛, 推导!. 收敛

$\rho_1(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{2n+2}}{a_n x^{2n}}\right|$ $\rho_2(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{2n+3}}{a_n x^{2n+1}}\right|$

例. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\underbrace{(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})}_{a_n}(x-1)^n$ 的收敛域 $(0,2)$.

解: 令 $t=x-1$. $\rho_t=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\boxed{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}+\frac{1}{n+1}}{\boxed{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}}$

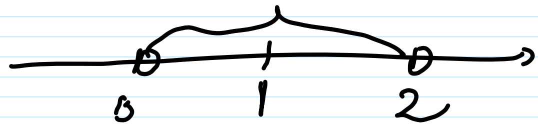
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\boxed{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}+\frac{1}{n+1}}{\boxed{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\underbrace{\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}}\right)=1.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=+\infty.$$

$$R=R_t=\frac{1}{\rho_t}=1$$

$(0,2)$ 绝对收敛



当 $x=0$ 或 2 时

$$\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)(\pm1)^n}_{u_n}.\quad \text{发散}$$

$$\lim_{n\to\infty}|u_n|\neq 0.\implies \text{发散}.$$

三. 幂级数运算及和函数.

1. 运算 (四则运算). $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \quad \sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n.$

① 加(减). $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \pm \sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)x^n.$

(收敛域公共部分).

② 乘. $\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n.$

$c_0=a_0b_0,\quad c_1=a_0b_1+a_1b_0.$

$\cdots\ c_n=a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_0.$

(收敛区间的公共部分).

③ 除. $$\frac{\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n}{\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n}=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n.$$

$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$

$\frac{1+2x+x^2}{1+x} = 1+x.$ $\quad \frac{1}{1+x} = \cdots$

$a_0 = b_0 \cdot c_0.\quad a_1 = b_0 c_1 + b_1 c_0. \cdots\cdots$

例. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 + \cdots + 0\cdot x^n + \cdots$ 收敛域 $(-\infty,+\infty)$

$[a_0=1, a_n=0\ (n=1,\cdots,\cdots)]$

$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = 1 - x + 0\cdot x^2 + \cdots + 0\cdot x^n + \cdots$ 收敛域 $(-\infty,+\infty)$

$[b_0=1, b_1=-1, b_n=0\ (n\geq 2)]$

$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \underbrace{1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots}_{\text{收敛域 } (-1,1)} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$

$1 = 1\cdot c_0 \Rightarrow c_0 = 1.$ $\quad 0 = 1\cdot c_1 + (-1)\cdot c_0 \Rightarrow c_1 = 1. \cdots$

$\frac{1}{1-x} \xrightarrow{\text{展开}} \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $\quad \sum_{n=0}^{\infty} x^n \xrightarrow{\text{求和}} \frac{1}{1-x}$ $\quad x \in (-1,1)$

$\boxed{2.\ \text{求和函数}}$ $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$ $\boxed{x \in \text{收敛域}.}$

性质:

(1). $S(x)$ 在收敛域上连续 (单侧连续).

$\lim_{x\to x_0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \lim_{x\to x_0} S(x) = S(x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x\to x_0} a_n x^n.$

极限与求和可交换.

$\int_0^1 (x+x^2)dx = \int_0^1 x\,dx + \int_0^1 x^2 dx.$

② $S(x)$ 在收敛域上可积. 可逐项积分

"先积后导" $\int_0^x s(t)dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n dt$.

$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$

积分与求和可交换

$\| a_n = n+1$、(例).

等比级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} = \frac{x}{1-x}$.

$\int_0^x s(t)dt = \frac{x}{1-x}$

$s(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)'$, $x\in$收敛域.

③. $S(x)$ 在收敛区间上可导. 可逐项求导

$(x+x^2)' = x' + (x^2)'$

"先导后积" $s'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)'$

$= \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n x^{n-1}$

求导与求和可交换

$\| a_n = \frac{1}{n}$ (例)

等比级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$, $x\in(-1,1)$

$s'(x) = \frac{1}{1-x}$ 两边积分、

$\int_0^x s'(t)\,dt = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt$.

$s(x) - s(0) = -\ln|1-x| = -\ln(1-x)$.

$s(x) = s(0) - \ln(1-x) = a_0 - \ln(1-x)$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = S(1) = \ln 2$

例. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = \ln(1+x)$, $x\in(-1,1]$.

解 ... 收敛域 $(-1, 1]$

解：$\rho=1$，$R=\frac{1}{\rho}=1$. 收敛域 $(-1,1]$

"先导"（a_n中分母含n）

设 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$.

在收敛区间$(-1,1)$上两边求导. $1-x+x^2\cdots$

$$S'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{n-1}$$

$$=\frac{1}{1-(-x)}$$

即 $S'(x)=\frac{1}{1+x}$

"后积" $\int_{\boxed{0}}^{x}S'(t)dt=\int_{\boxed{0}}^{x}\frac{1}{1+t}dt$.

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$

$S(x)-S(0)=\ln(1+x)$.

$S(x)-S(\frac{1}{2})=\ln(1+x)-\ln\frac{3}{2}$.

$S(0)=0$

故 $S(x)=\ln(1+x)$，$x\in(-1,1)$.

由性质④，$S(1)=\lim_{x\to1^-}S(x)=\lim_{x\to1^-}\ln(1+x)=\ln2$.

综上. $S(x)=\ln(1+x)$，$x\in(-1,1]$.

$\int s'(x)dx=\int\frac{1}{1+x}dx$. $\Rightarrow S(x)=\ln(1+x)+C$

代入$x=0$. $S(0)=\ln(1+0)+C\Rightarrow C=0$

$\Rightarrow S(x)=\ln(1+x)$.

$\left\{\frac{\ln(1+x)}{x}\right.$，$x\in(-1,0)\cup(0,1]$

例

例. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^n=$ $\left\{\begin{array}{ll}\frac{\ln(1+x)}{x}, & x\in[-1,0)\cup(0,1] \\ 1, & x=0.\end{array}\right.$

解: $s'(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{n+1}x^{n-1}$

不是幂级数

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)\quad(x\neq0)$$

$$S(x)=\frac{1}{x}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}=\frac{1}{x}S_1(x)$$

$\triangle$

对 $S_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}$ 在$(-1,1)$上可逐项求导.

"求导".
$$S_1'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot x^n=\frac{1}{1+x}$$

"再积"
$$S_1(x)=\ln(1+x)+S_1(0)=\ln(1+x)$$

得 $S(x)=\frac{1}{x}S_1(x)=\frac{\ln(1+x)}{x}$, $x\in[-1,0)\cup(0,1)$

由连续性.
$$\boxed{S(0)}=\lim_{x\to0}S(x)=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

$$S(1)=\lim_{x\to1^-}\frac{\ln(1+x)}{x}=\ln2.$$

综上:
$$S(x)=\left\{\begin{array}{ll}\frac{\ln(1+x)}{x}, & x\in[-1,0)\cup(0,1]. \\ 1, & x=0\end{array}\right.$$

例. $\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n=$ ________ , $x\in(-1,1)$.

解: 四法.

解：①法．

"先积"　（a_n中分子含n）．

$$\int_0^x S(t)\,dt=\int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)t^n\,dt.$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n+1}$$

$$S(x)=x\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)nx^{n-1}}=x\,S_1(x)$$

$$S_2(x)=\int_0^x S_1(t)\,dt=\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)nt^{n-1}\cdot dt$$

$$S_2(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n.$$

$$\underline{\int_0^x S_2(t)\,dt}=\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)t^n\,dt.$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+1}=\underline{\frac{x^2}{1-x}}$$

"后导"．

$$S_2(x)=\left(\frac{x^2}{1-x}\right)'$$

$$S_1(x)=\left(\frac{x^2}{1-x}\right)''$$

综上　$S(x)=x\left(\frac{x^2}{1-x}\right)''=x\left(\frac{x^2-1}{1-x}+\frac{1}{1-x}\right)''=\cdots$

②法：（写法）．

$$S(x)=x\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\boxed{nx^{n-1}}$$
$$=x\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(x^n)'$$
$$=x\left(\sum_{n=1}^{\infty}\boxed{(n+1)x^n}\right)'$$
$$=x\left(\sum_{n=1}^{\infty}(x^{n+1})'\right)'$$
$$\cdots=x\left(\frac{x^2}{\ldots}\right)''$$

$$= x\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1}\right)'' = x\left(\frac{x^2}{1-x}\right)''$$

如何求 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$. （先求收敛域）.

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

a_n分母含n. $a_n=\frac{1}{n}$ → 先导. → 等比级数的和函数 → 后积 → $S(x)$.

a_n分子含n → 先积. $a_n=n+1$. → 等比级数的和函数 → 后导 → $S(x)$.

等比级数的和函数 $=\dfrac{\text{首项}}{1-\text{公比}}$.

例. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)} = \underline{\frac{\pi}{2}-\ln 2}$

解：近法：

① $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)} x^n = S(x)$. 收敛域$[-1,1]$

"先导后积"

$S=S(1)=\lim_{x\to 1^-} S(x)$

$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\cdot x^{n-1}}{2n-1}$

② $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)} x^{2n-1} = S(x)$. 收敛域$[-1,1]$

$S'(x)=\frac{1}{x^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot x^{2n} = \frac{1}{x^2}S_1(x)$

$S_1'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} 2(-1)^{n-1}x^{2n-1} = 2\cdot\frac{x}{1-(-x^2)}\cdots$

设 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot(2n-1)} x^{2n}$. $S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$

在$(-1,1)$上求导两次.

$S''(x)=\sum (-1)^{n-1}\cdot 2\cdot x^{2n-2} = 2\cdot\frac{1}{1+x^2}$.

$$S''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot 2\cdot x^{2n-2}=2\cdot\frac{1}{1+x^2}.$$

一次积分 $\int_0^x S''(t)\,dt=\int_0^x\frac{2}{1+t^2}dt.$

$$S'(x)-S'(0)=2\arctan x.$$

$$S'(x)=2\arctan x.$$

再一次积分

$$\int_0^x S'(t)\,dt=2\int_0^x \arctan t\cdot dt.$$

$$S(x)=S(x)-S(0)$$

$$=2\left(\arctan t\cdot t\Big|_0^x-\underbrace{\int_0^x\frac{t}{1+t^2}dt}\right).$$

$$=2x\arctan x-\int_0^x\frac{1}{1+t^2}d(1+t^2).$$

$$S(x)=2x\arctan x-\ln(1+x^2).\quad x\in(-1,1).$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot(2n-1)}=S(1)=\lim_{x\to 1^-}S(x).$$

$$=2\arctan 1-\ln 2.=\frac{\pi}{2}-\ln 2$$

②法: $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$ (裂项)

$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ (分子有理化)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^n\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{2n-1}\right)\right]$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\underbrace{(-1)^n\cdot\frac{1}{n}}_{\text{收敛}}-2\cdot\underbrace{\frac{(-1)^n}{2n-1}}_{\text{收敛}}\right]$$

$= \sum_{n=1} (-1)^n \frac{1}{n}$ 收敛 $\quad \frac{}{2n-1}$ 收敛

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n} - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}.$$

$$= -\ln 2 - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}$$

设 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}x^{2n-1}$

例 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot(2n-1)} =$ __________、

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2n-1)}x^{2n}.$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ 均发散

例 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n =$ e^x , $x\in(-\infty,+\infty)$.

解: $\rho = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0.$

$R = +\infty$,

a_n分母含n. "先导后积"

$$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}$$

即 $S'(x) = S(x).$ $\quad S(x) = Ce^x$

$S(0) = 1 \quad \Rightarrow C = 1$

$\Rightarrow S(x) = e^x.$

展开.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = e^x \qquad x \in (-\infty, +\infty)$$

求和

$x \neq 1$.

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^n = 1 + x + x^2 + \cdots, \quad x \in (-1, 1).$$

展开.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = \boxed{1 + \frac{1}{1!} x + \frac{1}{2!} x^2 + \cdots + \frac{1}{n!} x^n} + \cdots$$

泰勒多项式. 泰勒系数 $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

$$(e^x)^{(n)}\Big|_{x=0} = e^x\Big|_{x=0} = 1.$$