大学物理

振动与波动

01:35:17

第一章 机械振动

§1 什么是简谐振动?

§2 简谐振动的特征量

§3 旋转矢量法

§4 简谐振动的能量

§5 简谐振动的合成

01:35:17

§1 什么是简谐振动？

(机械)振动：物体在一定位置附近的往复运动

广义：任何一个物理量在某一数值附近反复变化

例如：交流电压U、电流I的变化，电磁振荡中的E、H

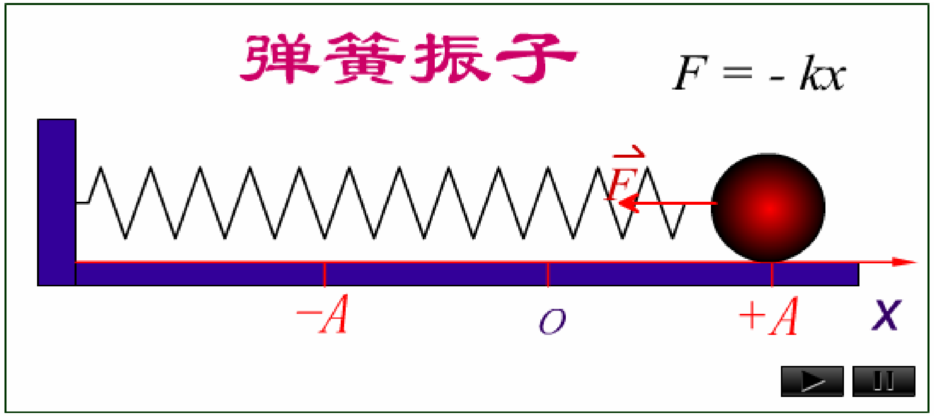
振动
- 受迫振动 ←被外力驱动　共振现象
- 自由振动
  - 阻尼自由振动 ←受到阻力
  - 无阻尼自由振动

无阻尼自由振动
- 无阻尼自由非谐振动
- 无阻尼自由谐振动→简谐振动

01:35:17

1. 简谐振动的几个实例

◆ 弹簧振子



物体所受的弹力

$\vec{F} = -kx\hat{i}$ 注意有负号

以受力为零处(平衡位置)为原点

牛顿第二定律

$$F = ma = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

联立可得 $m\dfrac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$

令 $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ ω称为(固有)角频率，只与弹簧振子的性质有关

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

通解 $x(t) = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t$ (C_1、C_2待定)

或 $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ (A、φ待定) 此即运动方程

01:35:17

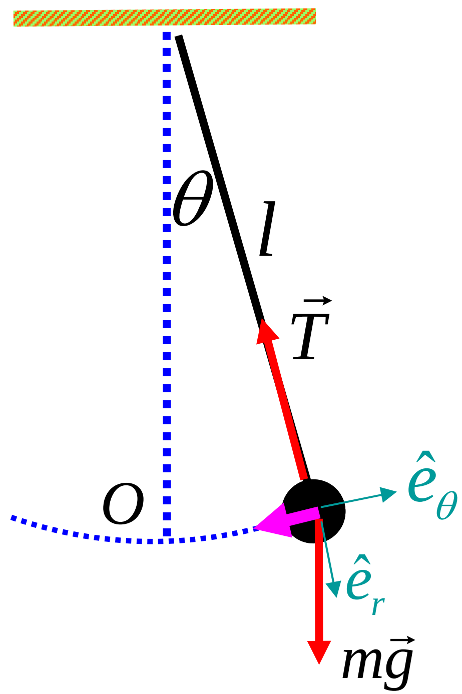
◆单摆

$$\vec{F}_\theta = -mg\sin\theta\hat{e}_\theta \approx -mg\theta\hat{e}_\theta$$

取逆时针为θ张角正向

沿切向的分量方程为

$$-mg\sin\theta = m\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t} = m\frac{d(ld\theta/dt)}{dt} \quad (\vec{\upsilon} = \upsilon\hat{e}_\theta)$$



摆角为小角度时 $\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \ldots \approx \theta$

$$-mg\theta = ml\frac{d^2\theta}{dt^2} \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

令 $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ 系统固有

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0 \qquad \theta = \theta_{\max}\cos(\omega t + \varphi)$$

ω是角速度吗？

01:35:17

选择题： #S4101.

三个完全相同的单摆，第一个在地球上，第二个在月球上，第三个在加速上升的电梯中，则它们的周期

(1) 因为周期是固有的，所以三个单摆周期相同；

(2) $T_{地球}>T_{月球}>T_{电梯}$；

(3) $T_{月球}>T_{地球}>T_{电梯}$；

(4) $T_{电梯}>T_{月球}>T_{地球}$；

(5) $T_{月球}>T_{地球}=T_{电梯}$。

01:35:17

选择题：#S4102.

一个人坐在秋千上，随秋千以其固有频率前后自由摆动，若换成两个人坐在秋千上自由摆动，则秋千的固有频率

(1) 变大

(2) 变小

(3) 不变

若这个人不是坐着，而是站着呢？

01:35:17

选择题： #S4103.

在一个单摆装置中，摆动物体是一只装着沙子的漏斗。当摆开始摆动时，让沙从漏斗连续不断地漏出，则在摆动过程中，单摆的周期

(1) 变大

(2) 变小

(3) 不变

01:35:17

选择题： #S4104.

将汽车车厢和下面的弹簧视为一个沿竖直方向的弹簧振子，当有乘客时，其固有频率将：

(1) 变大

(2) 变小

(3) 不变

01:35:17

2. 简谐振动的特点

•运动学方程 $Q(t)=Q_{\max}\cos(\omega t+\varphi)$

振动量**Q**可以是任何一种物理量

•动力学方程 $\dfrac{d^2Q}{dt^2}+\omega^2 Q=0$

•线性恢复力

弹簧振子 $\vec{F}=-kx\hat{i}$ 单摆 $\vec{F}_\theta\approx -mg\theta\hat{e}_\theta$

•振动能量

$$E_p=\frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\varphi),\quad E_k=\frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t+\varphi)$$

✓由其中一个可以推出其他几个

✓只要满足其中一个即为简谐振动

01:35:17

例：竖直弹簧振子的振动是否为简谐振动?

平衡位置处受力为0　$kx_0 = mg$

以此处为坐标原点建立向下坐标系

将物体向下拉一段距离后再放开

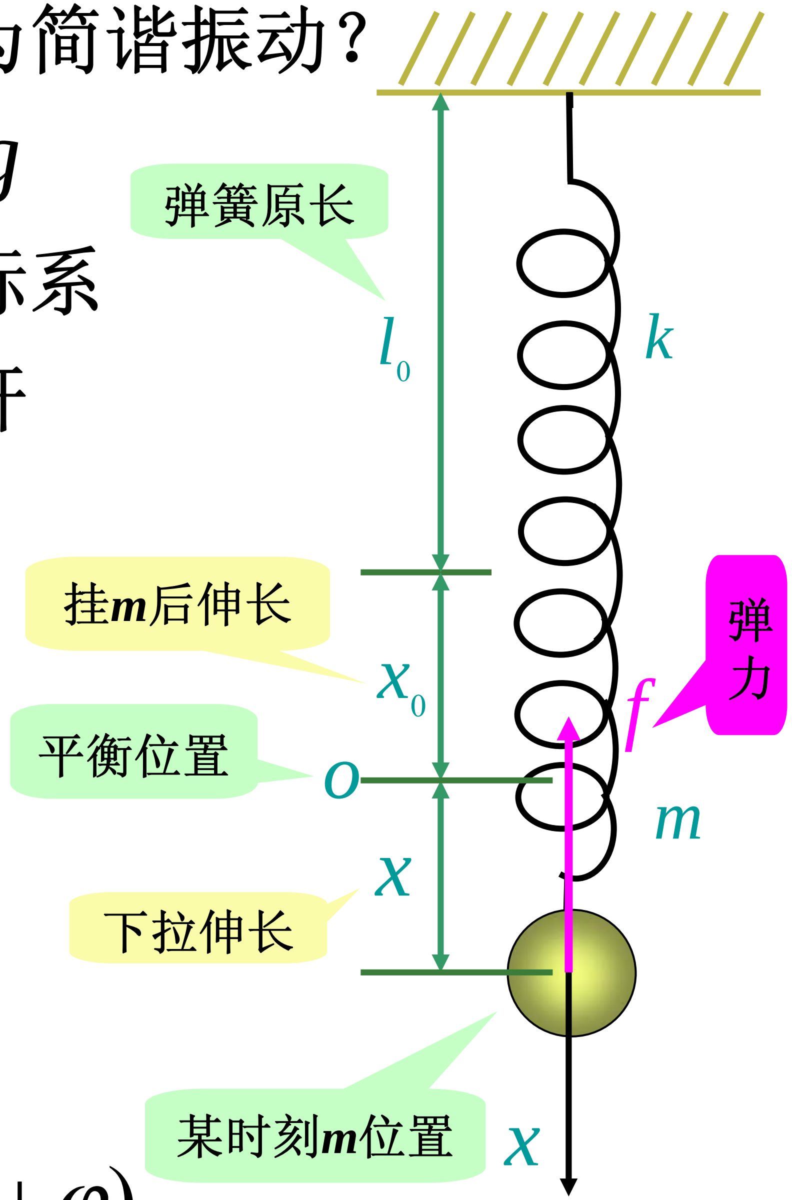
平衡位置下方拉伸**x**处，合外力

$$F = mg - k(x_0 + x) = -kx$$

结合牛顿第二定律同样有

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

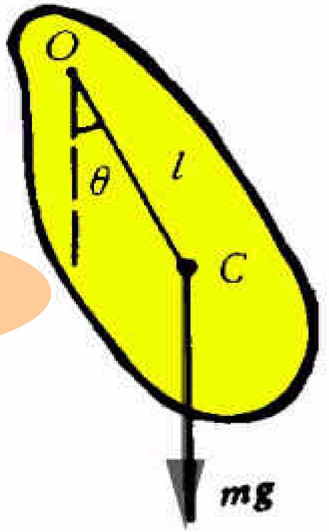
$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 x = 0 \qquad x = A\cos(\omega t + \varphi)$$



01:35:17

➢复摆——物理摆

质量为**m**的刚体绕固定水平轴**O**摆动，设刚体重心**C**到轴**O**的距离为***l***，刚体对轴**O**的转动惯量为**J**，



则刚体受到的重力矩为 $\vec{M}=\vec{l}\times\vec{g}m$

其大小为 $M=-mgl\sin\theta\approx-mgl\theta$

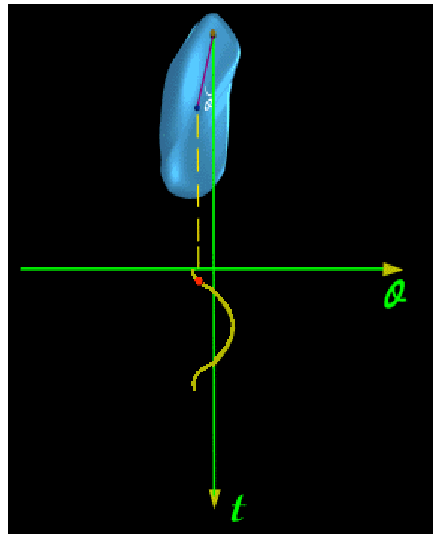
小角度近似

由转动定律 $-mgl\theta=M=J\beta=J\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$

令 $\omega=\sqrt{\dfrac{mgl}{J}}\Rightarrow\dfrac{d^2\theta}{dt^2}+\omega^2\theta=0$

固有角频率

简谐振动



$T=2\pi\sqrt{\dfrac{J}{mgl}}$

➢测重力加速度

➢测形状复杂物体的转动惯量

01:35:17

3. 简谐振动的解析描述及振动曲线

简谐振动的运动方程

$$x(t) = A\cos\left(\omega t + \varphi\right)$$

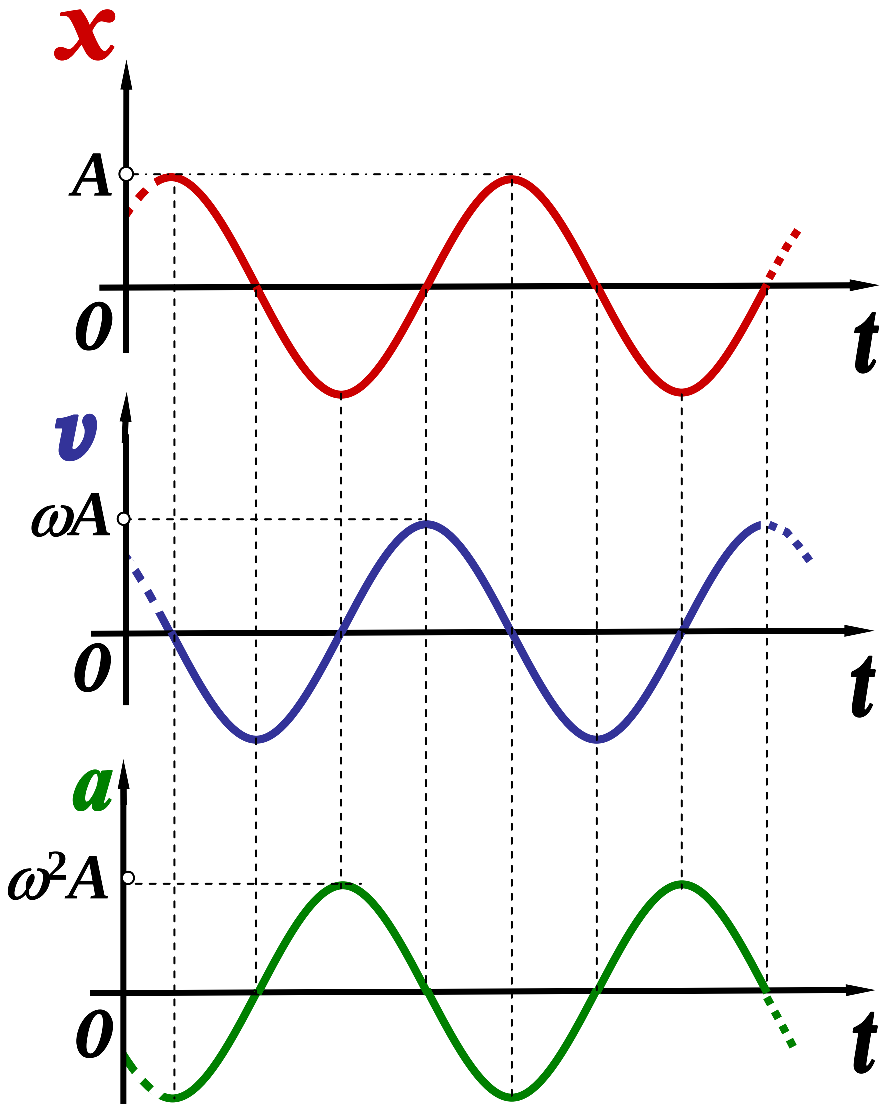
简谐振动的速度

$$\upsilon(t) = \frac{dx}{dt} = -\omega A\sin\left(\omega t + \varphi\right)$$

简谐振动的加速度

$$a(t) = \frac{d\upsilon}{dt} = -\omega^2 A\cos\left(\omega t + \varphi\right)$$

$$= -\omega^2 x$$



01:35:17

选择题： #S4105.

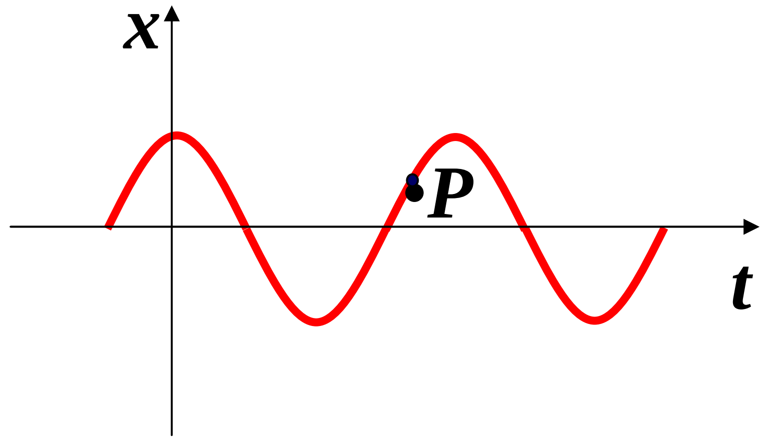
一个物体系在一弹簧上来回地振动，其振动曲线如图所示，在P点处，这个物体具有:

(1) 正的速度，正的加速度；

(2) 正的速度，负的加速度；

(3) 负的速度，正的加速度；

(4) 负的速度，负的加速度。



01:35:17

判断题： #T4101.

当加速度为正时，振动质点的速度在增加；
当加速度为负时，振动质点的速度在减小。

判断题： #T4102.

一物体作简谐振动，振动的频率越高，则物体的振动速度越大。

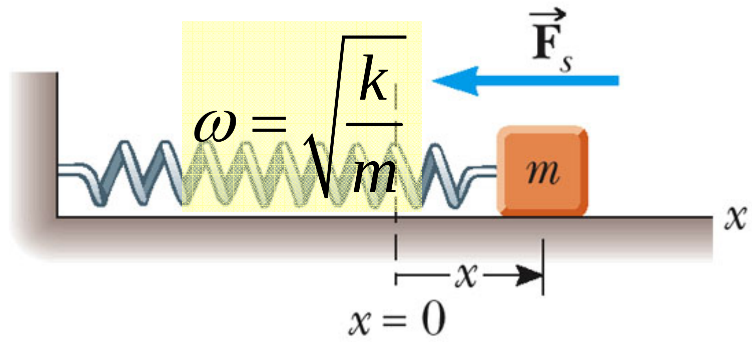
§2 简谐振动的特征量

$$x(t)=A\cos(\omega t+\varphi)\qquad \upsilon(t)=-A\omega\sin(\omega t+\varphi)$$

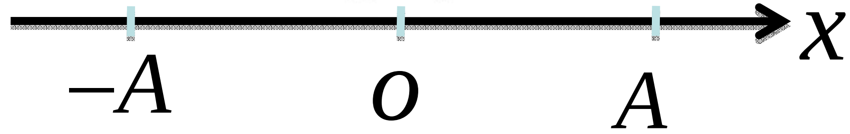
1. 振幅*A*

物体离开平衡位置的最大位移，由初始条件确定

若t=0时$\begin{cases}x_0=A\cos\varphi\\ \upsilon_0=-A\omega\sin\varphi\end{cases}$



$$A=\sqrt{x_0^2+(\frac{\upsilon_0}{\omega})^2}$$ 只取正值



2. 角频率ω

系统固有性质，与初始条件无关

$$\omega(t+T)+\varphi=(\omega t+\varphi)+2\pi\qquad \omega T=2\pi\qquad 周期\ T=2\pi/\omega$$

ω反映了振动的时间周期性　频率 $\nu=1/T$　　$\omega=2\pi\nu$

01:35:17

3. 相位、初相位

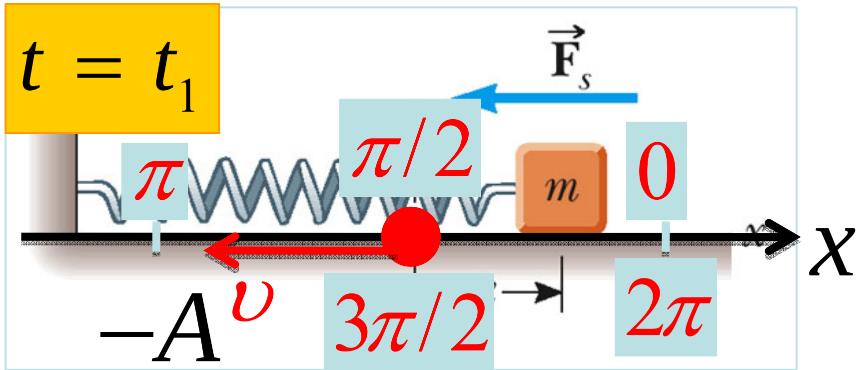
$$x(t)=A\cos(\omega t+\varphi)$$
$$\upsilon(t)=-A\omega\sin(\omega t+\varphi)$$

(1)相位 $\omega t+\varphi$

相位描写t时刻振动状态

若t_1时刻有 $\omega t_1+\varphi=\dfrac{\pi}{2}$

$x=0,\quad \upsilon=-A\omega$



(2)初相位 φ 即t=0时的相位

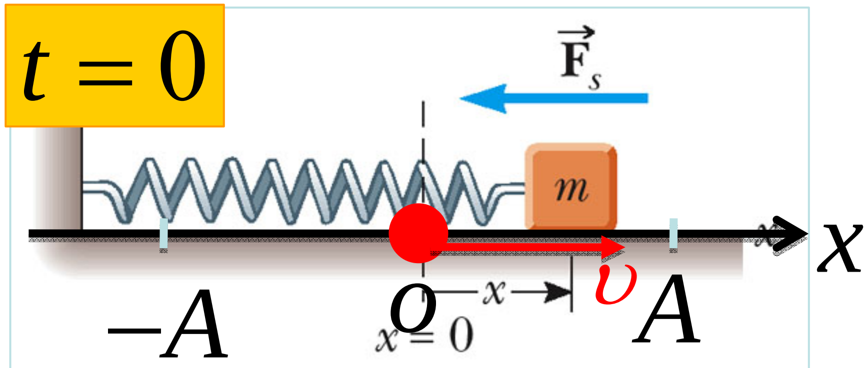
初相位描写计时时刻振动状态

t=0, 不一定是开始运动时刻

$$x_0=A\cos\varphi$$
$$\upsilon_0=-A\omega\sin\varphi$$

若t=0时 $\begin{cases} x_0=0 \Rightarrow \cos\varphi=0 \\ \upsilon_0=A\omega \Rightarrow \sin\varphi=-1 \end{cases}$

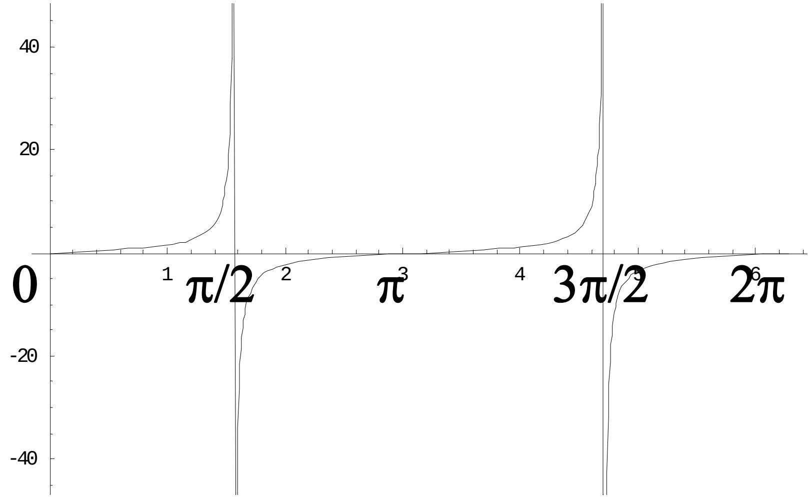
$\therefore$初相位 $\varphi=\dfrac{3\pi}{2}$

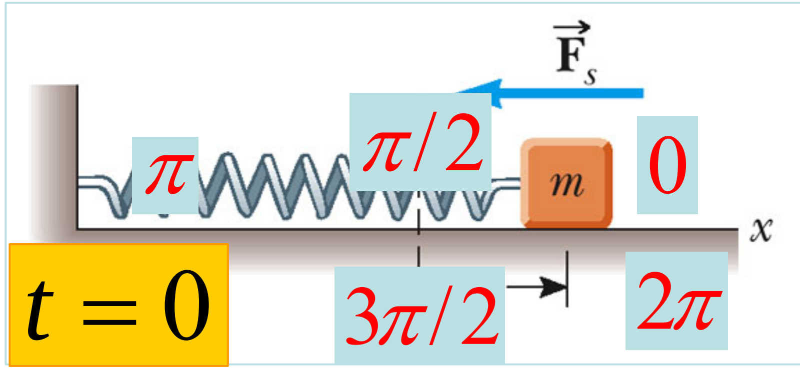


01:35:17

$$\tan\varphi = -\frac{\upsilon_0}{x_0\omega} \qquad \varphi = \arctan\left(-\frac{\upsilon_0}{x_0\omega}\right)$$

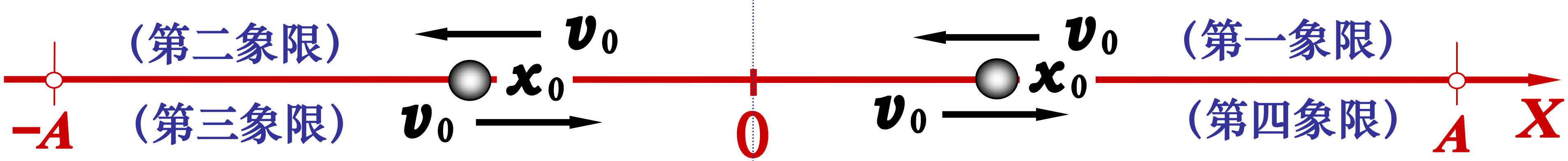
$$x_0 = A\cos\varphi$$
$$\upsilon_0 = -A\omega\sin\varphi$$





若 $x_0 \le 0$ 且 $\upsilon_0 < 0$ 则 $\frac{\pi}{2} \le \varphi < \pi$

若 $x_0 > 0$ 且 $\upsilon_0 \le 0$ 则 $0 \le \varphi < \frac{\pi}{2}$



若 $x_0 < 0$ 且 $\upsilon_0 \ge 0$ 则 $\pi \le \varphi < \frac{3}{2}\pi$

若 $x_0 \ge 0$ 且 $\upsilon_0 > 0$ 则 $\frac{3}{2}\pi \le \varphi < 2\pi$

01:35:17

例： 已知某谐振动，当 t=0 时，x_0=7.5cm， υ_0=75cm/s，ω=10 rad/s，写出该振动的振动表达式。

解： 需由已知条件确定特征量A, φ

∵ t=0时 $x_0 = A\cos\varphi$, $\upsilon_0 = -\omega A\sin\varphi$

$$A = \sqrt{{x_0}^2 + \left(\frac{\upsilon_0}{\omega}\right)^2} = \sqrt{7.5^2 + 7.5^2} = 15\sqrt{2}/2\,\text{cm}$$

$$\varphi = arctg(-\frac{\upsilon_0}{x_0\omega}) = arctg(-1) = -\frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4}$$

$$\because x_0 > 0,\quad \upsilon_0 > 0 \qquad \frac{3\pi}{2} < \varphi < 2\pi \qquad \therefore \varphi = -\frac{\pi}{4}$$

$$\therefore x(t) = 15\sqrt{2}/2\cos(10t - \frac{\pi}{4})\text{cm}$$

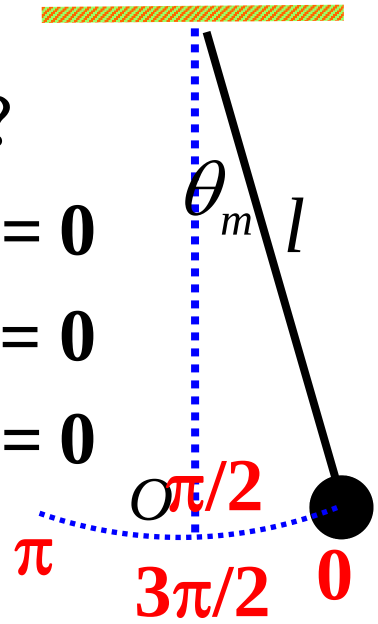
01:35:17

判断题： #T4103.

把单摆从平衡位置拉开，使摆线与竖直方向成θ角，然后放手任其摆动，则单摆振动的初相为θ

01:35:17

例：把一单摆从其平衡位置拉开，使悬线与竖直方向成一小角度θ_m，然后放手任其摆动。问：



(1)如果从放手时开始计时，其初相位$\varphi = 0$ θ_m？

此后当第1次到O点时，其相位= $\pi/2$，初相$\varphi = 0$

到达左侧最大摆角时， 其相位= π ，初相$\varphi = 0$

然后当第2次到O点时，其相位=$3\pi/2$,初相$\varphi = 0$

(2)若第1次过O点时开始计时，初相$\varphi=\pi/2$

此后当到达左侧最大摆角时，其相位=π，初相$\varphi=\pi/2$

然后当第2次到O点时，其相位=$3\pi/2$, 初相$\varphi = \pi/2$

当回到右侧放手位置时，其相位= 0或2π , 初相$\varphi=\pi/2$

(3)单摆的角速度=$\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t$？ 单摆的角频率=$\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t$？

角速度=相位$\omega t+\varphi$对t的导数? 角频率=$\omega t+\varphi$对t的导数?

01:35:17

选择题： #S4106.

一竖直悬挂的弹簧振子原来处于静止状态，用力将振子向下拉**0.02m**后释放，使之作简谐振动，并测得其振动周期为**0.2s**，以竖直向下为**O*x***轴的正方向，释放时为计时零点，则其运动函数为：

(1) $x=0.02\cos(10\pi t+\pi)$ **m**

(2) $x=0.02\cos(0.4\pi t+\pi)$ **m**

(3) $x=0.02\cos(0.4\pi t)$ **m**

(4) $x=0.02\cos(10\pi t)$ **m**

01:35:17

§3 旋转矢量法

将振幅***A***看作一矢量，以角速度ω绕**o**点逆时针旋转

则任意时刻矢量端点在***x***轴的投影***p***

振动量

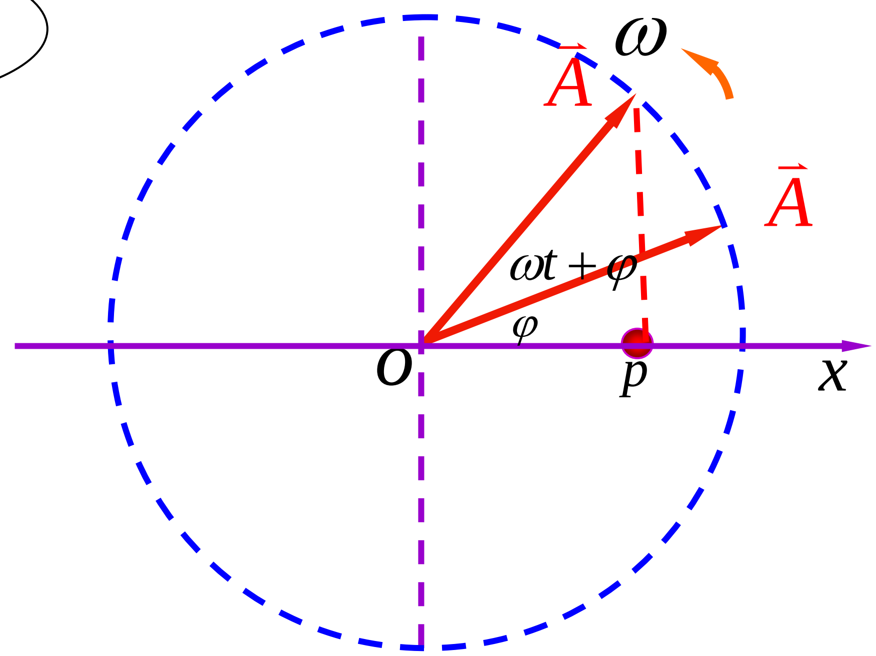
初相位

角频率

$$x = A\cos(\underbrace{\omega t + \varphi})$$

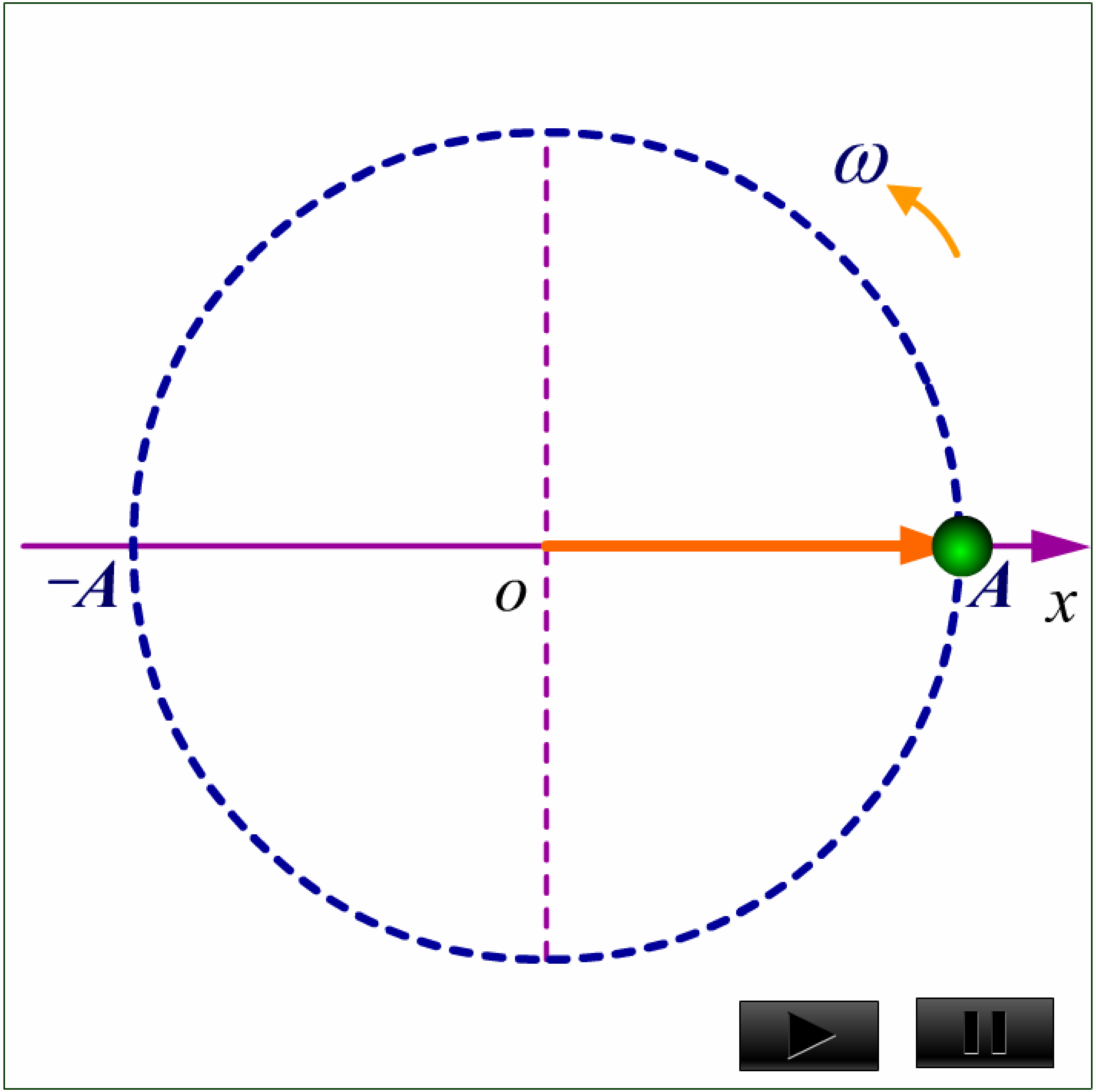
振幅

相位



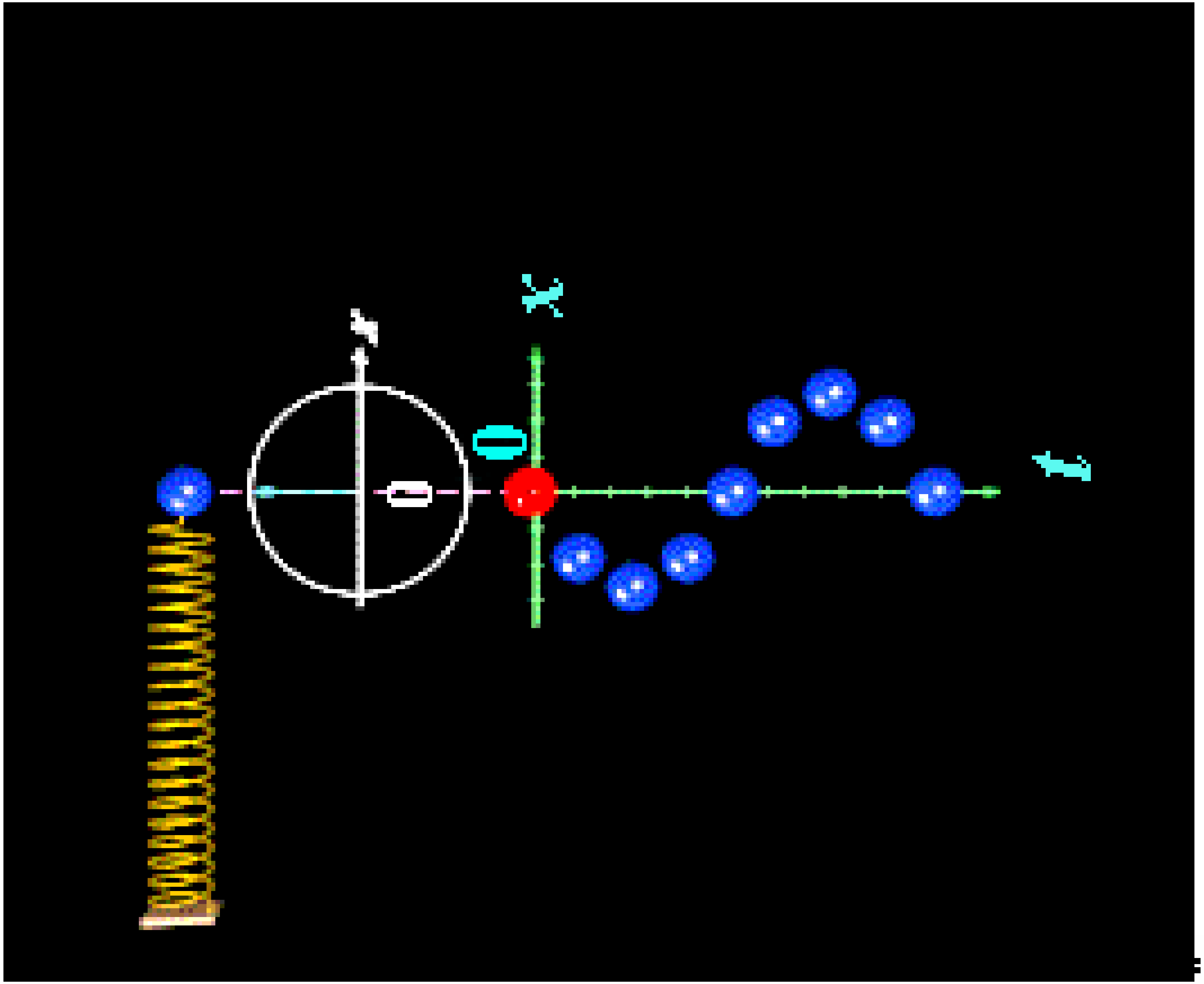
***p*点的运动代表简谐振动**

01:35:17



01:35:17

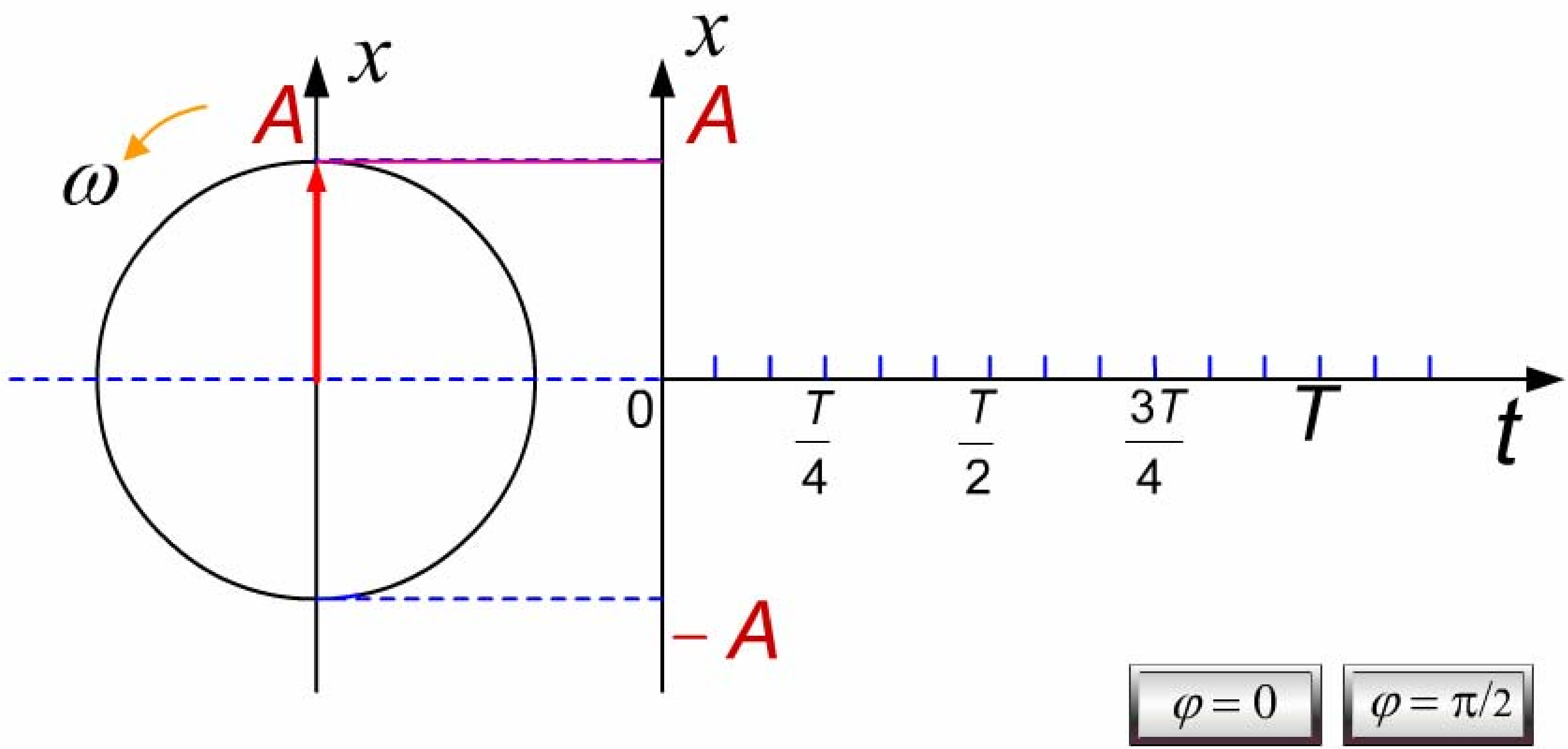
弹簧振子的旋转矢量图示法



:35:17

例：用旋转矢量法画简谐振动的振动曲线

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$



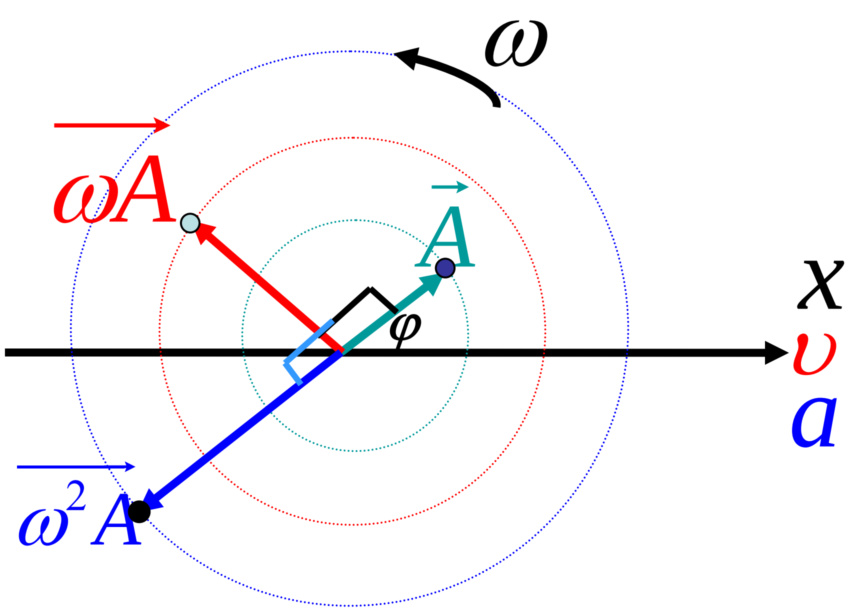
01:35:17

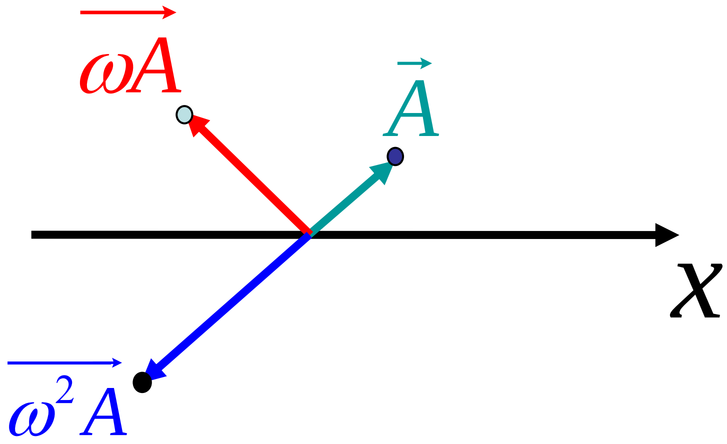
例：用旋转矢量分别表示出弹簧振子的***x*, *v*, *a***

$$x = A\cos(\omega t+\varphi)$$

$$\upsilon = -\omega A\sin(\omega t+\varphi) = \omega A\cos(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2})$$

$$a = -\omega^2 A\cos(\omega t+\varphi) = \omega^2 A\cos(\omega t+\varphi+\pi)$$





01:35:17

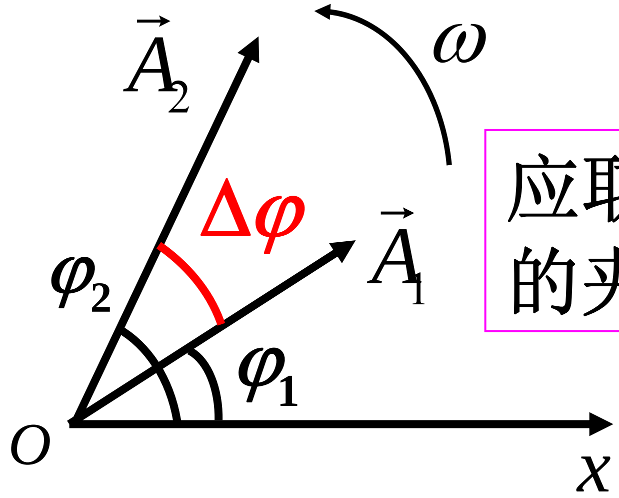
➢相位差

$$x_1 = A_1\cos(\omega t+\varphi_1)$$

$$x_2 = A_2\cos(\omega t+\varphi_2)$$

$$\Delta\varphi = (\omega t+\varphi_2)-(\omega t+\varphi_1)$$

$=\varphi_2-\varphi_1$　两个同频率的简谐振动相位差等于初相差



应取<π的夹角

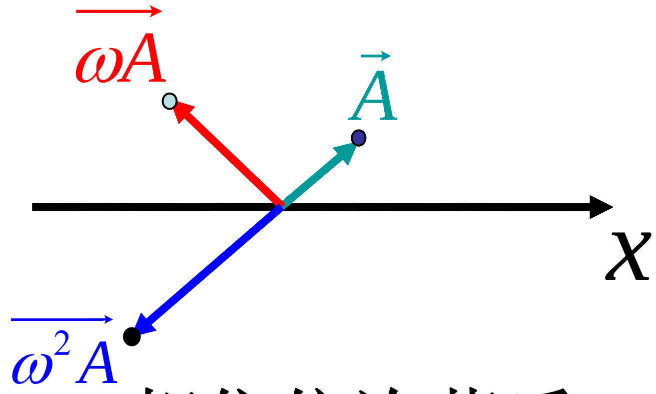
➢领先和落后

若Δφ >0，则称 x_2比x_1领先；若Δφ <0，则称 x_2比x_1落后

$$x = A\cos(\omega t+\varphi)$$

$$v = \omega A\cos(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2})$$

$$a = \omega^2 A\cos(\omega t+\varphi+\pi)$$

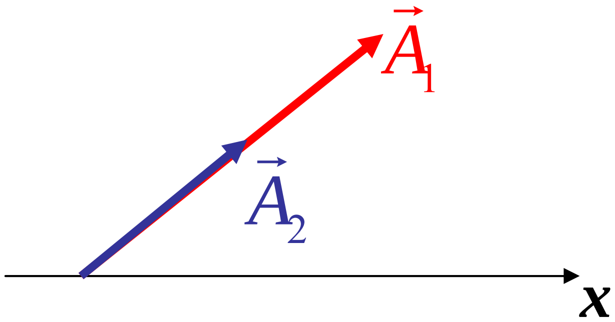


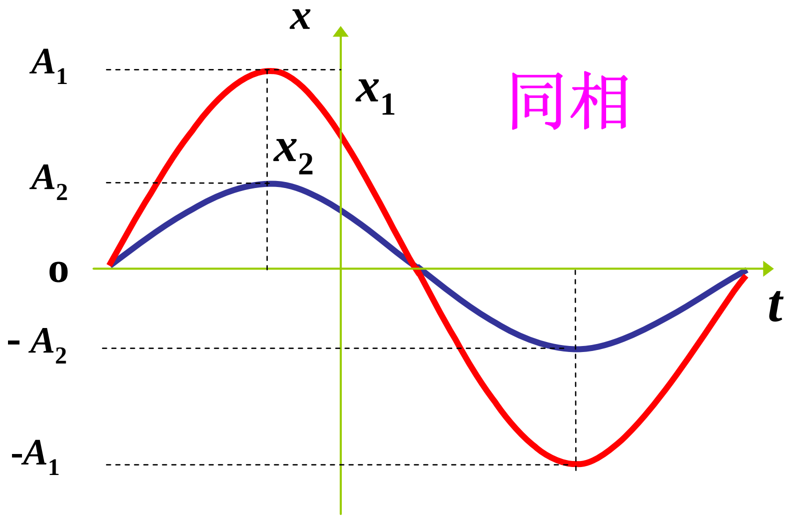
x, v, a相位依次落后$\pi/2$

01:35:17

➢同相与反相

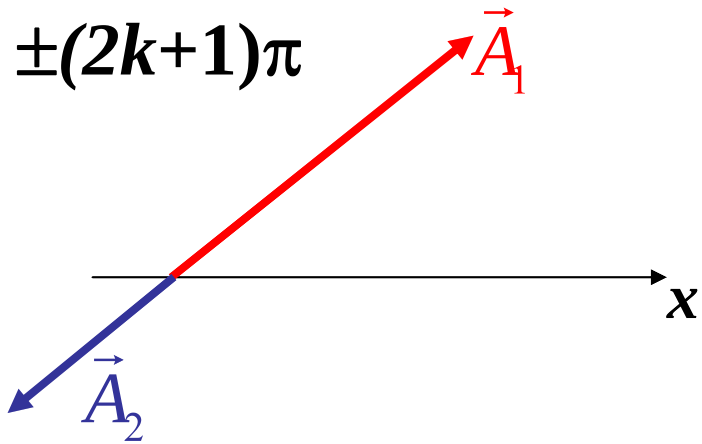
$\Delta\varphi = \pm 2k\pi$

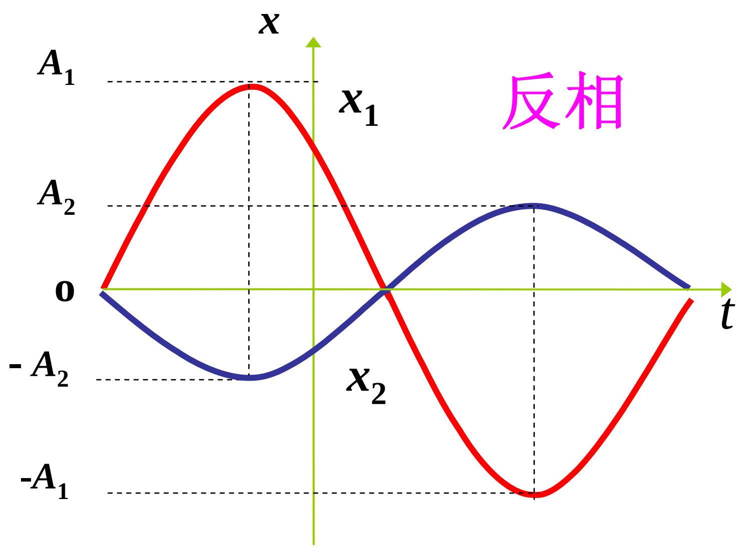




两振动步调相同

$\Delta\varphi = \pm(2k+1)\pi$





两振动步调相反

01:35:17

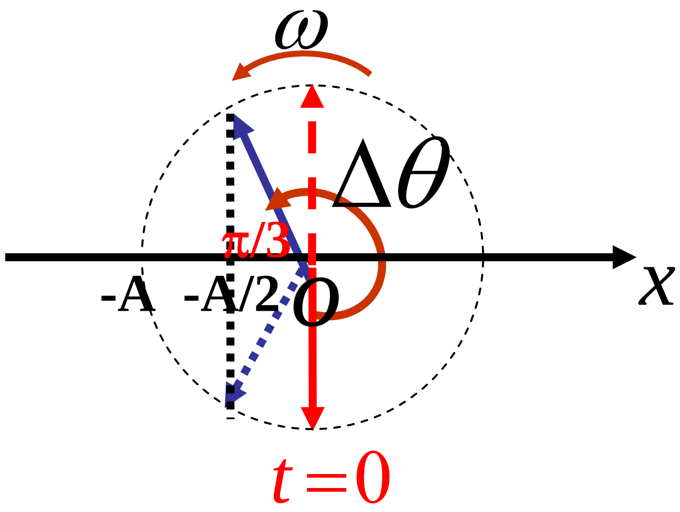
选择题： #S4107.

两个同频率、同振幅的弹簧振子1和2沿Ox轴作简谐振动，当振子1自平衡位置向负方向运动时，振子2在$x=-A/2$ (A为振幅)处也向负方向运动，则两者的(初)相位差($\varphi_2-\varphi_1$)为

(1) $\pi/2$　　(2) $2\pi/3$　　(3) $\pi/6$　　(4) $5\pi/6$

01:35:17

例：已知弹簧振子的角频率为ω，t = 0时，质点过平衡位置向右运动。求：物体运动到负的二分之一振幅处时所用的最短时间。



解：画出旋转矢量图

最短时间→选实线所示的位矢

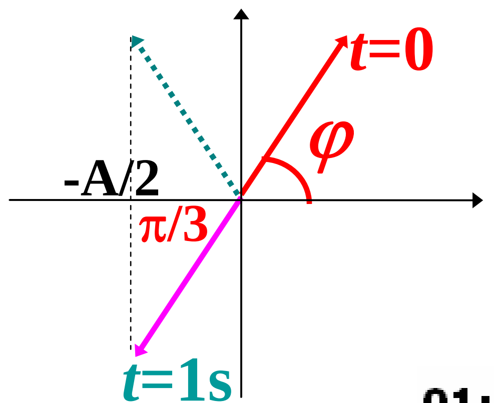
匀速圆周运动转过△θ所花的时间

$$\Delta\theta = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3} = \frac{7\pi}{6} \qquad t = \frac{\Delta\theta}{\omega} = \frac{7\pi}{6\omega}$$

例：已知某简谐振动A=4cm，频率ν=0.5Hz，t=1s时，x = -2cm，且向x正方向运动，写出振动表达式。

解：画出t=1s时的矢量图 ω=2πν=π

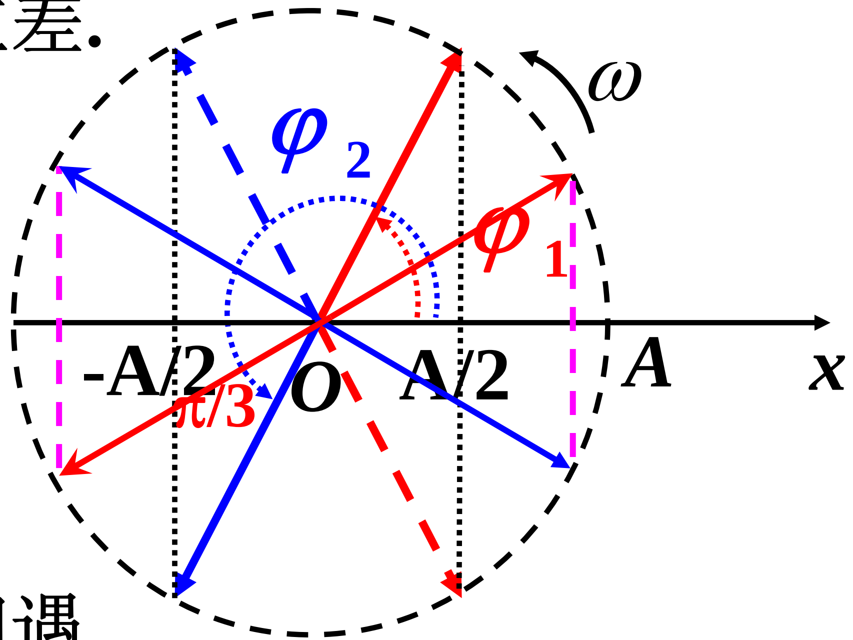
从开始计时到t=1s，转过角度ωt=π



$$\therefore t=0,\ \varphi = \frac{\pi}{3} \qquad x(t) = 4\cos(\pi t + \frac{\pi}{3})\mathrm{cm}$$

01:35:17

例：两质点均沿x轴作同频率、同振幅的简谐振动，t=0时，质点1在x=A/2处向左运动，另一质点2在x=−A/2处向右运动，求：两质点的相位差.



解：$\varphi_1 = \dfrac{\pi}{3} \quad \varphi_2 = \pi + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{4\pi}{3}$

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \pi$$

•若角频率为ω，求：两质点两次相遇的时间间隔？

解：本题两质点在平衡位置相遇

两矢量端点的连线与x轴垂直时，二者相遇

当此连线再次与x轴垂直时，必然转过角度π

$$\therefore \Delta t = \frac{\pi}{\omega}$$

•开始计时后质点1何时再回到A/2处？

解：即转过角度2π–2π/3=4π/3所需的时间

$$\Delta t = \frac{4\pi}{3\omega}$$

01:35:17

§4 简谐振动的能量

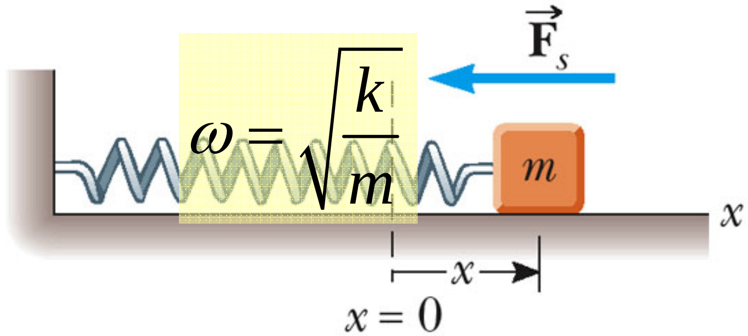
$$E_p=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\varphi)$$

$$x=A\cos(\omega t+\varphi)$$

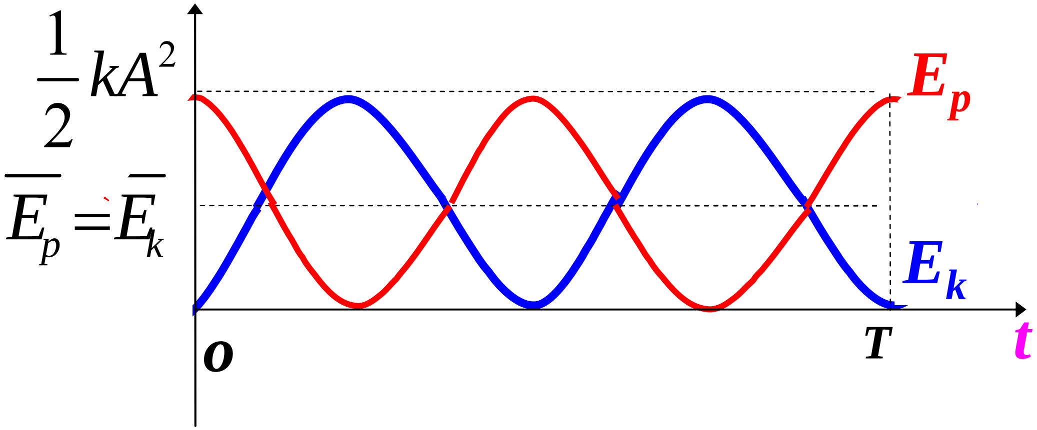
$$E_k=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2(\omega t+\varphi)$$

$$v=-\omega A\sin(\omega t+\varphi)$$

$$E_{总}=E_p+E_k=\frac{1}{2}kA^2 \qquad k=m\omega^2$$



- 与振幅平方成正比
- 机械能守恒，动能和势能的相互转化



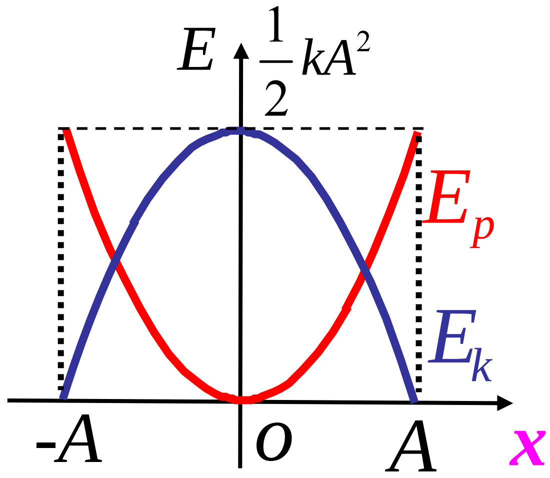
$$\overline{E_p}=\frac{1}{T}\int_0^T E_p dt=\frac{1}{4}kA^2$$

$$\overline{E_k}=\frac{1}{T}\int_0^T E_k dt=\frac{1}{4}mA^2\omega^2$$

01:35:17

$$E=E_p+E_k=\frac{1}{2}kA^2 \qquad E_p=\frac{1}{2}kx^2$$

$$E_k(x)=\frac{1}{2}k(A^2-x^2)$$



- 平衡位置动能最大，势能最小；
- 正负最大位移处，动能为0，势能最大

•能量守恒 $\xrightarrow{\text{推导}}$ 简谐运动方程

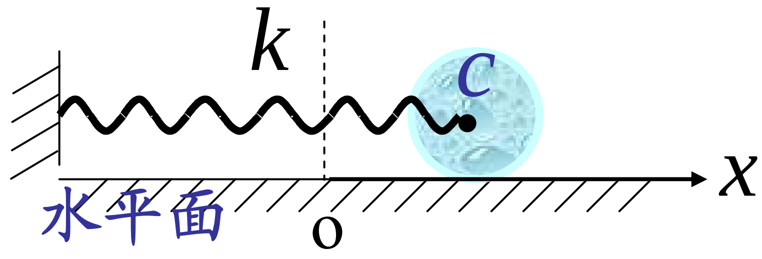
$$E=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2=\text{常量} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2\right)=0$$

$$m\cancel{v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+kx\cancel{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=0 \qquad \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\frac{k}{m}x=0$$

01:35:17

例： 劲度系数为k的轻弹簧，挂在质量为m、半径为R的匀质圆柱体的对称轴上，使之作无滑动的滚动，

求证：圆柱体的质心作谐振动。



解：系统机械能守恒

以弹簧原长处为原点建立坐标

当质心C处于某一位置x_c时，系统的势能为 $E_p = \frac{1}{2}kx_c^2$

设此时质心速度为υ_c，动能为 $E_k = \frac{1}{2}m\upsilon_c^2 + \frac{1}{2}J_c\omega^2$

圆柱体对C轴的转动惯量 $J_c = \frac{1}{2}mR^2$

ω是刚体转动的角速度 $\upsilon_c = R\omega$

$$\therefore E_k = \frac{3}{4}m\left(\frac{dx_c}{dt}\right)^2$$

(E_p+E_k)对t求导得 $\frac{3m}{2}\frac{d^2x_c}{dt^2} + kx_c = 0$

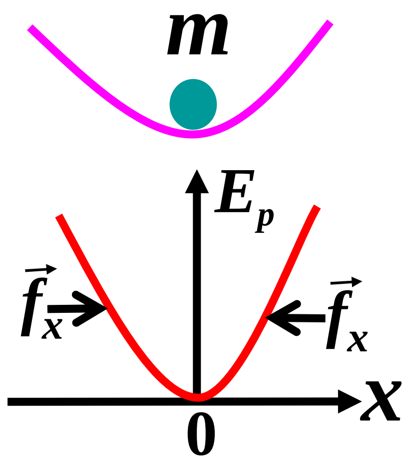
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{3m}}$$

01:35:17

证明：势能最低点附近的微小振动是简谐振动

证：以势能最低点为原点建立坐标，

设势能函数为$E_p(x)$，在$x=0$附近将势能展开



$$E_p(x)=\cancel{E_p(0)}+\cancel{\left(\frac{dE_p}{dx}\right)_0}x+\frac{1}{2}\left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_0 x^2+\cdots$$

选取势能最低点为势能零点$E_p(0)=0$

最低点→极小值 $\left(\frac{dE_p}{dx}\right)_0=0,\quad \left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_0>0$ 　令$k=\left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_0$

$$E_p(x)=\frac{1}{2}kx^2 \qquad f_x=-\frac{dE_p}{dx}=-kx$$

原子核内质子和中子的振动、原子和分子的振动、固体晶格格点的振动等都是简谐振动。

01:35:17

判断题： #T4104.

两个相同的弹簧挂着不同质量的物体，当它们以相同的振幅做简谐振动时，质量大的物体的振动能量更大。

01:35:17

选择题： #S4108.

一个物体开始静止地悬挂在一弹簧上，当把物体向下拉的时候，弹簧的弹性势能和物体与地球的重力势能之和：

(1) 增大；

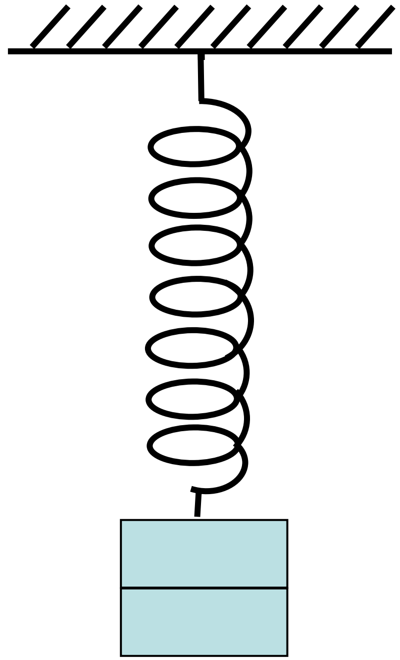
(2) 不变；

(3) 变小。

01:35:17

选择题： #S4109.

如图，两个质量均为**m**的物体与一个轻弹簧组成一弹簧振子，当其振动到下端最大位移处时，下面的一个物体与系统脱离，则新系统的频率和振幅将



(1) 频率变大，振幅变小；
(2) 频率变大，振幅不变；
(3) 频率变大，振幅变大；
(4) 频率变小，振幅变小；
(5) 频率变小，振幅不变；
(6) 频率变小，振幅变大。

01:35:17

§5 简谐振动的合成

5.1 同一直线上两个同频率的简谐振动的合成

某质点同时参与两个同频率、且均在x轴上的谐振动

$$x_1 = A_1\cos(\omega t+\varphi_1) \qquad x_2 = A_2\cos(\omega t+\varphi_2)$$

1. 解析法

同一直线上振动→振动量直接相加，即合振动的振动量

$$\boldsymbol{x = x_1 + x_2} = A_1\cos(\omega t+\varphi_1)+A_2\cos(\omega t+\varphi_2)$$

$$=\left(A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2\right)\cos\omega t-\left(A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2\right)\sin\omega t$$

令 $A\cos\varphi = A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2$， $A\sin\varphi = A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2$

$$\therefore\ x = A\cos\varphi\cos\omega t - A\sin\varphi\sin\omega t = A\cos(\omega t+\varphi)$$

合振动是简谐振动，角频率仍为ω

$$\boldsymbol{A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}} \qquad \boldsymbol{tg\varphi=\frac{A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2}}$$

01:35:17

2. 旋转矢量法

$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$

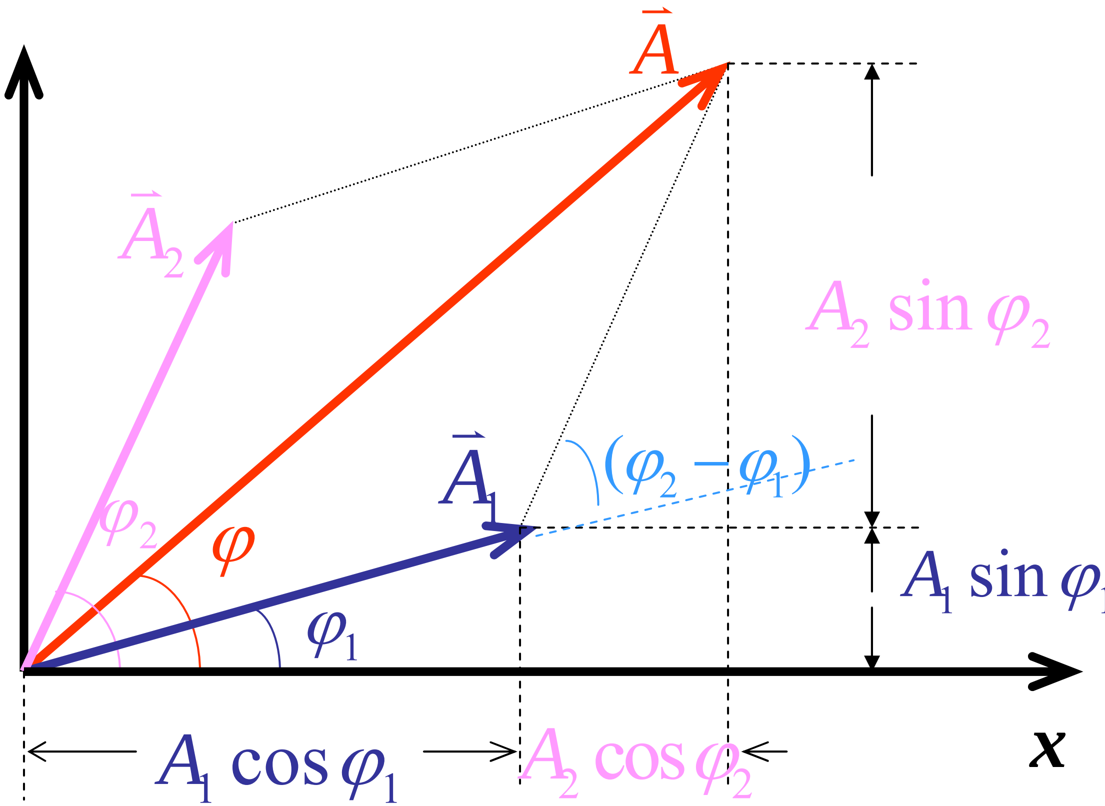
$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$

$\vec{A}$是$\vec{A}_1$和$\vec{A}_2$的合矢量

$x = A\cos(\omega t + \varphi)$

<u>平行四边形不变形</u>

→三者 ω 相同



由图可知：

$$A\cos\varphi = A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2$$

$$A\sin\varphi = A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

$$tg\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$$

A与初相差有关

合矢量 $\vec{A}$就是合振动的振幅矢量

01:35:17

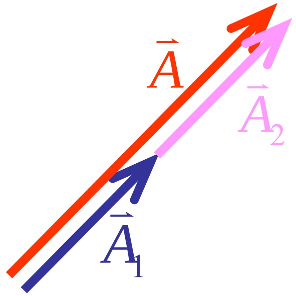
3. 讨论→干涉

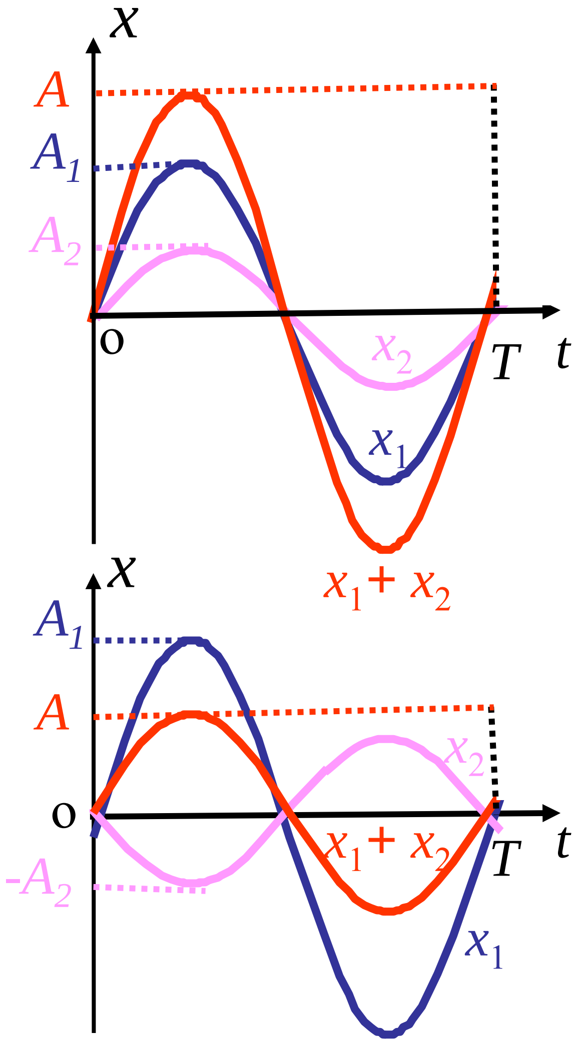
① 两分振动**同相**

$$\varphi_2-\varphi_1=\pm 2k\pi \quad k=0,1,2,\cdots$$

$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2$ 合振幅最大

$\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{A}_2\rightarrow \boldsymbol{A}=2\boldsymbol{A}_1$ 亮条纹，干涉相长



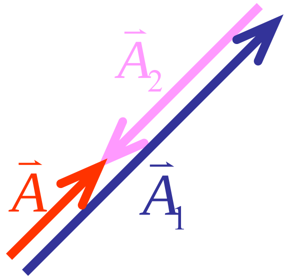


② 两分振动**反相**

$$\varphi_2-\varphi_1=\pm(2k+1)\pi \quad k=0,1,2,\cdots$$

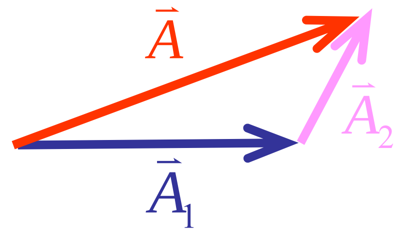
$\boldsymbol{A}=\left|\boldsymbol{A}_1-\boldsymbol{A}_2\right|$ 合振幅最小

$\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{A}_2\rightarrow \boldsymbol{A}=0$ 暗条纹，干涉相消



③ 一般情况 $\varphi_2-\varphi_1\neq k\pi$

$|A_1-A_2|<A<|A_1+A_2|$ 亮纹中心和暗纹之间



01:35:17

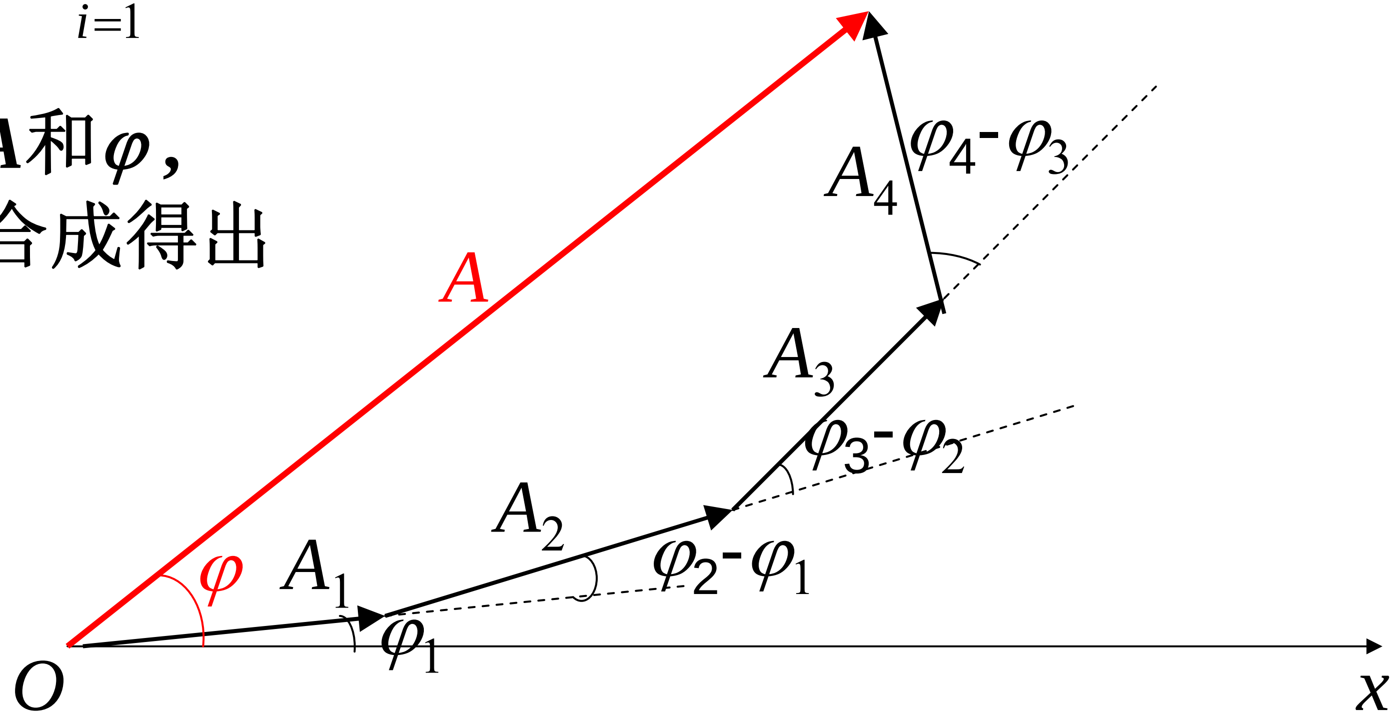
5.2 同一直线上多个同频率的简谐振动的合成

某质点同时参与同一直线上的多个同频率的简谐振动：

$$x_i = A_i \cos(\omega t + \varphi_i), \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

合振动 $x = \sum_{i=1}^{n} x_i = A\cos(\omega t + \varphi)$ 仍是简谐运动

合振动的$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{\varphi}$，
可由矢量合成得出



01:35:17

•若各分振动振幅都为**a**，初相依次相差 δ

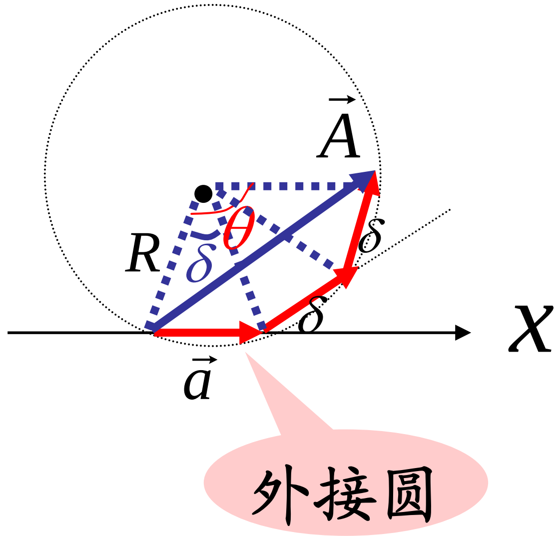
$$x_1 = a\cos\omega t$$

$$x_2 = a\cos(\omega t + \delta)$$

$$x_3 = a\cos(\omega t + 2\delta)$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$x_N = a\cos[\omega t + (N-1)\delta]$$



合振动还是简谐振动

$$x = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots x_N = A\cos(\omega t + \varphi)$$

用旋转矢量法→构成正多边形的一部分

$$\varphi = \frac{1}{2}(\pi - \delta) - \frac{1}{2}(\pi - \theta) = \frac{N-1}{2}\delta$$

$$x = a\frac{\sin(N\delta/2)}{\sin(\delta/2)}\cos(\omega t + \frac{N-1}{2}\delta)$$

$$R = \frac{\frac{a}{2}}{\sin\frac{\delta}{2}}$$

$$\theta = N\delta$$

$$A = 2R\sin\frac{\theta}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$A = a\frac{\sin\frac{N\delta}{2}}{\sin\frac{\delta}{2}}$$

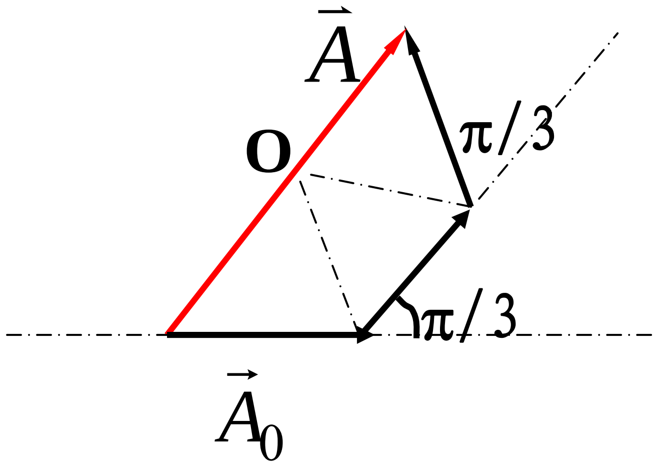
01:35:17

例：三个同频率、同振幅、同方向的简谐振动，相位差依次相差π/3，

$$x_1 = A_0\cos\omega t,\quad x_2 = A_0\cos(\omega t+\frac{\pi}{3}),\quad x_3 = A_0\cos(\omega t+\frac{2\pi}{3})$$

求：合振动的表达式

解：画旋转矢量图 $N=3$



$\delta = \dfrac{\pi}{3}$　三个等边三角形

由图可得 **A=2A₀**　$\varphi=\delta=\dfrac{\pi}{3}$

或由公式

$$A = A_0\sin\frac{N\delta}{2}\Big/\sin\frac{\delta}{2} = 2A_0 \qquad \varphi = \frac{N-1}{2}\delta = \delta$$

∴合振动的表达式为 $x = 2A_0\cos(\omega t+\pi/3)$

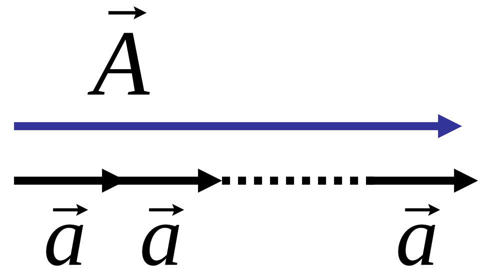
01:35:17

• 讨论→多光束干涉

① 各分振动同相

$\delta = 2k\pi \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$

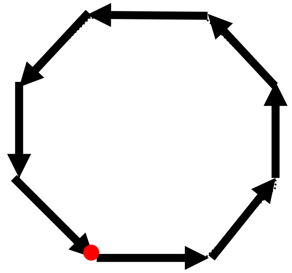
$A = Na$ ——主极大



② 各分矢量闭合

$A = 0$ ——极小

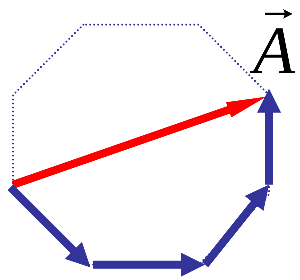
$N\delta = 2k\pi \quad k \neq 0, \neq N$ 的整数倍



③ 合矢量为外接圆的直径

$A = 2R$ ——次极大

$N\delta = (2k+1)\pi \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$



01:35:17

判断题： #T4105.

一质点的位移可用两个谐振动的叠加来表示

$$x = A\cos(\omega t) + B\cos(2\omega t)$$

问此质点的运动是否为简谐振动?

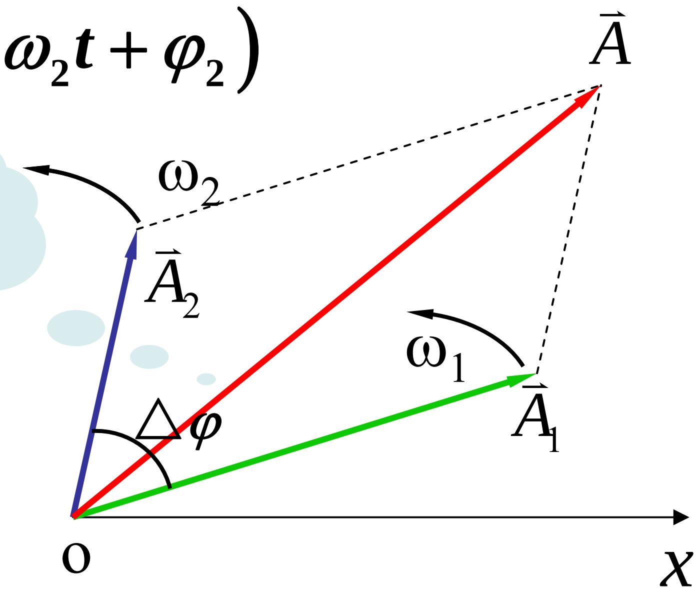
5.3 同一直线上两个不同频率的简谐振动的合成

若质点同时参与两个同方向、不同频率的简谐振动

$$x_1 = A_1\cos(\omega_1 t+\varphi_1),\quad x_2 = A_2\cos(\omega_2 t+\varphi_2)$$

$$\Delta\varphi = (\omega_2-\omega_1)t+(\varphi_2-\varphi_1)$$

不是简谐振动

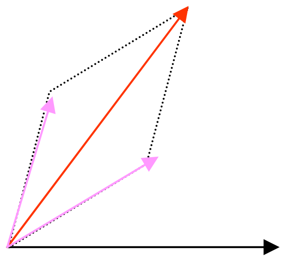


➢拍的现象

若 $A_1 = A_2 = A_0,\quad \varphi_1=\varphi_2=0$

$$\Rightarrow x_1 = A_0\cos\omega_1 t,\quad x_2 = A_0\cos\omega_2 t$$

合振动 $x = x_1 + x_2 = 2A_0\cos(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t)\cos(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t)$



$$=\left[2A_0\cos(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t)\right]\cos(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t) = A(t)\cos\bar{\omega}t$$

若 $\omega_1+\omega_2 >> |\omega_1-\omega_2|$ ⇨ 振幅随时间缓慢变化

01:35:17

$$A(t)=2A_0\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)$$
$$=2A_0\cos[\pi(\nu_1-\nu_2)t]$$
$$=2A_0\cos[\omega t]$$

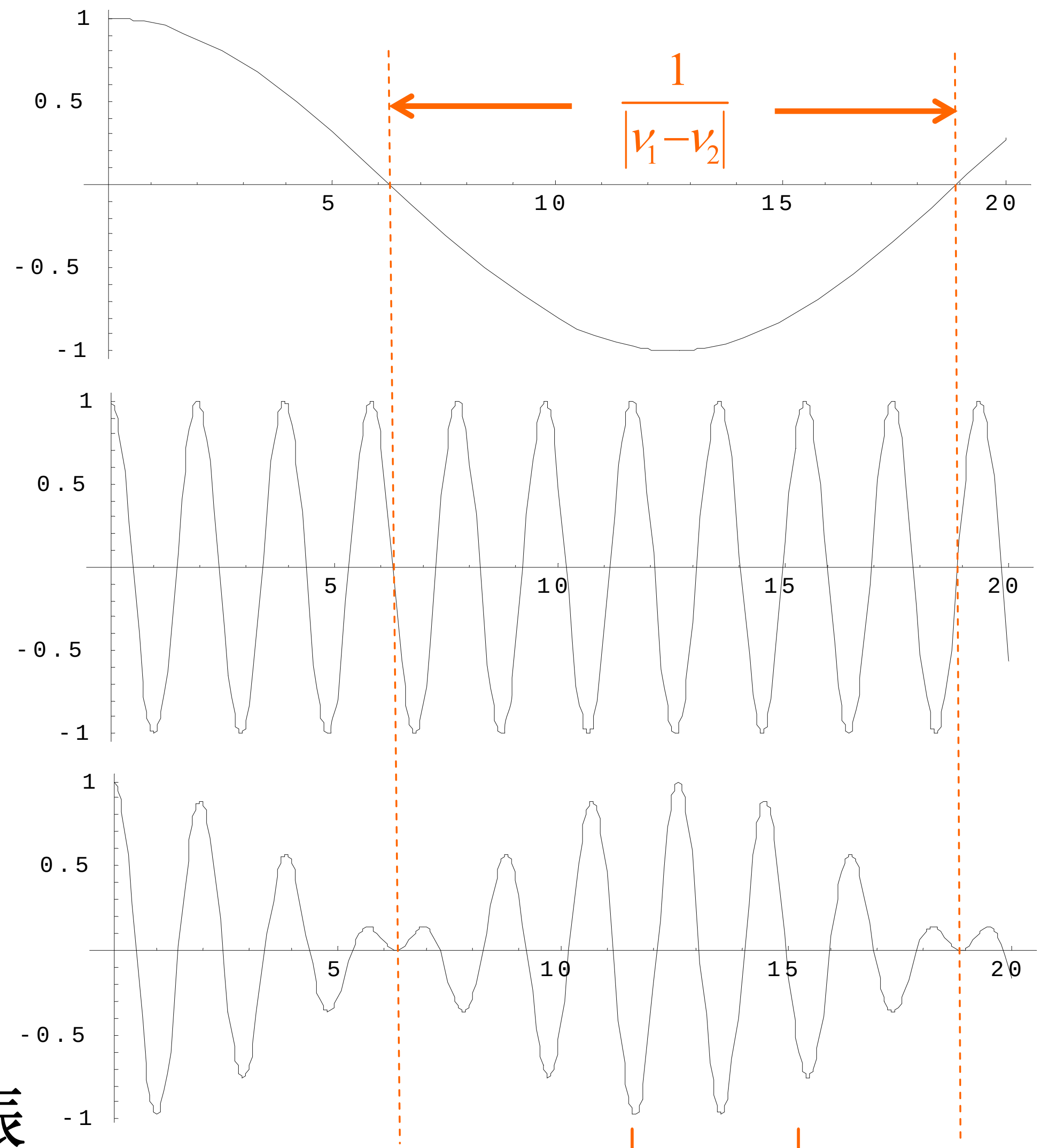
$$\nu=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{|\nu_1-\nu_2|}{2}\Rightarrow T=\frac{2}{|\nu_1-\nu_2|}$$

$$\cos\bar{\omega}t=\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right)$$

$$x=A(t)\cos\bar{\omega}t$$

合振动的周期性的强弱变化称为拍

拍频：单位时间内振动强弱变化的次数



$$\nu_{拍}=|\nu_1-\nu_2|$$

01:35:17

➢推广：振幅不相等，初相位不为零，情况类似

➢拍的例子：

- 频率有微小差别的两个同调音叉合成的声音
- 双簧管两个簧片合成的悦耳的颤音

➢拍的应用：

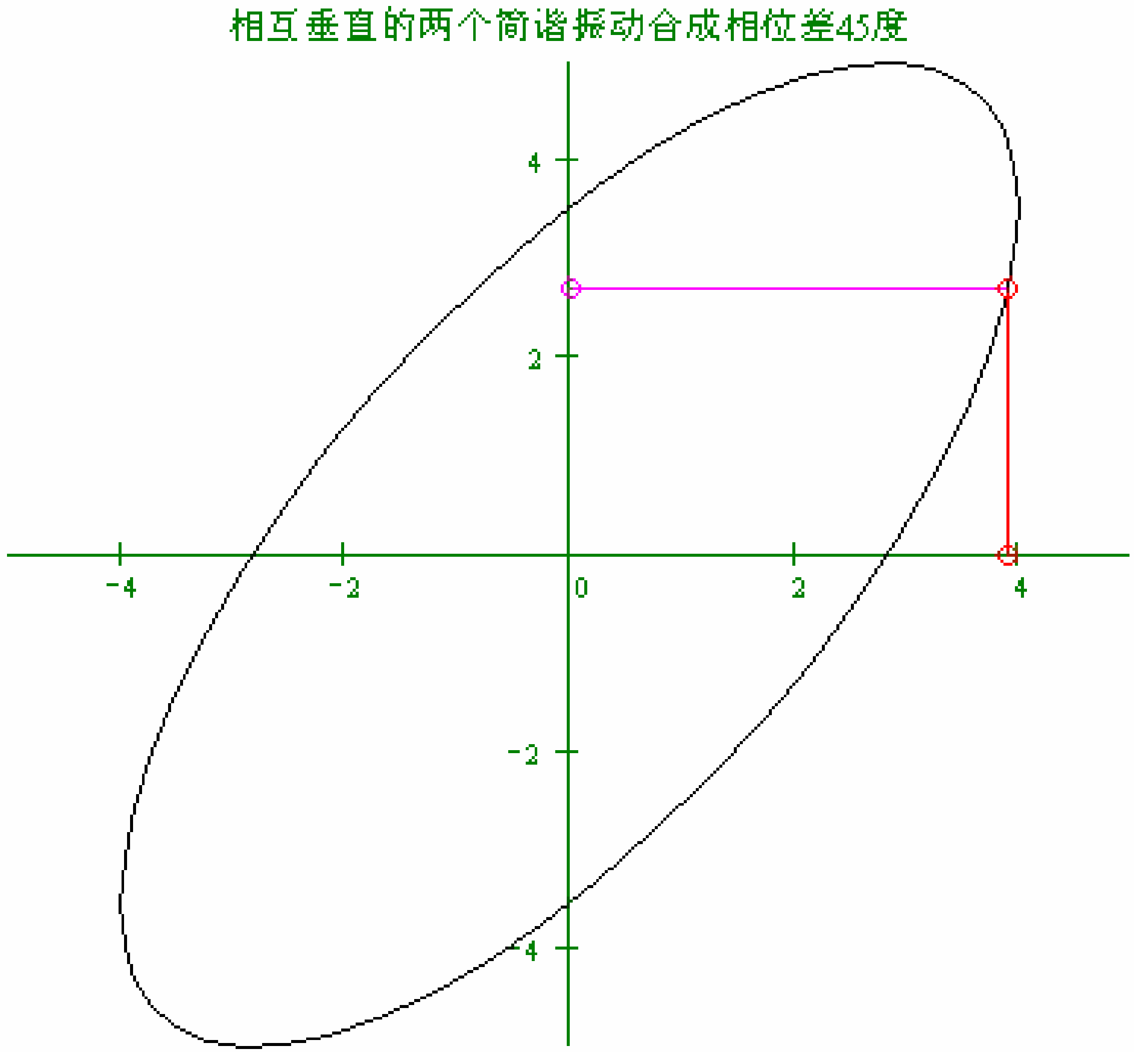
- 用音叉的振动来校准乐器；
- 利用拍的规律测量超声波的频率；$\nu_{拍} = |\nu_1 - \nu_2|$
- 在无线电技术中，可以用来测定无线电波频率。

01:35:17

5.4 两个互相垂直的同频率简谐振动的合成

若质点同时参与两个同频率、互相垂直的简谐运动

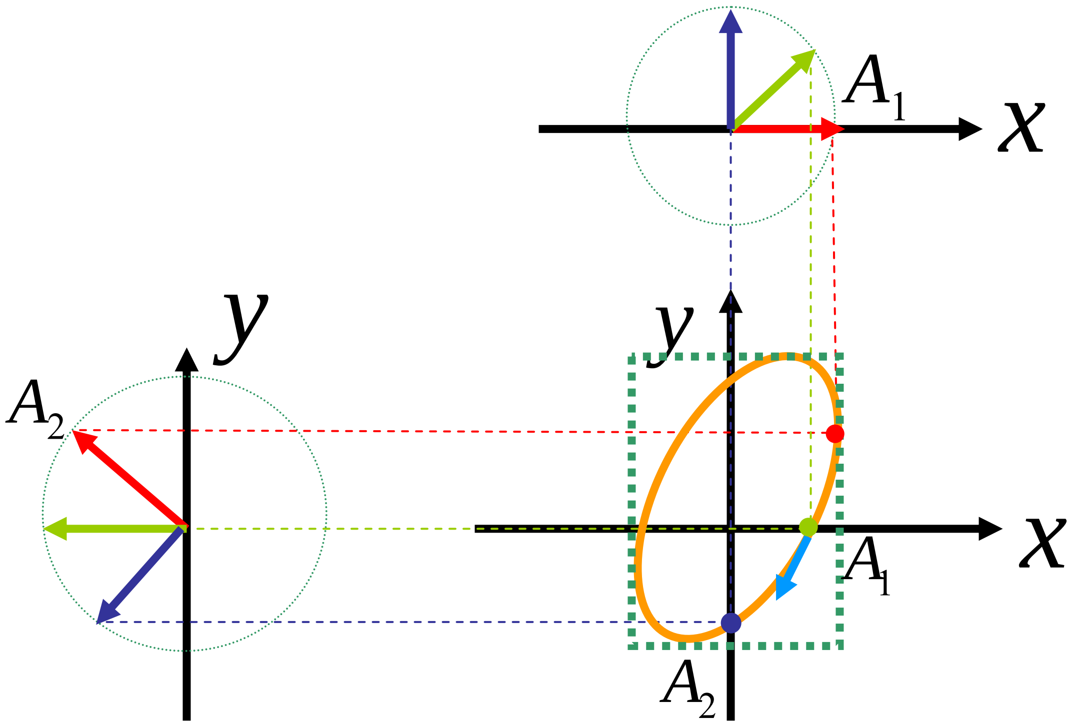
$$x = A_1\cos(\omega t+\varphi_1),\qquad y = A_2\cos(\omega t+\varphi_2)$$



01:35:17

• 用旋转矢量法画合运动轨迹

$$x = A_1 \cos \omega t$$



右旋（顺时针）

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{4}$$

$$y = A_2 \cos(\omega t + \frac{\pi}{4})$$

01:35:17

•推导合运动的轨迹方程

$$x = A_1\cos(\omega t+\varphi_1) \qquad \Rightarrow \qquad x/A_1 = \cos\omega t\cos\varphi_1 - \sin\omega t\sin\varphi_1$$

$$y = A_2\cos(\omega t+\varphi_2) \qquad \qquad y/A_2 = \cos\omega t\cos\varphi_2 - \sin\omega t\sin\varphi_2$$

$$x\cos\varphi_2/A_1 = \cos\omega t\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\omega t\sin\varphi_1\cos\varphi_2 \qquad \Rightarrow$$

$$y\cos\varphi_1/A_2 = \cos\omega t\cos\varphi_2\cos\varphi_1 - \sin\omega t\sin\varphi_2\cos\varphi_1$$

$$\boxed{\begin{aligned}&x\cos\varphi_2/A_1 - y\cos\varphi_1/A_2\\&= \sin\omega t(\sin\varphi_2\cos\varphi_1 - \sin\varphi_1\cos\varphi_2) = \sin\omega t\sin(\varphi_2-\varphi_1)\end{aligned}}$$

$$x\sin\varphi_2/A_1 = \cos\omega t\cos\varphi_1\sin\varphi_2 - \sin\omega t\sin\varphi_1\sin\varphi_2 \qquad \Rightarrow$$

$$y\sin\varphi_1/A_2 = \cos\omega t\cos\varphi_2\sin\varphi_1 - \sin\omega t\sin\varphi_2\sin\varphi_1$$

$$\boxed{\begin{aligned}&x\sin\varphi_2/A_1 - y\sin\varphi_1/A_2\\&= \cos\omega t(\sin\varphi_2\cos\varphi_1 - \sin\varphi_1\cos\varphi_2) = \cos\omega t\sin(\varphi_2-\varphi_1)\end{aligned}}$$

01:35:17

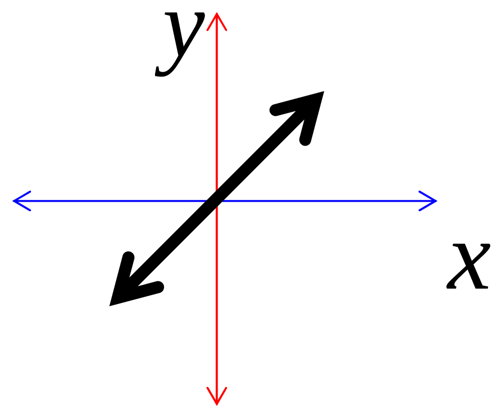
$$(x\cos\varphi_2/A_1 - y\cos\varphi_1/A_2)^2 + (x\sin\varphi_2/A_1 - y\sin\varphi_1/A_2)^2 = \sin^2(\varphi_2-\varphi_1)$$

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-\frac{2xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_2-\varphi_1)=\sin^2(\varphi_2-\varphi_1)$$

合运动的轨迹方程

- 讨论→偏振光

①两振动同相 $\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=0$



$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-\frac{2xy}{A_1A_2}=\left(\frac{x}{A_1}-\frac{y}{A_2}\right)^2=0$$

$\because \varphi_1=\varphi_2=\varphi$

$$\Rightarrow y=\frac{A_2}{A_1}x$$

一条过原点斜率为正的直线

$$x = A_1\cos(\omega t+\varphi)$$

$$y = A_2\cos(\omega t+\varphi)$$

质点离开原点的位移

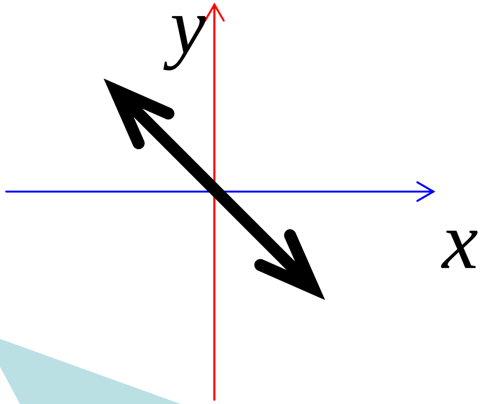
$$\vec{s}=x\vec{i}+y\vec{j}=(A_1\vec{i}+A_2\vec{j})\cos(\omega t+\varphi)$$

合振动是简谐振动

01:35:17

②两振动反相 $\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=\pi$

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-\frac{2xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_2-\varphi_1)=\sin^2(\varphi_2-\varphi_1)$$



$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}+\frac{2xy}{A_1A_2}=\left(\frac{x}{A_1}+\frac{y}{A_2}\right)^2=0\Rightarrow y=-\frac{A_2}{A_1}x$$

一条过原点斜率为负的直线

$\because \varphi_2=\varphi_1+\pi$

$$x=A_1\cos(\omega t+\varphi_1)=A_1\cos(\omega t+\varphi_2-\pi)=-A_1\cos(\omega t+\varphi_2)$$

$$y=A_2\cos(\omega t+\varphi_2)=A_2\cos(\omega t+\varphi_1+\pi)=-A_2\cos(\omega t+\varphi_1)$$

质点离开原点的位移

合振动是简谐振动

$$\vec{s}=x\vec{i}+y\vec{j}=(A_1\vec{i}-A_2\vec{j})\cos(\omega t+\varphi_1)$$

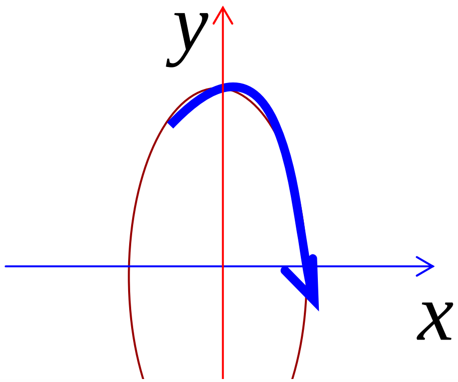
$$=(A_2\vec{j}-A_1\vec{i})\cos(\omega t+\varphi_2)$$

01:35:17

③ y比x领先$\pi/2$　　$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=\pi/2$

若$A_1=A_2\rightarrow$圆轨道

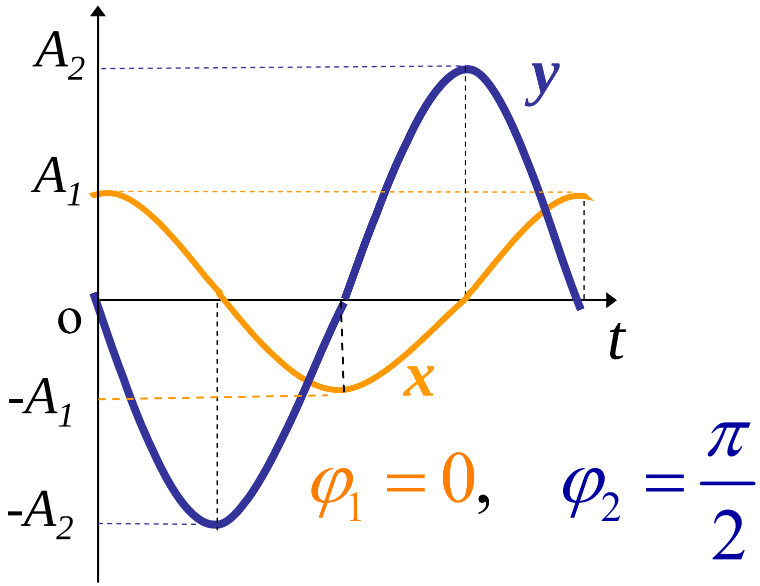
$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-\frac{2xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_2-\varphi_1)=\sin^2(\varphi_2-\varphi_1)$$

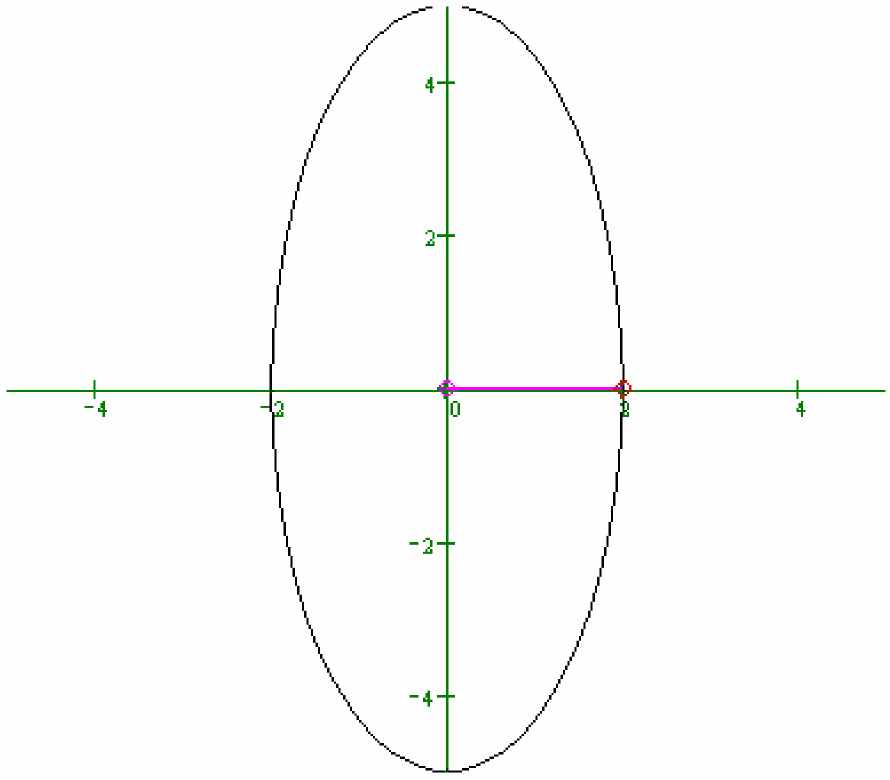


$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}=1$$

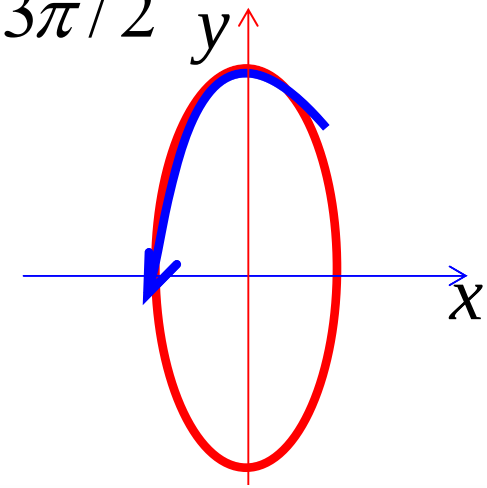
合运动的轨迹是以坐标轴为主轴的椭圆

质点作**右旋**（顺时针）椭圆转一圈的周期等于分振动的





④ y比x落后$\pi/2$ $\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=-\pi/2$或$3\pi/2$

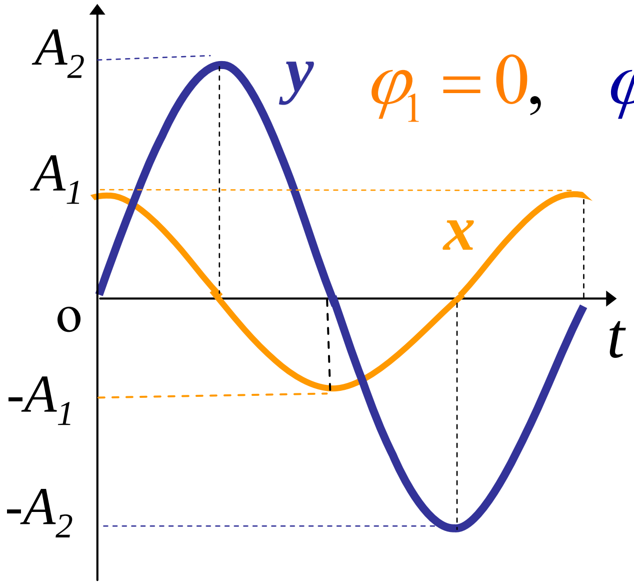


$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-\frac{2xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_2-\varphi_1)=\sin^2(\varphi_2-\varphi_1)$$

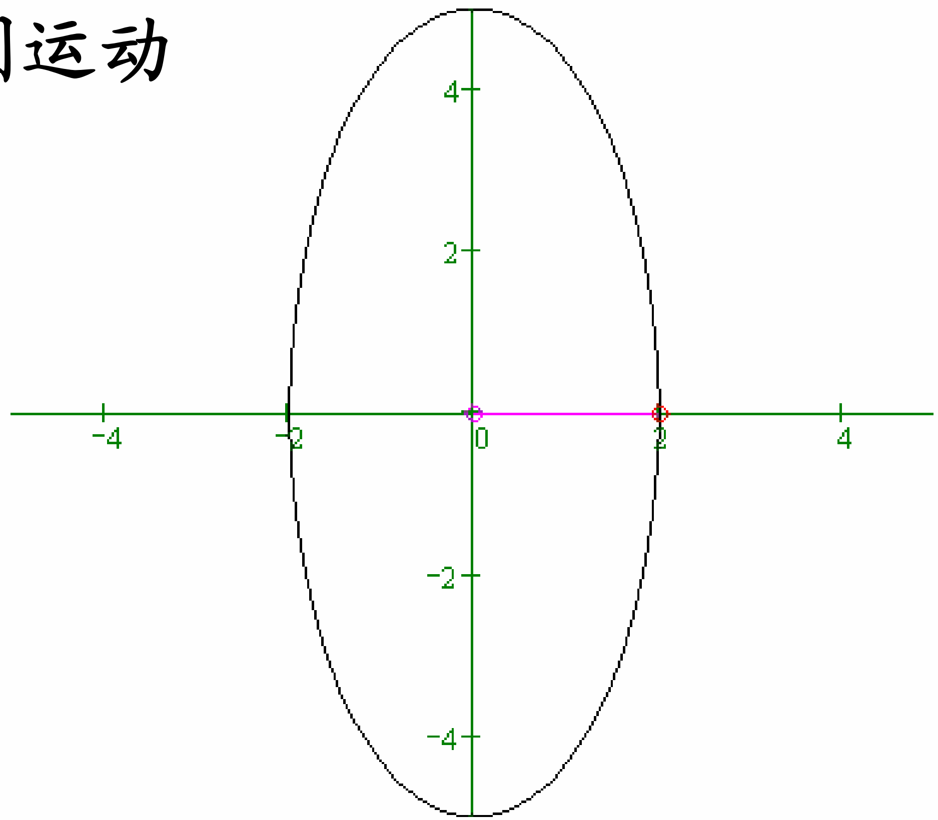
$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}=1$$

以坐标轴为主轴的椭圆

质点作**左旋**（逆时针）椭圆运动

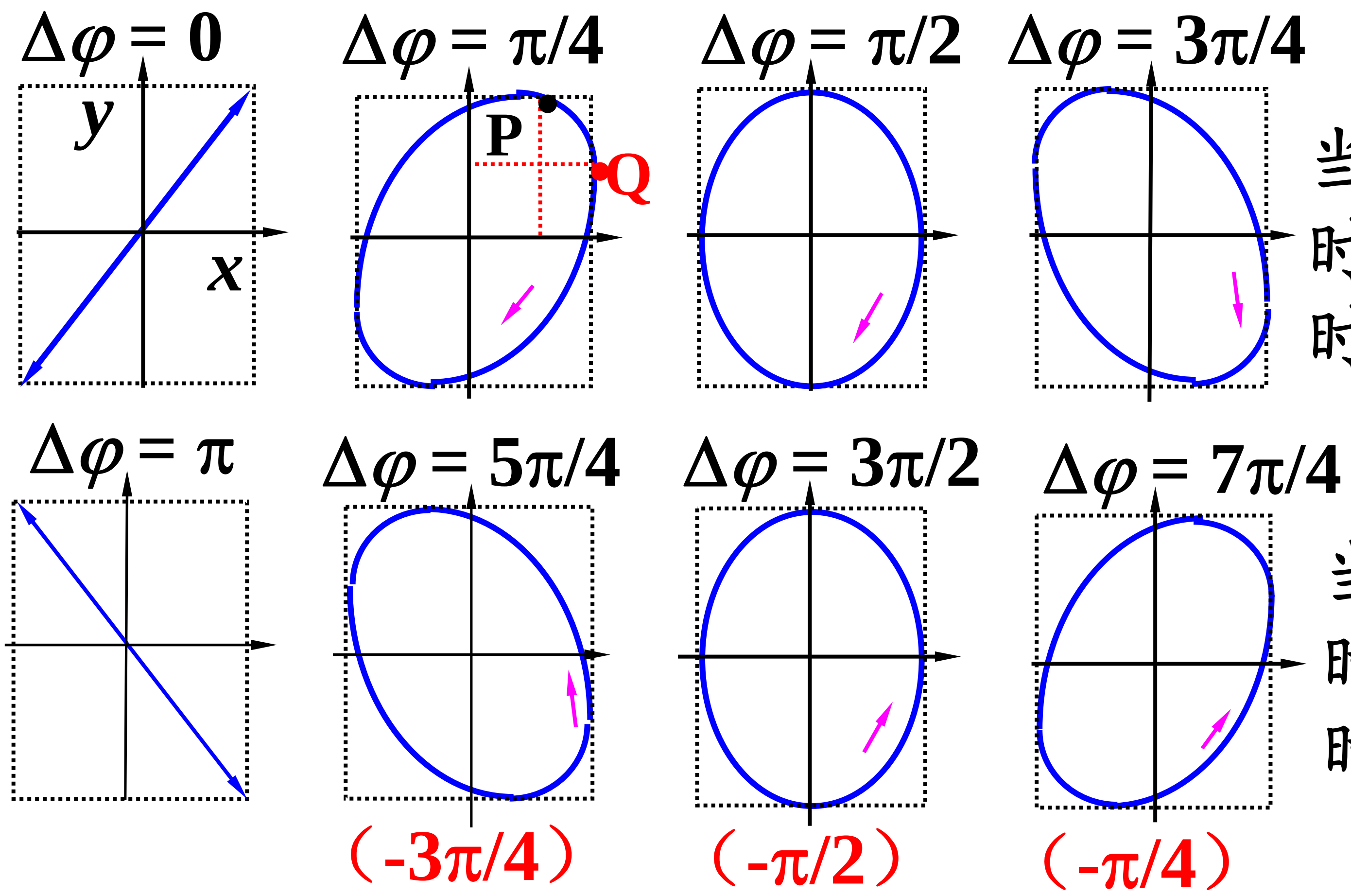


$\varphi_1=0,\quad \varphi_2=-\dfrac{\pi}{2}$



⑤一般情况 $\Delta\varphi$=其他值　质点的运动一般为椭圆

$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ 不同，椭圆的形状、旋向也不同　　演示



当 $0<\Delta\varphi<\pi$ 时，质点沿顺时针方向运动

当 $-\pi<\Delta\varphi<0$ 时，质点沿逆时针方向运动

01:35:17

5.5 两个相互垂直的不同频率简谐振动的合成

合成运动比较复杂，下面就两种情况讨论：

1.两分振动的频率相差很小 $\nu_x \approx \nu_y$ 近似为同频率的合成

两个分振动的相位差 $\Delta\varphi$ 缓慢地变化

质点运动的轨道循环变化：直线→椭圆→直线

2.两个分振动的频率相差较大，但有简单整数比关系

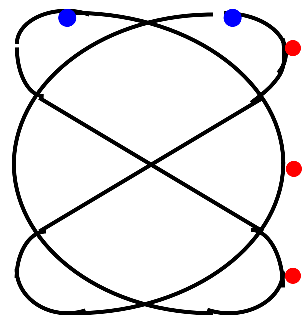
$\omega_x : \omega_y = m : n$ 合成轨迹为稳定的闭合曲线——李萨如图

$$\frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{x\text{达到最大的次数}}{y\text{达到最大的次数}}$$

比如：

$\varphi_1 = 0,\quad \varphi_2 = \pi/4$

$\omega_x : \omega_y = 3:2$



•用李萨如图测量频率：

在示波器上，垂直方向与水平方向同时输入两个振动，已知其中一个频率，则可根据所成图形与已知标准的李萨如图形去比较，就可得知另一个未知的频率。

01:35:17

共振现象

Tocoma Narrow Bridge

1940 **1950**

应用：电驱蚊器、微波炉、核磁共振、次声波武器、乐器共振腔

01:35:17

本章内容

★★★熟悉★★★

◆ 简谐振动的表达式、动力学方程、三个特征量
◆ 判断简谐振动：恢复力、方程、能量角度
◆ 相位、振动状态、振动曲线、旋转矢量法
◆ 相差、同相、反相、领先和落后
◆ 简谐振动的能量：机械能守恒
◆ 同一直线上两个同频率简谐振动的合成：干涉

★★理解★★

◆ 同一直线上多个同频率简谐振动的合成：多光束干涉
◆ 同一直线上两个不同频率简谐振动的合成：拍
◆ 相互垂直的两个同频率简谐振动的合成：轨迹，偏振光

★了解★

◆ 相互垂直的两个不同频率简谐振动的合成：李萨如图

本章作业

物理学教程
第二版(上册)

P142

11， 15, 16,
17， 20