2023 高等数学 A（下）期中考试答案

一、1. $-\dfrac{1}{2}$； 2. $\dfrac{1}{2}<p\le 1$； 3. $\dfrac{3}{8}$；

4. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(-\dfrac{1}{2^{2n+2}}\right)(x+1)^{2n},-3<x<1$;或$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}-1}{2^{n+3}}(x+1)^{n},-3<x<1$；

5. -3; 6. $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-1}{-2}$.

二、1.A 2.B 3.C 4.D 5.B 6.D

三、设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F(x-y,y-z,z-x)=0$ 确定，其中 F 具有连续偏导数且

$F_2'-F_3'\neq 0$，计算 dz 及 $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}$.（10 分）

解： 方程 $F(x-y,y-z,z-x)=0$ 两边取全微分得

$F_1'd(x-y)+F_2'd(y-z)+F_3'd(z-x)=0$，$(F_1'-F_3')dx+(F_2'-F_1')dy+(F_3'-F_2')dz=0$

$$dz=\frac{F_1'-F_3'}{F_2'-F_3'}dx+\frac{F_2'-F_1'}{F_2'-F_3'}dx$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{F_1'-F_3'}{F_2'-F_3'},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{F_2'-F_1'}{F_2'-F_3'},\quad \frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=1.$$

四、求常数 a,b 的值，使得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\ln n+a\ln(n+1)+b\ln(n+2)\right]$ 收敛.（10 分）

解：令 $u_n=\ln n+a\ln(n+1)+b\ln(n+2)=(1+a+b)\ln n+a\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)+b\ln\left(1+\dfrac{2}{n}\right)$，

因 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，故 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，有 $1+a+b=0$；

当 $n\to\infty$ 时

$$u_n=a\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+b\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)=a\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)+b\left(\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$=(a+2b)\dfrac{1}{n}-\left(\dfrac{a}{2}+2b\right)\dfrac{1}{n^2}+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$，必有 $a+2b=0$；

解得 $a=-2$，$b=1$.

这时 $-u_n\sim\dfrac{1}{n^2}\,(n\to\infty)$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-u_n)$ 收敛，从而原级数收敛.

解法 2： 设级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\ln n+a\ln(n+1)+b\ln(n+2)\right]$的部分和为$s_n$，则

$s_1=a\ln 2+b\ln 3,\ s_2=(a+1)\ln 2+(a+b)\ln 3+b\ln 4,$

$n\geq 3$时$,s_n=(a+1)\ln 2+(a+b+1)\sum_{k=3}^{n}\ln k+(a+b)\ln(n+1)+b\ln(n+2)$；

要使$\{s_n\}$收敛，必须$a+b+1=0$，

且$\lim_{n\to\infty}\left[(a+b)\ln(n+1)+b\ln(n+2)\right]$存在，

而$(a+b)\ln(n+1)+b(n+2)=(a+2b)\ln n+(a+b)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+b\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)$，

必有$a+2b=0$；

解得$a=-2,b=1$.

这时，$\lim_{n\to\infty}s_n=-\ln 2$，即级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\ln n+a\ln(n+1)+b\ln(n+2)\right]$收敛于和$-\ln 2$.

五、求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+1)}{(2n+2)!}x^{2n}$的和函数. （10 分）

解：幂级数收敛域$(-\infty,+\infty)$.

设幂级数和函数为$s(x)$，则对$\forall x\in(-\infty,+\infty)$，

$$s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+1)}{(2n+2)!}x^{2n},$$

$$\int_0^x s(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+1)}{(2n+2)!}\int_0^x x^{2n}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+2)!}x^{2n+1},$$

当$x\neq 0$时，$\int_0^x s(x)dx=\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+2)!}x^{2n+2}=\frac{1-\cos x}{x}$，

$$s(x)=\left(\frac{1-\cos x}{x}\right)'=\frac{x\sin x+\cos x-1}{x^2};$$

或当$x\neq 0$时，$s(x)=\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+2)!}x^{2n+1}\right]'=\left(\frac{1-\cos x}{x}\right)'=\frac{x\sin x+\cos x-1}{x^2}$；

显然$s(0)=\frac{1}{2}$，所以$s(x)=\begin{cases}\frac{x\sin x+\cos x-1}{x^2}, & x\neq 0\\ \frac{1}{2}, & x=0\end{cases}$.

解法 2：幂级数收敛域$(-\infty,+\infty)$．设幂级数和函数为$s(x)$，则对$\forall x\in(-\infty,+\infty)$，

$s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+1)}{(2n+2)!}x^{2n}$，当$x\neq 0$时，

$$s(x)=\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+2)!}x^{2n+1}\right]'=\left(\frac{1-\cos x}{x}\right)'=\frac{x\sin x+\cos x-1}{x^2};$$

显然$s(0)=\frac{1}{2}$，所以$s(x)=\begin{cases}\frac{x\sin x+\cos x-1}{x^2}, & x\neq 0\\ \frac{1}{2}, & x=0\end{cases}$.

六、在 xOy 坐标面上求一点，使得它到$x=0$，$y=0$及$3x+y-12=0$三条直线的距离平方之和最小.（10 分）

解：xOy 坐标面上任一点(x,y)到$x=0$，$y=0$及$3x+y-12=0$三条直线的距离平方之和

$$d=y^2+x^2+\frac{(3x+y-12)^2}{10}$$

令$\begin{cases}d_x=2x+\frac{3}{5}(3x+y-12)=0\\ d_y=2y+\frac{1}{5}(3x+y-12)=0\end{cases}$，解得唯一驻点$\left(\frac{9}{5},\frac{3}{5}\right)$.

$d_{xx}=\frac{19}{5}$，$d_{xy}=\frac{3}{5}$，$d_{yy}=\frac{11}{5}$；

在$\left(\frac{9}{5},\frac{3}{5}\right)$处，$A=\frac{19}{5}>0$, $B=\frac{3}{5}$, $C=\frac{11}{5}$, $AC-B^2=8>0$,

故$\left(\frac{9}{5},\frac{3}{5}\right)$是$d$的极小值点，也是最小值点. 所求点为$\left(\frac{9}{5},\frac{3}{5}\right)$.