第四节 相互独立的随机变量

一、随机变量的相互独立性

二、二维随机变量的推广

三、小结

一、相互独立的随机变量

1.定义

设$F(x,y)$及$F_X(x),F_Y(y)$分别是二维随机变量(X,Y)的分布函数及边缘分布函数. **若对于所有x,y有**

$$P\{X\le x,Y\le y\}=P\{X\le x\}P\{Y\le y\},$$

即 $$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y),$$

则称随机变量 X 和 Y 是相互独立的.

2.说明

(1) 若离散型随机变量 (X,Y) 的联合分布律为

$$P\{X=i,Y=j\}=p_{ij},\quad i,j=1,2,\cdots.$$

X 和 Y 相互独立

$$\Longleftrightarrow P\{X=x_i,Y=y_j\}=P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\},\forall i,j$$

即 $p_{ij}=p_{i\bullet}\cdot p_{\bullet j}.$

(2) 设连续型随机变量 (X,Y)的联合概率密度为 $f(x,y)$,边缘概率密度分别为 $f_X(x), f_Y(y)$,则有

$$X \text{ 和 } Y \text{ 相互独立} \Leftrightarrow f(x,y) = f_X(x) f_Y(y).$$

(3)X 和 Y 相互独立, 则 $f(X)$ 和 $g(Y)$也相互独立.

例1 对于随机变量 X和Y, **由**

$$f(x,y)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-(2x+y)}, & x>0,\ y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

得

$$f_X(x)=\begin{cases}2e^{-2x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y),$$

因而X和Y是相互独立的.

例2 若X,Y具有联合分布律

$Y \backslash X$	0	1	$P\{Y=j\}$
1	$1/6$	$2/6$	$1/2$
2	$1/6$	$2/6$	$1/2$
$P\{x=i\}$	$1/3$	$2/3$	1

则有 $P\{X=0,Y=1\}=1/6=P\{X=0\}P\{Y=1\}$,

$P\{X=0,Y=2\}=1/6=P\{X=0\}P\{Y=2\}$,

$P\{X=1,Y=1\}=2/6=P\{X=1\}P\{Y=1\}$,

$P\{X=1,Y=2\}=2/6=P\{X=1\}P\{Y=2\}$,

考察二维正态随机变量 (X,Y).

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$\cdot\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

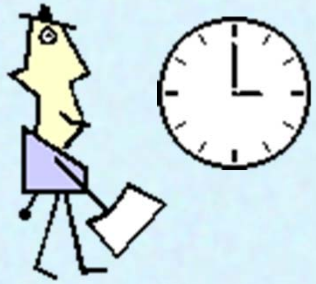
$$f_X(x)f_Y(x)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}.$$

结论:

对于二维正态随机变量 (X,Y)，X和Y相互独立的充要条件是参数 $\rho=0$.

例3 一负责人到达办公室的时间均匀分布在8~12时, 他的秘书到达办公室的时间均匀分布在7~9时, 设他们两人到达的时间相互独立, 求他们到达办公室的时间相差不超过 5 分钟 (1/12小时)的概率.

解 设 X 和 Y 分别是负责人和他的秘书到达办公室的时间,



由假设 X 和 Y 的概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}, & 8<x<12,\\ 0, & 其他,\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & 7<x<9,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

因为 X,Y 相互独立, 故 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{8}, & 8<x<12,7<y<9,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

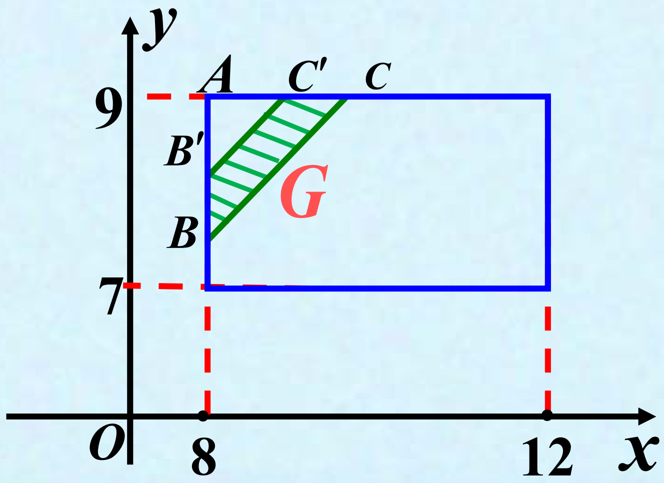
按题意需要求概率 $P\{|X-Y|\le 1/12\}$. **画出区域:**

$|X-Y| \le 1/12$, 以及长方形$[8<x<12;7<y<9]$, 它们的公共部分是四边形$BCC'B'$, 记为G(如图3－8). 显然仅当(X,Y)取值于G内, 他们两人到达的时间相差才不超过$1/12$小时. 因此, 所求的概率为

$$P\{|X-Y| \le \frac{1}{12}\}$$

$$=\iint_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{8}\times(G\text{ 的面积}).$$



而 G的面积

$=$三角形ABC的面积$-$三角形$AB'C'$的面积

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{13}{12}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{11}{12}\right)^2=\frac{1}{6}.$$

于是 $P\{|X-Y|\le\frac{1}{12}\}=\frac{1}{8}\times(G\text{的面积})=\frac{1}{48}.$

即负责人和他的秘书到达办公室的时间相差不超过5分钟的概率为$\frac{1}{48}$.

二、二维随机变量的推广

1.分布函数

n 维随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的分布函数定义为

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = P\{X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \cdots, X_n \le x_n\},$$

其中 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为任意实数.

2.概率密度函数

若存在非负函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，使对于任意实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 有

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

$$=\int_{-\infty}^{x_n}\int_{-\infty}^{x_{n-1}}\cdots\int_{-\infty}^{x_1} f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n,$$

则称 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的概率密度函数.

3.边缘分布函数

设$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$的分布函数$F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$**为已知**, 则$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$的$k(1 \le k < n)$维边缘分布**函数就随之确定**. 例如$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$关于X_1、关于(X_1, X_2)的边缘分布函数分别为

$$F_{X_1}(x_1) = F(x_1, \infty, \infty, \cdots, \infty)$$

$$F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = F(x_1, x_2, \infty, \infty, \cdots, \infty)$$

4.边缘概率密度函数

若 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的概率**密度**，则 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 关于 X_1，关于 (X_1,X_2) 的**边缘概率密度分别为**

$$f_{X_1}(x_1)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3\cdots\mathrm{d}x_n,$$

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,\mathrm{d}x_3\,\mathrm{d}x_4\cdots\mathrm{d}x_n.$$

同理可得 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的 $k(1 \le k < n)$ 维边缘概率密度.

5. 相互独立性

若对于所有的 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 有

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = F_{X_1}(x_1) F_{X_2}(x_2) \cdots F_{X_n}(x_n),$$

则称 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是相互独立的.

若对于所有的 $x_1, x_2, \cdots, x_m, y_1, y_2, \cdots, y_n$ 有

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_m, y_1, y_2, \cdots, y_n)$$

$$= F_1(x_1, x_2, \cdots, x_m) F_2(y_1, y_2, \cdots, y_n)$$

其中F_1, F_2, F依次为随机变量$(X_1, X_2, \cdots, X_m)$, $(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$和$(X_1, X_2, \cdots, X_m, Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$的分布**函数**, 则称随机变量$(X_1, \cdots, X_m)$和$(Y_1, \cdots, Y_n)$是相互**独立的**.

6.重要结论

定理 设 $(X_1, X_2, \cdots, X_m)$ 和 $(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$ 相互**独立**, 则 $X_i(1,2,\cdots,m)$ 和 $Y_j(j=1,2,\cdots,n)$ 相互独立. 又若 h, g 是连续函数, 则 $h(X_1, X_2, \cdots, X_m)$ 和 $g(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$ 相互独立.

三、小结

1. 若离散型随机变量 (X,Y) 的联合分布律为

$$P\{X=i, Y=j\}=p_{ij}, i, j=1,2,\cdots.$$

X 和 Y 相互独立 $\Leftrightarrow$

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\}.$$

2. 设连续型随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为 $f(x,y)$，边缘概率密度分别为 $f_X(x), f_Y(y)$，则有

X 和 Y 相互独立 $\Leftrightarrow$ $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$

3. X 和 Y 相互独立,则 $f(X)$ 和 $g(Y)$也相互独立.

4. 设 (X,Y) 是二维连续型随机变量，则有

$$F_{X|Y}(x|y) = \int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(x|y)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-\infty}^{x} [f(x,y)/f_Y(y)]\,\mathrm{d}x.$$

$$F_{Y|X}(y|x) = \int_{-\infty}^{y} f_{Y|X}(y|x)\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_{-\infty}^{y} [f(x,y)/f_X(x)]\,\mathrm{d}y.$$

作业：17,18,19

思 考 题

设随机变量 X 和 Y 相互独立,并且 X 服从 $N(a,\sigma^2)$,Y 在 $[-b,b]$ 上服从均匀分布,求 (X,Y) 的联合概率密度.