1. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Leftrightarrow$ 部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛

2. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 均收敛 $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} (ku_n + lv_n)$ 收敛

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散 $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ 发散

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ ×

3 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$ $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

4. 比较法. 正项 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$.

"大"收敛 $\Rightarrow$ "小"收敛

"小"发散 $\Rightarrow$ "大"发散.

5. 等比级数. $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$. $|q|<1$ 收敛.

☆ p-级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$.
$$\begin{cases} p \le 1, & \text{发散.} \\ p > 1, & \text{收敛.} \end{cases}$$

证明: 当 $p<1$ 时. $\frac{1}{n^p} \geq \frac{1}{n}$

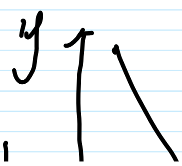
"大"发散 $\Leftarrow$ "小"发散

当 $p>1$ 时.

$S_n = \frac{1}{1^p}\times 1 + \frac{1}{2^p}\times 1 + \cdots + \frac{1}{n^p}\times 1$

$= 1 + S_{小矩}$.

$\leq 1 + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$



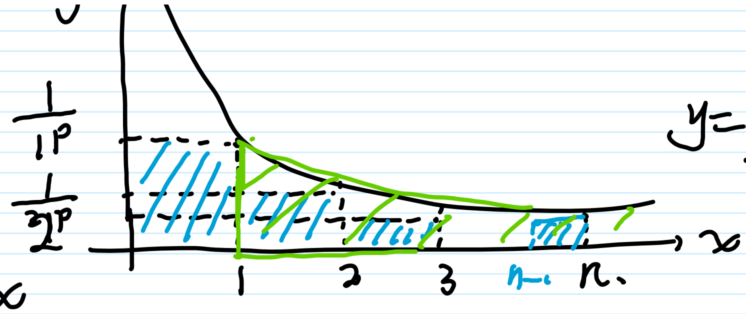
$p=2$.

$\frac{1}{n^3} \leq \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$

"小"收敛 $\Leftarrow$ "大"收敛

$$\le 1+\underbrace{\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx}$$

$$=1+M.$$



$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx=\lim_{u\to+\infty}\int_1^{u}\frac{1}{x^p}dx$$

例. 正项 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则 ① $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛.

② $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{a_n}}{n}$ 收敛

解: 特例. $a_n=\underbrace{\frac{1}{n^2}}$ $\quad a_n^2=\underbrace{\frac{1}{n^4}}$ $\quad \frac{\sqrt{a_n}}{n}=\frac{1}{n^2}$.

$$a_n^2=\frac{1}{n^4}\le\frac{1}{n^2}=a_n$$

"小"收敛 $\Leftarrow$ "大"收敛

①

$$a_n\cdot \underbrace{a_n}=a_n^2\le a_n\cdot \underline{1}$$

由收敛，可得 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

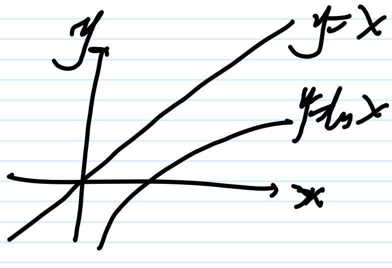
$\exists N>0$，当 $n>N$ 时， $a_n<1$，则 $a_n^2<a_n$.

故由比较法可得收敛.

② $$\sqrt{a_n}\cdot\frac{1}{n}\le\frac{a_n+\frac{1}{n^2}}{2}\qquad ab\le\frac{a^2+b^2}{2}$$

"小"收敛 $\Leftarrow$ "大"收敛

例 $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$ 收敛.



解: $$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^2}=0$$

$$\frac{\ln n}{n^2} \le \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$$

"大"发散.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^{\frac{1}{2}}} = 0$$

取 $\varepsilon = 1$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N > 0$, 当 $n > N$.

$$\left| \frac{\ln n}{n^{\frac{1}{2}}} - 0 \right| < \varepsilon.$$

$$\frac{\ln n}{n^{\frac{1}{2}}} < \varepsilon. 1.$$

即 $\ln n < n^{\frac{1}{2}}$.

$\exists N > 0$, 当 $n > N$ 时.

$$\frac{\ln n}{n^2} < \frac{n^{\frac{1}{2}}}{n^2} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

"小"收敛 $\Leftarrow$ "大"收敛

例 $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln n}{n^p}$, 当 p ___>1___ 时, 收敛

当 p ___≤ 1___ 时, 发散.

解: 当 $p=1$ 时. $\frac{\ln n}{n} > \frac{1}{n}$

"大"发散 $\Leftarrow$ "小"发散

当 $p<1$ 时. $\frac{\ln n}{n^p} \ge \frac{\ln n}{n}$

当 $p>1$ 时. $\frac{\ln n}{n^p} \le \frac{1}{n^\alpha}$ $\quad \alpha > 1$.

$p = \alpha + r \ (r>0)$

$$\frac{\ln n}{n^r}\cdot\frac{1}{n^\alpha} \le 1\cdot\frac{1}{n^\alpha}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^r}=0. \qquad \Uparrow$$

$\exists N>0$，当 $n>N$ 时，$\quad \frac{\ln n}{n^r}\le 1$

☆定理：（比较法极限形式）。余俗称之泰勒公式

正项 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，$\sum_{n=1}^{\infty}\boxed{v_n}$，且 $(v_n\ne 0)$。

若 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l$。 $(l\ne 0)$ $\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{l v_n}=1 \Leftrightarrow u_n\sim l v_n \ (n\to\infty)$.

① 当 $0<l<+\infty$ 时，$\quad \sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 同敛散。

② $l=0$ 时。$\begin{cases} v_n\text{大} & v_n=\frac{1}{n^2} \\ u_n\text{小} & u_n=\frac{1}{n^3}\end{cases}$ $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，

③ $l=+\infty$ 时 $\begin{cases} v_n\text{小} & v_n=\frac{1}{n} \\ u_n\text{大} & u_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\end{cases}$ $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散

证明：①. 取 $\varepsilon=\frac{l}{2}$. $\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，当 $n>N$ 时 有

$$\left|\frac{u_n}{v_n}-l\right|<\varepsilon.$$

$$\Leftrightarrow \frac{l}{2}=l-\varepsilon<\frac{u_n}{v_n}<l+\varepsilon=\frac{3}{2}l.$$

$$\frac{l}{2}\cdot v_n<u_n<\frac{3}{2}l\,v_n.$$

☆推论：取 $v_n=\frac{1}{n^p}$. $\quad \lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{\frac{1}{n^p}}=\lim_{n\to\infty}n^p\cdot u_n=l.$

则 (1) $p>1$ 且 $t\in[0,+\infty)$ $\sum_{n=0}^{\infty}u_n$ 收敛

(2) $p\le 1$，且 $t\in(0,+\infty]$ $\sum_{n=0}^{\infty}u_n$ 发散。

例：$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$．<u>收敛</u>．

解：$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\ln n}{n^2}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}}=0$． $p=\frac{3}{2}>1$

$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\ln n}{n^2}}{\frac{1}{n}}=0$、 $p=1$

例．

$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$ <u>发散</u>． $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n^p}$．当 <u>$p>1$</u>．收敛

当 <u>$p\le 1$</u>．发散．

解：$\sin\frac{1}{n}<\frac{1}{n}$、

$\sin\frac{1}{n}\sim\frac{1}{n}\ (n\to\infty)$

$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1$． 得与 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 同敛散

$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n^p}}{\frac{1}{n^p}}=1$． $\sin\frac{1}{n^p}\sim\frac{1}{n^p}\ (n\to\infty)$

例．$\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{1}{2n^2}$． <u>收敛</u>．

$\arctan\frac{1}{2n^2}\sim\frac{1}{2n^2}\ (n\to\infty)$．

例 正项 $\sum_{n=1}^{\infty}(e^{\frac{1}{n^2}}-\cos\frac{1}{n})$ ________

解：$\lim(e^{\frac{1}{n^2}}-\cos\frac{1}{n})=0$．

解：$\lim\limits_{n\to\infty}(e^{\frac{1}{n^2}}-\cos\frac{1}{n})=0$.

$$l=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{n^2}}-\cos\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x}=0$$

$p=1$. $l=0$. 无法判断.

$$e^{\frac{1}{n^2}}-\cos\frac{1}{n}=\left(1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{2!}\frac{1}{n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)$$

$$-\left(1-\frac{1}{2!}\frac{1}{n^2}+\frac{1}{4!}\frac{1}{n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)$$

$$=\frac{3}{2}\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{n^2}}-\cos\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}}=\frac{3}{2}.$$

原级数与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 同敛散. 得收敛.

☆定理（比值法/根值法）.

正项 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$. 且 $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$ 或 $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}$

则. ① $0\leq\rho<1$ 时. 收敛.

② $\rho>1$ 时. 发散.

③ $\rho=1$ 时. 无法判断.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛.

证明. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho>1$.

证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho>1.$

$\exists N>0$，当 $n>N$。 $u_{n+1}>u_n$

$\cdots>\cdots>u_{n+1}>u_n>u_{n-1}>\cdots>u_N\neq0.$

$\lim\limits_{n\to\infty}u_n\geqslant u_N\neq0 \Rightarrow$ 发散。