2024年02月27日 星期二6-8

2024年2月26日 17:44

多元函数微积分 $\begin{cases} \text{微分学} \\ \text{重积分} \\ \text{曲线与曲面积分} \end{cases}$ → 定积分

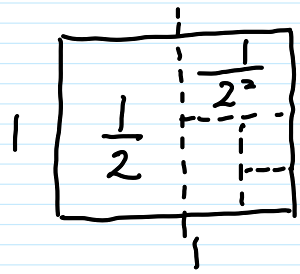
§ 无穷级数

第一节 常数项级数概念与性质

例. 数列 $\{a_n\}$ $\quad$ $\{\frac{1}{2^n}\}$ 收敛, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$.

$\{(-1)^n\}$, 发散.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots = 1$$



$S=1$

$$[(-1)+1]+[(-1)+1]+\cdots = 0+0+\cdots = 0.$$

$$-1+[1+(-1)]+[1+(-1)]+\cdots = -1+0+0+\cdots = -1.$$

一、概念

定义: 常数项级数 $\quad$ 数列 $\{u_n\}$

表达式: $u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots$

记为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

部分和数列 $\{S_n\}$. 即 $S_1 = u_1$

$S_2 = u_1+u_2$

$\vdots$

$S_n = u_1+u_2+\cdots+u_n$.

☆定义 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 发散 $\Leftrightarrow$ 部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛 发散.

若 $\{S_n\}$ 收敛，即 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. 则把 S 称为级数的和

记 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$.

余项. $r_n = S - S_n$. $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$.

$\lim\limits_{n\to\infty}(S-S_n) = S-S$

例. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ <u>收敛于 1</u>. (收敛或发散).

解: 部分和 $S_n = \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}$

$$= \frac{\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{2}} = 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = 1-0=1.$$

故原级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 收敛于 1.

★ 等比级数 $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$，当 $|q|<1$ 时，收敛于 $\frac{q}{1-q}$.

解：当 $q\neq 1$ 时.

$S_n = q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{q(1-q^n)}{1-q}$ $\xrightarrow[|q|<1]{n\to\infty} 1$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{q}{1-q}[1-q^n]$$

i) 当 $|q|<1$ 时，$\lim_{n\to\infty} q^n = 0$. 此时 $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{q}{1-q}$.

ii) 当 $|q|>1$ 时，$\lim_{n\to\infty} q^n$ 不存在，$\lim_{n\to\infty} S_n$ 不存在.

iii) 当 $q=-1$ 时，$\lim_{n\to\infty} (-1)^n$ 不存在，$\lim_{n\to\infty} S_n$ 不存在.

当 $q=1$ 时 $S_n = n \to \infty \ (n\to\infty)$.

综上，当 $|q|<1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ 收敛

$\sum_{n=1}^{\infty} a q^n$，$|q|<1$，收敛于 $\frac{aq}{1-q}$.

收敛的等比级数的和 $= \frac{首项}{1-公比}$. 公比 $= \frac{第2项}{首项}$.

例 $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3^n} = \frac{(-1)^2 \cdot \frac{1}{3^2}}{1-(-\frac{1}{3})} = \cdots$

$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3^{2n-1}} = \frac{(-1)^2 \cdot \frac{1}{3^3}}{1-(-\frac{1}{9})}$.

例. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ 发散.

解. 部分和 $S_n = (-1)+1+\cdots+(-1)^n$.

解：部分和 $S_n=(-1)+1+\cdots+(-1)^n$.

子列. $S_{2n}=(-1)+1+(-1)+1+\cdots+(-1)^{2n-1}+(-1)^{2n}=0$

子列：$S_{2n+1}=(-1)+1+\cdots+(-1)^{2n-1}+(-1)^{2n}+(-1)=-1$

$\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}=0$ $\quad\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n+1}=-1 \Rightarrow \{S_n\}$ 发散

$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ 发散

例：证明级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(u_n-u_{n-1})$ 收敛

$\overset{\Leftrightarrow}{\Rightarrow}$ 数列 $\{u_n\}$ 收敛.

证明：由已知，部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛，即 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=s$

$S_n=(\cancel{u_2}-u_1)+(\cancel{u_3}-\cancel{u_2})+\cdots+(u_{n+1}-\cancel{u_n})$.

$S_n=u_{n+1}-u_1$ 即 $u_{n+1}=S_n+\underline{\underline{u_1}}$ 常数

$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}u_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}(S_n+u_1)=s+u_1\Rightarrow\{u_n\}$ 收敛

例. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)n}$ ___收敛___.

解：

$S_n=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{n\times(n+1)}$

$=1-\cancel{\frac{1}{2}}+\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}+\cdots+\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} \longrightarrow 1 \quad (n\to\infty)$$

例. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+\frac{1}{n})$ 发散.

解: $S_n = \ln(1+1) + \ln(1+\frac{1}{2}) + \cdots + \ln(1+\frac{1}{n})$.

$$= \ln(\frac{\cancel{2}}{1} \cdot \frac{3}{\cancel{2}} \cdot \cdots \cdot \frac{n+1}{\cancel{n}}) = \ln(1+n) \to \infty$$

$(n\to\infty)$

例. $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\frac{1}{2n^2} = \underline{\frac{\pi}{4}}$. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2}$ 收敛

解: $S_n = \arctan\frac{1}{2\times1^2} + \arctan\frac{1}{2\times2^2} + \cdots + \arctan\frac{1}{2\times n^2}$

$$\arctan x - \arctan y = \arctan\frac{x-y}{1+xy}.$$ ✓

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}.$$

$$\arctan\frac{1}{2n^2} = \arctan\frac{1}{2n-1} - \arctan\frac{1}{2n+1}$$

$$S_n = \arctan\frac{1}{1} - \cancel{\arctan\frac{1}{3}} + \cancel{\arctan\frac{1}{3}} - \cancel{\arctan\frac{1}{5}}$$
$$+ \cdots + \cancel{\arctan\frac{1}{2n-1}} - \arctan\frac{1}{2n+1}$$
$$= \frac{\pi}{4} - \arctan\frac{1}{2n+1} \longrightarrow \frac{\pi}{4} \quad (n\to\infty)$$

二. 性质.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} k u_n$ 收敛 $(k \in R)$

$k \neq 0$. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} k u_n$ 同敛散.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 均收敛 $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (k u_n + l v_n)$ 收敛. $(k, l \in R)$

$S_n = u_1 + \cdots + u_n \xrightarrow{n\to\infty} S$

$\sigma_n = v_1 + \cdots + v_n \xrightarrow{n\to\infty} \sigma$

$T_n = (u_1+v_1) + \cdots + (u_n+v_n)$

$= S_n + \sigma_n$

$\lim_{n\to\infty} T_n = S + \sigma$.

推论: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散 $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ 发散

$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛 $= \sum_{n=1}^{\infty} [u_n + v_n + (-u_n)]$ $\Leftarrow \begin{cases} \text{假设收敛} \\ \sum_{n=1}^{\infty} (-u_n) \text{ 收敛} \end{cases}$

与已知矛盾

$\begin{cases} \text{收} + \text{收} \Longrightarrow \text{收}. \\ \text{收} + \text{发} \Longrightarrow \text{发}. \end{cases}$

发 + 发 $\Longrightarrow$ 待定

3. 改变有限项不改变敛散性

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$ 收敛于 1.

增加 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$ 收敛于 2.

删去 $\frac{1}{2}+\quad\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$ 收敛

改变. $(-1)+2+\frac{1}{2^3}+(-\frac{1}{3})+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$ 收敛,

4. $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛于 S $\xrightarrow{加括号}$ $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛于 S.

收敛的级数满足加法结合律. 例. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$.

原: $u_1+u_2+u_3+u_4+u_5+u_6+u_7+\cdots$

↓加括号

新: $u_1+(u_2+u_3)+u_4+(u_5+u_6+u_7)+\cdots$

$u_1 = v_1$, $(u_2+u_3)=v_2$, $u_4=v_3$, $(u_5+u_6+u_7)=v_4$

$\{\sigma_n\}$ 是 $\{S_n\}$ 的子列

原: $S_n=u_1+\cdots+u_n$ $\lim_{n\to\infty}S_n=S$ $\Longrightarrow$ 新: $\sigma_n=v_1+\cdots+v_n$.

$\lim_{n\to\infty}\sigma_n=S$

$S_1=u_1$ $\qquad$ $S_1=\sigma_1=v_1=u_1$

$S_2=u_1+u_2$ $\qquad$ $S_3=\sigma_2=v_1+v_2=u_1+u_2+u_3$

$S_3=u_1+u_2+u_3$ $\qquad$ $\vdots$

$S_7=\sigma_4=v_1+v_2+v_3+v_4$

$=u_1+\cdots+u_7$

推论. 新级数 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散 $\xrightarrow{去括号}$ 原级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散

例: 判断 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1}\right)+\cdots$

的敛散性.

解. 加括号后级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1}\right)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n-1}$

解：构造新级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1}\right)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n-1}$

与 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}$ 同敛散

$\boxed{☆ 调和级数 \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} 发散}$ $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ 但发散

$\sum_{n=2}^{\infty}V_n$ 发散. 故由推论 $\sum_{n=2}^{\infty}U_n$ 发散.

☆5 级数收敛的必要条件. 求复杂数列的极限 → 级数的敛散性

$$\sum_{n=1}^{\infty}U_n \text{ 收敛} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty}U_n=0$$

证明. $\lim_{n\to\infty}S_n=S \quad \lim_{n\to\infty}S_{n-1}=S$

$$\lim_{n\to\infty}U_n=\lim_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=S-S=0.$$

☆ 推论: $\lim_{n\to\infty}U_n\neq 0 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}U_n$ 发散.

例. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$. 发散

解: $\lim_{n\to\infty}|U_n|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=\frac{1}{1}=1\neq 0$

$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}\neq 0 \Longrightarrow$ 发散

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=1,\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2+(-1)^n}=1$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{\ln n}{n}} = e^{\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}}$$

$$= e^0 = 1.$$

例：$0.\dot{9} = 1.$

解：$10 \times a = 9 + a. \Rightarrow a = 1$

$$0.\dot{9} = 0.9 + 0.09 + 0.009 + 0.0009 + \cdots$$

$$= \frac{0.9}{1-0.1} = 1.$$

例：证明：$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散

证明：反证法：设 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 收敛于 S.

部分和. $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \to S \ (n\to\infty).$

$$S_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \underbrace{\frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}}_{n\text{项}} \to S.\ (n\to\infty)$$

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

$$\geq \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n}}_{n\text{项}} = \frac{1}{2}.$$

$\lim_{n\to\infty}(S_{2n}-S_n)\geq\frac{1}{2}\neq 0$ 矛盾.

第二节 判别法.

{ 正项级数.
交错级数 $\xrightarrow{\text{判别法}}$ 收敛
绝对收敛 条件收敛 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ (正项)

一. 正项级数

$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=+\infty$.

定义: $\sum_{n=1}^{\infty}u_n\ (u_n\geq 0)$ 称为正项级数.

部分和数列 $\{S_n\}$ 单调递增.

定理: (有界法). $\sum_{n=1}^{\infty}u_n\ (u_n\geq 0)$ 收敛 $\Leftrightarrow$ $\{S_n\}$ 有上界.

例. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$. $\{S_n\}$ 有界, 但发散

例: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ 收敛于 $e-1$.

解:

$$S_n=\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\qquad n!\geq(n-1)n.$$

$$\leq 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{3}}+\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}+\cdots+\cancel{\frac{1}{n-1}}-\frac{1}{n}\qquad \boxed{\frac{1}{n!}\leq\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}}$$

$$=2-\frac{1}{n}<2.$$

故 $\{S_n\}$ 有上界 2.

故 $\{S_n\}$ 有上界 2.

例 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ ___收敛___

$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$ 收敛于1

"小"收敛 <= "大"收敛

$\frac{1}{n^2}\leq\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$

证明: $S_n=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$

$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}=2-\frac{1}{n}<2.$

☆定理 (比较法).

"大"收敛 => "小"收敛

"小"发散 => "大"发散

$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ △

$\exists N$, 当 $n>N$ 当 $u_n\leq v_n$ 时. $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛 $\Longrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

当 $u_n\geq v_n$ 时. $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散 $\Longrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散

$ab\leq\frac{a^2+b^2}{2}$,

☆ p-级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ $(p>0)$, 当 $p>1$ 时, 收敛

当 $p\leq 1$ 时, 发散.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛