例. $f(x)=\arcsin x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2n!!}\cdot\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{1}{2n+1}$ 收敛

$2n!=1\times2\times3\times\cdots\times2n$.

$(2n-1)!!=1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)$

$(2n)!!=2\times4\times6\times\cdots\times2n$

$(2n)!=(2n-1)!!\,(2n)!!$

$(2n)!!=2^n\cdot n!$

$$\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\cdots\times\frac{2n-1}{2n}\times\frac{2n-1}{2n}$$

$$\leq\frac{1}{2}\times\cancel{\frac{2}{3}}\times\cancel{\frac{3}{4}}\times\cancel{\frac{4}{5}}\times\frac{5}{6}\times\frac{6}{7}\times\cdots\times\cancel{\frac{2n-1}{2n}}\times\cancel{\frac{2n}{2n+1}}$$

$$=\frac{1}{2n+1}$$

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{2n+1}\leq\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\cdot\frac{1}{2n+1}$$

"小"收敛 $\Leftarrow$ "大"收敛

例: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ ________.

解: $$\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\cdots\times\frac{2n-1}{2n}\times\frac{2n-1}{2n}$$

$$>\frac{1}{2}\times\cancel{\frac{1}{2}}\times\cancel{\frac{2}{3}}\times\cancel{\frac{3}{4}}\times\cancel{\frac{4}{5}}\times\frac{5}{6}\times\cdots\times\cancel{\frac{2n-2}{2n-1}}\times\cancel{\frac{2n-1}{2n}}$$

$$=\frac{1}{4n}$$

$4n$

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \geq \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

"大"发散⇐"小"发散

例. 将 $f(x)=\frac{1}{x^2}$ 展开成 $x-2$ 的幂级数.　　$\frac{1}{1+x}$

解: $f(x)=\frac{1}{(x-2+2)} \times \frac{1}{(x-2+2)} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-2)^n$

先积后导

$$f(x)=\frac{1}{x^2}=-\left(\frac{1}{x}\right)'=-\left(\frac{1}{2+x-2}\right)'$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{1+\frac{x-2}{2}}\right)' \qquad -1<\frac{x-2}{2}<1$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(\frac{x-2}{2}\right)^n\right]'$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot n}{2^{n+1}}(x-2)^{n-1},\quad x\in(0,4).$$

例 $f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成麦克劳林级数

解: 裂项, $f(x)=\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$

$-1<x<1$

且 $-1<\frac{x}{2}<1$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[1-\frac{1}{2^{n+1}}\right]\cdot x^n.\quad x\in(-1,1).$$

求极限

求极限

$$\lim_{x\to 0}\boxed{\frac{e^x\ln(1+x)+\ln(1-x)}{x^4}} = \underline{-\frac{1}{4}}.$$

$$= -\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$$

$c_n \to 0$ ($x\to 0$)

解: $e^x\ln(1+x)+\ln(1-x)$

$$=\left(1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+(\cdots)\right)\left(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+(\cdots)\right)$$

$$+\left(-x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+(\cdots)\right).$$

$$= 0 + 0\,x + 0\,x^2 + 0\cdot x^3 + \left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{4}\right)x^4+\cdots$$

求导数

例: $f(x)=\dfrac{x-1}{4-x}$, 则 $f^{(n)}(1)=\underline{\dfrac{n!}{3^n}}$.

解: $f^{(n)}(1) = a_n\cdot n!$ (其中 a_n 是 $(x-1)^n$ 的系数).

$$f(x)=(x-1)\cdot\frac{1}{3-(x-1)}=\frac{x-1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{x-1}{3}}=\frac{\frac{x-1}{3}}{1-\frac{x-1}{3}}$$

$$=\frac{x-1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}(x-1)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^{n+1}}(x-1)^{n+1}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x-1}{3}\right)^n$$

$a_n=\dfrac{1}{3^n}$.

例. $$\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt=\underline{\int_0^x\frac{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}t^{2n+1}}{t}dt}.$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot\int_0^x t^{2n}dt.$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot \int_0^x t^{2n} dt.$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{(2n+1)} x^{2n+1}; \quad \underline{x \in (-\infty, +\infty)}.$$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots$$

$x \in (-\infty, +\infty)$.

$\downarrow$ $x \longrightarrow ix$. $(x \in R)$

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{1}{2!}x^2 - i\frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + i\frac{1}{5!}x^5 + \cdots$$

$$= (1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots) + i(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots)$$

$$\boxed{e^{ix} = \cos x + i \sin x}$$ 欧拉公式.

$$e^{i\boxed{nx}} = (e^{ix})^n = \boxed{(\cos x + i\sin x)^n = \cos \boxed{nx} + i \sin \boxed{nx}}$$

棣莫弗公式.

例. $f(x) = e^x \sin x$ 展成麦克劳林级数

解: $e^x \sin x = (\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n)(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1})$,

$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n. \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

Δ.

$$e^x \cdot e^{ix} = e^x(\cos x + i \sin x) = e^x \cos x + i\, \underline{e^x \sin x}.$$

$$e^x \cdot e^{ix} = e^x(\cos x + i\sin x) = e^x\cos x + i\,\underline{e^x\sin x}.$$

虚部

$$= e^{\boxed{(1+i)x}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}[(1+i)x]^n.$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+i)^n}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{2}^n\left[\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right]^n}{n!}x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{2}^n\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right)}{n!}x^n.$$

综上 $e^x\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{2}^n}{n!}\sin\frac{n\pi}{4}x^n$, $x\in(-\infty,+\infty)$.

$$(1+i)^n = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \left(\sqrt{2}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n$$

$$= \sqrt{2}^n\cdot e^{i\frac{n\pi}{4}}$$

$$a+ib = \sqrt{a^2+b^2}\,(\cos\theta+i\sin\theta).$$

求幂级数的和函数.

①、先导后积 ②先积后导.

*③. 构造和函数 $S(x)$ 的微分方程

④ 利用幂级数的展开式. $\frac{1}{(2n+1)!}\sim\sin x$. $\frac{1}{(2n)!}\sim\cos x$.

$\frac{1}{n!}\sim e^x$ 有关

例 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{2n} = \underline{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(x^2)^n = e^{x^2}}$, $x\in(-\infty,+\infty)$.

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{2n+1} = x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(x^2)^n = xe^{x^2}$, $x\in(-\infty,+\infty)$.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{2n+1}=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(x^2)^n=xe^{x^2},\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(x^{2n+1})'$$

$$=\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{2n+1}\right]'=(xe^{x^2})'=e^{x^2}+xe^{x^2}\cdot 2x,$$

$x\in(-\infty,+\infty)$

例。 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cos nx=\underline{e^{\cos x}\cdot\cos(\sin x),\ x\in(-\infty,+\infty)}$

解: $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n.$

$$\underbrace{\cos nx}_{\text{实部}}+i\sin nx=(\cos x+i\sin x)^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\cos x+i\sin x)^n=e^{\cos x+i\sin x}$$

$$=e^{\cos x}\cdot e^{i\sin x}=e^{\cos x}[\cos(\sin x)+i\sin(\sin x)]$$

第五节 傅里叶级数

一、三角级数

定义:三角函数系.

$$1,\ \cos\frac{\pi x}{l},\ \sin\frac{\pi x}{l},\ \cos\frac{2\pi x}{l},\ \sin\frac{2\pi x}{l},\ \cdots,$$

$$\cos\frac{n\pi x}{l},\ \sin\frac{n\pi x}{l},\ \cdots,\ (n=1,2,\cdots)$$

$\cos\frac{n\pi x}{l}, \sin\frac{n\pi x}{l}, \cdots\cdots, (n=1,2,\cdots)$

称为三角函数系. 公共周期 $T=2l$.

$$\int_{-l}^{l} 1\cdot\cos\frac{n\pi x}{l}dx = 0. \quad (n=1,2,\cdots)$$

$$\int_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\cdot\sin\frac{m\pi x}{l}dx=0$$ (积化和差)

$$\boxed{\int_{-l}^{l} a(x)\cdot b(x)\,dx=0. \quad (a(x)\neq b(x))}$$

内积 $(\vec{\alpha},\vec{\beta})=0 \Leftrightarrow \vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$, $\vec{\alpha}$与$\vec{\beta}$正交.

$(\vec{\alpha},\vec{\beta})=(\vec{\beta},\vec{\alpha})$

$(\vec{\alpha},\vec{\beta}+\vec{\gamma})=(\vec{\alpha},\vec{\beta})+(\vec{\alpha},\vec{\gamma})$

$(k\vec{\alpha},\vec{\beta})=(\vec{\alpha},k\vec{\beta})=k(\vec{\alpha},\vec{\beta})$

$(\vec{\alpha},\vec{\alpha})\geq 0$

$$\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx \triangleq (f(x),g(x))$$

$$\boxed{\int_{-l}^{l}1\cdot 1\,dx=2l. \quad \int_{-l}^{l}\cos^2\frac{n\pi}{l}dx=\int_{-l}^{l}\sin^2\frac{n\pi}{l}dx=l}$$

定义: 三角级数 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l})$

二. 函数展开成傅里叶级数 $\quad f(x)=f(x+2l)$

二. 函数展开成傅里叶级数

$f(x)=f(x+2l)$

考虑 $f(x) = \frac{a_0}{2} \cdot 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right)$

$f(x)$ 在三角函数系下的坐标.

例: $\vec{\alpha}=(1,-1)$, $\vec{\beta}=(1,1)$ 是 R^2 的一组正交基

求 $\vec{\gamma}=(2,3)$ 在这组基下的坐标.

解: $\vec{\gamma} = x_1\vec{\alpha} + x_2\vec{\beta}$.

$\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha} = x_1\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha} + x_2\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}$.

$x_1 = \frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}}{\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha}} = \frac{-1}{2}$

$\vec{\gamma}\cdot\vec{\beta} = x_1 0 + x_2\vec{\beta}\cdot\vec{\beta}$

$x_2 = \cdots$

$\int_{-l}^{l}\sum \cdots 1\,dx$

$\int_{-l}^{l} f(x)\cdot 1\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-l}^{l} 1\cdot 1\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cdot 0 + b_n\cdot 0) \overset{?}{=} \sum\int \cdots dx$

得 $a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx$.

$\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = 0 + a_n\int_{-l}^{l}\cos^2\frac{n\pi x}{l}\,dx + b_n\cdot 0$.

傅里叶系数

得
$$\boxed{\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx. \quad (n=0,1,2,\cdots) \\ b_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx. \quad (n=1,2,\cdots) \end{aligned}}$$

分部积分

傅里叶级数

傅里叶级数

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right).$$

其中 a_n、b_n 是傅里叶系数

定理（收敛定理）. $f(x) = f(x+2l)$.

在一个周期内满足以下条件.

① 连续或有限个第一类间断点（可去、跳跃）

② 有限个极值点

则 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $(-\infty, +\infty)$ 收敛,

和函数 $S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(\cdots\cdots)$, $x \in (-\infty, +\infty)$.

$S(x) = S(x+2l)$

且

$$\boxed{S(x) = \begin{cases} f(x), & x \text{ 连续点} \\ \dfrac{f(x^-)+f(x^+)}{2}, & x \text{ 间断点} \end{cases}}$$

☆ $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(\cdots\cdots)$, $x \in R$ 且 $x \neq$ 间断点.

例. $f(x) = f(x+2\pi)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上.

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x \leq 0 \\ 1+x^2, & 0 < x \leq \pi. \end{cases}$$

$S(\pi)$ $S(4\pi) = S(0)$.

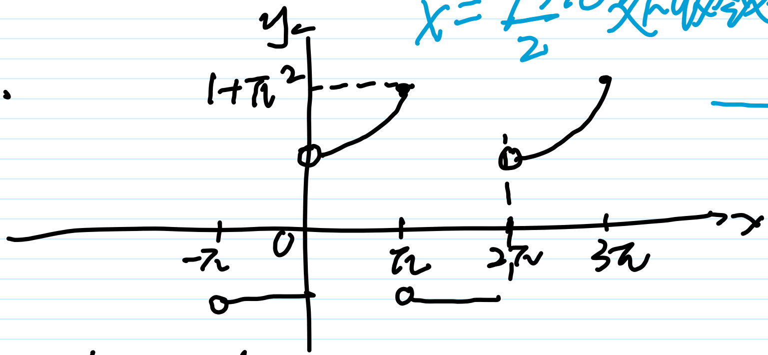
则 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $x=\pi$, $x=4\pi$ 分别收敛于 $\frac{\pi^2}{2}$, $\frac{0}{2}$.

则 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $x=\pi$，$x=4\pi$ 分别收敛于 $\frac{\pi^2}{2}$，0。

$x=\frac{93}{2}\pi$ 处收敛于 ____。

解：判断间断点。

① 画 $f(x)$ 的图像



② 判断间断点 $x=k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$。

③：

$$S(\pi)=\frac{f(\pi^-)+f(\pi^+)}{2}=\frac{1+\pi^2+(-1)}{2}=\frac{\pi^2}{2}.$$

$$S(4\pi)=S(0)=\frac{f(0^-)+f(0^+)}{2}=\frac{-1+1}{2}=0.$$

$$S\left(\frac{93}{2}\pi\right)=S\left(46\pi+\frac{\pi}{2}\right)=S\left(\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1+\frac{\pi^2}{4}.$$

$$S\left(\frac{91\pi}{2}\right)=S\left(45\pi+\frac{\pi}{2}\right)=S\left(\frac{3}{2}\pi\right)=S\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1.$$