第一节 假设检验

一、假设检验的基本原理

二、假设检验的相关概念

三、假设检验的一般步骤

四、小结

引例： 某厂生产的钢管需要出售，买家的要求是钢管的直径均值需为100mm，标准差为0.5mm。现从一批钢管中随机抽取了10根，测得直径（单位：mm）为98.5 99.6 99.8 100 100.2 100.3 100.4 100.5 101 101.2（平均值为100.15mm）

问题：该厂生产的钢管能否顺利出售?

关注点：

如何根据抽样的结果判断钢管的平均直径是否为

$\mu=100$

一、假设检验的基本任务

通过从有关总体中抽取一定数量的样本，利用样本对未知总体分布的某些方面（如总体均值、总体方差、总体分布本身等等）的假设做出合理的判断。

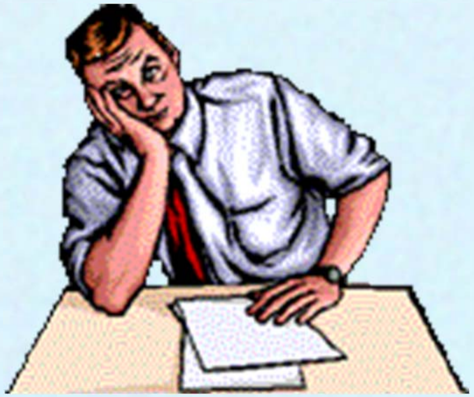
假设检验就是根据样本对所提出的假设作出判断：

是接受，还是拒绝.

假设检验问题是作出这一决策的过程.

如何利用样本值对一个具体的假设进行检验?

通常借助于直观分析和理论分析相结合的做法，其基本原理就是人们在实际问题中经常采用的所谓实际推断原理："一个小概率事件在一次试验中几乎是不可能发生的".



下面结合实例来说明假设检验的基本思想.

例1　某车间用一台包装机包装葡萄糖, 袋装糖的净重是一个随机变量, 它服从正态分布. 当机器正常时, 其均值为0.5kg, 标准差为0.015kg. 某日开工后为检验包装机是否正常, 随机地抽取它所包装的糖9袋, 称得净重为(kg):

0.497　0.506　0.518　0.524　0.498　0.511

0.520　0.515　0.512,

问机器是否正常?

分析 以 μ 和 σ 分别表示这一天袋装糖 的净重总体X 的均值和标准差,

由长期实践表明标准差比较稳定, 我们就设 $\sigma = 0.015$,于是 $X \sim N(\mu,\ 0.015^2)$, 这里μ 未知.

问题 根据样本值判断 $\mu = 0.5$ 还是 $\mu \neq 0.5$.

为此，我们提出两个相互对立的假设

$$H_0 : \mu = \mu_0 = 0.5$$

$$H_1 : \mu \neq \mu_0 .$$

由于要检验的假设涉及 总体均值μ，可借助样本均值$\overline{X}$进行判断.

$|\overline{X}-\mu_0|$ 较大时，倾向于否定H_0

$|\overline{X}-\mu_0|$ 较小时，认为抽样结果与H_0接近，倾向于接受H_0

因此，需要确定一个常数k，利用抽样值算出 $\overline{x}$，当 $|\overline{x}-\mu_0|<k$ 就接受H_0，否则就拒绝H_0.

那么，k应该取何值呢？这就涉及到两类错误。

由于统计推断是以样本为推断依据的，但是样本具有随机性，不能保证统计推断的绝对正确性，而只能以一定的概率去保证这种推断的可靠性！

当H_0为真时拒绝假设H_0,这是第一类错误, **弃真错误**
当H_0为假时接受假设H_0,这是第二类错误, **取伪错误**

当样本容量确定后，犯两类错误的概率不可能同时减小。

假设检验的指导思想是控制犯第一类错误的概率不超过α（即保护假设H_0，严格控制在其为真时拒绝它的错误发生），在此基础上尽可能减小犯第二类错误的概率。

即 $$P\{H_0\text{为真时拒绝}H_0\}\le\alpha$$

$P\{H_0$为真时拒绝$H_0\}$又可表示为：

$$P_{\mu_0}\{\text{拒绝}H_0\}\text{或}P_{\mu\in H_0}\{\text{拒绝}H_0\}$$

由此得到确定常数k的方法：

当H_0为真时，选取一个接近于0的正数α，使

$$P\{H_0\text{为真时拒绝}H_0\} = P_{\mu_0}\left\{|\bar{X}-\mu_0| \geq k\right\} = \alpha \qquad (1)$$

H_0为真，$\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1).$

衡量$|\bar{X}-\mu_0|$的大小可以等价为衡量$\dfrac{|\bar{X}-\mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}}$的大小。

因此，上述等式等价为

还记为k

$$P\{H_0\text{为真时拒绝}H_0\} = P_{\mu_0}\left\{\frac{|\bar{X}-\mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}} \geq \boxed{\frac{k}{\sigma/\sqrt{n}}}\right\} = \alpha \qquad (1)'$$

即 $P_{\mu_0}\left\{\dfrac{|\bar{X}-\mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}} \geq k\right\}=\alpha \qquad (1)'$

由标准正态分布分位点的定义得：

$$k = z_{\alpha/2}\ ,$$

当 $\dfrac{\left|\bar{x}-\mu_0\right|}{\sigma/\sqrt{n}} \geq z_{\alpha/2}$ 时, 拒绝 H_0,

$\dfrac{\left|\bar{x}-\mu_0\right|}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{\alpha/2}$ 时,接受 H_0.

例1的假设检验过程如下:

在实例中若取定 $\alpha = 0.05$,

则 $k = z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96$,

又已知 $n = 9$, $\sigma = 0.015$,

由样本算得 $\bar{x} = 0.511$, 即有 $\dfrac{|\bar{x} - \mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}} = 2.2 > 1.96$,

于是拒绝假设H_0,认为包装机工作不正常.

以上所采取的检验法是符合实际推断原理的.

因通常α总是取得很小, 一般取 $\alpha = 0.01, 0.05$.

因而当H_0为真, 即$\mu = \mu_0$时, $\left\{ \left| \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \right| \geq z_{\alpha/2} \right\}$

是一个小概率事件,根据实际推断原理, 就可以认

为如果 H_0为真, 由一次试验得到满足不 等式

$\left| \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \right| \geq z_{\alpha/2}$的观察值 $\bar{x}$, 几乎是不会发生的.

在一次观测中竟出现了满足 $\left|\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \geq z_{\alpha/2}$ 的 $\overline{x}$，

我们有理由怀疑原来的假设 H_0 的正确性，因而拒绝 H_0. 若出现观测值 $\overline{x}$ 满足不等式 $\left|\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| < z_{\alpha/2}$，

则没有理由拒绝假设 H_0，因而只能接受 H_0.

二、假设检验的相关概念

1. 显著性水平

如果 $|z|=\left|\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|\geq k$, 则称 $\bar{x}$ 与 μ_0 的差异是显著的, 则我们拒绝 H_0; 反之, 如果 $|z|=\left|\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|<k$, 则称 $\bar{x}$ 与 μ_0 的差异是不显著的, 则我们接受 H_0.

数 α 称为显著性水平.

上述关于 $\bar{x}$ 与 μ_0 有无显著差异的判断是在显著性水平 α 下做出的.

2. 检验统计量

统计量 $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ 称为检验统计量.

3. 原假设与备择假设

前面的检验问题通常叙述成: 在显著性水平 α 下，检验假设

$$H_0: \mu = \mu_0, \quad H_1: \mu \neq \mu_0.$$

也常说成"在显著性水平 α 下, 针对 H_1 检验 H_0".

H_0 称为原假设或零假设, H_1 称为备择假设.

在控制犯第一类错误的概率α的原则下，使得采取拒绝H_0的决策变得较慎重，即得到特别的保护，不轻易被否定。

因而，通常把有把握的、有经验的、不轻易否定的命题作为原假设，或者尽可能使后果严重的错误成为第一类错误，把没把握的、不能轻易肯定的命题作为备择假设。**原假设与备择假设地位不平等。**

4. 拒绝域与临界点

当检验统计量取某个区域C中的值时，我们拒绝原假设H_0，则称区域C为拒绝域，拒绝域的边界点称为临界点.

如在上例中,

拒绝域为 $|z| \geq z_{\alpha/2}$,

临界点为 $z = z_{\alpha/2}$, $z = -z_{\alpha/2}$.

5. 两类错误及记号

假设检验的依据是：小概率事件在一次试验中很难发生，但很难发生不等于不发生，因而假设检验所作出的结论有可能是错误的． 这种错误有两类:

(1) 当原假设H_0为真，观察值却落入拒绝域，而作出了拒绝H_0的判断，称做**第一类错误**，又叫**弃真错误**，这类错误是“以真为假”．

$$P\{\text{当}H_0\text{为真拒绝}H_0\}\ \text{或}\ P_{\mu\in H_0}\{\text{拒绝}H_0\}\ \text{或}P_{\mu_0}\{\text{拒绝}H_0\}.$$

犯第一类错误的概率是显著性水平α.

(2) 当原假设 H_0 不真，而观察值却落入接受域，而作出了接受 H_0 的判断，称做**第二类错误**，又叫**取伪错误**，这类错误是“以假为真”.

犯第II类错误的概率记为

$$P\{\text{当}H_0\text{不真接受}H_0\}\text{ 或}P_{\mu\in H_1}\{\text{接受}H_0\}.$$

一般来说，当样本容量 n 一定时，若减少犯第一类错误的概率，则犯第二类错误的概率往往增大.

若要使犯两类错误的概率都减小，除非增加样本容量.

6. 显著性检验

只对犯第一类错误的概率加以控制，而不考虑犯第二类错误的概率的检验，称为显著性检验.

7. 双边备择假设与双边假设检验

在 $H_0: \mu = \mu_0$ 和 $H_1: \mu \neq \mu_0$ 中, 备择假设 H_1 表示 μ 可能大于 μ_0, 也可能小于 μ_0, 称为双边备择假设, 形如 $H_0: \mu = \mu_0, H_1: \mu \neq \mu_0$ 的假设检验称为双边假设检验.

8. 右边检验与左边检验

形如 $H_0: \mu \le \mu_0, H_1: \mu > \mu_0$ 的假设检验称为右边检验.

形如 $H_0: \mu \ge \mu_0, H_1: \mu < \mu_0$ 的假设检验称为左边检验.

右边检验与左边检验统称为单边检验.

9. 单边检验的拒绝域

设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ为已知, $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的样本, 给定显著性水平 α.

则: 右边检验的拒绝域为 $z = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \ge z_\alpha$,

左边检验的拒绝域为 $z = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \le -z_\alpha$.

证明 **(1)右边检验** $H_0: \mu \le \mu_0$, $H_1: \mu > \mu_0$

因 H_0 中的全部 μ 都比 H_1 中的 μ 要小，当 H_0 为真时， 观察值 $\bar{x}$ 往往偏小，

因此拒绝域的形式为 $\bar{x} \ge k$,

由 $P\{H_0 \text{为真拒绝} H_0\} = P_{\mu \in H_0}\{\bar{X} \ge k\}$

$$= P_{\mu \le \mu_0}\left\{\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \ge \frac{k - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}\right\}$$

$$\le P_{\mu \le \mu_0}\left\{\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \ge \frac{k - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}\right\}$$

不等号成立的原因见下页！

上式不等号成立的原因:

因为 $\mu \le \mu_0$，所以 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \ge \dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$,

事件 $\left\{\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \ge \dfrac{k-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right\} \subset \left\{\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \ge \dfrac{k-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right\}.$

要控制 $P\{H_0$ 为真拒绝 $H_0\} \le \alpha$, 只需令

$$P_{\mu \le \mu_0}\left\{\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \ge \frac{k-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right\} = \alpha.$$

由于 $$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1),$$

所以 $$\frac{k-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = z_\alpha, \qquad k = \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_\alpha,$$

故右边检验的拒绝域为

$$\overline{x} \geq \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_\alpha,$$

即 $$z = \frac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \geq z_\alpha.$$

类似证，

左边检验的拒绝域为 $$z = \frac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \leq -z_\alpha.$$

三、假设检验的一般步骤

1. 根据实际问题的要求,提出原假设 H_0 及备择假设 H_1;

2. 给定显著性水平 α 以及样本容量 n;

3. **确定检验统计量以及拒绝域形式**;

4. 按 $P\{H_0$ 为真拒绝 $H_0\} \le \alpha$ 求出拒绝域;

5. 取样,根据样本观测值确定接受还是拒绝 H_0.

例2 公司从生产商购买牛奶. 公司怀疑生产商在牛奶中掺水以谋利. 通过测定牛奶的冰点,可以检验出牛奶是否掺水.天然牛奶的冰点温度近似服从正态分布, 均值$\mu_0 = -0.545°C$,标准差$\sigma = 0.008°C$.

牛奶掺水可使冰点温度升高而接近于水的冰点温度$(0°C)$. 测得生产商提交的5批牛奶的冰点温度,其均值$\bar{x} = -0.535°C$, 问是否可以认为生产商在牛奶中掺了水?取$\alpha = 0.05$.

解　按题意需检验假设

$H_0: \quad \mu \le \mu_0 = -0.545$　(即设牛奶未掺水)

$H_1: \quad \mu > \mu_0$　(即设牛奶已掺水)

这是右边检验问题，其拒绝域为

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \ge z_{0.05} = 1.645.$$

现在 $z = \dfrac{-0.535 - (-0.545)}{0.008 / \sqrt{5}} = 2.7951 > 1.645,$

z的值落在拒绝域中，所以我们在显著性水平

$\alpha = 0.05$下拒绝H_0，即认为牛奶商在牛奶中掺了水.

四、小结

假设检验的基本原理、相关概念和一般步骤.

假设检验的两类错误

真实情况 (未知)	所 作 决 策	
	接受 H_0	拒绝 H_0
H_0 为真	正确	犯第I类错误(弃真)
H_0 不真	犯第II类错误(取伪)	正确