第五节　两个随机变量的函数的分布

一、问题的引入

二、离散型随机变量函数的分布

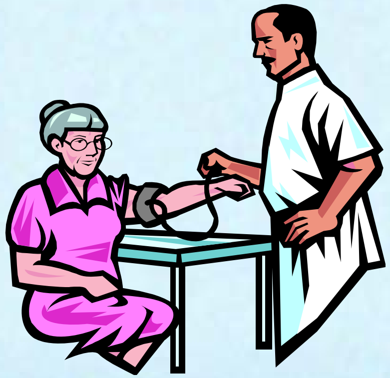
三、连续型随机变量函数的分布

四、小结

一、问题的引入

有一大群人，令 X 和 Y 分别表示一个人的年龄和体重，Z 表示该人的血压，并且已知 Z 与 X,Y 的函数关系 $Z=g(X,Y)$，如何通过 X,Y 的分布确定 Z 的分布.

为了解决类似的问题下面我们讨论随机变量函数的分布.



二、离散型随机变量函数的分布

例1 设(X,Y)的分布律为

$X \backslash Y$	-1	1	2
-1	$\frac{5}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{6}{20}$
2	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$

分别求$Z_1=X-Y$, $Z_2=\max(X, Y)$的分布律。

解 由(X,Y)的分布律可得

P	$\frac{5}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$
(X,Y)	$(-1,-1)$	$(-1,1)$	$(-1,2)$	$(2,-1)$	$(2,1)$	$(2,2)$
$X-Y$	0	-2	-3	3	1	0
$\max(X,Y)$	-1	1	2	2	2	2

于是

Z_1	-3	-2	0	1	3
P	$\frac{6}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{20}$

Z_2	-1	1	2
P	$\frac{5}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{13}{20}$

三、连续型随机变量函数的分布

设(X,Y)是二维连续型随机变量，**它具有概率密度**$f(x,y)$. **又**$Z=g(X,Y)$**（其中**$g(x,y)$**是一连续函数）。大部分情况下**Z**是一连续型随机变量，下面我们讨论如何求出**Z**的概率密度。**

例2 设$X \sim N(0,\sigma^2), Y \sim N(0,\sigma^2)$且$X$与$Y$相互独立，求$Z=\sqrt{X^2+Y^2}$的概率密度.

解：由题意知

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}$$

由X与Y相互独立，得

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$

下求Z的分布函数$F_Z(z)$.

$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{\sqrt{X^2+Y^2}\le z\}$$

当$z<0$时， $F_Z(z)=0.$

当$z\ge 0$时，

$$F_Z(z)=P\{\sqrt{X^2+Y^2}\le z\}=P\{X^2+Y^2\le z^2\}$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\le z^2} f(x,y)dxdy$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\le z^2}\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}dxdy$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^z re^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}dr$$

$$=1-e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}$$

故Z的概率密度为

$$f_Z(z)=\begin{cases}\frac{z}{\sigma^2}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} & z\geq 0\\ 0 & z<0\end{cases}$$

Z服从参数为σ的瑞利(Rayleigh)分布.该分布在通信中具有重要的作用.

三、连续型随机变量函数的分布

(一) $Z = X + Y$ 的分布

设(X,Y)是二维连续型随机变量，**它具有概率密度**$f(x,y)$.则$Z = X + Y$仍为连续型随机变量，**其概率密度为**

$$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z-y, y)\,\mathrm{d}y, \tag{5.1}$$

或

$$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z-x)\,\mathrm{d}x. \tag{5.2}$$

又若X和Y相互独立，设(X,Y)关于X,Y的边缘

密度分别为$f_X(x), f_Y(y)$,则(5.1),(5.2)分别化为

$$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y) f_Y(y)\,\mathrm{d}y, \qquad (5.3)$$

和
$$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\,\mathrm{d}x. \qquad (5.4)$$

这两个公式称为f_X和f_Y的卷积公式,记为$f_X * f_Y$,

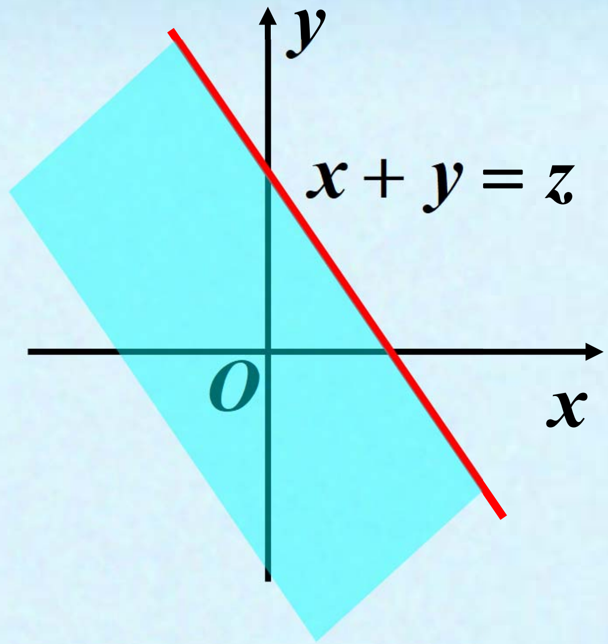
即
$$f_X * f_Y = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y) f_Y(y)\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\,\mathrm{d}x.$$

证 先来求$Z = X + Y$的分布函数$F_Z(z)$,**即有**

$$F_Z(z) = P\{Z \le z\}$$

$$= \iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$



这里积分区域$G: x+y \le z$是直线$x+y=z$及其左下方的

半平面(如图3-9).

将二重积分化成累次积分，得

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{z-y} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y.$$

固定z和y对积分$\int_{-\infty}^{z-y} f(x,y)\,\mathrm{d}x$作变量变换，令$x = u - y$，得

$$\int_{-\infty}^{z-y} f(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{z} f(u-y,y)\,\mathrm{d}u$$

于是

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{z} f(u-y,y)\,\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}y$$

$$= \int_{-\infty}^{z}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(u-y,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}u.$$

由概率密度的定义即得 (5.1)式. 类似可证得(5.2)式.

例1 设X和Y是两个相互独立的随机变量.**他们都服从$N(0,1)$分布，其概率密度为**

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}},\quad -\infty<x<+\infty,$$

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}},\quad -\infty<y<+\infty,$$

求$Z=X+Y$的概率密度.

解 **由(5.4)式** $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f_X(x)f_Y(z-x)\,\mathrm{d}x,$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{(z-x)^2}{2}} \,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\left(x-\frac{z}{2}\right)^2} \,\mathrm{d}x,$$

令$t = x - \dfrac{z}{2}$, 得

$$f_Z(z) = \frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{4}}\sqrt{\pi} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{4}}.$$

即Z服从$N(0,2)$分布.

说明

一般, 设X,Y相互独立且$X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$. 由(4.5)式经过计算知 $Z = X + Y$ 仍然服**从正态分布**, 且有$Z \sim N(\mu_1+\mu_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$.

有限个相互独立的正态随机变量的线性组合仍然服从正态分布.

例2 在一简单电路中,两电阻 R_1 和 R_2 串联联接,设 R_1, R_2 相互独立,**它们的概率密度均为**

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{10-x}{50}, & 0\le x\le 10,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求电阻 $R=R_1+R_2$ 的概率密度.

解 由(5.4)式, R 的概率密度为

$$f_R(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)f(z-x)\,\mathrm{d}x.$$

易知仅当

$$\begin{cases} 0 < x < 10, \\ 0 < z - x < 10, \end{cases} \quad 即 \begin{cases} 0 < x < 10, \\ z - 10 < x < z, \end{cases}$$

时上述积分的被积函数不等于零. 得

$$f_R(z) = \begin{cases} \int_0^z f(x) f(z-x) \mathrm{d}x, & 0 \le z < 10, \\ \int_{z-10}^{10} f(x) f(z-x) \mathrm{d}x, & 10 \le z \le 20, \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

将$f(x)$的表达式代入上式得

$$f_R(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{15000}(600z-60z^2+z^3), & 0\le z<10,\\ \dfrac{1}{15000}(20-z)^3, & 10\le z<20,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

例3 设随机变量 X, Y 相互独立, **且分别服从参数**为 $\alpha, \theta; \beta, \theta$ 的 Γ 分布 (分布分别记成 $X \sim \Gamma(\alpha, \theta)$, $Y \sim \Gamma(\beta, \theta)$), X, Y 的概率密度分别为

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-x/\theta}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \qquad \alpha > 0, \theta > 0,$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta^{\beta}\Gamma(\beta)}y^{\beta-1}\mathrm{e}^{-y/\theta}, & y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}\quad \beta>0,\theta>0.$$

试证明 $Z=X+Y$ 服从参数为 $\alpha+\beta,\theta$ 的 Γ 分布,

即 $X+Y\sim\Gamma(\alpha+\beta,\theta)$.

证 由(5.4)式 $Z=X+Y$ 的概率密度为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f_X(x)f_Y(z-x)\,\mathrm{d}\,x$$

易知仅当

$$\begin{cases} x > 0, \\ z - x > 0, \end{cases} \quad \text{亦即} \quad \begin{cases} x > 0, \\ x < z, \end{cases}$$

时上述积分的被积函数不等于零,于是(参见图3-11)

知当$z < 0$时$f_Z(z) = 0$,而当$z > 0$时有

$$f_Z(z)$$

$$= \int_0^z \frac{1}{\theta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-x/\theta} \frac{1}{\theta^\beta \Gamma(\beta)} (z-x)^{\beta-1} \mathrm{e}^{-(z-x)/\theta} \, \mathrm{d}x$$

$$= \frac{\mathrm{e}^{-z/\theta}}{\theta^{\alpha+\beta}\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^z x^{\alpha-1}(z-x)^{\beta-1} \, \mathrm{d}x \quad (\text{令 } x = zt)$$

$$= \frac{z^{\alpha+\beta-1}\mathrm{e}^{-z/\theta}}{\theta^{\alpha+\beta}\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,\mathrm{d}t$$

$$\overset{\text{记成}}{=} Az^{\alpha+\beta-1}\mathrm{e}^{-z/\theta},$$

其中 $A = \dfrac{1}{\theta^{\alpha+\beta}\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\displaystyle\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,\mathrm{d}t$

现在来计算A. **由概率密度的性质得到:**

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_Z(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^{\infty} Az^{\alpha+\beta-1}e^{-z/\theta}\,\mathrm{d}z$$

$$= A\theta^{\alpha+\beta}\int_0^{\infty}(z/\theta)^{\alpha+\beta-1}e^{-z/\theta}\,\mathrm{d}(z/\theta)$$

$$= A\theta^{\alpha+\beta}\Gamma(\alpha+\beta),$$

即有 $$A = \frac{1}{\theta^{\alpha+\beta}\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

于是 $$f_Z(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta^{\alpha+\beta}\Gamma(\alpha+\beta)} z^{\alpha+\beta-1}\mathrm{e}^{-z/\theta}, & z > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

即 $$X + Y \sim \Gamma(\alpha+\beta,\theta).$$

上述结论还能推广到 n 个相互独立的 Γ分布变量之和的情况.即若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立,且 X_i 服从参数为 $\alpha_i, \beta(i=1,2,\cdots,n)$ 的Γ 分布,则$\sum_{i=1}^{n} X_i$ 服从参数为 $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i, \beta$ 的Γ 分布. 这一性质称为 Γ分布的可加性.

(二) $Z=\dfrac{Y}{X}$的分布、$Z=XY$的分布

设(X,Y)是二维连续型随机变量，**它具有概率**密度 $f(x,y)$. 则$Z=\dfrac{Y}{X}$,$Z=XY$仍为连续型随机变**量,其概率密度分别为**

$$f_{Y/X}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}|x|f(x,xz)\,\mathrm{d}x,$$

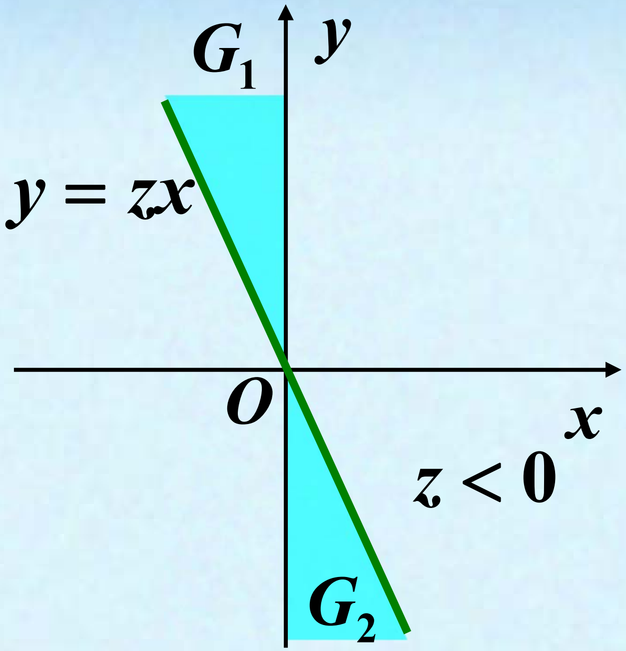
$$f_{XY}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|x|}f(x,\frac{z}{x})\,\mathrm{d}x.$$

如果X和Y相互独立. 设(X,Y)关于X,Y的边缘密度分别为$f_X(x), f_Y(y)$, 则

$$f_{Y/X}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}|x|f_X(x)f_Y(xz)\,\mathrm{d}\,x.$$

$$f_{XY}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|x|}f_X(x)f_Y\left(\frac{z}{x}\right)\mathrm{d}\,x.$$

证 $Z=\dfrac{Y}{X}$的分布函数为 $F_{Y/X}(z)$



$$F_{Y/X}(z) = P\{Y/X \le z\} = \iint_{G_1 \cup G_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{y/x \le z,\, x<0} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x + \iint_{y/x \le z,\, x>0} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-\infty}^{0}\int_{zx}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{zx} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

$$\overset{\text{令}y=xu}{=}\int_{-\infty}^{0}\int_{z}^{-\infty} xf(x,xu)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{z} xf(x,xu)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{z}(-x)f(x,xu)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{z} xf(x,xu)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{z}|x|f(x,xu)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\infty}^{z}\int_{-\infty}^{\infty}|x|f(x,xu)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}u$$

所以 $f_{Y/X}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}|x|f(x,xz)\,\mathrm{d}x,$

类似可得 $f_{XY}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|x|}f(x,\frac{z}{x})\,\mathrm{d}x.$

例4 某公司提供一种地震保险，保险费Y的概率密度为

$$f(y)=\begin{cases}\dfrac{y}{25}\mathrm{e}^{-y/5}, & y>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

保险赔付X的概率密度为

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{5}\mathrm{e}^{-x/5}, & x>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

设 X,Y 相互独立，求 $Z=Y/X$ 的概率密度.

解 当$z<0$时，$f_Z(z)=0.$

当$z\geq 0$时，Z的概率密度为

$$f_Z(z)=\int_0^{\infty} x\cdot\frac{1}{5}e^{-x/5}\cdot\frac{xz}{25}e^{-xz/5}dx$$

$$=\frac{z}{125}\int_0^{\infty} x^2 e^{-x\left(\frac{1+z}{5}\right)}dx$$

$$=\frac{z}{125}\frac{\Gamma(3)}{[(1+z)/5]^3}=\frac{2z}{(1+z)^3}.$$

(三) $M=\max\{X,Y\}$及$N=\min\{X,Y\}$的分布

设 X,Y 是两个相互独立的随机变量, **它们的**分布函数分别为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$.现在来求 $M=\max\{X,Y\}$及$N=\min\{X,Y\}$的分布函数.

由于$M=\max\{X,Y\}$不大于z等价于X和Y都不大于z, **故有**

$$P\{M\le z\}=P\{X\le z, Y\le z\}$$

又由于 X,Y 相互独立, 得到$M=\max\{X,Y\}$的**分布函数为**

$$F_{\max}(z) = P\{M \le z\} = P\{X \le z, Y \le z\}$$

$$= P\{X \le z\} P\{Y \le z\}.$$

即有 $F_{\max}(z) = F_X(z) F_Y(z).$

类似地, 可得 $M = \min\{X, Y\}$的分布函数为

$$F_{\min}(z) = P\{N \le z\} = 1 - P\{N > z\}$$

$$= 1 - P\{X > z, Y > z\}$$

$$= 1 - P\{X > z\} \cdot P\{Y > z\}.$$

即 $F_{\min}(z) = 1 - [1 - F_X(z)][1 - F_Y(z)].$

推广 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是 n 个相互独立的随机变量，它们的分布函数分别为 $F_{X_i}(x_i)\ (i=1,2,\cdots,n)$,则 $M=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$及$N=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$的分布函数分别为

$$F_{\max}(z)=F_{X_1}(z)\cdot F_{X_2}(z)\cdots F_{X_n}(z),$$

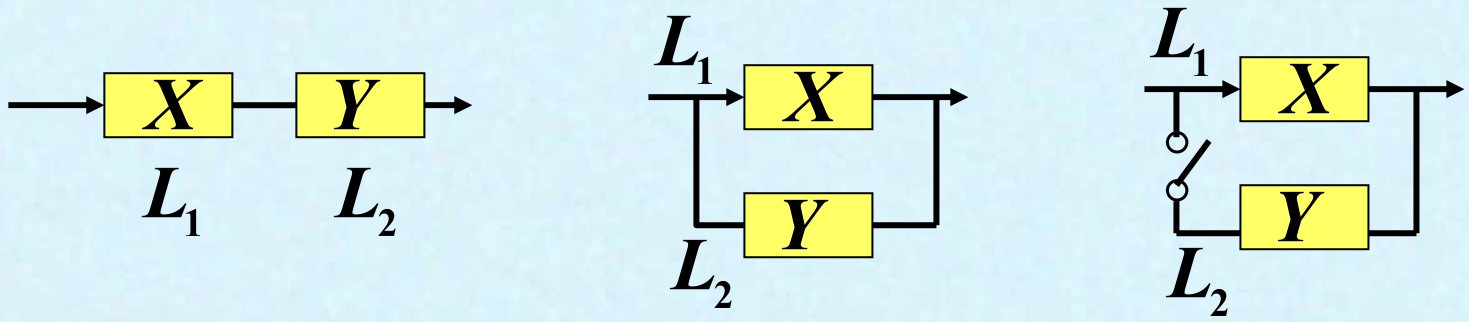
$$F_{\min}(z)=1-[1-F_{X_1}(z)][1-F_{X_2}(z)]\cdots[1-F_{X_n}(z)]$$

当 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立且具有相同的分布函数 $F(x)$ 时有

$$F_{\max}(z) = [F(z)]^n,$$

$$F_{\min}(z) = 1 - [1 - F(z)]^n.$$

例5 设系统 L 由两个相互独立的子系统 L_1, L_2 联接而成,联接的方式分别为 (i)串联,(ii) 并联,(iii) 备用(当系统 L_1 损坏时,系统 L_2 开始工作),如图3-13所示. 设 L_1, L_2 的寿命分别为 X, Y, 已知它们的



概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\beta e^{-\beta y}, & y>0,\\ 0, & y\le 0,\end{cases}$$

其中$\alpha>0,\beta>0$且$\alpha\neq\beta$. 试分别就以上三种联接方式写出 L 的寿命 Z 的概率密度.

解 (i)串联的情况

由于当L_1,L_2中有一个损坏时，系统 L 就停止工作，所以这时 L 的寿命为

$$Z = \min\{X, Y\}.$$

X,Y的分布函数分布为

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\alpha x}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0, \end{cases}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 1 - \beta \mathrm{e}^{-\beta y}, & y > 0, \\ 0, & y \le 0, \end{cases}$$

$Z = \min\{X, Y\}$的分布函数为

$$F_{\min}(z) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)z}, & z > 0, \\ 0, & z \le 0. \end{cases}$$

$Z=\min\{X,Y\}$的概率密度为

$$f_{\min}(z)=\begin{cases}(\alpha+\beta)\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)z}, & z>0,\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$$

(ii)并联的情况

由于当且仅当 L_1, L_2 都损坏时,系统 L 才停止工作,所以这时 L 的寿命为 $Z=\max\{X,Y\}$.

$$F_{\max}(z)=F_X(z)\cdot F_Y(z)=\begin{cases}(1-\mathrm{e}^{-\alpha z})(1-\mathrm{e}^{-\beta z}), & z>0,\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$$

$Z=\max\{X,Y\}$的概率密度为

$$f_{\max}(z)=\begin{cases}\alpha\mathrm{e}^{-\alpha z}+\beta\mathrm{e}^{-\beta z}-(\alpha+\beta)\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)z}, & z>0,\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$$

(iii)备用的情况

由于这时当系统 L_1 损坏时,系统 L_2 才开始工作,因此整个系统 L 的寿命 Z 是 L_1,L_2 两者之和:

$$Z=X+Y$$

当 $z>0$ 时 $Z=X+Y$ 的概率密度为

$$f(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y)f_Y(y)\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^z \alpha \mathrm{e}^{-\alpha(z-y)}\beta \mathrm{e}^{-\beta y}\,\mathrm{d}y$$

$$=\alpha\beta \mathrm{e}^{-\alpha z}\int_0^z \mathrm{e}^{-(\beta-\alpha)y}\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}[\mathrm{e}^{-\alpha z}-\mathrm{e}^{-\beta z}].$$

当$z\le 0$时, $f(z)=0$,于是 $Z=X+Y$ 的概率密度为

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}[\mathrm{e}^{-\alpha z}-\mathrm{e}^{-\beta z}], & z>0,\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$$

四、小 结

1. 离散型随机变量函数的分布律

若二维离散型随机变量 的联合分布律为

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}, i, j = 1,2,\cdots$$

则随机变量函数 $Z = g(X,Y)$的分布律为

$$P\{Z = z_k\} = P\{g(X,Y) = z_k\}$$

$$= \sum_{z_k = g(x_i y_j)} p_{ij} \qquad k = 1,2,\cdots.$$

2. 连续型随机变量函数的分布

(1) $Z = X + Y$ 的分布

(2) $Z = \dfrac{X}{Y}$ 的分布

(3) $M = \max(X, Y)$ 及 $N = \min(X, Y)$ 的分布

思 考 题

1.设随机变量 ξ, η 相互独立，且分别服从λ_1和 λ_2的指数分布，求 $\zeta=\max\{\xi,\eta\}$的概率密度.

2.设二维随机变量的概率密度为

$$\varphi(x,y)=\begin{cases} e^{-(x+y)}, x>0, y>0 \\ 0,\text{其它} \end{cases}$$

求$\zeta=\xi-\eta$的概率密度.

作业：21,26,31,34,
36（2）（3）,（4）