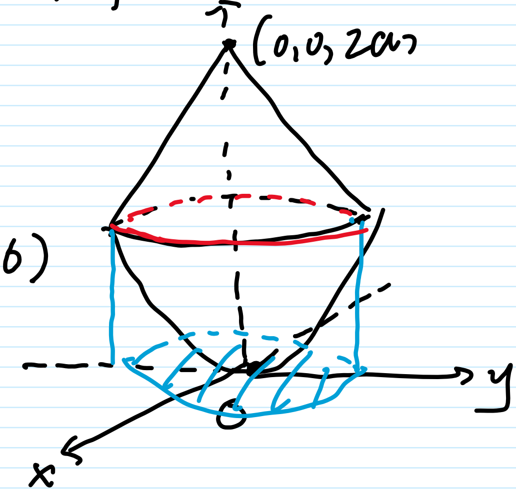
例 $x^2+y^2=az$ 和 $z=2a-\sqrt{x^2+y^2}$ 所围的体积 $(a>0)$



解: $V = V_{上曲} - V_{下曲}$

$$=\iint_D (2a-\sqrt{x^2+y^2})\,d\sigma-\left(\iint_D \frac{x^2+y^2}{a}\,d\sigma\right)$$

D: $x^2+y^2 \le a^2$

$$\Gamma:\begin{cases} x^2+y^2=az \\ z=2a-\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$$

消去z $\downarrow$ xoy面上的投影曲线

$$\begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{a}=2a-\sqrt{x^2+y^2}. \\ z=0. \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=a^2. \\ z=0. \end{cases}$$

$$V=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a\left[(2a-\rho)-\frac{\rho^2}{a}\right]\rho\,d\rho=\cdots$$

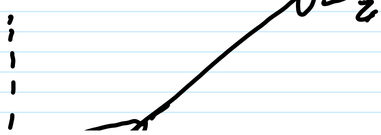
例 由 $(x^2+y^2)^2=xy$ 所围成图形面积

解. $S=\iint_D 1\,d\sigma.$

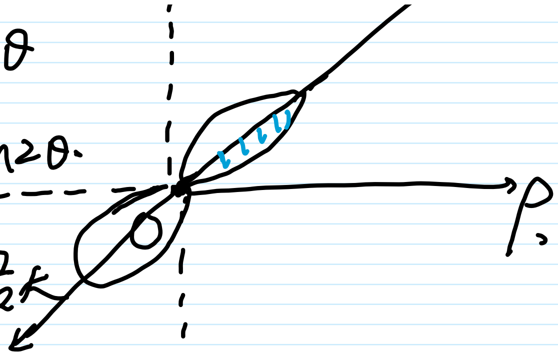
$(x,y)\to(-x,-y)$ $\Rightarrow$ 曲线关于原点对称, $y=x$ 对称.

$(x,y)\to(y,x)$

极坐标. $(\rho^2)^2=\rho\cos\theta\cdot\rho\sin\theta$



极坐标：$(\rho^2)^2=\rho\cos\theta\cdot\rho\sin\theta$



$\rho^2=\cos\theta\cdot\sin\theta=\frac{1}{2}\sin2\theta.$

$\theta: 0\to\frac{\pi}{4}.$ $\rho: 0\to$ 最大

$\theta: \frac{\pi}{4}\to\frac{\pi}{2}$ $\rho:$ 最大 $\to 0.$

$\theta: \frac{\pi}{2}\to\pi$ $2\theta: \pi\to2\pi$ $\sin2\theta<0.$

$\theta: \pi\to\frac{5}{4}\pi.$

$\theta: \frac{5}{4}\pi\to\frac{3}{2}\pi$

$$S=4S_1=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{\sqrt{\cos\theta\cdot\sin\theta}}\rho d\rho$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos\theta\cdot\sin\theta}{2}d\theta=\cdots$$

*. 换元公式。

$$\begin{cases}x=x(u,v)\\ y=y(u,v)\end{cases}$$

面积元素.

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_{D'}f(x(u,v),y(u,v))\cdot\boxed{\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv.}$$

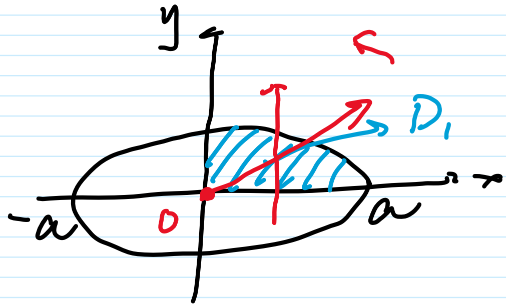
绝对值

特例. $\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$ $\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -\rho\sin\theta\\ \sin\theta & \rho\cos\theta\end{vmatrix}=\rho.$

$$d\sigma=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)}\right|\cdot d\rho d\theta=\rho\, d\rho d\theta.$$

例 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 所围成的面积 $(a>0,\ b>0)$

解: $S=\pi ab$



$S=4S_1$

①法: 定积分

$$S_1=\int_0^a \sqrt{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\cdot b^2}\,dx$$

$x=a\cos t$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{\sin^2 t\cdot b^2}\cdot(-a\sin t)\,dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} b\cdot\sin^2 t\cdot a\,dt=\frac{\pi ab}{4}$$

②法:

$$S_1=\iint_{D_1}1\,d\sigma=\int_0^a dx\int_0^{\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)b^2}}1\,dy=\cdots$$

③法: 极坐标

$$S_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\boxed{\quad\quad}}1\,\rho\,d\rho$$

计算复杂

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \xrightarrow{\text{极}} \frac{\rho^2\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\rho^2\sin^2\theta}{b^2}=1.$$

④法: 换元公式

广义极坐标 $\begin{cases}x=\rho a\cdot\cos\theta\\ y=\rho b\cdot\sin\theta.\end{cases}$

$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)}=ab\rho.$

$d\sigma=ab\,\rho\,d\rho\,d\theta.$

$$x^2\quad y^2=1 \xrightarrow{\text{换元法}} \rho=1$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \xrightarrow{\text{换元法}} \rho=1.$$

$$S_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 1\, a\cdot b\cdot \rho\, d\rho.$$

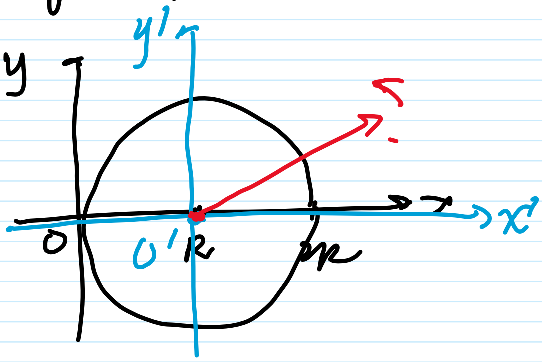
$$=\frac{\pi}{2}\cdot ab\cdot\frac{1}{2} = \frac{\pi ab}{4}$$

例. $I=\iint 1\, d\sigma.$ $D: x^2+y^2\le 2Rx$

①法：极坐标

解：$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2R\cos\theta} 1\ \rho\, d\rho$

$=\cdots$



②法：换元公式

$(x-R)^2+y^2=R^2.$

$$\begin{cases} x=R+\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}$$

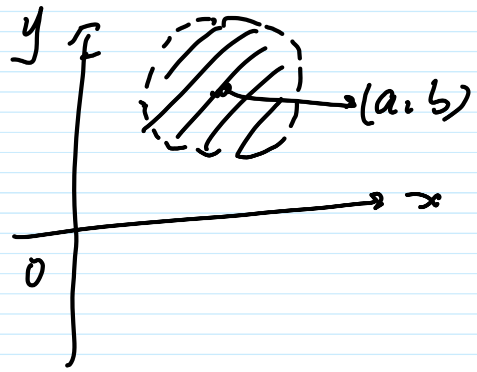
$\rho=R.$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)}=\rho$$

$d\sigma=\rho\, d\rho\, d\theta.$

$$I=\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R 1.\ \rho\, d\rho=\cdots$$

例：$D: (x-a)^2+(y-b)^2\le R^2.$



解：①法 $I=\int_{a-R}^{a+R} dx \int_{b-\sqrt{\ }}^{b+\sqrt{\ }} f(x,y)\, dy$

②法：$\{ x = a+\rho\cos\theta$ $\quad \frac{\partial(x,y)}{\ } = \rho$

② 注:

$$\begin{cases} x = a + \rho\cos\theta \\ y = b + \rho\sin\theta \end{cases} \quad \frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)} = \rho.$$

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R f(a+\rho\cos\theta, b+\rho\sin\theta)\, \rho\, d\rho$$

第三节 三重积分

定义: $f(x,y,z)$ 有界闭区域 Ω 上有界

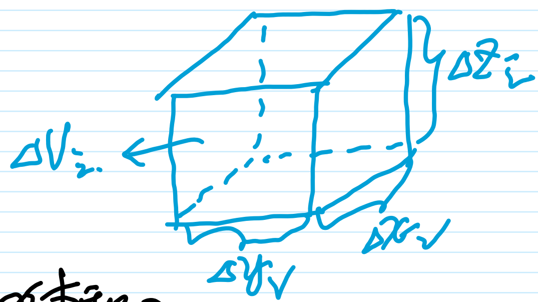
(1) 任意分割. Δv_i.

(2) 任意取点 $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in \Delta v_i$.

若 $\lim\limits_{\lambda\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta v_i$ 存在, 则称为 $f(x,y,z)$ 在 Ω 上的三重积分. 记为 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\, dv$. 体积元素

$$\Delta v_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i \cdot \Delta z_i$$

$$\boxed{dv = dx\,dy\,dz.}$$



当 $f(x,y,z)=1$ 时 $\iiint\limits_{\Omega} 1\, dv = V$ (Ω 的体积)

性质: 中值定理. $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\, dv = f(\xi, \eta, \zeta) \cdot V.$

对称性：

(i) Ω 关于 xoy 面对称，且 Ω_1：Ω 的上半部分

$$\Rightarrow \iiint_\Omega f(x,y,z)dv = \begin{cases} 2\iiint_{\Omega_1} f(x,y,z)dv, & f(x,y,z)=f(x,y,-z) \\ 0, & -f(x,y,z)=f(x,y,-z) \end{cases}$$

(ii) Ω 具有轮换对称性，

$$\Rightarrow \iiint_\Omega f(x,y,z)dv = \iiint_\Omega f(y,z,x)dv = \iiint_\Omega f(z,x,y)dv.$$

例：Ω：$x^2+y^2+z^2\le R^2$ 具有轮换对称性。

$$\iiint_\Omega x^2 dv = \iiint_\Omega y^2 dv = \iiint_\Omega z^2 dv = \frac{1}{3}\iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2)dv.$$

例. $I=\iiint_\Omega (x+2y-3z)^2 dv$，$\Omega$：$x^2+y^2+z^2\le R$.

(x,y,z) $\updownarrow xoy$ 面 $(x,y,-z)$

解. $I \xlongequal{\text{对称性}} \iiint_\Omega (x^2+4y^2+9z^2)dv = 2\iiint_{\Omega_1}(x^2+4y^2+9z^2)dv.$

$\xlongequal{\text{轮换对称性}} \frac{14}{3}\iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2)dv.$

$$\iiint_\Omega xy\,dv=0 \qquad \iiint_\Omega xz\,dv=0 \qquad \iiint_\Omega yz\,dv=0$$

$\times$? ⇑

Ω 关于 xoy 面对称 (x,y,z) → xz, yz

$\updownarrow xoy$ 面

$(x,y,-z)$ → $-xz$

$\downarrow$ xoy 面

$(x, y, -z) \to -xz$

$\to -yz$.

Ω 关于 yoz 面对称：$(x, y, z) \to xy$

$\updownarrow$ yoz 面

$(-x, y, z) \to -xy$

例：$I = \iiint\limits_{\Omega'} (x+2y-z)^2 dv$，$\Omega'$：$x^2+y^2+z^2 \le R^2$ 且 $z \ge 0$

解：Ω' 关于 yoz 面，zox 面对称，不具有轮换对称性

$$I \overset{\text{对称性}}{=\!=} \iiint\limits_{\Omega'} (x^2+4y^2+9z^2)\, dv.$$

$(x, y, z) \to xy,\ xz$

$\updownarrow$ yoz 面

$(-x, y, z) \to -xy,\ -xz$.

$\Longrightarrow \begin{cases} \iiint\limits_{\Omega'} xy\, dv = 0 \\ \iiint\limits_{\Omega'} xz\, dv = 0. \end{cases}$

$(x, y, z) \to yz$

$\updownarrow$ zox 面

$(x, -y, z) \to -yz$

$\Longrightarrow \iiint\limits_{\Omega'} yz\, dv = 0.$

$$I = \frac{1}{2} \iiint\limits_{\Omega} (x^2+4y^2+9z^2)\, dv.$$

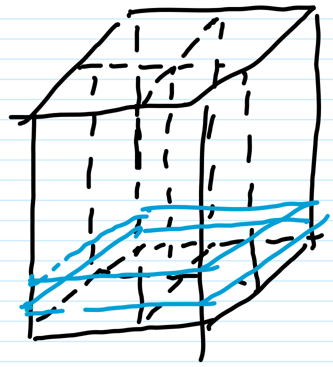
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{14}{3} \iiint (x^2+y^2+z^2)\, dv = \cdots$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{14}{3}\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dv = \cdots$$

1. 直角坐标系下的计算

引例：空间物体的质量. $\rho = f(x,y,z)$

$$M = \iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dv.$$



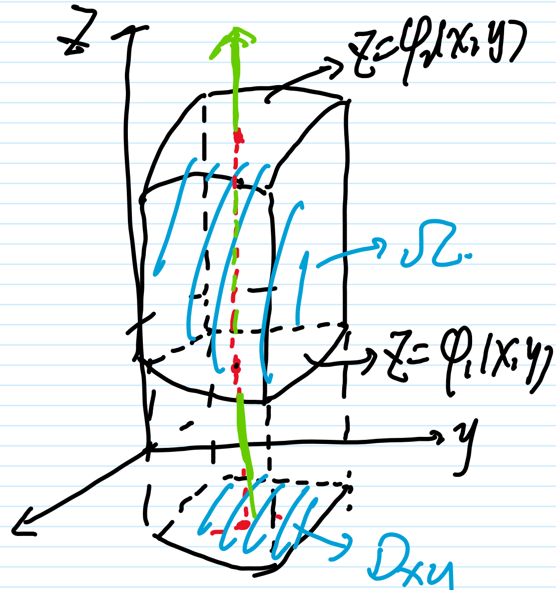
投影法 = 细棒质量之和 △二重积分

定积分

截面法 = 平面薄片质量之和 △定积分

二重积分

☆(1). 投影法：(先一后二) —— 穿线法.

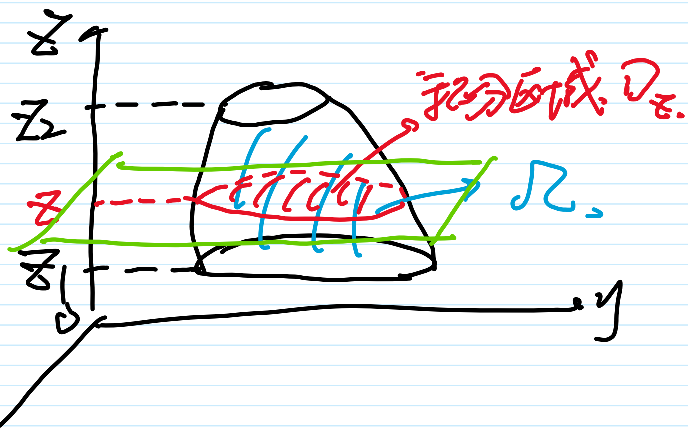


$$I = \iint_{D_{xy}}\left[\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right]dxdy$$

$$= \iint_{D_{xy}} dxdy \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz$$

其中：Dxy 是 Ω 在 xoy 面上的投影区域.

(2) 截面法：(先二后一) —— 穿线法



$$I = \int_{z_1}^{z_2}\left[\iint_{D_z} f(x,y,z)\,dxdy\right]dz$$

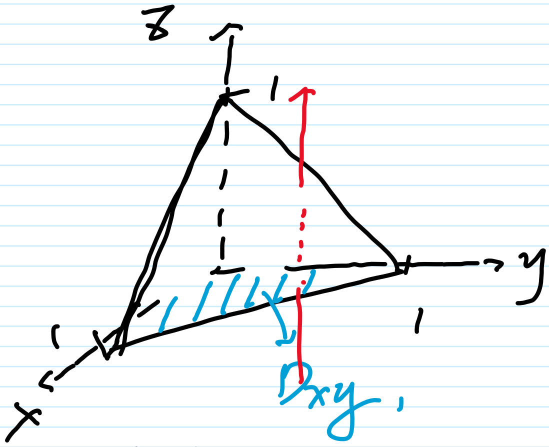
$$= \int_{z_1}^{z_2} dz \iint f(x,y,z)\,dxdy$$

$z_1 \quad D_z.$

$$= \int_{z_1}^{z_2} dz \iint_{D_z} f(x,y,z)\,dxdy$$

其中：D_z是截面区域

例. $I = \iiint_{\Omega} x\,dv$，$\Omega$：$x+y+z=1$与坐标面所围成的.



解：(1)法 投影法：

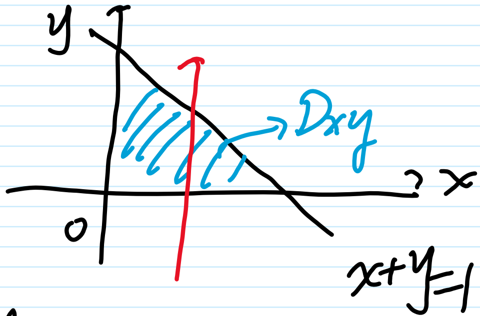
Ω在xoy面上的投影区域

D_{xy}.

$z=0$

用平行于z轴射线穿过Ω：$\downarrow$

$z=1-x-y$



$$I = \iint_{D_{xy}} \left(\int_0^{1-x-y} x\,dz\right) dxdy$$

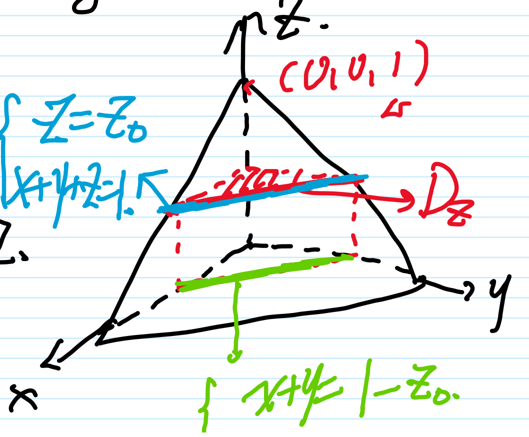
$$= \iint_{D_{xy}} dxdy \int_0^{1-x-y} x\,dz = \iint_{D_{xy}} x(1-x-y)\,dxdy$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} x(1-x-y)\,dy = \cdots$$

(2)截面法：

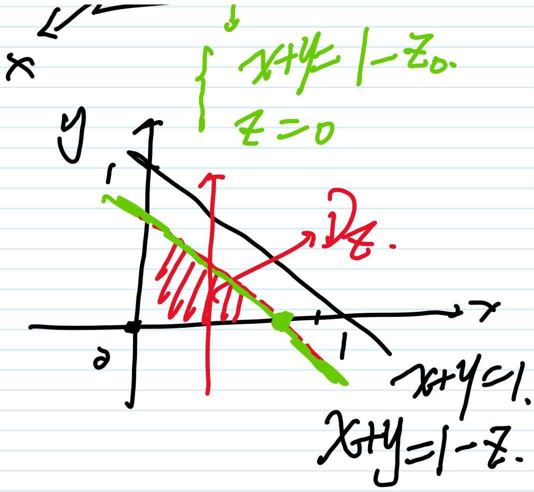
$\Gamma: \begin{cases} z=z_0 \\ x+y+z=1 \end{cases}$

(a) 用平行于xoy面的平面去截Ω.



$I = \int \left[\iint x\,dxdy \right] dz$

$$I=\int_0^1\left[\iint_{D_z} x\,dxdy\right]dz$$

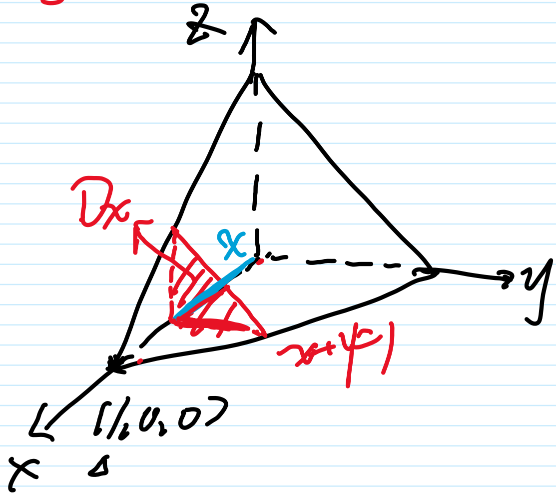


$$=\int_0^1\left[\int_0^{1-z}dx\int_0^{1-x-z}x\,dy\right]dz$$

$$=\int_0^1 dz\int_0^{1-z}dx\int_0^{1-x-z}x\,dy$$

三次积分 $(y\to x\to z)$

(b). 用平行于yoz面去截Ω.



$$I=\int_0^1\left[\iint_{D_x} x\,dydz\right]dx$$

常数

$$=\int_0^1\left[x\iint_{D_x}1\,dydz\right]dx$$

$$=\int_0^1 x\cdot\sigma(x)\,dx$$

$$=\int_0^1 x\cdot\frac{1}{2}(1-x)^2\,dx$$

常用截面法的情形:

$\iiint_\Omega g(z)\,dv$ 用z=常数去截Ω. $\int_{z_1}^{z_2}\left(\iint_{D_z} g(z)\,dxdy\right)dz$

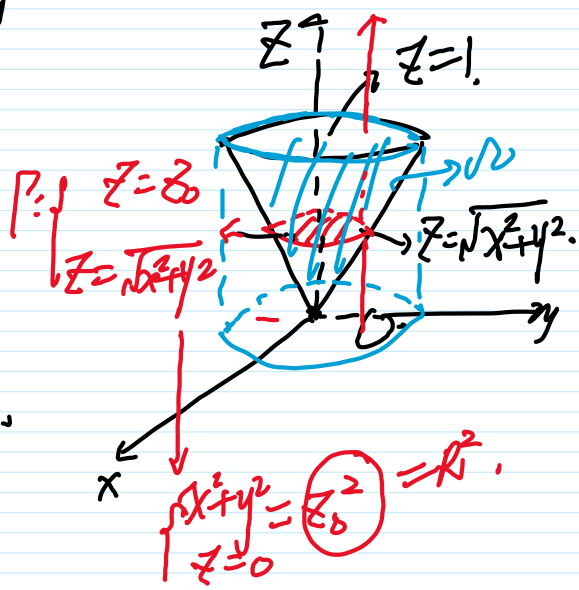
$$=\int_{z_1}^{z_2} g(z)\,\sigma(z)\,dz$$

截面面积. (易于计算).

$= \int_{z_1} g(z)\, \sigma(z)\, dz$

截面面积.（易于计算）

例. $I = \iiint\limits_{\Omega} z^2\, dv$. Ω: $z = \sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=1$ 所围成.



解: ①截面法:

用平行于xoy面的平面截Ω.

$$I = \int_0^1 z^2 \cdot \sigma(z)\, dz.$$

$$= \int_0^1 z^2 \cdot \pi z^2\, dz = \frac{\pi}{5}$$

②投影法:

Ω 在xoy面上投影区域 D_{xy}: $x^2+y^2 \le 1$.

$$I = \iint\limits_{D_{xy}} \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} z^2\, dz \right) dx\,dy \overset{\text{极坐标}}{=} \cdots$$