第四章　动量与质心

01:29:50

§1 冲量与动量定理

1、冲量

力与其作用时间的乘积　　　元冲量：$\mathrm{d}\vec{I} = \vec{F}\mathrm{d}t$

力在t_1到t_2时间内的冲量为　　$\vec{I} = \int \mathrm{d}\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\mathrm{d}t$

冲量是矢量，其方向为元冲量的矢量和的方向。

2、动量

物体的动量　　$\vec{p} = m\vec{v}$

动量是矢量，方向就是速度的方向。

01:29:50

3、动量定理

牛顿第二定律 $$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d\vec{p}}{dt} \Rightarrow \vec{F}dt = d\vec{p}$$

两边积分 $$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt = \int_{\vec{P}_1}^{\vec{P}_2} d\vec{p}$$

$$\vec{I} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1$$

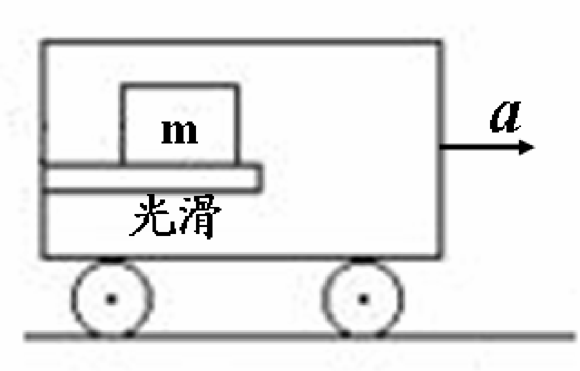
质点的动量定理：作用在质点上的合力在某一时间内的冲量等于质点在同一时间内动量的增量。

◆冲量的方向与动量的方向不相同

◆质点的动量定理也是从牛顿定律推导出来的

01:29:50

◆动量定理的成立条件——惯性系



初始小车、物体m均静止，
若小车开始向右加速…

从车厢参考系来看，物体m将会相对车厢向左运动，即物体m的动量将不再是0

从地面参考系来看，物体m相对地面保持静止，动量没有变化，仍然为0

由于桌面光滑，物体m在水平方向上均没有受到力的作用，即物体m在水平方向上受到的冲量为0

车厢参考系：I=0，△P≠0，动量定理不成立！
地面参考系：I=0，△P = 0，动量定理成立。

01:29:50

$$\vec{I} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = m\vec{\upsilon}_2 - m\vec{\upsilon}_1$$

◆直角坐标系中的分量式

$$I_x = \int_{t_1}^{t_2} F_x \mathrm{d}t = m\upsilon_{2x} - m\upsilon_{1x}$$

$$I_y = \int_{t_1}^{t_2} F_y \mathrm{d}t = m\upsilon_{2y} - m\upsilon_{1y}$$

$$I_z = \int_{t_1}^{t_2} F_z \mathrm{d}t = m\upsilon_{2z} - m\upsilon_{1z}$$

冲量的分量只改变自己方向上的动量

◆利用动量定理，可由质点的始末状态的动量求出冲量，而无需考虑复杂的中间过程，因此对打击、碰撞等问题特别有效。

01:29:50

在碰撞、冲击等过程中，由于作用的时间 Δt 极短，而力的变化很大且很难测量；引入平均冲力：

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\mathrm{d}t = \bar{\vec{F}}(t_2 - t_1) = \Delta\vec{P} \qquad \bar{\vec{F}} = \frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t}$$

•利用冲力：减小作用时间——冲床

•避免冲力：增大作用时间——轮船靠岸时的缓冲

01:29:50

判断题： #T1401.

冲量的方向与力的方向不一定相同，
但与平均冲力的方向一定相同。

例：将一根质量为m、长度为L的均质柔绳竖直地悬挂起来，使其下端恰好与地面接触，如图所示。若将此绳上端由静止状态释放，让其自由下落到地面上。

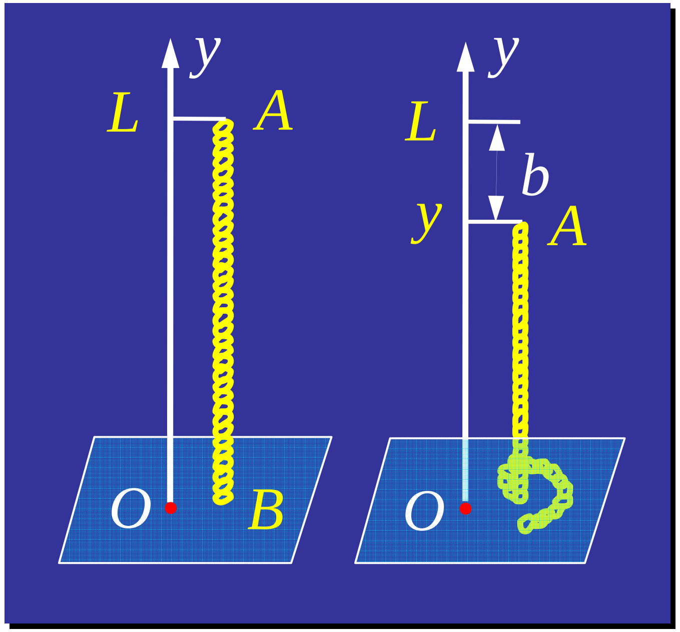
求：当绳子下落 b 长度时，地面对绳的作用力。

解：以地面为坐标原点，沿竖直方向为y轴。

因绳是柔软的，未落地部分不受支持力作用，

未落地部分只在重力作用下作自由落体运动。当绳子下落b长度时，其速率为

$$v = \sqrt{2gb}$$

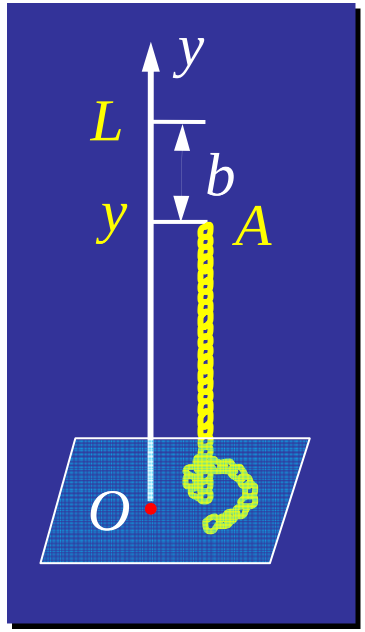


在$\mathrm{d}t$ 时间内，有长为$\mathrm{d}y = v\mathrm{d}t$ 的一小段绳子落地，其质量为

$$\mathrm{d}m = \lambda \mathrm{d}y = \frac{m}{L}\mathrm{d}y = \frac{m}{L} v \mathrm{d}t$$

01:29:50

dy这一小段绳子受到地面的冲力$\mathbf{F}_{\mathbf{N}}$、重力忽略重力，则对**dy**应用动量定理，有



$$F_{\mathrm{N}}\mathrm{d}t = \mathrm{d}p = 0-(-\upsilon\mathrm{d}m) = 0-(-\frac{m}{L}\upsilon^{2}\mathrm{d}t)$$

$$F_{\mathrm{N}} = \frac{m}{L}\upsilon^{2} \qquad \upsilon = \sqrt{2gb} \qquad \Rightarrow F_{\mathrm{N}} = \frac{2m}{L}gb$$

地面对已落下的绳子的支持力为 $F_{\mathrm{G}} = \dfrac{m}{L}gb$

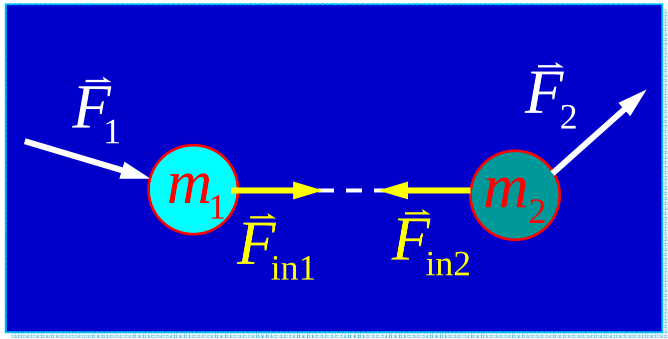
地面对绳的总作用力为

$$F = F_{N} + F_{\mathrm{G}} = \frac{2m}{L}gb + \frac{m}{L}\mathrm{g}\,b = \frac{3m}{L}gb$$

01:29:50

§2 质点系的动量定理

1、两个质点的情况



外力：$\vec{F}_1$，$\vec{F}_2$　　内力：$\vec{F}_{\text{in1}}$，$\vec{F}_{\text{in2}}$

t_1 时刻速度：$\vec{v}_{10}$，$\vec{v}_{20}$　　t_2 时刻速度：$\vec{v}_1$，$\vec{v}_2$

对质点1　$$\int_{t_1}^{t_2}(\vec{F}_1+\vec{F}_{\text{in1}})\mathrm{d}t = m_1\vec{v}_1 - m_1\vec{v}_{10}$$

对质点2　$$\int_{t_1}^{t_2}(\vec{F}_2+\vec{F}_{\text{in2}})\mathrm{d}t = m_2\vec{v}_2 - m_2\vec{v}_{20}$$

两式相加，得　$$\int_{t_1}^{t_2}(\vec{F}_1+\vec{F}_2)\mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2}(\vec{F}_{\text{in1}}+\vec{F}_{\text{in2}})\mathrm{d}t$$

$$= (m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2) - (m_1\vec{v}_{10} + m_2\vec{v}_{20})$$

$$\vec{F}_{\text{in1}} = -\vec{F}_{\text{in2}} \qquad \int_{t_1}^{t_2}(\vec{F}_{\text{in1}}+\vec{F}_{\text{in2}})\mathrm{d}t = 0$$

01:29:50

$$\int_{t_1}^{t_2}(\vec{F}_1+\vec{F}_2)\mathrm{d}t=(m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2)-(m_1\vec{v}_{10}+m_1\vec{v}_{20})$$

2、多个质点的情况

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{i外}\right)dt+\int_{t_1}^{t_2}\left(\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{i内}\right)dt=\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{v}_i-\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{v}_{i0}$$

$$\sum_{i=0}^{n}\vec{F}_{i内}=0 \qquad \int_{t_1}^{t_2}\vec{F}_{外}\mathrm{d}t=\vec{p}-\vec{p}_0$$

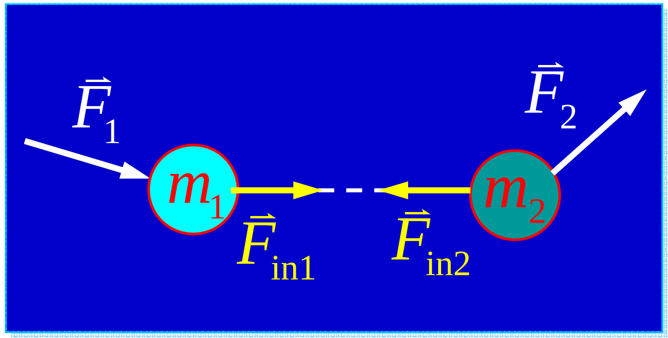
系统所受合外力的冲量等于系统总动量的增量

内力的作用不改变系统的总动量，但可以改变系统中各质点的动量，使系统的总动量在系统各质点间的分配发生变化。

01:29:50

3、质点系动量定理的微分形式

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$



F： 作用在单个质点上的合力

以两质点为例

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_{in1} = \frac{d\vec{p}_1}{dt} \qquad \vec{F}_2 + \vec{F}_{in2} = \frac{d\vec{p}_2}{dt}$$

$$\vec{F}_{in1} = -\vec{F}_{in2} \qquad \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \frac{d(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)}{dt}$$

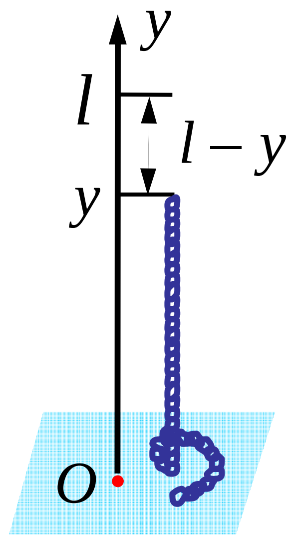
$$\Sigma \vec{F}_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \Sigma \vec{p}_i$$

$\Sigma\mathbf{F_i}$： 作用在质点系上的合外力

$\Sigma\mathbf{P_i}$： 质点系的总动量

01:29:50

解2： 利用质点系的动量定理



取整条绳子为研究对象，将其视为质点系

系统受到的外力：重力$mg=\lambda lg$、地面作用力N

由质点系的动量定理 $N-\lambda lg=\dfrac{dp}{dt}$

某时刻系统的动量 $p=\lambda yu$

$$\frac{dp}{dt}=\lambda\frac{d(yu)}{dt}=\lambda y\frac{du}{dt}+\lambda u\frac{dy}{dt}=-\lambda yg+\lambda u^2$$

$$u=\frac{dy}{dt},\quad -g=\frac{du}{dt}\qquad u=-\sqrt{2g(l-y)}$$

$$N=\lambda lg+\frac{dp}{dt}=\lambda lg-\lambda yg+\lambda u^2=3\lambda g(l-y)$$

01:29:50

§3 动量守恒定律

$$\Sigma\vec{F}_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Sigma\vec{p}_i$$

当合外力 $\Sigma\vec{F}_i = 0 \Rightarrow \Sigma\vec{p}_i$=常矢量

质点系所受合外力为零时，质点系的总动量保持不变

● 动量守恒定律是自然界的普遍定律之一，对于宏观物体和微观粒子都适用。

● 系统的总动量守恒并不意味着系统内各个质点的动量不变，而是指系统动量总和不变；

●在直角坐标系中的分量式

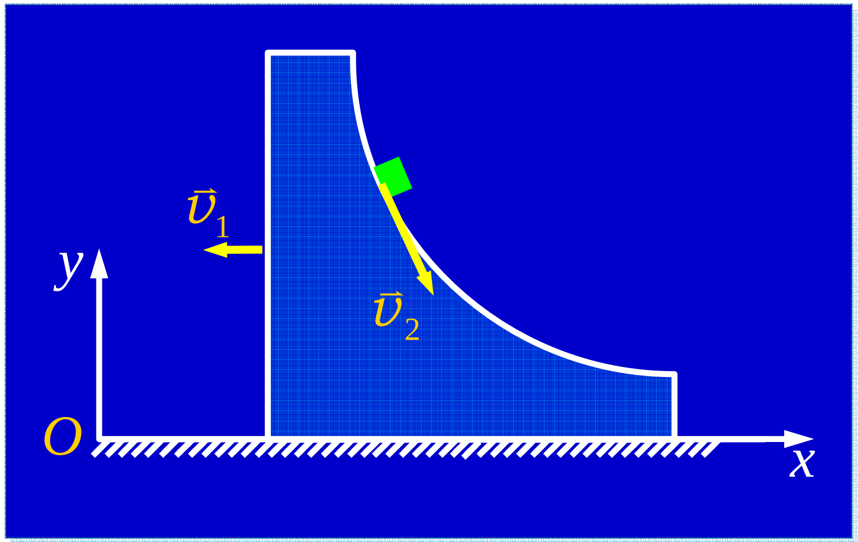
$$\Sigma F_{ix} = 0 \Rightarrow P_x = \sum m_i v_{ix} = C_x$$

$$\Sigma F_{iy} = 0 \Rightarrow P_y = \sum m_i v_{iy} = C_y$$

$$\Sigma F_{iz} = 0 \Rightarrow p_z = \sum m_i v_{iz} = C_z$$

在某一方向的合外力为零，则该方向的分动量守恒

01:29:50



合外力远小于内力

桌面光滑，水平方向动量守恒，且与内力无关

若满足这类条件，就应用动量守恒定律求解：

•是否满足合外力为零？

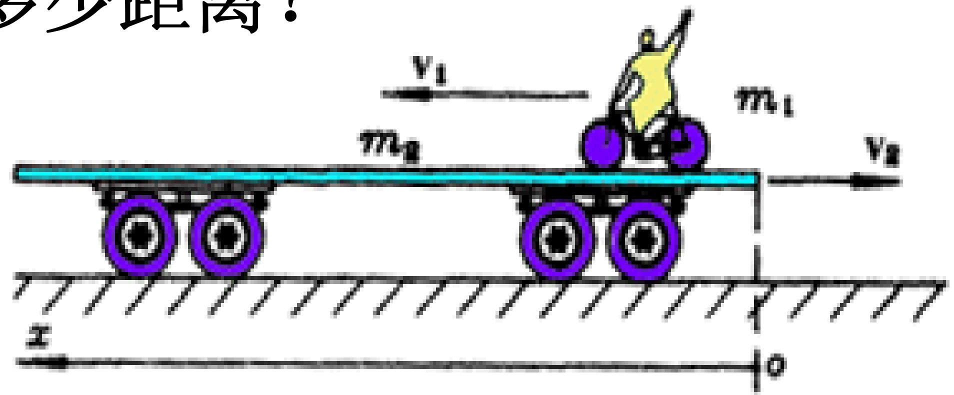
•是否某一方向合外力为零？

•是否合外力远小于内力？

否则就应用动量定理求解。

01:29:50

例：水平光滑铁轨上有一平板车，长度为l，质量为m_2，车的右端有一人，质量为m_1，人和车原本都静止不动。求：当人从车的右端走到左端时，人、车相对地面各移动了多少距离？



解：以人、车为系统，在水平方向上不受外力作用，在地面参考系中，系统动量守恒。

建立坐标系，向左为正，设人速v_1，车速$-v_2$, 则有

$$m_1v_1-m_2v_2=0 \qquad v_2=m_1v_1/m_2$$

人相对于车的速度 $v'=v_1+v_2=(m_1+m_2)v_1/m_2$

01:29:50

设人在时间t内从车的右端走到左端，则有

$$l=\int_0^t v'dt=\int_0^t \frac{m_1+m_2}{m_2}v_1dt=\frac{m_1+m_2}{m_2}\int_0^t v_1dt$$

在这段时间内人相对于地面的位移为

$$x_1=\int_0^t v_1dt=\frac{m_2}{m_1+m_2}l$$

小车相对于地面的位移为

$$x_2=x_1-l=-\frac{m_1}{m_1+m_2}l$$

思考：若以小车为参考系，动量是否守恒？

动量守恒定律只适用于惯性参考系

01:29:50

判断题： #T1402.

一个静止的物体被一个运动的物体撞击后，可以具有比运动物体的初始动量更大的最终动量。

01:29:50

选择题： #S1401.

假设一个乒乓球和一个保龄球向你滚来，都具有相同的动量，然后你用相同大小的力将两只球挡住，比较停住两只球所用的时间间隔：

① 停住乒乓球所用的时间间隔较短

② 停住两只球所用的时间间隔相同

③ 停住乒乓球所用的时间间隔较长

01:29:50

选择题： #S1402.

假设一个乒乓球和一个保龄球向你滚来，都具有相同的动量，然后你用相同大小的力将两只球挡住，比较停住两只球所用的距离：

① 停住乒乓球所用的距离较短

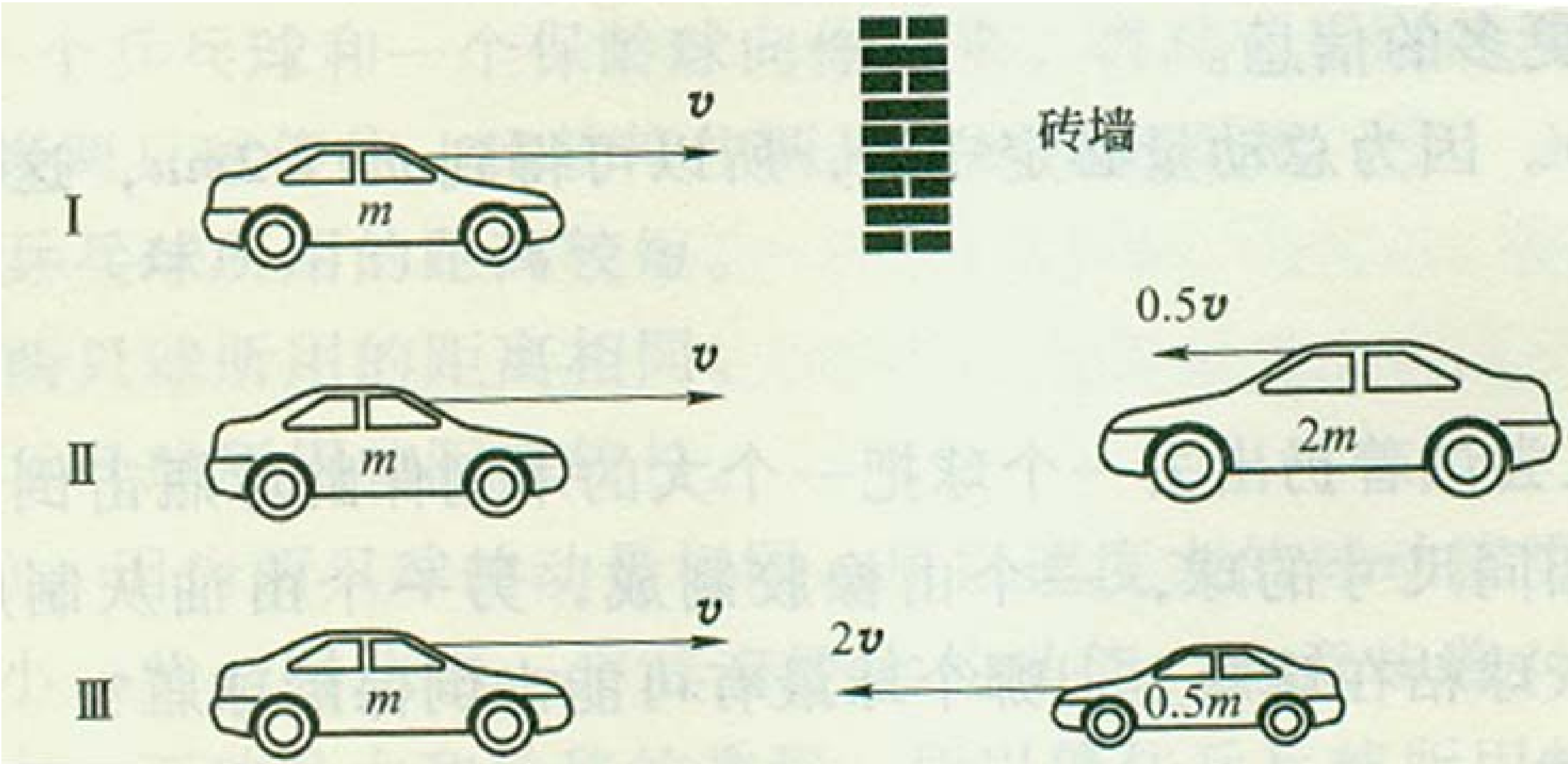
② 停住两只球所用的距离相同

③ 停住乒乓球所用的距离较长

01:29:50

选择题： #S1403.

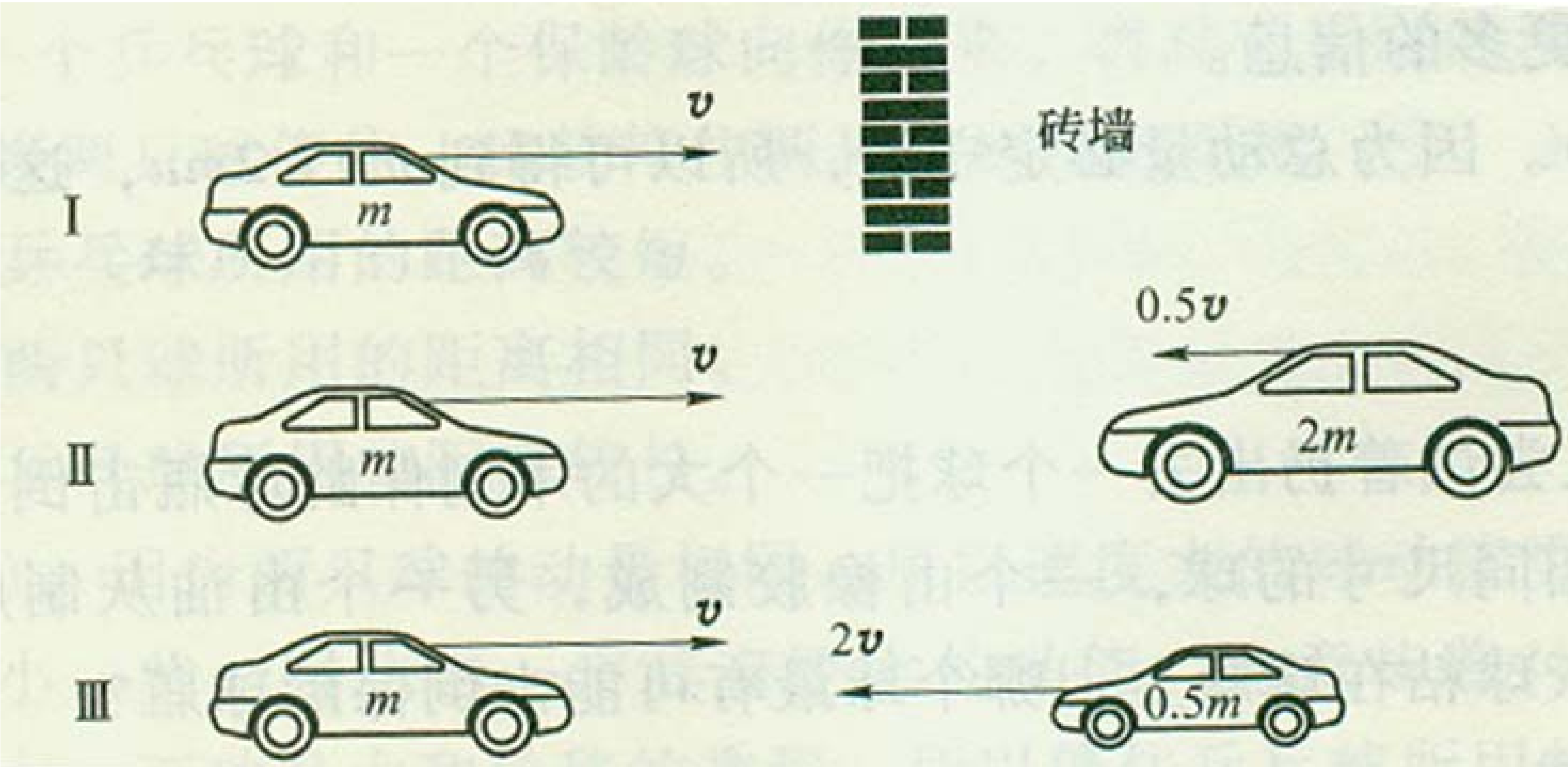
如图，假设三种碰撞都是完全非弹性的，
则哪种情况能让左边的车停住？



01:29:50

选择题：　#S1404.

如图，假设三种碰撞都是完全非弹性的，则哪种情况将引起最大的危害？



01:29:50

选择题：　#S1405.

一辆小车和一辆大卡车迎面碰上并粘在一起，哪一个的动量变化更大？

① 小车

② 大卡车

③ 两辆车的动量变化一样大

④ 由于不知道结合体最终的速度，所以无法判断

01:29:50

选择题：　#S1406.

一辆小车和一辆大卡车迎面碰上并粘在一起，在碰撞中，哪辆车具有较大的加速度？

① 小车

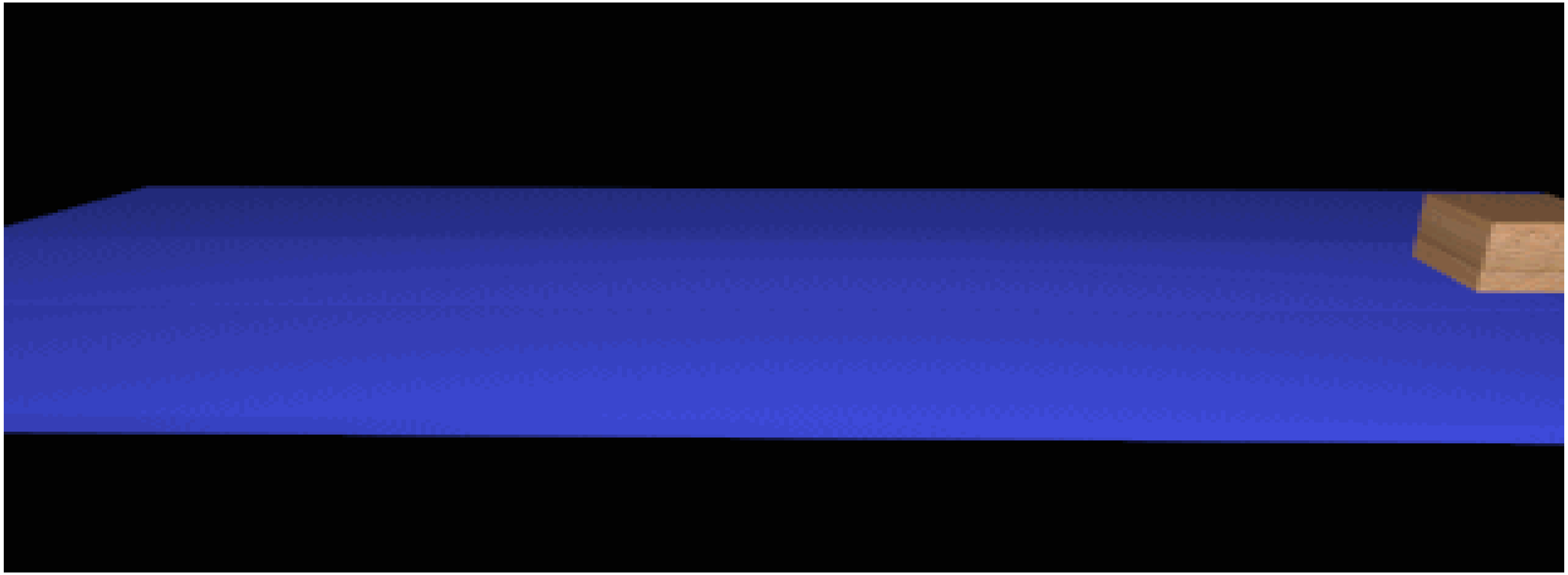
② 大卡车

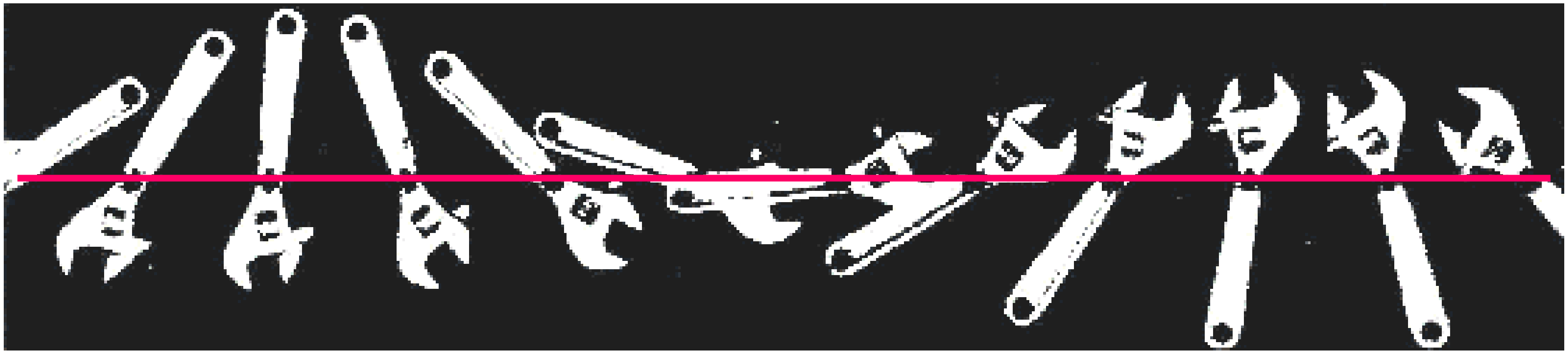
③ 加速度一样

④ 由于不知道结合体最终的速度，所以无法判断

01:29:50

§4 质心 质心运动定理

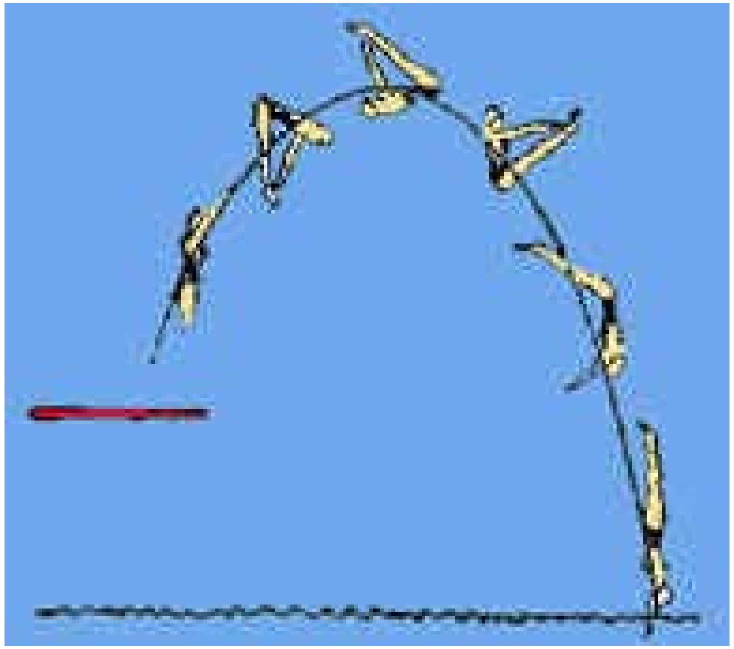


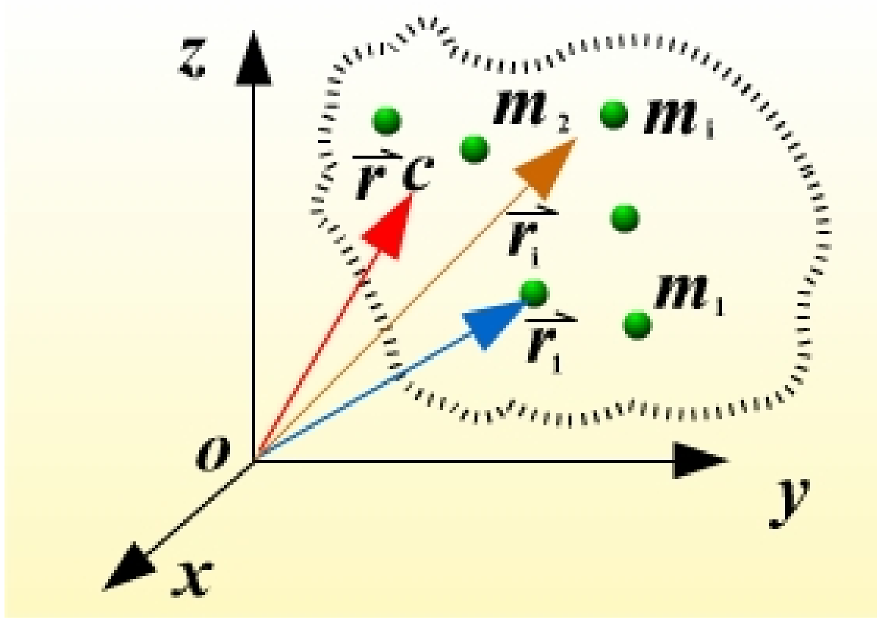


高速闪光灯拍摄的扳手在光滑桌面上的运动

01:29:50

一、质心





把质点系的**整体**运动等效为一个点的运动

设想质点系的全部质量和动量都集中在C点上

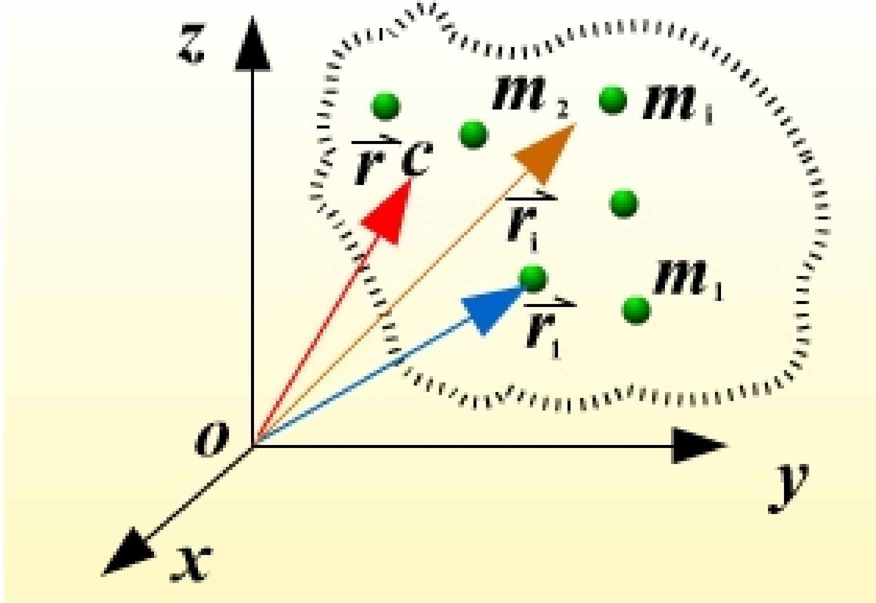
质点系的总质量 $m=\sum m_i = m_1 + m_2 + \cdots\cdots$

质点系的总动量 $\vec{p}=\sum m_i\vec{v}_i = m\vec{v}_c$

01:29:50

$$\vec{p}=\sum m_i\vec{v}_i=m\vec{v}_c$$

$$\vec{v}_c=\frac{\sum m_i\vec{v}_i}{m}=\frac{\sum m_i\vec{v}_i}{\sum m_i}$$



$$\vec{v}_c=\frac{d\vec{r}_c}{dt} \qquad \vec{v}_i=\frac{d\vec{r}_i}{dt}$$

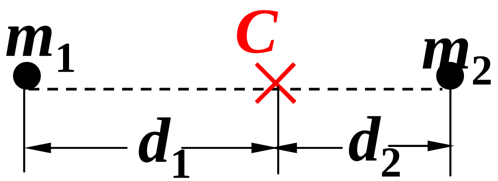
$$\frac{d\vec{r}_c}{dt}=\frac{\sum m_i\frac{d\vec{r}_i}{dt}}{\sum m_i}\Rightarrow d\vec{r}_c=\frac{\sum m_i d\vec{r}_i}{\sum m_i}\Rightarrow \vec{r}_c=\frac{\sum m_i\vec{r}_i}{\sum m_i}$$

点C的位矢是质点系各质点位矢的质量加权平均。

质心(质量中心)：质点系质量分布的平均位置。

直角坐标系中，各分量的表达式

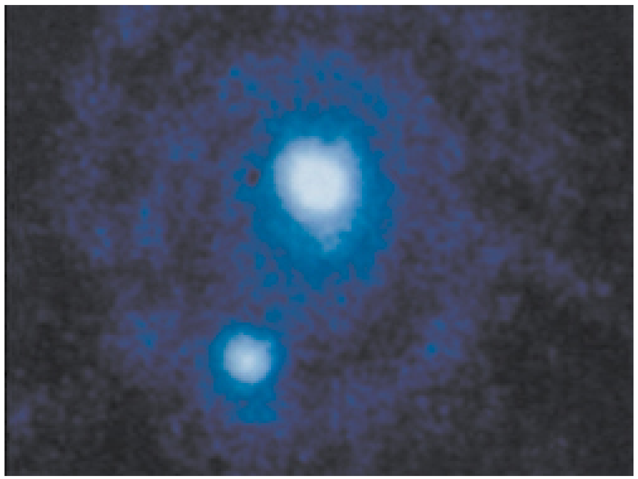
$$x_c=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_ix_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i},\quad y_c=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_iy_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i},\quad z_c=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_iz_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i}$$



$$x_c=\frac{-m_1d_1+m_2d_2}{m_1+m_2}=0\Rightarrow m_1d_1=m_2d_2$$

• 质心不一定在物体上，它表示的是平均位置，而不是哪个具体的质元。

卡戎(冥卫一)和冥王星组成双星系统，它们的共同质心在冥王星表面以外。



01:29:50

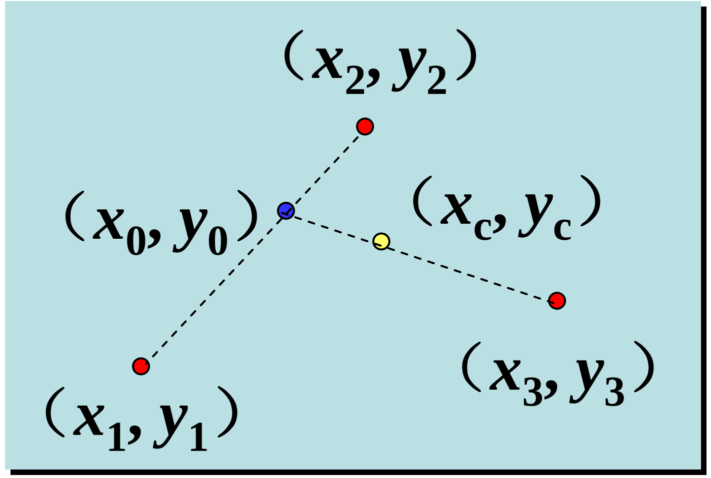
判断题：#T1403.

质心是质量集中之处，
因此在质心处必定要有质量。

• 可以先求部分质量的中心，再求整个质点系的质心。

$$x_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$y_c = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$



$$x_0 = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

$$x_c = \frac{(m_1 + m_2) x_0 + m_3 x_3}{(m_1 + m_2) + m_3}$$

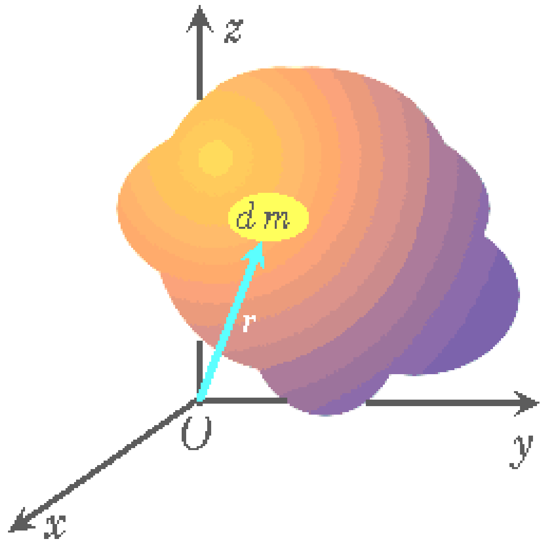
$$y_0 = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}$$

$$y_c = \frac{(m_1 + m_2) y_0 + m_3 y_3}{(m_1 + m_2) + m_3}$$

01:29:50

•对质量连续分布的物体，将其分为**n**个小质元

$$\vec{r}_c=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i}\rightarrow\vec{r}_c=\frac{1}{m}\int\vec{r}dm$$



直角坐标系中的分量表达式

$$x_c=\frac{1}{m}\int xdm,\quad y_c=\frac{1}{m}\int ydm,\quad z_c=\frac{1}{m}\int zdm$$

线分布

$$dm=\frac{m}{l}dl$$

面分布

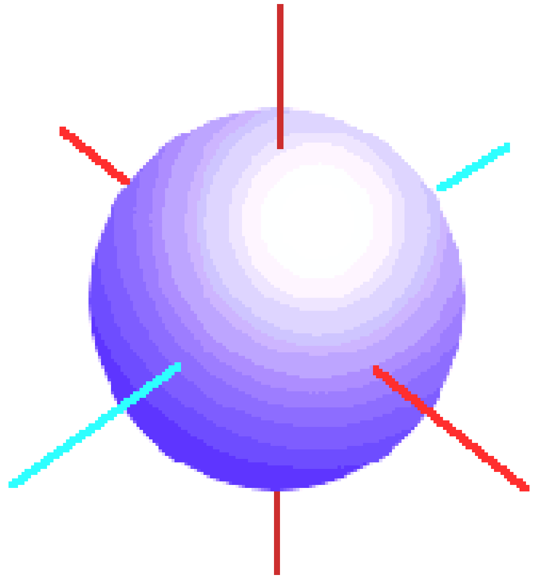
$$dm=\frac{m}{S}dS$$

体分布

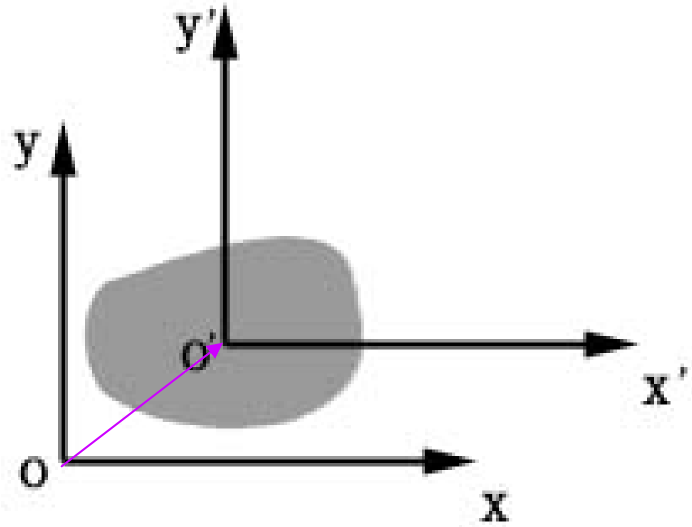
$$dm=\frac{m}{V}dV$$

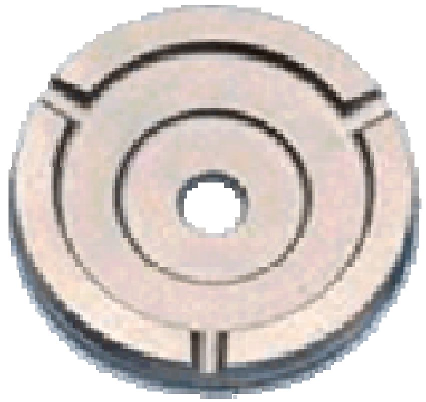
01:29:50

•密度均匀，形状对称的物体，其质心在物体的几何中心处；



•坐标系的选择不同，质心的坐标也不同；

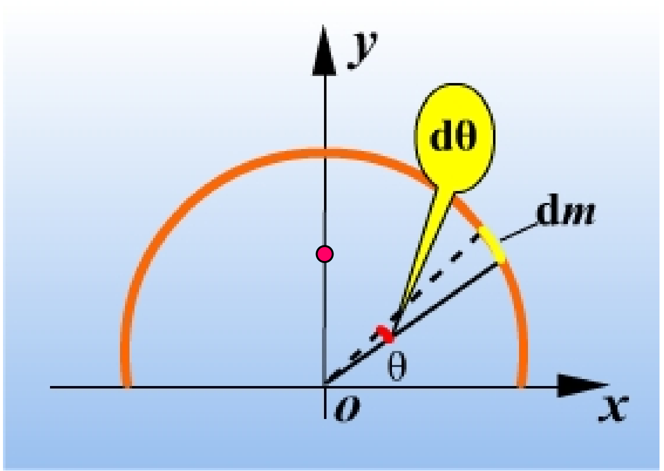




01:29:50

例：已知半圆环质量为M，半径为R，求：质心位置？

解：建立坐标系如图



由对称性 $x_c = 0$

$$y_c = \frac{\int y dm}{M}$$

$$dm = \lambda dl = \frac{M}{\pi R} R d\theta \qquad y = R\sin\theta$$

$$y_c = \frac{\int R\sin\theta \frac{M}{\pi R} R d\theta}{M} = \frac{R\int_0^{\pi} \sin\theta d\theta}{\pi} = \frac{2R}{\pi}$$

质心不在物体上

01:29:50

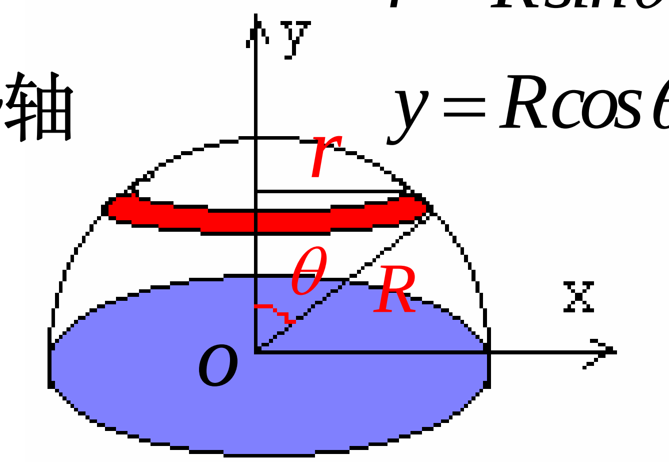
例：求半径为***R***的半球壳的质心

$r = R\sin\theta$

$y = R\cos\theta$

解：根据对称性，细环的质心位于*y*轴

将球壳分成无数多细环，细环半径记为***r***，设球壳质量面密度为σ，则其中任一细环的质量为



$$dm = \sigma(2\pi r \cdot dl) = \sigma(2\pi r \cdot R d\theta) = \sigma \cdot 2\pi R^2 \sin\theta d\theta$$

半球壳质心的位置

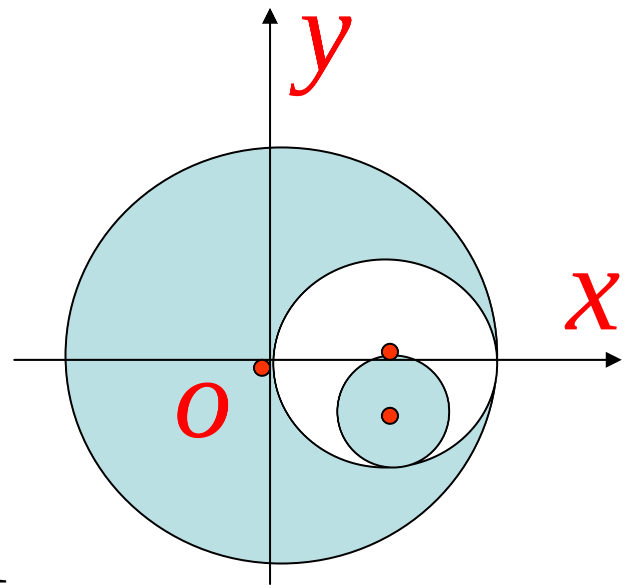
$$x_c = 0, \quad y_c = \frac{\int y dm}{m} = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma 2\pi R^3 \sin\theta \cos\theta d\theta}{\sigma 2\pi R^2} = \frac{1}{2} R$$

半球壳的总质量为

$$m = \int \mathrm{d}m = \sigma \cdot 2\pi R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \mathrm{d}\theta = \sigma \cdot 2\pi R^2$$

01:29:50

例：半径为**R**的大球内有一个半径为**R/2**的球形空腔，空腔的下部放置了一个半径为**R/4**的小球。已知大球和小球的密度相同。求：系统的质心。



解：该系统可看成由质量分布均匀(无空腔)的大、中、小三个球体组成，它们各自的质心分别处于球心处。中球的质量为负。

$$V_1 : V_2 : V_3 = R_1^3 : R_2^3 : R_3^3 = 64 : 8 : 1$$

设小球质量为$\mathbf{m_0}$，则质量和质心坐标分别为：

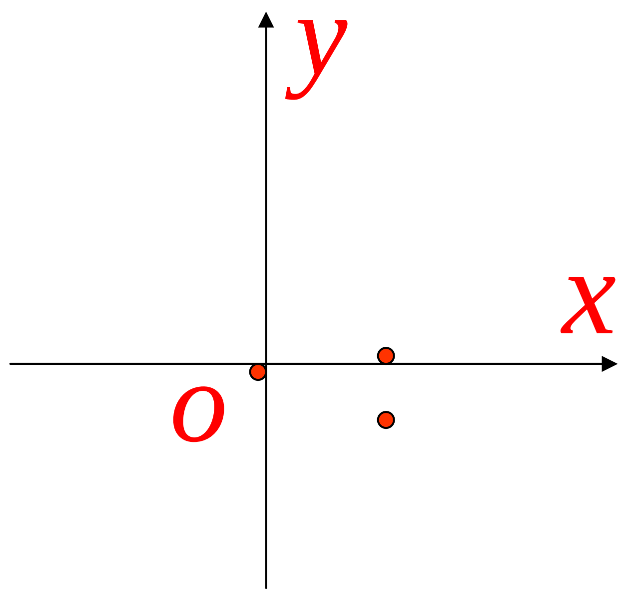
大球： $m_1 = 64m_0,\ x_1 = 0,\ \ y_1 = 0$

中球： $m_2 = -8m_0,\ x_2 = R/2,\ \ y_2 = 0$

小球： $m_3 = m_0,\ \ x_3 = R/2,\ \ y_3 = -R/4$

01:29:50

三个球体可视为质量各自集中在质心（球心）处的三个质点。



系统的总质量为

$$m = m_1 + m_2 + m_3$$
$$= 64m_0 - 8m_0 + m_0 = 57m_0$$

$$x_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m} = \frac{0 - 4m_0 R + m_0 R/2}{57m_0} = -\frac{7}{114}R$$

$$y_c = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m} = \frac{0 + 0 - m_0 R/4}{57m_0} = -\frac{1}{228}R$$

01:29:50

★重心(Center of Gravity)、质心(Center-of-Mass)

①重心是是物体上各部分所受重力合力的作用点，质心是质量分布的中心。

②当物体远离地球而不受重力作用时，重心这个概念就失去意义，但质心却依然存在。

③除非重力场均匀，否则质心与重心通常不重合。

当物体的体积远小于地球的体积时，其上各处 $\vec{g}$ 相等，质心和重心重合

当物体的高度和地球半径相比较不能忽略时，两者就不重合了，如高山的重心比质心要低一些。

01:29:50

★质心与质点

质心的运动代表着质点系整体的运动，与单个质点的运动相同。这正是将实际物体抽象为质点模型的实质。

质点系的任何运动一般都可分解为质心的运动和相对于质心的运动

二、质心运动定理

由质点系的动量定理：

$$\vec{F}_{外} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}_C) = m\frac{d\vec{v}_C}{dt} \Rightarrow \vec{F}_{外} = m\vec{a}_C$$

作用在系统上的合外力等于系统的总质量与系统质心加速度的乘积。

•与描述质点运动的牛顿第二定律在形式上完全相同。

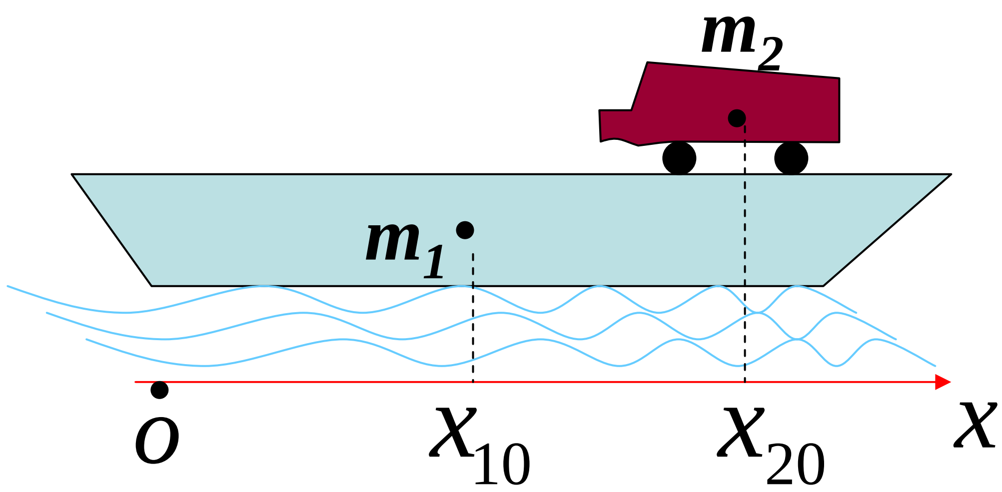
•质心的运动与内力无关，仅取决于外力，
如：大力士不能自举其身。

•若质点系受到的合外力=0（动量守恒），则质心静止或作匀速直线运动。

01:29:50

例：船长l_1，质量m_1；汽车长l_2，质量m_2，汽车从船尾由静止开始向船头运动。

求：由于汽车的运动而使船移动的距离。



方法1 用动量守恒定律（略）

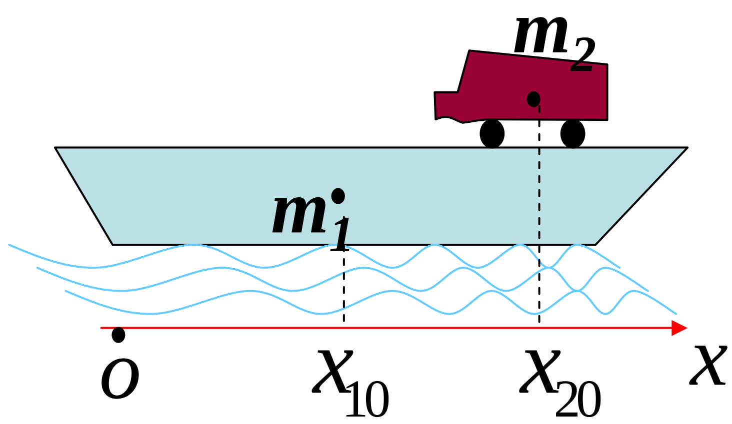
水平方向上，车船系统所受外力为零，动量守恒。

方法2 用质心运动定理

解：外力=0，系统质心保持静止

01:29:50

建立向右的坐标系，设初始船和车的坐标分别为x_{10}和x_{20}



t_0时刻 $m_1 x_{10} + m_2 x_{20} = (m_1 + m_2) x_c$

t 时刻 $m_1 (x_{10} + \Delta x_1) + m_2 (x_{20} + \Delta x_2) = (m_1 + m_2) x_c$

两式相减得 $m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 = 0$

车的相对位移 $\Delta x_2' = -(l_1 - l_2)$

车的绝对位移为：$\Delta x_2 = \Delta x_1 + \Delta x_2' = \Delta x_1 - (l_1 - l_2)$

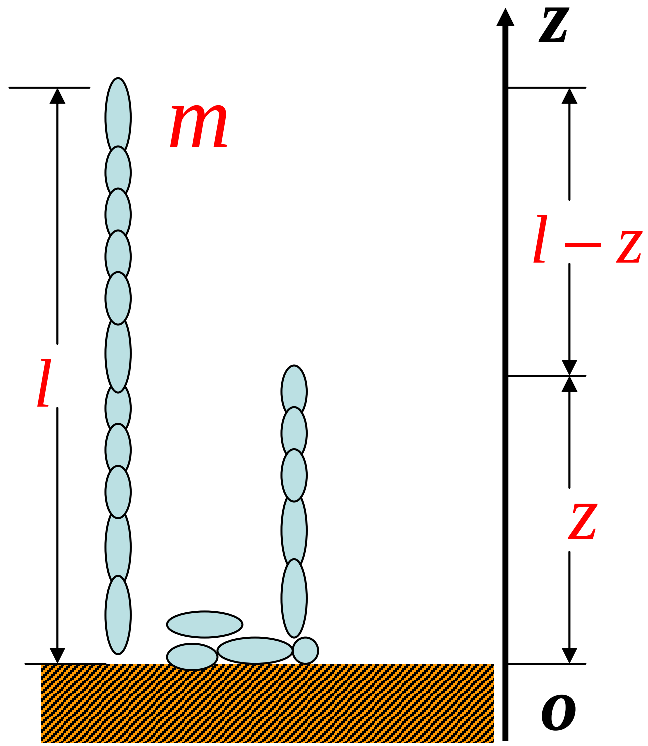
船移动的距离 $\Delta x_1 = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2}(l_1 - l_2)$

01:29:50

例：一质量m，长度为 l 均匀柔绳竖直悬挂，其下端刚刚与地面接触。今使之自静止状态下落，

求：绳下落到所剩的长度为 z 时，地面对绳的作用力。

解：取整条绳子为研究对象，将柔绳视为质点系，采用质心运动定理求解。



设地面对绳子的作用力N，绳子的质心加速度 a_c， 建立如图所示坐标系，对整个绳子：

$$N - mg = ma_c$$

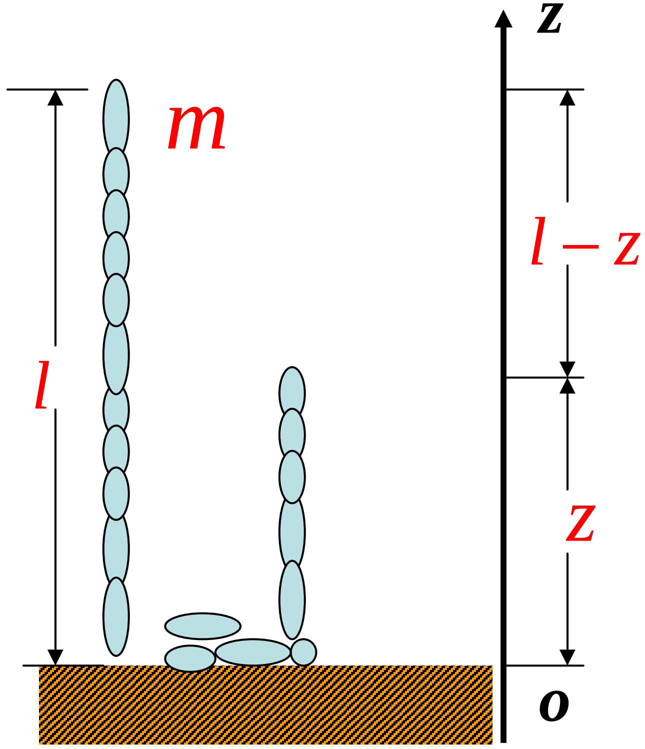
质心的坐标：未落地部分+已落地部分

未落地部分：质量 $\frac{m}{l}z$，质心的坐标为 $\frac{1}{2}z$

01:29:50

整条绳的质心坐标为

$$z_c=\frac{\frac{m}{l}z\cdot\frac{1}{2}z+0}{m}=\frac{z^2}{2l}$$



质心的速度为

$$v_c=\frac{dz_c}{dt}=\frac{z}{l}\frac{dz}{dt}=\frac{z}{l}v$$

$$v=-\sqrt{2g(l-z)}$$

$$\mathrm{d}v/\mathrm{d}t=-g$$

质心的加速度为

$$a_c=\frac{dv_c}{dt}=\frac{v^2}{l}+\frac{z}{l}\frac{dv}{dt}$$

$$a_c=2g-3\frac{z}{l}g$$

$$N=mg+ma_c=3mg(l-z)/l$$

01:29:50

例：设一个质量为2m的弹丸，从地面斜抛出去，到最高点处爆炸成质量相等的两块碎片。其中一块碎片竖直自由下落，另一块碎片水平抛出，它们同时落地。试问第二块碎片落地点在何处？

解：考虑弹丸为一系统；

爆炸前后系统所受外力没变，弹丸的质心的运动轨迹都在同一抛物线上。

取第一块碎片落地点为原点

设$\mathbf{m}_1$和$\mathbf{m}_2$为两个碎片的质量；x_1和x_2为两块碎片落地点的坐标；x_c为弹丸质心的坐标。

$$x_C = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \qquad x_1 = 0\,, \quad m_1 = m_2 = m \qquad x_2 = 2x_C$$

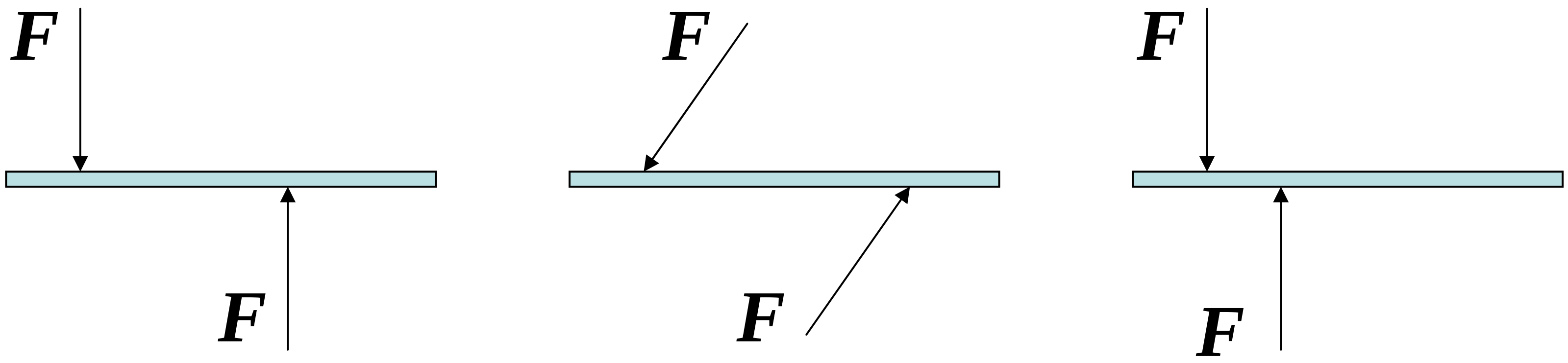
01:29:50

选择题：#S1407.

匀质杆静止于光滑水平面上，

如图，受到大小相等方向相反的两个力作用，

问三种情况哪种质心保持不动？



01:29:50

本章小结

- 冲量 $\vec{I}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\,dt$

- 动量定理 $\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\mathrm{d}t = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \Delta\vec{p}$ 平均冲力

- 质点系的动量定理

$$\int_{t_1}^{t_2}(\sum_i \vec{F}_i)\mathrm{d}t = (\sum_i m_i\vec{v}_{i2}) - (\sum_i m_i\vec{v}_{i1})$$

内力对系统总动量变化无贡献

- 动量守恒定律 $\sum_i \vec{F}_i = 0$ $\vec{P}=\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i =$ 恒矢量

01:29:50

• 质心位置 $\vec{r}_C = \dfrac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$ $\vec{r}_C = \dfrac{\int \vec{r}\,\mathrm{d}m}{m}$

•质心的运动代表着质点系整体的运动

系统的运动=质心的运动+各质点相对于质心的运动

•质心运动定理

$$\vec{\boldsymbol{F}}_c = \boldsymbol{M}\frac{\boldsymbol{d}\vec{\boldsymbol{v}}_c}{\boldsymbol{dt}} = \boldsymbol{M}\vec{\boldsymbol{a}}_c$$ 质心的运动与内力无关

01:29:50

作业: 马文蔚P85 26, 30, 14

01:29:50