2024年03月14日 星期四10-11

2024年3月13日 14:09

第四节 函数展开成幂级数

$f(x)$ 在 $x=x_0$ 处任意阶可导，$f^{(n)}(x_0)$ 存在 $(n=0,1,2,3\cdots)$

泰勒公式：$f(x)=\underbrace{\left[f(x_0)+\frac{1}{1!}f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots+\underbrace{\boxed{\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)}}_{a_n:\ 泰勒系数}(x-x_0)^n\right]}_{S_{n+1}(x)}+\underbrace{R_n(x)}_{余项}$

幂级数：$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=a_0+a_1(x-x_0)+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots$

取 $a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)$

$f(x)$ 的泰勒级数：$f(x)\sim\underbrace{\left[f(x_0)+\frac{1}{1!}f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n\right]}_{S_{n+1}(x)}+\cdots$

①：收敛域.

②：和函数 $S(x)$ $\overset{?}{=}$ $f(x)$

例：$f(x)=\frac{1}{1-x}=\underbrace{\overset{f(0)}{1}+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots}_{\Delta}$，$x\in(-1,1)$.

定义域 $x\neq 0$.　　收敛域 $(-1,1)$.

$f^{(n)}(0)=\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n)}\Big|_{x=0}=\left[(-1)(1-x)^{-2}\cdot(-1)\right]^{(n-1)}\Big|_{x=0}$

$=\cdots=(-1)(-2)(-3)\cdots(-n)\cdot(-1)^n=n!$

$a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)=1.$

定理：$f(x)$ 展开成泰勒级数（在 $x=x_0$ 处）

即 $f(x)=f(x_0)+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+\cdots$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$

证明："$\Leftarrow$" 当 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$.

去证. $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$.

$\Leftrightarrow f(x)=S(x)=\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)$.

泰勒公式 $f(x)=S_{n+1}(x)+R_n(x)$. $\Leftrightarrow R_n(x)=f(x)-S_{n+1}(x)$

$0=\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}[f(x)-S_{n+1}(x)]=f(x)-S(x)$

即得 $f(x)=S(x)$.

例. $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ $S(x)=0$、$x\in R$

$f(x)\neq S(x)$. $(x\neq 0)$

解. $f^{(n)}(0)=0 \quad (n=0,1,2,\cdots)$

$f(x)$ 在 $x=0$ 处的泰勒级数

$f(x)\sim 0+\frac{1}{1!}0\cdot x+\frac{1}{2!}0\cdot x^2+\cdots+\frac{1}{n!}0\cdot x^n+\cdots$

收敛域 R. 和函数 $S(x)=0$

定义域 R.

例：将 $f(x)=e^x$ 在 $x=0$ 处展开成泰勒级数

例：将 $f(x)=e^x$ 在 $x=0$ 处展开成幂级数

或 展开成麦克劳林级数

或展开成 x 的幂级数

解：$(e^x)^{(n)}=e^x$ $\quad (e^x)^{(n)}|_{x=0}=1.$ $\quad$（ξ 介于 0 与 x 之间）

$a_n=\frac{1}{n!}$ $\quad R_n(x)=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)\cdot x^{n+1}=\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}$

e^x 的麦克劳林公式：$e^x=1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+o(x^n)$

e^x 的麦克劳林级数：$e^x \sim 1+\frac{1}{1!}x+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots$

$\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$. 即证 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\boxed{e^{\xi}}}{(n+1)!}x^{n+1}=0$

$\Longleftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}=0$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}=0. \Leftarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$ 收敛

$\Uparrow$

$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{n+2}}{(n+2)!}\cdot\frac{(n+1)!}{2^{n+1}}=0<1$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}=0$

$\Leftarrow \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|=0. \Leftarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ 收敛

$\Uparrow$

$\rho=0<1$

“直接法”：① 求 $f^{(n)}(x_0)$. 去得 $a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)$

② 去证 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0.$

“间接法”：常用的6个麦克劳林级数

"间接法"：常用的6个麦克劳林级数

$$e^x = 1+\frac{1}{1!}x+\cdots+\frac{1}{n!}x^2+\cdots, \quad x\in(-\infty,+\infty)$$

$$\sin x = x-\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\boxed{\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}}x^{2n+1}+\cdots, \quad x\in(-\infty,+\infty)$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}, \quad x\in(-\infty,+\infty).$$

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(2n+3)!}}{\frac{1}{(2n+1)!}}\right| = 0. \quad R=+\infty.$$

定理. $f(x)$ 可展开成幂级数 $\Rightarrow$ 开式唯一，即是泰勒级数

例. $$\frac{1}{1-x}=1+x+\cdots+x^n+\cdots, \quad x\in(-1,1)$$

$$\frac{1}{1-x}=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+\cdots. \quad a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)$$

例. $$e^{x^2}=1+\frac{1}{1!}x^2+\frac{1}{2!}x^4+\cdots+\frac{1}{n!}x^{2n}+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{2n}, \quad x\in(-\infty,+\infty)$$

例. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{2n} = e^{x^2}-1, \quad x\in(-\infty,+\infty)$$

$$\begin{cases}\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{1}{1-(-x)}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n\cdot x^n+\cdots, & x\in(-1,1). \\[2ex] \ln(1+x) = x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\cdots+\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}+\cdots, & x\in(-1,1]\end{cases}$$

定义域 $(-1,+\infty)$. $\quad =\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}.$ 收敛域 $(-1,1]$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\cdot(-1)^{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)}{n+1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\cdot(-1)^{n+1}=\sum_{n=0}\frac{(-1)}{n+1}$$

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots$$

$x\in(-1,1)$.

1判 $\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$ 难以证明，故考虑

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}[f(x)-S_{n+1}(x)]=0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}S_{n+1}(x)=f(x)$$

即 $S(x)=f(x)$

求和函数 $S(x)=1+mx+\cdots+\boxed{\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}}x^n+\cdots$

求得 $S(x)=(1+x)^m$. 得证.

"先导后积"法:

$$S'(x)=0+m+\frac{m(m-1)}{2!}\cdot 2x+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}3x^2+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{4!}4x^3+\cdots$$

$$S'(x)=m\left[1+(m-1)x+\frac{(m-1)(m-1-1)}{2!}x^2+\frac{(m-1)(m-1-1)(m-1-2)}{3!}x^3+\cdots\right]$$

$$\boxed{=m(1+x)^{m-1}=m\frac{S(x)}{1+x}}$$

$$\begin{cases}(1+x)S'(x)=mS(x) \\ S(0)=1\end{cases} \Rightarrow S(x)=(1+x)^m.$$

例：$\ln(2+x)=$ ________

$-1<1+x\le 1$

$-2<x\le 0$

解：$\ln(2+x)=\ln(1+\boxed{1+x})$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot(1+x)^n$；$x\in(-2,0]$

在 $x=-1$ 处的泰勒级数

或 $(x+1)$ 的幂级数

麦克劳林级数 $\ln(2+x)=\ln 2(1+\frac{x}{2})=\ln 2+\ln(1+\boxed{\frac{x}{2}})$.

$=\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 2^n}\cdot x^n$. $x\in(-2,2]$.

例. $f(x)=\arctan x$ 将其展成 x 的幂级数. "先导后积"

解：e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\frac{1}{1+x}$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^m$.

"先导". $(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$.

"后积"

$\int_0^x(\arctan t)'\,dt=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}\,dt$

$f(x)=\arctan x-\arctan 0=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$, $x\in[-1,1]$.

定义域 $(-\infty,+\infty)$

收敛域 $[-1,1]$

例 $\arctan\frac{1+x}{1-x}=$ ________.

解："先导"

$$\left(\arctan\frac{1+x}{1-x}\right)' = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$$

"后积"

$$\int_0^x \left(\arctan\frac{1+t}{1-t}\right)' dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$$

$$\shortparallel$$

$$f(x)-\frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1+x}{1-x} - \arctan\frac{1+0}{1-0}$$

故 $f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$， $x\in[-1,1)$.