第四节 区间估计

一、区间估计的基本概念

二、典型例题

三、小结

在第一节我们利用点估计方法，在已知某个总体的分布,但其中参数未知时，根据观察值估计出一个数值来代表未知参数的真值.

但**估计值是根据样本得到的，不同的观察值就会估计出不同的真值来**.因此我们**希望得到真值的一个范围，并知道该范围包含未知参数的可信程度**，这就是我们本节所要讲的内容——未知参数的区间估计.

一、区间估计的基本概念

1. 置信区间的定义

设总体 X 的分布函数 $F(x;\theta)$ 含有一个未知参数 θ, $\theta \in \Theta$, 对于给定值 $\alpha\ (0<\alpha<1)$, 若由样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 确定的两个统计量 $\underline{\theta} = \underline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 和 $\overline{\theta} = \overline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ $(\underline{\theta} < \overline{\theta})$, 对于任意 $\theta \in \Theta$ 满足

$$P\{\underline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n) < \theta < \overline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)\} = 1-\alpha,$$

则称随机区间 $(\underline{\theta}, \overline{\theta})$ 是 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间。

$\underline{\theta}$ 和 $\overline{\theta}$ 分别称为置信度为 $1-\alpha$ 的双侧置信区间的置信下限和置信上限。

关于定义的说明

被估计的参数θ虽然未知，但它是一个常数，没有随机性，而区间$(\underline{\theta},\overline{\theta})$是随机的. 因此定义中表达式

$$P\{\underline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)<\theta<\overline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)\}=1-\alpha$$

的本质是：

随机区间$(\underline{\theta},\overline{\theta})$以$1-\alpha$的概率包含着参数$\theta$的真值，

而不能说参数θ以$1-\alpha$的概率落入随机区间$(\underline{\theta},\overline{\theta})$.

另外定义中的表达式

$$P\{\underline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)<\theta<\overline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)\}=1-\alpha$$

还可以描述为:

若反复抽样多次(各次得到的样本容量相等, 都是n)

每个样本值确定一个区 间$(\underline{\theta},\overline{\theta})$,每个这样的区间或

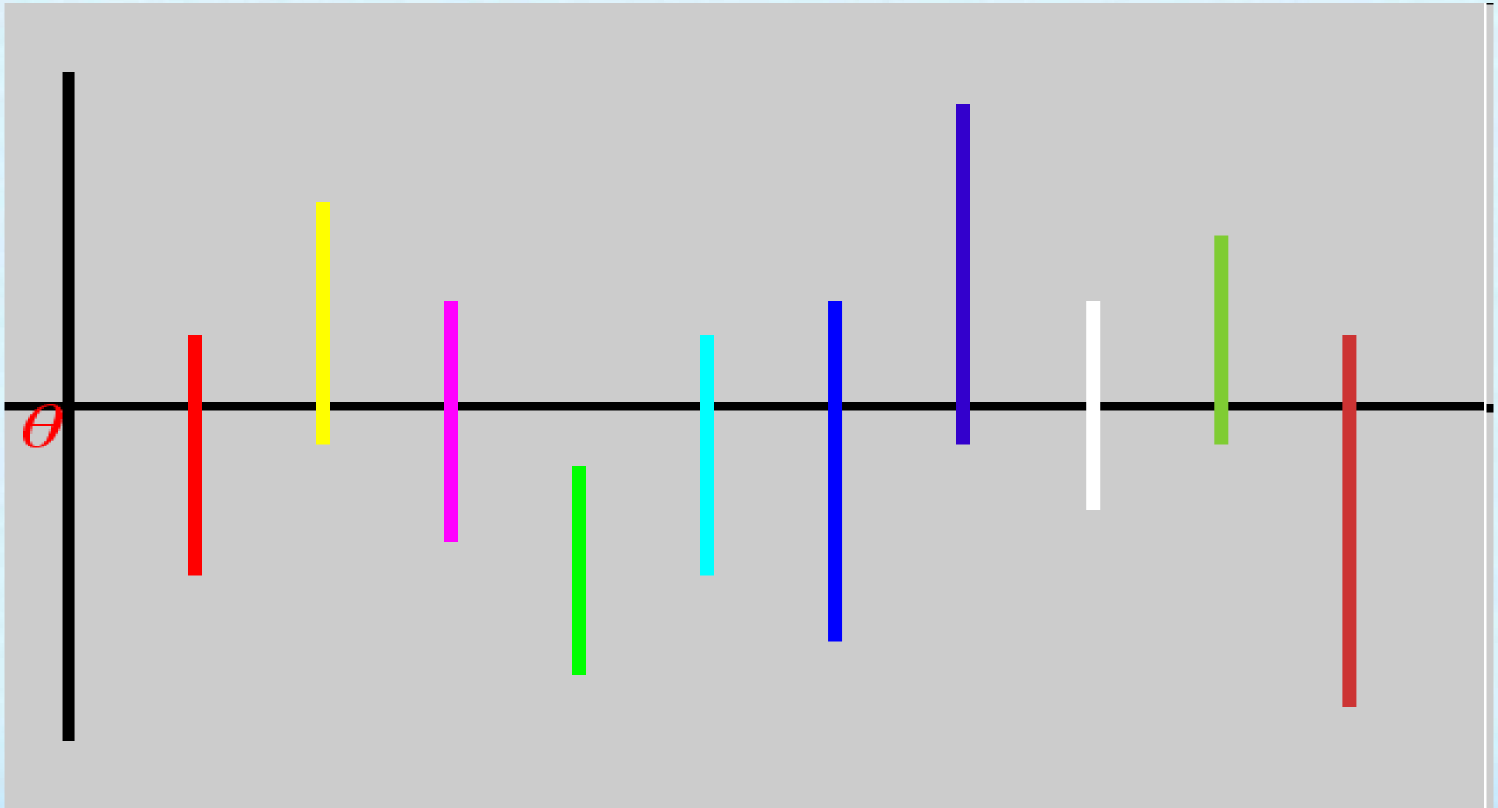
包含 θ 的真值或不包含 θ 的真值, **按伯努利大数定理**,

在这样多的区间中,包含θ真值的约占 $100(1-\alpha)\%$,

不包含的约占$100\alpha\%$.

例如 若 $\alpha = 0.01$, 反复抽样 1000 次,

则得到的1000个区间中不包含 θ 真值的约为10个.



例题

总体均值 μ 的95%置信区间的意义是(　).

(A) 这个区间平均含总体95%的值

(B) 这个区间平均含样本95%的值

(C) 这个区间有95%的机会含真值

(D) 这个区间有95%的机会含样本均值

解 根据置信区间定义，估计区间包含真实值的可能性有95%，因此选C.

2. 求置信区间的一般步骤(共3步)

(1) 寻求一个样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 和θ的函数

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}(X_1, X_2, \cdots, X_n; \theta),$$

使 W 的分布不依赖于θ以及其他未知参数，

称具这种性质的函数 W 为枢轴量.

(2) 对于给定的置信水平 $1-\alpha$, 定出两个常数 a,b

使得 $P\{a < W(X_1, X_2, \cdots, X_n; \theta) < b\} = 1-\alpha$,

(3) 从 $a < W(X_1, X_2, \cdots, X_n; \theta) < b$ 得到等价的不

等式 $\underline{\theta} < \theta < \overline{\theta}$, 其中 $\underline{\theta} = \underline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$,

$\overline{\theta} = \overline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 都是统计量，那么 $(\underline{\theta}, \overline{\theta})$ 就

是 θ 的一个置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间 .

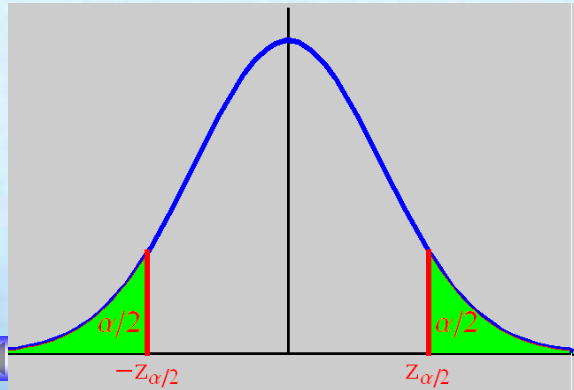
二、典型例题

例1 设总体$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，σ^2为已知，μ为未知，设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自X的样本，求μ的置信水平为$1-\alpha$的置信区间.

解 因为$\overline{X}$是μ的无偏估计，且$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$，

按标准正态分布的上α分位点的定义，有

$$P\left\{\left|\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| < z_{\alpha/2}\right\} = 1-\alpha,$$



即 $$P\left\{\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}<\mu<\overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right\}=1-\alpha,$$

于是得μ的一个置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间

$$\left(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2},\ \overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right).$$

这样的置信区间常写成

$$\left(\overline{X}\pm\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right).$$

其置信区间的长度为 $2\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}$.

如果在例1中取 $n = 16,\ \sigma = 1,\ \alpha = 0.05,$

查表可得 $z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96,$

得一个置信水平为 0.95的置信区间 $\left(\overline{X} \pm \dfrac{1}{\sqrt{16}} \times 1.96 \right).$

由一个样本值算得样本均值的观察值 $\overline{x} = 5.20,$

则置信区间为$(5.20 \pm 0.49),$ 即 $(4.71,\ 5.69).$

注意：置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间是不唯一的 .

在例1中如果给定 $\alpha = 0.05,$

则又有 $P\left\{-z_{0.04} < \dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{0.01}\right\} = 0.95,$

即 $P\{\overline{X} - \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{0.01} < \mu < \overline{X} + \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{0.04}\} = 0.95,$

故 $\left(\overline{X} - \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{0.01},\ \overline{X} + \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{0.04}\right)$ 也是 μ 的置信水平为0.95的置信区间 .

其置信区间的长度为 $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}(z_{0.04} + z_{0.01})$.

比较两个置信区间的长度

$$L_1 = 2\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{0.025} = 3.92\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

$$L_2 = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}(z_{0.04}+z_{0.01}) = 4.08\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

显然 $L_1 < L_2$. **置信区间短表示估计的精度高.**

说明: 对于概率密度的图形是单峰且关于纵坐标轴对称的情况, 易证取 a 和 b 关于原点对称时, 能使置信区间长度最小.

补充例题

样本容量 $\boldsymbol{n}$固定，置信水平 $\mathbf{1}-\boldsymbol{\alpha}$ 增大，置信区间长度增大，可信程度增大，区间估计精度降低 .

置信水平 $\mathbf{1}-\boldsymbol{\alpha}$ 固定，样本容量 $\boldsymbol{n}$ 增大，置信区间长度减小，可信程度不变，区间估计精度提高 .

对于离散型随机变量*X*，给定α，可能找不到区间 $(\underline{\theta},\overline{\theta})$，使 $P\{\underline{\theta}<\theta<\overline{\theta}\}$ 恰为1-α，此时我们去找区间 $(\underline{\theta},\overline{\theta})$，使得 $P\{\underline{\theta}<\theta<\overline{\theta}\}$ 至少为1-α，且尽可能的接近1-α。

三、小结

点估计不能反映估计的精度，故而本节引入了区间估计.

置信区间是一个随机区间$(\underline{\theta}, \overline{\theta})$，它覆盖未知参数具有预先给定的高概率(置信水平)，即对于任意的$\theta \in \Theta$，有$P\{\underline{\theta} < \theta < \overline{\theta}\} \geq 1-\alpha$.

求置信区间的三个步骤.