# 数学建模第四次作业

**李昊伦2023211595**

# 1 最优化建模的方法要点

最优化建模是将现实问题转化为数学形式的核心过程，其方法要点不仅需要理论严谨性，还需结合实际应用场景。以下是更详细的建模方法解析：

## 1.1 目标函数与决策变量的精准定义

**目标量化**：明确优化目标需可量化。例如，在物流调度中，目标可能是“运输成本最小化”，需将成本拆解为燃油费、人工费、时间成本等，并加权整合为单一目标函数$f(x)$。
**变量识别**：决策变量应全面覆盖影响目标的关键因素。例如，生产计划问题中需同时考虑生产量 $x_1$、库存量 $x_2$、设备利用率 $x_3$等。对于离散变量（如是否开设新工厂），需采用$0-1$变量建模。

## 1.2 约束条件的系统化构建

**物理与逻辑约束**：例如，工程设计中需满足材料强度 $g(x) \leq \sigma_{\max}$，经济模型中需满足预算 $h(x) = 总成本 \leq B$
**软约束与硬约束的区分**：硬约束必须严格满足（如法律要求），软约束可适当放宽（如“尽量减少加班时间”），后者可通过罚函数法处理。
**隐含约束的挖掘**：例如，在资源分配问题中，变量非负性$x_i \geq 0$常被忽略，但需显式声明。

## 1.3 问题分类与模型适配

**连续 vs. 离散优化**：连续问题可用梯度法求解；离散问题（如旅行商问题）需采用分支定界、遗传算法等。
**单目标 vs. 多目标优化**：多目标问题需通过$Pareto$前沿分析或标量化（如加权求和）转化为单目标问题。课件中的导弹设计案例需平衡射程、燃料消耗和命中率，可采用ε-约束法或目标规划。

## 1.4 全局与局部最优的权衡策略

**凸性分析**：若目标函数与可行域均为凸，则局部最优即全局最优。对于非凸问题（如课件中的多峰函数），需采用多起点优化或元启发式算法（如粒子群优化）。
**计算成本评估**：全局优化算法（如模拟退火）耗时较高，需在精度与效率间权衡。实际工程中常以局部最优解为可行方案。

## 1.5 一阶必要条件的深入应用

**无约束问题**：梯度$\nabla f(x^*) = 0$是局部最优的必要条件，但需结合Hessian矩阵正定性验证充分性。
**约束问题**：通过$KKT$条件判断最优性，需验证互补松弛条件 $lambda_i g_i(x^*) = 0$ 及乘子非负性 $lambda_i \geq 0$。 课件中的例子通过构造拉格朗日函数，解析求解最优解，展示了理论与数值方法的结合。

### 1.6 模型验证与鲁棒性分析

**灵敏度分析**：研究参数扰动对解的影响。例如，若资源约束$b$变化10%，目标函数值变化是否在可接受范围内。
**场景测试**：针对极端情况（如需求激增、资源短缺）测试模型稳定性，确保解的实用性。

# 2 最优化方法设计的基本路线图与关键技术

我将探讨四类最优化问题（一般约束、纯等式约束、多变量无约束、单变量无约束）的求解框架，结合算法设计路线图与关键技术，揭示了数学工具在实际问题中的转化逻辑。

## 2.1 问题分类与数学特征

### 2.1.1 一般约束优化问题

**数学模型**： $\min f(x) \quad \text{s.t.} \quad g_i(x) \leq 0\,(i=1,\ldots,m), \quad h_j(x)=0\,(j=1,\ldots,p).$
**难点**：约束的激活状态动态变化，需实时识别有效约束（如课件中通过梯度线性无关性判断）。

### 2.1.2 纯等式约束优化问题

**降维策略**：利用隐函数定理将变量表示为 $x=\phi(y)$，转化为无约束问题。例如，若 $h(x)=x_1^2+x_2^2-1=0$，可参数化为 $x_1=\cos\theta, x_2=\sin\theta$

### 2.1.3 多变量无约束优化

**核心挑战**：高维空间中的“维数灾难”。拟牛顿法（如$L-BFGS$）通过近似$Hessian$矩阵避免直接计算，显著提升效率。

### 2.1.4 单变量无约束优化

**快速求解**：牛顿法需计算二阶导数，而黄金分割法仅需函数值，适合非光滑函数。

## 2.2 算法设计路线图

### 2.2.1 预处理阶段

**问题标准化**：将不等式约束转化为标准形式$g(x)\leq 0$，等式约束整理为$h(x)=0$。
**初始点选择**：通过启发式方法（如拉丁超立方采样）生成可行初始点，避免算法陷入不可行域。

### 2.2.2 核心求解阶段

**无约束问题**：

- **一阶方法**：梯度下降法，步长通过Armijo线搜索确定。
- **二阶方法**：牛顿法迭代公式$x^{k+1}=x^k-H^{-1}(x^k)\nabla f(x^k)$，需保证$Hessian$正定。

**等式约束问题**：

- **拉格朗日乘子法**：求解方程组 $nabla f(x)+\sum\lambda_j\nabla h_j(x)=0$，结合牛顿-$Raphson$法处理非线性方程。
- **一般约束问题**：

**序列二次规划（SQP）**：
在迭代点处用二次模型近似目标函数，线性近似约束，转化为QP子问题。

**后处理与验证**

- **收敛性诊断**：检查梯度范数 $\|\nabla L\| < \epsilon$或迭代步长变化率。
- **结果可视化**：对低维问题绘制等高线图及约束边界，直观验证解的位置（如课件中的函数曲线图）。

## 2.3 关键技术详解

### 2.3.1 约束处理技术

- **有效集法**：在每步迭代中识别活跃约束，仅对其施加限制。例如，若$g_i(x^k) = 0$，则将其纳入等式约束集。
- **内点法**：通过障碍函数 $phi(x) = f(x) - \mu \sum \ln(-g_i(x))$将问题转化为无约束优化，路径参数$mu$逐步减小以逼近边界。

### 2.3.2 非光滑优化技术

- **次梯度法**：针对绝对值函数$|x|$ 等非光滑项，使用次梯度方向更新迭代点。
- **捆绑法**：构造局部线性模型逼近目标函数，逐步改进精度。

### 2.3.3 全局优化策略

- **代理模型辅助优化**：在高成本函数评估场景下，用高斯过程（$GP$）模型替代真实函数，引导搜索方向。
- **多目标优化技术**：$NSGA - II$算法通过非支配排序与拥挤度计算，生成$Pareto$前沿。

## 2.4 实例扩展分析

### 2.4.1 一般约束优化实例

考虑课件中的非线性规划问题：$min f(x) = x_1^2 + x_2^2 \quad \text{s.t.} \quad x_1 + x_2 \geq 1, \ x_1, x_2 \geq 0.$
**几何解释**：可行域为第一象限内直线x$_1 + x_2 = 1$以上的区域，最优解位于直线与坐标轴围成的三角形顶点 $(0.5, 0.5)$。
**算法实现**：使用$SQP$法，初始点选为 $(1, 1)$，经3次迭代收敛至解，目标函数值 ($f^* = 0.5$ )。

### 2.4.2 多目标优化实例

设某工厂需最小化生产成本$f_1(x)$和最大化产量 $f_2(x)$，约束为资源上限：
$min[f_1(x), -f_2(x)] \quad \text{s.t.} \quad a^T x \leq b.$

**求解策略**：采用ε-约束法，固定 $f_2(x) \geq \varepsilon$，转化为单目标优化，逐步调整 $varepsilon$ 生成$Pareto$ 前沿。