傅里叶级数 $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l})$

$x\in(-\infty,+\infty)$ 且 x 非间断点

$a_n=0 \quad (n=0,1,2,\cdots)$

正弦级数 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l} \to \sin x \to$ 奇. $f(-x)=-f(x)$

余弦级数. $b_n=0.\ (n=1,2,\cdots)$

$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l} \to \cos x \to$ 偶. $f(-x)=f(x)$

推论: $f(x)=f(x+2l)$. 满足收敛条件

偶倍奇零

① 若 $f(-x)=-f(x)$. 则

$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\underbrace{f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}}_{\text{奇}\times\text{偶}=\text{奇}}dx=0.\ (n=0,1,2\cdots)$

$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \quad (n=1,2,\cdots)$

得正弦级数. $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l}$, 非间断点

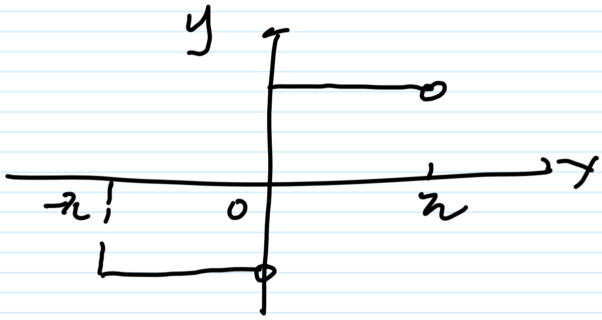
② 若 $f(-x)=f(x)$, 则

$b_n=0$

$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx \quad (n=0,1,2,\cdots)$

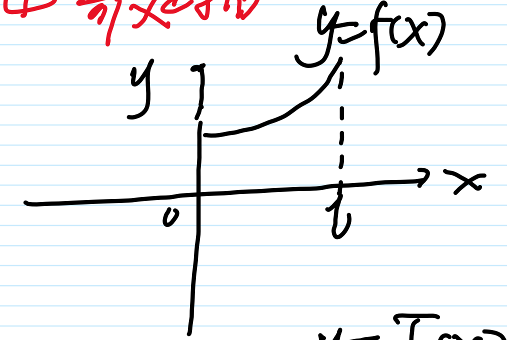
得余弦级数 $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}$ 非间断点

得余弦级数 $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}$ x非间断点



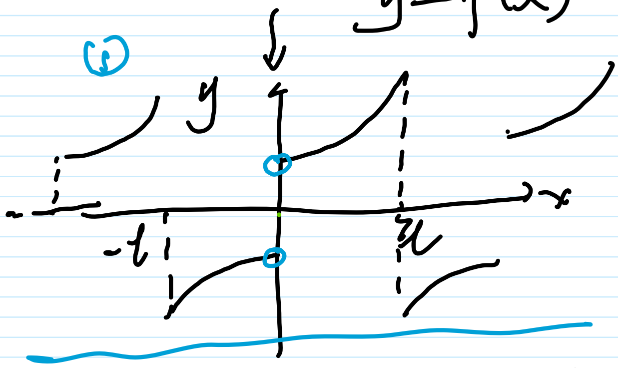
★ 有限区间 $[0,l]$ 上 $f(x)$ 展开成正弦或余弦级数

① 奇延拓



$y=F(x)$

(1)



$F(x)=F(x+2l)$ $F(x)=f(x)$ $x\in(0,l]$

$F(-x)=-F(x)$ ② 间断点在$[0,l]$上

$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l}$, x非间断点

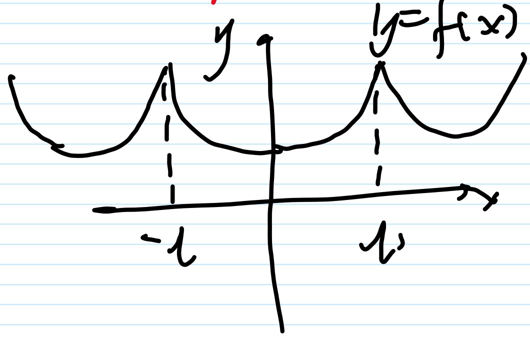
↓

$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l}$, $x\in[0,l]$. 且x非间断点

例 $x\in[0,l)$.

③ 其中 $b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$.

② 偶延拓



$F(x)=F(x+2l)$,

$F(-x)=F(x)$

$F(x)=f(x)$. $x\in[0,l)$

间断点

$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx$ $(n=0,1,2\cdots)$

得 $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}$,

$x\in[0,l]$ 且x非间断点

例. $x\in[0,l]$.

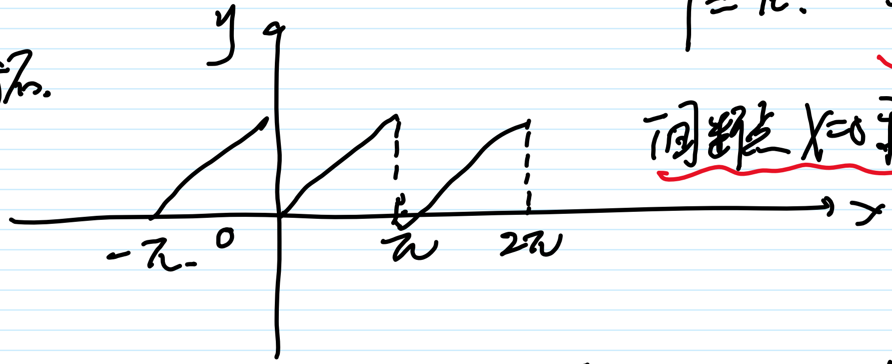
其中 $b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$　　$x\in[0,l]$

例：将 $f(x)=x$，$x\in[0,\pi]$，展开成

(1) 傅里叶级数　② 正弦级数　③ 余弦级数

解：① 周期延拓　　$T=\pi$，$l=\frac{\pi}{2}$

间断点 $x=0$ 和 $x=\pi$



$$a_n=\frac{1}{\frac{\pi}{2}}\int_0^\pi x\cdot\cos\frac{n\pi x}{\frac{\pi}{2}}dx=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos 2nx\,dx.$$

$$=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{2n}\int_0^\pi x\,d\sin 2nx=\frac{\pi}{n}\left(x\sin 2nx\Big|_0^\pi-\int_0^\pi\sin 2nx\,dx\right)$$

$$=0\qquad(n=1,2,\cdots)$$

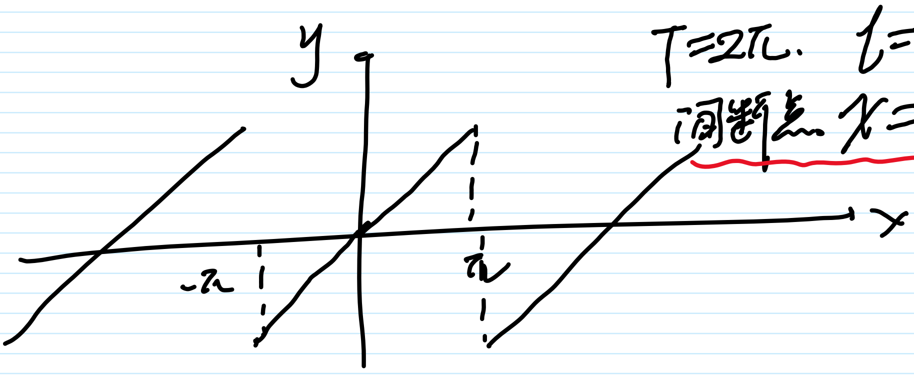
$$a_0=\frac{1}{\frac{\pi}{2}}\int_0^\pi x\,dx=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{2}=\pi.$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin 2nx\,dx\qquad(n=1,2,\cdots)$$

得 $x\doteq\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin 2nx$，$x\in(0,\pi)$

② 奇延拓　　$T=2\pi$，$l=\pi$

间断点 $x=\pi$

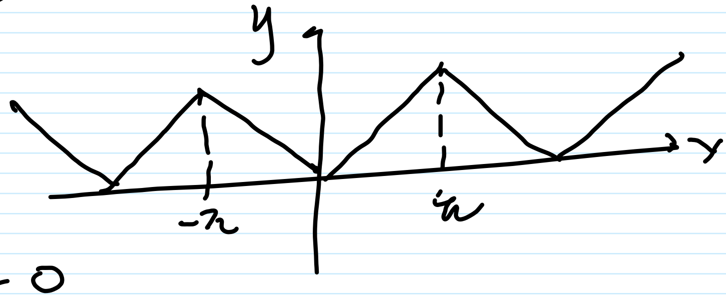


$a_n = 0 \quad (n=0,1,2,\cdots)$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cdot \sin nx\,dx \quad (n=1,2,\cdots)、$$

得 $x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$, $x\in[0,\pi)$.

③偶延拓



$T=2\pi \quad l=\pi$

无间断点

$b_n = 0$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx \quad (n=0,1,2\cdots)$$

得 $x = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$, $x\in[0,\pi]$

正弦级数

例 将 $f(x)=\underset{奇}{\arcsin(\sin x)}$ $x\in[-\pi,\pi]$ 展成傅里叶级数

解: $\arcsin(\sin(-x)) = \arcsin(-\sin x) = -\arcsin(\sin x)$

$a_n = 0. \quad (n=0,1,2\cdots)$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underset{奇}{\arcsin(\sin x)}\cdot \underset{奇}{\sin nx}\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \arcsin(\sin x)\cdot \sin nx\,dx$$

$y = \arcsin x$. $x\in[-1,1]$ $y\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.

$\arcsin(\sin 0) = 0 \quad \arcsin(\sin\frac{\pi}{6}) = \frac{\pi}{6}$.

$\arcsin(\sin$ …

$$y = \arcsin(\sin x) \longrightarrow \sin y = \sin x$$

$x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ $\quad y = \arcsin(\sin x) = x$

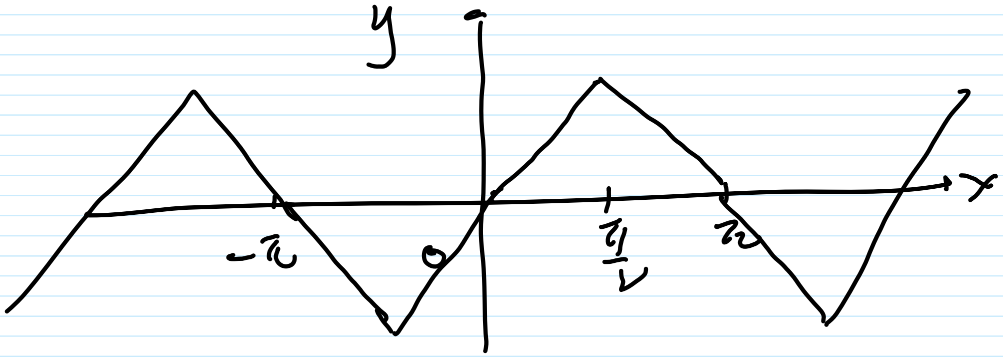
$x \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$. $\quad \arcsin(\sin \frac{2}{3}\pi) = \frac{\pi}{3}$.

$\sin x = \sin(\pi - x)$ $\quad \pi - x \in [0, \frac{\pi}{2})$

$$\arcsin(\sin x) = \arcsin(\sin(\pi - x)) = \pi - x.$$

$$\arcsin(\sin x) = \begin{cases} \quad , & x \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}) \\ x, & x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ \pi - x, & x \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin nx\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\pi - x)\sin nx\,dx\right]$$



$T = 2\pi$.

$l = \pi$.

无间断点

得 $\arcsin(\sin x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$, $\quad x \in [-\pi, \pi]$

总结与习题

一、总结：

1、常数项级数：敛散性，求和

(1) 收敛 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$　$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 正项　✓某种原来判别法

✓ i) 比值/根值 $\rho<1$ 收敛

✓ ii) 等价无穷小 / 泰勒公式.

iii) 其他

② 发散 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$　$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \xrightarrow[\text{判断发散}]{\text{比值/根值}} \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

$\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0 \Rightarrow$ 发散.

$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln n}{n^p}$　$p>1$ 收敛　比较法

$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln^2 n}{n^2}$ 收敛

$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n}$　$p>1$ 收敛　积分法.

求和：i) 定义.　ii) 幂级数和函数. $S(x_0)$ (展开式)

iii) 傅里叶级数，$S(x) = \begin{cases} f(x), & x \text{ 连续} \\ \frac{f(x^-)+f(x^+)}{2} & \text{间断} \end{cases}$

2 幂级数：(1) 收敛域 (端点的敛散性)　$R=\frac{1}{\rho}$. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{2n}$

② 和函数：i) 先导后积　等比级数和函数

ii) 先积后导　(首项、公比)

iii) 展开式.

$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$　$x \in \boxed{}$

(*) iv) 构造关于 $S(x)$ 的微分方程

$x \in [\quad]$

(*) iv) 构造f(x) ……

③ 展开。间接法. 求导 积分, 逐项等

3、傅里叶级数; ① 画图
② 间断点. $\frac{1}{2}$
③ 计算 a_n, b_n.

$f(x) = \text{------}$, 对间断点

二 习题.

例 $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$ 收敛.

解: $(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}) - (\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = \frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

$$= \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+2}}{(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} = -\boxed{\frac{2}{(\quad)(\quad)(\sqrt{n}+\sqrt{n+2})}}$$

$$\sim \frac{C}{n^{\frac{3}{2}}} \quad (n\to\infty)$$

例 $\sum_{n=1}^{\infty}(2n-\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1})$. 收敛

解: $u_n = (n-\sqrt{n^2-1}) - (\sqrt{n^2+1}-n)$

$$= \frac{1}{n+\sqrt{n^2-1}} - \frac{1}{n+\sqrt{n^2+1}} = \cdots \sim \frac{C}{n^3} (n\to\infty)$$

例 $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[n]{n}}+\cdots$ 发散

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ $\qquad \underset{\sim\sim\sim}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=1\neq 0}$

例 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\sqrt[n]{n}}$ <u>发散</u>. $\qquad \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$ ______

$$\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}\sim\frac{1}{n}\ (n\to\infty)$$

例 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$ <u>收敛</u>.

解: $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{\frac{2n-1}{n}}$

$$=\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}<1.$$

例 $u_n>0$. $\underset{\sim\sim\sim}{\frac{u_{n+1}}{u_n}\geqslant\frac{n}{n+1}}$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ <u>发散</u>.

解: $\frac{u_2}{u_1}\geqslant\frac{1}{2}$, $\frac{u_3}{u_2}\geqslant\frac{2}{3}$, $\frac{u_4}{u_3}\geqslant\frac{3}{4}$.

$$\frac{u_2}{u_1}\cdot\frac{u_3}{u_2}\cdot\frac{u_4}{u_3}\cdots\frac{u_{n+1}}{u_n}\geqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{n}{n+1}.$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_1}\geqslant\frac{1}{n+1}\qquad u_{n+1}\geqslant u_1\cdot\frac{1}{n+1}.$$

"大"发散 ⇐ "小"发散

例 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n\ (u_n\geqslant 0)$ 收敛. <u>$p>\frac{1}{2}$</u>. 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{u_n}}{n^p}$ <u>收敛</u>.

解: $\sqrt{u_n}\cdot\frac{1}{n^p}\leqslant\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{1}{n^{2p}}\right)$. $\qquad 2p>1$.

解：$\sqrt{u_n}\cdot\frac{1}{n^p}\leq\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{1}{n^{2p}}\right)$　$2p>1$.

$\Downarrow$ 收　$\Downarrow$ 收

收．$\Leftarrow$ 收 + 收．

例 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln(1+n)}$ ______．（~~绝对~~，条件 ✓，或~~发散~~）

解：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(1+n)}$ 发散　$\ln(1+n)<n$

$\frac{1}{\ln(1+n)}>\frac{1}{n}$.

$\left\{\frac{1}{\ln(1+n)}\right\}\downarrow$ 且 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(1+n)}=0$

例 $\sum_{n=1}^{\infty}x^{n^2}$ 的收敛域 $(-1,1)$．　$\sum_{n=1}^{\infty}x^n - x\in(-1,1)$

解：$\sum_{n=1}^{\infty}|x^{n^2}|$ 正项

$$\rho(x)=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|x|^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}|x|^n=\begin{cases}0<1 \text{ 收敛}, & |x|<1\\ +\infty>1 \text{ 发散}, & |x|>1\end{cases}$$

例 $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=x\underline{(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}}$　$(1+x)^m$.

$$(\sqrt{1+x^2})'=\left[(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\right]'$$　$\ln(1+x)$

$$\left[\ln(x+\sqrt{1+x^2})\right]'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

例. $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-\lambda \ln k}$ 收敛，则λ满足 $\lambda > \frac{1}{\ln 2}$.

解: $e^{-\lambda \ln k} = e^{\ln k^{-\lambda}} = \frac{1}{k^{\lambda}}$

$\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda \ln k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\lambda}}$

$\lambda > 1$ 收敛

$\lambda \le 1$ 发散,

$2^{-\lambda \ln k} = e^{\boxed{(\ln 2)(-\lambda}\ln k)} = \frac{1}{k^{\lambda \ln 2}}$

例 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. $\underline{a_{n+4} = a_n}$. 求和函数

$a_4 = a_0$ $\quad (a_0 + \cdots + a_3 x^3) x^4$

解: $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + (a_0 x^4 + a_1 x^5 + a_2 x^6 + a_3 x^7 \cdots$

$= (a_0 + \cdots + a_3 x^3)[1 + x^4 + x^8 + \cdots]$

$= (a_0 + \cdots + a_3 x^3) \cdot \frac{1}{1 - x^4}.$ $x \in (-1, 1)$.

例 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \underline{\frac{\sin x + x\cos x}{2}}$. $x \in (-\infty, +\infty)$.

解: $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$, $x \in R$.

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)}{1} x^{2n+1}$ 先积后导.

$2 S(x) = \sum (-1)^n \frac{2n+2}{(2n+1)!} x^{2n+1}$

$$2S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+2}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$= \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{(2n+1)!} \right]'$$

$$\|$$

$$\sin x + x\cos x = (x \sin x)'$$