

# 数学建模作业5

李昊伦 2023211595

## 问题1：确定性存贮策略关系及最优进货策略分析

### 两个确定性存贮策略的关系

确定性存贮模型中，常见的两种策略是 **不允许缺货** 和 **允许缺货** 的  $EOQ$  模型。二者的关系如下：

1. **共同假设**：需求恒定、补货瞬时完成、无数量折扣。

2. **差异**：

**不允许缺货模型**：总成本包括订货成本  $\frac{DK}{Q}$  和存储成本  $\frac{hQ}{2}$ ，最优订货量

$$Q^* = \sqrt{\frac{2DK}{h}}。$$

**允许缺货模型**：总成本增加缺货成本  $\frac{b(Q-S)^2}{2Q}$ ，最优订货量  $Q^* = \sqrt{\frac{2DK}{h} \cdot \frac{h+b}{b}}$ ，最

大缺货量  $S^* = \sqrt{\frac{2DK}{b} \cdot \frac{h}{h+b}}$ 。

3. **联系**：当缺货成本  $b \rightarrow \infty$ ，允许缺货模型退化为不允许缺货模型。

### 在特定条件下的最优策略分析

当“经营物品单一，市场需求恒定，市场开放”时：

- 市场开放**意味着供应商可随时补货，缺货会导致客户流失或信誉损失（隐含缺货成本极高）。
- 此时缺货成本  $b$  趋近于无穷大，允许缺货模型的最优解与不允许缺货模型一致。
- 结论**：最优策略为不允许缺货，总成本最低且避免隐性损失。

## 问题2：报童问题最优购入量及推导

### 参数定义与最优条件

- 过剩成本  $a = 0.1$ （未售出报纸的残值损失），缺货成本  $b = 1$ （未满足需求的利润损失），采购成本  $c = 2$ 。
- 临界分位数**：最优服务水平  $\frac{ba}{a+b} = \frac{1}{0.1+1} \approx 0.9091$ 。
- 需求  $r \sim N(1000, 100^2)$ ，求  $q^*$  使  $P(r \leq q^*) = 0.9091$ 。

### 计算过程

- 标准正态分布  $Z$  满足  $\Phi(Z) = 0.9091$ ，查表得  $Z \approx 1.34$ 。
- 最优订购量：  $q^* = \mu + Z \cdot \sigma = 1000 + 1.34 \times 100 = 1134$  份。

### 最优性条件推导

- 期望利润函数**：  $E[Profit] = \int_0^q [br - a(q-r)]f(r)dr + \int_q^\infty [bq - c(r-q)]f(r)dr$ 。
- 对  $q$  求导**：  $\frac{dE[Profit]}{dq} = b \int_q^\infty f(r)dr - a \int_0^q f(r)dr = 0$ 。
- 化简得**：  $P(r \leq q^*) = \frac{b}{a+b}$ 。

**经济含义**：边际收益（避免缺货的收益）等于边际损失（过剩库存的损失），达到利润最大化。

### 问题3: $(s, S)$ 策略模型缺陷分析

**课程模型的结论:**  $S$ 的取值与一次性进货费用无关。

**现实矛盾:** 实际中, 订货成本影响补货频率和批量, 进而影响目标库存水平 $S$ 。

**模型缺陷:**

1. **假设偏差:** 模型可能假设订货成本仅影响触发点 $s$ , 而忽略其对 $S$ 的间接影响。
2. **静态视角:** 未考虑动态调整, 当订货成本变化时, 企业应同时优化 $s$  和  $S$ 。
3. **成本分离假设:** 错误地将订货成本与库存持有成本、缺货成本分离, 导致 $S$ 仅由后两者决定。

**修正方向:** 引入联合优化框架, 使 $S$ 同时依赖订货成本、持有成本及需求波动性。