北京邮电大学 2018-2019 学年第二学期

《高等数学》（下）期末考试试题（A1）

答案及参考评分标准

一. 填空题（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(n+1/n)^n}$ 是____________, (填收敛或发散).

填： 收敛

2. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^n}{n\cdot 4^n}$ 的收敛域为 _______________.

填: $[0,8)$

3. 已知 $f(x)=x^2+x, x\in[0,1]$，$S(x)$ 是 $f(x)$ 的周期为 1 的三角级数的和函数, 则 $S(0), S(1/2)$ 分别是_______ ，______.

填: $1, \frac{3}{4}$

4. 极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+2y^2)\sin\frac{1}{xy}=$_______________.

填: 0

5. 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F\left(x+\frac{z}{y}, y+\frac{z}{x}\right)=0$ 确定, 则 $\frac{\partial z}{\partial x}=$___.

填:

$$-\frac{x^2yF_1'-yzF_2'}{x^2F_1'+xyF_2'}$$

6. 函数 $u=\ln(x+\sqrt{y^2+z^2})$ 在点 $A(1,0,1)$ 处沿点 A 指向点 $B(3,-2,2)$ 方向的方向导数为___________.

填: $\dfrac{1}{2}$

7. 曲线 $x=\dfrac{t^3}{3}, y=\dfrac{t^2}{2}, z=2t$ 上 $t=1$ 对应点处的切线方程为________.

填: $\dfrac{x-1/3}{1}=\dfrac{y-1/2}{1}=\dfrac{z-2}{2}$

8. 设 $f(r)$ 可微, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 则 $\mathbf{grad} f(r)=$____________.

填: $\dfrac{1}{r}f'(r)(x,y,z)$

9. 交换积分次序 $\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dx=$_________________.

填: $\int_0^1 dx\int_0^{x^2} f(x,y)dy+\int_1^{\sqrt{2}} dx\int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy$

10. 设

$C:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 的周长为 a, 则 $\oint_C (3x^2+4y^2+y)ds=$______.

填: $12a$

二(10 分). 已知 $z=f(u,v), u=x+y, v=xy$, 且 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数, 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial u}+y\dfrac{\partial f}{\partial v},\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial f}{\partial u}+x\dfrac{\partial f}{\partial v}$ **(2 分)**

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial u}+y\frac{\partial f}{\partial v}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(y\frac{\partial f}{\partial v}\right)$$

$$=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+x\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+\frac{\partial f}{\partial v}+y\left(\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}+x\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right)$$

$$=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+x\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+y\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}+xy\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}+\frac{\partial f}{\partial v}$$

$$=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+(x+y)\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+xy\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}+\frac{\partial f}{\partial v} \qquad \text{（6 分）}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial u}+x\frac{\partial f}{\partial v}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(x\frac{\partial f}{\partial v}\right)$$

$$=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+x\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+x\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}+x^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$$

$$=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+2x\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+x^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \qquad \text{（10 分）}$$

三（10 分）. 在椭球面$x^2+y^2+\frac{z^2}{4}=1$的第一卦限部分上求一点，使椭球面在该点处的切平面在三个坐标轴上的截距的平方和最小，并求出最小值.

解　设$M(x,y,z)$是椭球面第一卦限部分上任一点，则切平面方程为

$$xX+yY+\frac{1}{4}zZ=1 \qquad \text{（2 分）}$$

其中(X,Y,Z)表示切平面上的任意点的坐标. 于是有

$$\frac{X}{1/x}+\frac{Y}{1/y}+\frac{Z}{4/z}=1$$

截距的平方和为　$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{16}{z^2}$ 　　**（4 分）**

令　　$F(x,y,z,\lambda)=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{16}{z^2}+\lambda(x^2+y^2+\frac{z^2}{4}-1)$

解方\

程组$\begin{cases} F_x = -\dfrac{2}{x^3} + 2\lambda x = 0 \\ F_y = -\dfrac{2}{y^3} + 2\lambda y = 0 \\ F_z = -\dfrac{32}{z^3} + \dfrac{\lambda}{2} z = 0 \\ F_\lambda = x^2 + y^2 + z^2/4 - 1 = 0 \end{cases}$ 得惟一驻点$M_0\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, \sqrt{2}\right)$ **（8 分）**

由问题的实际意义,截距平方和必在点M_0达到最小. 最小值为

$$\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{16}{z^2}\right)_{M_0} = 16$$ **（10 分）**

四（10 分）求幂级数的 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ 的收敛区域及和函数, 并求极限

$\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{1^2}{2^1} + \dfrac{2^2}{2^2} + \dfrac{3^2}{2^3} + \cdots + \dfrac{n^2}{2^n}\right)$的值.

解 易求出幂级数的收敛半径为$R = 1$, 收敛区域为$(-1,1)$. **（2 分）**

令 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n,\ x \in (-1,1)$. 则在$(-1,1)$内有

$$S(x) = x\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} = x\left(\sum_{n=1}^{\infty} n x^n\right)' = x\left(x\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}\right)'$$ **（4 分）**

而 $$x\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = x\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right)' = x\left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{x}{(1-x)^2},$$

所以 $$S(x) = x\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)' = x\frac{(1-x) + x\cdot 2}{(1-x)^3} = \frac{x + x^2}{(1-x)^3}.$$ **（8 分）**

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^2}{2^1} + \frac{2^2}{2^2} + \frac{3^2}{2^3} + \cdots + \frac{n^2}{2^n}\right)$$

$$=S\left(\frac{1}{2}\right)=6$$ **(10 分)**

五(10 分). 设Ω由$\sqrt{x^2+y^2}\le z\le\sqrt{2-x^2-y^2}, 0\le x\le y\le\sqrt{3}x$所确定. $f(x,y,z)$为连续函数. $I=\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz.$

(1) 分别把上述三重积分I表示成柱面坐标和球面坐标下的累次积分;

(2) 设$f(x,y,z)=z^3$, 求出I的值.

解 (1) Ω用柱面坐标表示为

$$\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{3},\quad 0\le r\le 1, r\le z\le\sqrt{2-r^2}$$

$$I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_0^1\rho d\rho\int_{\rho}^{\sqrt{2-\rho^2}} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)dz$$ **(3 分)**

Ω用球面坐标表示为

$$\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{3},\quad 0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}, 0\le r\le\sqrt{2}$$

$$I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{\sqrt{2}} f(r\sin\varphi\cos\theta,r\sin\varphi\sin\theta,r\cos\varphi)r^2\sin\varphi dr$$

(6 分)

(2) 当$f(x,y,z)=z^3$时, 有

$$I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{\sqrt{2}} r^3\cos^3\varphi\cdot r^2\sin\varphi dr$$

$$=\frac{\pi}{48}$$ **(10 分)**

六(10 分). 计算曲线积分$I=\oint\limits_C\dfrac{ydx-(x-1)dy}{(x-1)^2+y^2/4}$. 其中积分曲线$C$是:

(1) $x^2+4y^2=8y$ 逆时针方向; (2) $4x^2+y^2=8x$ 逆时针方向.

解 $P=\dfrac{y}{(x-1)^2+y^2/4}$，$Q=\dfrac{-(x-1)}{(x-1)^2+y^2/4}$

当 $(x,y)\neq(1,0)$ 时, 有

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{-[(x-1)^2+y^2/4]+2(x-1)^2}{[(x-1)^2+y^2/4]^2}=\frac{(x-1)^2-y^2/4}{[(x-1)^2+y^2/4]^2}$$
$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{[(x-1)^2+y^2/4]-y^2/2}{[(x-1)^2+y^2/4]^2}=\frac{(x-1)^2-y^2/4}{[(x-1)^2+y^2/4]^2}$$

从而 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$. **（4 分）**

（1）当 C 为 $x^2+4y^2=8y$ 时, 因 P,Q 的奇点 $(1,0)$ 在 C 外部, 所以有

$$I=\oint_C\frac{ydx-(x-1)dy}{(x-1)^2+y^2}=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\iint_D 0dxdy=0$$ **（6 分）**

（2）当 C 为 $4x^2+y^2=8x$ 时, 因 P,Q 的奇点 $(1,0)$ 在 C 内部,此时不能直接用格林公式. 令 $C:x-1=\cos t, y=2\sin t, t:0\to2\pi$，计算得

$$I=\oint_C\frac{ydx-(x-1)dy}{(x-1)^2+y^2/4}=\int_0^{2\pi}\frac{2\sin t\cdot(-\sin t)-\cos t\cdot 2\cos t}{\cos^2 t+\sin^2 t}dt$$
$$=-4\pi.$$ **（10 分）**

七（10 分）. 求球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 被平面 $z=\dfrac{1}{2}$ 与 $z=1$ 所夹部分 Σ 的面积.

解 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=4\\ z=1/2\end{cases}$ 在 xoy 平面上的投影为 $\begin{cases}x^2+y^2=\dfrac{15}{4}\\ z=0\end{cases}$,

$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=4\\ z=1\end{cases}$ 在 xoy 平面上的投影为 $\begin{cases}x^2+y^2=3\\ z=0\end{cases}$.

Σ 在 xoy 面上的投影区域为 $D:\sqrt{3}\le x^2+y^2\le\dfrac{\sqrt{15}}{2}$，$\Sigma$ 的方程为

$z=\sqrt{4-x^2-y^2}$.　　　　　　　　　　　　　　　　　　**（3 分）**

$$dS=\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy$$

$$=\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\right)^2+\left(\frac{-y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\right)^2}\,dxdy$$

$$=\frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\,dxdy$$　　　　　　　　　　　　　　　　　　**（5 分）**

所夹部分面积为

$$S=\iint_D\frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\,dxdy=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{15}/2}\frac{r}{\sqrt{4-r^2}}\,dr$$

$$=4\pi\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{15}/2}\frac{r}{\sqrt{4-r^2}}\,dr=-4\pi\sqrt{4-r^2}\,\Big|_{\sqrt{3}}^{\sqrt{15}/2}$$

$$=2\pi.$$　　　　　　　　　　　　　　　　　　**（10 分）**

八（10 分）．设积分曲面是 $\Sigma:z=4-x^2-y^2$ 位于 xoy 平面上方部分的上侧，求曲面积分 $I=\iint_\Sigma x^2yz^2dydz-xy^2z^2dzdx+z(1+xyz)dxdy$.

解　补充曲面块 $\Sigma_0:x^2+y^2\le 4, z=0$ ，取下侧．则

$$I=\oiint_{\Sigma+\Sigma_0}x^2yz^2dydz-xy^2z^2dzdx+x(1+xyz)dxdy$$

$$-\iint_{\Sigma_0}x^2yz^2dydz-xy^2z^2dzdx+x(1+xyz)dxdy$$　　　　　　**（2 分）**

记 Ω 是 $\Sigma+\Sigma_0$ 所围成的区域．则

$$\oiint_{\Sigma+\Sigma_0} x^2yz^2dydz - xy^2z^2dzdx + x(1+xyz)dxdy$$

$$= \iiint_{\Omega} (2xyz^2 - 2xyz^2 + 1 + 2xyz)dxdydz$$

$$= \iiint_{\Omega} dxdydz + \iiint_{\Omega} 2xyz)dxdydz = \iiint_{\Omega} dxdydz$$

$$= \int_0^4 dz \iint_{x^2+y^2\le 4-z} dxdy = \int_0^4 \pi(4-z)dz$$

$$= -\frac{1}{2}\pi(4-z)^2 \Big|_0^4 = 8\pi$$ （7 分）

又 $$\iint_{\Sigma_0} x^2yz^2dydz - xy^2z^2dzdx + x(1+xyz)dxdy = \iint_{\Sigma_0} xdxdy$$

$$= -\iint_{x^2+y^2\le 4} xdxdy = 0$$

所以 $I = 8\pi$. （10 分）