第二节　正态总体均值的假设检验

一、单个总体均值 μ 的检验

二、两个总体均值差的检验(t 检验)

三、基于成对数据的检验(t 检验)

四、小结

一、单个总体$N(\mu,\sigma^2)$均值μ 的检验

1. σ^2 为已知, 关于μ的检验(Z 检验)

在上节中讨论过正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$,

当σ^2为已知时, 关于$\mu=\mu_0$的检验问题:

(1) 假设检验 $H_0:\mu=\mu_0$, $H_1:\mu\neq\mu_0$;

(2) 假设检验 $H_0:\mu\leq\mu_0$, $H_1:\mu>\mu_0$;

(3) 假设检验 $H_0:\mu\geq\mu_0$, $H_1:\mu<\mu_0$.

在这些检验问题中，我们都是利用统计量

$Z=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ 来确定拒绝域的，这种检验法称为

Z 检验法.

2. σ^2为未知, 关于μ的检验(t检验)

设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, 其中μ,σ^2未知，我们来求**检验问题**

$$H_0: \mu = \mu_0, \quad H_1: \mu \neq \mu_0;$$

的拒绝域 (显著性水平为α).

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的样本, 由于 σ^2 未知, 现在不能利用 $\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ 来确定拒绝域 .

注意到S^2 是 σ^2 的无偏估计, 我们用S 来代替σ,

采用

$$t=\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$$

来作为检验统计量. 当观察值 $|t|=\left|\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\right|$ 过分大时就拒绝 H_0, 拒绝域的形式为

$$|t|=\left|\frac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\right|\geq k.$$

根据第六章§2定理三　　定理三

当H_0为真时, $\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$, **故由**

$$P\{当 H_0 为真, 拒绝 H_0\}=P_{\mu_0}\left\{\left|\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\right|\geq k\right\}=\alpha,$$

得 $k=t_{\alpha/2}(n-1)$, 即得

拒绝域为 $|t|=\left|\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\right| \geq t_{\alpha/2}(n-1)$.

对于正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$, 当σ^2未知时, **关于** μ 的单边检验的拒绝域在表 8.1 中给出.

上述利用 t 统计量得出的检验法称为t 检验法.

在实际中, 正态总体的方差常为未知, 所以我们常用t 检验法来检验关于正态总体均值的检验问题.

例1 某种电子元件的寿命X(以小时计)服从正态分布, μ,σ^2 均为未知. 现测得16只元件的寿命如下:

159	280	101	212	224	379	179	264
222	362	168	250	149	260	485	170

问是否有理由认为元件的平均寿命大于225(小时)?

解 依题意需检验假设

$$H_0:\mu \le \mu_0 = 225,\ \ H_1:\mu > 225,$$

取 $\alpha = 0.05,\quad n = 16,\quad \bar{x} = 241.5,\quad s = 98.7259,$

t表分布

查表得

$$t_{0.05}(15) = 1.7531 \ > \ t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = 0.6685$$

故接受 H_0, 认为元件的平均寿命不大于225小时.

二、两个总体$N(\mu_1,\sigma_1^2), N(\mu_2,\sigma_2^2)$的情况

利用t检验法检验具有相同方差的两正态总体均值差的假设.

设 $X_1, X_2, \cdots, X_{n_1}$ 为来自正态总体 $N(\mu_1,\sigma^2)$ 的样本, $Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n_2}$ 为来自正态总体 $N(\mu_2,\sigma^2)$的样本 ,且设两样本独立 .又设 $\overline{X},\overline{Y}$ 分别是总体 的样本均值, S_1^2, S_2^2是样本方差 , μ_1, μ_2, σ^2均为未知,要特别注意的是，这里假设两总体的方差 相等.

现在来求检验问题：

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = \delta, \quad H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq \delta$$

(δ 为已知常数)的拒绝域．取显著性水平为 α.

引入下述 t 统计量作为检验统计量：

$$t = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - \delta}{S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}},$$

其中 $S_w^2 = \dfrac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$, $S_w = \sqrt{S_w^2}$.

由 $P\{H_0 \text{为真, 拒绝} H_0\}$

$$= P_{\mu_1-\mu_2=\delta}\left\{\left|\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-\delta}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\right| \geq k\right\} = \alpha$$

可得 $k = t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)$. **故得拒绝域为**

$$t = \frac{|(\bar{x}-\bar{y})-\delta|}{s_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}} \geq t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2).$$

关于均值差的其他两个检验问题的拒绝域见表8.1, 常用的是 $\delta = 0$ 的情况.

当两个正态总体的方差均为已知(不一定相等)时，我们可用 Z 检验法来检验两正态总体均值差的假设问题，见表8.1 .

例2 用两种方法（**A**和**B**）测定冰自**−0.72°C**转变为**0°C**的水的融化热(以卡 / 克计). 测得以下数据:

方法**A**:

79.98 80.04 80.02 80.04 80.03 80.03

80.04 79.97 80.05 80.03 80.02 80.00 80.02

方法B：

80.02 79.94 79.98 79.97 79.97 80.03 79.95 78.97

设这两个样本相互独立，且分别来自正态总体 $N(\mu_1,\sigma^2)$和$N(\mu_2,\sigma^2)$，μ_1,μ_2,σ^2均未知.试检验假设（取显著性水平$\alpha = 0.05$）：

$$H_0:\ \mu_1-\mu_2 \le 0,$$

$$H_1:\ \mu_1-\mu_2 > 0,$$

解　分别画出对应于方法A和方法B的数据的箱线图(图8－3略)，如图这两种方法所得的结果具有明显差异的，现在来检验上述我们看到的假设.

$$n_1 = 13, \quad \overline{x}_A = 80.02,$$

$$s_A^2 = 0.024^2,$$

$$n_2 = 8, \quad \overline{x}_B = 79.98,$$

$$s_B^2 = 0.03^2,$$

$$s_w^2 = \frac{12 \times s_A^2 + 7 \times s_B^2}{19} = 0.0007178.$$

$$t = \frac{\overline{x}_A - \overline{x}_B}{s_w \sqrt{1/13 + 1/8}} = 3.33 > t_{0.05}(13 + 8 - 2) = 1.7291.$$

故拒绝H_0, 认为方法 A 比方法 B 测得的融化热要大.

若H_0为真，则H_0中的$\mu_1-\mu_2$总比H_1中的小，则拒绝域为：

$$\overline{x}-\overline{y}\geq k(k\text{为一常数})$$

令$P_{\mu_1-\mu_2\leq 0}\{\overline{X}-\overline{Y}\geq k\}=\alpha$

考虑统计量$t=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_1}}}$

$$\text{则}P_{\mu_1-\mu_2\leq 0}\{\overline{X}-\overline{Y}\geq k\}=P_{\mu_1-\mu_2\leq 0}\left\{\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_1}}}\geq\frac{k}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_1}}}\right\}$$

$$\leq P_{\mu_1-\mu_2\leq 0}\left\{\frac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_1}}}\geq\frac{k}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_1}}}\right\}=\alpha$$

则$\dfrac{k}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_1}}}=t_\alpha(n_1+n_2-2)$。于是拒绝域为：$\dfrac{\overline{x}-\overline{y}}{s_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_1}}}\geq t_\alpha(n_1+n_2-2)$

三、基于成对数据的检验(t 检验)

有时为了比较两种产品,或两种仪器, 两种方法等的差异,我们常在相同的条件下做对比试验,得到一批成对的观察值. 然后分析观察数据作出推断. 这种方法常称为**逐对比较法**.

例3 有两台光谱仪 I_x, I_y, 用来测量材料中某种金属的含量, 为鉴定它们的测量结果有无显著差异, 制备了9件试块(它们的成分、金属含量、均匀性等各不相同), 现在分别用这两台机器对每一试块测量一次, 得到9对观察值如下:

$x(\%)$	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1.00
$y(\%)$	0.10	0.21	0.52	0.32	0.78	0.59	0.68	0.77	0.89
$d = x - y(\%)$	0.10	0.09	-0.12	0.18	-0.18	0.11	0.12	0.13	0.11

问能否认为这两台仪器的测量结果有显著的差异?

$(\alpha = 0.01)$

分析： 本题中的数据是成对的，即同一试块测得一对数据，我们看到一对与另一对之间的差异是由各种因素，如材料成分、金属含量、均匀性等因素引起的． 由于各试块的特性有广泛的差别，表中第一行不能看成是一个样本的样本值．表中第二行也不能看成是一个样本的样本值(因为不是同分布的)．

而同一对中**两个数据的差异**则可看成是仅由这两台仪器性能的差异所引起的,因此，这些**数据对的差值可看成一个样本的样本值。**

一般，设有n对相互独立的观察结果（X_1,Y_1),…,（X_n,Y_n)，令$D_i= X_i -Y_i$，$i=1,2,…,n$.于是$D_1,…,D_n$相互独立，且由于$D_1,…,D_n$由同一因素引起，因此，$D_1,...,D_n$同分布。

设 $D_i = X_i - Y_i (i = 1,2,\cdots,n)$来自正态总体$N(\mu_D,\sigma_D^2)$,
这里 μ_D,σ_D^2均为未知.

我们需要根据样本对如下可能的假设进行检验：

(1) 假设检验 $H_0: \mu_D = 0,\ H_1: \mu_D \neq 0$;

(2) 假设检验 $H_0: \mu_D \leq 0,\ H_1: \mu_D > 0$;

(3) 假设检验 $H_0: \mu_D \geq 0,\ H_1: \mu_D < 0$;

解:

表中第三行表示各对数据的差 $d_i = x_i - y_i$,

设 $D_i = X_i - Y_i (i = 1, 2, \cdots, n)$来自正态总体$N(\mu_D, \sigma_D^2)$,

这里 μ_D, σ_D^2均为未知. **若两台机器的性能一样,**

则各对数据的差异 $d_1, d_2, \cdots, d_n$ 属随机误差,

随机误差可以认为服从正态分布, 其均值为零.

需检验假设

$$H_0 : \mu_D = 0, \quad H_1 : \mu_D \neq 0;$$

设 $D_1, D_2, \cdots, D_n$ 的样本均值 $\bar{d}$, 样本方差 s_D^2,

拒绝域为 $|t| = \left|\dfrac{\bar{d} - 0}{s_D / \sqrt{n}}\right| \geq t_{\alpha/2}(n-1)$,

现在 $n = 9$, $t_{\alpha/n} = t_{0.005}(8) = 3.3554$, 即知拒绝域为

$$|t| = \left|\frac{\bar{d}}{s_D / \sqrt{n}}\right| \geq 3.3554.$$

由观察值得 $\bar{d} = 0.06$, $s_D = 0.1227$,

$$t = \frac{0.06}{0.1227 / \sqrt{9}} = 1.467 < 3.3554$$

现$|t|$的值不落在拒绝域内,故接受H_0,认为两台机器的测量结果并无显著差异.

例4 **做以下的实验以比较人对红光或绿光的反应时间（以秒计）．实验在点亮红光或绿光的同时，启动计时器，要求受试者见到红光或绿光点亮时，就按下按钮，切断记时器，这就能测得反应时间. 测得的结果如下表：**

红光(x)	0.30	0.23	0.41	0.53	0.24	0.36	0.38	0.51
绿光(y)	0.43	0.32	0.58	0.46	0.27	0.41	0.38	0.61
$d = x - y$	−0.13	−0.09	−0.17	0.07	−0.03	−0.05	0.00	−0.10

设$D_i = X_i - Y_i$ $(i = 1,2,\cdots,8)$ 是来自正态总体 $N(\mu_D,\sigma_D^2)$的样本，μ_D,σ_D^2均未知. 试检验假设(取

显著性水平 $\alpha = 0.05$)

$$H_0 : \mu_D \geq 0, \quad H_1 : \mu_D < 0;$$

解 现在 $n = 8$, $\overline{x_d} = -0.0625$, $s_d = 0.0765$,

而

$$\frac{\overline{x_d}}{s_d / \sqrt{8}} = -2.311 < -t_{0.05}(7) = -1.8946$$

故拒绝 H_0, 认为 $\mu_D < 0$, 即认为人对红光的反应时间小于对绿光的反应时间, **也就是人对红光的反应要比绿光快.**

补充例题

四、小结

本节学习的正态总体均值的假设检验有:

1. 单个总体均值 μ 的检验 — Z 检验;

2. 两个总体均值差 $\mu_1 - \mu_2$ 的检验 — t 检验;

3. 基于成对数据的检验 — t 检验;

正态总体均值、方差的检验法见下表

(显著性水平为 α)

	原假设H_0	检验统计量	备择假设H_1	拒绝域
1	$\mu \le \mu_0$ $\mu \ge \mu_0$ $\mu = \mu_0$ (σ^2已知)	$Z = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$	$\mu > \mu_0$ $\mu < \mu_0$ $\mu \ne \mu_0$	$z \ge z_\alpha$ $z \le -z_\alpha$ $\lvert z \rvert \ge z_{\alpha/2}$
2	$\mu \le \mu_0$ $\mu \ge \mu_0$ $\mu = \mu_0$ (σ^2未知)	$t = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}}$	$\mu > \mu_0$ $\mu < \mu_0$ $\mu \ne \mu_0$	$t \ge t_\alpha(n-1)$ $t \le -t_\alpha(n-1)$ $\lvert t \rvert \ge t_{\alpha/2}(n-1)$
3	$\mu_1 - \mu_2 \le \delta$ $\mu_1 - \mu_2 \ge \delta$ $\mu_1 - \mu_2 = \delta$ (σ_1^2, σ_2^2已知)	$Z = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y} - \delta}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$	$\mu - \mu_0 > \delta$ $\mu - \mu_0 < \delta$ $\mu - \mu_0 \ne \delta$	$z \ge z_\alpha$ $z \le -z_\alpha$ $\lvert z \rvert \ge z_{\alpha/2}$
4	$\mu_1 - \mu_2 \le \delta$ $\mu_1 - \mu_2 \ge \delta$ $\mu_1 - \mu_2 = \delta$ ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$未知)	$t = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y} - \delta}{S_w \sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}}$ $S_w^2 = \dfrac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 2)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$	$\mu - \mu_0 > \delta$ $\mu - \mu_0 < \delta$ $\mu - \mu_0 \ne \delta$	$t \ge t_\alpha(n_1 + n_2 - 2)$ $t \le -t_\alpha(n_1 + n_2 - 2)$ $\lvert t \rvert \ge t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 1)$

	原假设H_0	检验统计量	备择假设H_1	拒绝域
5	$\sigma^2 \le \sigma_0^2$ $\sigma^2 \ge \sigma_0^2$ $\sigma^2 = \sigma_0^2$ (μ未知)	$\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$	$\sigma^2 > \sigma_0^2$ $\sigma^2 < \sigma_0^2$ $\sigma^2 \ne \sigma_0^2$	$\chi^2 \ge \chi_\alpha^2(n-1)$ $\chi^2 \le \chi_{1-\alpha}^2(n-1)$ $\chi^2 \ge \chi_{\alpha/2}^2(n-1)$或 $\chi^2 \le \chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)$
6	$\sigma_1^2 \le \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 \ge \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ (μ_1,μ_2未知)	$F = \dfrac{S_1^2}{S_2^2}$	$\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 \ne \sigma_2^2$	$F \ge F_\alpha(n_1-1,n_2-1)$ $F \le F_{1-\alpha}(n_1-1,n_2-1)$ $F \ge F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)$或 $F \ge F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)$
7	$\mu_D \le 0$ $\mu_D \ge 0$ $\mu_D = 0$ (成对数据)	$t = \dfrac{\overline{D}-0}{S_D/\sqrt{n}}$	$\mu_D > 0$ $\mu_D < 0$ $\mu_D \ne 0$	$t \ge t_\alpha(n-1)$ $t \le -t_\alpha(n-1)$ $\lvert t\rvert \ge t_{\alpha/2}(n-1)$

第六章§2定理三

设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是总体$N(\mu,\sigma^2)$的样本，

$\overline{X}, S^2$分别是样本均值和样本方差，则有

$$\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1).$$

返回

*t*分布表

$$P\{t(n) > t_{\alpha}(n)\} = \alpha$$

n	α=0.25	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
1	1.0000	3.0777	6.3138	12.7062	31.8207	63.6574
2	0.8165	1.8856	2.9200	4.3027	6.9646	9.9248
3	0.7649	1.6377	2.3534	3.1824	4.5407	5.8409
4	0.7407	1.5332	2.1318	2.7764	3.7469	4.6041
5	0.7267	1.4759	2.0150	2.5706	3.3649	4.0322
6	0.7176	1.4398	1.9432	2.4469	3.1427	3.7074
7	0.7111	1.4149	1.8946	2.3646	2.9980	3.4995
8	0.7064	1.3968	1.8595	2.3060	2.8965	3.3554
9	[illegible]	[illegible]	1.8331	2.2622	2.8214	3.2498
10	[illegible]	[illegible]	1.8125	2.2281	2.7638	3.1693
11	[illegible]	[illegible]	1.7959	2.2010	2.7181	3.1058
12	0.6955	[illegible]	1.7823	2.1788	2.6810	3.0545
13	0.6938	1.3502	1.7709	2.1604	2.6503	3.0123
14	0.6924	1.3450	1.7613	2.1448	2.6245	2.9768
15	0.6912	1.3406	1.7531	2.1315	2.6025	2.9467
16	0.6901	1.3368	1.7459	2.1199	2.5835	2.9208

1.7531

返回