第五章　角动量

01:30:14

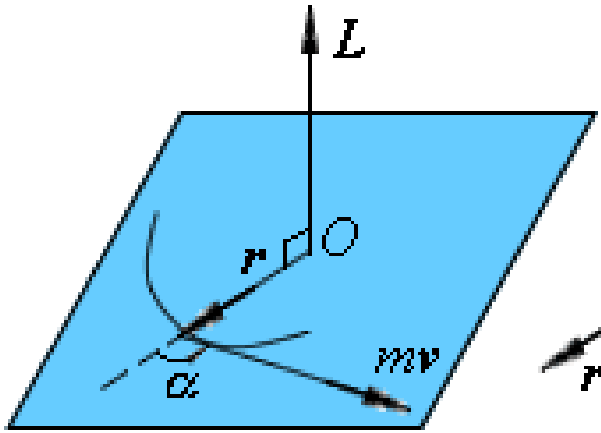
§1 质点的角动量

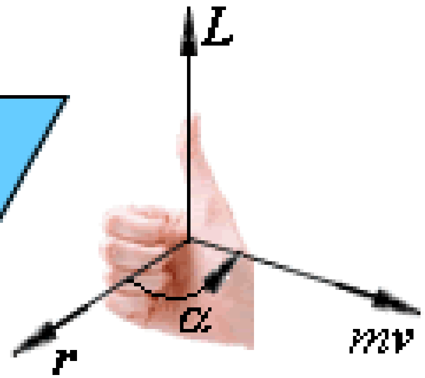
设t时刻质点相对于O点的位矢为 $\vec{r}$

质点的动量 $\vec{p}=m\vec{v}$

质点对定点O的角动量

$$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=\vec{r}\times m\vec{v}$$





- 角动量的大小： $L=rp\sin\alpha=mvr\sin\alpha$

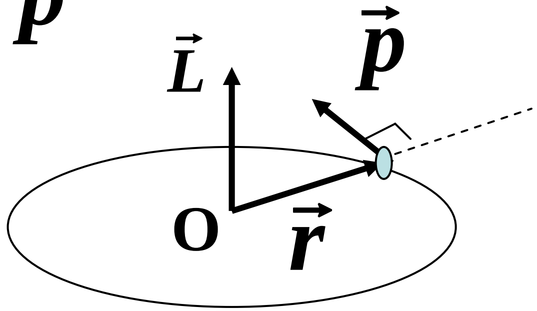
- 角动量的方向：右手定则判定

- 同一质点的运动对不同参考点的角动量不相同，在说明质点的角动量时，必须指明固定参考点。

01:30:14

•质点绕圆心O作圆周运动 $\vec{r} \perp \vec{p}$

质点对圆心的角动量大小为

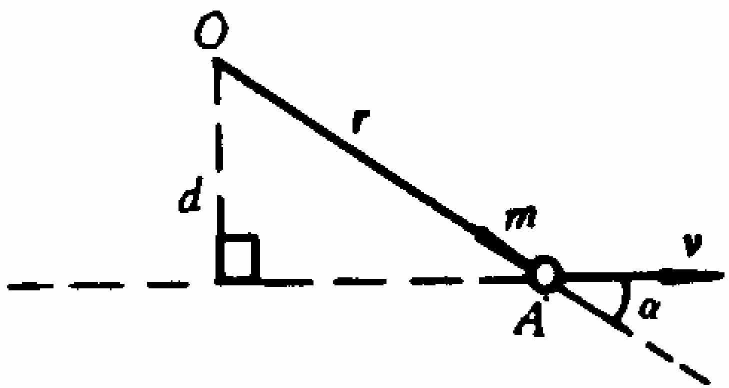


$$L = rp = rmv = mr^2\omega$$

若为匀速圆周运动，质点对圆心的角动量为恒量。

•质点沿虚线作直线运动

对某固定点o的角动量大小



$$L = mvr\sin\alpha = mvd$$

*d*为固定点到运动直线的垂直距离。

质点作匀速直线运动时，质点的角动量保持不变。

01:30:14

§2 质点的角动量定理

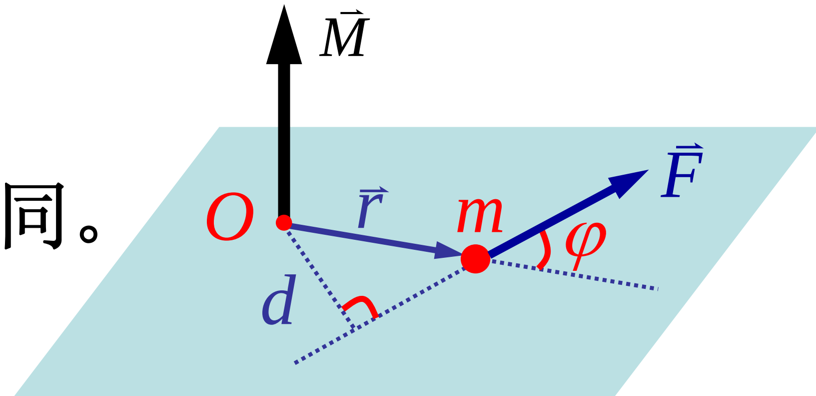
由角动量的定义 $\vec{L}=\vec{r}\times m\vec{\upsilon}$

两边对时间求导 $\dfrac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\vec{r}\times\dfrac{\mathrm{d}(m\vec{\upsilon})}{\mathrm{d}t}+\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\times m\vec{\upsilon}$

$$\frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{v}=\vec{v}\times\vec{v}=0 \qquad \frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt}=\vec{r}\times\vec{F}$$

作用力$\vec{F}$对参考点**O**的力矩

$$\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}$$



- 同一力对不同参考点的力矩不同。
- 大小： $M=Fr\sin\varphi=Fd$

力臂**d**：作用力线到参考点**O**的垂直距离

01:30:14

$$\vec{M}=\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$$ 质点的角动量定理

质点所受的合力矩等于角动量对时间的变化率

$$\vec{M}\mathrm{d}t=\mathrm{d}\vec{L} \qquad \int_{t_1}^{t_2}\vec{M}\mathrm{d}t=\vec{L}_2-\vec{L}_1$$ 积分形式

质点所受的冲量矩等于质点角动量的增量。

力矩对时间的积累改变了角动量。

•角动量定理中，力矩与角动量针对同一参考点

$$\vec{r}\times\vec{F}=\frac{d(\vec{r}\times m\vec{v})}{dt}$$

•仅适用于惯性系，固定参考点必须在惯性系中。

01:30:14

判断题： #T1501.

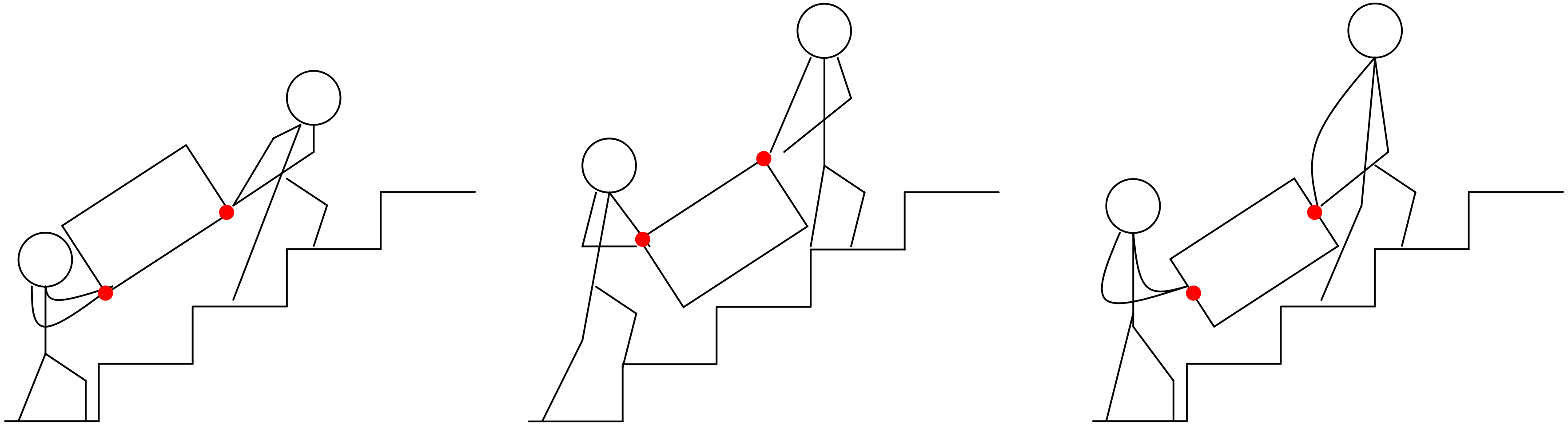
质点作圆周运动必定受到力矩的作用；
质点作直线运动必定不受力矩作用。

判断题： #T1502.

质点作匀速圆周运动合力对圆心的力矩为**0**;
质点作匀速直线运动合力对任一点的力矩为**0**

选择题： #S1501.

两人一前一后抬箱子上楼梯，哪种情况后面的人受力最小？



01:30:14

§3 对轴的角动量和力矩

$$\vec{M}=\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$$ 质点的角动量定理

直角坐标系中 $\vec{M}=M_x\vec{i}+M_y\vec{j}+M_z\vec{k}$

$$\vec{L}=L_x\vec{i}+L_y\vec{j}+L_z\vec{k}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}L_x}{\mathrm{d}t}\vec{i}+\frac{\mathrm{d}L_y}{\mathrm{d}t}\vec{j}+\frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t}\vec{k}$$

角动量定理的分量形式：

$$M_x=\frac{\mathrm{d}L_x}{\mathrm{d}t},\quad M_y=\frac{\mathrm{d}L_y}{\mathrm{d}t},\quad M_z=\frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t}$$

合力矩在某个方向上的分量等于该方向上的角动量分量对时间的变化率。

01:30:14

•在直角坐标系中，角动量的分量形式

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad \vec{p} = p_x\vec{i} + p_y\vec{j} + p_z\vec{k}$$

$$\vec{L} = (yp_z - zp_y)\vec{i} + (zp_x - xp_z)\vec{j} + (xp_y - yp_x)\vec{k}$$

$$= L_x\vec{i} + L_y\vec{j} + L_z\vec{k}$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix}$$

$$L_x = yp_z - zp_y$$

$$L_y = zp_x - xp_z$$

$$L_z = xp_y - yp_x$$

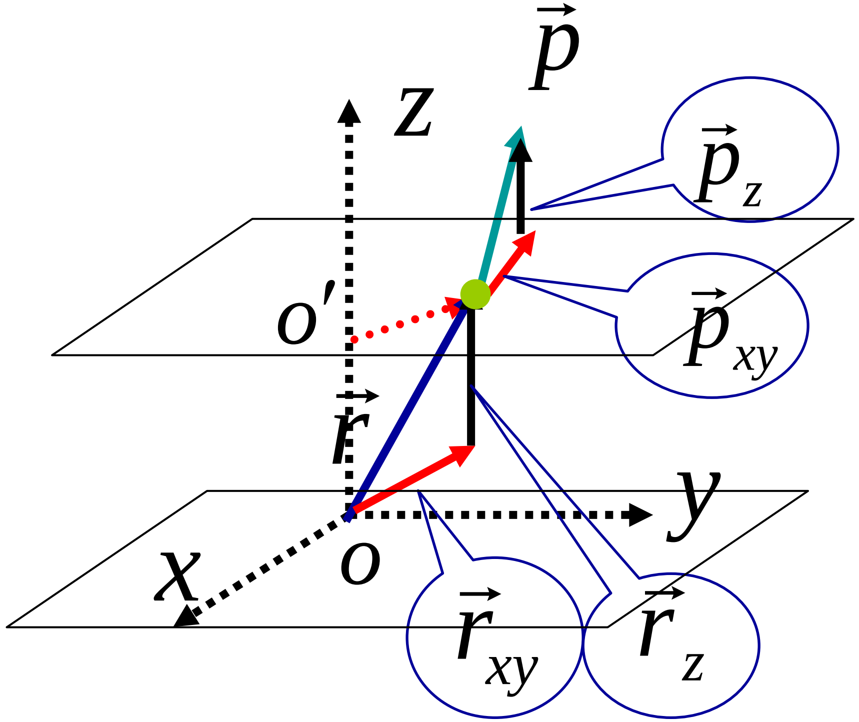
$$L_z\vec{k} = (xp_y - yp_x)\vec{k} = (x\vec{i} + y\vec{j}) \times (p_x\vec{i} + p_y\vec{j})$$

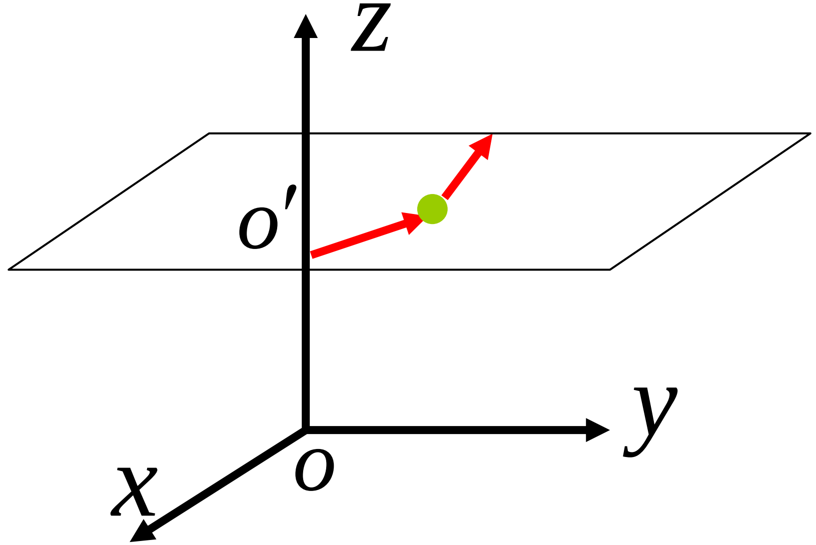
01:30:14

$$\vec{r}=(x\vec{i}+y\vec{j})+z\vec{k}=\vec{r}_{xy}+z\vec{k}$$

$$\vec{p}=(p_x\vec{i}+p_y\vec{j})+p_z\vec{k}=\vec{p}_{xy}+p_z\vec{k}$$

$$L_z\vec{k}=\vec{r}_{xy}\times\vec{p}_{xy}$$
$$=\vec{r}_{xy}\times m\vec{v}_{xy}$$





角动量在z轴方向的分量就是对z轴的角动量

对轴的角动量=对轴上任一点的角动量在轴上的投影

01:30:14

• 在直角坐标系中, 力矩的分量形式

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad \vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$\boxed{M_x = yF_z - zF_y}$$

$$\boxed{M_y = zF_x - xF_z}$$

$$\boxed{M_z = xF_y - yF_x}$$

对z轴的力矩 $\quad M_z\vec{k} = \vec{r}_{xy} \times \vec{F}_{xy}$

对z轴的角动量 $\quad L_z\vec{k} = \vec{r}_{xy} \times \vec{p}_{xy}$

角动量定理的分量形式: $M_z = \dfrac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t}$ 对轴的角动量定理

01:30:14

判断题： #T1503.

力**F**与**z**轴平行，所以力矩为**0**

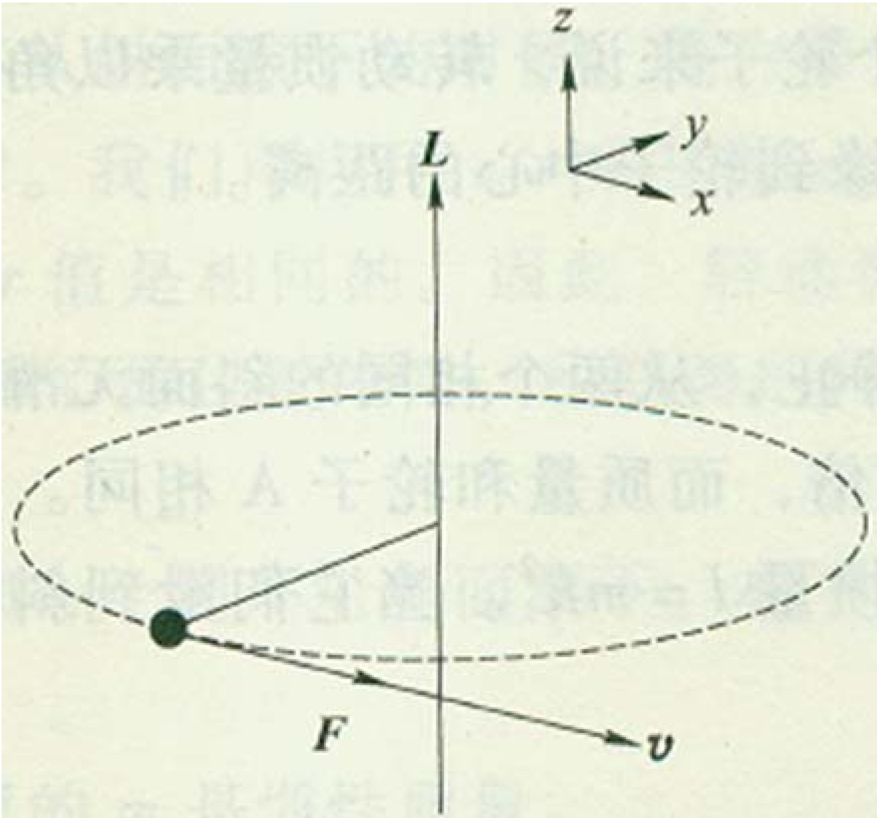
力**F'**与**z**轴垂直，所以力矩不为**0**

01:30:14

选择题： #S1502.

一个人沿着水平圆周转一个系在绳子上的网球(所以旋转轴是竖直的)。

如图，网球沿着前进的方向受到猛烈的打击，由此引起的角动量变化△*L*的方向是沿着



① *x*方向

② *y*方向

③ *z*方向

01:30:14

选择题： #S1503.

一个人沿着水平圆周转一个系在绳子上的网球(所以旋转轴是竖直的)。

如图，网球受到垂直向下方向的猛烈击打，

击打后，旋转轴向哪个方向倾斜？

① +*x*方向

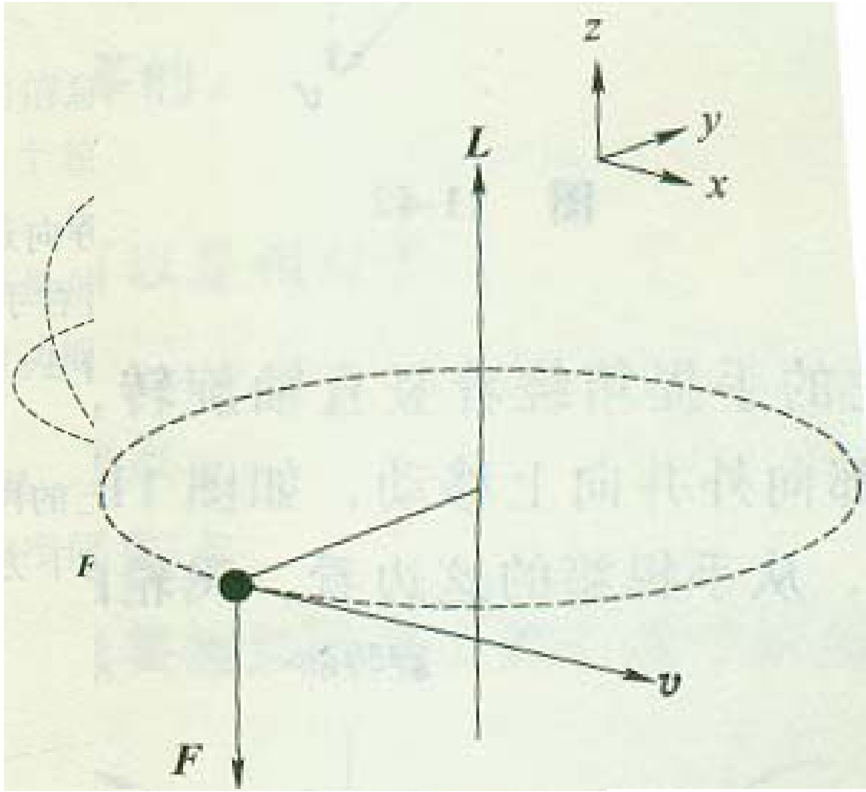
② -*x*方向

③ +*y*方向

④ -*y*方向

⑤ 保持不变(但是角动量的大小改变了)

⑥ 网球向各个方向摇晃



01:30:14

§4 质点的角动量守恒定律

$$\vec{M}=\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$$ 若质点所受的合力矩为零，即 $\vec{M}=0$

$$\vec{L}=\vec{r}\times m\vec{v}=\text{恒矢量}$$

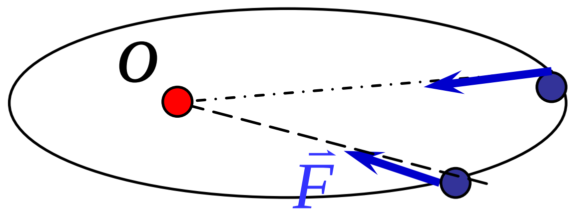
如果对于某一固定点*O*，质点所受的合力矩为零，则此质点对该定点的角动量保持不变。

•角动量守恒的条件 $\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}=0$

a) 质点所受的合力为零：匀速直线运动

b) 力作用在固定点上，$r = 0$

c) r与F平行或者反平行



合力为有心力时，质点对力心的角动量守恒

•恒矢量：大小、方向都不变

01:30:14

$$M_x = 0 \qquad L_x = const$$
$$M_y = 0 \qquad L_y = const$$
$$M_z = 0 \qquad L_z = const$$

当某一方向上的合力矩分量为零时，则该方向的角动量分量守恒。

由质点对轴的角动量定理： $\boldsymbol{M}_z = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_z}{\mathrm{d}\boldsymbol{t}}$

质点对轴的角动量守恒定律：如果质点所受的力对轴的合力矩为零，则质点对该轴的角动量保持不变。

•角动量守恒定律是物理学的基本定律之一，它对宏观体系、微观体系，高速、低速运动均适用。

•角动量守恒定律仅适用于惯性系。

•角动量守恒定律与固定参考点的选择有关。

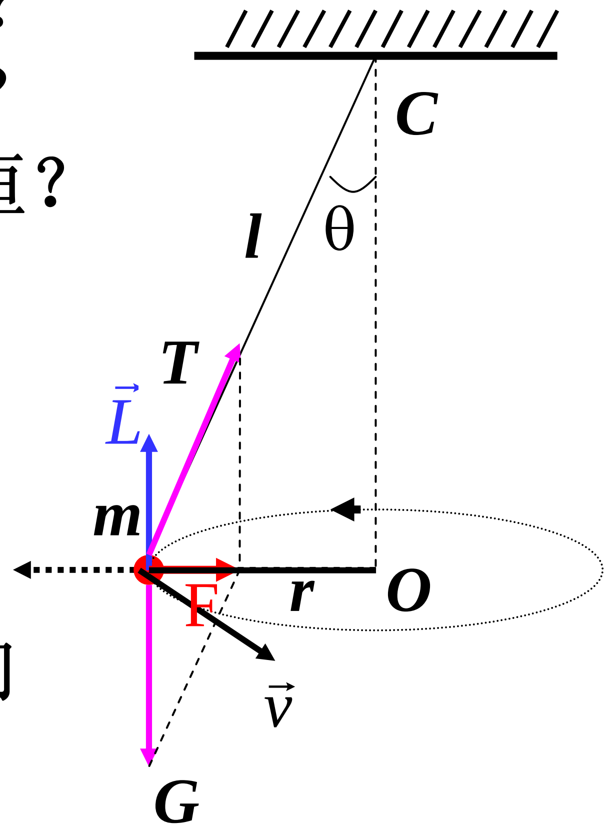
01:30:14

例：摆球质量为m的圆锥摆，以恒定速率v逆时针转动

问：1）对O点，角动量是否守恒？

2）对C点，角动量是否守恒？

3）对OC轴，角动量是否守恒？



解：受力分析：重力、张力

1）对O点

重力矩：$M_G = rG$　沿速度方向

张力矩：$\vec{M}_T = \vec{r} \times \vec{T}$ 沿速度反方向

$$M_T = rT\sin(\frac{\pi}{2}+\theta) = rT\cos\theta = rG$$

两力矩大小相等，方向相反，因此合力矩

$\vec{M}_{合} = \vec{M}_G + \vec{M}_T = 0$ 角动量守恒　$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$ 方向向上

01:30:14

2）对C点

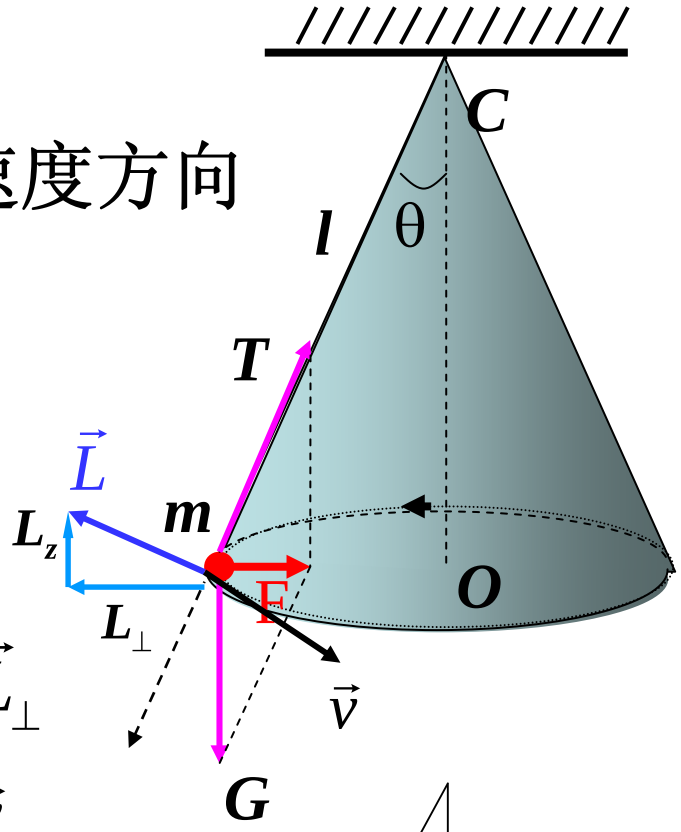
$\vec{M}_G = \vec{l} \times \vec{G} \quad M_G = lG\sin\theta$ 沿速度方向

$\vec{l} \parallel \vec{T} \qquad \vec{M}_T = \vec{l} \times \vec{T} = 0$

$\vec{M}_{合} = \vec{M}_G + \vec{M}_T = lG\sin\theta \neq 0$

角动量不守恒 $\vec{L} = \vec{l} \times m\vec{v} = \vec{L}_z + \vec{L}_\perp$

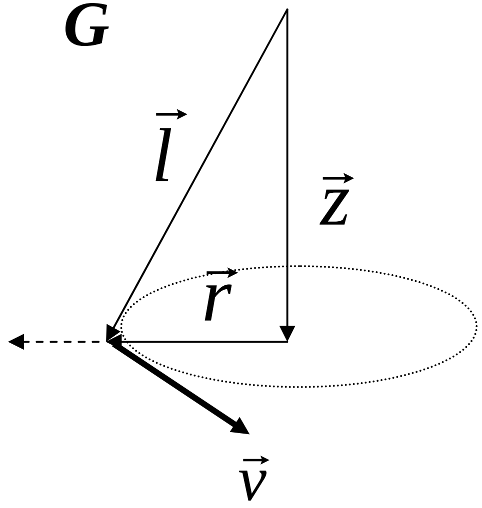
$= (\vec{r} + \vec{z}) \times m\vec{v} = \vec{r} \times m\vec{v} + \vec{z} \times m\vec{v}$



3）对OC轴

对C点 $\vec{M}_{合} \perp \overrightarrow{OC} \qquad M_z = 0$

角动量分量守恒 $\vec{L}_z = \vec{r} \times m\vec{v}$



01:30:14

选择题： #S1504.

左图，质量为**m**的冰球以速度***v*** 撞击一个连接在长度为***r*** 的绳子一端的相同的冰球。

碰撞后，系在绳子上的冰球绕着绳子一端旋转。

右图，绳子的长度为**2*r***，重复上述实验。

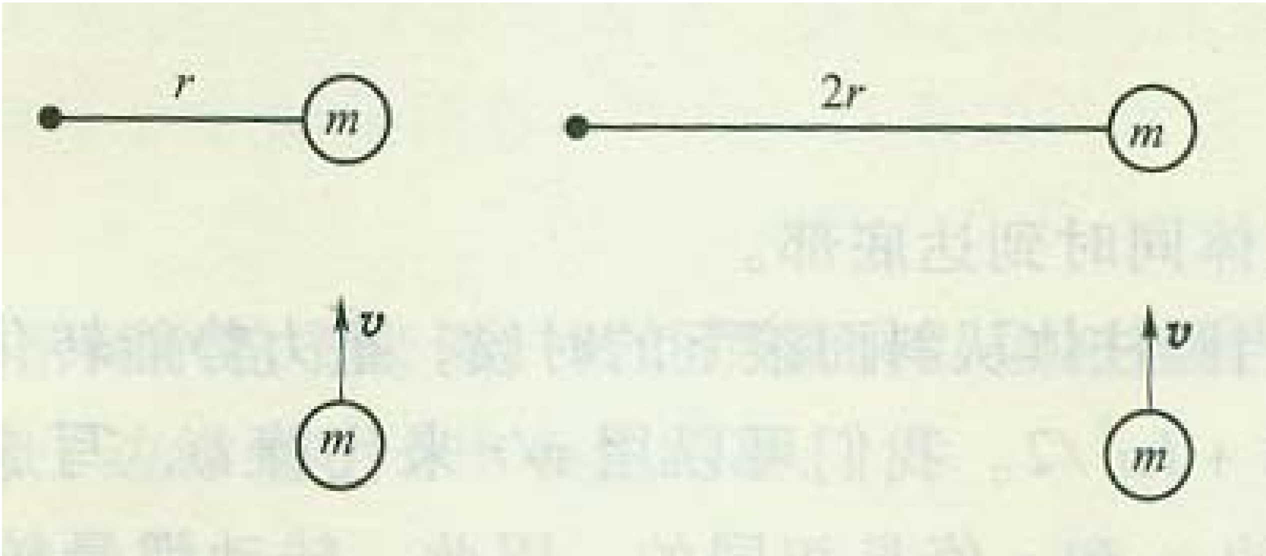
则系在绳上的冰球的速度是左图的：

① 两倍大小

② 相同大小

③ 一半大小

④ 以上答案都不对



01:30:14

选择题： #S1505.

左图，质量为**m**的冰球以速度***v*** 撞击一个连接在长度为***r*** 的绳子一端的相同的冰球。

碰撞后，系在绳子上的冰球绕着绳子一端旋转。

右图，绳子的长度为**2*r***，重复上述实验。

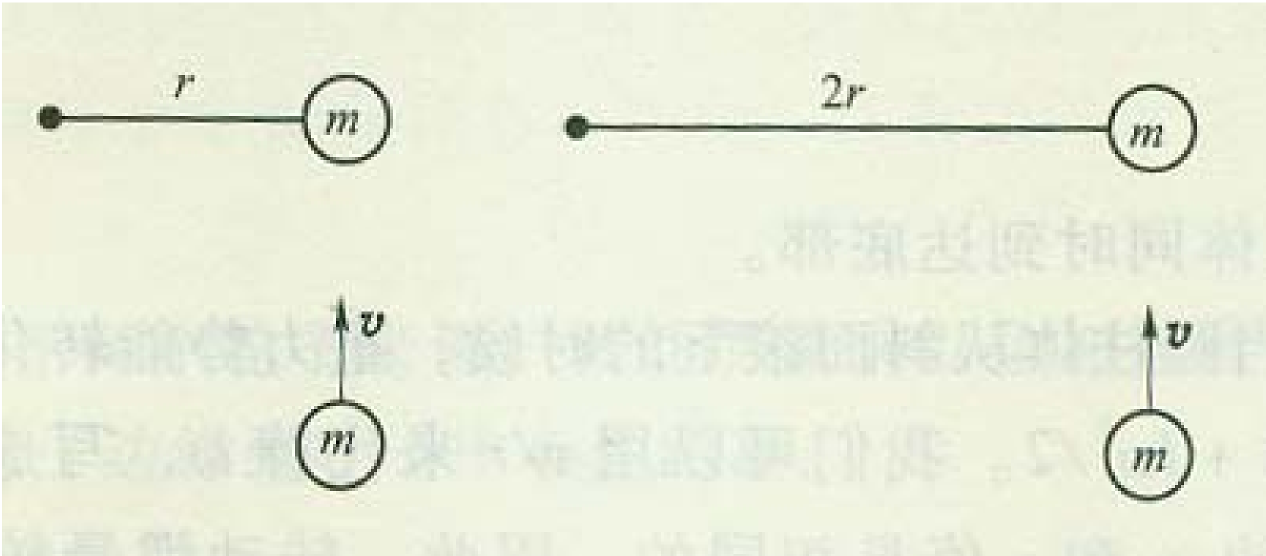
则系在绳上的冰球的角速度是左图的：

① 两倍大小

② 相同大小

③ 一半大小

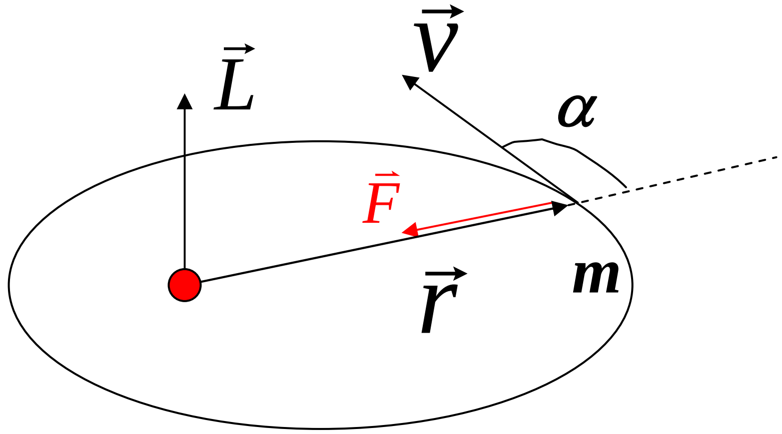
④ 以上答案都不对



01:30:14

行星运动问题

$\vec{r} \parallel \vec{F} \qquad \vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}=0$



行星角动量守恒

大小不变 $\quad mvr\sin\alpha = const.$

方向固定 $\quad$ 行星在速度和有心力所在的平面内运动

行星动量守恒吗? $\qquad \vec{F}_{外} \neq 0 \qquad \vec{v}_1 \neq \vec{v}_2$

系统机械能守恒

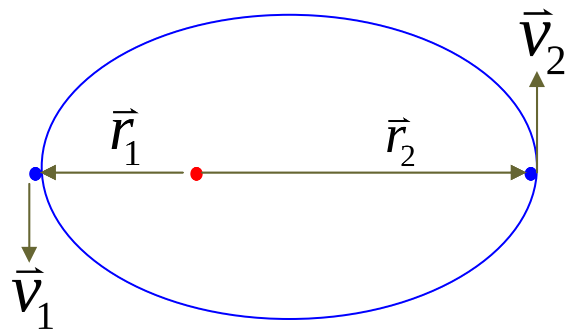
$$\frac{1}{2}mv_1^{\ 2} - G\frac{Mm}{r_1} = \frac{1}{2}mv_2^{\ 2} - G\frac{Mm}{r_2}$$

$$G\frac{Mm}{r_1^{\ 2}} = \frac{mv_1^{\ 2}}{\rho_1} \neq \frac{mv_1^{\ 2}}{r_1}$$

$$mv_1r_1 = mv_2r_2$$

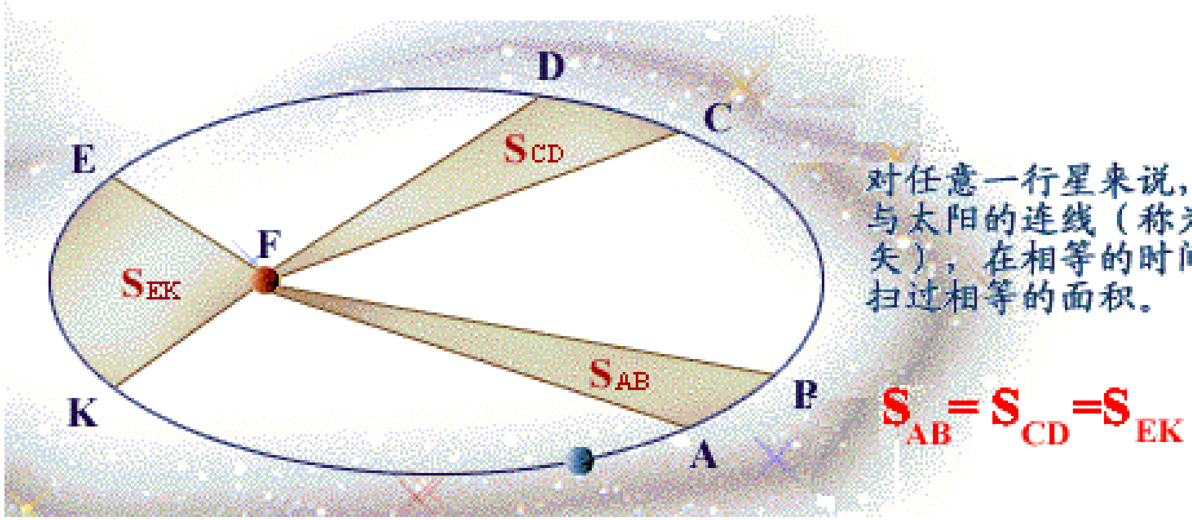
$$G\frac{Mm}{r_2^{\ 2}} = \frac{mv_2^{\ 2}}{\rho_2} \neq \frac{mv_2^{\ 2}}{r_2}$$

$$\rho_1 = \rho_2$$



01:30:14

例:证明开普勒第二行星运动定律



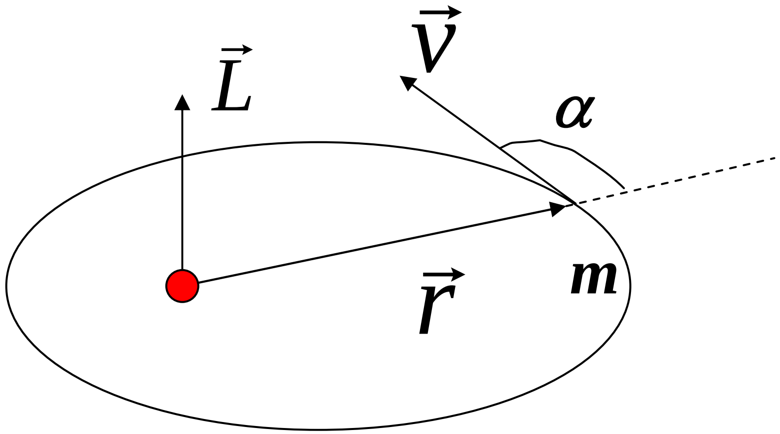
掠面速度不变

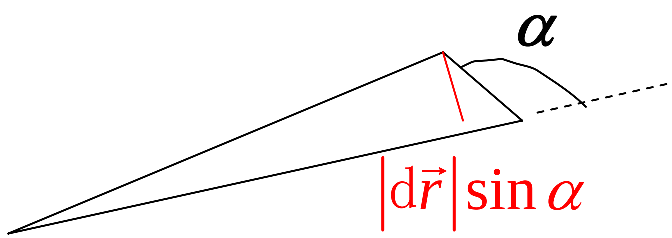
$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=const.$$

$$L=mvr\sin\alpha=\frac{m\left|\mathrm{d}\vec{r}\right|r\sin\alpha}{\mathrm{d}t}$$

$$=\frac{2m}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{1}{2}r\left|\mathrm{d}\vec{r}\right|\sin\alpha$$

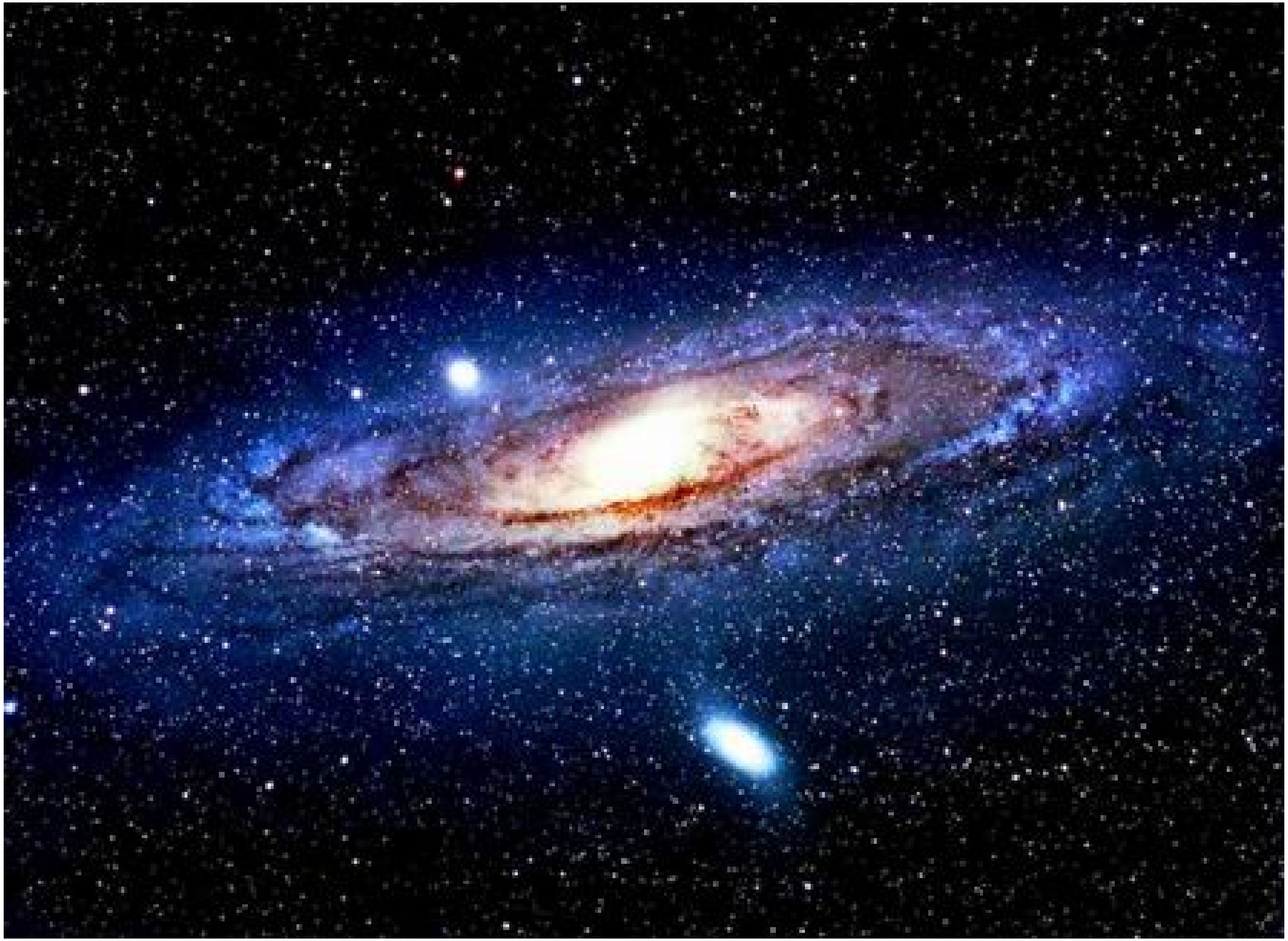
$$=2m\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}\qquad\Rightarrow\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=\frac{L}{2m}$$





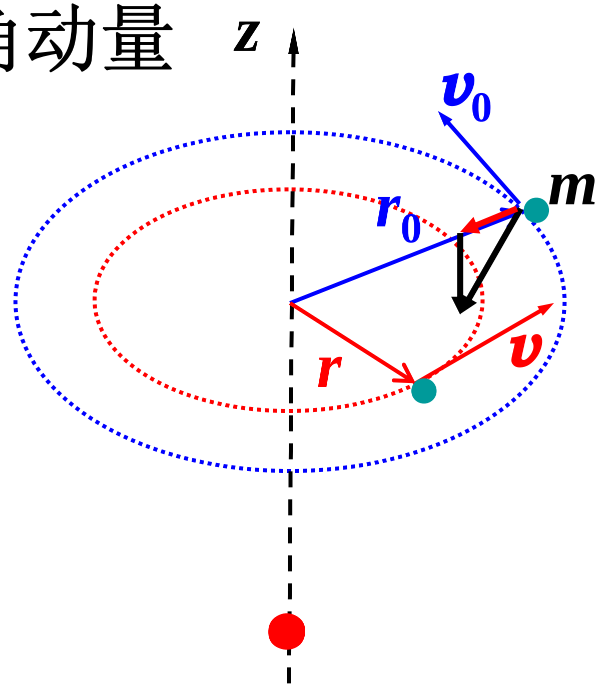
01:30:14

例：用角动量守恒定律解释天体系统的盘状结构



解释： 某星体m在z轴方向具有原始角动量

$$L_z = r_0 m v_0 = rmv \qquad v = \frac{v_0 r_0}{r} \propto \frac{1}{r}$$



星体所需的向心力 $F_{向} = m\frac{v^2}{r} \propto \frac{1}{r^3}$

随r的减小，所需的$F_{向}$增加很快

$F_{引} > F_{向} \rightarrow r\downarrow$ r减小到一定程度，使得 $F_{引} = F_{向}$

此时r 就稳定不变了，引力不能再使r减小

但在z轴方向却无这个限制，所以可以在引力的作用下沿z向收缩，使星云形成了铁饼状。

这是从角动量守恒的角度对星云具有盘形结构的一种粗略的解释。

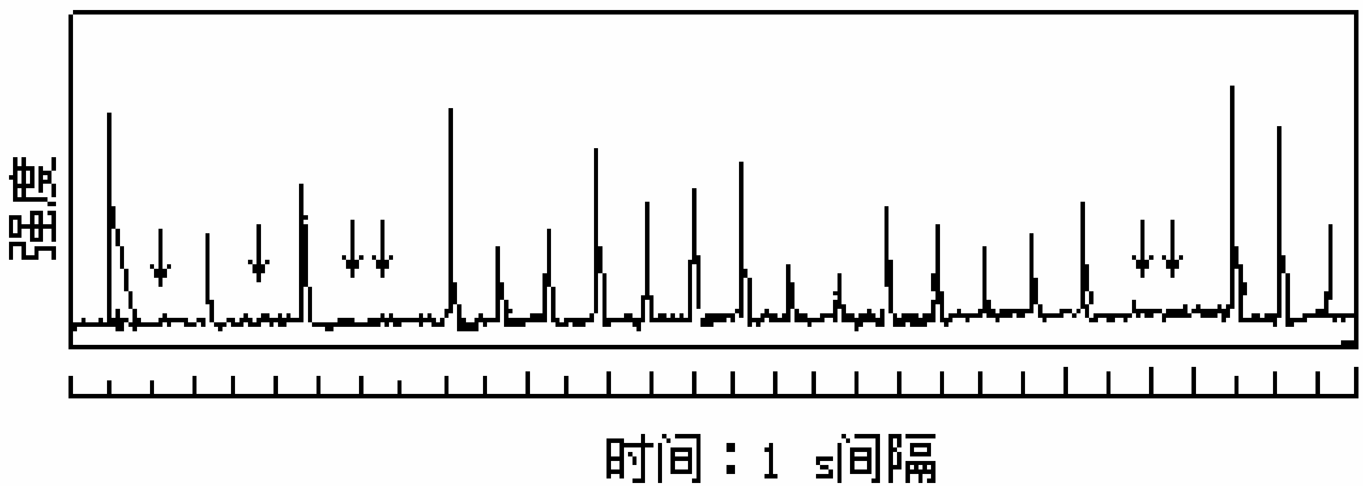
01:30:14

例：星球的自转周期恒定

对于固体的星球，其形状大体不变，在不受外力矩的情况下角动量守恒就意味着它们的角速度守恒。地球，月球都如此。

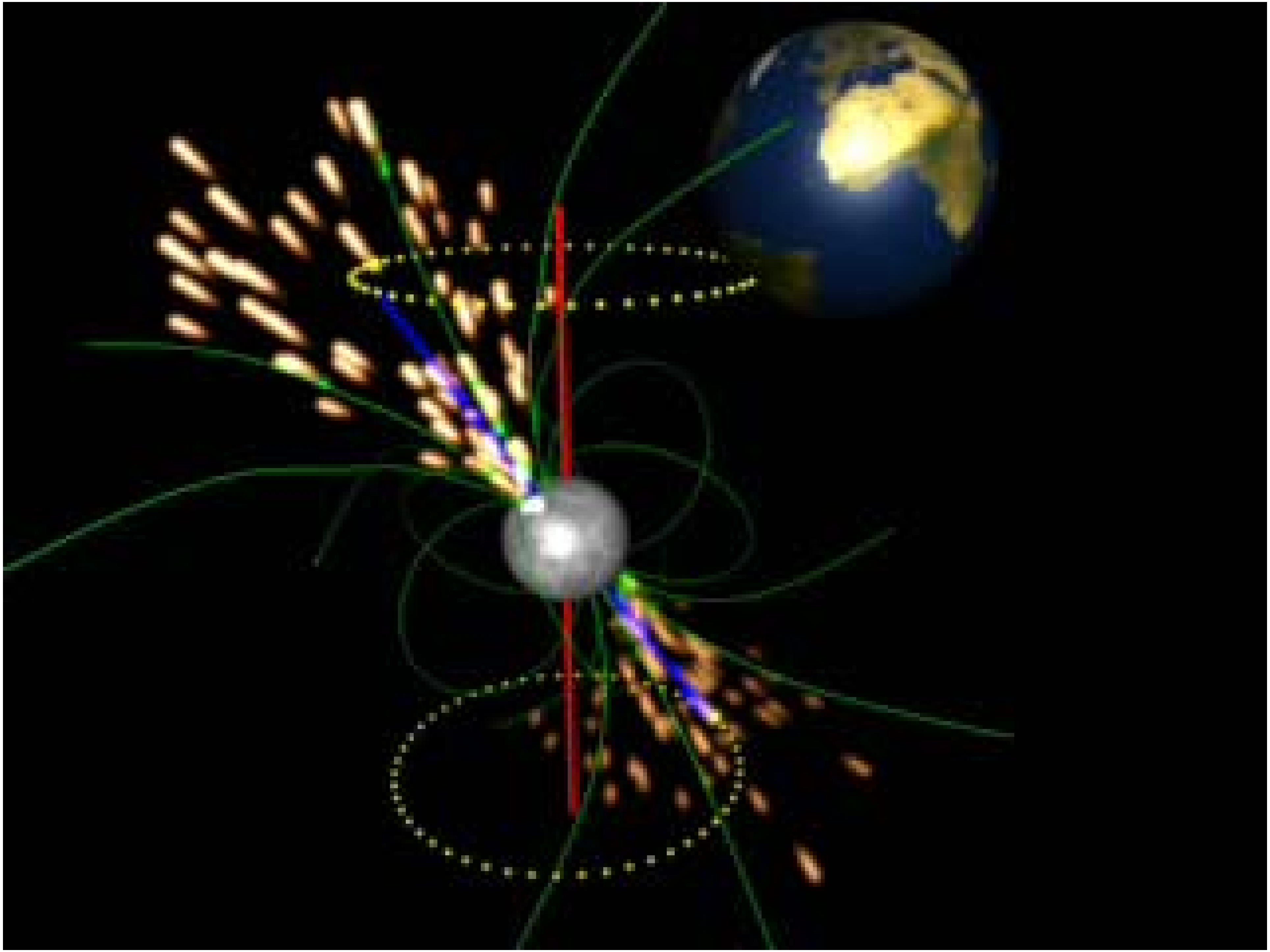
$$L = r^2 m\omega = const. \Rightarrow \omega = const.$$

脉冲星发射出精确的周期性信号。原因是发射体定向发射并以严格的周期在旋转，每当射电束扫过地球，我们就收到一个脉冲。



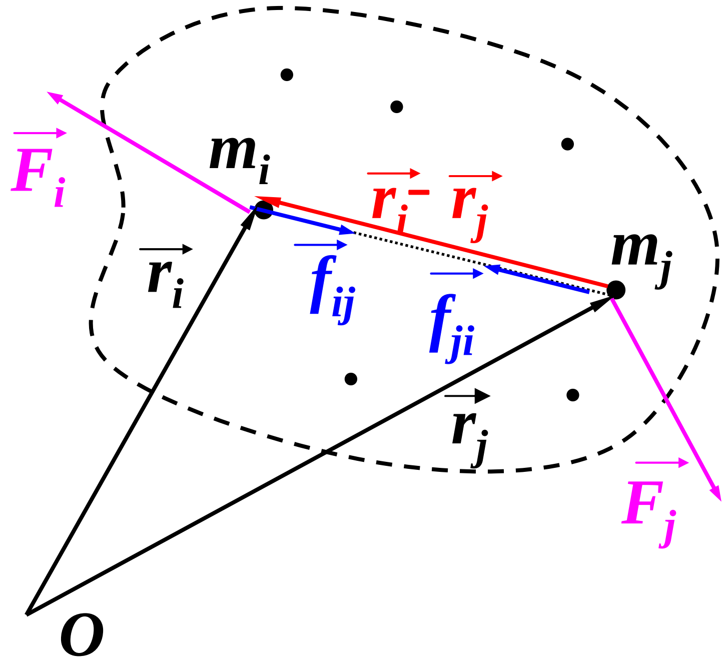
脉冲星的精确周期性信号

01:30:14



§ 5 质点系的角动量问题

1. 质点系的角动量定理



$$\sum_i \vec{M}_i = \sum_i \frac{\mathrm{d}\vec{L}_i}{\mathrm{d}t}$$

$$\sum_i \vec{M}_i = \sum_i (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) + \sum_i (\vec{r}_i \times \vec{f}_i)$$

如图，考虑一对内力 $\vec{f}_{ij}, \vec{f}_{ji}$ 的力矩和

$$\vec{r}_i \times \vec{f}_{ij} + \vec{r}_j \times \vec{f}_{ji} = (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{f}_{ij} \qquad (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \parallel \vec{f}_{ij}$$

$$(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{f}_{ij} = 0$$ 质点系内力力矩的矢量和为0

$$\vec{M}_{外} = \sum_i \vec{M}_{i外} = \sum_i (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) \qquad \vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i (\vec{r}_i \times \vec{P}_i)$$

01:30:14

质点系的角动量定理 $\vec{M}_{外} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$

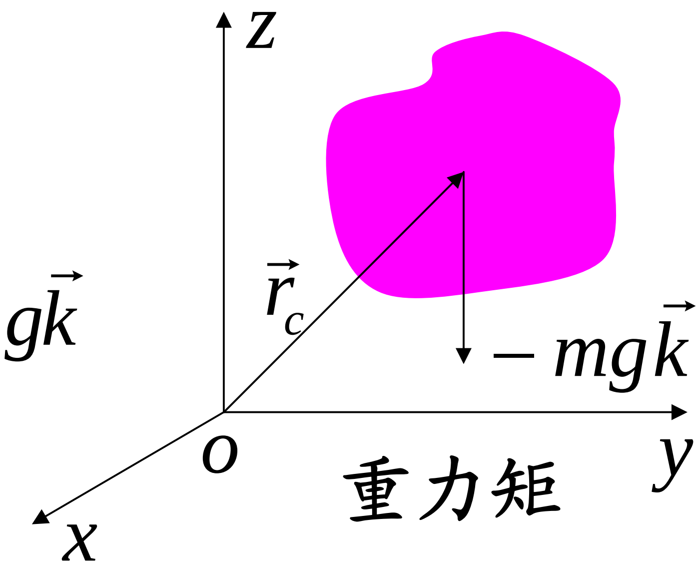
系统总角动量随时间的变化率等于外力矩之和

- 内力矩只改变各质点角动量的分配，不能改变系统的总角动量
- 各质点的力矩与角动量均针对同一固定参考点
- 外力矩之和≠合外力的力矩

$$\sum_i (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) \neq \vec{r} \times \sum_i \vec{F}_i$$

$$\vec{M}_g = -\sum_i (\vec{r}_i \times m_i g\vec{k}) = -(\sum_i m_i \vec{r}_i) \times g\vec{k}$$

$$= -m\vec{r}_c \times g\vec{k} = \vec{r}_c \times (-mg\vec{k})$$

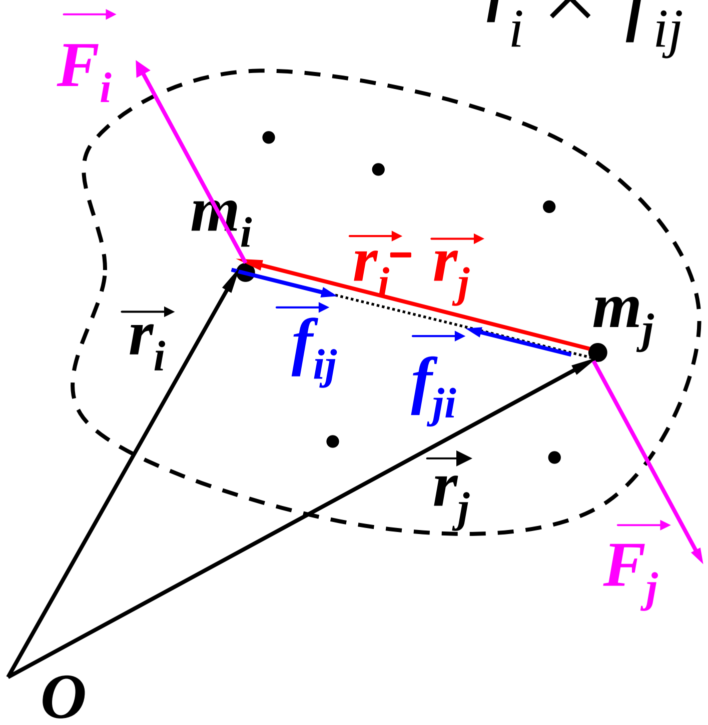


01:30:14

判断题： #T1504.

大小相同，方向相反的两个力对同一轴的力矩之和一定为**0**

$$\vec{r}_i \times \vec{f}_{ij} + \vec{r}_j \times \vec{f}_{ji} = (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{f}_{ij} = 0$$



$$\vec{r}_i \times \vec{F}_i + \vec{r}_j \times \vec{F}_j$$

$$= (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_i$$

$$\neq 0$$

01:30:14

2. 质点系的角动量守恒定律

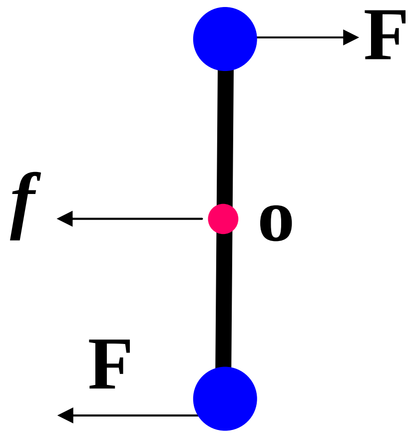
质点系的角动量定理 $\vec{M}_{外} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$

$\vec{M}_{外} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{const.vector}$ 质点系角动量守恒定律

若对于某固定点而言，质点系所受的外力矩之和为零，则质点系对该点的总角动量不随时间改变。

•外力矩之和为零≠合外力为零

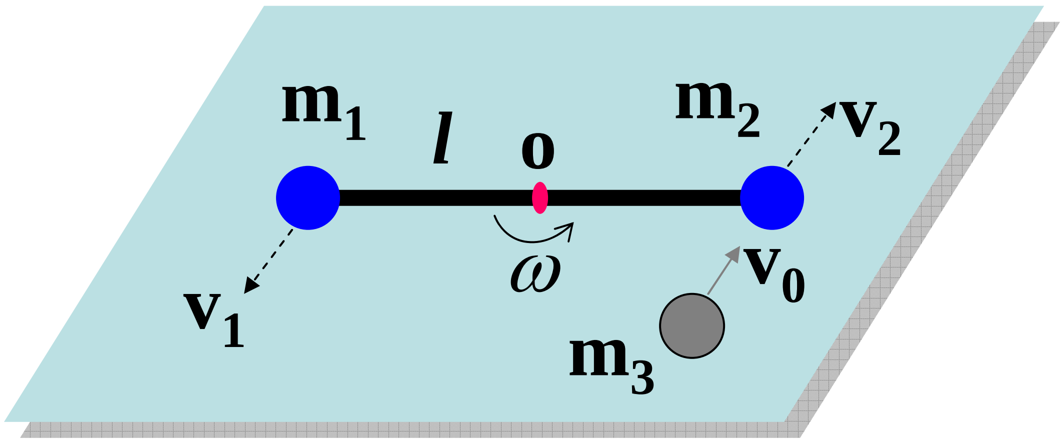
$$\vec{M}_{外} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = 0 \not\Leftrightarrow \vec{F}_{外} = \sum_i \vec{F}_i = 0$$



质点系的角动量守恒和质点系的动量守恒是相互独立的两条守恒定律。

01:30:14

例：两个质量分别为m_1和m_2的小钢球，固定在一个长为l的轻质硬杆的两端，杆的中点有一轴使杆可在水平面内自由转动，杆原来静止。另一泥球质量为m_3，以水平速度v_0垂直于杆的方向与m_2发生碰撞，碰后二者粘在一起。求：碰撞后杆转动的角速度ω



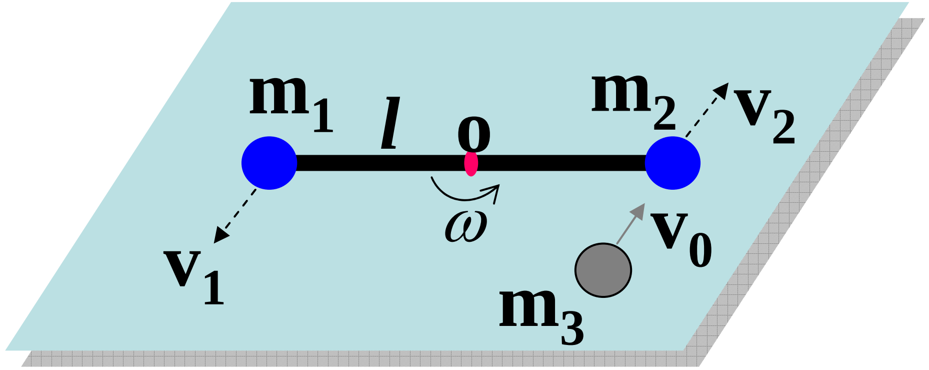
在碰撞过程由于受到转轴的冲量，三个质点组成的系统总动量不守恒。

相对于转轴，系统在碰撞过程中合外力矩为零，因此对此轴的角动量守恒。

01:30:14

解： 碰撞前系统角动量：

$$m_3 v_0 \frac{l}{2}$$



碰撞后三质点的速率均为 $v = \omega \frac{l}{2}$ 　　角动量 $mv\frac{l}{2}$

碰撞前后系统角动量守恒

$$m_3 v_0 \frac{l}{2} = (m_1 + m_2 + m_3) v \frac{l}{2} = (m_1 + m_2 + m_3)\omega \frac{l^2}{4}$$

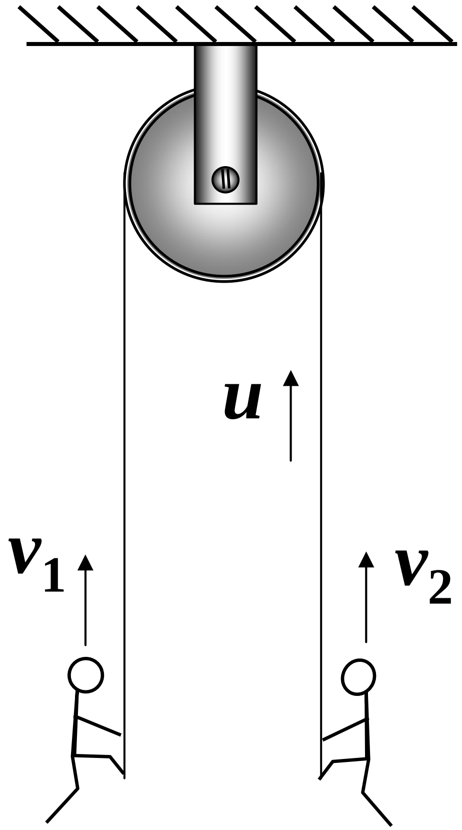
$$\omega = \frac{2 m_3 v_0}{(m_1 + m_2 + m_3) l} \qquad v = \frac{m_3 v_0}{m_1 + m_2 + m_3}$$

系统动量不守恒 $m_3 \vec{v}_0 \neq m_1 \vec{v}_1 + (m_2 + m_3)\vec{v}_2$

01:30:14

选择题： #S1506.

轻绳绕过高处的轻滑轮，两端爬着两只质量相同的猴子，开始时离地面高度相同，同时攀绳上爬，左边的猴子攀绳的速度总是右边的两倍，绳子对地的速度为$\boldsymbol{u}$，问哪知猴子先爬到顶点？



① 左边的猴子

② 右边的猴子

③ 同时到达

01:30:14

本章小结

1 力对固定点*O*的力矩 $\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}$

2 质点对固定点*O*的角动量 $\vec{L}=\vec{r}\times m\vec{v}$

3 质点的角动量定理 $\vec{M}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$

4 质点对轴的角动量定理 $M_z=\dfrac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t}$

5 质点的角动量守恒定律

当 $\vec{M}=0$ 时，$\vec{L}=$ 常矢量 有心力

6 质点系的角动量定理 内力对定点的力矩之和为零

7 质点系的角动量守恒定律 外力矩之和为零

★ 比较

动量定理	角动量定理
$\vec{F}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t}$	$\vec{M}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$
$\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\,\mathrm{d}t=\Delta\vec{P}$	$\int_{t_1}^{t_2}\vec{M}\,\mathrm{d}t=\Delta\vec{L}$

力

动量

力的冲量

角力或力矩

角动量或动量矩

力矩的冲量或冲量矩

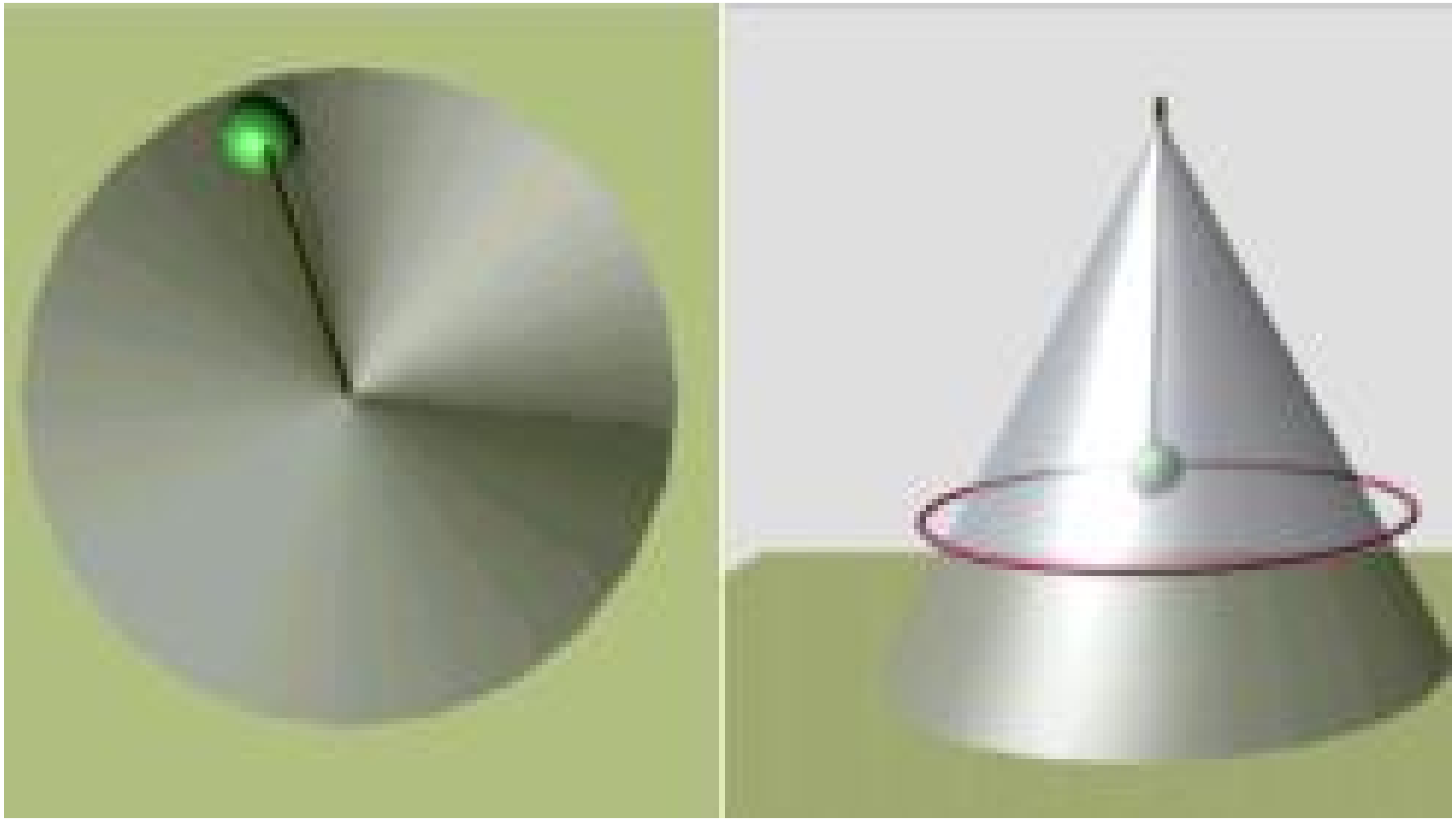
形式上完全相同，只需将相应的量变换一下

（趣称 头上长角 尾部添矩）

守恒律 $\vec{F}=0\Rightarrow\Delta\vec{P}=0$ $\vec{M}=0\Rightarrow\Delta\vec{L}=0$

01:30:14

作　业 P119　25，27



01:30:14