第三节 幂级数

一、函数项级数 —— 常数项级数（参数）

例. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$、等比级数

$\sum_{n=1}^{\infty} q^n$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$. 讨论敛散性

★ $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$. $|x|<1 \Leftrightarrow -1<x<1$. 收敛

或 $x\in(-1,1)$. 收敛域为 $(-1,1)$

$y(x)=x^n$ 幂函数

定义：$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 函数项级数

$S_n(x)=u_1(x)+\cdots+u_n(x)$ 部分和函数列

$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 收敛 $\Leftrightarrow$ $\{S_n(x)\}$ 收敛. 即 $\lim_{n\to\infty}S_n(x)=S(x)$.

定义：当 $x=x_0$. $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$ 收敛，则 $x=x_0$ 称 收敛点.

收敛域：收敛点的集合.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$

★ 如何求 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的收敛域. $\Leftrightarrow$ 讨论 x 与级数 敛散性.

①. $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|$. 正项

②. 比值法/根值法

$\rho(x)=\lim\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}$ 或 $\lim\sqrt[n]{|u_n(x)|}$.

$$\rho(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}$$ 或 $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|}.$$

③ $\rho(x)<1 \Rightarrow x$ 的范围.　　$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|$ 收敛

其中 $x\in(a,b)$ (不特例)　　$\Downarrow$

$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 绝对收敛.

$\rho(x)>1 \Leftarrow x\in(-\infty,a)\cup(b,+\infty)$.　　$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|$ 发散

$\Downarrow$ 比值/根值法

$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 发散.

④ 代入 $x=a$ 和 $x=b$

$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(a)$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(b)$ 敛散性

综上. $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的收敛域: (a,b) 或 $[a,b]$ 或 $(a,b]$ 或 $[a,b)$.

其中特例

例. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x^2+x+1)^n}{n(n+1)}$ 的收敛域 ____$[-1,0]$____.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1^n}{n(n+1)}$.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+1)}$

解:

(1). $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(x^2+x+1)^n}{n(n+1)}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x^2+x+1)^n}{n(n+1)}$.

② $\rho(x)=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(x^2+x+1)^n}{n(n+1)}}=x^2+x+1$

③. $\rho(x)=x^2+x+1<1 \Rightarrow -1<x<0$.

④ 当 $x=-1$. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ 收敛

当 $x=0$　$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ 收敛

综上. 收敛域 $[-1,0]$.

例 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x^2+x+1)^n}{n}$ 的收敛域 $(-1,0)$.

例 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ 的收敛域 $[-1,1)$.

幂级数

$\rho(x)=|x|<1 \Rightarrow -1<x<1$.

二 幂级数的收敛半径和收敛域.

定义: $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots$

在 $x=x_0$ 时, 收敛于 a_0.

讨论 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$. 收敛域 $(-2,2)$.

$\downarrow$

$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ 收敛域 (x_0-2,x_0+2).

★ 求 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛域.

① $\sum_{n=0}^{\infty}|a_nx^n|$.

② 比值/根值.

$\rho(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_nx^n|}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\cdot|x|$.

若 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=l$. $l\cdot|x|$.

③. $\rho(x)=l\cdot|x|<1 \Rightarrow -\frac{1}{l}<x<\frac{1}{l}$.

③. $\rho(x) = \ell \cdot |x| < 1 \Rightarrow -\frac{1}{\ell} < x < \frac{1}{\ell}$.

即 $x \in (-\frac{1}{\ell}, \frac{1}{\ell})$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n x^n|$ 收敛

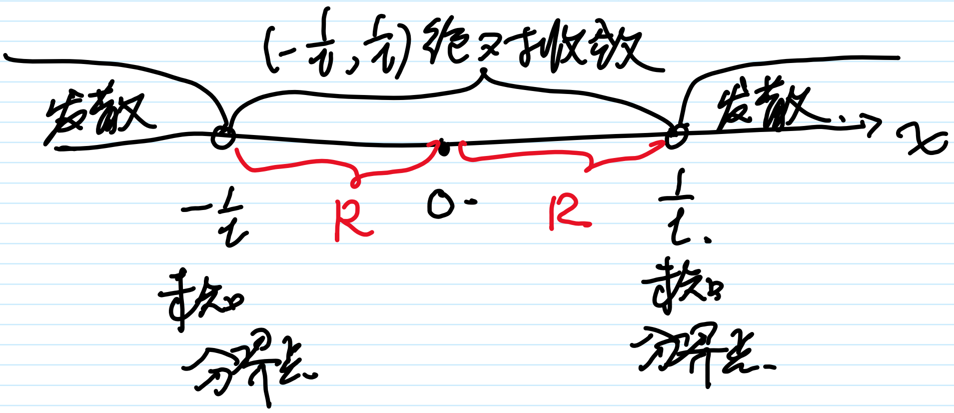
可得 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 绝对收敛

$x \in (-\infty, -\frac{1}{\ell}) \cup (\frac{1}{\ell}, +\infty) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 发散

④ 判断 $x = \pm\frac{1}{\ell}$ 时 敛散性

综上. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域：$(-\frac{1}{\ell}, \frac{1}{\ell})$ 或 $[-\frac{1}{\ell}, \frac{1}{\ell}]$

或 $[-\frac{1}{\ell}, \frac{1}{\ell})$ 或 $(-\frac{1}{\ell}, \frac{1}{\ell}]$.



定义：收敛半径 R，收敛区间 $(-R, R)$. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

收敛半径 R，收敛区间 $(x_0 - R, x_0 + R)$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$.

★ 定理 (Abel).

① $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = x_1$ 收敛.

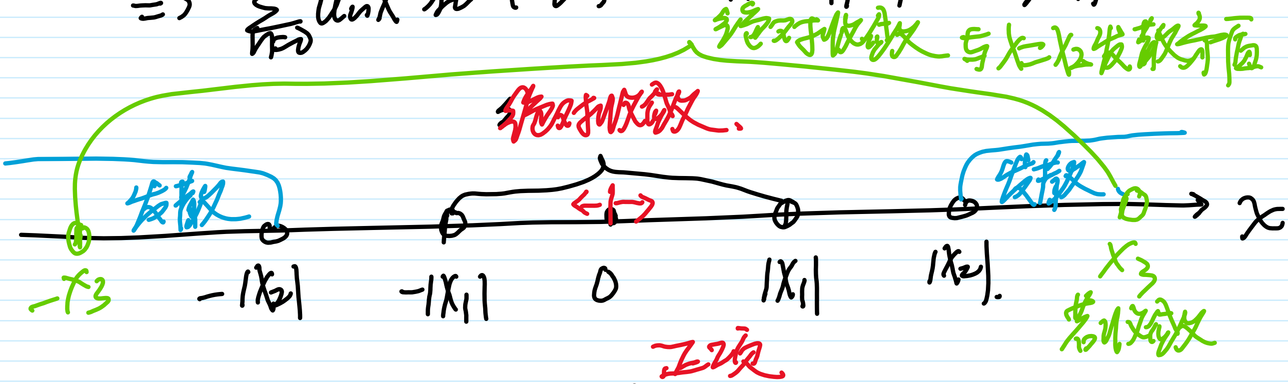
$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-|x_1|, |x_1|)$ 内绝对收敛.

②. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = x_2$ 发散

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-\infty, -|x_2|) \cup (|x_2|, +\infty)$ 发散.

绝对收敛 与左右发散方面

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-\infty, -|x_2|)$ 和 ... 发散，



证明: ① 等价地去证 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ 在 $(-|x_1|, |x_1|)$ 收敛

正项

$|x| < |x_1|$

$\Leftrightarrow \left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$.

已知 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$ 收敛

$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x_1^n|$ 是否收敛. 不一定.

$$|a_n x^n| = |a_n x_1^n| \left|\frac{x}{x_1}\right|^n \le 1 \cdot \left|\frac{x}{x_1}\right|^n.$$

"小"收敛 $\Leftarrow$ "大"收敛

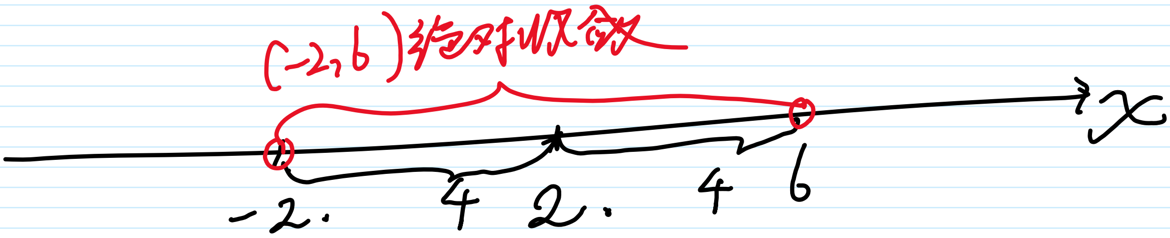
$\lim_{n\to\infty} a_n x_1^n = 0 \Rightarrow \exists N$, 当 $n>N$, $|a_n x_1^n| < 1$.

例 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-2)^n$ 在 $x=-2$ 处收敛.

则该级数在 $x=5$ 处 绝对收敛. $R \geq 4$.

$x=6$ 处 无法判断.

解:



中心点.

② $x=2$ 处收敛. $x=-2$ 处发散.

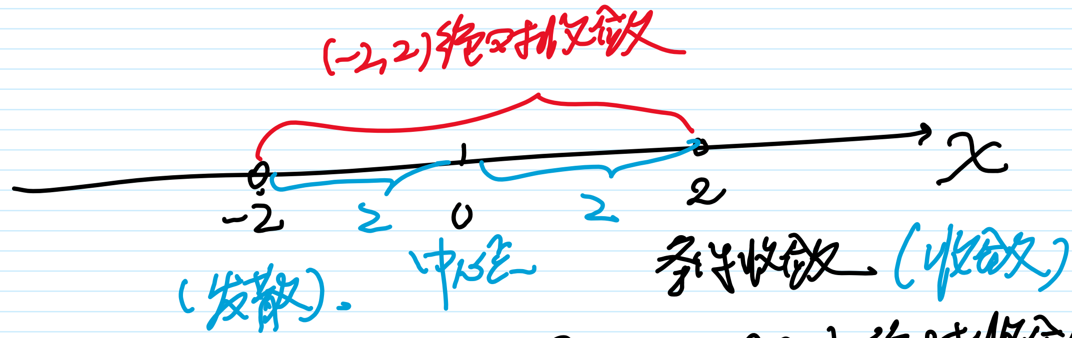
(1)'

$x=-2$处发散.

例. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x=2$ 处条件收敛,

则收敛半径 R $=2.$ 收敛区间 $(-2,2)$.

解:



当 $R>2$ 时 收敛区间 $(-R,R)$ 上绝对收敛

$\Downarrow$

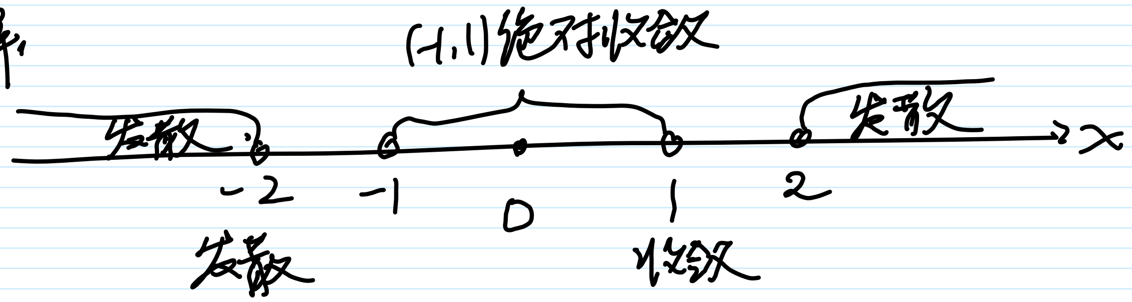
$x=2\in(-R,R)$ 绝对收敛矛盾

$\boxed{\text{条件收敛点} \Rightarrow \text{分界点}}$

例. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x=1$ 收敛, $x=-2$ 发散.

则 R 满足 $1\leq R\leq 2.$

解:



☆定理: (比值/根值法) 求 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛半径.

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \text{ 或 } \rho=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{收敛半径 } R = \frac{1}{\rho}.}$

$\rho = 0 \Rightarrow R = +\infty.$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 绝对收敛

$\rho = +\infty \Rightarrow R = 0.$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 仅在 $x=0$ 处收敛

例. 求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 2^n} x^n$ 的收敛域

解: $\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 2^n}\right|} = \frac{1}{2}$

$R = \frac{1}{\rho} = 2.$ 收敛区间 $(-2, 2)$.

当 $x=2$ 时. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 2^n} \cdot 2^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 收敛

当 $x=-2$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)}{n}$ 发散

收敛域 $(-2, 2]$.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3^n} x^{2n+1}$ 的

收敛域 $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$.

例. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3^n} \cdot x^{\boxed{2n}}$ 的收敛域 $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$.

缺项

解: 令 $t = x^2$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3^n} t^n$.

换元

$$\rho_t = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{1}{3^{n+1}}\right|}{\left|\frac{1}{3^n}\right|} = \frac{1}{3}$$

收敛半径. $R_t = \frac{1}{\rho_t} = 3$

收敛域. $(-3, 3)$

$-3 < t < 3$ 收敛

$\Downarrow$

即 $-3 < x^2 < 3$ 即 则可收敛

$R = \sqrt{3}$

$$\Downarrow$$

$R=\sqrt{3}$. 即 $-3<x^2<3$ 即 则 收敛

当 $x=\pm\sqrt{3}$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3^n}\cdot 3^n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$ 发散