第七节　单侧置信区间

一、问题的引入

二、基本概念

三、小结

一、问题的引入

在以上各节的讨论中，对于未知参数 θ，我们给出两个统计量 $\underline{\theta},\overline{\theta}$，得到 θ 的双侧置信区间 $(\underline{\theta},\overline{\theta})$.

但在某些实际问题中，例如，对于设备、元件的寿命来说，平均寿命长是我们希望的，我们关心的是平均寿命 θ 的“下限”；**与之相反**，在考虑化学药品中杂质含量的均值 μ 时，我们常关心参数 μ 的“上限”. **这就引出了单侧置信区间的概念.**

二、基本概念

1. 单侧置信区间的定义

对于给定值 $\alpha\,(0<\alpha<1)$，若由样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 确定的统计量 $\underline{\theta}=\underline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$，对于任意 $\theta\in\Theta$ 满足

$$P\{\theta>\underline{\theta}\}\geq 1-\alpha,$$

则称随机区间 $(\underline{\theta}, +\infty)$ 是 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信区间，$\underline{\theta}$ 称为 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信下限 .

又如果统计量 $\overline{\theta}=\overline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$, 对于任意$\theta\in\Theta$满足

$$P\{\theta<\overline{\theta}\}\geq 1-\alpha,$$

则称随机区间 $(-\infty,\overline{\theta})$ 是θ的置信水平为$1-\alpha$的单侧置信区间, $\overline{\theta}$称为θ的置信水平为$1-\alpha$的单侧置信上限.

2. 正态总体均值与方差的单侧置信区间

例如对于正态总体X, 若均值μ, 方差σ^2 均为未知, 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是一个样本, 由

$$\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1),$$

有 $$P\left\{\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} < t_\alpha(n-1)\right\} = 1-\alpha,$$

即 $$P\left\{\mu > \overline{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1)\right\} = 1-\alpha,$$

于是得 μ 的一个置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信区间

$$\left(\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha}(n-1),+\infty\right),$$

μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信下限

$$\underline{\mu}=\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha}(n-1).$$

又由 $$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1),$$

有 $$P\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}>\chi^2_{1-\alpha}(n-1)\right\}=1-\alpha,$$

即 $$P\left\{\sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}\right\} = 1-\alpha,$$

于是得 σ^2 的一个置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信区间

$$\left(0,\ \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}\right),$$

σ^2 的置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信上限

$$\overline{\sigma^2} = \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}.$$

例　设从一批灯泡中，随机地取5只作寿命试验，测得寿命(以小时计)为 1050，1100，1120，1250，1280，设灯泡寿命服从正态分布，求灯泡寿命平均值的置信水平为 0.95 的单侧置信下限.

解　$1-\alpha=0.95,\qquad n=5,\qquad \bar{x}=1160,$

$$t_\alpha(n-1)=t_{0.05}(4)=2.1318,\quad s^2=9950,$$

μ 的置信水平为 0.95 的置信下限

$$\underline{\mu}=\bar{x}-\frac{s}{\sqrt{n}}t_\alpha(n-1)=1065.$$

补充例题

三、小结

正态总体均值 μ的置信度为$1-\alpha$ 的单侧置信区间

$$\left(-\infty, \boxed{\overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha}(n-1)}\right), \quad \left(\boxed{\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha}(n-1)}, \infty\right),$$

单侧置信上限 $\overline{\mu}$　　　单侧置信下限 $\underline{\mu}$

正态总体方差 σ^2 的置信度为$1-\alpha$的单侧置信区间

$$\left(0, \boxed{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}}\right).$$

单侧置信上限 $\overline{\sigma^2}$