# 第一节 二维随机变量

一、二维随机变量及其分布函数

二、二维离散型随机变量

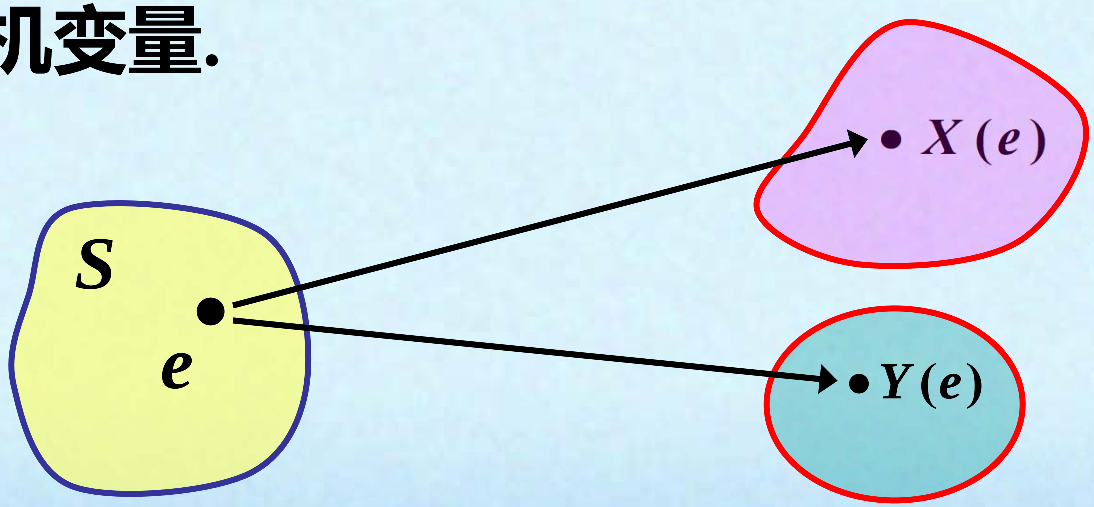
三、二维连续型随机变量

# 一、二维随机变量及其分布函数

## 1.定义

设$E$是一个随机试验，它的样本空间是 $S=\{e\}$，设$X=X(e)$和$Y=Y(e)$是定义在$S$上的随机变量，由它们构成的一个向量$(X,Y)$ **叫做二维随机向量或二维随机变量.**

**图示**



**实例1** 炮弹的弹着点的位置 $(X,Y)$ 就是一个二维随机变量.

**实例2** 考查某一地区学前儿童的发育情况，则儿童的身高 $H$ 和体重 $W$ 就构成二维随机变量 $(H,W)$.

**说明** 二维随机变量 $(X, Y)$ 的性质不仅与 $X$ 、$Y$ 有关，而且还依赖于这两个随机变量的相互关系.

## 2.二维随机变量的分布函数

### (1)分布函数的定义

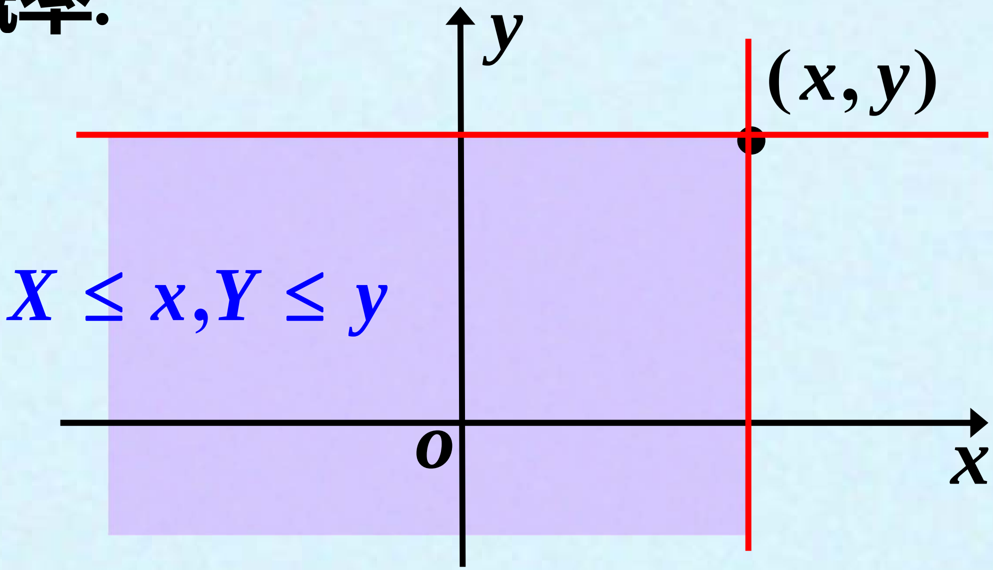
**定义** 设$(X,Y)$是二维随机变量，**对于任意实数** $x,y$，**二元函数:**

$$F(x,y)=P\{(X\le x)\cap(Y\le y)\}\overset{\text{记成}}{=}P\{X\le x,Y\le y\}$$

称为二维随机变量$(X,Y)$的分布函数，**或称为随机变量$X$和$Y$的联合分布函数.**

如果将二维随机变量$(X,Y)$看成是平面上随机点的坐标，**那么**，分布函数$F(x,y)$在$(x,y)$处的

函数值就是随机点$(X,Y)$落在如下图所示的，以$(x,y)$为顶点而位于该点左下方的无穷矩形域内的概率.




随机点$(X,Y)$落在矩形域$\{(x,y) | x_1 < x \le x_2, y_1 < y \le y_2\}$的概率为

$$P\{x_1 < X \le x_2, y_1 < Y \le y_2\}$$

$$= F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) - F(x_1, y_2).$$

## (2) 分布函数的性质

$1°$ $F(x, y)$是变量$x$和$y$的不减函数，即对于任意固定的$y$，当$x_2 > x_1$时$F(x_2, y) \ge F(x_1, y)$；对于任意固定的$x$，当$y_2 > y_1$时$F(x, y_2) \ge F(x, y_1)$.

$2°$ $0 \le F(x, y) \le 1$，且

对于任意固定的 $y$，$F(-\infty, y) = 0$，

对于任意固定的$x$, $F(x,-\infty)=0$,

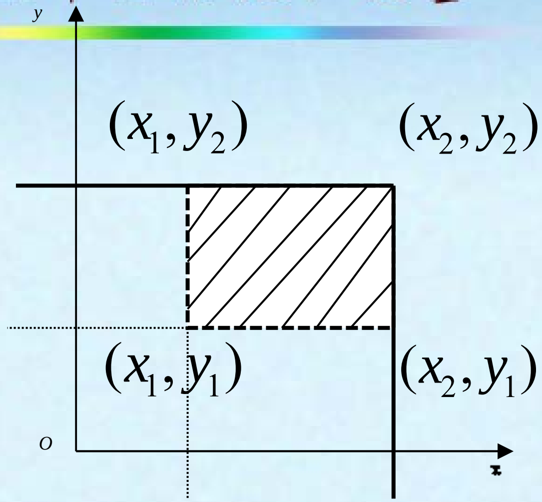
$F(-\infty,-\infty)=0$, $F(+\infty,+\infty)=1$.

3° $F(x+0,y)=F(x,y), F(x,y+0)=F(x,y)$,

即$F(x,y)$关于$x$右连续，关于$y$也右连续.

4° 对于任意$(x_1,y_1),(x_2,y_2)$, $x_1<x_2, y_1<y_2$, 下述不等式成立:

$$F(x_2,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1)-F(x_1,y_2)\geq 0.$$




证明 $P\{x_1 < X \le x_2, y_1 < Y \le y_2\}$

$$= P\{X \le x_2, y_1 < Y \le y_2\} - P\{X \le x_1, y_1 < Y \le y_2\}$$

$$= P\{X \le x_2, Y \le y_2\} - P\{X \le x_2, Y \le y_1\}$$

$$- P\{X \le x_1, Y \le y_2\} + P\{X \le x_1, Y \le y_1\} \ge 0,$$

故 $F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) - F(x_1, y_2) \ge 0.$

**例1** 设$(X,Y)$的分布函数

$$F(x,y)=\begin{cases}(a-\mathrm{e}^{-x})(b-\mathrm{e}^{-3y}), & x>0, y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(1)确定常数$a,b$;

(2)求 $P\{X\le 1, Y\le \frac{1}{3}\}$ 和 $P\{X>0, Y\le 1\}$;

**解**(1)由 $F(+\infty,+\infty)=1$ 可得 $ab=1$

对于任意的 $y>0$，由 $F(0^+,y)=F(0,y)$ 可得

$$(a-1)(b-\mathrm{e}^{-3y})=0$$

从而 $a-1=0.$ $a=1,b=1.$

于是 $$F(x,y)=\begin{cases}(1-\mathrm{e}^{-x})(1-\mathrm{e}^{-3y}), & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(2) $P\{X\le 1,Y\le \frac{1}{3}\}=F(1,\frac{1}{3})=(1-\mathrm{e}^{-1})^2$

$$P\{X>0,Y\le 1\}=F(+\infty,1)-F(0,1)=1-\mathrm{e}^{-3}$$

# 二、二维离散型随机变量

## 1. 定义

如果二维随机变量$(X,Y)$全部可能取到的不**相同的值是有限对或可列无限多对**,则称$(X,Y)$是离散型的随机变量.

## 2. 二维离散型随机变量的分布律

设二维离散型随机变量$(X,Y)$所有可能取的值为$(x_i,y_j)$, $i,j=1,2,\cdots$, 记$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij}$, $i,j=1,2,\cdots$, **则由概率的定义有**

$$p_{ij}\geq 0,\quad \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}=1$$

称$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij}$, $i,j=1,2,\cdots$ **为二维离**散型随机变量$(X,Y)$的分布律, 或随机变量$X$和$Y$的联合分布律.

# 二维随机变量 $(X,Y)$ 的分布律也可表示为

| $Y \backslash X$ | $x_1$ | $x_2$ | $\cdots$ | $x_i$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y_1$ | $p_{11}$ | $p_{21}$ | $\cdots$ | $p_{i1}$ | $\cdots$ |
| $y_2$ | $p_{12}$ | $p_{22}$ | $\cdots$ | $p_{i2}$ | $\cdots$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | | $\vdots$ | |
| $y_j$ | $p_{1j}$ | $p_{2j}$ | $\cdots$ | $p_{ij}$ | $\cdots$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | | $\vdots$ | |

**例2** 设随机变量 $X$ 在 1,2,3,4 四个整数中等可能地取一个值，另一个随机变量 $Y$ 在 $1\sim X$ 中等可能地取一整数值．试求 $(X,Y)$ 的分布律．

**解** 用乘法公式容易求得 $(X,Y)$ 的分布律．易知 $\{X=i,Y=j\}$ 的取值情况是：$i=1,2,3,4$，$j$ 取不大于 $i$ 的正整数．且

$$P\{X=i,Y=j\}=P\{Y=j\mid X=i\}P\{X=i\}=\frac{1}{i}\cdot\frac{1}{4},$$

$$i=1,2,3,4,\quad j\le i.$$

于是 $(X,Y)$ 的分布律为

| $Y \backslash X$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{16}$ |
| 2 | 0 | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{16}$ |
| 3 | 0 | 0 | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{16}$ |
| 4 | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{16}$ |

# 分布函数

设$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij}, i=1,2,3,\cdots,\ \ j=1,2,3,\cdots,$

为二维离散型随机变量$(X,Y)$的分布律,$F(x,y)$为其分布函数，则

$$F(x,y)=\sum_{x_i\le x}\sum_{y_j\le y}P\{X=x_i,Y=y_j\}=\sum_{x_i\le x}\sum_{y_j\le y}p_{ij}$$

# 三、二维连续型随机变量

## 1.定义

对于二维随机变量 $(X,Y)$ 的分布函数 $F(x,y)$, 如果存在非负的函数 $f(x,y)$ 使对于任意 $x,y$ 有

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v,$$

则称 $(X,Y)$ 是连续型的二维随机变量,**函数** $f(x,y)$称为二维随机变量 $(X,Y)$ 的概率密度,**或**称为随机变量 $X$ 和 $Y$ 的联合概率密度.

## 2.性质

1° $f(x,y) \geq 0.$

2° $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = F(\infty,\infty) = 1.$

3° 设 $G$ 是 $xoy$ 平面上的区域，点 $(X,Y)$ 落在 $G$ 内的概率为

$$P\{(X,Y) \in G\} = \iint_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

4°若 $f(x,y)$ 在 $(x,y)$ 连续, **则有**

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y).$$

在几何上$z=f(x,y)$表示空间的一个曲面.

由性质2°知，

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=1,$$

介于它和$xOy$平面的空间区域的体积为1.

由性质3°,

$$P\{(X,Y)\in G\}=\iint_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

$P\{(X,Y)\in G\}$的值等于以$G$为底,以曲面

$z=f(x,y)$为顶面的柱体体积 .

**例2** 设二维随机变量 $(X,Y)$ 具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases} 2\mathrm{e}^{-(2x+y)}, & x>0,\ y>0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(1) 求分布函数 $F(x,y)$; (2) 求概率 $P\{Y \le X\}$.

解 (1) $F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$

$$=\begin{cases}\int_{0}^{y}\int_{0}^{x} 2\mathrm{e}^{-(2u+v)}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v, & x>0, y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

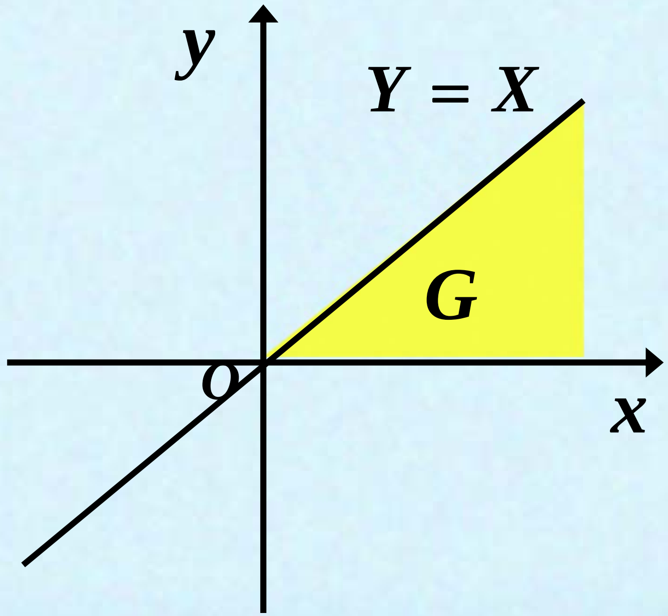
即有 $F(x,y)=\begin{cases}(1-\mathrm{e}^{-2x})(1-\mathrm{e}^{-y}), & x>0, y>0.\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

(2) 将$(X,Y)$看成是平面上随机点的坐标, **即有**

$\{Y\le X\}=\{(X,Y)\in G\}$, 其中$G$为$xOy$平面上直线

$y = x$及其下方的部分. **于是**

$$P\{Y \le X\} = P\{(X,Y) \in G\}$$




$$= \iint_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{\infty}\int_y^{\infty} 2\mathrm{e}^{-(2x+y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{3}.$$

## 推广　$n$ 维随机变量的概念

**定义**　设 $E$ 是一个随机试验，**它的样本空间是**

$S=\{e\}$，设 $X_1=X_1(e), X_2=X_2(e), \cdots, X_n=X_n(e)$

是定义在 $S$ 上的随机变量，由它们构成的一个 $n$ 维向量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 叫做 $n$ 维随机向量或 $n$ 维随机**变量.**

对于任意$n$个实数$x_1, x_2, \cdots, x_n$,$n$元函数

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n,) = P\{X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \cdots, X_n \le x_n\}$$

称为$n$维随机变量$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$的分布函数或随机变量$X_1, X_2, \cdots, X_n$的联合分布函数.

# 四、小 结

## 二维随机变量的分布函数

$$F(x,y)=P\{X\le x, Y\le y\}.$$

## 二维离散型随机变量的分布律及分布函数

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij}, \quad i,j=1,2,\cdots;$$

$$F(x,y)=\sum_{x_i\le x, y_j\le y} p_{ij}.$$

## 二维连续型随机变量的概率密度

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

# 思考题

已知 $(X,Y)$的概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\in G,\\ 0, & \text{其 他},\end{cases}$$

其中$G=\{(x,y)\mid 0<x<1,\ 0<y<2(1-x)\}$, 试求

$(X,Y)$ 的分布函数$F(x,y)$.

$G_1: x \le 0$或$y \le 0$ $\quad G_2: 0 < x < 1, 0 < y < 2(1-x)$

$G_3: 0 < x < 1, 2(1-x) < y < 2$

$G_4: 1 \le x, 0 < y < 2$

$G_5: 0 < x < 1, 2 \le y$

$G_6: x \ge 1, 2 \le y.$

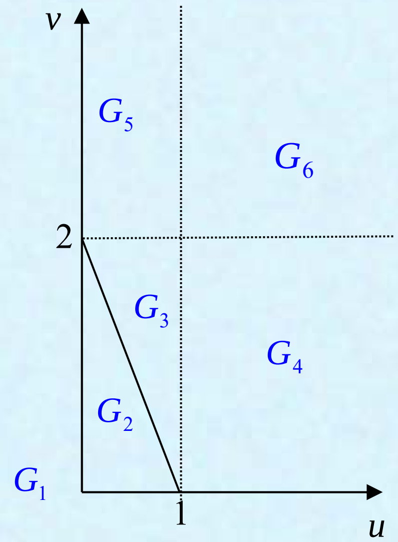



**图3**

**当**$(x, y) \in G_1$ **时,**

$$F(x,y) = \iint\limits_{\{u \le x, v \le y\} \cap G} f(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = 0$$

# 作业

- 2，3