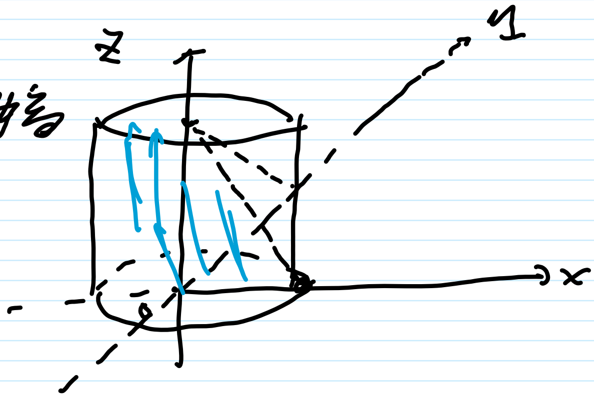
$\int_L f(x,y)\,ds$. 以 L 为底. 以 $f(x,y)$ 为高的柱面

例. $x^2+y^2=a^2$ 被 $z=0$ 和 $z=1-x$ 截面的面积.

解: 以 $x^2+y^2=a^2$ 为底. 以 $z=1-x$ 为高

柱面



$I=\int_L (1-x)\,ds = \int_L 1\,ds$

L: $x^2+y^2=a^2$

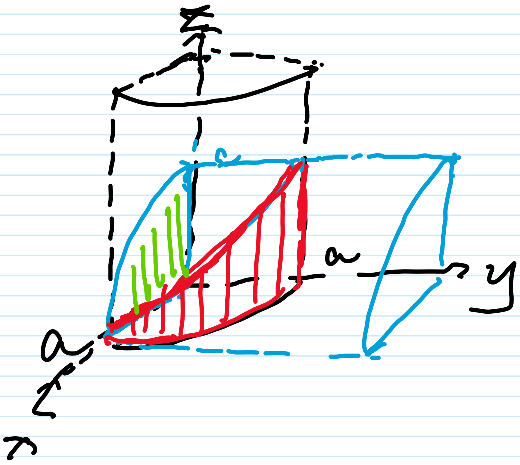
$= 2\pi a$

例: $x^2+y^2=a^2$ 被 $x^2+z^2=a^2$ 所截部分的面积 (I卦限).

解. 思路: 柱面 曲线积分

L: 以 $x^2+y^2=a^2$ ($x\ge0$, $y\ge0$) 为底

以 $z=\sqrt{a^2-x^2}$ 为高的柱面



$I=\int_L \sqrt{a^2-x^2}\,ds$

L: $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=a\sin t \end{cases}$ $0\le t\le \frac{\pi}{2}$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\sin t \cdot \sqrt{(a\cos t)'^2+(a\sin t)'^2}\,dt$

思路: 曲面 重积分

曲面 $y=\sqrt{a^2-x^2}$. 在 xz 面上投影区域.

D: $x^2+z^2\le a^2$. 且 $x\ge a$ $z\ge a$

$$y_x = -\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} \qquad y_z = 0$$

$$S = \iint_D \sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2}+0^2}\,dxdz.$$

例. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$ 在 $x^2+y^2+z^2=1$ 内的面积

解: 以 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$ 为底，以 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 为高的柱面面积的2倍

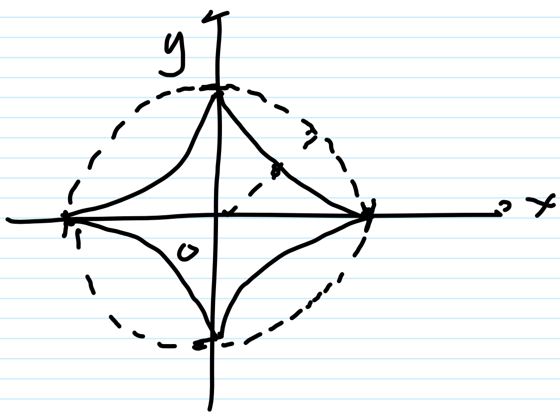
$$I = 2\int_L \sqrt{1-x^2-y^2}\,ds. \qquad L: x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1.$$

$$(x^{\frac{1}{3}})^2+(y^{\frac{1}{3}})^2=1.$$

$= \cdots\cdots$

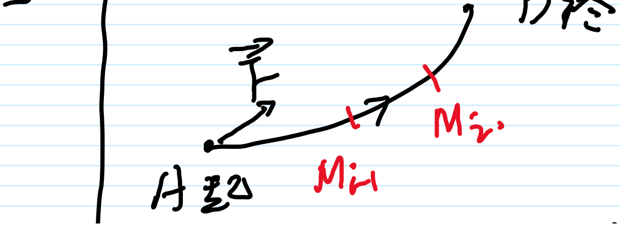
$$\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t. \end{cases}$$ 的化...

$$\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \end{cases}$$

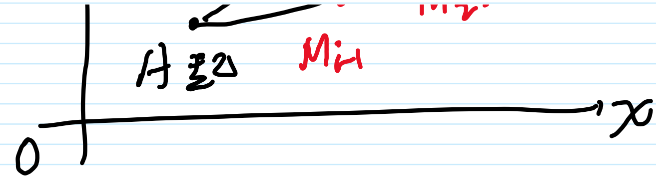


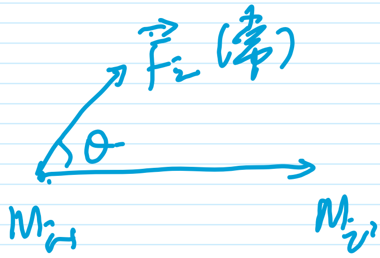
第二节 第二型曲线积分

引例: 变力沿有向曲线所做的功



$$\vec F = (P(x,y), Q(x,y))$$





$\overset{\frown}{M_{i-1}M_i} \approx \overrightarrow{M_{i-1}M_i} = (\Delta x_i, \Delta y_i)$

$W = |\vec{F}| \cdot \cos\theta \cdot |\overrightarrow{M_{i-1}M_i}|$

$\vec{F_i} = (P(\xi_i, \eta_i), Q(\xi_i, \eta_i))$

$W = \vec{F_i} \cdot \overrightarrow{M_{i-1}M_i}$

$W_i \approx \vec{F_i} \cdot \overrightarrow{M_{i-1}M_i}$

$$W = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \vec{F_i} \cdot \overrightarrow{M_{i-1}M_i} = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} (P_i, Q_i) \cdot (\Delta x_i, \Delta y_i)$$

$$= \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} P_i \cdot \Delta x_i + Q_i \cdot \Delta y_i$$

定义：$P(x,y)$. $Q(x,y)$ 在有向曲线 L 上有界

① 任意分割　　② 任意取点

若 $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} P_i \cdot \Delta x_i$ 与 $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} Q_i \cdot \Delta y_i$ 均存在 则分别称为

$P(x,y)$ 在 L 上对坐标 x 的曲线积分
$Q(x,y)$ 在 L 上对坐标 y 的曲线积分 } II型

$\vec{F} = (P(x,y), Q(x,y))$ 在 L 上对坐标的曲线积分.

记为 $\int_L P(x,y)\,dx$　　$\int_L Q(x,y)\,dy$

$\int P dx + \int Q dy = \int P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_L \vec{F} \cdot \vec{ds}$

$$\int_L P dx + \int_L Q dy = \int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_L \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

其中 $\vec{F} = (P, Q)$，$\vec{ds} = (dx, dy)$

$$\int_\Gamma P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

性质：①. $\int_L Pdx + Qdy = -\int_{L^-} Pdx + Qdy$

其中 L^-：与 L 同一条曲线，起点终点对换

② 不需利用对称性

II 型曲线积分的计算 ⟶ 定积分

(1) L：$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $t: \alpha \to \beta$
起 终

$$I = \int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

$$= \int_{\alpha\text{ 起}}^{\beta\text{ 终}} [P(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + Q(x(t), y(t)) \cdot y'(t)] dt$$

(2). L：$y = y(x)$. $x: a \to b$

或 $x = x(y)$. $y: c \to d$.

$$I = \int^b [P(x, y(x)) \cdot 1 + Q(x, y(x)) \cdot y'(x)] dx.$$

$$I=\int_a^b [P(x,y(x))\cdot 1+Q(x,y(x))\cdot y'(x)]dx.$$

或 $$I=\int_c^d [P(x(y),y)\cdot x'(y)+Q(x(y),y)\cdot 1]\,dy$$

(3). L: $\rho=\rho(\theta)$ $\theta:\alpha\to\beta$.

$$I=\int_\alpha^\beta \Big[P(\rho(\theta)\cdot\cos\theta,\rho(\theta)\sin\theta)[\rho(\theta)\cdot\cos\theta]'+Q(\cdots)\cdot[\rho(\theta)\sin\theta]'\Big]d\theta.$$

x	y	dx	dy	ds
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
$x(t)$	$y(t)$	$x'(t)dt$	$y'(t)dt$	$\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt$.

正型. 起点 → 终点

I型: 下限≤上限

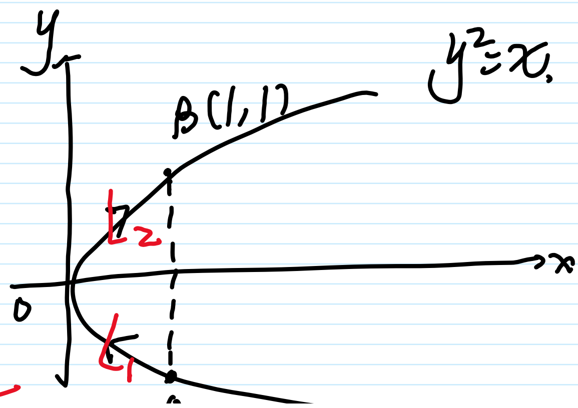
$I_1=\int_L xy\,ds$ 对称性

例 $I=\int_L xy\,dx$ L: $y^2=x$, $A(1,-1)\to B(1,1)$

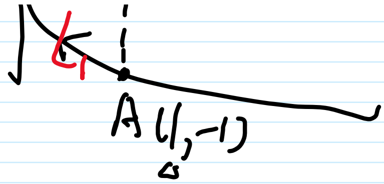
解, ①法. 可加性

L_1: $y=-\sqrt{x}$, $x: 1\to 0$

L_2: $y=\sqrt{x}$, $x: 0\to 1$



$L_2: y=\sqrt{x}$, $x: 0\to 1$



$$I=\int_1^0 x\cdot(-\sqrt{x})\cdot 1\,dx+\int_0^1 x\cdot\sqrt{x}\cdot 1\,dx$$

$$=2\int_0^1 x^{\frac{3}{2}}dx=\cdots$$

②法: $L: x=y^2$, $y: -1\to 1$.

$$\int_L xy\,dx=\int_{-1}^1 y^2\cdot y\cdot 2y\,dy$$

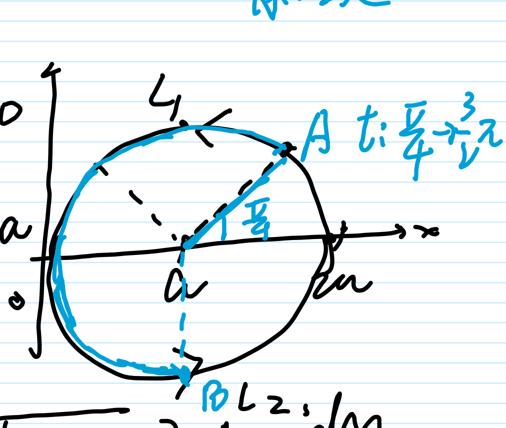
$$=4\int_0^1 y^4\,dy=\frac{4}{5}$$

例. $I=\oint_L xy\,dx$. $L: x^2+y^2=2ax$. 逆时针

小→大

解: ①法: $L_1: y=\sqrt{2ax-x^2}$. $x: 2a\to 0$

$L_2: y=-\sqrt{2ax-x^2}$, $x: 0\to 2a$



$$I=\int_{2a}^0 x(\sqrt{2ax-x^2})\cdot 1\,dx+\int_0^{2a} x(-\sqrt{2ax-x^2})\cdot 1\,dx$$

$$=-2\int_0^{2a} x\sqrt{2ax-x^2}\,dx=\!=\!=$$

②法 $L: \begin{cases} x=a+a\cos t \\ y=a\sin t \end{cases}$ $t: 0\to 2\pi$.

②法1 $L: \begin{cases} x = a + a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases} \quad t: 0 \to 2\pi$

$$I = \int_0^{2\pi} (a + a\cos t) \cdot a\sin t \cdot (-a\sin t)\, dt$$

$$= -a^3 \int_0^{2\pi} (1 + \underbrace{\cos t)\sin^2 t}\, dt.$$

$$= -a^3 \left(\int_0^{2\pi} \sin^2 t\, dt + \underline{\int_0^{2\pi} \sin^2 t\, d\sin t} \right). = \cdots$$

③法: $\rho(\theta) = 2a\cos\theta \qquad \theta: -\frac{\pi}{2} \to \frac{\pi}{2}.$

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2a\cos\theta)^2 \cos\theta \cdot \sin\theta \cdot (2a\cos^2\theta)'\, d\theta$$

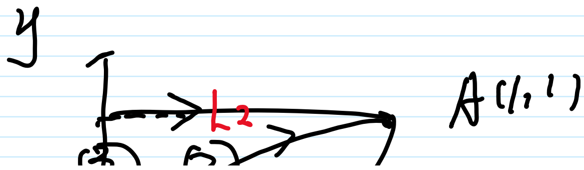
$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2a\cos\theta)^2 \cos\theta \cdot \sin\theta \,(2a \cdot 2\cos\theta \cdot (-\sin\theta))\, d\theta.$$

$$= -32a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta \sin^2\theta\, d\theta$$

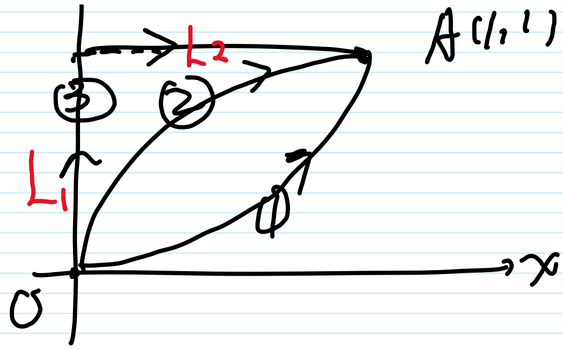
$$= -32a^3 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta \cdot 1\, d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6\theta\, d\theta \right)$$

例 $I = \int_L 2xy\, dx - (3x+y)\, dy$

$L: O(0,0) \to A(1,1)$



L: $O(0,0) \to A(1,1)$



①: $y = x^2$

②: $x = y^2$

③: $(0,0) \to (0,1) \to (1,1)$.

解: ①. L: $y = x^2$. $x: 0 \to 1$

$$I = \int_0^1 [2x \cdot x^2 \cdot 1 + (-3x - x^2) \cdot 2x] \, dx$$

$= -2$

②. L: $x = y^2$. $y: 0 \to 1$

$$I = \int_0^1 [2 \cdot y^2 \cdot y \cdot 2y + (-3y^2 - y) \cdot 1] \, dy = \frac{7}{10}$$

③ $L = L_1 + L_2$.

L_1: $x = 0$, $y: 0 \to 1$

L_2: $y = 1$, $x: 0 \to 1$

$$I = \int_0^1 [2 \cdot 0 \cdot y \cdot 0 + (-3 \cdot 0 - y) \cdot 1] \, dy + \int_0^1 [2x \cdot 1 \cdot 1 + (-3x - 1) \cdot 0] \, dx.$$

$$= \int_0^1 -y \, dy + \int_0^1 2x \, dx = \frac{1}{2}.$$

推论：(1). $L \perp x$轴 ($x=x_0$ 常数) $y: c \to d$)

$dx=0$. $\int_L p\,dx = 0$

$$\int_L p(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_c^d Q(x_0, y)\,dy$$

$$= \int_c^d [p(x_0,y)\cdot 0 + Q(x_0,y)\cdot 1]\,dy.$$

(2) $L \perp y$轴 ($y=y_0$ 常数 $x: a \to b$)

$dy=0$

$$\int_L Q\,dy = 0$$

$$\int_L p\,dx + Q\,dy = \int_a^b p(x, y_0)\,dx$$

(3). Γ: 在 $z=z_0$ 平面上. $\int_\Gamma R\,dz = 0$

$dz=0$.

$$\int_\Gamma p\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_\Gamma p\,dx + Q\,dy.$$

Γ: 在x轴上. $x: a \to b$

$$\int_\Gamma p\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_a^b p(x,0,0)\,dx$$

例

$$I = \int_\Gamma xy\,dx + yz\,dy + zx\,dz$$

Γ: 从 $A(3,2,1)$ 到 $B(0,0,0)$ 的有向线段

解: $\vec{s}=\overrightarrow{BA}=(3,2,1)$

过点A、B的直线: $\dfrac{x-0}{3}=\dfrac{y-0}{2}=\dfrac{z-0}{1}=t.$

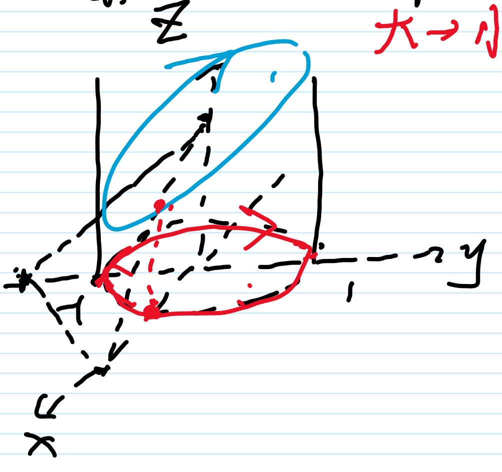
Γ 的参数形式: $\begin{cases} x=3t \\ y=2t \\ z=t. \end{cases}$ $t: 1\to 0$

$I=\int_1^0 (3t\cdot 2t\cdot 3 + 2t\cdot t\cdot 2 + 3t\cdot t\cdot 1)\,dt$

例: $I=\int_\Gamma (z-y)dx+(x-z)dy+(x-y)dz$

$\Gamma: \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x-y+z=2 \end{cases}$ 从z轴正向看. 顺时针.

大→小.

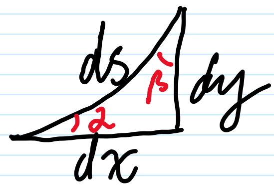


解: 参数方程: $\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \\ z=2-\cos t+\sin t \end{cases}$ $t: 2\pi\to 0$

$I=\int_{2\pi}^0 (\quad \cdots \quad)\,dt$

两类曲线积分的联系. Ⅱ型 ⟶ Ⅰ型.

$$(ds)^2=(dx)^2+(dy)^2$$



$$\begin{cases} dx = ds \cdot \cos\alpha \\ dy = ds \cdot \cos\beta \end{cases}$$

$$\int_L P\,dx+Q\,dy=\int_L (P\cos\alpha+Q\cos\beta)\,ds$$

L 有向 　　　　L 无向

$$\int_\Gamma P\,dx+Q\,dy+R\,dz=\int_\Gamma (P\cdot\cos\alpha+Q\cdot\cos\beta+R\cdot\cos\gamma)\,ds$$

$$\cos\alpha=\frac{dx}{ds}=\pm\frac{x'(t)}{\sqrt{x'^2+y'^2}}$$

$$\cos\beta=\frac{dy}{ds}=\pm\frac{y'(t)}{\sqrt{x'^2+y'^2}}$$