第三章　功与能

01:28:40

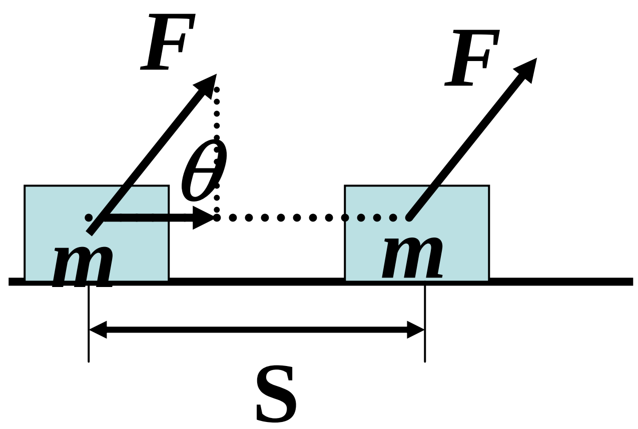
§1 质点的动能定理

一、功（Work）

•恒力的功

$$W = (F\cos\theta)S$$

$$W = \vec{F}\cdot\vec{S}$$



功是标量，没有方向，只有大小，但有正负

θ<π/2，　W>0，力对物体作正功；

θ=π /2，W=0，力对物体不作功；

θ>π /2，W<0，力对物体作负功，或物体克服该力作功

01:28:40

•**变力的功**

取元位移$\mathrm{d}\vec{r}$，在$\mathrm{d}\vec{r}$范围内，作用力$\vec{F}$可认为是恒力。

在任一元位移$\mathrm{d}\vec{r}$上，力$\vec{F}$所作的元功

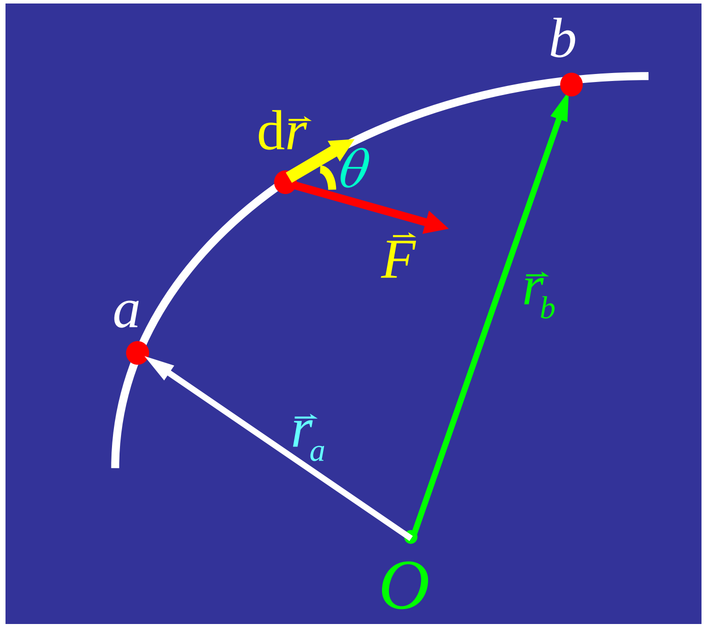
$$\mathrm{d}W = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = F\left|\mathrm{d}\vec{r}\right|\cos\theta \quad 或 \quad \mathrm{d}W = F\cos\theta\mathrm{d}s$$

注意：$ds = \left|\mathrm{d}\vec{r}\right| \neq \mathrm{d}\left|\vec{r}\right| = dr$

由***a***点移动到***b***点，总功

$$W = \int_a^b \mathrm{d}W = \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

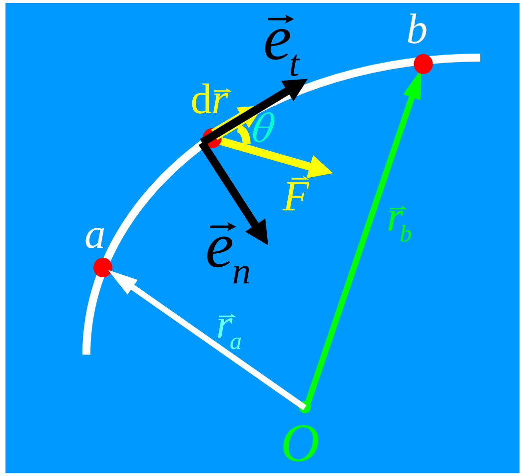
$$= \int_a^b F\cos\theta\mathrm{d}s$$



01:28:40

直角坐标系中： $W=\int_a^b \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_a^b (F_x \mathrm{d}x + F_y \mathrm{d}y + F_z \mathrm{d}z)$

自然坐标系中： $\mathrm{d}\vec{r}$只有切向分量



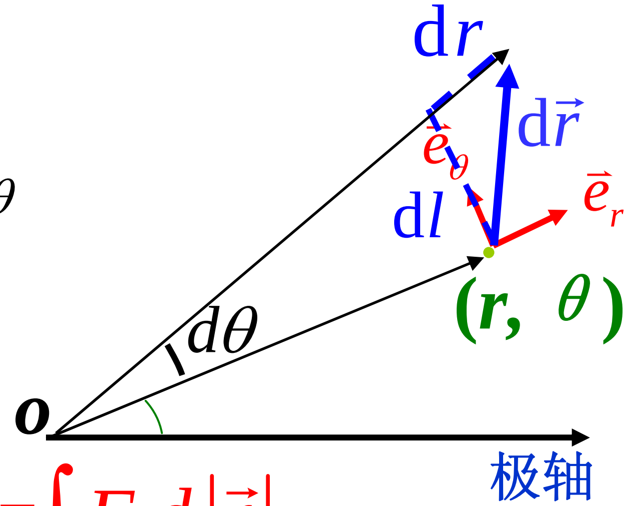
$$W=\int_a^b F_\tau |d\vec{r}| = \int_a^b F_\tau ds = \int_a^b F\cos\theta \mathrm{d}s$$

法向力始终不作功

极坐标系中： $\vec{F}=F_r\vec{e}_r + F_\theta \vec{e}_\theta$

$$d\vec{r} = dr\vec{e}_r + dl\vec{e}_\theta = dr\vec{e}_r + rd\theta\vec{e}_\theta$$

$$W=\int (F_r dr + F_\theta r d\theta)$$



若$\vec{F}$为有心力，$\vec{F}=F_r\vec{e}_r$　　$W=\int F_r dr = \int F_r d|\vec{r}|$

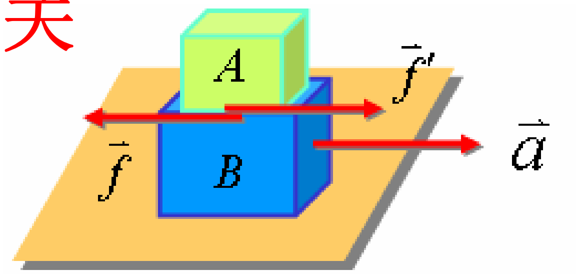
力的作用线始终通过一固定点（力心）

01:28:40

- 作功与坐标系无关 $W=\int_a^b \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$
- 位移与参考系有关→功与参考系有关

以地面为参考系，f' 对**A**做功

以**B**为参考系，f' 对**A**不做功



假设**A**、**B**没有相对滑动

•**功率** $P=\dfrac{dW}{dt}=\dfrac{\vec{F}\cdot d\vec{r}}{dt}=\vec{F}\cdot\vec{v}$

•**合力的功** $\vec{F}_{合}=\sum \vec{F}_i$

$$W=\int_a^b \vec{F}_{合}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=\int_a^b(\vec{F}_1+\vec{F}_2+\cdots+\vec{F}_n)\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$=\int_a^b \vec{F}_1\cdot \mathrm{d}\vec{r}+\int_a^b \vec{F}_2\cdot \mathrm{d}\vec{r}+\cdots+\int_a^b \vec{F}_n\cdot \mathrm{d}\vec{r}=\sum W_i$$

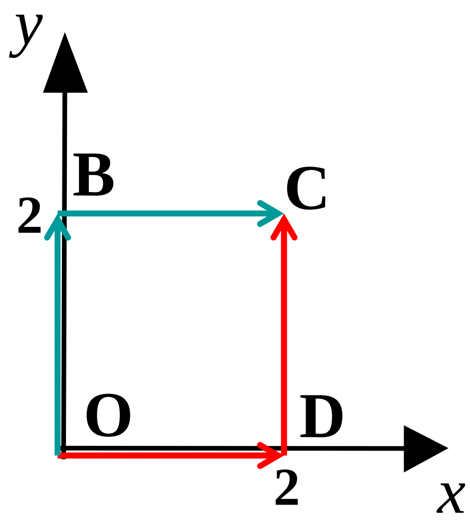
等于各分力沿同一路径所作功的代数和

01:28:40

例:一个质点沿如图所示的路径运行,

求:力 $\vec{F}=(4-2y)\vec{i}$ (SI) 对质点所作的功,

（1）沿ODC；（2）沿OBC



解: $W=\int F_x\cdot dx+\cancel{F_y\cdot dy}$ $\qquad F_x=4-2y$

$F_y=0$

（1）OD段：$y=0$, DC段：$dx=0$

$$W_{ODC}=\int_{OD}F_x\cdot dx=\int_0^2(4-2\times 0)dx=8J$$

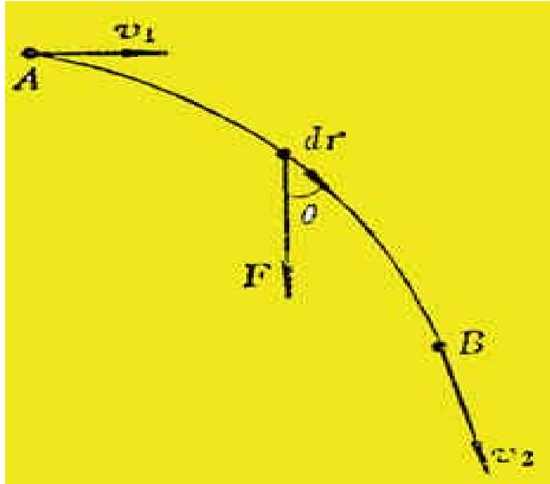
（2）OB段：$dx=0$, BC段：$y=2$

$$W_{OBC}=\int_{BC}F_x\cdot dx=\int_0^2(4-2\times 2)dx=0J$$

➢ 功是过程量，一般情况下，作功与路径有关。

01:28:40

二、质点的动能定理



作功对运动状态有什么影响?

$$W=\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} \qquad \vec{F}=m\vec{a}=m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{F}\cdot d\vec{r}=m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot d\vec{r}=m\frac{d\vec{r}}{dt}\cdot d\vec{v}=m\vec{v}\cdot d\vec{v}$$

$$\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_{\vec{v}_1}^{\vec{v}_2} m\vec{v}\cdot d\vec{v} \qquad \boldsymbol{W=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2}$$

动能(**Kinetic Energy**) $E_k=\dfrac{1}{2}mv^2$ $\qquad W=E_{k2}-E_{k1}$

合力对质点所作的功等于质点动能的增量

$W>0 \quad E_k\uparrow$

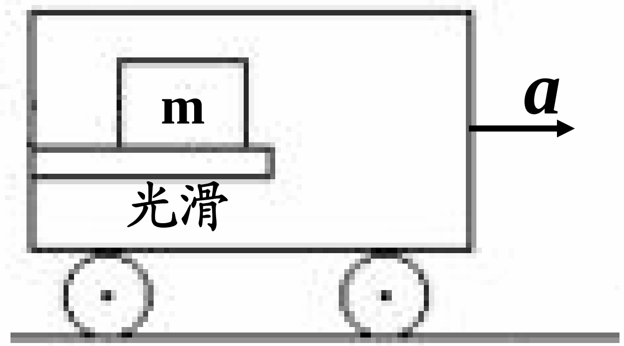
$W<0 \quad E_k\downarrow$

质点的动能定理是从牛顿定律推导出来的

01:28:40

质点的动能定理只适用于惯性系

如: 初始小车、物体m均静止,
若小车开始向右加速...



从车厢参考系来看，物体m将会相对车厢向左运动，即其动能将不再是0

从地面参考系来看，物体m相对地面保持静止，动能没有变化，仍然为0

由于桌面光滑，物体m受到的合力为0，从两个参考系中来看，都没有力对物体m做功。

地面参考系：$W=0$，$\Delta E_k = 0$，动能定理成立。

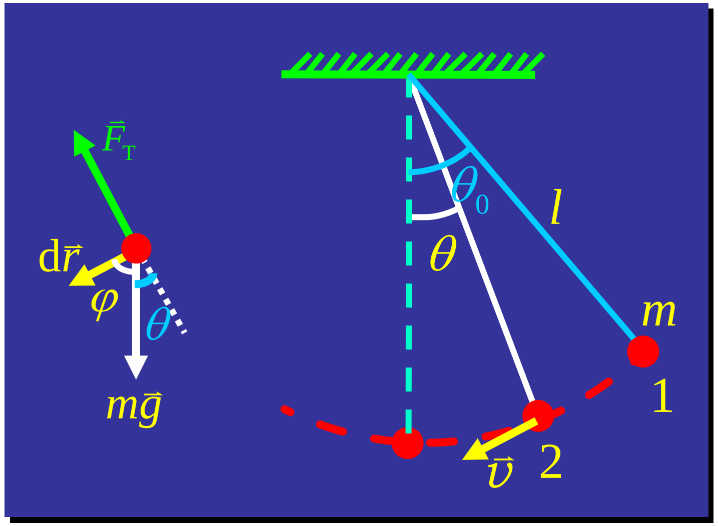
车厢参考系：$W=0$，$\Delta E_k \neq 0$，动能定理不成立！

01:28:40

例：质量为m的小球，系在长为l 的细绳下端，绳的上端固定在天花板上，构成一单摆。开始时，把绳子拉到与铅垂线成θ_0角处，然后放手使小球沿圆弧下落。

求：绳与铅垂线成 θ 角时小球的速率。

解：受力如图，取元位移 $\mathrm{d}\vec{r}$



$$W=\int_1^2 \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int_1^2(\vec{F}_{\mathrm{T}}+m\vec{g})\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

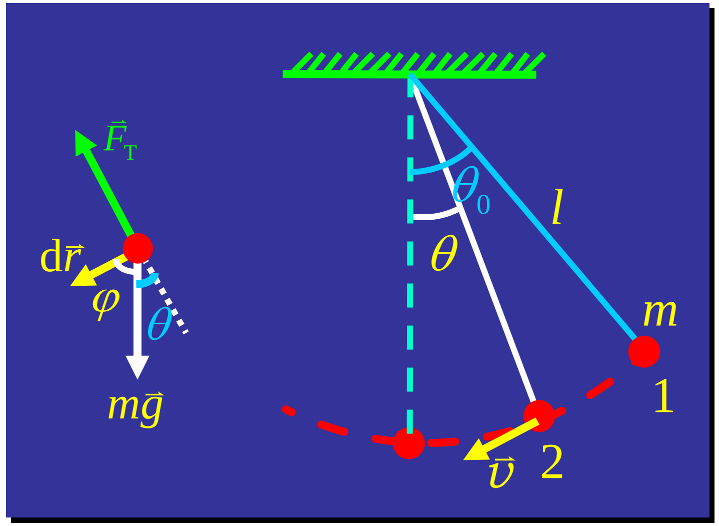
$$=\int_1^2 \vec{F}_{\mathrm{T}}\cdot\mathrm{d}\vec{r}+\int_1^2 m\vec{g}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

张力的功 $\int_1^2 \vec{F}_{\mathrm{T}}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=0$

重力的功 $\int_1^2 m\vec{g}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int_1^2 mg\cos\varphi\,\mathrm{d}s=\int_1^2 mg\sin\theta\,\mathrm{d}s$

01:28:40

$$W=\int_1^2 mg\sin\theta\,\mathrm{d}s$$



$$\mathrm{d}s=-l\,\mathrm{d}\theta$$

顺时针，角位移**dθ<0**

$$W=\int_1^2 mg\sin\theta\,\mathrm{d}s=-\int_{\theta_0}^{\theta} mgl\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$

θ_0题中已给出

$$=mgl(\cos\theta-\cos\theta_0)$$

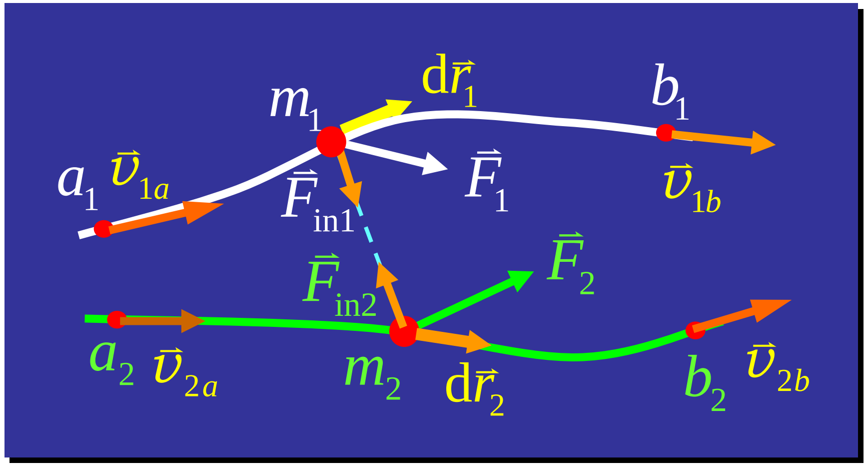
$$W=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}mv^2-0 \quad \Leftarrow v_0=0$$

$$mgl(\cos\theta-\cos\theta_0)=\frac{1}{2}mv^2 \qquad v=\sqrt{2gl(\cos\theta-\cos\theta_0)}$$

01:28:40

§2 质点系的动能定理

$\vec{F}_1$、$\vec{F}_2$ 外力，$\vec{F}_{\text{in}1}$、$\vec{F}_{\text{in}2}$ 内力



根据质点的动能定理

对$\boldsymbol{m_1}$：
$$W_1=\int_{a_1}^{b_1}\vec{F}_1\cdot\mathrm{d}\vec{r}_1+\int_{a_1}^{b_1}\vec{F}_{\text{in}1}\cdot\mathrm{d}\vec{r}_1=\frac{1}{2}m_1\upsilon_{1b}^2-\frac{1}{2}m_1\upsilon_{1a}^2$$

对$\boldsymbol{m_2}$：
$$W_2=\int_{a_2}^{b_2}\vec{F}_2\cdot\mathrm{d}\vec{r}_2+\int_{a_2}^{b_2}\vec{F}_{\text{in}2}\cdot\mathrm{d}\vec{r}_2=\frac{1}{2}m_2\upsilon_{2b}^2-\frac{1}{2}m_2\upsilon_{2a}^2$$

两式相加
$$\int_{a_1}^{b_1}\vec{F}_1\cdot\mathrm{d}\vec{r}_1+\int_{a_2}^{b_2}\vec{F}_2\cdot\mathrm{d}\vec{r}_2+\int_{a_1}^{b_1}\vec{F}_{\text{in}1}\cdot\mathrm{d}\vec{r}_1+\int_{a_2}^{b_2}\vec{F}_{\text{in}2}\cdot\mathrm{d}\vec{r}_2$$
$$=\left(\frac{1}{2}m_1\upsilon_{1b}^2+\frac{1}{2}m_2\upsilon_{2b}^2\right)-\left(\frac{1}{2}m_1\upsilon_{1a}^2+\frac{1}{2}m_2\upsilon_{2a}^2\right)$$

$$W_{外}+W_{内}=(E_{\text{k}b1}+E_{\text{k}b2})-(E_{\text{k}a1}+E_{\text{k}a2})=E_{\text{k}b}-E_{\text{k}a}$$

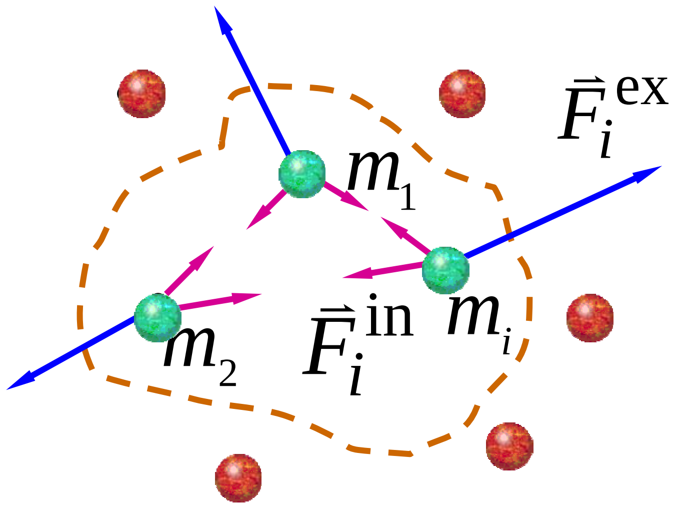
01:28:40

➢ 推广到n个质点的质点系

设一系统有n个质点，作用于各质点的合力所作的功分别为：

$W_1, W_2, \ldots, W_n$，

使各质点由初动能 $E_{k10}, E_{k20}, \ldots, E_{kn0}$， 变成末动能 $E_{k1}, E_{k2}, \ldots, E_{kn}$



由质点的动能定理，对每个质点有：

$$W_1 = E_{k1} - E_{k10}$$
$$W_2 = E_{k2} - E_{k20}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+\quad W_n = E_{n1} - E_{n10}$$

$$\sum_{i=1}^{n} W_i = \sum_{i=1}^{n} E_{ki} - \sum_{i=1}^{n} E_{ki0}$$

作用于质点系的外力和内力所作的功的总和等于系统动能增量

$$\sum_{i=1}^{n} W_i = W_{外} + W_{内}$$

？ $W_{外}$是不是合外力作的功？

？ 内力的功是否互相抵消掉了？

01:28:40

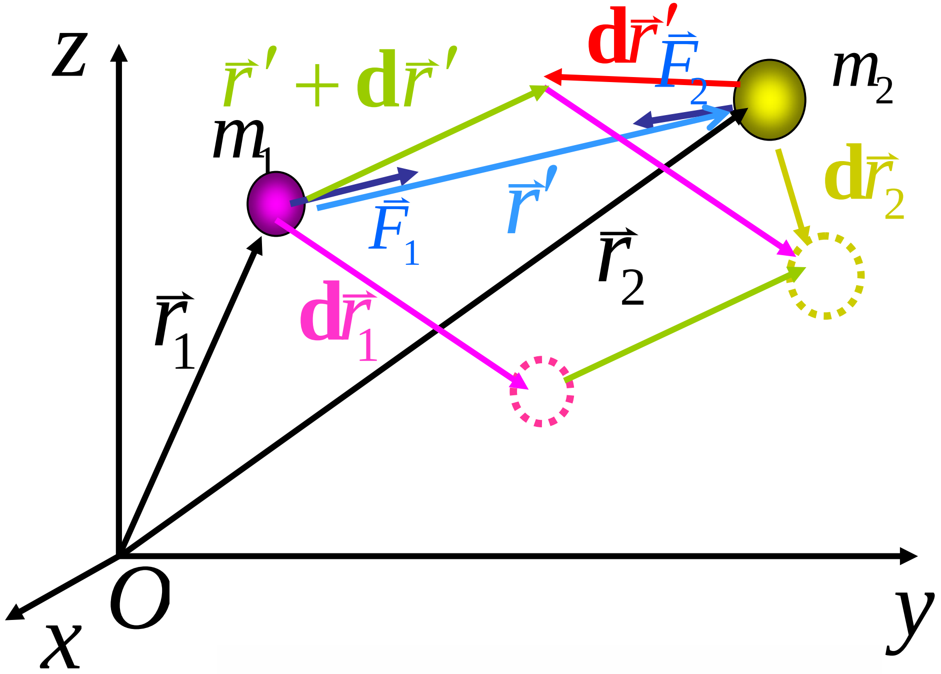
➢ 一对力作功的和

设两个质量分别为 m_1 和 m_2 的质点，它们之间有一对作用力与反作用力 $\vec{F}_1$ 和 $\vec{F}_2$

$$\mathrm{d}W_1 = \vec{F}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{r}_1 \qquad \mathrm{d}W_2 = \vec{F}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{r}_2$$

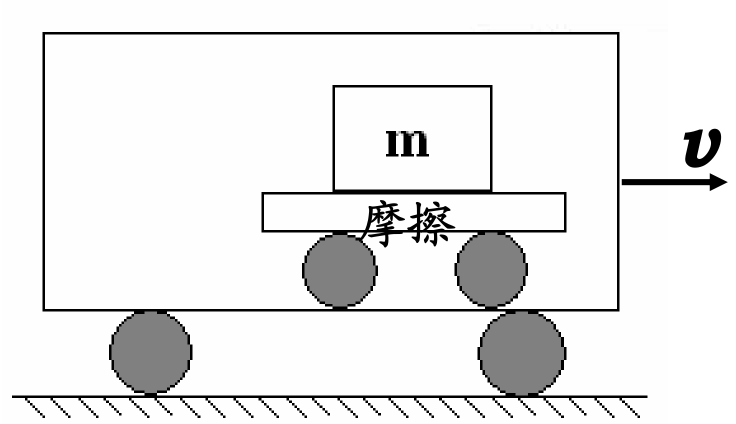
$$\begin{aligned}
\mathrm{d}W &= \vec{F}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{r}_1 + \vec{F}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{r}_2 \\
&= -\vec{F}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{r}_1 + \vec{F}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{r}_2 \\
&= \vec{F}_2 \cdot (\mathrm{d}\vec{r}_2 - \mathrm{d}\vec{r}_1) \\
&= \vec{F}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{r}\,'
\end{aligned}$$

相对位移



一对力作功之和与相对位移有关

与参考系选择无关。

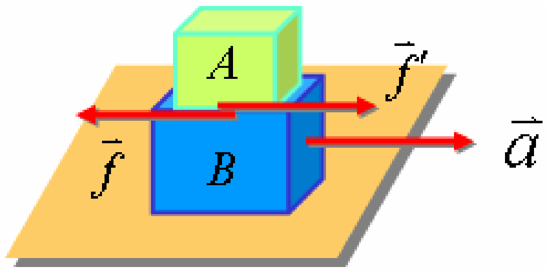


01:28:40

$$dW = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}'$$

两质点间无相对位移

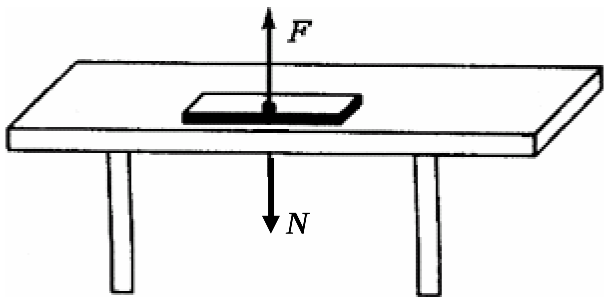
$\mathrm{d}\vec{r}' = 0 \qquad dW = 0$

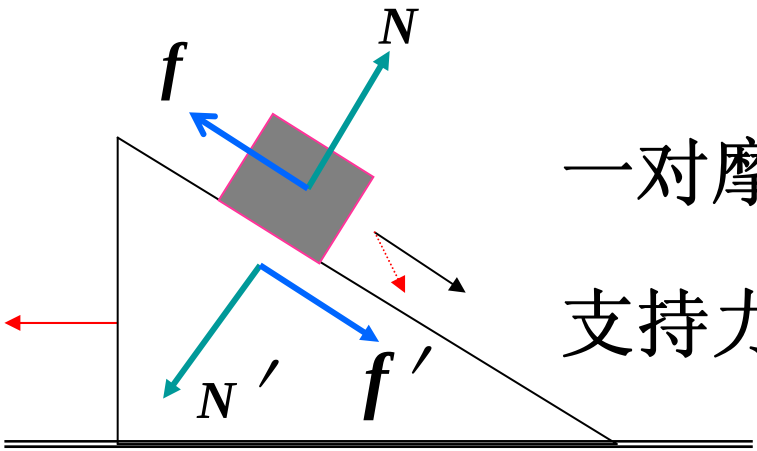


假设A、B没有相对滑动

相对运动方向与互作用的方向始终垂直

$\vec{F} \perp \mathrm{d}\vec{r}' \qquad dW = 0$





一对摩擦力作功之和 $\Delta W = -f\Delta s \neq 0$

支持力与压力作功之和 $\Delta W = 0$

01:28:40

选择题： #S1301.

一水平传送带受电动机驱动，保持匀速运动。现在传送带上轻轻放置一砖块，则在砖块刚被放上→与传送带共同运动的过程中：

① 摩擦力对皮带做的功与摩擦力对砖块做的功等值反号

② 驱动力的功与摩擦力对砖块做的功之和等于砖块获得的动能

③ 驱动力的功与摩擦力对皮带做的功之和为零

④ 驱动力的功等于砖块获得的动能

⑤ 以上结论都不对

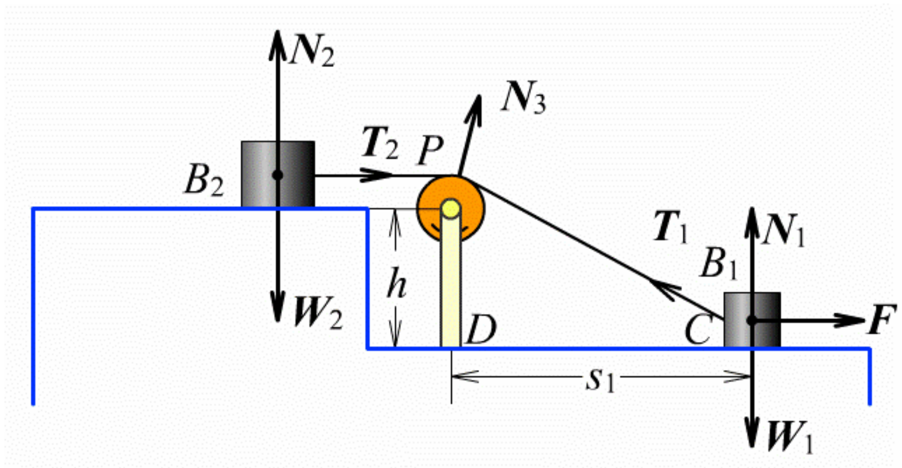
01:28:40

例: 如图所示，两个质量分别为$\mathbf{m_1,m_2}$的物体$\mathbf{B_1,B_2}$用跨过轻滑轮**P**的轻绳连接，物体$\mathbf{B_1}$在水平恒力$\boldsymbol{F}$ 拉动下，两物体分别在高度差为$\boldsymbol{h}$的平台上运动，不计一切摩擦，绳不可伸长。

求: 物体$\mathbf{B_1}$从$\boldsymbol{D}$点自静止开始沿平台面经历位移$\mathbf{S_1}$时的速度$\boldsymbol{v_1}$

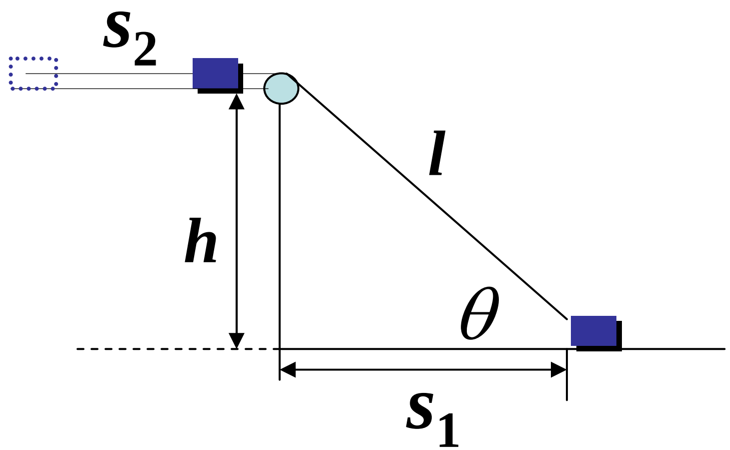
01:28:40

解: 取两物体B_1,B_2和细绳为一系统，并分析受力



外力：重力W_1,W_2,支持力N_1,N_2和N_3分别垂直于位移方向，均不作功；

拉力F 作功为 $W_F=Fs_1$



内力T_1作功 $dW_{T_1}=-T_1ds_1\cos\theta$

内力T_2作功 $dW_{T_2}=T_2ds_2$

$$s_1=\sqrt{l^2-h^2}\Rightarrow ds_1=\frac{l}{\sqrt{l^2-h^2}}dl$$

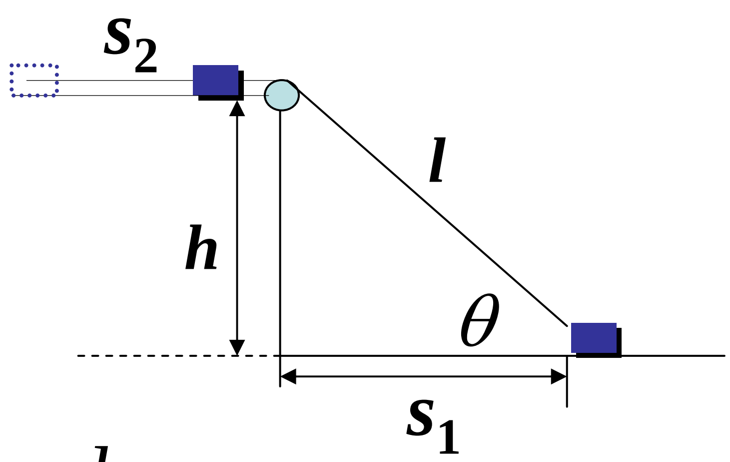
$$dl=ds_2 \qquad \cos\theta=\frac{\sqrt{l^2-h^2}}{l} \qquad \Rightarrow ds_1\cos\theta=ds_2 \qquad T_1=T_2$$

01:28:40

只有拉力F 作功　$W_F=Fs_1$

两物体初始状态均静止，设末态B_2的速度为v_2

根据系统的动能定理



$$Fs_1=\frac{1}{2}m_1v_1{}^2+\frac{1}{2}m_2v_2{}^2-0$$

$$ds_2=ds_1\cos\theta=\frac{\sqrt{l^2-h^2}}{l}ds_1=\frac{s_1ds_1}{\sqrt{h^2+s_1{}^2}}$$

$$v_2=\frac{s_1v_1}{\sqrt{h^2+s_1{}^2}}\qquad v_1=\sqrt{\frac{2Fs_1(h^2+s_1{}^2)}{m_1(h^2+s_1{}^2)+m_2s_1{}^2}}$$

01:28:40

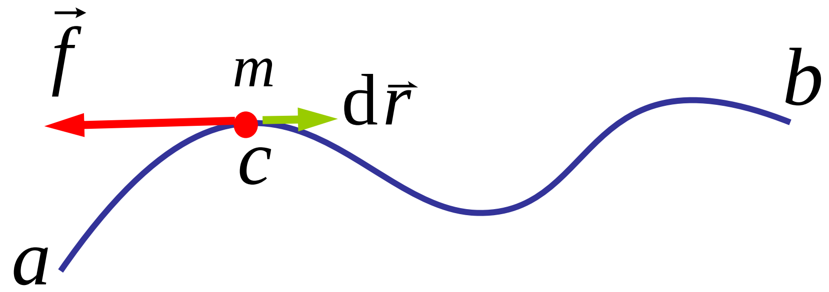
§3 保守力的功 势能

一、几种力作功的特点

1. 摩擦力作功

质点在粗糙的平面上运动

$$dW = \vec{f} \cdot d\vec{r}$$



取自然坐标系

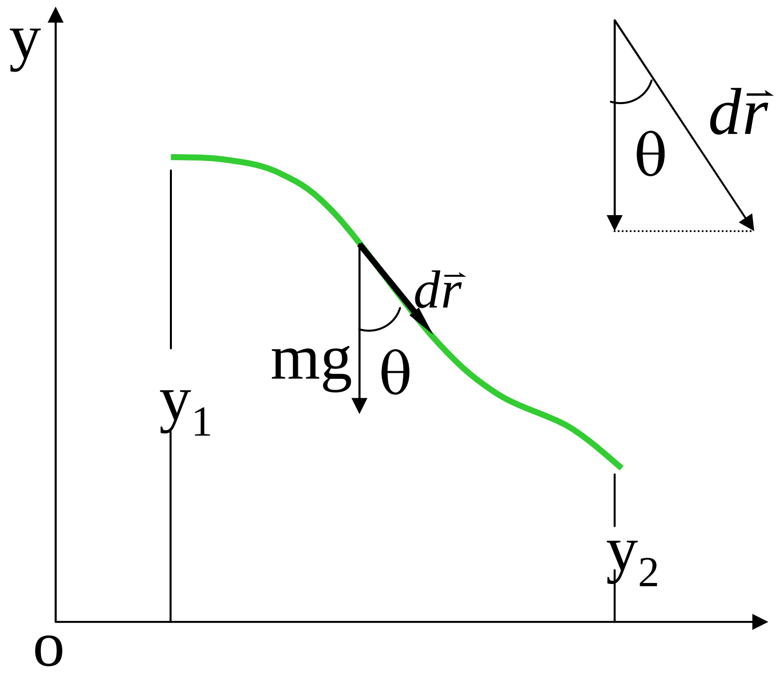
$$\vec{f} = -f\,\vec{\tau} \qquad d\vec{r} = \left|d\vec{r}\right|\vec{\tau} = ds\vec{\tau}$$

$$W = \int \vec{f} \cdot d\vec{r} = -\int f ds = -f\,\Delta s$$ 设摩擦力大小为常量

摩擦力作功与质点运动的具体路径有关。

01:28:40

2、重力作功



$$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j}$$

$$dW = m\vec{g}\cdot d\vec{r}$$

$$= -mg\vec{j}\cdot\left(dx\vec{i} + dy\vec{j}\right)$$

$$= -mgdy$$

$$W = \int_{y_1}^{y_2} -mgdy$$

$$= -mg\left(y_2 - y_1\right)$$

$$= -\left(mgy_2 - mgy_1\right)$$

$$W = mg(y_1 - y_2)$$

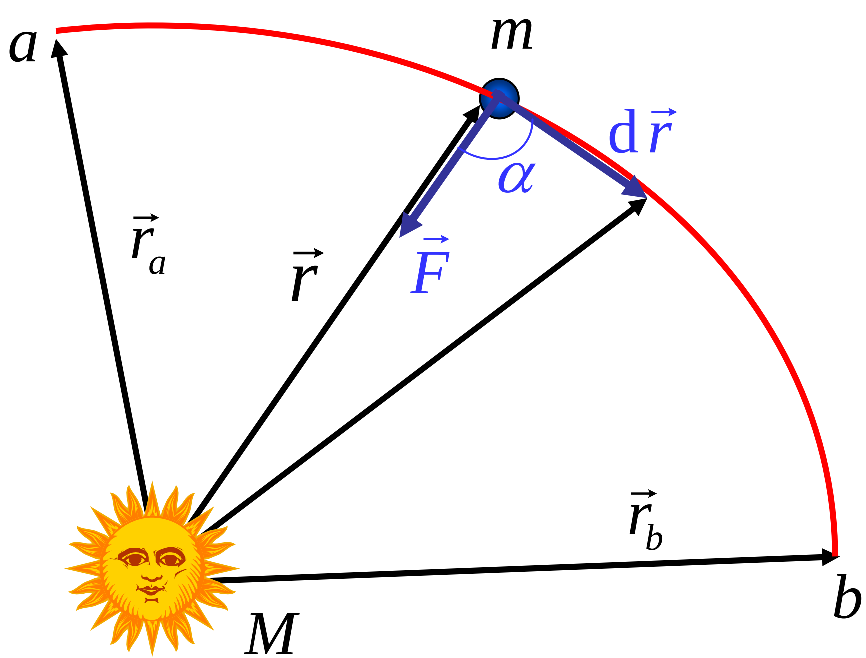
重力作功只与质点的起始和终了位置有关，而与质点所经过的路径无关

01:28:40

3、万有引力作功

$$\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\vec{e}_r$$

有心力



$$\mathrm{d}W = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = -G\frac{Mm}{r^2}\vec{e}_r\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

$$= -G\frac{Mm}{r^2}\mathrm{d}r$$

$$W = \int_a^b \mathrm{d}W = \int_{r_a}^{r_b} -G\frac{Mm}{r^2}\mathrm{d}r$$

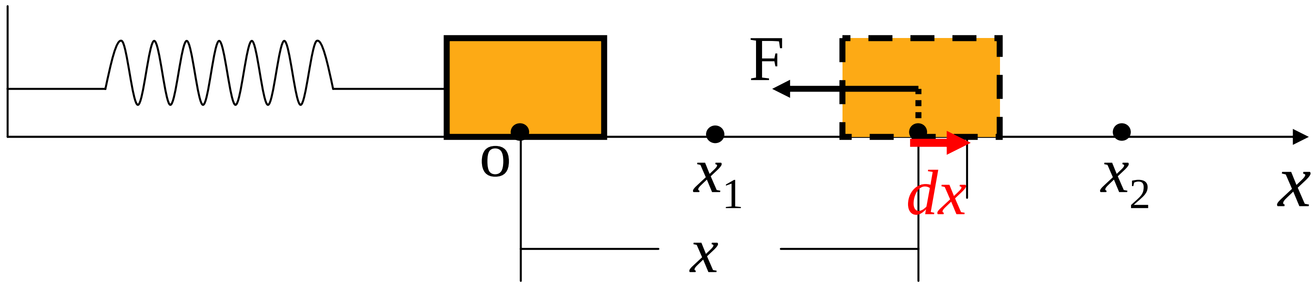
$$= -GMm\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right)$$

万有引力作功只与质点的始末位置有关，与具体路径无关。

若 $\vec{F} = F(r)\vec{e}_r$ ，则做功与具体路径无关。

01:28:40

4、弹性力作功



$$\vec{F} = -kx\vec{i}$$

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{x} = -kx\vec{i} \cdot dx\vec{i} = -kxdx$$

$$W = \int_{x_1}^{x_2} -kxdx = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2 = -\frac{1}{2}k(x_2^2 - x_1^2)$$

弹性力作功只与质点的起始和终了位置有关，
而与质点所经过的路径无关。

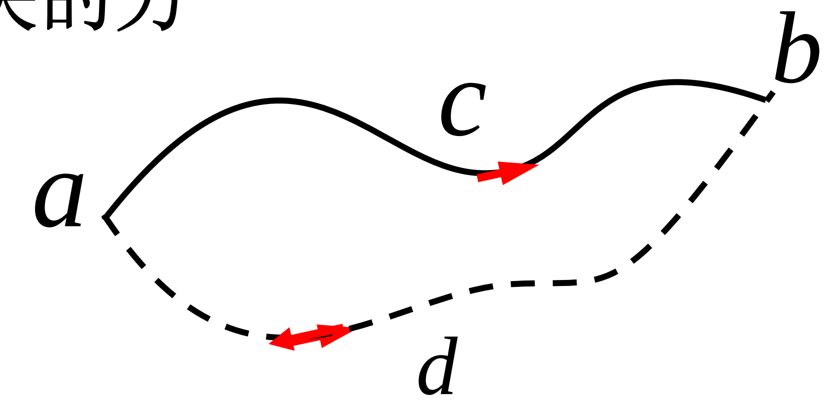
01:28:40

二、保守力与非保守力

保守力：作功只与始末位置有关而与路径无关的力

非保守力：作功与路径有关的力

$$\int_{acb} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{adb} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$



$$W = \oint_{l} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{acb} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{bda} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$\oint_{l} \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$$

$$\int_{bda} \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int_{adb} \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int_{acb} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

保守力沿任意闭合路径一周所作的功为零

01:28:40

三、势能（potential energy）

重力作功 $$W=-(mgy_2-mgy_1)$$

万有引力作功 $$W=-GMm[(-\frac{1}{r_b})-(-\frac{1}{r_a})]$$

弹性力作功 $$W=-(\frac{1}{2}kx_2^2-\frac{1}{2}kx_1^2)$$

$$W=-\left(E_{p2}-E_{p1}\right)=-\Delta E_p$$

- 因处于空间某位置而具有的作功本领
- 保守力作功等于势能增量的负值

$$\boxed{\begin{array}{ll} W>0 & E_p\downarrow \\ W<0 & E_p\uparrow \end{array}}$$

01:28:40

● 只有对保守力，才能引入势能的概念，非保守力不能引入势能。

●势能是相互作用能，属于系统，不能孤立的对某个物体讨论势能。

$$W = -\left(E_{p2} - E_{p1}\right) = -\Delta E_p$$

● 要确定某一点的势能，必须首先选定势能零点。

$$W_{a\to(0)} = -[0 - E_p(\mathrm{a})] = E_p(\mathrm{a}) \qquad E_p(\mathrm{a}) = W_{a\to(0)} = \int_{\mathrm{a}}^{(0)} \vec{F}_{\mathrm{c}} \cdot d\vec{r}$$

质点在任一位置时的势能等于将质点从该位置经任意路径移动到势能零点时保守力所作的功。

01:28:40

- 零点的选取任意，但有一些习惯取法，可使问题简化

◆ 力学中常见的势能

重力势能 $\boldsymbol{E_p = mgy}$ 零点选地面

万有引力势能 $\boldsymbol{E_p = -G\dfrac{Mm}{r}}$ 零点选在无穷远处

弹性势能 $E_p = \dfrac{1}{2}kx^2$ 零点选在弹簧平衡位置

- 势能的值与势能零点选取有关，但势能之差与零点的选择无关

$$\Delta E_p = E_p(\mathrm{b}) - E_p(\mathrm{a}) = \int_{\mathrm{b}}^{(0)} \vec{F}_{\mathrm{c}} \cdot d\vec{r} - \int_{\mathrm{a}}^{(0)} \vec{F}_{\mathrm{c}} \cdot d\vec{r} = \int_{\mathrm{b}}^{a} \vec{F}_{\mathrm{c}} \cdot d\vec{r} = -W_{a\to b}$$

01:28:40

例：$\vec{F}=2xe^{-x^2}\vec{i}$ 是否为保守力，如果是，求势能函数。

解：$W=\int_a^b \vec{F}\cdot d\vec{r} \;=\int_a^b 2xe^{-x^2}\vec{i}\cdot d\vec{r}=\int_a^b 2xe^{-x^2}dx$

$$=e^{-a^2}-e^{-b^2}$$ 是保守力

$E_p(\mathrm{a})=\int_{\mathrm{a}}^{(0)}\vec{F}\cdot d\vec{r}$　　势能零点的选取

若选取**b**点为势能零点，$\mathbf{E_p(b)=0}$

$E_p(\mathrm{a})=\int_a^b \vec{F}\cdot d\vec{r}=e^{-a^2}-e^{-b^2}$　　若**b=0**(原点)　$E_p(\mathrm{a})=e^{-a^2}-1$

若选取∞处为势能零点，$\mathbf{E_p(\infty)=0}$

$$E_p(\mathrm{a})=\int_a^{\infty}\vec{F}\cdot d\vec{r}=e^{-a^2}-e^{-\infty^2}=e^{-a^2}$$

01:28:40

四、势能与保守力的关系

由保守力求势能 $E_p(\mathrm{a})=\int_{\mathrm{a}}^{(0)}\vec{F}_{\mathrm{c}}\cdot d\vec{r}$ 由势能求保守力?

$$W=-\left(E_{p2}-E_{p1}\right)=-\Delta E_p \qquad dE_p=-dW=-\vec{F}_{\mathrm{c}}\cdot d\vec{r}$$

$$\vec{F}_{\mathrm{c}}=F_x\vec{i}+F_y\vec{j}+F_z\vec{k} \qquad d\vec{r}=dx\vec{i}+dy\vec{j}+dz\vec{k}$$

$$dE_p=-(F_x\vec{i}+F_y\vec{j}+F_z\vec{k})\cdot(dx\vec{i}+dy\vec{j}+dz\vec{k})$$

$$=-(F_xdx+F_ydy+F_zdz)$$

直角坐标系中，$\mathbf{dE_p}$的全微分

$$dE_p=\frac{\partial E_p}{\partial x}dx+\frac{\partial E_p}{\partial y}dy+\frac{\partial E_p}{\partial z}dz$$

$$\boxed{\begin{aligned}F_x&=-\frac{\partial E_p}{\partial x}\\ F_y&=-\frac{\partial E_p}{\partial y}\\ F_z&=-\frac{\partial E_p}{\partial z}\end{aligned}}$$

01:28:40

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x} \qquad F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y} \qquad F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z}$$

$$\vec{F}_{保} = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{k}\right) = -\nabla E_p = -gradE_p$$

梯度

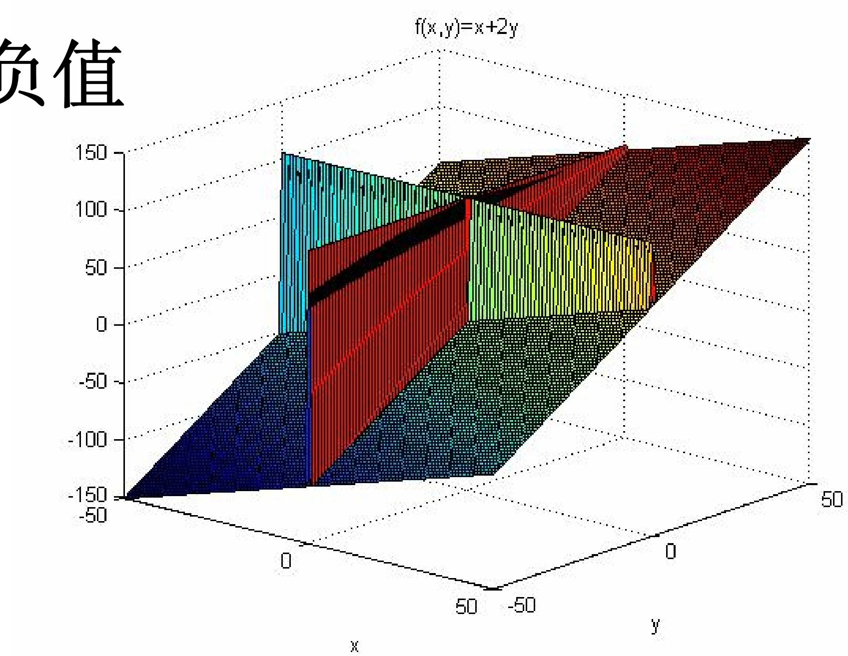
$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

保守力等于相关势能梯度的负值

标量的梯度:

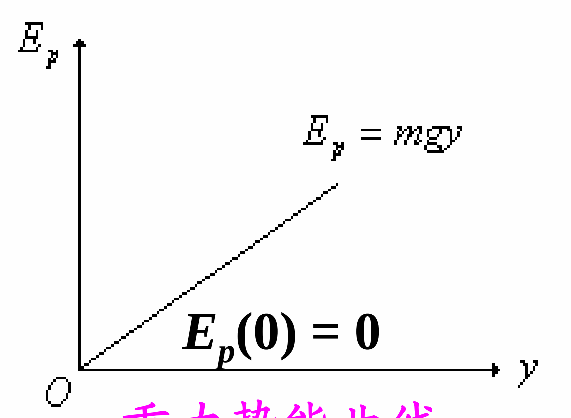
$$f(x,y) = x + 2y$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} = \vec{i} + 2\vec{j}$$

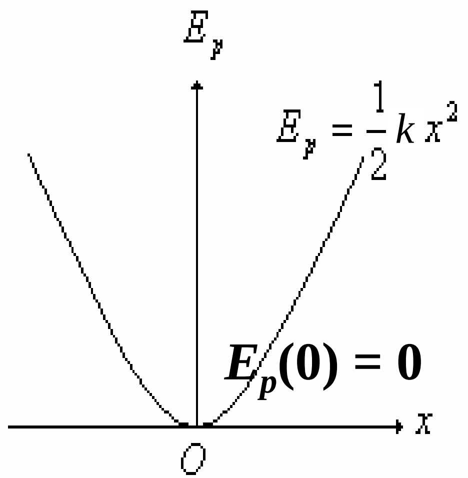


01:28:40

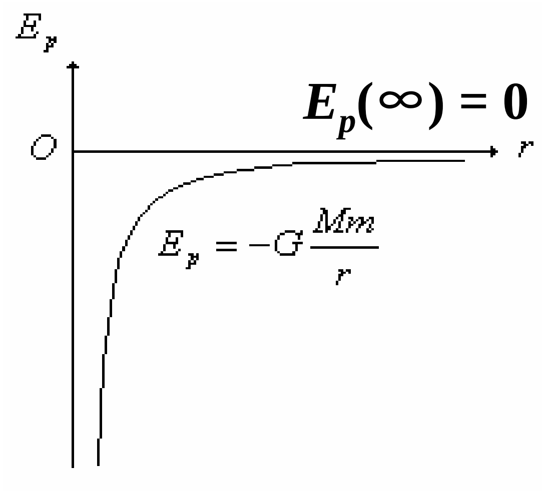
五、势能曲线



重力势能曲线



弹性势能曲线



万有引力势能曲线

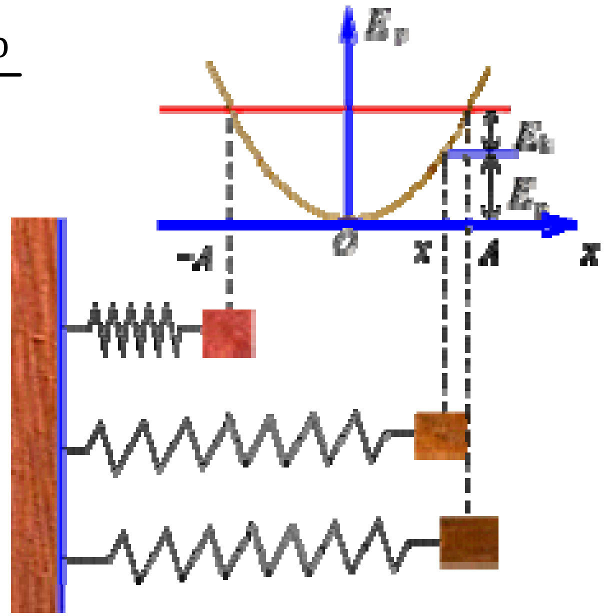
(1) 由势能曲线求保守力 $F_c(x) = -\frac{dE_p}{dx}$

斜率为正，力为负，表示相吸；

斜率为负，力为正，表示相斥；

斜率为零，没有作用力。

斜率绝对值大小与力的大小成正比。



01:28:40

(2) 确定运动范围

(3) 确定平衡位置，判断平衡的稳定性

平衡位置

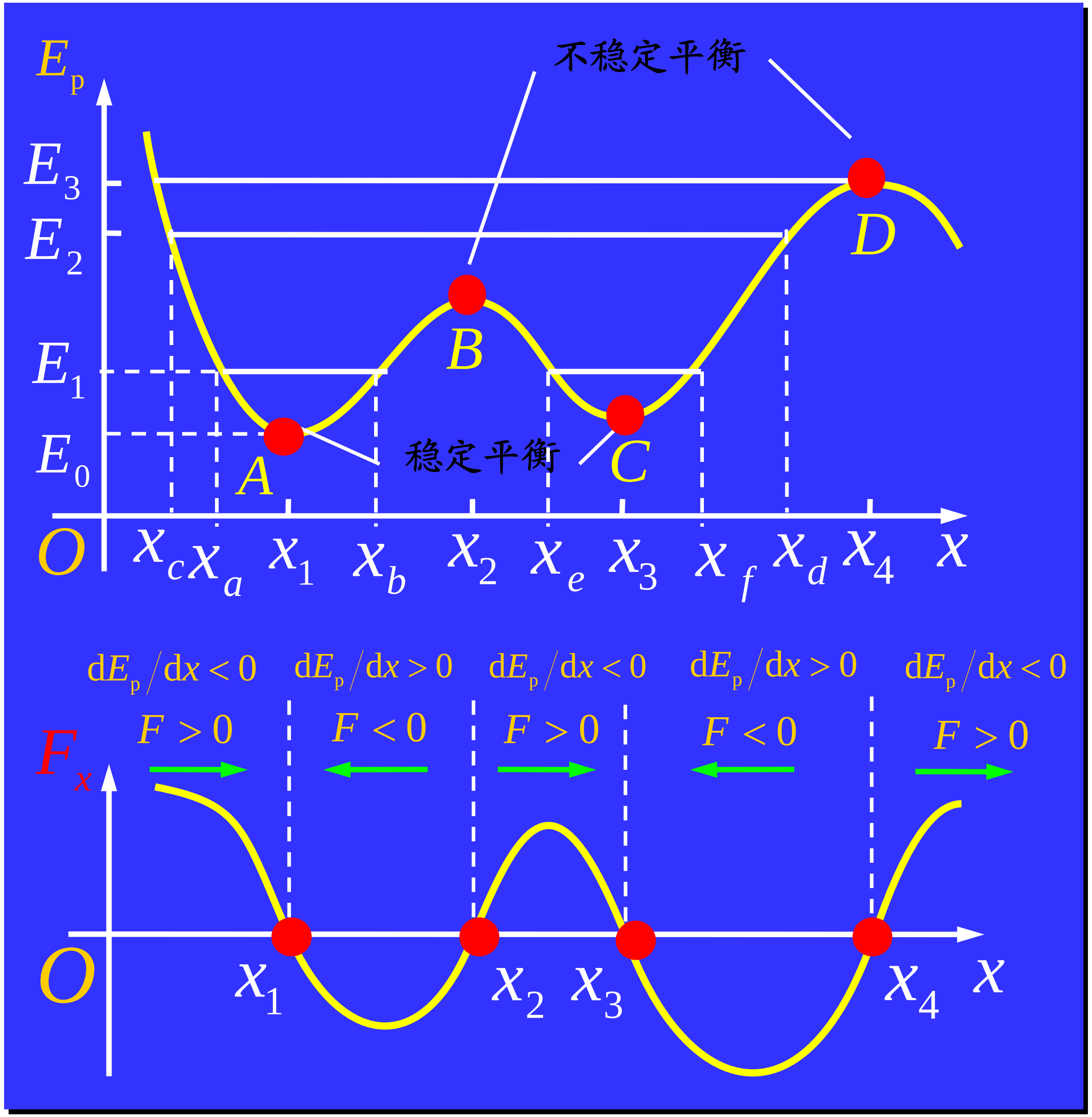
$$F_c(x) = -\frac{dE_p}{dx} = 0$$

❖ 稳定平衡

$$\frac{d^2E_p}{dx^2} > 0 \qquad \frac{dF_c}{dx} < 0$$

❖ 不稳定平衡

$$\frac{d^2E_p}{dx^2} < 0 \qquad \frac{dF_c}{dx} > 0$$

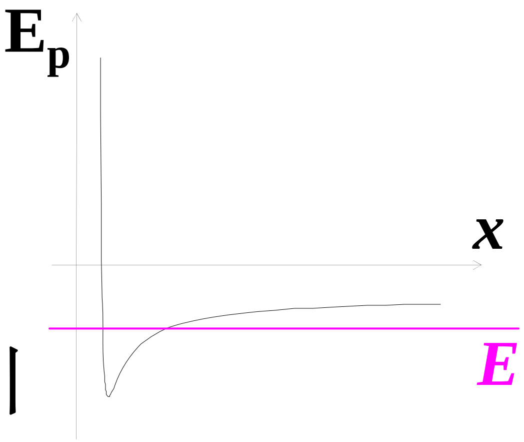


01:28:40

例：一物体(m=1kg)在保守力$F(x)$的作用下沿x轴正向运动(x>0)，势能函数

$$E_P(x)=\frac{a}{x^2}-\frac{b}{x} \qquad (a=1J\cdot m^2;\ b=2J\cdot m)$$

1) 画出势能曲线，并判断平衡位置和保守力方向
2) 设总能量E = –0.50J,分析物体的运动范围



解：1) $\vec{F}=F_x\vec{i} \qquad F_x=-\frac{dE_P}{dx}=\frac{2a}{x^3}-\frac{b}{x^2}$

F_x=0 → 平衡位置x =1m

x<1m $F(x)$>0 排斥力；反之吸引

E_p为极小值→稳定平衡位置

2) $\frac{a}{x^2}-\frac{b}{x}=-0.50J \qquad x=(2\pm\sqrt{2})\approx\begin{cases}0.59m\\3.41m\end{cases}$

01:28:40

§4 功能原理 机械能守恒定律

一、质点系的功能原理

$$W = W_{外力} + W_{内} = W_{外} + W_{保守内} + W_{非保守内} = E_k - E_{k0}$$

$$W_{保守内力} = -\Delta E_p = -\left(E_p - E_{p0}\right)$$

$$W_{外力} + W_{非保守内力} = \left(E_k - E_{k0}\right) + \left(E_p - E_{p0}\right) = \left(E_k + E_p\right) - \left(E_{k0} + E_{p0}\right)$$

系统的动能与势能之和为系统的机械能 $E = E_k + E_p$

$$W_{外力} + W_{非保守内力} = E - E_0 = \Delta E$$ 质点系的功能原理

质点系的机械能增量等于外力和非保守内力对系统所做的功之和。

01:28:40

二、机械能守恒定律

$$W_{外力}+W_{非保守内力}=E-E_0=\Delta E$$

如果 $\mathbf{W}_{外}=\mathbf{0}$， $\mathbf{W}_{非保内}=\mathbf{0}$，则$\mathbf{E}=\mathbf{E}_0=$常量

质点系只有保守内力做功，机械能守恒。

$$\left(E_k+E_p\right)=\left(E_{k0}+E_{p0}\right)\Rightarrow\left(E_k-E_{k0}\right)=-\left(E_p-E_{p0}\right)\Rightarrow\Delta E_k=-\Delta E_p$$

机械能守恒时，系统动能的增加量等于势能的减小量，动能和势能相互转化。

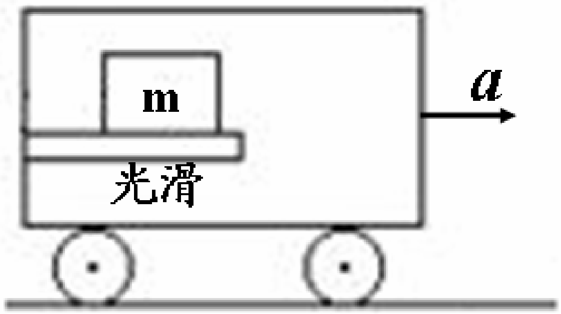
讨论：

1)机械能守恒定律由牛顿运动定律导出，也是只适用于惯性参考系。

01:28:40

如: 初始小车和物体m均静止，若小车开始向右加速

从车厢参考系来看，物体m将相对车厢向左运动，物体m的动能增加，机械能不守恒！



从地面参考系来看，物体m相对地面保持静止，动能仍然为0，机械能守恒。

在两个参考系中，物体m的受力和功均为0

2)如果一个系统在某个惯性系中机械能守恒，那么在另一个惯性系中是否机械能也一定守恒？ 不一定！

•系统机械能守恒的条件是：$W_{外}=0$， $W_{非保内}=0$

一对力做功之和与参考系无关，所以内力做功之和与参考系无关，但外力做功与参考系有关。

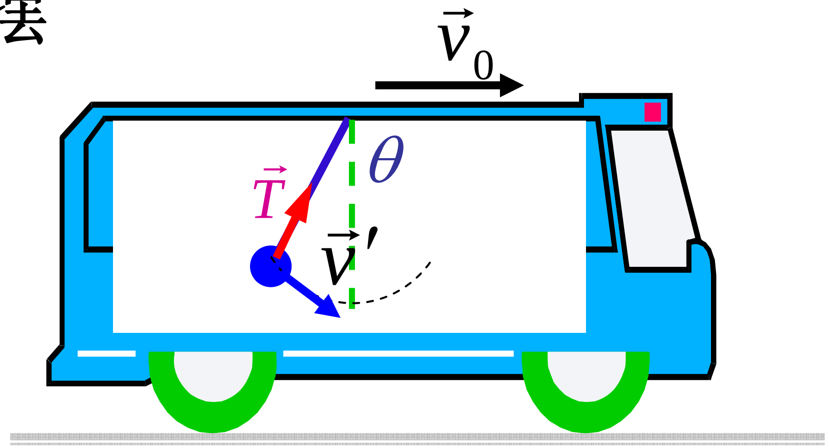
01:28:40

•从能量角度：

保守内力是一对力，其做功之和与参考系无关，所以势能的增量与参考系无关。

但速度与参考系有关，动能也与参考系有关。

例如：匀速行驶的车厢中的单摆



车厢参考系S'中：

拉力与摆球相对速度方向垂直，拉力不做功，机械能守恒。

地面参考系S中：

拉力与摆球绝对速度方向不垂直，拉力做功，机械能不守恒。

∴ 机械能是否守恒，与惯性参考系的选择也有关。

判断题： #T1301.

内力都是保守力的系统，
当它所受的合外力为零时，
它的机械能守恒。

01:28:40

选择题： #S1302.

轻质弹簧、水平光滑桌面、自由振动

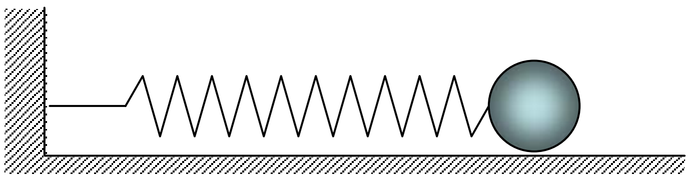


图1

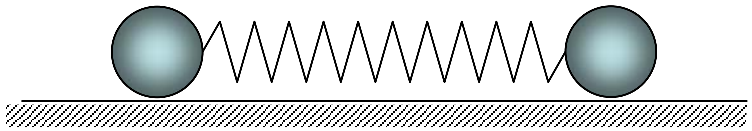


图2

① 两系统机械能均守恒

② 左图机械能不守恒，右图机械能守恒

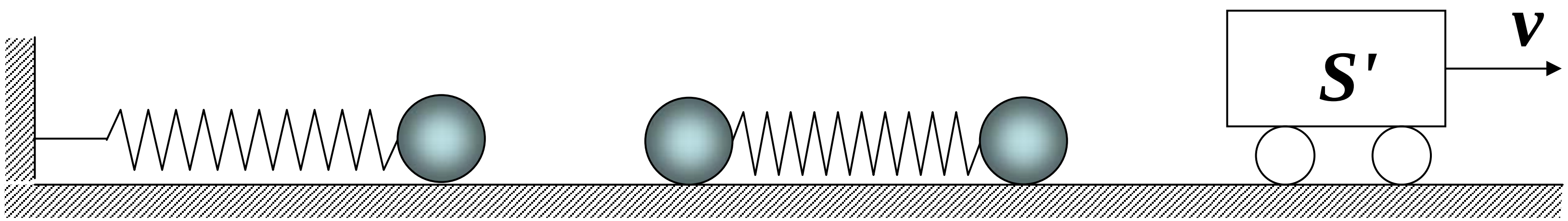
③ 两系统动量均守恒

④ 左图动量不守恒，右图动量守恒

01:28:40

选择题： #S1303.

轻质弹簧、水平光滑桌面、自由振动、匀速运动的小车参考系S'看来：



① 两系统机械能均守恒

② 左图机械能不守恒，右图机械能守恒

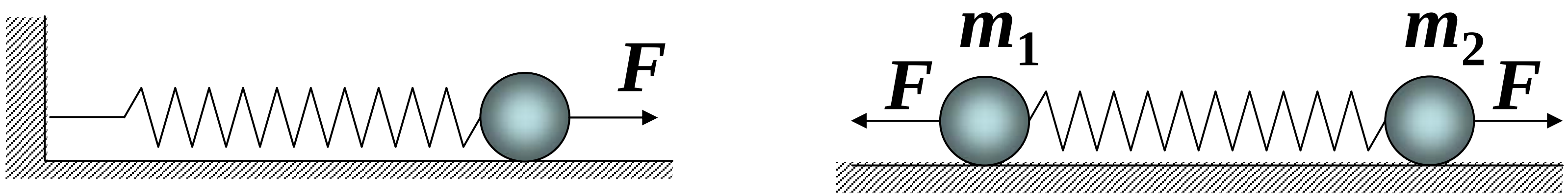
③ 两系统动量均守恒

④ 左图动量不守恒，右图动量守恒

01:28:40

选择题： **#S1304.**

轻质弹簧、水平光滑桌面、
分别受图示恒力*F* 作用



① 两系统机械能均守恒

② 左图机械能不守恒，右图机械能守恒

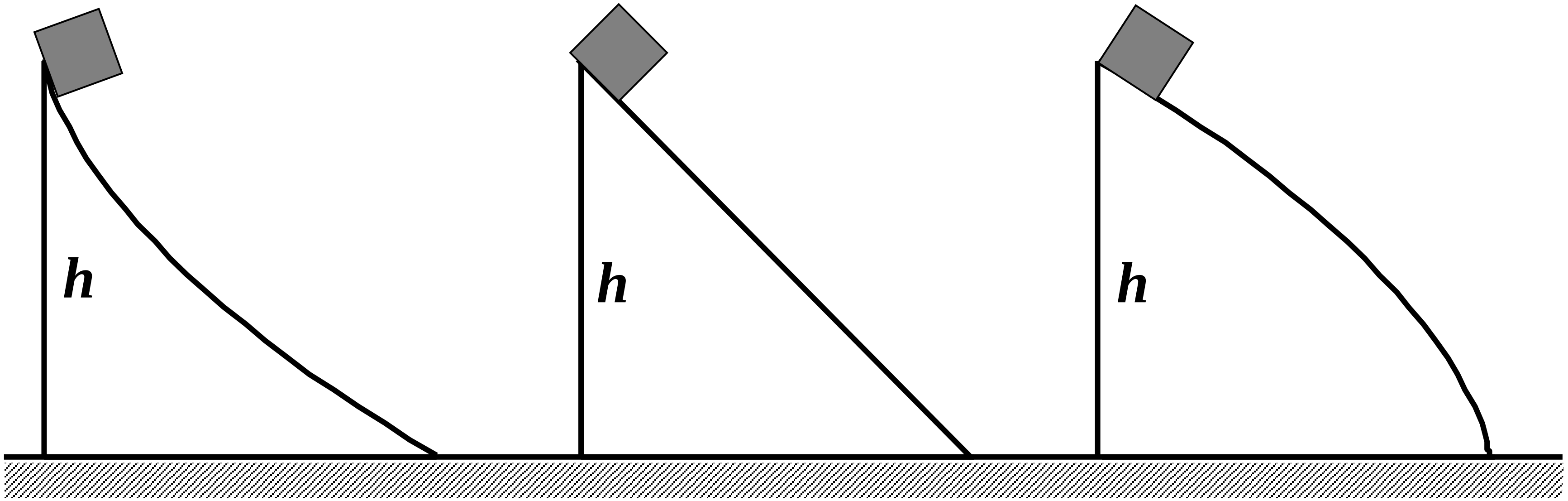
③ 两系统动量均守恒

④ 左图动量不守恒，右图动量守恒

01:28:40

选择题： #S1305.

高度均为*h*、表面光滑、由静止开始下滑



① 三种情况到达底部时动能相同

② 三种情况到达底部时动量相同

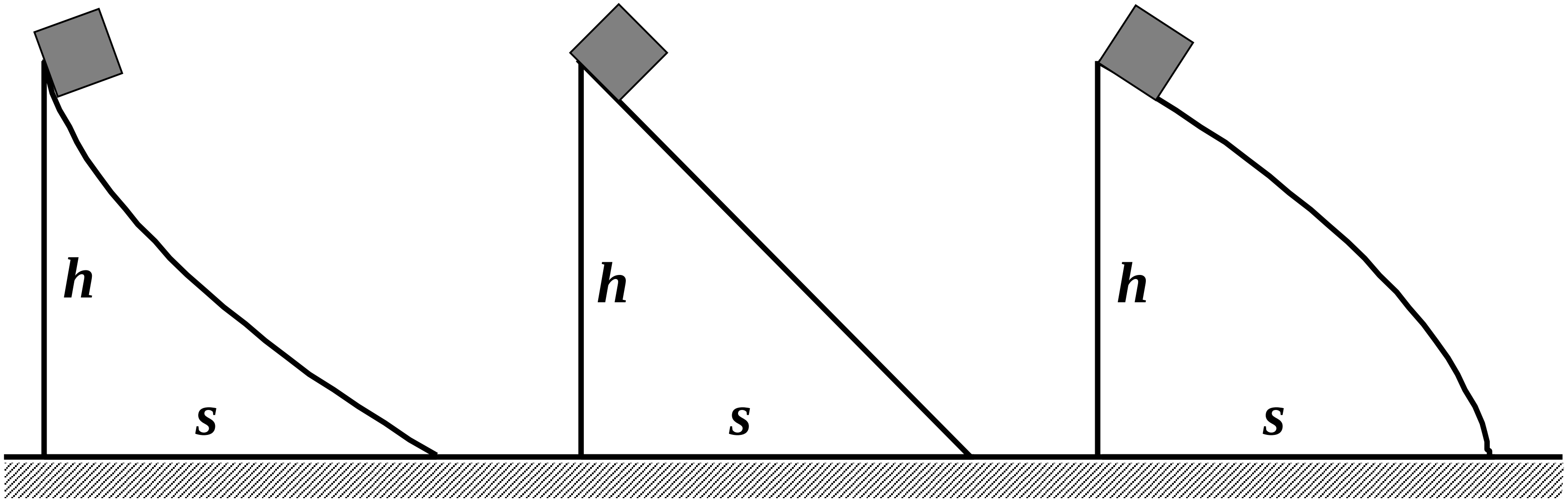
③ 第三种情况到达底部时速率最大

④ 第一种情况沿地面运动的最远(设地面有摩擦)

01:28:40

选择题： **#S1306.**

高度均为h、表面光滑、由静止开始下滑



① 三种情况同时到达底部

② 第一种情况最先到达底部

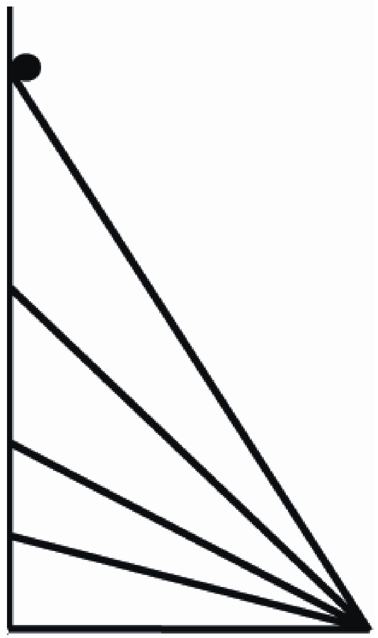
③ 第三种情况最先到达底部

④ 无法判断

01:28:40

选择题：　#S1307.

几个不同倾角的光滑斜面，有共同的底边，顶点也在同一竖直面上（如图所示）. 为使一物体（视为质点）从斜面上端由静止滑到下端的时间最短，则斜面的倾角应选



(A) 60°

(B) 45°

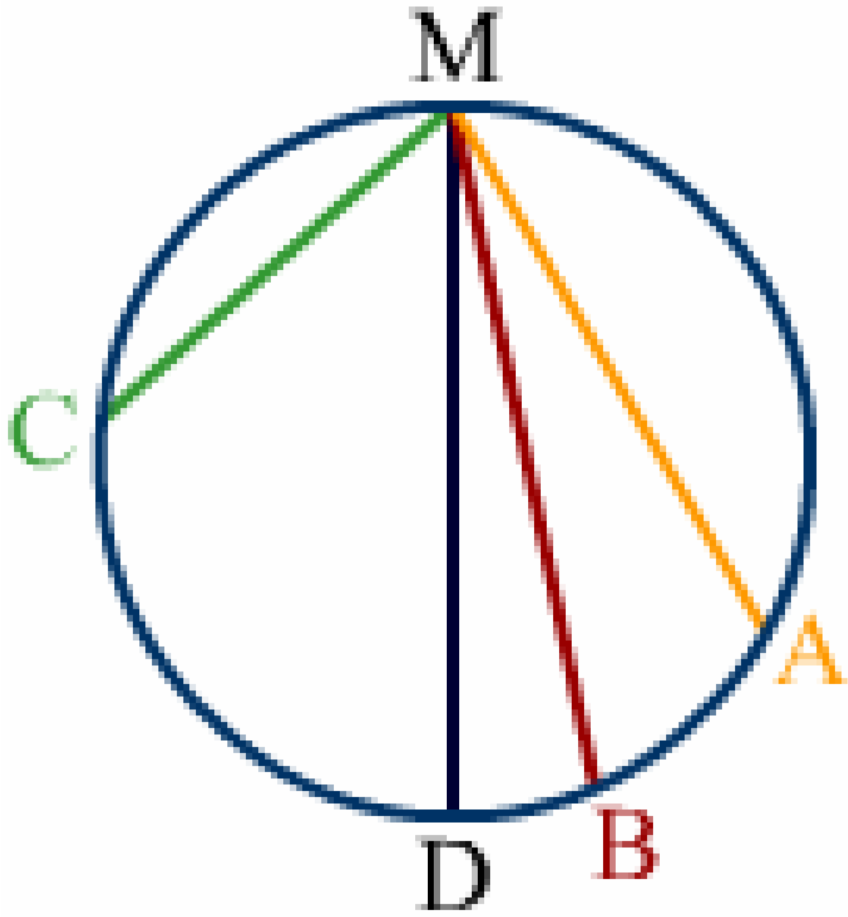
(C) 30°

(D) 15°

01:28:40

选择题：　#S1308.

质点从竖直放置的圆周顶端*M*点分别沿几种弦线无摩擦地由静止开始滑下，问：滑到圆周 **A**、**B**、**C**、**D** 各点所需时间最短的是



① **A**

② **B**

③ **C**

④ **D**

⑤ 时间相同

⑥ 无法确定

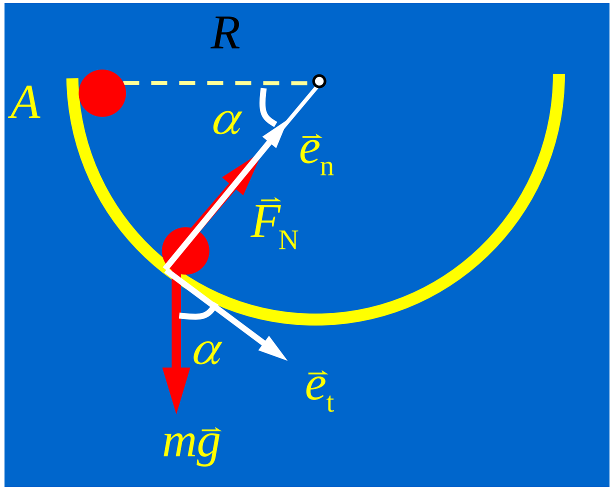
01:28:40

例：质量为***m***的小球最初位于半径为***R***的光滑圆弧面的顶端***A***点，然后小球沿光滑圆弧面从静止开始下滑。

求：小球在任一位置时的速度和对圆弧面的作用力。

解：只有重力作功，系统机械能守恒

取凹槽最低点为重力势能零点



$$mgR = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + mg(R - R\sin\alpha)$$

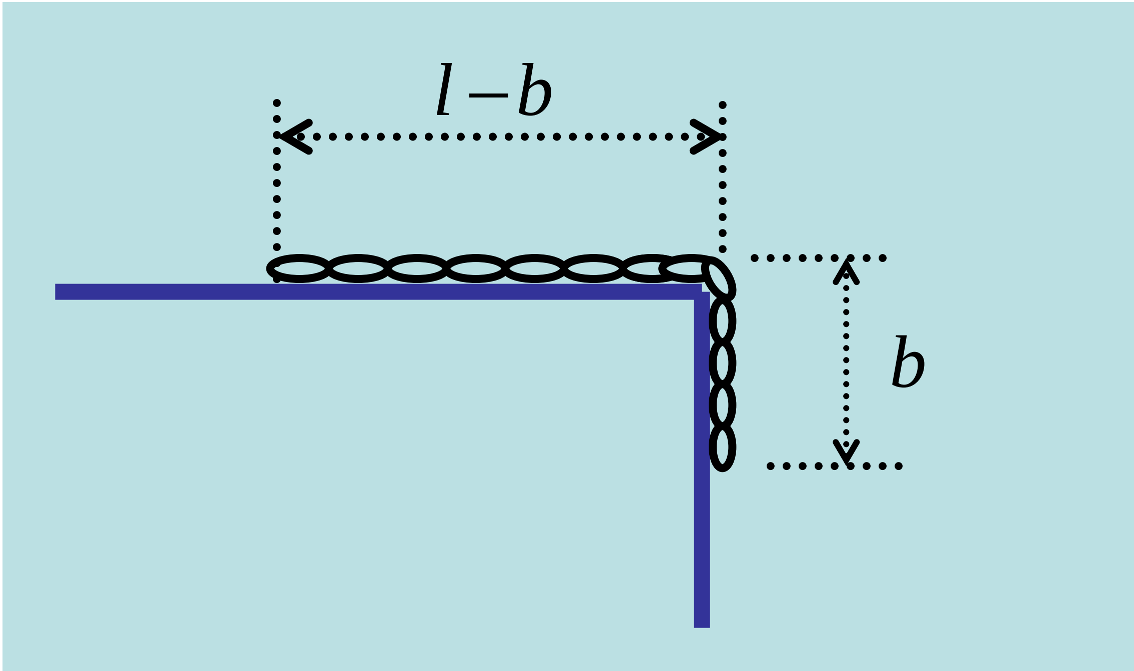
$$\upsilon = \sqrt{2Rg\sin\alpha}$$

$$F_{\mathrm{N}} = mg\sin\alpha + m\frac{\upsilon^2}{R}$$

$$= mg\sin\alpha + m\frac{2Rg\sin\alpha}{R} = 3mg\sin\alpha$$

01:28:40

例：一粗细均匀的柔软绳子，一部分置于光滑水平桌面上，另一部分自桌边下垂，绳全长为l，开始时，下垂部分长为b，初速$v_0=0$，求：整个绳全部离开桌面时瞬间的速度？(设绳不可伸长）

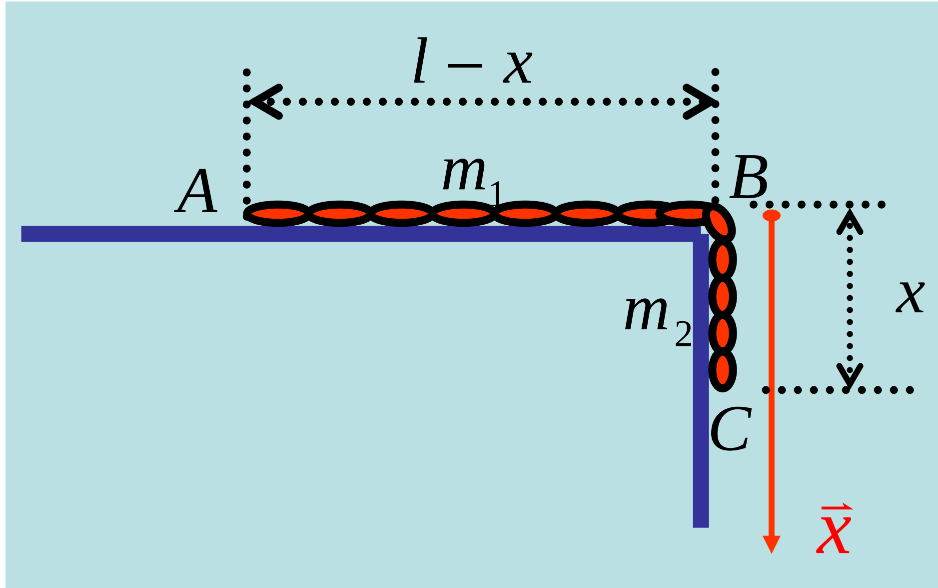


本题将分别用牛顿定律、动能定理、机械能守恒求解，通过对比了解机械能守恒解题的优点。

01:28:40

解1：利用牛顿定律

隔离体法，绳分成两部分：桌上**AB**段、下垂**BC**段

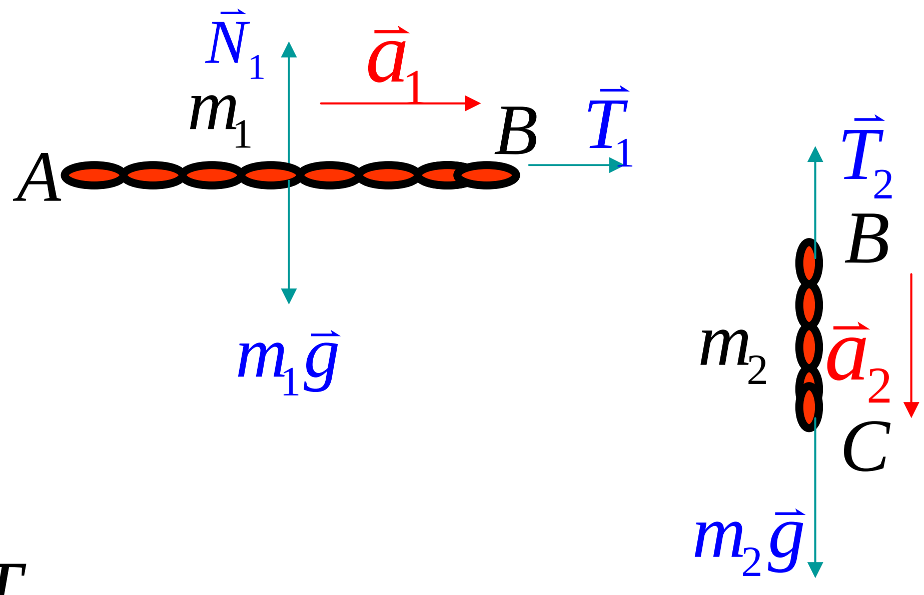


某时刻 ***t*** ：

$$AB：\ l - x,\ m_1,\ \vec{a}_1$$

$$BC：\ x,\ m_2,\ \vec{a}_2$$

由牛顿运动定律：



AB： $T_1 = m_1 a_1$

BC： $m_2 g - T_2 = m_2 a_2$

绳不可伸长： $a_1 = a_2 = a$

作用力与反作用力： $T_1 = T_2$

01:28:40

两式相加：　　$m_2 g = (m_1 + m_2)a = ma$

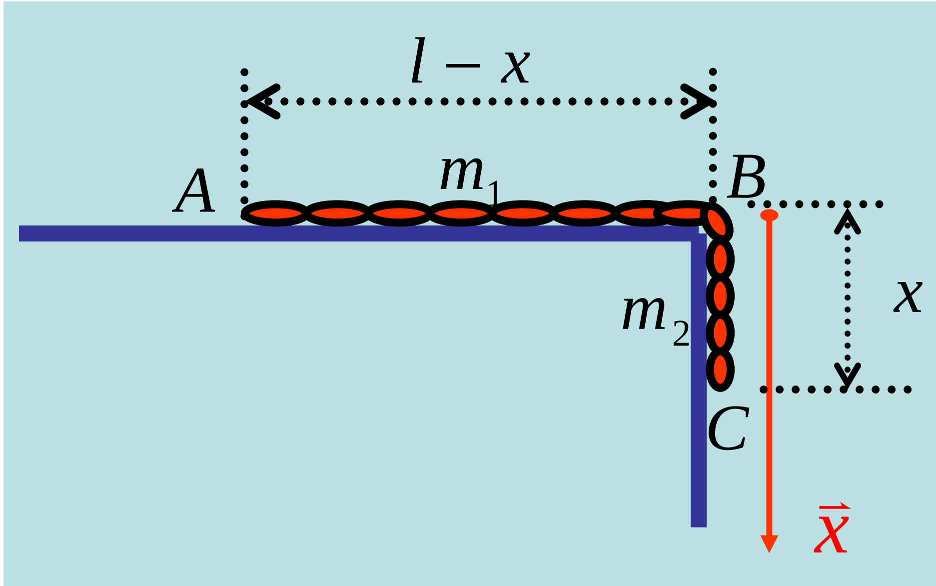
绳质量均匀分布：$m_1 = \frac{m}{l}(l - x), \quad m_2 = \frac{m}{l}x$

$$\frac{m}{l}xg = m\frac{dv}{dt}$$

$$\frac{x}{l}gdx = \frac{dv}{dt}dx = vdv$$

$$\int_0^v vdv = \int_b^l \frac{x}{l}gdx$$

$$\frac{1}{2}v^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{g}{l}(l^2 - b^2)$$

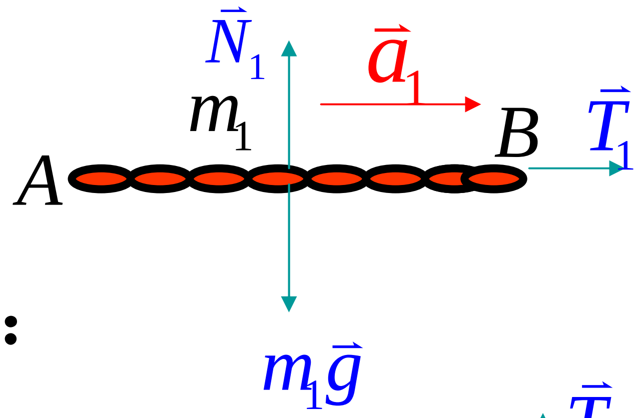


绳全部离开桌面的速度 $v = \sqrt{\frac{g}{l}(l^2 - b^2)}$　方向向下

01:28:40

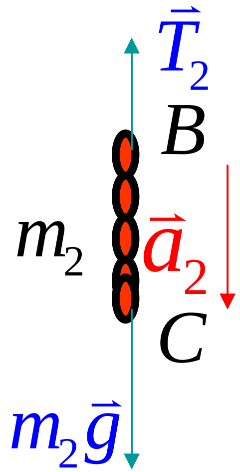
解2: 利用动能定理

将绳分成**AB**段、**BC**段，分析受力



取整个绳为系统，外力与内力作功:

$$W^{ex} = W_{P_2} \qquad W^{in} = W_{T_1} + W_{T_2}$$



绳不可伸长，内力作功之和为零

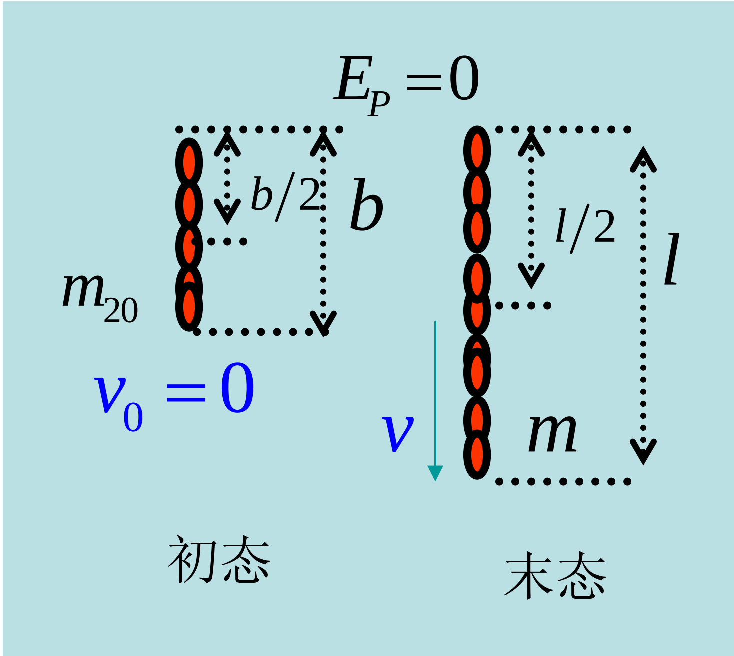
$$W_{P_2} = \int m_2 g dx = \int_b^l \frac{m}{l} xg dx = \frac{mg}{2l}(l^2 - b^2)$$

由动能定理，有:

$$\frac{mg}{2l}(l^2 - b^2) = \frac{1}{2}mv^2 - 0 \qquad \therefore v = \sqrt{\frac{g}{l}(l^2 - b^2)}$$

01:28:40

解3：利用机械能守恒定律



只有重力作功，系统机械能守恒。

选取水平桌面处为重力势能零点

初态机械能：

$$E_0 = E_{k0} + E_{P0} = 0 + (-m_{20} g \frac{b}{2})$$

$$= -\frac{m}{l} bg \frac{b}{2} = -\frac{b^2}{2l} mg$$

末态机械能：

$$E = E_k + E_P = \frac{1}{2} mv^2 + (-mg \frac{l}{2})$$

$$\frac{1}{2} mv^2 + (-mg \frac{l}{2}) = -\frac{b^2}{2l} mg$$

$$\therefore v = \sqrt{\frac{g}{l}(l^2 - b^2)}$$

01:28:40

★比较三种方法：

① 牛顿运动定律 $$\int_0^v v dv = \int_b^l \frac{x}{l} g dx$$

均为瞬时值，需对方程两端积分；

② 动能定理 $$\int_b^l \frac{x}{l} mg dx = \frac{1}{2} mv^2 + (-mg\frac{l}{2})$$

功的一侧为过程量，动能一侧为状态量，仅需对过程量积分；

③ 机械能守恒 $$\frac{1}{2} mv^2 + (-mg\frac{l}{2}) = -\frac{b^2}{2l} mg$$

功的一侧由势能改变取代，不需再求积分，所以最简单。

01:28:40

三、能量守恒定律

功能原理 $W_{外力}+W_{非保守内力}=\Delta E \quad \Rightarrow W_{外力}=\Delta E_{总}$

非保守内力做功，把系统的机械能转换为系统其他形式的能量：热能、化学能、电能、生物能、核能……

$W_{外力}=0 \quad \Rightarrow \Delta E_{总}=0$ ——能量守恒定律

孤立系统(即不受外界作用的系统)内，能量可由一种形式转换为另一种形式，但系统的总能量保持不变。

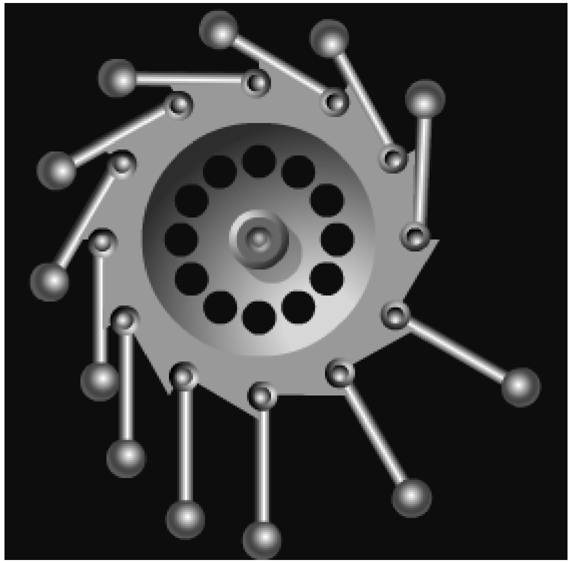
能量守恒定律是19世纪，经过**J.M.Meyer**，**D.Joule**和**H.Von Helmholtz**等人的努力建立起来的。

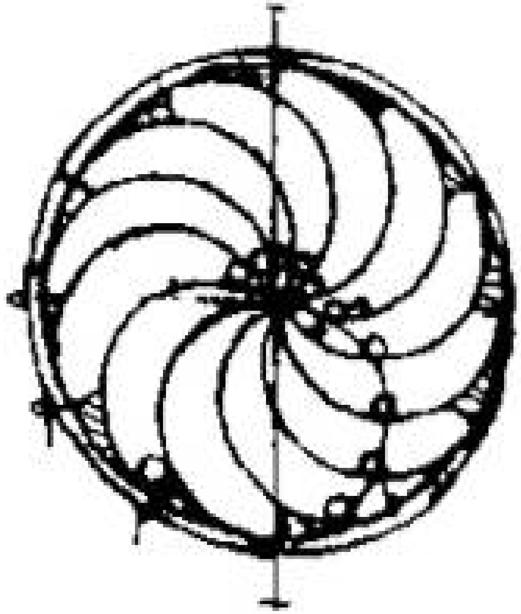
19世纪的三个最伟大的科学发现把能量守恒定律、生物进化论、细胞的发现。 ——**Engels**

01:28:40

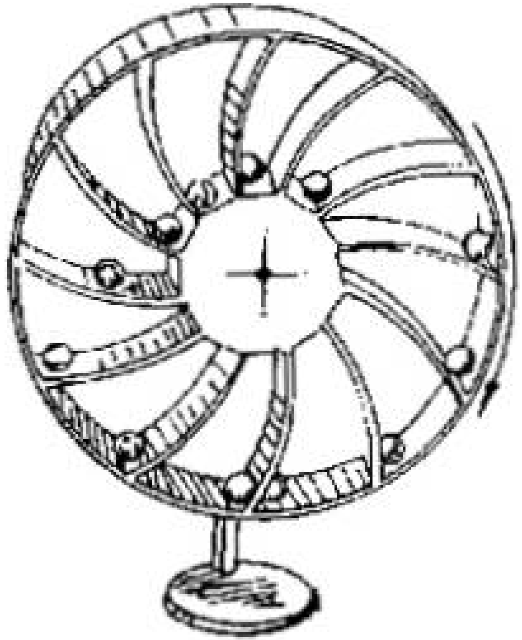
- 能量守恒定律是自然界的基本定律之一，是物理学中最具普遍性的定律之一。
- 其意义远远超出了机械能守恒定律的范围，机械能守恒定律只是能量守恒定律在机械运动范围内的体现。
- 可以适用于任何变化过程，不论是机械的、热的、电磁的、原子和原子核内的，以及化学的、生物的等等。
- 能量是各种运动的一般量度。能量守恒定律所阐明的实质就是各种物质的运动的相互转换。
- 自然界一切已经实现的过程无一例外遵守能量守恒定律。
- 凡是违反能量守恒定律的过程都是不可能实现的，如“永动机”。

01:28:40

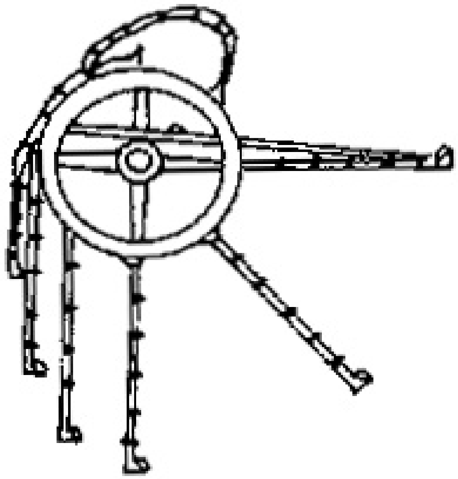




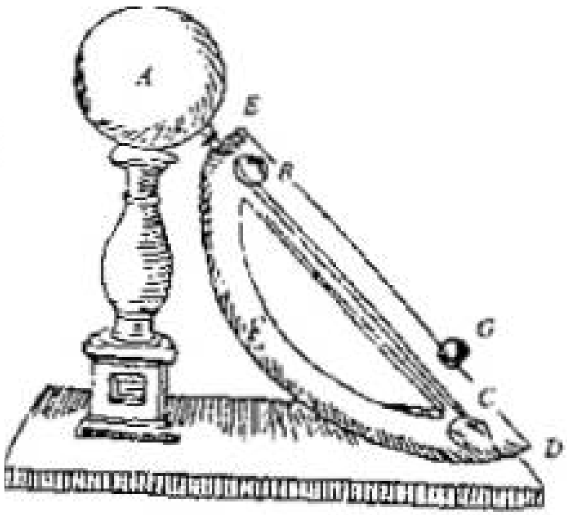
达·芬奇设想的永动机



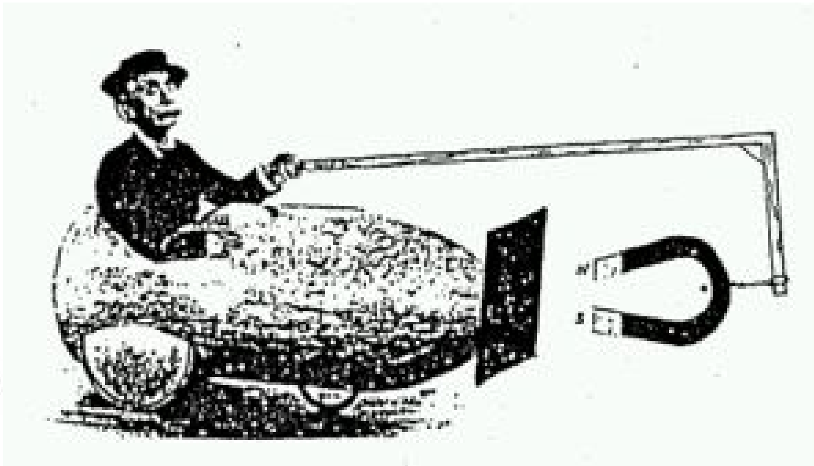
滚球永动机



软臂永动机



磁力永动机



01:28:40

※ 对称性与守恒定律

诺特尔定理(1918)：每一种对称性都对应着一个守恒量

不可观测量	物理定律变换不变性	守恒定律	适用范围
时间绝对值	时间平移	能量守恒	完全
空间绝对位置	空间平移	动量守恒	完全
空间绝对方向	空间旋转	角动量守恒	完全
空间左和右	镜象反射	宇称守恒	弱作用中破缺
带电粒子与中性粒子的相对相位	电荷规范变换	电荷守恒	完全
粒子与反粒子	电荷共轭	电荷、宇称守恒	弱作用中破缺
时间流动方向	时间反演		破缺

01:28:40

例、中微子的发现

•问题的提出:

·β衰变: 核A $\longrightarrow$ 核B + e

·如果核A静止,则由动量守恒应有$\vec{P}_B + \vec{P}_e = 0$，但$\beta$衰变云室照片表明, B、e的径迹并不在一条直线上。

•问题何在?

是动量守恒有问题?　还是有其它未知粒子参与?

• 1930年泡利(W.Pauli)提出中微子假说，以解释β衰变各种现象。

• 1956年(26年后)终于在实验上直接找到中微子。

• 1962实验上正式确定有两种中微子:

电子中微子ν_e　　　　μ子中微子ν_μ

例、杨振宁、李政道:“弱作用下宇称不守恒”

- 宇称守恒定律本质是物理规律的镜像反演不变性。
- 杨振宁、李政道大胆提出在粒子的弱相互作用中，宇称不一定守恒。
- 泡利治学严谨, 善于发现科学理论中的问题。但他不相信弱作用下宇称会不守恒, **1957**年初他给别人写信道：“我不相信上帝会在弱作用中偏向左手，我敢打一笔很大的赌注”。
- **1957**年美籍华裔实验物理学家吴健雄等做了极化钴$_{60}$原子核β衰变实验 , 证实了上述假说。
- 吴健雄的实验结果公布后，泡利说：“幸亏没有人同我打赌,否则我就破产了,现在我只是损失了一点荣誉,不过不要紧,我的荣誉已经够多了。”

01:28:40

本章小结

•功、功率、功的计算：

直角坐标系、自然坐标系、极坐标系，有心力的功

•质点的动能定理 $W=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2$

•质点系的动能定理 $\sum_{i=1}^{n}W_{i外}+\sum_{i=1}^{n}W_{i内}=\sum_{i=1}^{n}E_{ki}-\sum_{i=1}^{n}E_{ki0}$

•一对力的功的和　与参考系选择无关

•保守力的功：作功与路径无关

$$W=\oint_l \vec{F}\cdot d\vec{r}=0$$

01:28:40

• 势能 $W_{保守力}=-\Delta E_p$

重力势能 $E_p = mgy$

引力势能 $E_p = -G\dfrac{Mm}{r}$

弹性势能 $E_p = \dfrac{1}{2}kx^2$

势能零点

势能曲线

稳定平衡

• 保守力与势能的关系：势能的梯度 $\vec{F}_c = -\nabla E_p$

• 质点系的功能原理 $W_{外力}+W_{非保守内力}=E-E_0$

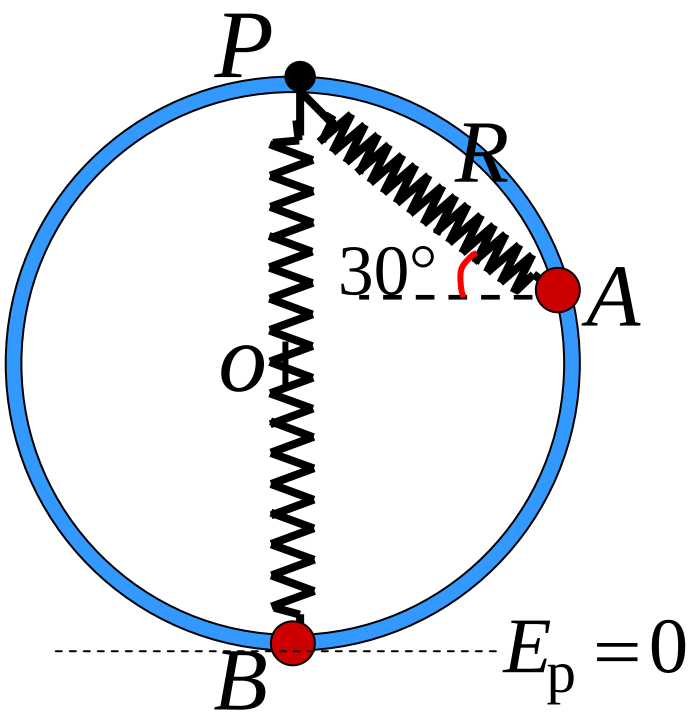
• 机械能守恒定律 $\sum_{i=0}^{n} E_{ki} + \sum_{i=0}^{n} E_{pi} = \sum_{i=0}^{n} E_{ki0} + \sum_{i=0}^{n} E_{pi0}$

• 能量守恒定律

01:28:40

例:有一轻弹簧，其一端系在铅直放置的圆环的顶点P，另一端系一质量为m 的小球，小球穿过圆环并在圆环上运动(不计摩擦) .开始小球静止于点 A，弹簧处于自然状态,其长度为圆环半径R; 当小球运动到圆环的底端点B时,小球对圆环没有压力.

求:弹簧的劲度系数.



解:以弹簧、小球和地球为一系统，

$\because A \rightarrow B$ 只有保守内力做功

$\therefore$系统机械能守恒 $E_B = E_A$

A:弹性势能零点，B:重力势能零点

$$\frac{1}{2}mv_B^2 + \frac{1}{2}kR^2 = mgR(2-\sin 30°)$$

又 $kR - mg = m\dfrac{v_B^2}{R}$ 所以 $k = \dfrac{2mg}{R}$

01:28:40

作业: 马文蔚P84　16, 21, 17, 19, 23

01:28:40