

第三节 估计量的评选标准

- 一、问题的提出
- 二、无偏性
- 三、有效性
- 四、相合性
- 五、小结

一、问题的提出

对于同一个参数，用不同的估计方法求出的估计量可能不相同.

问题



(1)对于同一个参数究竟采用哪一个估计量好?

(2)评价估计量的标准是什么?

本节介绍几个常用标准.

二、无偏性

若 X_1, X_2, \dots, X_n 为总体 X 的一个样本,
 $\theta \in \Theta$ 是包含在总体 X 的分布中的待估参数,
这里 Θ 是 θ 的取值范围.

若估计量 $\hat{\theta} = \theta(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 的数学期望 $E(\hat{\theta})$ 存在, 且对于任意 $\theta \in \Theta$ 有 $E(\hat{\theta}) = \theta$, 则称 $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计量.

无偏估计的实际意义: 无系统误差.

例1 设总体 X 的 k 阶矩 $\mu_k = E(X^k)$ ($k \geq 1$) 存在, 又设 X_1, X_2, \dots, X_n 是 X 的一个样本, 试证明不论总体服从什么分布, k 阶样本矩 $A_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k$ 是 k 阶总体矩 μ_k 的无偏估计.

证 因为 X_1, X_2, \dots, X_n 与 X 同分布,

故有 $E(X_i^k) = E(X^k) = \mu_k, \quad i = 1, 2, \dots, n.$

即 $E(A_k) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i^k) = \mu_k.$

故 k 阶样本矩 A_k 是 k 阶总体矩 μ_k 的无偏估计.

特例:

不论总体 X 服从什么分布, 只要它的数学期望存在, \bar{X} 总是总体 X 的数学期望 $\mu_1 = E(X)$ 的无偏估计量.



设总体 X 的期望为 μ , 方差为 σ^2 (未知)。

$$\text{样本方差: } S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

$$E(S^2) = E \left[\frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2 \right) \right] = \sigma^2$$

故样本方差是方差的无偏估计量。

而方差的矩估计量 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 不是方差的无偏估计。

通常用 S^2 作为 σ^2 的估计量。

例2 设总体 X 服从指数分布, 其概率密度

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

其中参数 $\theta > 0$, 又设 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 X 的样本, 试证 \bar{X} 和 $nZ = n[\min(X_1, X_2, \dots, X_n)]$ 都是 θ 的无偏估计.

证 因为 $E(\bar{X}) = E(X) = \theta$,

所以 \bar{X} 是 θ 的无偏估计量.

补充例题

Z 具有概率密度

$$f_{\min}(x; \theta) = \begin{cases} \frac{n}{\theta} e^{-\frac{nx}{\theta}}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

故知 $E(Z) = \frac{\theta}{n}, \quad E(nZ) = \theta,$

所以 nZ 也是 θ 的无偏估计量.

由以上两例可知, 一个参数可以有不同的无偏估计量.

三、有效性

比较参数 θ 的两个无偏估计量 $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$, 如果在样本容量 n 相同的情况下, $\hat{\theta}_1$ 的观测值较 $\hat{\theta}_2$ 更密集, 则认为 $\hat{\theta}_1$ 较 $\hat{\theta}_2$ 为理想.

由于方差是随机变量取值与其数学期望的偏离程度的度量, 所以无偏估计以方差小者为好.

设 $\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_1(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 与 $\hat{\theta}_2 = \hat{\theta}_2(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 都是 θ 的无偏估计量,

若有 $D(\hat{\theta}_1) \leq D(\hat{\theta}_2)$, 则称 $\hat{\theta}_1$ 较 $\hat{\theta}_2$ 有效.

四、相合性

若 $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 为参数 θ 的估计量, 若对于任意 $\theta \in \Theta$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 依概率收敛于 θ , 则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的相合估计量.

例如 由第六章第三节知, 样本 $k (k \geq 1)$ 阶矩是总体 X 的 k 阶矩 $\mu_k = E(X^k)$ 的相合估计量, 进而若待估参数 $\theta = g(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$, 其中 g 为连续函数, 则 θ 的矩估计量

$$\hat{\theta} = g(\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \dots, \hat{\mu}_n) = g(A_1, A_2, \dots, A_n)$$

是 θ 的相合估计量.

五、小结

估计量的评选的三个标准

无偏性
有效性
相合性

相合性是对估计量的一个基本要求, 不具备相合性的估计量是不予以考虑的.

由最大似然估计法得到的估计量, 在一定条件下也具有相合性.

估计量的相合性只有当样本容量相当大时,

才能显示出优越性, 这在实际中往往难以做到,
因此, 在工程中往往使用无偏性和有效性这两个标准.

