第一节 I型曲线积分

定义：$f(x,y)$ 在平面曲线 L 上有界

① 任意分割 ② 任意取点

若 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$ 存在 则称为 $f(x,y)$ 在 L 上曲线积分

记为 $\int_L f(x,y)\,ds$. 弧长元素.

$\int_\Gamma f(x,y,z)\,ds$.

当 $f(x,y)=1$ 或 $f(x,y,z)=1$ 时 $\int_L 1\,ds = S$

$\int_\Gamma 1\,ds = S$

性质：① 积分中值定理 $\int_L f(x,y)\,ds = f(\xi,\eta)\cdot S$

② 对称性. 平面 L 积分 类似于二重积分

空间 Γ 积分 类似于三重积分

记 L 关于 x 轴对称. L_1：上半部分

则 $\int_L f(x,y)\,ds = \begin{cases} 2\int_{L_1} f(x,y)\,ds, & f(x,y)=f(x,-y) \\ 0 & -f(x,y)=f(x,-y) \end{cases}$

(ii). L 关于 $y=x$ 对称 $\Longrightarrow \int_L f(x,y)ds = \int_L f(y,x)ds.$

(iii) Γ 关于 xoy 面对称，Γ_1：上半部分

则 $\int_\Gamma f(x,y,z)ds = \begin{cases} 2\int_{\Gamma_1} f(x,y,z)ds, & f(x,y,z)=f(x,y,-z) \\ 0, & -f(x,y,z)=f(x,y,-z) \end{cases}$

(iv). Γ 具有轮换对称性

$\Longrightarrow \int_\Gamma f(x,y,z)ds = \int_\Gamma f(y,z,x)ds = \int_\Gamma f(z,x,y)ds$

例. L：$x^2+y^2=a^2$. 关于 $y=x$ 对称.

$\int_L x^2 ds = \int_L y^2 ds = \frac{1}{2}\int_L (x^2+y^2)ds = \frac{1}{2}\int_L a^2 ds$

$= \frac{1}{2}a^2 \int_L 1\, ds = \frac{a^2}{2}\cdot 2\pi a = \pi a^3.$

$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \rho^2\cos^2\theta\, \rho d\rho$

例：$\iint_D x^2 d\sigma = \frac{1}{2}\iint_D (x^2+y^2)d\sigma = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \rho^2 \rho d\rho$

其中 σ：$x^2+y^2 \le a^2$ $\quad$ $\cancel{\text{π}}$ $\frac{1}{2}\iint_D a^2 d\sigma = \frac{a^2}{2}\cdot \pi a^2 = \frac{\pi}{2}a^4.$

例：Γ：$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = a^2 & \text{球面} \\ x+y+z=0 & \text{平面过球心.} \end{cases}$ 具有轮换对称性

$\int_\Gamma x^2 ds = \int_\Gamma y^2 ds = \int_\Gamma z^2 ds = \frac{1}{3}\int_\Gamma (x^2+y^2+z^2)ds.$

$= \frac{1}{3}\int_\Gamma a^2 ds = \frac{a^2}{3}\int_\Gamma 1\, ds = \frac{a^2}{3}\cdot 2\pi a = \frac{2\pi}{3}a^3.$

$$=\frac{1}{3}\int_\Gamma a^2 ds=\frac{a^2}{3}\int_\Gamma 1\, ds=\frac{a^2}{3}\cdot 2\pi a=\frac{2}{3}\pi a^3$$

$$\int_\Gamma x\,ds=\int_\Gamma y\,ds=\int_\Gamma z\,ds=\frac{1}{3}\int_\Gamma (x+y+z)\,ds=0$$

$dS=\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dxdy$

I 型曲线积分计算 ⟶ 定积分

$\frac{ds}{dx}$ dy

(i) $L:\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$ $\alpha\le t\le\beta$ 小 大

$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$

$=\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,|dt|$

$$I=\int_L f(x,y)\,ds=\int_\alpha^\beta f(x(t),y(t))\cdot\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\cdot dt$$

(ii) $L: y=y(x)$ $\begin{cases}y=y(x)\\ x=x\end{cases}$ $a\le x\le b$. 或 $x=x(y)$, $\begin{cases}x=x(y)\\ y=y\end{cases}$ $c\le y\le d$.

$$I=\int_L f(x,y)\,ds=\int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1^2+y'(x)^2}\,dx$$

$$=\int_c^d f(x(y),y)\cdot\sqrt{x'(y)^2+1^2}\,dy$$

(iii) $L:\ \rho=\rho(\theta)$ $\alpha\le\theta\le\beta$ ⟶ $\begin{cases}x=\rho(\theta)\cos\theta\\ y=\rho(\theta)\sin\theta\end{cases}$

$$I=\int_L f(x,y)\,ds=\int_\alpha^\beta f(\rho(\theta)\cdot\cos\theta,\rho(\theta)\sin\theta)\cdot\sqrt{\rho^2+\rho'(\theta)^2}\,d\theta$$

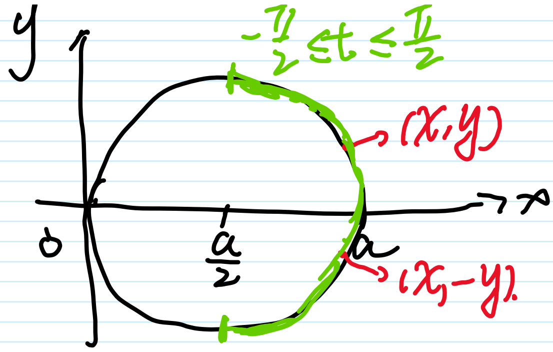
例 $I=\int_L\sqrt{x^2+y^2}\,ds$ $L: x^2+y^2=ax$ $(a>0)$

解: 方法一 直角坐标.

y

$-\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}$

解：①法：直角坐标.



L关于x轴对称，L_1：上半部分

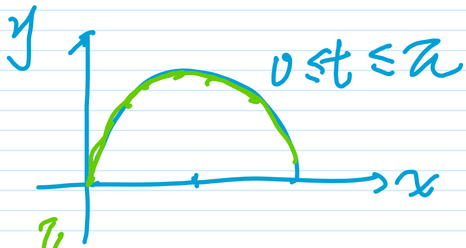
$$I=2\int_{L_1}\sqrt{x^2+y^2}\,ds=2\int_0^a\sqrt{ax}\cdot\sqrt{1^2+\left(\frac{a-2x}{2\sqrt{ax-x^2}}\right)^2}\,dx$$

L_1：$y=\sqrt{ax-x^2}$，$0\le x\le a$。 计算麻烦

②法： $(x-\frac{a}{2})^2+y^2=(\frac{a}{2})^2$

$$\begin{cases}x=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cos t\\ y=\frac{a}{2}\sin t.\end{cases}\qquad 0\le t\le 2\pi.$$

$$\begin{cases}x=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\sin t\\ y=\frac{a}{2}\cos t.\end{cases}$$



$-\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}$

$$I=\int_0^{2\pi}\sqrt{a\cdot(\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cos t)}\cdot\sqrt{(-\frac{a}{2}\sin t)^2+(\frac{a}{2}\cos t)^2}\,dt$$

$$=\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos t}\,dt=\frac{a^2}{2\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\sqrt{1+2\cos^2\frac{t}{2}-1}\,dt$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\left|\cos\frac{t}{2}\right|dt=\frac{a^2}{2}\left(\int_0^{\pi}\cos\frac{t}{2}dt+\int_{\pi}^{2\pi}-\cos\frac{t}{2}dt\right)=\cdots$$

对称性 $2\int_{L_1}\sqrt{ax}\,ds=2\cdot\frac{a^2}{2}\int_0^{\pi}\left|\cos\frac{t}{2}\right|dt=a^2\int_0^{\pi}\cos\frac{t}{2}dt$

极坐标 … $a\cos\theta$

③法：$x^2+y^2=ax \xrightarrow{\text{极坐标}} \rho\cos=a\cos\theta$.

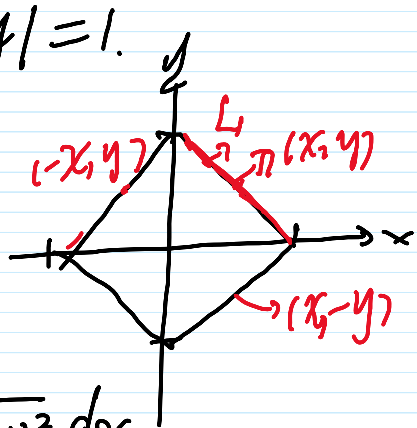
$-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$.

$\sqrt{ax}=\sqrt{a\cdot\rho(\theta)\cos\theta}=\sqrt{a\cdot a\cos^2\theta}$

$$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a\cos\theta\cdot\sqrt{(a\cos\theta)^2+(-a\sin\theta)^2}\,d\theta$$

$$=a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta=2a^2.$$

例 $I=\int_L |x|\,ds$. L: $|x|+|y|=1$.



解：①法：

$$I \overset{\text{对称性}}{=} 4\int_{L_1}|x|\,ds$$

L_1: $y=1-x$, $0\le x\le 1$

$$=4\int_0^1 x\cdot\sqrt{1^2+(-1)^2}\,dx$$

$$=4\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}=2\sqrt{2}.$$

②法：L关于$y=x$对称.

$$I=\int_L|y|\,ds=\frac{1}{2}\int_L(|x|+|y|)\,ds=\frac{1}{2}\int_L 1\,ds$$

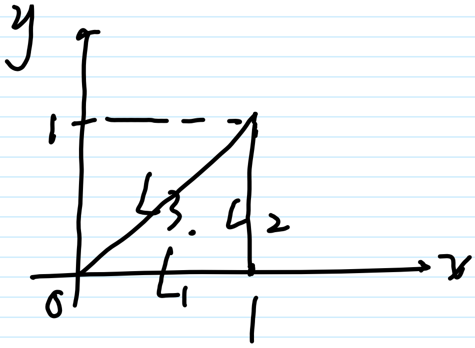
$$=\frac{1}{2}\cdot4\cdot\sqrt{2}=2\sqrt{2}.$$

例 $I=\int_L y\,ds$. L: $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ 为顶点三角形

y

解

解: $L = L_1 + L_2 + L_3$



L_1: $y=0,\ 0\le x\le 1.$

L_2: $x=1.\quad 0\le y\le 1$

L_3: $y=x,\ 0\le x\le 1.$

$$I=\int_0^1 0\cdot\sqrt{1^2+0^2}\,dx+\int_0^1 y\cdot\sqrt{0^2+1^2}\,dy.$$

$$+\int_0^1 x\cdot\sqrt{1^2+1^2}\,dx=\cdots$$

例 $\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2\\ x-y=0\end{cases}$ $(a>0)$. 则 $I=\int_\Gamma\sqrt{2y^2+z^2}\,ds=a\cdot 2\pi a$

②法 $\int_\Gamma\sqrt{2y^2+z^2}\,ds$

$=\int_\Gamma\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,ds$

$=\int_\Gamma a\,ds=a\int_\Gamma ds.$

解: $\Gamma:\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\\ z=z(t)\end{cases}$ $\alpha\le t\le\beta.$

$$I=\int_\alpha^\beta f[x(t),y(t),z(t)]\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt.$$

①法: $2x^2+z^2=a^2.\longrightarrow\begin{cases}x=\frac{\sqrt2}{2}a\cos t\\ y=\frac{\sqrt2}{2}a\cos t.\\ z=a\sin t\end{cases}$ $0\le t\le 2\pi$

$$I=\int_0^{2\pi}\sqrt{2\left(\frac{\sqrt2}{2}a\cos t\right)^2+(a\sin t)^2}\cdot\sqrt{\frac12 a^2\sin^2 t+\frac12 a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t}\,dt$$

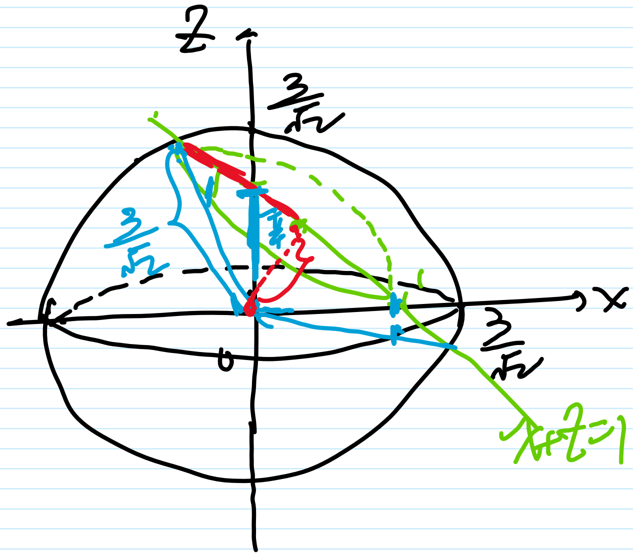
$$= a^2\int_0^{2\pi} dt = 2\pi a^2.$$

例. $I=\int_\Gamma (x^2+y^2+z^2)\,ds.$ $\quad \Gamma: \begin{cases} x^2+y^2+z^2=\frac{9}{2} \\ x+z=1. \end{cases}$

$$= \frac{9}{2}\int_\Gamma 1\,ds = \frac{9}{2}\cdot 2\cdot\pi\cdot 2$$

解:

$$r=\sqrt{\left(\frac{3}{\sqrt2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^2}=2$$

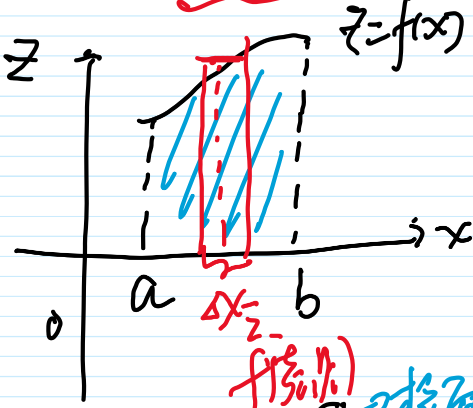


$$x^2+y^2+(1-x)^2=\frac{9}{2}$$

$$(\quad)^2+(\quad)^2=C.$$

平面曲线

I型曲线积分的几何意义: 以L为底, 以f(x,y)为高柱面面积



$$S=\int_a^b f(x)\,dx.$$