

数学建模第三次作业

李昊伦 2023211595

1 基于绝对不公平指标的席位分配方法推导

1.1 定义与目标

设有两个团体A和B，人口分别为 p_A 和 p_B ，已分配席位数为 n_A 和 n_B 。绝对不公平指标定义为： $a_A = \frac{p_A}{n_A} - \frac{p_B}{n_B}$ （当 $\frac{p_A}{n_A} > \frac{p_B}{n_B}$ ）。目标是通过分配一个新增席位，使得绝对不公平减少最多。

1.2 分配席位后的影响分析

若给A分配一席：

新席位数为 $n_A + 1$ ，新的绝对不公平为： $a'_A = \frac{p_A}{n_A+1} - \frac{p_B}{n_B}$ 。绝对不公平减少量为： $\Delta_A = \frac{p_A}{n_A} - \frac{p_A}{n_A+1} = \frac{p_A}{n_A(n_A+1)}$ 。

若给B分配一席：

新席位数为 $n_B + 1$ ，此时绝对不公平变为： $a'_B = \frac{p_A}{n_A} - \frac{p_B}{n_B+1}$ 。由于 $\frac{p_A}{n_A} > \frac{p_B}{n_B}$ ，给B分配席位可能导致 $a'_B > a_A$ ，故不合理。

1.3 推广到m个团体

对于第 i 个团体，若分配一席，其绝对不公平减少量为： $\Delta_i = \frac{p_i}{n_i(n_i+1)}$ 。因此，Q值公式为： $Q_i = \frac{p_i}{n_i(n_i+1)}$ 。每次将席位分配给 Q_i 最大的团体，以最大程度减少绝对不公平。

1.4 结论

基于绝对不公平指标的Q值法为： $Q_i = \frac{p_i}{n_i(n_i+1)}$ （ $i = 1, 2, \dots, m$ ），每次将席位分配给 Q_i 最大的团体。

2 满足单调性与取整条件的席位分配算法

2.1 算法选择

采用D'Hondt除数法，因其天然满足单调性，且结果接近比例分配的上下取整值。

2.2 具体步骤

初始化：每个团体 i 的席位为 $n_i = 0$ 。

逐席分配：对于总席位 N ，从1到 N 依次分配：

计算每个团体 i 的优先级值： $v_i = \frac{p_i}{n_i+1}$ 。

将当前席位分配给 v_i 最大的团体，并更新其席位 $n_i \leftarrow n_i + 1$ 。

终止条件：所有席位分配完毕。

2.3 验证条件

单调性：总席位增加时，原有团体的席位不会减少（因分配基于优先级，新增席位仅影响后续分配）。

取整条件：最终席位数为比例值的上下取整结果。

例如：若某团体理想席位为3.2，总席位为5，可能分配3（下取整）；当总席位增至6，可能分配4（上取整）。

2.4 结论

采用D'Hondt法，分配步骤如下：初始化所有 $n_i = 0$ ，逐席计算 $v_i = p_i / (n_i + 1)$ ，分配席位给最大 v_i 的团体。

结果满足：席位数随总席位单调递增；每团体席位数为其比例的上下取整值。

3 多层复合平板热传导计算

3.1 问题分析与假设

目标：计算多层复合平板在稳态热传导下，单位时间单位面积的热流量 Q

已知条件：各层厚度 d_1, d_2, \dots, d_m ，热传导系数 k_1, k_2, \dots, k_m ，两侧温度 $T_1 > T_2$ 。

假设：热传导为稳态（温度分布不随时间变化）；各层材料均匀且各向同性；热流方向垂直于平板表面，无横向热损失。

3.2 模型建立

傅里叶定律：单位面积热流密度 q 与温度梯度成正比： $q = -k \frac{\Delta T}{\Delta x}$ 。其中， k 为热传导系数， $\frac{\Delta T}{\Delta x}$ 为温度梯度。

热阻模型：每层材料的热阻定义为： $R_l = \frac{d_l}{k_l A}$ ($l = 1, 2, \dots, m$)

总热阻为各层热阻之和（串联模型）： $R_{\text{total}} = \sum_{l=1}^m R_l = \frac{1}{A} \sum_{l=1}^m \frac{d_l}{k_l}$

3.3 公式推导

总热流计算：根据热阻模型，总温差与总热阻的关系为： $\Delta T = Q \cdot R_{\text{total}}$

代入总热阻表达式： $T_1 - T_2 = Q \cdot \frac{1}{A} \sum_{l=1}^m \frac{d_l}{k_l}$

解得单位时间总热量： $Q = \frac{(T_1 - T_2)A}{\sum_{l=1}^m \frac{d_l}{k_l}}$

单位面积热流量：题目要求单位面积的热流量 q ，即： $q = \frac{Q}{A} = \frac{T_1 - T_2}{\sum_{l=1}^m \frac{d_l}{k_l}}$

3.4 模型验证

3.4.1 单层材料验证

若仅有一层材料 $m = 1$ ，公式简化为： $q = \frac{T_1 - T_2}{d_1/k_1} = \frac{k_1(T_1 - T_2)}{d_1}$ 。与傅里叶定律一致，验证成立。

3.4.2 两层材料验证

若有两层材料 $m = 2$, 总热阻为: $R_{\text{total}} = \frac{d_1}{k_1 A} + \frac{d_2}{k_2 A}$, 热流量为: $q = \frac{T_1 - T_2}{\frac{d_1}{k_1} + \frac{d_2}{k_2}}$, 符合实际物理意义。

3.5 结论

$$\text{单位时间单位面积的热流量 } Q = \frac{T_1 - T_2}{\sum_{l=1}^m \frac{d_l}{k_l}}$$

物理意义: 热流量与总温差成正比, 与各层厚度与热导率之比的总和成反比。