第二章　静电场中的导体

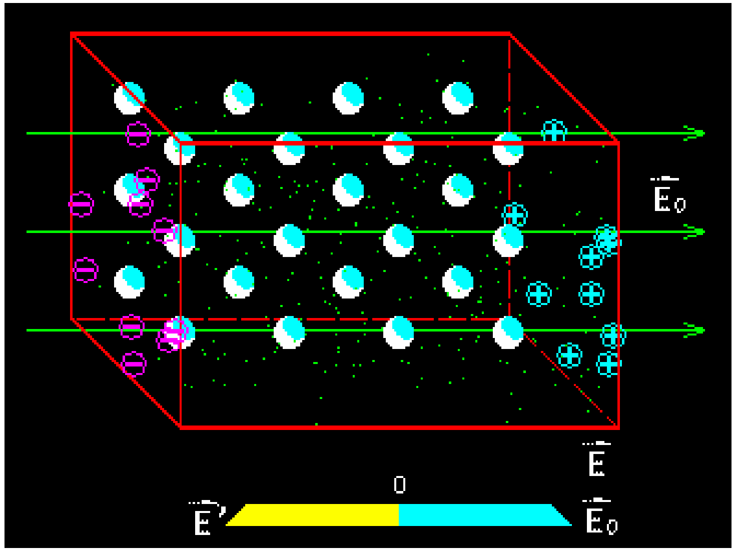
01:32:01

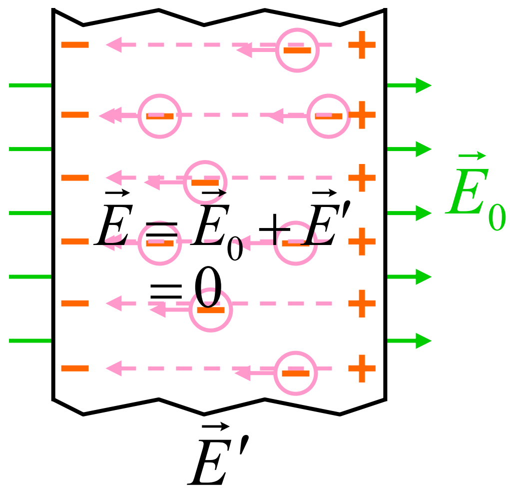
§1 静电场中的导体

1.1 静电感应 静电平衡

1、静电感应

从微观角度来看，金属导体是由带正电的晶格点阵和自由电子构成，自由电子作无规则的热运动。





在外电场的作用下，导体中的自由电子作定向运动。

导体内电荷不再作定向运动，达到了静电平衡状态。

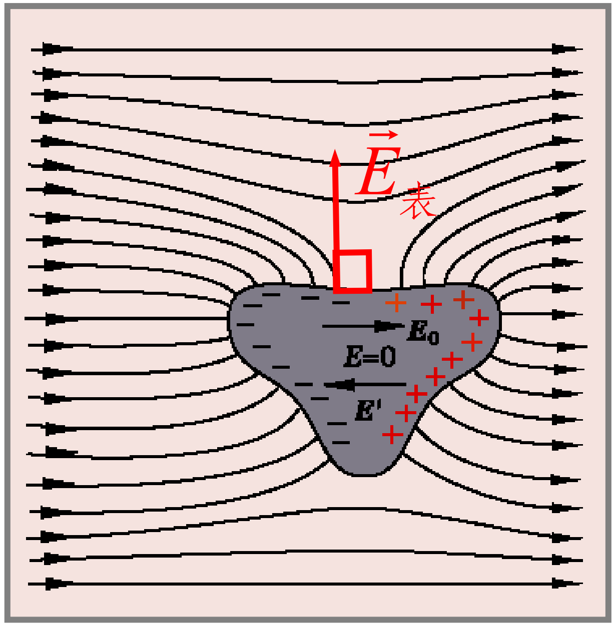
2、静电平衡

导体内部和表面上任何一部分都没有电荷的宏观定向运动，我们称这时导体处于静电平衡状态。

- 导体静电平衡的条件

(1) 导体内部任意一点的电场强度都为零。

$$E_{内} = 0$$

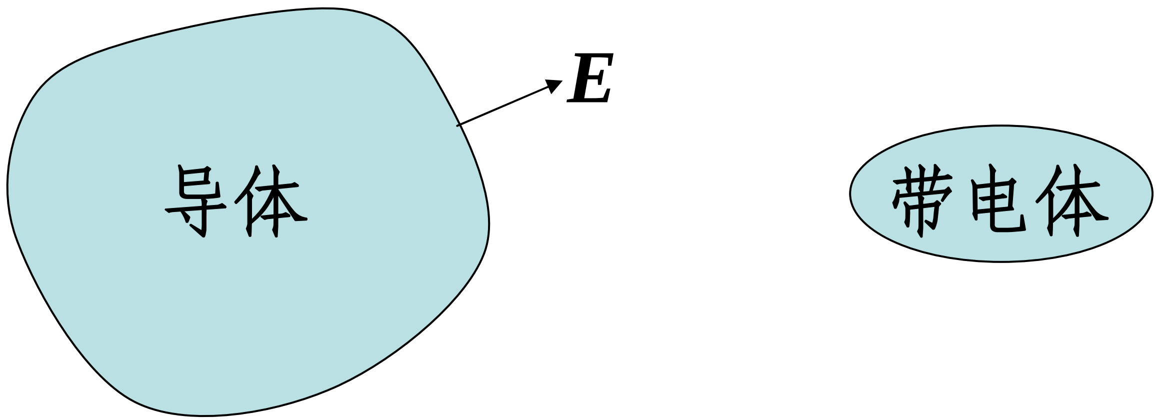


(2) 导体表面处的电场强度，与导体的表面垂直。

$$\vec{E}_{表面} \perp 导体表面$$

判断题：　#T2201.

一孤立导体表面附近的电场线垂直于表面；现把另一带电体移近这个导体，稳定后，电场线将不再垂直于导体表面。



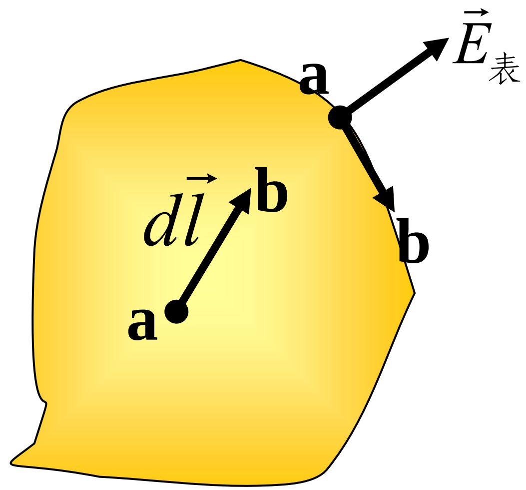
01:32:01

- 静电平衡导体的电势

(1) 静电平衡时导体是等势体

对于导体内部的任何两点**a**和**b**

$$U_{ab}=\vec{E}\cdot d\vec{l}=0 \Leftarrow \vec{E}=0$$



(2) 静电平衡时导体表面是等势面

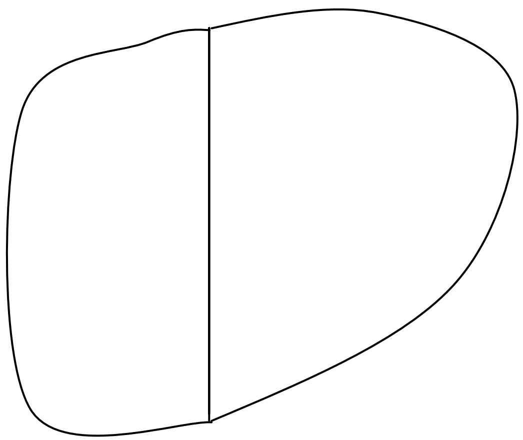
对于导体表面上的两点**a**和**b**

$$U_{ab}=\vec{E}\cdot d\vec{l}=0 \Leftarrow \vec{E}\perp d\vec{l}$$

导体内部的电势与导体表面的电势也相等。
(假设不相等→存在电势差→电荷运动)

判断题： #T2202.

一导体达到静电平衡后，被分割成两部分，
两部分的电势仍然相同。

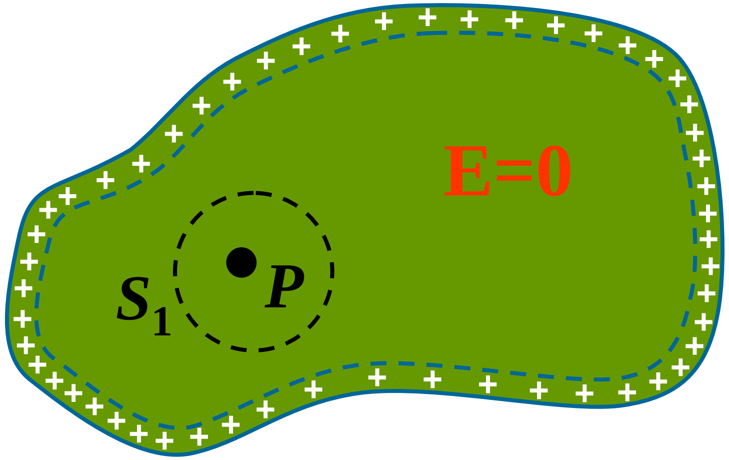


01:32:01

1.2 静电平衡时导体上电荷的分布

1、实心导体

将导体置于外电场中，或导体本身带电，达到静电平衡时，导体内部的电场强度为零。



通过导体内部任一高斯面的电通量

$$\oint_{S_1} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0 \Rightarrow \sum q_i = 0$$

P 点是任意的，所取的闭合曲面也可以任意地小，所以导体内部处处没有净电荷。

静电平衡时，导体上的电荷只能分布在表面上。

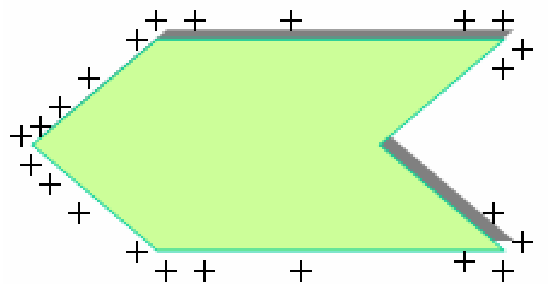
(导体不可能是均匀带电体，可以是均匀带电面)

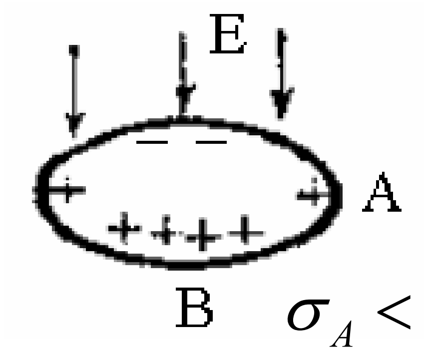
01:32:01

2、面电荷分布与曲率关系

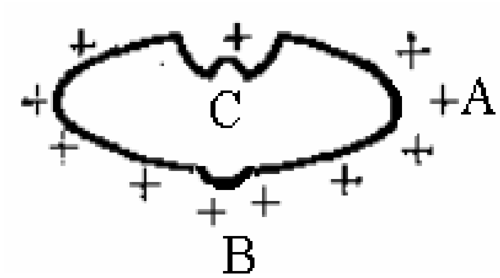
孤立导体是指其它导体或带电体都离它足够远，以至于其它导体或带电体对它的影响可以忽略不计。

•对于处于静电平衡的形状简单的孤立导体，表面各处的电荷面密度一般与该处表面的曲率有关。





$\sigma_A < \sigma_B$



$\sigma_A \neq \sigma_B$，$\sigma_C < \sigma_A$

❖凸出的地方，曲率为正且较大，电荷面密度较大

❖较为平坦的地方，曲率较小，电荷面密度较小

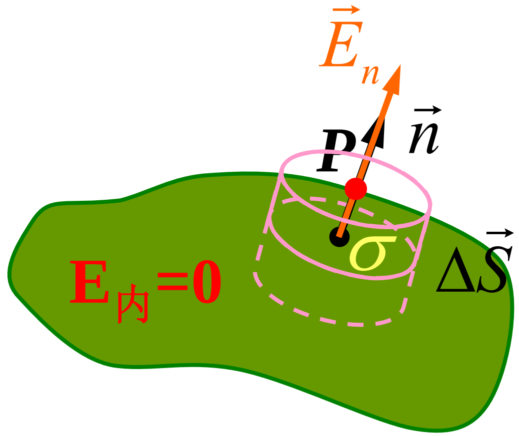
❖凹进的地方，曲率为负，电荷面密度更小

•对形状复杂的孤立导体，以及非孤立导体，此定性规律不一定成立。

01:32:01

3、导体表面外附近的电场

在导体表面取一微小面积元 ΔS，
该处电荷面密度为σ



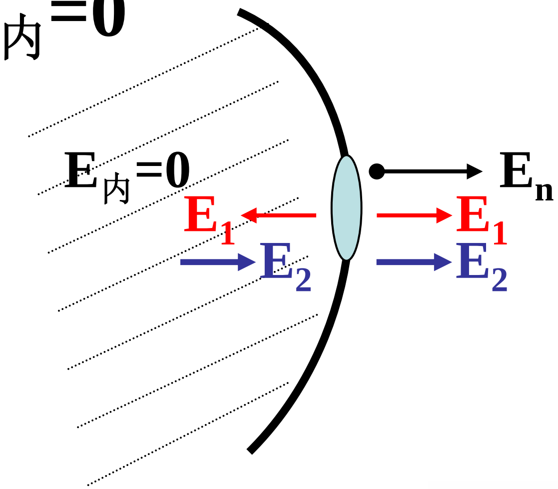
取如图所示的封闭曲面，由高斯定理，得表面附近P点的总场强

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = E_n \cdot \Delta S = \frac{\sigma\Delta S}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_n = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

ΔS在其附近产生的场强$E_1 = \sigma/(2\varepsilon_0)$ ←无限大平面

其他电荷产生的场强$E_2=\sigma/(2\varepsilon_0)$ ←$E_{内}=0$

•为何所有电荷产生的电场仅与该处的面密度有关？



答：该处的电荷面密度与其他各处的电荷分布有关.

01:32:01

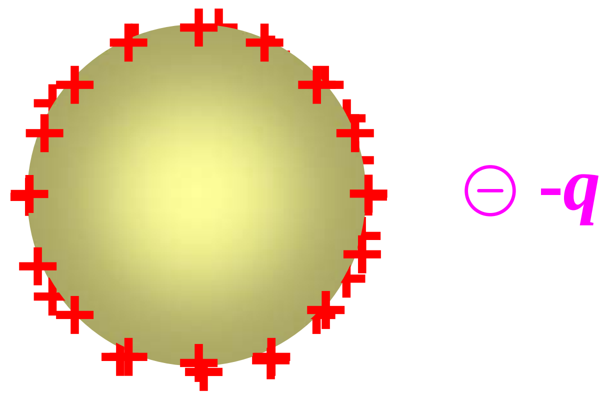
选择题： #S2201.

在一个带正电的金属球附近，放一个电量不是足够小的点电荷+q，测得+q所受的电场力为F，则F/q

① 等于该点原来的场强；

② 大于该点原来的场强；

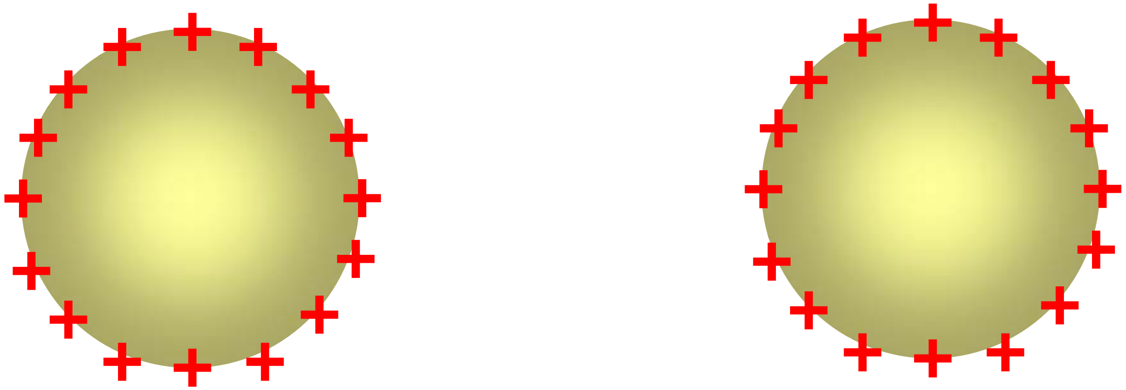
③ 小于该点原来的场强。



01:32:01

判断题： #T2203.

两个带电导体球之间的静电力等于把每个球的电量集中于球心所得的两个点电荷之间的静电力。

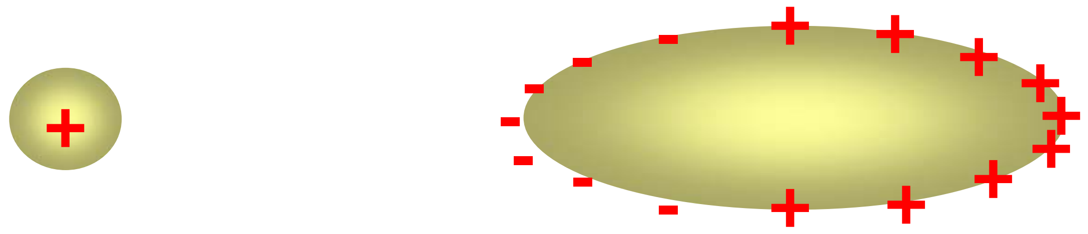


两个相距不远的带同号电荷的金属球的相互作用力，比带异号电荷(数值不变)时要小。

01:32:01

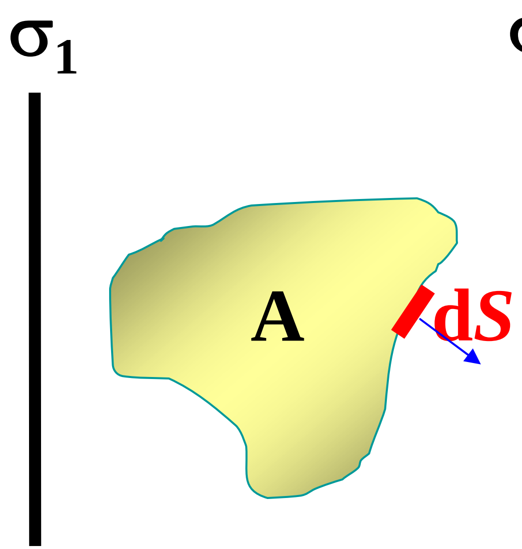
判断题：　#T2204.

两个带同种电荷的导体之间总的相互作用仍为排斥



01:32:01

例：有两块无限大均匀带电平面，电荷面密度分别为 σ_1和σ_2，在两板之间有一导体A，其表面上dS处电荷面密度为+σ，求：面元dS受到的电场力？



选择题： #S2202.

面元dS处的场强为:

(1) $E=\dfrac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}+\dfrac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}$ (2) $E=\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

(3) $E=\dfrac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}+\dfrac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}+\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ (4) $E=\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$

解：面元dS所受的电场力 $F=E\cdot\sigma dS=\dfrac{\sigma^2 dS}{2\varepsilon_0}$ $E=\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

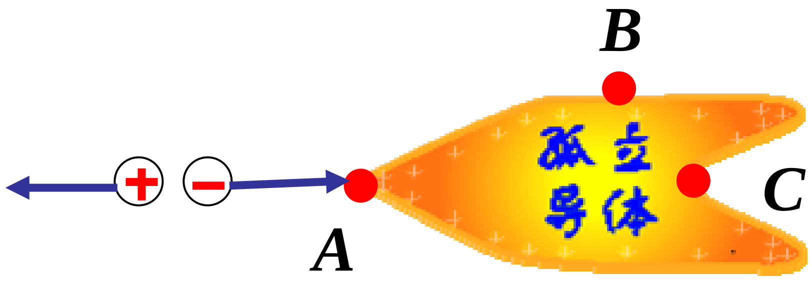
dS外附近的场强σ/ε_0 或由导体内场强为0 $\left\{\begin{array}{l}\text{面元dS} \leftarrow \text{无限大平面} \\ \text{除dS外其他电荷：导体A+两板}\end{array}\right.$

01:32:01

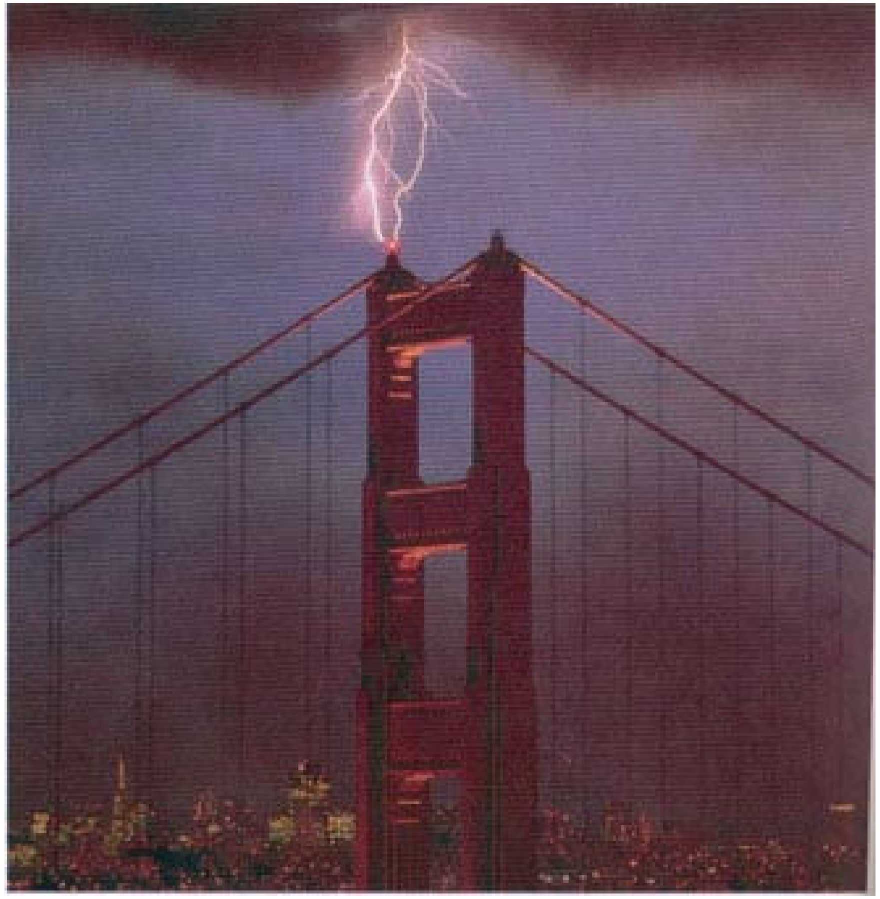
➢尖端放电：

带电体尖端附近电荷面密度较大→场强较大，

到一定的程度，使空气电离，产生尖端放电现象。



$$\sigma_A > \sigma_B > \sigma_C$$

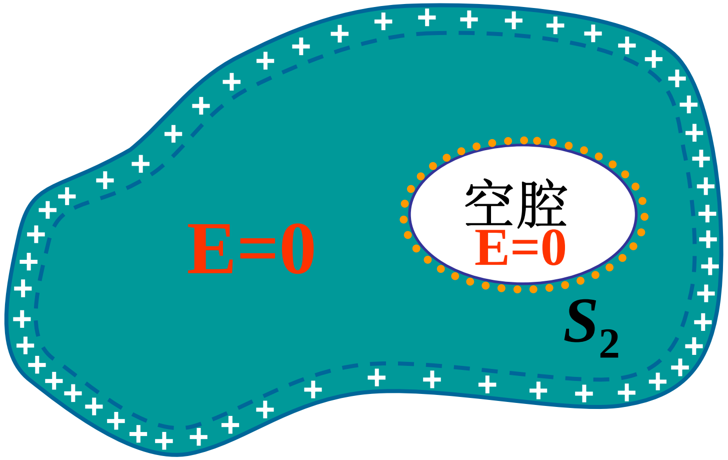


•利用：放电设备的电极做成尖端形状、避雷针。

•避免：金属元件做成球形，并使表面尽可能光滑。

1.3 空腔导体与静电屏蔽

1、空腔内无电荷



静电平衡时导体内部场强为零

$$\oint_{S_2} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0 \Rightarrow \sum q_{i内} = 0$$

空腔内表面电荷的代数和为零。

假如内表面某处σ_e>0，则必有另一处σ_e<0

两者之间就必有电场线相连(电场线不可能穿过导体)

两者之间存在电势差，这与静电平衡条件相矛盾。

空腔内表面上处处σ_e=0，不存在净电荷，导体所带的电荷只能分布在外表面。

空腔内无电场线，E=0，即所有电荷(导体自带+导体外)产生的电场在导体、空腔内都相互抵消。

•空腔导体内的物体不受外电场的影响——静电屏蔽。

01:32:01

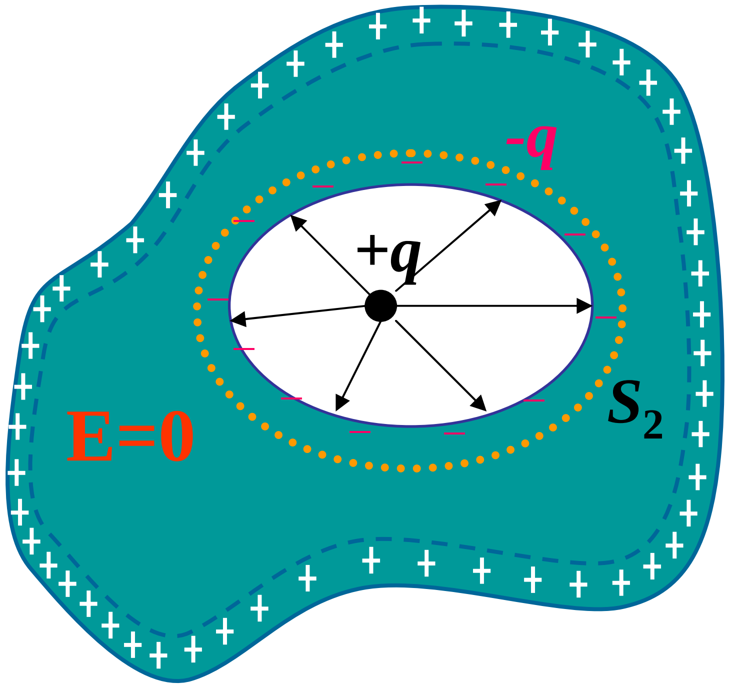
2、空腔内有电荷$+q$

静电平衡时导体内部的场强为零

→高斯面S_2内电荷的代数和为零

→空腔内表面有感应电荷$-q$，

由于电场线不能穿过导体，腔内的电场线全部由$+q$→内表面。



腔内电场只决定于腔内带电体，与腔外带电体和外表面电荷无关。

$$\vec{E}_{腔内} = \vec{E}_{+q} + \vec{E}_{-q}$$

导体外表面的电荷与导体外的电荷在空腔区域产生的电场，仍然与在导体内的电场一样，相互抵消。

•无论腔内有无电荷，腔内空间都不受外电场的影响。

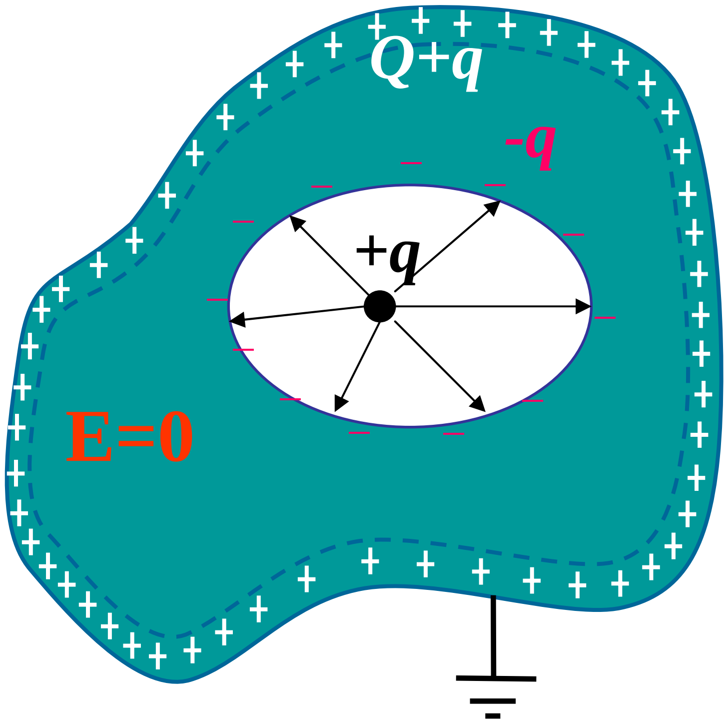
设导体本身所带电荷为Q

01:32:01

由于电荷守恒，空腔导体的外表面电荷为**Q+q**

$$\vec{E}_{导体外}=\vec{E}_{外电场}+\vec{E}_{Q+q}$$

由于电场线集中在腔内，空腔内表面的电荷与腔内电荷在腔外、导体外产生的电场也相互抵消。



这一结论与空腔位置、腔内+*q*的位置变化无关。

空腔内带电体的电量大小变化会影响导体外的电场。

若把空腔导体接地，则导体与大地导通，其外表面上的**Q+q**会在大地和外表面上重新分布。

此时腔内带电体的大小变化对导体外电场没有影响。

•空腔导体接地后，腔内、腔外电场互不影响。

01:32:01

导体带电Q	腔内	腔外
腔内无电荷	不受影响	
腔内有电荷*q*	不受影响	*q*大小有影响
导体接地	不受影响	不受影响

3、静电屏蔽的应用

•为使高压设备不影响其他仪器设备的正常工作，可以把它的金属外壳接地；

•在精密仪器、或传输微弱信号的导线外用金属壳或金属网作外罩；

•高压带电操作时所穿的金属丝织成的金属均压服。

01:32:01

选择题： #S2203.

导体接地后，以下说法正确的是：

① 导体上的电荷为**0**；

② 导体表面上的场强为**0**；

③ 导体的电势为**0**；

④ 若为空腔型导体，则外表面上无电荷分布。

01:32:01

选择题： #S2204.

在一孤立导体球壳内，如果在偏离球心处放一点电荷+q，则在球壳内外表面上将出现感应电荷，其分布情况为：

① 球壳内外表面电荷分布都均匀；

② 球壳内外表面电荷分布都不均匀；

③ 球壳内表面电荷分布均匀，外表面不均匀；

④ 球壳内表面电荷分布不均匀，外表面均匀。

选择题： #S2205.

导体达到静电平衡后，以下说法正确的是：

① 若净电荷为**0**，则电势为**0**；

② 若有过剩的正电荷，则电势为正；

③ 若有过剩的负电荷，则电势为负；

④ 若有过剩的正或负电荷，则电势不为**0**；

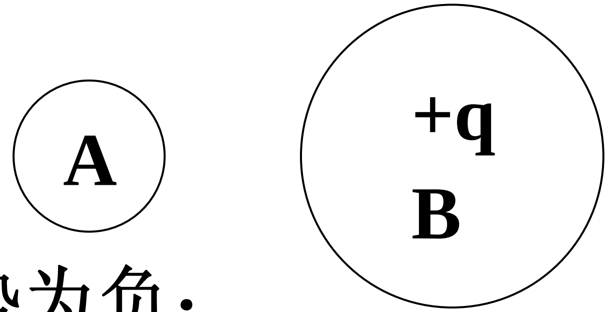
⑤ 带正电的部分的电势高于带负电的部分；

⑥ 以上说法都不对。

01:32:01

选择题： #S2206.

将一半径为$\mathbf{R_B}$带电为**+q**的大导体球**B**，移近一个半径为$\mathbf{R_A}$不带电的小导体球**A**，若周围再无其他导体或带电体，则下列说法正确的是：



① **B**球电势高于**A**球；

② 以无限远为电势零点，**A**球的电势为负；

③ **B**球表面附近任一点的场强等于σ_B/ε_0，$\sigma_B = \dfrac{q}{4\pi R_B{}^2}$

④ 两球的互作用为相互吸引；

⑤ **B**球在两球外任一点激发的场强等于 $\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$
其中r是该点与**B**球球心的距离。

⑥ 用导线接通两球，则两球电荷密度之比为 $\dfrac{\sigma_A}{\sigma_B} = \dfrac{R_B}{R_A}$

01:32:01

1.4 有导体存在时静电场的计算

- 导体静电平衡的条件 $E_{内}=0$ $U=c$
- 静电场高斯定理 $\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s}=\dfrac{\sum\limits_i q_i}{\varepsilon_0}$
- 电荷守恒定律 $\sum\limits_i Q_i = const.$
- 场强叠加原理 $\vec{E}=\sum \vec{E}_i$

01:32:01

例：两块金属平板，分别带电荷q_A和q_B，平板面积均为S，两板间距为d，面积的线度远大于d。

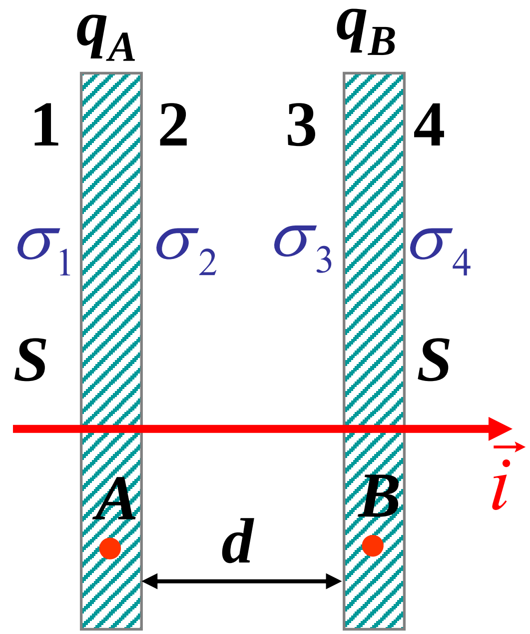
求：静电平衡时两金属板各表面上的电荷面密度。

解：两板可以视为四个无限大均匀带电平面

设4个表面的电荷面密度分别为

σ_1、σ_2、σ_3、σ_4

由导体静电平衡的条件



$$E_A=\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0}=0$$

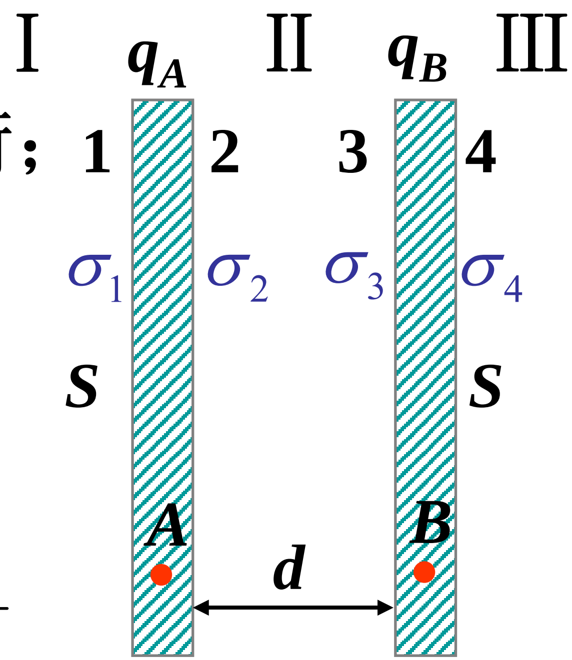
$$E_B=\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0}=0$$

$$\sigma_1-\sigma_2-\sigma_3-\sigma_4=0 \qquad \sigma_1+\sigma_2+\sigma_3-\sigma_4=0 \Rightarrow \begin{cases}\sigma_1=\sigma_4\\ \sigma_2=-\sigma_3\end{cases}$$

01:32:01

$$\sigma_1 = \sigma_4, \quad \sigma_2 = -\sigma_3$$

A、***B***两板的内侧面带等量异号电荷；两板的外侧面带等量同号电荷。



由电荷守恒定律

$$\sigma_1 S + \sigma_2 S = q_A, \quad \sigma_3 S + \sigma_4 S = q_B$$

$$\sigma_1 = \sigma_4 = \frac{q_A + q_B}{2S} \qquad \sigma_2 = -\sigma_3 = \frac{q_A - q_B}{2S}$$

◆空间电场分布 $E_{\text{II}} = \dfrac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} + \dfrac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} - \dfrac{\sigma_3}{2\varepsilon_0} - \dfrac{\sigma_4}{2\varepsilon_0} = \dfrac{\sigma_2}{\varepsilon_0} = \dfrac{q_A - q_B}{2\varepsilon_0 S}$

◆两板间电势差 $U_{AB} = E_{\text{II}} d$

◆若$\mathbf{q_A = -q_B = q}$，则 $\sigma_1 = \sigma_4 = 0 \qquad \sigma_2 = -\sigma_3 = q/S$

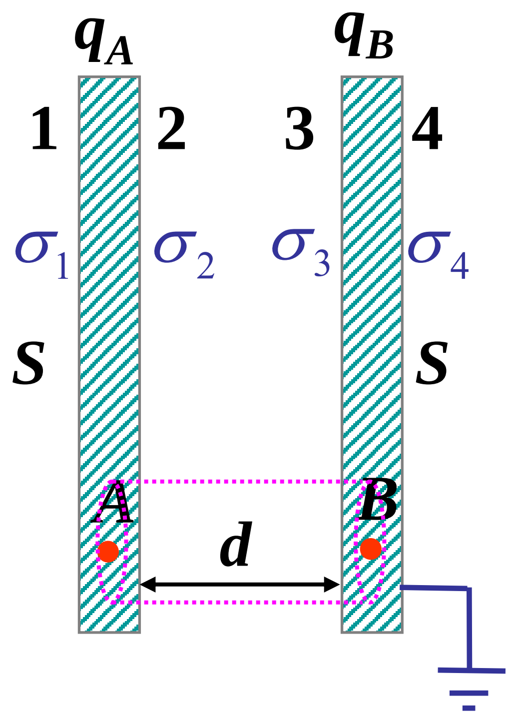
电荷只分布在两板的内侧面，外侧面不带电。

01:32:01

◆ 若第二块板接地

q_B分散到更远的地球表面上 $\sigma_4 = 0$

由导体静电平衡的条件



$$E_A = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0} = 0 \qquad \sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3 = 0$$

$$E_B = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0} = 0 \qquad \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$$

$\sigma_1 = 0,\quad \sigma_2 = -\sigma_3$ 也可由高斯定理得出 $0 = (\sigma_2 + \sigma_3)\Delta S / \varepsilon_0$

电荷守恒定律 $\sigma_1 S + \sigma_2 S = q_A \qquad \sigma_2 = \dfrac{q_A}{S} \qquad \sigma_3 = -\dfrac{q_A}{S}$

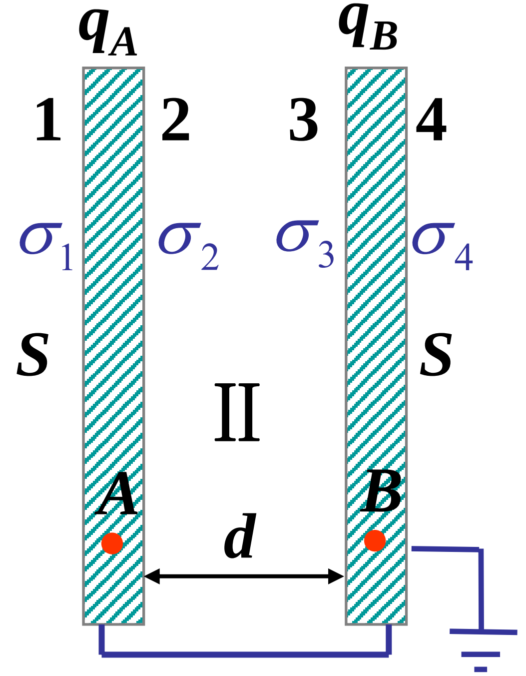
•第二块板仍带有电荷-q_A，电荷分布只与q_A有关

01:32:01

◆ 若将两块板连接起来

q_A+q_B将重新分布

在静电平衡后两板为一共同等势体



$$U_{AB} = 0 \Rightarrow E_{\mathrm{II}} = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0} = 0$$

$$\sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_4 = 0 \quad \Rightarrow \sigma_2 = \sigma_3$$

由导体静电平衡的条件

$$E_A = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0} = 0 \qquad \sigma_1 = \sigma_4$$

$$E_B = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0} = 0 \qquad \sigma_2 = -\sigma_3 \;\; = 0$$

由电荷守恒定律 $\sigma_1 S + \sigma_2 S + \sigma_3 S + \sigma_4 S = q_A + q_B$

$$\sigma_1 = \sigma_4 = \frac{q_A + q_B}{2S}$$

◆ 若再接地？ $\sigma_1 = \sigma_4 = 0$

01:32:01

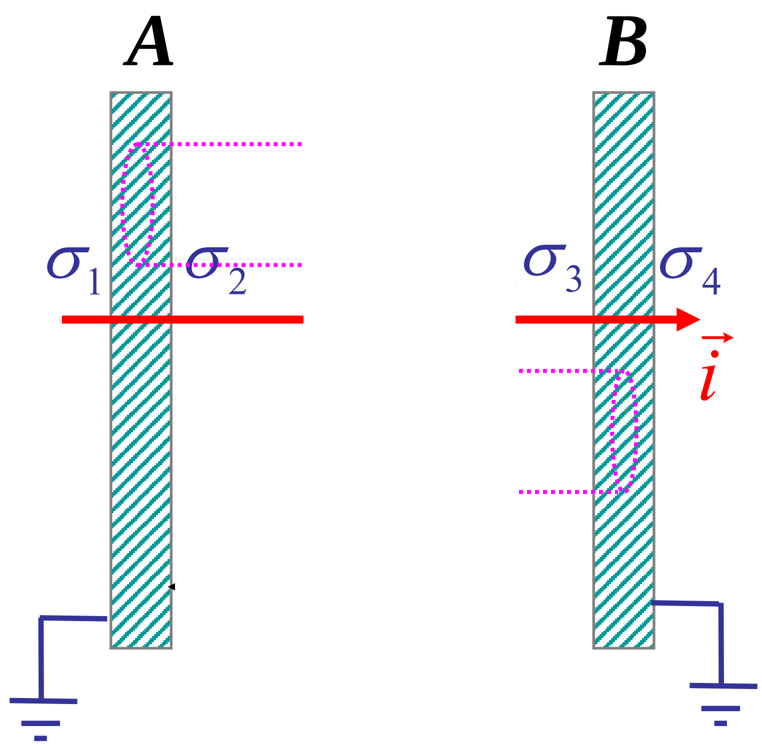
◆ 若A、B板均接地，板间放入相同面积、带电量为Q的导体板C，分别与A、B相距d_1、d_2

A、B接地 $\sigma_1=\sigma_4=0$

$$U_{AB}=0\Rightarrow U_{CA}=U_{CB}\Rightarrow -E_1d_1=E_2d_2$$

$$E_1=\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_5}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_6}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0}=-\frac{\sigma_5}{\varepsilon_0}$$

$$E_2=\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma_5}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma_6}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0}=\frac{\sigma_6}{\varepsilon_0}$$



由高斯定理及静电平衡条件

$$0=(\sigma_2+\sigma_5)\Delta S \qquad 0=(\sigma_3+\sigma_6)\Delta S$$

$$\frac{\sigma_5}{\varepsilon_0}d_1=\frac{\sigma_6}{\varepsilon_0}d_2\Rightarrow \sigma_5d_1-\sigma_6d_2=0$$

由电荷守恒定律 $\sigma_5S+\sigma_6S=Q$

$$\sigma_5=\frac{d_2Q}{(d_1+d_2)S}=-\sigma_2$$

$$\sigma_6=\frac{d_1Q}{(d_1+d_2)S}=-\sigma_3$$

01:32:01

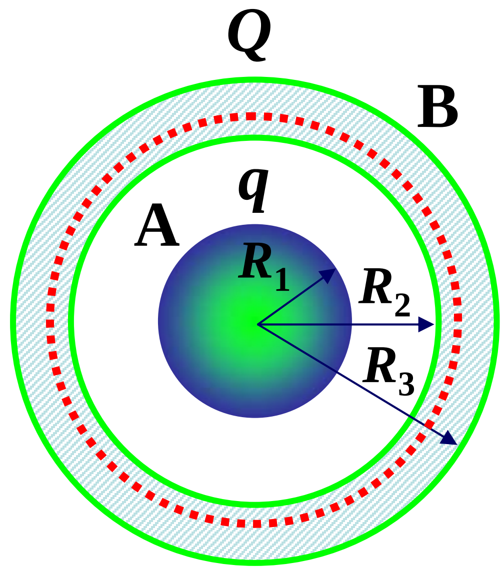
例：半径为R_1的金属球A带电为q，在它外面有一同心放置的金属球壳B，其内外半径分别为R_2和R_3，带电为Q

求：当此系统达到静电平衡时，

(1) 各表面上的电荷分布；

(2) 电场强度分布；

(3) 电势分布及球A与球壳B的电势差。



解：(1) 电量分布

金属球A：q只能分布在导体球面上

金属球壳 B： 内表面 + 外表面

根据高斯定理，球壳B内表面的电量为 $-q$；

根据电荷守恒定律，球壳B外表面的电量为 $Q+q$

根据对称性，电荷都是均匀分布的。

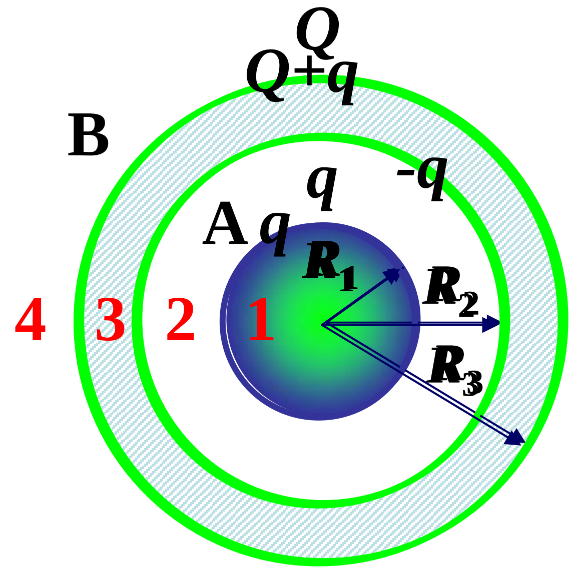
01:32:01

◆整个系统相当于在真空中的三个均匀带电的球面。

(2) 电场强度分布

由高斯定理或静电平衡条件，得

$$\begin{cases} E_1 = 0 & (r < R_1) \\ E_2 = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & (R_1 < r < R_2) \\ E_3 = \dfrac{+q-q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = 0 & (R_2 < r < R_3) \\ E_4 = \dfrac{q+Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & (R_3 < r) \end{cases}$$



(3) 电势分布

•已知场强分布，取无穷远为电势零点，由电势定义

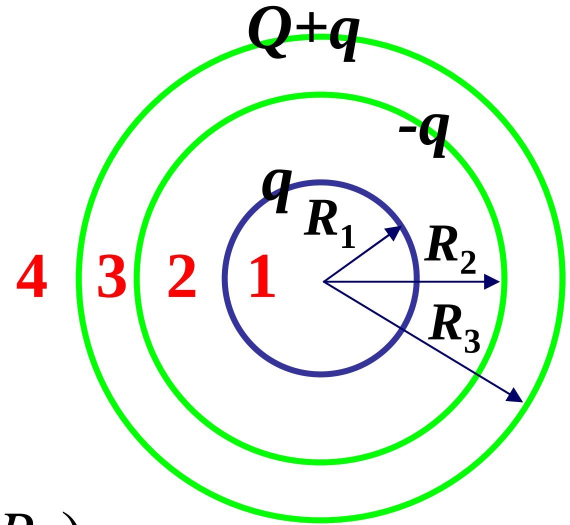
$$V_a = \int_a^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l} = \dots$$

01:32:01

•利用电势叠加原理

取无穷远为电势零点，对半径为**R**，电量为**q** 的均匀带电球壳的电势分布为

$$V_{内}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R},\qquad V_{外}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$



$$\begin{cases} V_1=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{q}{R_1}-\dfrac{q}{R_2}+\dfrac{q+Q}{R_3}\right) & (r<R_1) \\ V_2=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{q}{r}-\dfrac{q}{R_2}+\dfrac{q+Q}{R_3}\right) & (R_1<r<R_2) \\ V_3=\dfrac{q+Q}{4\pi\varepsilon_0 R_3} & (R_2<r<R_3) \\ V_4=\dfrac{q+Q}{4\pi\varepsilon_0 r} & (R_3<r) \end{cases}$$

球A与球壳B的电势差为

$$U_{AB}=V_1-V_3=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$$

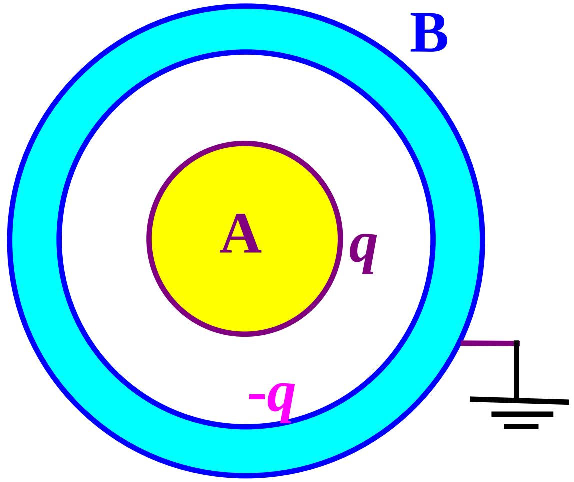
01:32:01

➢ 将球壳B接地，各表面电荷分布

金属球A：q均匀分布在导体球面上

金属球壳 B：内表面电荷为 $-q$

外表面电荷为零 $\leftarrow V_3 = \dfrac{q+Q}{4\pi\varepsilon_0 R_3} = 0$

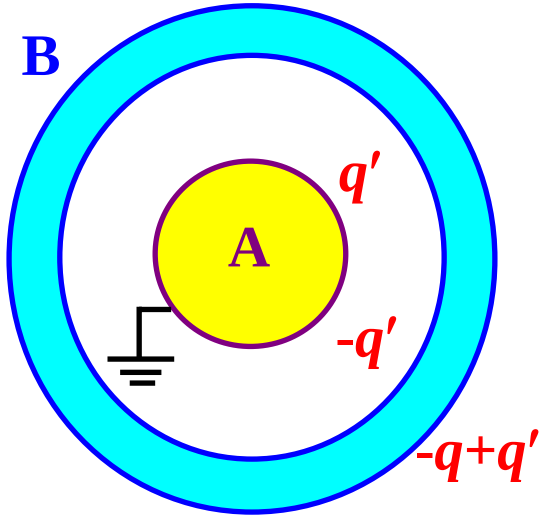


➢ 将B的地线拆掉后，再将A接地，各表面电荷分布

此时B所带总电荷为 $-q$

A接地后，电荷不再为q，设为 q'

则B内表面为 $-q'$，外表面为 $-q+q'$



由电势叠加原理，得球A的电势

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q'}{R_1} - \frac{q'}{R_2} + \frac{-q+q'}{R_3}\right) = 0 \qquad q' = \frac{qR_1R_2}{R_2R_3 - R_1R_3 + R_1R_2}$$

01:32:01

判断题： #T2205.

带电为**Q**的导体球壳中心放一点电荷**q**，若此球壳的电势为$\mathbf{U_0}$，则根据电势叠加，任一点**P**处(距中心为***r***)的电势为 $U_P=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}+U_0$

$\mathbf{U_0}$是**Q和q**在球壳处产生的电势，不是球壳在**P**点处产生的电势！

$$U_0=\frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

若**P**点在球壳外： $U_P=\dfrac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

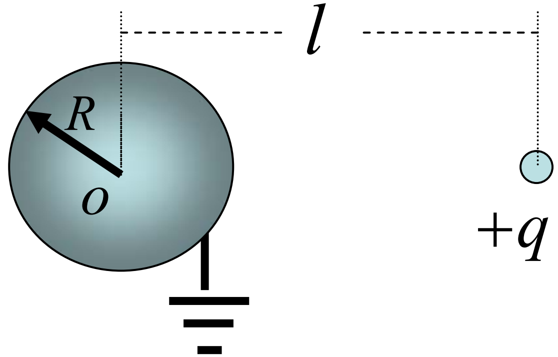
若**P**点在球壳内： $U_P=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}+\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$

01:32:01

例：接地导体球附近有一点电荷q，与球心相距l，

求：导体球上感应电荷的电量。

解：设感应电量为Q



接地→U=0，球心的电势为0←等势体

感应电荷分布在球面上，但不均匀

任取球面上一块电荷元dq，其在球心处的电势为

$$dU = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 R}$$ 球面在球心的电势 $$U_1 = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

球心总电势 $$U = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l} = 0 \Rightarrow Q = -\frac{R}{l} q \neq 0 \qquad |Q| < q$$

接地意味着导体电势为零，并不意味着电荷为零

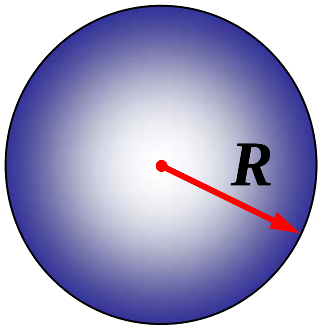
球外没有其他带电体时 $$U = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} = 0 \Rightarrow Q = 0$$

01:32:01

§2 电容器的电容

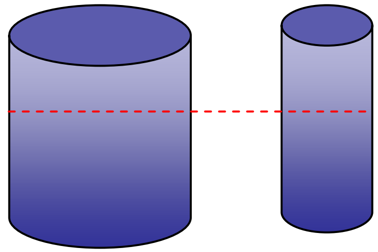
2.1 孤立导体的电容

- 半径为***R*** 孤立导体球的电容



电势为 $V=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$ $\qquad \dfrac{q}{V}=4\pi\varepsilon_0 R$

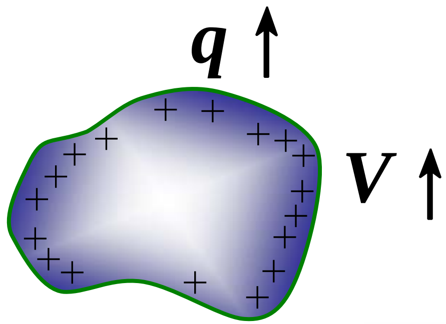
与导体的几何因素和介质有关，
与其带电量和电位无关。



电容 $C=4\pi\varepsilon_0 R$ 反映了导体的容电本领

单位：法拉(F) **1F=1C.V^{-1}**

- 孤立导体的电容



$V\propto q$ $\qquad$ 孤立导体的电容 $C=\dfrac{q}{V}$

01:32:01

判断题：　#T2207.

不带电的孤立导体球，其电容为**0**

孤立导体球的电容　$C = 4\pi\varepsilon_0 R$

01:32:01

选择题： #S2208.

对两个相同的孤立导体球，下列说法正确的是：

(1) 分别带不等量的同号电荷，则带电多的电容大；

(2) 分别带等量异号的电荷，则带正电的电容大；

(3) 若将其中一个挖成空心的，则由于实心的可容纳更多电荷，实心的电容更大；

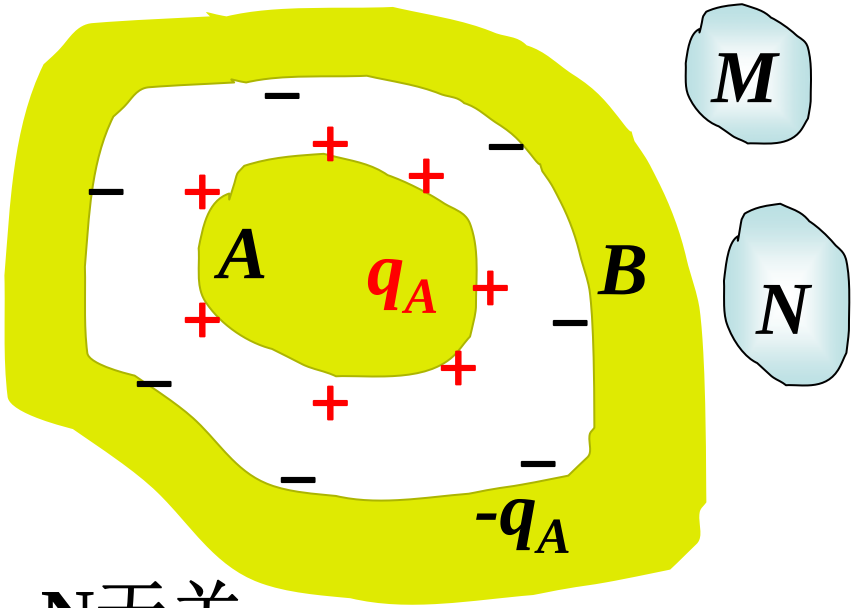
(4) 使两球带上等量同号的电荷，现将两球靠近(不再孤立)，若不考虑每个球上电荷分布的变化对自身电位的影响，则两球容纳电荷本领降低，二者电容之和减小。

$$C = \frac{Q}{U+\Delta U} + \frac{Q}{U+\Delta U} < \frac{2Q}{U}$$

01:32:01

2.2 电容器的电容

1、电容器



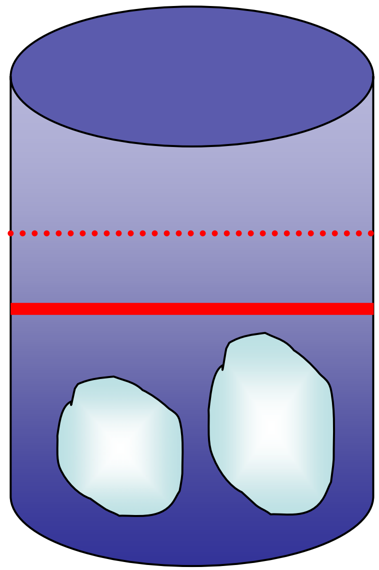
用空腔B 将导体 A 屏蔽

*A*带电 q_A，*B*内表面带电-q_A

电容器: 两个带有等值而异号电荷的导体所组成的系统.

*AB*间电势差$U_{AB}=V_A-V_B$与M、N无关

2、电容器的电容



电容器两个极板所带的电量为+*Q*、-*Q*，电势分别为V_A、V_B，电容器的电容:

$$C=\frac{Q}{U_{AB}}=\frac{Q}{V_A-V_B}$$

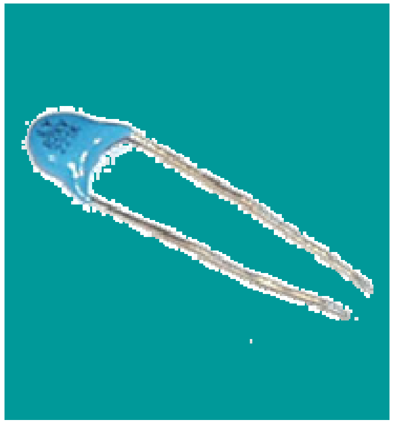
01:32:01

3、电容器的分类

高压电容器(20kV, 5~**21μF)**
(提高功率因数)

聚丙烯电容器
(单相电机起动和连续运转)

涤纶电容
(250V 0.47μF)



陶瓷电容器
(20000V 1000pF)

电解电容器
(160V 470 μ F)

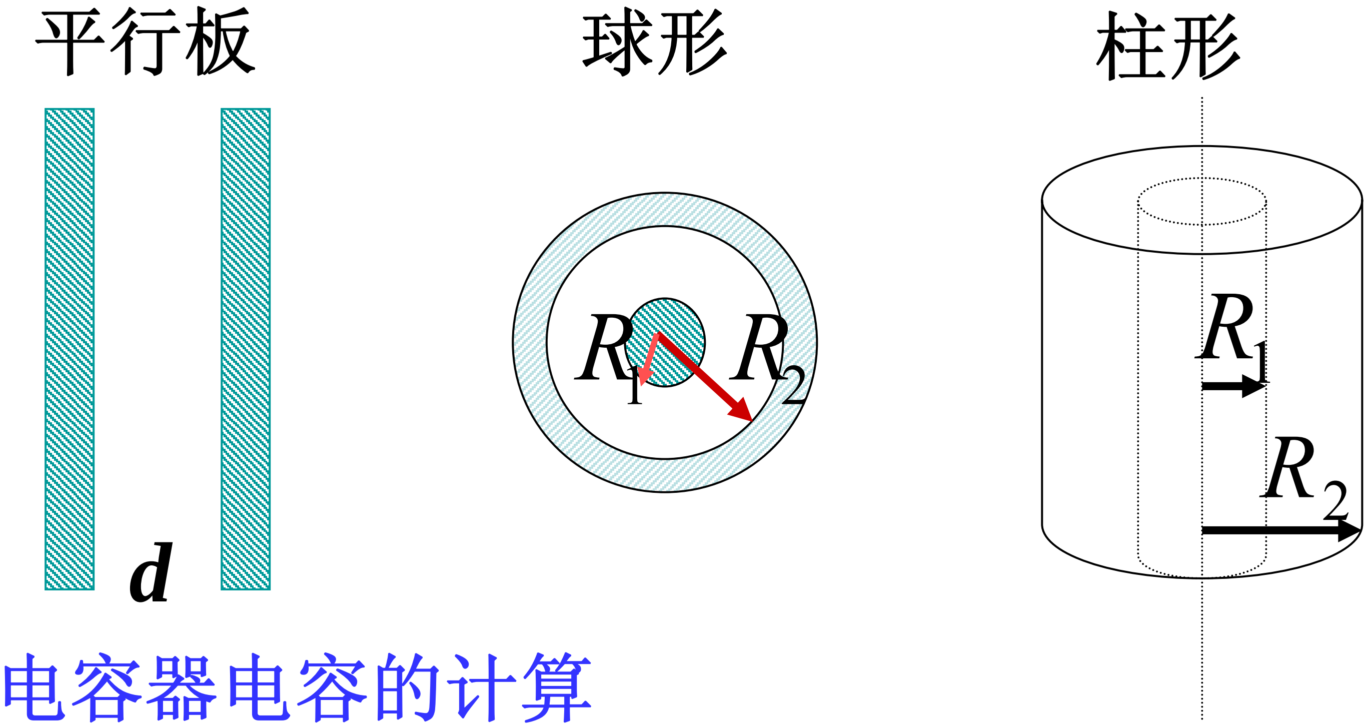
01:32:01

4、电容器的作用

•储存电荷或电能的元件

•在电路中：通交流、隔直流；

•与其它元件可以组成振荡器、时间延迟电路等；



5、电容器电容的计算

$$q \Rightarrow \vec{E} \Rightarrow (V_1 - V_2) \Rightarrow C = \frac{q}{V_1 - V_2}$$

01:32:01

① 平行板电容器

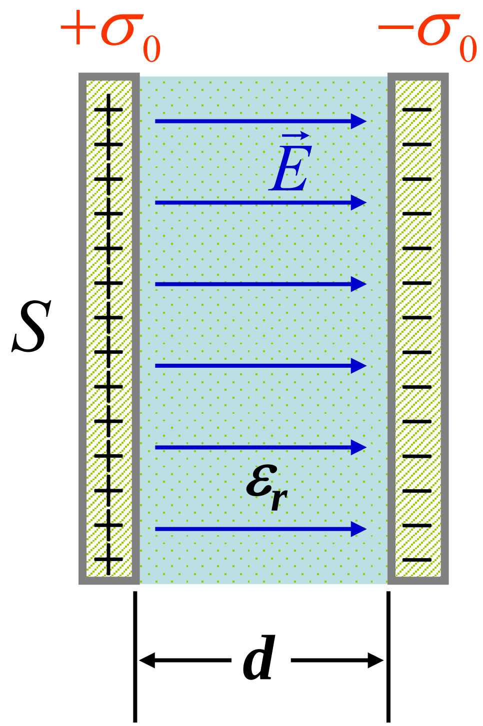
$$E=\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0\varepsilon_r}$$

$$V_1-V_2=Ed=\frac{\sigma_0 d}{\varepsilon_0\varepsilon_r}$$

$$C=\frac{q}{V_1-V_2}=\frac{\sigma_0 S}{\sigma_0 d/\varepsilon_0\varepsilon_r}=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r S}{d}$$

真空

$$\Longrightarrow C=\frac{\varepsilon_0 S}{d}$$



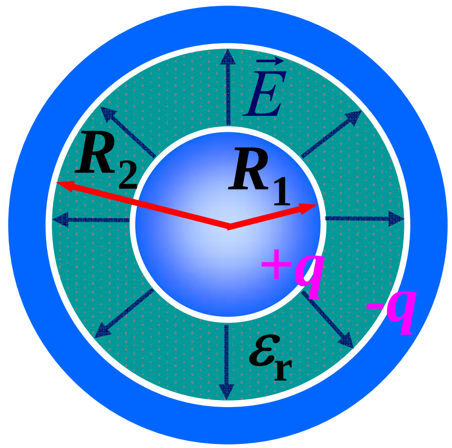
(1) 电容与电介质的相对介电常数 ε_r 成正比；

(2) 电容与极板面积 **S** 成正比，
与极板间的距离 **d** 成反比。

01:32:01

② 球形电容器

$$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}\quad(R_1<r<R_2)$$



$$V_1-V_2=\int_{R_1}^{R_2}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$=\int_{R_1}^{R_2}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}\mathrm{d}r$$

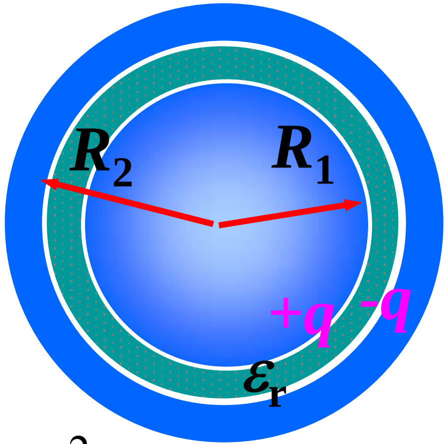
$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{R_2-R_1}{R_1R_2}$$

$$C=\frac{q}{V_1-V_2}=\frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R_1R_2}{R_2-R_1}\xrightarrow{\text{真空}}C=\frac{4\pi\varepsilon_0R_1R_2}{R_2-R_1}$$

01:32:01

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

讨论：



①若$\boldsymbol{R_1 >> R_2 - R_1}$

设 $\boldsymbol{R_2 - R_1 = d}$，$\boldsymbol{R_2 \approx R_1 = R}$

$$C = 4\pi\varepsilon_o\varepsilon_r R^2 / d = \varepsilon_o\varepsilon_r S / d \qquad S = 4\pi R^2$$

平行板电容器电容

②当$\boldsymbol{R_2} \to \infty$ 时，

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_o\varepsilon_r R_1}{1 - \dfrac{R_1}{R_2}} \approx 4\pi\varepsilon_o\varepsilon_r R_1 \qquad \text{孤立导体球的电容}$$

01:32:01

③ 柱形电容器(同轴电缆)

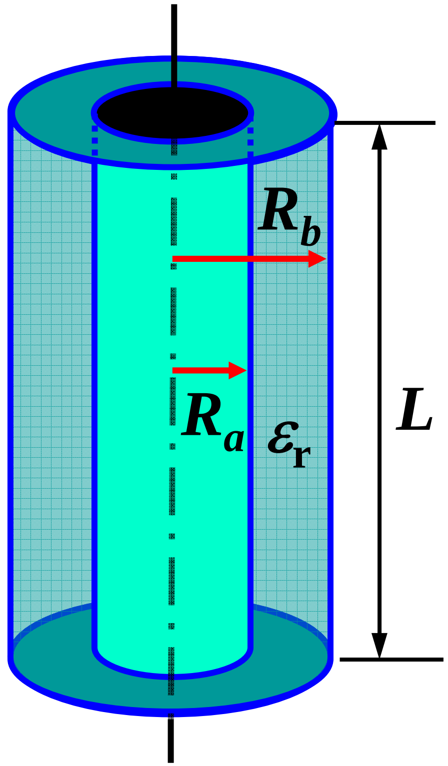
$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r} \quad (R_a < r < R_b)$$

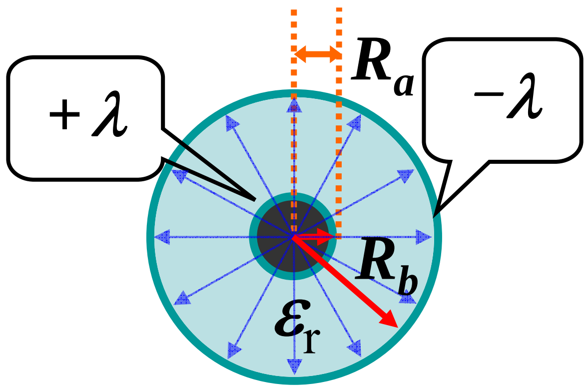
$$V_1 - V_2 = \int_{R_a}^{R_b} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= \int_{R_a}^{R_b} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r}\mathrm{d}r$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\ln\frac{R_b}{R_a}$$

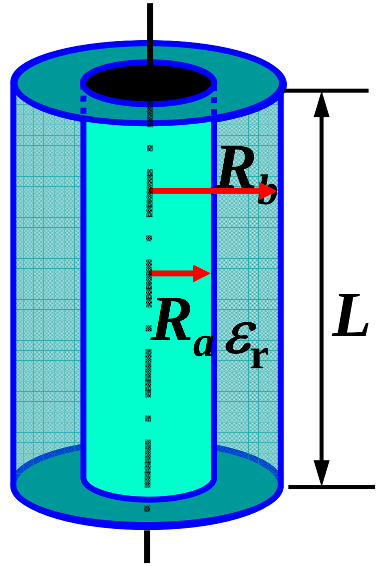
$$C = \frac{q}{V_1 - V_2} = \frac{\lambda L}{V_1 - V_2} = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L}{\ln\frac{R_b}{R_a}}$$





01:32:01

$$C=\frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L}{\ln\frac{R_b}{R_a}} \xrightarrow{\text{真空}} C=\frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln\frac{R_b}{R_a}}$$

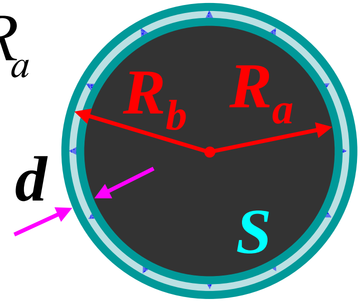


圆柱越长，电容越大；

两圆柱的间隙越小，电容越大

若$R_a >> R_b - R_a$，则

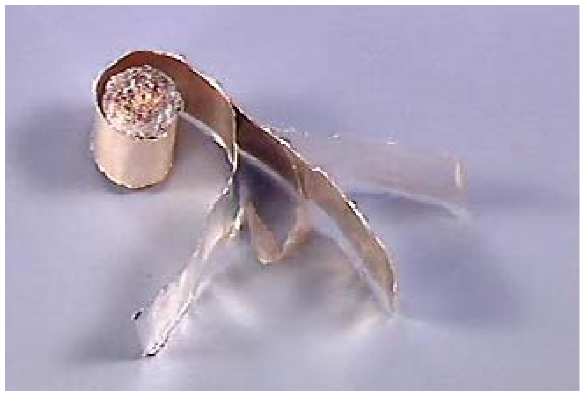
$d = R_b - R_a$



$$\ln\frac{R_b}{R_a}=\ln\left(\frac{R_b-R_a}{R_a}+1\right)\approx\frac{R_b-R_a}{R_a}=\frac{d}{R_a}$$

$$C=\frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L}{\ln R_b/R_a}=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r\cdot 2\pi R_a L}{d}=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r S}{d}$$

$S=2\pi R_a L$　　平行板电容器电容



01:32:01

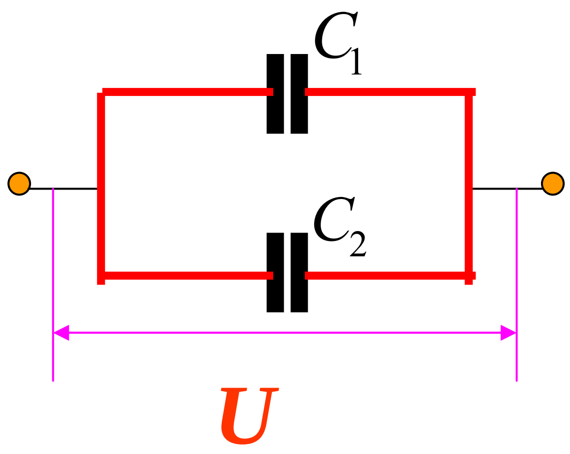
2.3 电容器的并联和串联

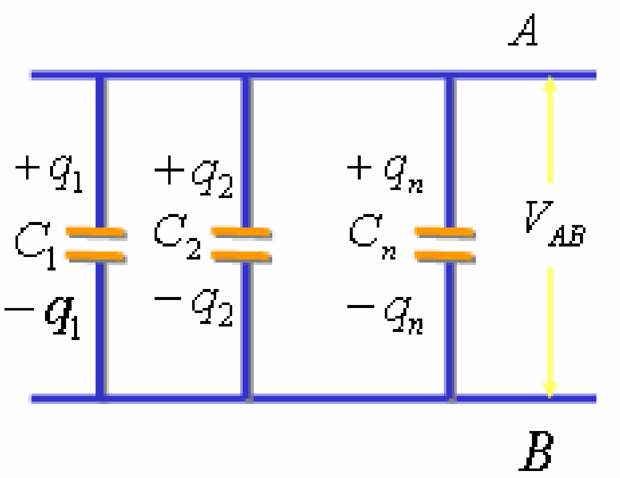
1、电容器的并联

每个电容器两端的电势差相等

总电量：$Q = Q_1 + Q_2 = C_1U + C_2U$

等效电容：$C = \frac{Q}{U} = C_1 + C_2$





$$C = \sum_i C_i$$

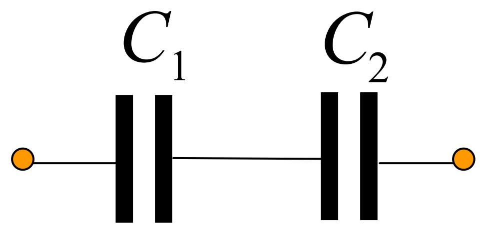
并联时，等效电容等于各电容器电容之和

并联使总电容增大，并联使用可以提高容量。

01:32:01

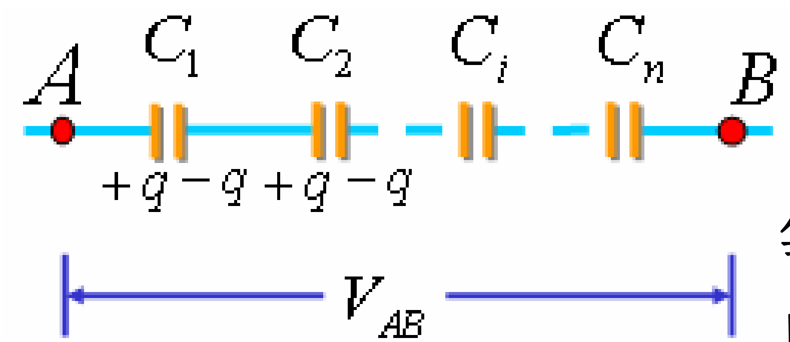
2、电容器的串联

每个电容器所带的电量相同



总电压 $U = U_1 + U_2 = \dfrac{Q}{C_1} + \dfrac{Q}{C_2}$

等效电容 $C = \dfrac{Q}{U} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2}} \Rightarrow \dfrac{1}{C} = \dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2}$



$$\frac{1}{C} = \sum_i \frac{1}{C_i}$$

等效电容的倒数=各电容器电容的倒数之和

等效电容小于任何一个电容器的电容，但可以提高电容的耐压能力。

§ 3 静电场的能量

3.1 电容器的电能

电源的非静电能转换为静电能

设放电过程中t时刻，两板电量为$q=q(t)$

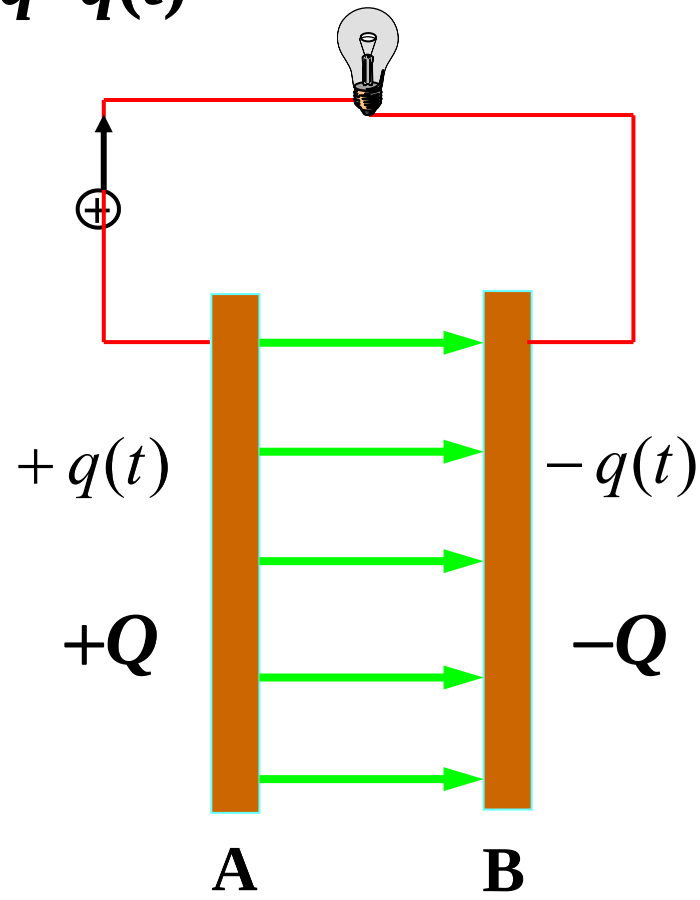
此时刻两极板间的电势差为$U(t)$

若再将($-\mathrm{d}q>0$)的电荷由A移到B，电场力所做的功为

$$\mathrm{d}W = -U\mathrm{d}q = -\frac{q}{C}\mathrm{d}q > 0$$

极板上电量从$Q\to 0$，电场力所做的总功为

$$W = \int \mathrm{d}W = -\int_Q^0 \frac{q}{C}\mathrm{d}q = \int_0^Q \frac{q}{C}\mathrm{d}q = \frac{Q^2}{2C}$$



01:32:01

电容器储存的静电能

$$W_e = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}QU$$

$\Longrightarrow$选择题

对于平行板电容器

$$\left.\begin{aligned} U &= Ed \\ C &= \frac{\varepsilon S}{d} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow W_e = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 Sd = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 V$$

$\boldsymbol{W_e}$与电场$\boldsymbol{E}$及体积$\boldsymbol{V}$有关，能量储存在电场中。

电场能量密度 $w_e = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 = \frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}$ 普遍适用

对于非均匀电场 $W_e = \int_V \mathrm{d}W_e = \int_V \frac{1}{2}\varepsilon E^2 \mathrm{d}V = \int_V \frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}\mathrm{d}V$

积分区域：遍布电场分布的区域

01:32:01

选择题： #S2209.

关于平行板电容器，下列说法正确的是：

(1) 两板分别带上等量同号的电荷，则电容改变；

(2) 两板分别带上不等量同号的电荷，则电容改变；

(3) 保持板上电量不变，增大板间距离**d**，则电容器的储能增加，板间电势差变大，板间场强不变；

(4) 接上电源保持电压不变，增大板间距离**d**，则电容器的储能减少，板上电量减少，板间场强减小；

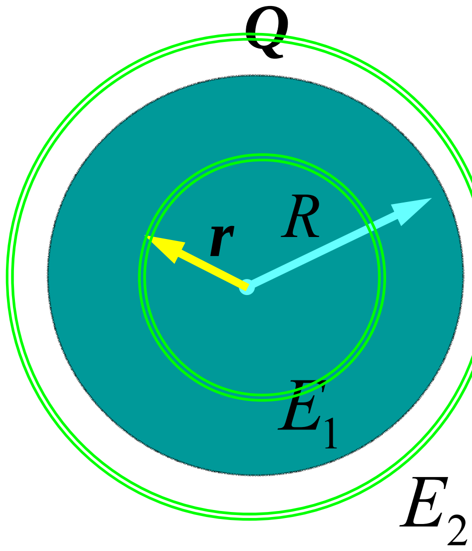
(5) 保持电量不变，在板间插入有一定厚度的金属板，金属板与两极板均不接触，则电容器的储能减少；

(6) 保持电压不变，在板间插入一玻璃板，则电容器的储能增加。

01:32:01

例：已知均匀带电的球体，半径为R，带电量为Q

求：从球心到无穷远处的电场能量。



解：由高斯定理，场强分布为

$$E_1 = \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \qquad E_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

在电场分布的空间中，取半径为r，厚度为$\mathrm{d}r$ 的体积元$\mathrm{d}V$

$$\mathrm{d}W_e = w_e \mathrm{d}V = w_e 4\pi r^2 \mathrm{d}r$$

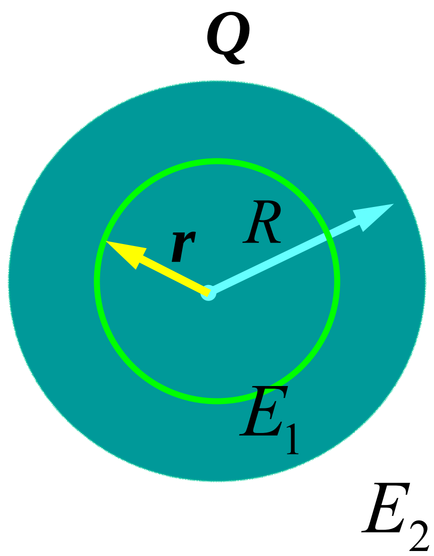
电场能量 $$W_e = \int_V \mathrm{d}W_e = \int \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_1^2 \mathrm{d}V + \int \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_2^2 \mathrm{d}V$$

$$= \int_0^R \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left(\frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\right)^2 4\pi r^2 \mathrm{d}r + \int_R^\infty \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2 4\pi r^2 \mathrm{d}r$$

01:32:01

$$W_e = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\int_0^R \frac{r^4}{R^6}\mathrm{d}r + \int_R^\infty \frac{1}{r^2}\mathrm{d}r$$

$$= \frac{Q^2}{40\pi\varepsilon_0 R} + \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R} = \frac{3Q^2}{20\pi\varepsilon_0 R}$$



$$Q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho \qquad W_e = \frac{4\pi\rho^2 R^5}{15\varepsilon_0}$$

◆若为金属球，则

$$W_e = \int_R^\infty \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_2^2 \mathrm{d}V = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\int_R^\infty \frac{1}{r^2}\mathrm{d}r = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

半径为**R** 孤立导体球的电容

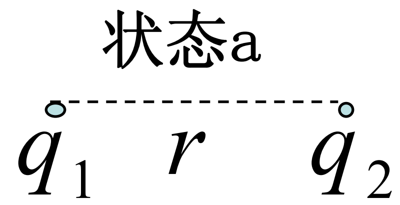
$$C = 4\pi\varepsilon_0 R \Rightarrow W_e = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

01:32:01

3.2 带电体系的静电能

把系统从某状态a分裂到彼此相距无限远的状态，此过程中静电场力作的功即系统在状态a时的静电势能。

1. 点电荷系



•以两个点电荷系统为例

q_1, q_2初始时相距无限远

q_1不动，把q_2从无限远移过来，使系统处于状态a

外力克服q_1的场作功

$$W_{外} = -\int_{\infty}^{r} q_2 \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} = q_2 \int_{r}^{\infty} \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} = q_2 V_{21}$$

q_1和q_2的电势能

V_{21}：q_1在q_2处产生的电势

01:32:01

或者 q_2不动，移动q_1 $\quad W_e = q_1 \dfrac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r} = q_1 V_{12} = q_2 V_{21}$

保守力作功与过程无关，表达式相同

为了便于推广，写为 $W_e = \dfrac{1}{2}q_1V_{12} + \dfrac{1}{2}q_2V_{21} = \dfrac{1}{2}q_1V_1 + \dfrac{1}{2}q_2V_2$

•多个点电荷系统 $W_e = \dfrac{1}{2}\sum_i q_iV_i$

V_i：除q_i外其他电荷在q_i处的电势

•若连续分布 $W_e = \dfrac{1}{2}\int_{(Q)} Vdq$ $\quad$ V：带电体在dq 处的电势

例：带电导体球，带电量Q，半径R

导体等势→ $W_e = \dfrac{1}{2}V\int_{(Q)} dq = \dfrac{1}{2}\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_{(Q)} dq = \dfrac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$

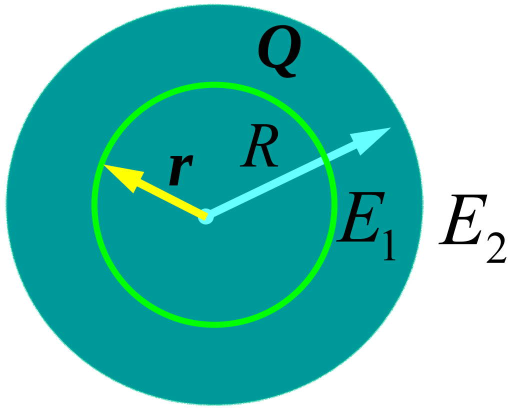
01:32:01

例：已知均匀带电的球体，半径为**R**，带电量为**Q**

求：从球心到无穷远处的电场能量。

解：由高斯定理，场强分布为

$$E_1=\frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0R^3}\qquad E_2=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0r^2}$$



在带电体上，半径为**r**的球壳处的电势：

$$V=\int_r^R\vec{E}_1\bullet d\vec{r}+\int_R^\infty\vec{E}_2\bullet d\vec{r}=\frac{q}{8\pi\varepsilon_0R^3}(3R^2-r^2)=\frac{\rho}{6\varepsilon_0}(3R^2-r^2)$$

取半径为**r**，厚度为**dr**的球壳作为电荷元**dq**，积分得：

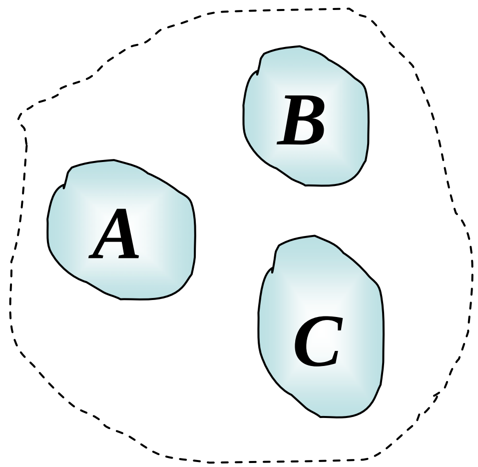
$$W_e=\frac{1}{2}\int_{(Q)}Vdq=\frac{1}{2}\int_0^R\frac{\rho}{6\varepsilon_0}(3R^2-r^2)\rho4\pi r^2dr$$

$$=\int_0^R\frac{\rho^2}{3\varepsilon_0}(3R^2-r^2)\pi r^2dr=\frac{4\pi\rho^2R^5}{15\varepsilon_0}$$

01:32:01

2. 多个带电体

$$W_e = \frac{1}{2}\int_{(Q_A)} V_A dq_A + \frac{1}{2}\int_{(Q_B)} V_B dq_B + \cdots$$



V_A, V_B …是所有带电体在***A*, *B***…的电势

例：导体组的静电能

$$\text{导体等势} \rightarrow W_e = \frac{1}{2}V_A\int_{(Q_A)} dq_A + \frac{1}{2}V_B\int_{(Q_B)} dq_B + \cdots = \frac{1}{2}\sum_i V_i Q_i$$

V_i : 所有带电体在**Q_i**处的电势

总静电能=

每个带电体单独存在时的自能+带电体间的相互作用能

电势能的数值是相对的，关心的是能量的改变量，
若每个带电体的自能保持不变，可只讨论互能。

01:32:01

本章小结

1. 静电场中的导体

(1) 导体静电平衡的条件

$$E_{内} = 0 \qquad \vec{E}_{表面} \perp 导体表面$$

用电势描述：导体静电平衡时是一个等势体。

(2) 导体静电平衡时的电荷分布

导体内部处处没有净电荷，电荷只能分布在导体表面上。

导体表面附近一点的电场强度与该点处导体表面电荷的面密度之间的关系为

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

(3)静电屏蔽

(4) 存在导体时静电场的计算

2. 电容器的电容

定义: $$C = \frac{q}{V_1 - V_2}$$

- 电容器电容的计算

$$\boldsymbol{q} \Rightarrow \vec{E} \Rightarrow V_1 - V_2 \Rightarrow C = \frac{q}{V_1 - V_2}$$

(1) 平行板电容器 $$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

(2) 球形电容器 $$C = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

(3) 柱形电容器 $$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln\frac{R_b}{R_a}}$$

01:32:01

3. 电场能量

电容器中电场储存的能量 $W_e = \dfrac{Q^2}{2C} = \dfrac{1}{2}CU^2 = \dfrac{1}{2}QU$

能量密度 $w_e = \dfrac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$

电场能量 $W_e = \int_V \mathrm{d}W_e = \int_V \dfrac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \mathrm{d}V$

对电场存在的空间积分

$$W_e = \frac{1}{2}\int_Q V dq$$

对带电体的积分

01:32:01

作业：

马文蔚

(第二版)P67

6，8，10，23

10:59:33