数学建模第六次作业

李昊伦 2023211595

一、多目标规划问题的概念
多目标规划（Multi-Objective Programming，MOP）是指在同一决策系统中，同时存在两个或两个以上相互冲突的目标函数，需要在给定约束条件下，寻求能够兼顾各目标的可行解集合的优化方法。

- **形式化表述**：

$$\begin{array}{ll} \max & \big(f_1(\mathbf{x}),\, f_2(\mathbf{x}), \ldots, f_k(\mathbf{x})\big) \\ \text{s.t.} & \mathbf{x} \in X \end{array}$$

  其中，$\mathbf{x}$ 为决策变量向量，f_i 为第 i 个目标函数，X 为可行域。

二、有效解（Pareto 最优解）的概念
在多目标情形下，很少存在一个解能使所有目标同时取得全局最优。

- **有效解（或称帕累托最优解）**：若对某可行解 $\mathbf{x}^* \in X$，不存在另一可行解 $\mathbf{x} \in X$，使得：

$$\forall i:\ f_i(\mathbf{x}) \geq f_i(\mathbf{x}^*) \quad \text{且} \quad \exists j:\ f_j(\mathbf{x}) > f_j(\mathbf{x}^*),$$

  则称 $\mathbf{x}^*$ 为有效解。
- **交换路径（契约曲线）**：所有有效解在目标空间或决策空间中连成的一条曲线（或曲面），代表甲、乙双方的最优交易方案集合。□cite□turn0file0□

三、效用函数的概念

- **定义**：效用函数（Utility Function）$u(x,y)$ 将消费组合 (x,y) 映射为一个标量，表示该组合所带来的满意度或偏好程度。
- **常见性质**：
  1. **连续性与非负性**：$u(x,y)$ 在定义域内连续且 $u(x,y) \geq 0$。
  2. **单调递增**：对任意变量，增加其数值不减少效用，即 $\dfrac{\partial u}{\partial x} > 0,\ \dfrac{\partial u}{\partial y} > 0$。
  3. **下凸性（偏好凸性）**：对应无差异曲线向内凸，代表边际替代率递减。

文档中提到，可选取如下形式的效用函数：

$$u(x,y)=\alpha\ln x+(1-\alpha)\ln y,\quad u(x,y)=x^{\alpha}y^{1-\alpha},\quad u(x,y)=\min\{\alpha x,\,(1-\alpha)y\},$$

其中 $\alpha\in(0,1)$。

四、实物交换模型的数学表述

- **变量与参数**
  - 甲方交易后持有物品 A、B 数量 (x_1,y_1)，效用函数 $u_1(x_1,y_1)$。
  - 乙方交易后持有物品 A、B 数量 (x_2,y_2)，效用函数 $u_2(x_2,y_2)$。
  - 交易前各自的初始禀赋为 (x_1^0,y_1^0)、(x_2^0,y_2^0)。
- **资源约束**

$$x_1+x_2=x_1^0+x_2^0,\quad y_1+y_2=y_1^0+y_2^0,\quad x_i,y_i\ge 0,\ i=1,2.$$

- **多目标优化模型**

$$\begin{aligned}\max\quad & \big(u_1(x_1,y_1),\ u_2(x_2,y_2)\big)\\ \text{s.t.}\quad & x_1+x_2=\bar X,\quad y_1+y_2=\bar Y,\quad x_i,y_i\ge 0.\end{aligned}$$

  其中 $\bar X=x_1^0+x_2^0,\ \bar Y=y_1^0+y_2^0$。

五、求解思路

1. **构造单目标子问题**
   - **加权和法**：引入权重 $\lambda\in[0,1]$，考虑

$$\max\ \lambda\,u_1(x_1,y_1)+(1-\lambda)\,u_2(\bar X-x_1,\ \bar Y-y_1),$$

     对不同 λ 求解，可获得整个帕累托前沿。
   - **ε-约束法**：固定乙方效用 $u_2\ge U_2^*$，在此约束下最大化 u_1。
2. **一阶必要条件（KKT 条件）**
   令拉格朗日函数

$$\mathcal{L}=\lambda\,u_1(x_1,y_1)+(1-\lambda)\,u_2(x_2,y_2)-\mu_1(x_1+x_2-\bar X)-\mu_2(y_1+y_2-\bar Y).$$

   对 x_i,y_i 求偏导并令为零，可得

$$
\lambda\,\frac{\partial u_1}{\partial x_1}=\mu_1,\quad \lambda\,\frac{\partial u_1}{\partial y_1}=\mu_2,
$$

$$
(1-\lambda)\,\frac{\partial u_2}{\partial x_2}=\mu_1,\quad (1-\lambda)\,\frac{\partial u_2}{\partial y_2}=\mu_2.
$$

消去 μ_1,μ_2 得到 **边际替代率相等条件**:

$$
\frac{\partial u_1/\partial x_1}{\partial u_1/\partial y_1}\;=\;\frac{\partial u_2/\partial x_2}{\partial u_2/\partial y_2},
$$

这正对应几何上两条无差异曲线的切线斜率相同，确定了契约曲线上每一点的配对方案。

3. **算法实现**
   - **解析法**：当效用函数具有特定形式（如 Cobb-Douglas），可显式解出 $x_1^*(\lambda),y_1^*(\lambda)$。
   - **数值法**：对一般效用函数，可在 [0,1] 网格上枚举 λ，利用数值优化（如 SQP、内点法）解每个子问题，再连成帕累托前沿。
   - **可视化**：通过 Edgeworth 盒图描绘双方无差异曲线，相切点即有效解，构成交换路径。

总结:
通过多目标规划的框架，将甲、乙双方的满意度同时纳入模型，利用加权和法或 ε-约束法将其转化为可操作的单目标优化问题，结合 KKT 条件（边际替代率相等）即可刻画并求出所有 **有效解**（契约曲线）；效用函数的连续性、单调性和凸性保证了解的存在性与稳定性。