第三节 正态总体方差的假设检验

一、单个正态总体方差的假设检验

二、两个正态总体方差的假设检验

三、小结

一、单个正态总体方差的假设检验

设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, μ,σ^2均为未知,

$X_1, X_2,\cdots, X_n$ 为来自总体 X 的样本.

要求检验假设: (显著性水平为α)

$$H_0:\sigma^2=\sigma_0^2,\quad H_1:\sigma^2\neq\sigma_0^2,$$

σ_0 为已知常数 .

由于 S^2 是 σ^2 的无偏估计, 当H_0 为真时, 比值 $\dfrac{s^2}{\sigma_0^2}$

在1附近摆动, 不应过分大于1或过分小于1,

根据第六章§3定理二可知, 当 H_0 为真时,

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1),$$

我们取

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$$

作为检验统计量,**上述检验问题的拒绝域具有以下的形式:**

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \le k_1 \text{或} \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \ge k_2,$$

此处 k_1 和 k_2 的值由下式确定:

$$P\{H_0\text{为真, 拒绝}H_0\}$$

$$=P_{\sigma_0^2}\left\{\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\le k_1\right)\cup\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\ge k_2\right)\right\}=\alpha.$$

为了计算方便, 习惯上取

$$P_{\sigma_0^2}\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\le k_1\right\}=\frac{\alpha}{2},\quad P_{\sigma_0^2}\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\ge k_2\right\}=\frac{\alpha}{2}$$

故得 $k_1=\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1),\ k_2=\chi^2_{\alpha/2}(n-1).$

于是得拒绝域为:

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^{\ 2}} \le \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) \text{ 或 } \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^{\ 2}} \ge \chi^2_{\alpha/2}(n-1).$$

下面来求单边检验问题的拒绝域 (设显著水平为α)

$$H_0:\sigma^2 \le \sigma_0^{\ 2}, \qquad H_1:\sigma^2 > \sigma_0^{\ 2},$$

的拒绝域. 因H_0中的全部σ^2都比H_1中的σ^2要小，当H_1为真时，S^2的观察值s^2往往偏大,

因此拒绝域的形式为: $s^2 \ge k.$

此处 k 的值由下式确定：

$$P\{H_0\text{为真, 拒绝}H_0\} = P_{\sigma^2 \le \sigma_0^2}\{S^2 \ge k\}$$

$$= P_{\sigma^2 \le \sigma_0^2}\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \ge \frac{(n-1)k}{\sigma_0^2}\right\}$$

$$\le P_{\sigma^2 \le \sigma_0^2}\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \ge \frac{(n-1)k}{\sigma_0^2}\right\}. \quad (\text{因为}\sigma^2 \le \sigma_0^2)$$

要使 $P\{H_0\text{为真, 拒绝}H_0\} \le \alpha$, 只需令

$$P_{\sigma^2 \le \sigma_0^2}\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \ge \frac{(n-1)k}{\sigma_0^2}\right\} = \alpha.$$

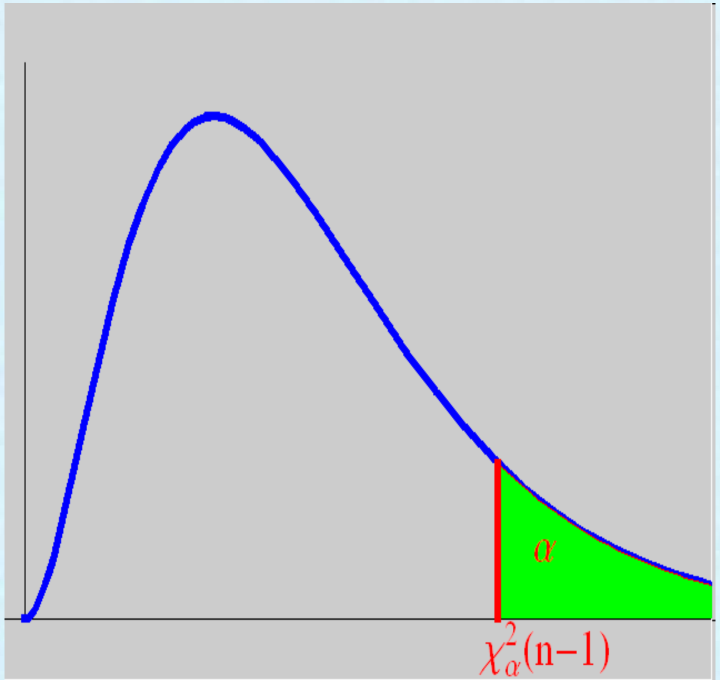
因 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$, $\dfrac{(n-1)k}{\sigma_0^{\ 2}} = \chi_\alpha^2(n-1)$

于是 $k = \dfrac{\sigma_0^{\ 2}}{n-1}\chi_\alpha^2(n-1)$,

右边检验问题的拒绝域为

$s^2 \geq \dfrac{\sigma_0^{\ 2}}{n-1}\chi_\alpha^2(n-1)$,

即 $\chi^2 = \dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^{\ 2}} \geq \chi_\alpha^2(n-1)$.



同理左边检验问题: $H_0: \sigma^2 \geq \sigma_0^{\ 2}$, $H_1: \sigma^2 < \sigma_0^{\ 2}$,

拒绝域为 $\boxed{\chi^2 = \dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0{}^2} \le \chi^2_{1-\alpha}(n-1).}$

上述检验法称为 χ^2 检验法.

例1 某厂生产的某种型号的电池, 其寿命长期以来服从方差 $\sigma^2 = 5000$ 的正态分布, 现有一批这种电池, 从它生产情况来看, 寿命的波动性有所变化. 现随机的取26只电池, 测出其寿命的样本方差 $s^2 = 9200$, 问根据这一数据能否推断这批电池的寿命的波动性较以往的有显著的变化?

(取 $\alpha = 0.02$)

解 本题要求在水平 $\alpha = 0.02$ 下检验假设

$$H_0 : \sigma^2 = 5000, \quad H_1 : \sigma^2 \neq 5000.$$

现在 $\alpha = 0.02,\ n = 26,$

$$\chi^2_{\alpha/2}(n-1) = \chi^2_{0.01}(25) = 44.31,$$

$$\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) = \chi^2_{0.99}(25) = 11.52,$$

$\sigma_0{}^2 = 5000,$ **由(3.1)拒绝域为**

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0{}^2} \leq 11.52, \text{ 或 } \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0{}^2} \geq 44.31.$$

由观察值$s^2 = 9200$得

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{25 \times 9200}{5000} = 46 > 44.314,$$

所以拒绝 H_0，认为这批电池的寿命的波动性较以往的有显著的变化.

二、两个正态总体方差的假设检验

设 $X_1, X_2, \cdots, X_{n_1}$ 为来自正态总体 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 的样本，设 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_1}$ 为来自正态总体 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 的样本，且设两样本独立，其样本方差为 S_1^2, S_2^2.

又设 $\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2$ 均为未知，**现在需要检验假设:**（显著性水平为 α）

$$H_0: \sigma_1^2 \le \sigma_2^2, \qquad H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2,$$

当 H_0 为真时， $E(S_1^2) = \sigma_1^2 \le \sigma_2^2 = E(S_2^2)$,

当H_1为真时, $E(S_1^2)=\sigma_1^2>\sigma_2^2=E(S_2^2)$,

当H_1为真时, 观察值$\dfrac{S_1^2}{S_2^2}$有偏大的趋势,

故拒绝域的形式为$\dfrac{s_1^2}{s_2^2}\geq k$, 常数$k$的值由下式确定:

$$P\{H_0\text{为真, 拒绝}H_0\}=P_{\sigma_1^2\leq\sigma_2^2}\left\{\frac{S_1^2}{S_2^2}\geq k\right\}$$

$$\leq P_{\sigma_1^2\leq\sigma_2^2}\left\{\frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}\geq k\right\},\ (\text{因为}\sigma_1^2/\sigma_2^2\leq 1)$$

要使 $P\{H_0\text{为真, 拒绝}H_0\}\leq\alpha$, 只需令

$$P_{\sigma_1^2 \le \sigma_2^2}\left\{ \frac{S_1^2 / S_2^2}{\sigma_1^2 / \sigma_2^2} \ge k \right\} = \alpha.$$

由第六章§3定理四知

定理四

$$\frac{S_1^2 / S_2^2}{\sigma_1^2 / \sigma_2^2} \sim F(n_1 - 1,\ n_2 - 1).$$

$$k = F_\alpha(n_1 - 1,\ n_2 - 1).$$

即得检验问题的拒绝域为

$$\boxed{F = \frac{s_1^2}{s_2^2} \ge F_\alpha(n_1 - 1,\ n_2 - 1).}$$

上述检验法称为

F 检验法.

例2 设第2节例 2中的两个样本分别来自 总体 $N(\mu_A, \sigma_A^2), N(\mu_B, \sigma_B^2)$, 且两样本独立. **试检验** $H_0: \sigma_A^2 = \sigma_B^2$, $H_1: \sigma_A^2 \neq \sigma_B^2$, 以说明我们假设 $\sigma_A^2 = \sigma_B^2$是合理的.(取显著性水平$\alpha = 0.01$.)

解 此处$n_1 = 13$, $n_2 = 8$, $\alpha = 0.01$, **拒绝域为**

$$\frac{s_A^2}{s_B^2} \geq F_{0.005}(12,7) = 8.18,$$

或

$$\frac{s_A^2}{s_B^2} \leq F_{0.995}(12,7) = \frac{1}{F_{0.005}(7,12)} = \frac{1}{5.52} = 0.18.$$

现在$s_A^2 = (0.024)^2$, $s_B^2 = (0.03)^2$, $s_A^2 / s_B^2 = 0.64$,

$$0.18 < 0.64 < 8.18,$$

故接受H_0,认为两总体方差相等 .两总体方差相等

也称两总体具有方差齐性，这也表明第2节例2

假设两总体方差相等是合理的.

补充例题

若H_0为真，则H_0中$\dfrac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2}$应在1附近波动，则拒绝域为：

$$\frac{s_A^2}{s_B^2} \le k_1 \text{或} \frac{s_A^2}{s_B^2} \ge k_2 (k_1\text{，}k_2\text{为一常数）}$$

令$P_{\sigma_A^2=\sigma_B^2}\{\dfrac{S_A^2}{S_B^2} \le k_1 \text{或} \dfrac{S_A^2}{S_B^2} \ge k_2\} = \alpha$

考虑统计量$F = \dfrac{S_A^2}{S_B^2}\dfrac{\sigma_B^2}{\sigma_A^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$

则$P_{\sigma_A^2=\sigma_B^2}\{\dfrac{S_A^2}{S_B^2} \le k_1 \text{或} \dfrac{S_A^2}{S_B^2} \ge k_2\} = P_{\sigma_A^2=\sigma_B^2}\{\dfrac{S_A^2}{S_B^2}\dfrac{\sigma_B^2}{\sigma_A^2} \le k_1 \text{或} \dfrac{S_A^2}{S_B^2}\dfrac{\sigma_B^2}{\sigma_A^2} \ge k_2\} = \alpha$

则$k_1 = F_{1-\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1), k_2 = F_{\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1),$

拒绝域为：$\dfrac{s_A^2}{s_B^2} \le F_{1-\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1)$或$\dfrac{s_A^2}{s_B^2} \ge F_{\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1)$

三、小结

1. 单个正态总体方差的检验法— χ^2 检验法;

2. 两个正态总体方差的检验法— F 检验法;

正态总体均值、方差的检验法见下表

(显著性水平为 α)

	原假设H_0	检验统计量	备择假设H_1	拒绝域
1	$\mu \le \mu_0$ $\mu \ge \mu_0$ $\mu = \mu_0$ (σ^2已知)	$Z = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$	$\mu > \mu_0$ $\mu < \mu_0$ $\mu \ne \mu_0$	$z \ge z_\alpha$ $z \le -z_\alpha$ $\lvert z \rvert \ge z_{\alpha/2}$
2	$\mu \le \mu_0$ $\mu \ge \mu_0$ $\mu = \mu_0$ (σ^2未知)	$t = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}}$	$\mu > \mu_0$ $\mu < \mu_0$ $\mu \ne \mu_0$	$t \ge t_\alpha(n-1)$ $t \le -t_\alpha(n-1)$ $\lvert t \rvert \ge t_{\alpha/2}(n-1)$
3	$\mu_1 - \mu_2 \le \delta$ $\mu_1 - \mu_2 \ge \delta$ $\mu_1 - \mu_2 = \delta$ (σ_1^2, σ_2^2已知)	$Z = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y} - \delta}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$	$\mu - \mu_0 > \delta$ $\mu - \mu_0 < \delta$ $\mu - \mu_0 \ne \delta$	$z \ge z_\alpha$ $z \le -z_\alpha$ $\lvert z \rvert \ge z_{\alpha/2}$
4	$\mu_1 - \mu_2 \le \delta$ $\mu_1 - \mu_2 \ge \delta$ $\mu_1 - \mu_2 = \delta$ ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$未知)	$t = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y} - \delta}{S_w \sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}}$ $S_w^2 = \dfrac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 2)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$	$\mu - \mu_0 > \delta$ $\mu - \mu_0 < \delta$ $\mu - \mu_0 \ne \delta$	$t \ge t_\alpha(n_1 + n_2 - 2)$ $t \le -t_\alpha(n_1 + n_2 - 2)$ $\lvert t \rvert \ge t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 1)$

	原假设H_0	检验统计量	备择假设H_1	拒绝域
5	$\sigma^2 \le \sigma_0^2$ $\sigma^2 \ge \sigma_0^2$ $\sigma^2 = \sigma_0^2$ (μ未知)	$\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$	$\sigma^2 > \sigma_0^2$ $\sigma^2 < \sigma_0^2$ $\sigma^2 \ne \sigma_0^2$	$\chi^2 \ge \chi_\alpha^2(n-1)$ $\chi^2 \le \chi_{1-\alpha}^2(n-1)$ $\chi^2 \ge \chi_{\alpha/2}^2(n-1)$或 $\chi^2 \le \chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)$
6	$\sigma_1^2 \le \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 \ge \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ (μ_1,μ_2未知)	$F = \dfrac{S_1^2}{S_2^2}$	$\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 \ne \sigma_2^2$	$F \ge F_\alpha(n_1-1,n_2-1)$ $F \le F_{1-\alpha}(n_1-1,n_2-1)$ $F \ge F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)$或 $F \ge F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)$
7	$\mu_D \le 0$ $\mu_D \ge 0$ $\mu_D = 0$ (成对数据)	$t = \dfrac{\overline{D}-0}{S_D/\sqrt{n}}$	$\mu_D > 0$ $\mu_D < 0$ $\mu_D \ne 0$	$t \ge t_\alpha(n-1)$ $t \le -t_\alpha(n-1)$ $\lvert t\rvert \ge t_{\alpha/2}(n-1)$

第六章§3定理四

设 $X_1, X_2, \cdots, X_{n_1}$ 与 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2}$ 分别是具有相同方差的两正态总体 $N(\mu_1,\sigma^2), N(\mu_2,\sigma^2)$ 的样本，且这两个样本互相独立，设 $\overline{X} = \dfrac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} X_i$，

$\overline{Y} = \dfrac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2} Y_i$ 分别是这两个样本的均值，

$$S_1^2 = \frac{1}{n_1 - 1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_i - \overline{X})^2, \quad S_2^2 = \frac{1}{n_2 - 1}\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i - \overline{Y})^2$$

分别是这两个样本的方 差,则有

(1) $\dfrac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1);$

(2) 当$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$时,

$$\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}} \sim t(n_1+n_2-2),$$

其中 $S_w^2=\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}, \quad S_w=\sqrt{S_w^2}.$