

1. 比值法/根值法 正项级数

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} \quad \text{或} \quad \rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n}$$

① $\rho < 1$, 收敛② $\rho > 1$, 发散2. 等价无穷小 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n^p}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 同敛散

泰勒公式.

例 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + (-1)^n}{3^n}$ 收敛于 :

发散

解: ① 法: 根值法 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + (-1)^{n+1}}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{2 + (-1)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \cdot \frac{2 + (-1)^{n+1}}{2 + (-1)^n}$ ✖ 不存在

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2 + (-1)^n}{3^n}} = \frac{1}{3} < 1$$

$$\text{② 法: } \text{比较法} \quad \frac{2 + (-1)^n}{3^n} \leq 3 \cdot \frac{1}{3^n}$$

"小"收敛 \Leftarrow "大"收敛

$$\text{③ 法: } \text{拆项} \quad \frac{2 + (-1)^n}{3^n} = 2 \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{3}\right)^n} + \underbrace{\left(-\frac{1}{3}\right)^n}$$

收 \Leftarrow 收 + 收

例. 讨论 $\sum_{n=1}^{\infty} n! \left(\frac{a}{n}\right)^n$ 的敛散性. ($a > 0$)

解:
$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! \left(\frac{a}{n+1}\right)^{n+1}}{n! \left(\frac{a}{n}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{(n+1)} \cdot \frac{a^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{a^n}{n^n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} a \cdot \underbrace{\left(\frac{n}{n+1}\right)^n}_{1^\infty \text{ 型 I.}}$$

$$= a \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{a}{e}.$$

当 $\rho < 1$ 时 即 $a < e$, 收敛

当 $\rho > 1$ 时 即 $a > e$, 发散

当 $a = e$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty} n! \left(\frac{e}{n}\right)^n$ 发散.

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{e}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} > 1.$$

数列 $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 单调递增.

$$U_{n+1} > U_n > U_{n-1} > \dots > U_1 = e \neq 0.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n > U_1 \neq 0.$$

综上: $a > e$ 收敛; $a \leq e$ 发散

★ 定理: (积分法). $f(x) \geq 0$ 且单调.

$$u_n = f(n), \quad (n=1, 2, \dots)$$

$\{u_n\}$ 单调

则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ 同敛散.

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_1^a f(x) dx$$

★ 例 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^p n}$ $\left\{ \begin{array}{l} p > 1, \text{收敛} \\ p \leq 1, \text{发散} \end{array} \right.$ $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^p}$ $\left\{ \begin{array}{l} p > 1, \text{收敛} \\ p \leq 1, \text{发散} \end{array} \right.$

解: $\left\{ \frac{1}{n \ln^p n} \right\}$ 单调.

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n}$ 与 $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln^p x} dx$ 同敛散.

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln^p x} dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_2^a \frac{1}{x \ln^p x} dx.$$

$$\int_2^a \frac{1}{x \ln^p x} dx = \int_2^a \frac{1}{\ln^p x} d(\ln x).$$

$$= \begin{cases} \ln |\ln x| \Big|_2^a, & p=1. \\ -\frac{1}{p+1} (\ln x)^{-p+1} \Big|_2^a, & p \neq 1 \end{cases}$$

当 $p=1$. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} [\ln |\ln a| - \ln |\ln 2|] = +\infty$

当 $p=1$. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} [\ln |\ln a| - \ln |\ln 2|]$
 发散.

当 $p \neq 1$ 时 $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{1}{-p+1} [(\ln a)^{-p+1} - (\ln 2)^{-p+1}]$

$\frac{1}{(\ln a)^{p-1}} \rightarrow 0 \quad (a \rightarrow +\infty)$ 当 $p > 1$ 时.

$(\ln a)^{1-p} \rightarrow +\infty \quad (a \rightarrow +\infty)$ $p < 1$ 时

综上. 当 $p > 1$ 时. 收敛; $p \leq 1$ 时. 发散.

例. $\sum_{n=2}^{\infty} \sin \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\ln n}$ 发散.

解:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\ln n}$ 发散.

$\sin \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\ln n} \sim \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\ln n} \quad (n \rightarrow \infty)$

$\{\sin \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\ln n}\}$ 单调.

原级数与 $\int_2^{+\infty} \sin \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln x} dx$ 同敛散

例. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\ln n)^2}{n^2}$ 收敛. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^p}$

解:

$\frac{\ln n}{n^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ 收敛
 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^p}$ 发散

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \\
 & \downarrow n \rightarrow \infty \\
 & 0
 \end{aligned}
 \quad
 \begin{aligned}
 & \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n} \quad \text{发散} \\
 & \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{\frac{5}{4}}} \quad \text{收敛}
 \end{aligned}$$

$$\frac{\ln n \cdot \ln n}{n^{\frac{1}{4}} \cdot n^{\frac{1}{4}}} \cdot \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

$$\downarrow n \rightarrow \infty \quad 0 \quad \text{“小”收敛, “大”收敛}$$

二. 交错级数的判别.

定义: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$ 或 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$. ($u_n \geq 0$)

称为交错级数.

例. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$. 发散

★定理. (莱布尼兹法) 只能判断收敛.

若 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ ($u_n \geq 0$)

满足 ①. $\{u_n\}$ 递减.

②. $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

则 级数收敛 且 和 $s \leq u_1$.

证明:

$$u_1 - (u_2 + u_3 - u_4 + u_5 - u_6 + \dots) \leq u_1$$

$$u_1 - (u_1 - u_2) - (u_3 - u_4) - (u_5 - u_6) - \dots \leq u_1$$

$$u_1 - \underbrace{(u_2 - u_3)}_{\geq 0} - \underbrace{(u_4 - u_5)}_{\geq 0} - \underbrace{(u_6 - u_7)}_{\geq 0} - \dots \leq u_1$$

$$S_n = u_1 - \underbrace{(u_2 - u_3)}_{\geq 0} - \underbrace{(u_4 - u_5)}_{\geq 0} - \dots - \begin{cases} (u_{n-1} - u_n)_{\geq 0} \\ (u_{n-2} - u_{n-1}) - u_n_{\geq 0} \end{cases}$$

$$S_n \leq u_1$$

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \leq u_1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n \text{ 收敛 } \Leftrightarrow \{S_n\} \text{ 收敛}$$

$$\Leftrightarrow \{S_{2n}\} \text{ 和 } \{S_{2n+1}\} \text{ 收敛于 } S.$$

$$\begin{aligned} \star S_{2n} &= u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + u_{2n-1} - u_{2n} \\ &= u_1 - \underbrace{(u_2 - u_3)}_{\geq 0} - \dots - \underbrace{(u_{2n-2} - u_{2n-1})}_{\geq 0} - u_{2n} \leq u_1 \\ S_{2n+1} &= S_{2n} + u_{2n+1}. \end{aligned}$$

$$\star \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \quad \text{则} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_{2n} + u_{2n+1}) = S + 0 = S.$$

$$S_2 = (u_1 - u_2)$$

$$S_4 = (u_1 - u_2) + \underbrace{(u_3 - u_4)}_{\geq 0}$$

$$S_6 = (u_1 - u_2) + u_3 - u_4 + \underbrace{(u_5 - u_6)}_{\geq 0}$$

$$\{S_{2n}\} \text{ 单调增且有上界 } u_1 \Rightarrow \{S_{2n}\} \text{ 收敛}$$

$$\text{例 3.1. } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \text{ 收敛}$$

$\{a_n\}$ 递减且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = 0$.

★ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^p}$ 当 $p > 0$ 时, 收敛.

例. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+(-1)^{n+1}}}$ 收敛. $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, u_2 = 1, u_3 = \frac{1}{2}, u_4 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \dots$

解: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ 收敛. $\frac{1}{\sqrt{2}} < 1 > \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}} > \dots$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+(-1)^{n+1}}}}{(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}} = 1$. 不是正项级数. 为原与 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ 同收敛

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+(-1)^{n+1}}}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ 同发散.

$\left\{ \frac{1}{\sqrt{n+(-1)^{n+1}}} \right\}$ 不是单减 不满足莱布尼兹判别法 \therefore 发散

$$(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+(-1)^{n+1}}} = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}}} \quad (1+x)^2.$$

$$\stackrel{||}{a_n} = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} \left[1 + \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right]$$

$$= (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} + \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{2}}} + o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}} = 0$$

$$a_n = b_n + \frac{1}{2} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} + o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$a_n = b_n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \dots \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

$\exists N$, 当 $n > N$ 时

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a_n - b_n) \text{ 正确.}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \text{ 正确.}} = \frac{1}{2}.$$

$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 同收敛 (比较法极限形式).

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ 收敛. (莱布尼兹法.)

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. (性质2).

三. 绝对收敛与条件收敛.

定义: $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛.

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛.

例. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$ 绝对收敛

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ 条件收敛

★ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^p}$ $p > 0$ 收敛. $\frac{p > 1}{0 < p \leq 1}$ 绝对收敛 条件收敛

定理: (柯西收敛原理). 一般项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 收敛} \Leftrightarrow \{s_n\} \text{ 收敛} \Leftrightarrow \{s_n\} \text{ 和 } \{s_{n+p}\} \text{ 收敛}$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N, \text{ 当 } n, m \stackrel{n+p}{> N} \text{ 时, 有}$$

$$|s_n - s_m| < \varepsilon \text{ 恒成立.}$$

$$|u_1 + u_2 + \dots + u_n - u_1 - u_2 - \dots - u_n - u_{n+1} - \dots - u_{n+p}| \\ = |u_{n+1} + \dots + u_{n+p}| < \varepsilon. \quad (\forall p \in \mathbb{N})$$

$$\star \text{ 定理. } \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 绝对收敛} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 收敛.}$$

$$\text{正项级数 } \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \text{ 收敛}$$

$$\text{证明: 求证 } \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 收敛}$$

$$\Leftrightarrow |u_{n+1} + \dots + u_{n+p}| < \varepsilon \quad ?$$

$$\text{已知: } \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \text{ 收敛}$$

$$\Leftrightarrow |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \dots + |u_{n+p}| < \varepsilon. \checkmark$$

$$|u_{n+1} + \dots + u_{n+p}| \leq |u_{n+1}| + \dots + |u_{n+p}| < \varepsilon.$$

$$\star \text{ 判断 } \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 的敛散性.}$$

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \xrightarrow{a \neq 0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 发散.}$$

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \longrightarrow \overline{a_1} \dots \overline{a_n} \dots$$

$$a=0.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \text{ 正项 } \xrightarrow{\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \text{ 收敛}} \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 绝对收敛.}$$

由比值法 \downarrow 发散

其它发散

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 发散.}$$

定义, 柯西, 交错, 性质

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 收敛}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 绝对收敛}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 发散}$$

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} > 1. \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| \neq 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0.$$

例 讨论 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n^p}$ 的敛散性

解: $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{r^n}{n^p} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|r|^n}{n^p}$ 正项级数

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^p} = 1.$$

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|r|^n}{n^p}} = \frac{|r|}{1} = |r|.$$

当 $|r| < 1$ 时 即 $|r| < 1$ 时. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|r|^n}{n^p}$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n^p}$ 绝对收敛

当 $|r| > 1$ 时 即 $|r| > 1$ 时. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|r|^n}{n^p}$ 发散 $\xrightarrow{\text{由比值法}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n^p}$ 发散

当 $|r| = 1$ 时. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$. $p > 1$. 绝对收敛

$p \leq 1$. 发散

当 $p = -1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n^p}$. $p > 1$ 时 绝对收敛
 $0 < p \leq 1$ 时 条件收敛.

例. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散, $\sum_{n=1}^{\infty} (|u_n| + |v_n|) > \underline{\text{发散}}$.

解:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| &\text{ 发散于 } +\infty \\ \sum_{n=1}^{\infty} |v_n| &\text{ 发散于 } +\infty \\ |u_n| + |v_n| &\geq |u_n| \end{aligned}$$

"大" 发散 \Leftarrow "小" 发散

构造:

$$u_n^+ = \frac{|u_n| + u_n}{2} \geq 0$$

$$u_n^- = \frac{|u_n| - u_n}{2} \geq 0.$$

定理:

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n^+, \sum_{n=1}^{\infty} u_n^-$ 绝对收敛.

条件收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n^+, \sum_{n=1}^{\infty} u_n^-$ 发散

定理: 绝对收敛的级数满足加法交换律.

收敛的级数满足加法结合律.

定理: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 绝对收敛 \Rightarrow 任意重排 也绝对收敛

$$(a+b)(c+d) = ac + bd + ad + bc.$$

$$\begin{aligned}
 & (u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots) (v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots) \\
 &= u_1 v_1 + (u_1 v_2 + u_2 v_1) + (u_1 v_3 + u_2 v_2 + u_3 v_1) + \dots
 \end{aligned}$$