北京邮电大学 2022—2023 学年第二学期

《 高等数学 A(下)》期末考试试题（A 卷）

参考答案

一、填空题（每小题 3 分，共 30 分）

1. 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$的敛散性是_________（填写：条件收敛、绝对收敛或发散）；

   填： 条件收敛

2. 级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$的敛散性是_________（填写：条件收敛、绝对收敛或发散）；

   填： 发散

3. 幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(-2)^n+3^n}$的收敛半径$R=$__________；

   填： 3

4. 设函数$z=e^{\frac{x}{y^2}}$，则$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}=$_____________；

   填： -4e

5. 已知函数$z=z(x,y)$由方程$x^3+y^3+z^3+3xyz+7=0$确定，则$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,1)}=$______；

   填： $-\frac{1}{4}$

6. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}dy\int_0^y\frac{\cos x}{\pi-2x}dx=$__________；

   填： $\frac{1}{2}$

7. 设 Ω 是由圆柱面$x^2+y^2=1$和平面$z=0$、$z=1$所围区域，则

   $\iiint\limits_{\Omega}z^2dxdydz=$_____；

   填： $\frac{\pi}{3}$

8. 设 Γ 是圆柱面$x^2+y^2=1$与平面$z=1$的交线，从 z 轴正向看去，Γ 为逆时针方向，则曲线积分$\int_\Gamma ydx-xdy+zdz=$__________；

   填： -2π

9. 设 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 被平面 $z=\sqrt{3}$ 截出的球顶部分，则曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} zdS=$________;

填： 2π

10. 已知向量场 $\overrightarrow{A}(x,y,z)=\left(xyz-x^2,xyz-y^2,xyz-z^2\right)$，则 $div\left(rot\,\overrightarrow{A}\right)=$_______.

填： 0

二、(10 分)设函数 $z=z(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，求常数 λ，使得在变换

$u=x-y$，$v=x+\lambda y$ 之下，可将方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+4\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ 化为 $\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$.

解： $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial z}{\partial u}+\lambda\frac{\partial z}{\partial v}$；

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\lambda\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}-\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}+\lambda\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=-\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+(\lambda-1)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\lambda\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-\lambda\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}-\lambda\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}+\lambda^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-2\lambda\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\lambda^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

代入方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+4\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ 得

$$-2(\lambda+1)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\left(3\lambda^2+4\lambda+1\right)\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0,$$

依题意

$\begin{cases}-2(\lambda+1)\neq 0\\ 3\lambda^2+4\lambda+1=0\end{cases}$，解得 $\lambda=-\frac{1}{3}$.

三、求函数 $z=2x+3y$ 在椭圆区域 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+xy+y^2\leq 3\right\}$ 上的最大值与最小值.

解： 函数 $z=2x+3y$ 在有界闭区域 D 上连续，所以函数在 D 上可取最小值与最大值.

因为 $z_x=2,z_y=3$，函数在 D 内无驻点，所以 $z=2x+3y$ 在闭区域边界 ∂D：

$x^2+xy+y^2=3$ 上取得最值.

构造拉格朗日函数

$$L(x,y,\lambda)=2x+3y+\lambda\left(x^2+xy+y^2-3\right)$$

令$\begin{cases} L_x=2+\lambda(2x+y)=0 \\ L_y=3+\lambda(x+2y)=0 \\ L_\lambda=x^2+xy+y^2-3=0 \end{cases}$，

解得可能极值点$\left(\dfrac{1}{\sqrt{7}},\dfrac{4}{\sqrt{7}}\right)$，$\left(-\dfrac{1}{\sqrt{7}},-\dfrac{4}{\sqrt{7}}\right)$；

$$z\left(\frac{1}{\sqrt{7}},\frac{4}{\sqrt{7}}\right)=2\sqrt{7},\ z\left(-\frac{1}{\sqrt{7}},-\frac{4}{\sqrt{7}}\right)=-2\sqrt{7}.$$

于是所求最大值为$2\sqrt{7}$，最小值为$-2\sqrt{7}$.

四、求圆柱面$(x-1)^2+y^2=1$被平面$z=0$和抛物面$z=x^2+y^2$所截下的部分柱面的面积.

解：所求柱面面积

$A=\int_L zds=\int_L\left(x^2+y^2\right)ds$，其中$L$：$(x-1)^2+y^2=1$.

L的参数方程为$\begin{cases} x=1+\cos t \\ y=\sin t \end{cases}(0\le t\le 2\pi)$，则

$$ds=\sqrt{\left[x'(t)\right]^2+\left[y'(t)\right]^2}dt=\sqrt{(-\sin t)^2+(\cos t)^2}dt=dt,$$

$$A=\int_L\left(x^2+y^2\right)ds=\int_0^{2\pi}2(1+\cos t)dt=4\pi.$$

方法2：L的极坐标方程为$\rho=2\cos\theta\left(-\dfrac{\pi}{2}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\right)$，则

$$ds=\sqrt{\rho^2+\rho'^2}d\theta=\sqrt{(2\cos\theta)^2+(-2\sin\theta)^2}d\theta=2d\theta.$$

$$A=\int_L\left(x^2+y^2\right)ds=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(2\cos\theta)^2\cdot 2d\theta$$

$$=16\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta=16\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=4\pi.$$

五、计算三重积分$I=\iiint\limits_\Omega\left[xy^2f\left(y^2+z^2\right)+\left(x^2+y^2\right)e^z\right]dxdydz$，其中$f(u)$为连续函数，

Ω是抛物面$z=x^2+y^2$与平面$z=1$、$z=2$所围空间闭区域.

解：根据对称性，$\iiint\limits_\Omega xy^2f\left(y^2+z^2\right)dxdydz=0$.

$$I=\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2\right)e^z dxdydz$$

$$=\int_1^2 dz\iint\limits_{x^2+y^2\le z}\left(x^2+y^2\right)e^z dxdy$$

$$=\int_1^2 dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{z}}\rho^2 e^z\cdot\rho d\rho$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_1^2 z^2e^z dz=\frac{\pi}{2}\left(z^2-2z+2\right)e^z\Big|_1^2=\pi e\left(e-\frac{1}{2}\right).$$

六、计算曲线积分 $I=\int_L\left(\cos x-x^2y\right)dx+\left(\sin y+xy^2\right)dy$，其中 L 是半圆周 $y=\sqrt{2x-x^2}$、$y=\sqrt{4x-x^2}$ 和直线 $\sqrt{3}x-y=0$、$x-\sqrt{3}y=0$ 所围区域 D 的正向边界曲线.

解：令 $P=\cos x-x^2y$，$Q=\sin y+xy^2$，则 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=x^2+y^2$.

根据格林公式，$I=\iint\limits_D\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$

$$=\iint\limits_D\left(x^2+y^2\right)dxdy$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_{2\cos\theta}^{4\cos\theta}\rho^2\cdot\rho d\rho=60\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\cos^4\theta d\theta$$

$$=15\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{3}{2}+2\cos2\theta+\frac{1}{2}\cos4\theta\right)d\theta$$

$$=15\left(\frac{3}{2}\theta+\sin2\theta+\frac{1}{8}\sin4\theta\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{15}{4}\left(\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

七、求常数 a 和 b,使得曲线积分 $\int_L\left(axy^3-y^2\cos x\right)dx+\left(by\sin x+3x^2y^2\right)dy$ 在整个 xOy 平面上与路径无关，并计算积分 $\int_{(0,0)}^{(\pi,1)}\left(axy^3-y^2\cos x\right)dx+\left(by\sin x+3x^2y^2\right)dy$ 的值.

解：令 $P(x,y)=axy^3-y^2\cos x$，$Q(x,y)=by\sin x+3x^2y^2$.

要使曲线积分 $\int_L\left(axy^3-y^2\cos x\right)dx+\left(by\sin x+3x^2y^2\right)dy$ 在整个 xOy 平面上与路径无关，须 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$,

即 $3axy^2-2y\cos x=by\cos x+6xy^2$，所以

$a=2,\ b=-2$.

$$\int_{(0,0)}^{(\pi,1)}\left(2xy^3-y^2\cos x\right)dx+\left(-2y\sin x+3x^2y^2\right)dy$$

$$=\int_0^{\pi}0\,dx+\int_0^1\left(-2y\sin\pi+3\pi^2y^2\right)dy=\pi^2$$

或 $\displaystyle\int_{(0,0)}^{(\pi,1)}\left(2xy^3-y^2\cos x\right)dx+\left(-2y\sin x+3x^2y^2\right)dy$

$$=\left(x^2y^3-y^2\sin x\right)\Big|_{(0,0)}^{(\pi,1)}=\pi^2.$$

八、计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}\left(x-x^3\right)dydz+\left(y-y^3\right)dzdx+\left(z-z^3\right)dxdy$，其中 Σ 是半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的上侧.

解：作辅助面 $\Sigma_1:z=0\ \left(x^2+y^2\le 1\right)$，取下侧，$\Sigma$ 和 Σ_1 构成一个闭曲面，其法向量指向外侧，此闭曲面所围区域记为 Ω.

$$I=\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}\left(x-x^3\right)dydz+\left(y-y^3\right)dzdx+\left(z-z^3\right)dxdy$$
$$-\iint\limits_{\Sigma_1}\left(x-x^3\right)dydz+\left(y-y^3\right)dzdx+\left(z-z^3\right)dxdy$$

根据高斯公式，有

$$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}\left(x-x^3\right)dydz+\left(y-y^3\right)dzdx+\left(z-z^3\right)dxdy$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}\left[3-3\left(x^2+y^2+z^2\right)\right]dv$$

$$=3\cdot\frac{2\pi}{3}-3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d\varphi\int_0^1 r^2\cdot r^2dr$$

$$=2\pi-\frac{6\pi}{5}=\frac{4\pi}{5}.$$

因为 Σ_1 在 yOz 坐标面和 zOx 坐标面上投影都零，所以

$\iint\limits_{\Sigma_1}\left(x-x^3\right)dydz=0$，$\iint\limits_{\Sigma_1}\left(y-y^3\right)dzdx=0$，而

$\iint\limits_{\Sigma_1}\left(z-z^3\right)dxdy=\iint\limits_{x^2+y^2\le1}\left(0-0^3\right)dxdy=0$，于是

$$\iint\limits_{\Sigma_1}\left(x-x^3\right)dydz+\left(y-y^3\right)dzdx+\left(z-z^3\right)dxdy=0$$

所以，$I=\dfrac{4\pi}{5}-0=\dfrac{4\pi}{5}$.