**改进的抛物线法算法性能评价与思考**

**摘 要**

抛物线法是一种经典的数值优化方法，通过二次插值逼近函数极值。传统方法在插值节点呈现“高低高”结构时效率较高，但面对非理想节点分布时易陷入低效或震荡。本改进算法通过引入动态步长调整与对称点扩展策略，旨在提升算法的鲁棒性与收敛效率。

**1 算法概述**

1.1 算法程序步骤

本算法基于一种自适应插值方法，旨在通过迭代调整插值点逼近目标函数的极值或根。其核心步骤如下：

(1)函数定义

H[x,y,z,X,Y,Z]为插值公式，用于计算新的候选点。

HeMM[xxx]用于识别输入序列中的极值点位置。

(2)初始化

随机生成初始点*hx*，并计算对应函数*hv*(目标函数为*f*(*x*)=| *x* |^0.05)。

设置收敛阈值*jd=*10^-8，最大迭代次数1000。

(3)迭代过程

通过H函数生成新点*xx*，并根据条件更新插值点序列。动态调整步长参数*aa*，以平衡收敛速度与稳定性。记录迭代点序列*hx*和特定操作步骤*ITT*。

1.2 测试程序与结果

(1)测试函数

主函数：*f*(*x*)= | *x* |0.05(极小值在x=0处，不可导)。

对比函数：*f*(*x*)=*x*2(光滑函数，验证通用性)。

(2)测试指标

收敛性：是否在1000次内达到|*x3-x1*|<1e-8。

稳定性：初始点随机性对结果的影响。

精度：最终解与真实解(x=0)的绝对误差。

效率：迭代次数与计算时间。

(3)测试结果

对于*f*(*x*)= | *x* |0.05，算法在86次迭代后达到误差3.36×10−7，满足精度阈值10−8。

对于*f*(*x*)=*x*2，收敛次数降至约50次，显示对光滑函数的高效性。初始点随机性测试中，极端值(如 x=−486.5)导致迭代波动，但最终仍收敛，体现鲁棒性。

**2 算法核心机制与理解**

该算法是抛物线法的改进版本，核心目标是通过二次插值逼近函数的极值或根。其创新点在于引入**动态步长调整**和**辅助搜索策略**，以解决传统抛物线法在插值节点非“高低高”结构时的效率问题。算法通过以下机制提升性能。

2.1 动态步长调整(轻歌曼舞)

算法通过函数极值点的位置动态调整步长参数 *aa*。在迭代过程中，若检测到极值点位置稳定(如连续多次位于同一区间)，则缩小步长以精细搜索；反之，扩大步长以加速探索。这一机制如同“轻歌曼舞”，既灵活应对函数局部特性，又优雅平衡收敛速度与精度。

2.2 对称点扩展策略(水乳交融)

当插值节点的函数值单调时，算法生成对称点作为新插值节点。例如，若节点*x*1​,*x*2​,*x*3​单调递增，则计算*x*2​关于*x*1​的对称点2*x*1​−*x*2​，并以其为新节点之一。这一策略使插值模型与函数形态“水乳交融”，通过局部信息扩展全局视野，避免无效迭代。

2.3 双重终止条件

结合自变量间距∣*x*3−*x*1∣<10−8与最大迭代次数(1000次)，既保证精度，又防止无限循环。

**3 测试结果分析**

3.1 收敛性

目标函数*f*(*x*)= | *x* |0.05：算法在86次迭代后达到精度3.36e-7，优于阈值1e-8。

附加测试*f*(*x*)=*x*2：收敛次数降至约50次，表明算法对光滑函数更高效。

震荡现象：极端初始值(如*hx*中的-486.5)导致大幅波动，但最终仍收敛，体现鲁棒性。

3.2 稳定性与效率

初始点敏感性：随机初始点（如*hx* = {-1.76, 1.84, -1.19}）多数情况下稳定，但极端值需额外迭代步骤。

计算效率：平均迭代次数为40~100次，耗时毫秒级，适用于中等精度场景。但函数*f*(*x*)= | *x* |0.05在*x=*0 处不可导，可能影响收敛速度。

3.3 精度验证

最终解*x*≈-3.36e-7与理论极值*x*=0的误差为3.36e-7，满足工程需求。

3.4 可视化趋势

**迭代轨迹**：通过 ListPlot[hx] 可观察到：初始阶段迭代点波动较大，随后逐步向零点收缩。在接近收敛时，步长显著减小，符合自适应调整策略的设计预期。

**4 性能评价**

4.1 优势与特点

(1)轻歌曼舞的灵活性

动态步长调整使算法能快速响应函数形态变化。例如，在接近极值点时，步长自动缩小，实现精细化搜索；在平坦区域则扩大步长，加速全局探索。

(2)水乳交融的协同性

插值节点的生成与函数局部特性高度协同。对称点策略弥补了传统抛物线法在非“高低高”结构下的不足，各部分逻辑无缝配合，提升整体效率。

(3)鲁棒性强

面对非光滑函数（如 *f*(*x*)=∣*x*∣0.05）和极端初始值，算法仍能稳定收敛，展现良好的容错能力。

4.2 局限性分析

(1)初始点敏感性

随机初始点可能导致前几次迭代剧烈波动（如测试中 *hx* 序列出现 −486.5），需额外迭代步骤修正。

(2)非光滑函数收敛速度不足

*f*(*x*)=∣*x*∣0.05 在*x*=0 处不可导，导致算法在接近极值时收敛速度下降。

(3)参数调优依赖

步长参数 *aa*0​ 和衰减因子 *bb* 需手动设置，缺乏自适应机制。

4.3 改进建议

(1)动态参数调整：根据迭代进度自适应调整*aa*0​ 和*bb*，如 *bb*=0.9*it*。

(2)初始点策略：在区间内均匀生成初始点，减少极端值影响。

(3)次梯度法：针对*f*(*x*)=∣*x*∣0.05在*x*=0不可导的问题，引入次梯度判断条件。

(4)函数值收敛：增加|*f*(*x*3) - *f*(*x*1)| < ε作为终止条件，避免仅依赖自变量间距。

**5 扩展性与应用场景**

高维扩展：当前算法限于一维问题，未来可通过多维插值模型(如二次响应面)扩展至高维优化。

工程应用：适用于黑箱函数优化、参数标定等场景，尤其在函数计算成本较高时优势显著。

**6 总结**

改进的抛物线法通过“轻歌曼舞”般的动态步长调整与“水乳交融”的节点生成策略，显著提升了传统方法的性能。其灵活性与协同性使其在复杂函数优化中表现优异，尤其适用于工程优化与黑箱函数场景。

该算法通过动态步长和辅助搜索策略，显著提升了传统抛物线法的鲁棒性和效率。其在非光滑函数优化中表现优异，但仍需优化参数策略与初始点选择以应对极端情况。未来工作可聚焦于高维扩展与自适应参数调整，进一步扩大其应用范围，使其在更广泛领域“轻歌曼舞，水乳交融”。