**数学建模第八次作业**

**李昊伦2023211595**

**问题一：核武器竞赛模型中的安全区域存在性分析**

**1. 模型背景与修正的深入解释**

**原模型的局限性**

在原模型中，安全条件的核心假设是“存活核弹数的期望值不低于设定值”。这一假设简化了现实中的不确定性，但忽略了风险控制。例如，若甲方拥有 枚核弹，乙方拥有 枚核弹，且 ，则存活核弹的期望值为 ，远低于 。此时，期望值准则显然无法满足实际需求。

**修正模型的核心改进**

修正模型将安全条件从期望值转为概率约束，要求存活核弹数不少于设定值的概率不低于某一阈值（如0.9）。这一改进更贴近实际战略需求，因为国家安全需要的是“高概率下的确定性”，而非“平均意义上的达标”。

**数学形式化**

修正后的定解条件为二项分布的累积概率：

甲方条件：存活核弹数 的概率 ，即

乙方条件类似，需满足：

**2. 安全曲线的数值特性与求解方法**

**二项分布的特性分析**

对于甲方安全曲线，当 增加时，每枚核弹的存活概率 指数下降。为满足概率条件，甲方需大幅增加核弹数量 。例如：

若 ，则单枚核弹存活概率为 。

若 ，需找到最小 使得 。通过二项分布计算，可能需要 。

**数值模拟的详细步骤**

**（1）初始化参数**：设定 和概率阈值（如0.9）。

**（2）迭代求解**：对每个 ，从 开始逐步增加 ，计算累积概率 ，直至满足条件。

**（3）优化算法**：采用二分法加速求解。例如，在区间 内搜索最小 。

**示例：参数对安全曲线的影响**

**案例1**：

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 最小 | 存活概率 | 所需核弹数 |
| 5 | 15 |  |  |
| 10 | 25 |  |  |
| 15 | 40 |  |  |

**结论**： 随 指数增长，验证 的规律。

**3. 安全区域存在性的严格分析**

**无差别曲线的相交条件**  
双方安全区域 的存在性需满足方程组：

该方程组的解 即为安全区域的边界点。

**参数敏感性分析**

**（1）防御效率 的影响**：

若 ，双方需大幅增加核弹数，曲线快速上升，可能无交点。

若 ，曲线平缓，更易相交形成有界区域。

**（2）初始阈值 的影响**：

当 ，曲线可能无法相交，表明高初始需求导致安全区域不存在。

**数值验证示例**  
设 ，通过迭代法求解：

初始化 。

计算 。

计算 。

发现 ，表明曲线发散，安全区域不存在。

**结论**

安全区域的存在性高度依赖参数组合：

**防御效率低**（）**或初始阈值高**：安全区域为空，核竞赛无限持续。

**防御效率适中且初始阈值合理**：存在有界安全区域，但需通过数值模拟具体验证。

**问题二：战争模型中的混合作战分析与综合作战实力评估**

**1. 混合作战模型的详细求解**

**模型假设的军事背景**

**甲方（游击方）**：

采用分散战术，减员率与双方兵力乘积相关（），反映敌方火力覆盖面积与己方兵力密度的影响。

**乙方（正规军）**：

采用集中战术，减员率仅与敌方兵力相关，（），体现线性消耗规律。

**微分方程的推导与求解**

**（1）分离变量法**：  
联立方程消去时间 ：

分离变量并积分：

**（2）初始条件代入**：  
设初始兵力为 ，则积分常数 ，

得到：

**（3）胜负条件分析**：  
当乙方兵力降为零时（），解得甲方剩余兵力：

甲方获胜条件为：

**物理意义与军事启示**

**非线性损耗**：甲方需以初始兵力补偿乙方兵力的平方项，体现游击战对集中火力的敏感性。

**参数影响**：若乙方火力强度 翻倍，甲方需初始兵力 翻倍或效率 提升4倍以维持平衡。

**2. 综合作战实力的柯布-道格拉斯函数解释**

**统一模型的构建逻辑**  
柯布-道格拉斯函数形式为：

其中：

：射击率（装备射速）。

：命中率（士兵素质）。

：单弹杀伤面积（武器威力）。

：活动区域面积（地理优势）。

：士兵数量。

**不同作战形式的具体参数化**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 作战形式 | 战斗力公式 | 柯布-道格拉斯参数 | 军事意义 |
| 正规战 |  |  | 兵力规模效应显著，增兵1倍战力提升3倍 |
| 游击战 |  |  | 地理分散与武器覆盖面积主导 |
| 混合作战 |  | （依赖双方兵力） | 非线性交互，需平衡兵力与火力 |

**经济学类比的深入分析**

**（1）要素替代弹性**：

正规战中，士兵数量弹性为2，表明兵力是最有效的增强战斗力的途径。

游击战中，各要素弹性均为1，说明需均衡提升射击率、杀伤面积和活动区域。

**（2）规模报酬特性**：

正规战为规模报酬递增（），游击战为规模报酬不变（）。

**现代战争中的应用案例**

**案例：越南战争**

越南（游击方）利用丛林地形（ 大）抵消美军（正规军）的装备优势（ 高），满足 ，最终拖入持久战。

**3. 模型局限性与扩展方向**

**局限性**

**（1）忽略非战斗减员与增援**：实际战争中疾病、逃亡和外部增援显著影响战局。

**（2）线性假设简化**：真实火力交互可能存在更复杂的非线性关系。

**扩展方向**

**（1）引入时变参数**：例如 和 反映装备损耗与战术调整。

**（2）随机微分方程**：考虑战场不确定性，如天气、地形突变的影响。

**总结**

**1.核武器竞赛模型**

安全区域的存在性取决于防御效率与初始阈值的平衡，需通过数值模拟具体分析。

修正模型（概率约束）更符合实际战略需求，但结论仍警示核竞赛的高风险性。

**2.战争模型**

混合作战胜负条件 揭示了非线性消耗规律。

柯布-道格拉斯函数通过参数弹性统一不同作战形式，为军事资源配置提供理论框架。

**最终建议**

在核竞赛中，各国需通过技术手段提高防御效率（如反导系统），而非盲目增加核弹数量。

在常规战争中，混合战术需灵活平衡兵力规模与地理优势，避免陷入消耗战陷阱。