

算法设计与分析

代码背诵

李昊伦

2025.12

1 时间复杂度与渐近符号

1.1 时间复杂度的基本概念

设算法输入规模为 n , 输入实例为 I , 算法在输入 I 上的运行时间记为 $T(I)$ 。

1. 最坏情况时间复杂度: $T_{\max}(n) = \max_{|I|=n} T(I)$.

解释: 在所有规模为 n 的输入中, 选取运行时间最长的那个输入, 其运行时间作为算法在规模 n 下的时间复杂度。

意义: 最坏情况时间复杂度给出了算法性能的上界, 是算法分析中最常用、最保守、也是最安全的度量方式。

2. 最好情况时间复杂度: $T_{\min}(n) = \min_{|I|=n} T(I)$.

解释: 在所有规模为 n 的输入中, 选取运行时间最短的那个输入。

说明: 最好情况通常过于理想, 不能反映算法的真实性能, 因此在理论分析中参考价值较小。

3. 平均情况时间复杂度: $T_{\text{avg}}(n) = \sum_{|I|=n} P(I) T(I)$.

其中 $P(I)$ 表示输入 I 出现的概率, 且满足 $\sum_{|I|=n} P(I) = 1$.

解释: 平均情况时间复杂度是对所有输入运行时间的加权平均。

说明: 平均情况分析通常需要对输入分布作概率假设, 分析过程复杂, 因此在实际算法分析中使用较少。

1.2 渐近符号的定义

渐近符号用于刻画当 $n \rightarrow \infty$ 时, 函数增长速度的数量级, 忽略常数因子和低阶项。

1. 大 O 记号 (渐近上界): $f(n) = O(g(n))$ 当且仅当存在正常数 $c > 0$ 和自然数 n_0 , 使得

$$\forall n \geq n_0, \quad 0 \leq f(n) \leq c g(n).$$

解释: 当 n 足够大时, 函数 $f(n)$ 的增长速度不会超过 $g(n)$ 的某个常数倍。

含义: 大 O 记号给出了函数增长速度的上界。

2. Ω 记号 (渐近下界): $f(n) = \Omega(g(n))$ 当且仅当存在正常数 $c > 0$ 和自然数 n_0 , 使得

$$\forall n \geq n_0, \quad f(n) \geq c g(n).$$

解释: 当 n 足够大时, 函数 $f(n)$ 的增长速度至少不小于 $g(n)$ 的某个常数倍。

含义: Ω 记号给出了函数增长速度的下界。

3. Θ 记号 (精确渐近界): $f(n) = \Theta(g(n))$ 当且仅当 $f(n) = O(g(n))$ 且 $f(n) = \Omega(g(n))$ 。等价地, 存在正常数 $c_1, c_2 > 0$ 和自然数 n_0 , 使得

$$\forall n \geq n_0, \quad c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n).$$

解释: 函数 $f(n)$ 与 $g(n)$ 具有相同的渐近增长阶, 二者在数量级上是等价的。

4. 小 o 记号 (非紧上界): $f(n) = o(g(n))$ 当且仅当

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0.$$

解释: $f(n)$ 的增长速度严格慢于 $g(n)$, 即 $f(n)$ 相对于 $g(n)$ 可以忽略。

5. 小 ω 记号 (非紧下界): $f(n) = \omega(g(n))$ 当且仅当

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = +\infty.$$

解释: $f(n)$ 的增长速度严格快于 $g(n)$ 。

1.3 渐近符号的运算性质

1. 加法法则: $O(f(n)) + O(g(n)) = O(\max\{f(n), g(n)\})$.

解释: 多个子过程顺序执行时, 总时间复杂度由增长速度最快的一项决定。

2. 乘法法则: $O(f(n)) \cdot O(g(n)) = O(f(n)g(n))$.

解释: 当一个过程嵌套在另一个过程中执行时, 时间复杂度等于二者复杂度的乘积。

3. 常见等价关系: $O(f(n)) = O(cf(n)), c > 0$.

$\log_a n = \Theta(\log_b n), a, b > 1$.

说明: 渐近分析中忽略常数因子与对数底数的差异。

1.4 上述定理证明

1. 证明: $O(f) + O(g) = O(f + g)$

设 $F(n) = O(f(n))$, 则存在自然数 n_1 与正常数 $c_1 > 0$, 当 $n \geq n_1$ 时有

$$F(n) \leq c_1 f(n).$$

同理, 若 $G(n) = O(g(n))$, 则存在自然数 n_2 与正常数 $c_2 > 0$, 当 $n \geq n_2$ 时有

$$G(n) \leq c_2 g(n).$$

当 $n \geq n_0 := \max\{n_1, n_2\}$ 时, 两式同时成立, 因此

$$F(n) + G(n) \leq c_1 f(n) + c_2 g(n).$$

令

$$c_3 = \max\{c_1, c_2\},$$

则有

$$c_1 f(n) + c_2 g(n) \leq c_3 f(n) + c_3 g(n) \leq c_3 (f(n) + g(n)).$$

于是当 $n \geq n_0$ 时

$$F(n) + G(n) \leq c_3 (f(n) + g(n)),$$

从而当 $n \geq n_0$ 时

$$F(n) + G(n) \leq c_3 (f(n) + g(n)),$$

因此

$$O(f(n)) + O(g(n)) = O(f(n) + g(n)).$$

2. 由 $O(f(n)) + O(g(n)) = O(f(n) + g(n))$ 推出 $O(f(n)) + O(g(n)) = O(\max\{f(n), g(n)\})$ 已证

$$O(f(n)) + O(g(n)) = O(f(n) + g(n)).$$

因此存在正常数 $C_3 > 0$ 与自然数 n_0 , 使得当 $n \geq n_0$ 时

$$O(f(n)) + O(g(n)) \leq C_3 (f(n) + g(n)).$$

又因为对任意 n (默认 $f(n), g(n) \geq 0$) 都有

$$f(n) + g(n) \leq 2 \max\{f(n), g(n)\},$$

代入上式得当 $n \geq n_0$ 时

$$O(f(n)) + O(g(n)) \leq 2C_3 \max\{f(n), g(n)\}.$$

由于大 O 记号忽略正常数倍，故

$$O(f(n)) + O(g(n)) = O(\max\{f(n), g(n)\}).$$

3. 证明: $O(f(n)) \cdot O(g(n)) = O(f(n)g(n))$

令 $f_1(n) = O(f(n))$ ，则存在自然数 n_1 与正常数 $c_1 > 0$ ，当 $n \geq n_1$ 时有

$$f_1(n) \leq c_1 f(n).$$

同理，若 $g_1(n) = O(g(n))$ ，则存在自然数 n_2 与正常数 $c_2 > 0$ ，当 $n \geq n_2$ 时有

$$g_1(n) \leq c_2 g(n).$$

当 $n \geq n_0 := \max\{n_1, n_2\}$ 时，两式同时成立，相乘得到

$$f_1(n) g_1(n) \leq (c_1 f(n))(c_2 g(n)) = c_3 f(n)g(n),$$

其中

$$c_3 = c_1 c_2.$$

因此当 $n \geq n_0$ 时

$$f_1(n) g_1(n) \leq c_3 f(n)g(n),$$

从而

$$O(f(n)) \cdot O(g(n)) = O(f(n)g(n)).$$

2 递归与分治

2.1 阶乘函数 (Factorial)

定义与递归式: 阶乘用于表示从 1 到 n 的连乘积 (约定 $0! = 1$): $n! = \prod_{k=1}^n k$ 。递归定义通常写成:

$$n! = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ n \cdot (n-1)!, & n > 0. \end{cases}$$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdots \cdot (n-1) \cdot n = n \cdot (1 \cdot 2 \cdots \cdot (n-1)) = n \cdot (n-1)!.$$

递归计算的时间复杂度: 若用递归实现, 每次调用把 n 减 1: $T(n) = T(n-1) + O(1)$, 展开得 $T(n) = O(n)$ 。递归深度为 n , 因此额外栈空间也为 $O(n)$ 。

等价的迭代写法: 循环从 1 乘到 n , 时间仍为 $O(n)$, 空间可做到 $O(1)$ 。

2.2 斐波那契数列

$$F(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 1, & n = 1, \\ F(n-1) + F(n-2), & n > 1. \end{cases}$$

代码: if ($n \leq 1$) return 1; else return $F(n-1)+F(n-2)$;

朴素递归时间复杂度: 设递归实现的运行时间为 $T(n)$, 则 $T(n) = T(n-1) + T(n-2) + O(1)$ 。它与斐波那契增长同阶, 解的数量级为指数级: $T(n) = \Theta(\varphi^n)$, $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 。因此朴素递归在 n 稍大时就会爆炸性变慢。

2.3 Ackermann 函数 (双递归函数)

$$A(1, 0) = 2,$$

$$A(0, m) = 1, \quad m \geq 0,$$

$$A(n, 0) = n + 2, \quad n \geq 2,$$

$$A(n, m) = A(A(n-1, m), m-1), \quad m \geq 1.$$

2.4 排列问题

```

1 void Perm(Type list[], int k, int m) {
2     if (k == m) { // 递归终止条件: 只剩一个元素
3         for (int i = 0; i <= m; i++)
4             cout << list[i];
5         cout << endl;
6     }
7     else { // 递归生成排列
8         for (int i = k; i <= m; i++) {
9             Swap(list[k], list[i]); // 交换元素到当前位置k
10            Perm(list, k + 1, m); // 递归生成剩余元素的排列
    
```

```

11         Swap(list[k], list[i]); // 恢复原始顺序(回溯)
12     }
13 }
14 }
15 inline void Swap(Type &a, Type &b) {
16     Type temp = a;
17     a = b;
18     b = temp;
19 }
```

时间复杂度：全排列的总数为 $n!$ ，任何生成全部排列的算法，其时间复杂度至少为 $\Omega(n!)$.

2.5 整数划分问题

问题定义：把正整数 n 表示成若干个正整数之和，且加数不考虑顺序，称为 n 的一个整数划分。

```

1 int q(int n, int m) {
2     if ((n < 1) || (m < 1)) return 0; // 非法输入返回0
3     if ((n == 1) || (m == 1)) return 1; // 基准情况
4     if (n < m) return q(n, n); // 划分数不能超过n本身
5     if (n == m) return 1 + q(n, n-1);
6     if (n > m) return q(n, m-1) + q(n-m, m);
```

2.6 求解线性递推关系

问题描述：

给定递推关系

$$\begin{cases} X_{n+1} = X_n + 12X_{n-1}, & n \geq 1, \\ X_0 = 1, \quad X_1 = 0.5. \end{cases}$$

判断递推类型 该递推关系只包含 X_{n+1}, X_n, X_{n-1} ，系数为常数，且右端无常数项，因此是二阶常系数齐次线性递推关系。

(1) 写出特征方程

设 $X_n = r^n$ ，代入得 $r^{n+1} = r^n + 12r^{n-1}$.

两边除以 r^{n-1} 得 $r^2 = r + 12$ ，即 $r^2 - r - 12 = 0$.

(2) 求解特征方程

$(r - 4)(r + 3) = 0, r_1 = 4, r_2 = -3$.

(3) 通解形式

$X_n = C_1(-3)^n + C_24^n$.

(4) 利用初始条件求常数 $\begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ -3C_1 + 4C_2 = 0.5. \end{cases}$

(5) 解方程组 $C_1 = 0.5, C_2 = 0.5$.

(6) 最终通项公式

$$X_n = 0.5(-3)^n + 0.5 \cdot 4^n$$

理解要点总结：假设指数解；构造特征方程；不同特征根对应指数项线性组合；初始条件用于唯一确定常数。

2.7 汉诺塔问题 (Tower of Hanoi)

问题描述: 将 n 个大小不同的圆盘从起始柱 a 移动到目标柱 b , 在移动过程中可以借助辅助柱 c , 并且必须满足以下规则: 每次只能移动一个圆盘; 任意时刻, 大圆盘不能放在小圆盘上面。

```

1 void hanoi(int n, int a, int b, int c) {
2     if (n > 0) {
3         hanoi(n - 1, a, c, b); // 将n-1个盘子从a移到c（借助b）
4         move(a, b);           // 将第n个盘子从a直接移到b
5         hanoi(n - 1, c, b, a); // 将n-1个盘子从c移到b（借助a）
6     }
7 }
```

时间复杂度分析: 设移动 n 个圆盘所需的时间为 $T(n)$, 则有递推关系 $T(n) = 2T(n - 1) + 1$.
解得: $T(n) = 2^n - 1$. 因此, 汉诺塔问题的时间复杂度为 $O(2^n)$

空间复杂度分析: 递归调用的最大深度为 n , 因此递归栈所需的空间复杂度为 $O(n)$.

2.8 分治算法时间复杂度

$$T(n) = \begin{cases} O(1), & n = 1, \\ kT\left(\frac{n}{m}\right) + f(n), & n > 1. \end{cases}$$

其中: k 子问题个数; n/m 每个子问题的规模; $f(n)$ 当前层的额外计算 (分割或合并代价)。

重要结论

1. 递归深度为: $\log_m n$.
2. 叶子结点 (最底层子问题) 总数量为: $k^{\log_m n} = n^{\log_m k}$.
3. 分治算法的总时间复杂度可以表示为:

$$T(n) = n^{\log_m k} + \sum_{i=0}^{\log_m n-1} k^i f\left(\frac{n}{m^i}\right).$$

记忆要点: 看子问题个数 k ; 看规模缩小倍数 m ; 先算 $n^{\log_m k}$ (叶子结点代价); 再看 $f(n)$ 在各层累加后的大小; 谁占主导, 谁就是最终时间复杂度。

2.9 二分搜索 (Binary Search)

```

1 int BinarySearch(Type a[], const Type &x, int l, int r)
2 {
3     while (l <= r) {
4         int m = (l + r) / 2; // 计算中点下标
5         if (x == a[m])
6             return m;          // 找到目标, 返回位置
7         if (x < a[m])
8             r = m - 1;        // 目标在左半区, 缩小右边界
9         else
10            l = m + 1;       // 目标在右半区, 缩小左边界
11    }
```

```

12     return -1;           // 查找失败
13 }
```

时间复杂度: 设数组长度为 n , 每次比较后查找区间规模减半: $n \rightarrow \frac{n}{2} \rightarrow \frac{n}{4} \rightarrow \dots \rightarrow 1$. 因此查找次数为 $\log_2 n$, 二分搜索的时间复杂度为 $O(\log n)$.

空间复杂度: 该实现为迭代版本, 只使用常数个辅助变量, 因此空间复杂度为 $O(1)$.

2.10 大整数乘法 (Karatsuba 算法)

问题背景: 设 X, Y 为两个 n 位的大整数, 若直接相乘, 时间复杂度为 $O(n^2)$.

分治思想: 将两个 n 位整数拆分为高位和低位 (假设 n 为偶数): $X = a \cdot 2^{n/2} + b, Y = c \cdot 2^{n/2} + d$.

直接展开乘积: $XY = ac \cdot 2^n + (ad + bc) \cdot 2^{n/2} + bd$.

关键改进 (Karatsuba 思想): 注意到 $ad + bc = (a+b)(c+d) - ac - bd$. 因此只需计算以下三个乘法: ac 、 bd 、 $(a+b)(c+d)$ 其余部分只需要加减运算。

递归时间复杂度:

Karatsuba 算法的递归式为:

$$T(n) = \begin{cases} O(1), & n = 1, \\ 3T(n/2) + O(n), & n > 1. \end{cases}$$

由主定理可得: $T(n) = O(n^{\log_2 3}) \approx O(n^{1.585})$, 优于普通的大整数乘法 $O(n^2)$.

2.11 Strassen 矩阵乘法

问题背景: 设 A, B 为 $n \times n$ 矩阵, 普通矩阵乘法的时间复杂度为: $O(n^3)$.

分块表示:

将矩阵划分为四个子块

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}.$$

Strassen 的 7 个中间矩阵

$$\begin{aligned} M_1 &= A_{11}(B_{12} - B_{22}), \\ M_2 &= (A_{11} + A_{12})B_{22}, \\ M_3 &= (A_{21} + A_{22})B_{11}, \\ M_4 &= A_{22}(B_{21} - B_{11}), \\ M_5 &= (A_{11} + A_{22})(B_{11} + B_{22}), \\ M_6 &= (A_{12} - A_{22})(B_{21} + B_{22}), \\ M_7 &= (A_{11} - A_{21})(B_{11} + B_{12}). \end{aligned}$$

结果矩阵的计算

$$\begin{aligned} C_{11} &= M_5 + M_4 - M_2 + M_6, \\ C_{12} &= M_1 + M_2, \\ C_{21} &= M_3 + M_4, \\ C_{22} &= M_5 + M_1 - M_3 - M_7. \end{aligned}$$

时间复杂度：Strassen 矩阵乘法的递归式为 $T(n) = 7T(n/2) + O(n^2)$. 由主定理可得: $T(n) = O(n^{\log_2 7}) \approx O(n^{2.81})$, 优于普通矩阵乘法的 $O(n^3)$.

2.12 棋盘覆盖算法

要求: 对一个 $2^k \times 2^k$ 的棋盘进行覆盖, 其中恰好有一个特殊方格 (缺口), 其余方格需用 L 型骨牌覆盖。算法采用分治与递归思想, 始终保持: 每一个递归子棋盘中恰好只有一个缺口。

```

1 #define N 8
2 int board[N][N];
3 int tile = 1; // 骨牌编号
4
5 // 参数说明:
6 // tr, tc: 当前子棋左上角位置
7 // dr, dc: 当前特殊方格坐标 (绝对坐标)
8 // size: 当前子棋盘规模 (边长)
9 void chessBoard(int tr, int tc, int dr, int dc, int size) {
10     if (size == 1) return;
11     int t = tile++;
12     int s = size / 2;
13
14     // 左上子棋盘
15     if (dr < tr + s && dc < tc + s) {
16         chessBoard(tr, tc, dr, dc, s);
17     } else {
18         board[tr + s - 1][tc + s - 1] = t;
19         chessBoard(tr, tc, tr + s - 1, tc + s - 1, s);
20     }
21
22     // 右上子棋盘
23     if (dr < tr + s && dc >= tc + s) {
24         chessBoard(tr, tc + s, dr, dc, s);
25     } else {
26         board[tr + s - 1][tc + s] = t;
27         chessBoard(tr, tc + s, tr + s - 1, tc + s, s);
28     }
29
30     // 左下子棋盘
31     if (dr >= tr + s && dc < tc + s) {
32         chessBoard(tr + s, tc, dr, dc, s);
33     } else {
34         board[tr + s][tc + s - 1] = t;
35         chessBoard(tr + s, tc, tr + s, tc + s - 1, s);
36     }
37
38     // 右下子棋盘
39     if (dr >= tr + s && dc >= tc + s) {
40         chessBoard(tr + s, tc + s, dr, dc, s);
41     } else {
42         board[tr + s][tc + s] = t;

```

```

43     chessBoard(tr + s, tc + s, tr + s, tc + s, s);
44 }
45 }
```

2.13 合并排序 (Merge Sort)

合并排序是一种典型的分治算法。其基本思想是：将待排序序列不断划分为两个子序列，分别排序后，再将两个有序子序列合并为一个有序序列。

1. 递归排序函数

```

1 void mergeSort(Type a[], int left, int right)
2 {
3     if (left < right) {
4         int i = (left + right) / 2;
5         mergeSort(a, left, i);
6         mergeSort(a, i + 1, right);
7         merge(a, b, left, i, right);
8         copy(a, b, left, right);
9     }
10 }
```

2. 合并函数

```

1 void merge(Type a[], Type d[], int l, int m, int r)
2 {
3     int i = l, j = m + 1, k = l;
4     while (i <= m && j <= r) {
5         if (a[i] <= a[j]) d[k++] = a[i++];
6         else d[k++] = a[j++];
7     }
8
9     if (i > m)
10        for (int q = j; q <= r; q++) d[k++] = a[q];
11    else
12        for (int q = i; q <= m; q++) d[k++] = a[q];
13 }
```

时间复杂度：合并排序的递归关系为 $T(n) = 2T(n/2) + O(n)$. 由主定理可得 $T(n) = O(n \log n)$.

空间复杂度：由于合并过程需要额外的辅助数组，合并排序的空间复杂度为 $O(n)$.

2.14 快速排序 (Quick Sort)

快速排序是一种典型的分治排序算法，其基本思想是：选取一个基准元素，将序列划分为左右两部分，使得左边元素不大于基准，右边元素不小于基准，然后分别对左右两部分递归排序。

1. 快速排序的递归框架

```

1 void QuickSort(Type a[], int p, int r)
2 {
3     if (p < r) {
4         int q = Partition(a, p, r);
```

```

5     QuickSort(a, p, q - 1);
6     QuickSort(a, q + 1, r);
7 }
8 }
```

2. 划分函数 (Partition)

```

1 int Partition(Type a[], int p, int r)
2 {
3     int i = p, j = r + 1;
4     Type x = a[p];
5     while (true) {
6         while (a[++i] < x);
7         while (a[--j] > x);
8         if (i >= j) break;
9         Swap(a[i], a[j]);
10    }
11    a[p] = a[j];
12    a[j] = x;
13    return j;
14 }
```

3. 随机化划分

```

1 int RandomizedPartition(Type a[], int p, int r)
2 {
3     int i = Random(p, r);
4     Swap(a[i], a[p]);
5     return Partition(a, p, r);
6 }
```

时间复杂度：在平均情况下，快速排序每次划分都能较均匀地分割数组，递归深度为 $O(\log n)$ ，每一层划分操作的代价为 $O(n)$ ，因此平均时间复杂度为： $O(n \log n)$ 。在最坏情况下（例如数组已经有序且基准选择不当），每次只能划分出一个规模为 $n - 1$ 的子问题，时间复杂度退化为： $O(n^2)$ 。

空间复杂度：快速排序主要消耗递归栈空间，平均情况下递归深度为 $O(\log n)$ ，因此空间复杂度为： $O(\log n)$ 。

2.15 随机选择算法 (Randomized Select)

随机选择算法用于在数组中查找第 k 小元素，其思想来源于快速排序中的划分操作。

```

1 RSelect(a, p, r, k)
2 {
3     if (p == r) return a[p];
4     mid = RandomizedPartition(a, p, r);
5     if (mid == k) return a[mid];
6     else if (mid > k)
7         return RSelect(a, p, mid - 1, k);
8     else
9         return RSelect(a, mid + 1, r, k);
10 }
```

由于每一轮递归只进入一个子区间，该算法的平均时间复杂度为： $O(n)$.

2.16 寻找第 k 小元素（Randomized-Select 算法）

随机划分函数 RandomizedPartition

```

1 template<class Type>
2 int RandomizedPartition(Type a[], int p, int r) {
3     int i = Random(p, r);
4     Swap(a[i], a[p]);
5     return Partition(a, p, r);
6 }
```

划分函数 Partition

```

1 template<class Type>
2 int Partition(Type a[], int p, int r)
3 {
4     int i = p, j = r + 1;
5     Type x = a[p];
6     while (true) {
7         while (a[++i] < x && i < r);
8         while (a[--j] > x);
9         if (i >= j) break;
10        Swap(a[i], a[j]);
11    }
12    a[p] = a[j];
13    a[j] = x;
14    return j;
15 }
```

随机化选择函数 RandomizedSelect

```

1 template<class Type>
2 Type RandomizedSelect(Type a[], int p, int r, int k) {
3     if (p == r) return a[p];
4     int i = RandomizedPartition(a, p, r);
5     int j = i - p + 1;
6     if (k <= j)
7         return RandomizedSelect(a, p, i, k);
8     else
9         return RandomizedSelect(a, i + 1, r, k - j);
10 }
```

算法复杂度分析：在平均情况下，每一次划分都能较均匀地缩小问题规模，因此随机化选择算法的期望时间复杂度为： $O(n)$. 相比完全排序所需的 $O(n \log n)$ 时间复杂度，该算法在仅需寻找第 k 小元素时具有更高的效率。

2.17 循环赛问题

循环赛（Round-Robin Tournament）问题的目标是：给定 n 个选手（或队伍），安排比赛日程，使得每一对选手恰好比赛一次，并且每天（每一轮）每位选手只进行一场比赛。在经典模型中，若

$n = 2^k$, 可以构造一个 $n \times n$ 的表格 a 来描述日程安排, 其中 $a[i][j]$ 表示第 i 个选手在第 j 轮的对手编号 (不同教材可能从第 1 轮到第 $n - 1$ 轮, 这里代码按表格整体递推生成)。

```

1 void Table(int k, int **a)
2 {
3     int n = 1;
4     for (int i = 1; i <= k; i++)
5         n *= 2; // 计算 n = 2^k
6     for (int i = 1; i <= n; i++)
7         a[1][i] = i; // 初始化第一行 (作为递推基底)
8     int m = 1; // 当前已构造子表规模为 m
9     for (int s = 1; s <= k; s++) {
10        n /= 2; // 每次递推对应划分成若干块
11        for (int t = 1; t <= n; t++) {
12            for (int i = m + 1; i <= 2 * m; i++) {
13                for (int j = m + 1; j <= 2 * m; j++) {
14                    a[i][j + (t - 1) * m * 2 - m] =
15                        a[i - m][j + (t - 1) * m * 2 - 2 * m];
16                }
17            }
18        }
19        m *= 2; // 子表规模翻倍: m -> 2m
20    }
21 }
```

复杂度分析: 该算法需要填充 $n \times n$ 的表格单元, 每个单元最多被常数次赋值, 因此时间复杂度为: $O(n^2)$; 空间上需要保存整个赛程表, 同样为: $O(n^2)$.

3 动态规划

3.1 矩阵连乘问题

问题描述：给定一系列矩阵 A_1, A_2, \dots, A_n ，其中矩阵 A_i 的规模为 $p_{i-1} \times p_i$ 。由于矩阵乘法满足结合律，但不同的加括号方式会导致标量乘法次数不同，矩阵连乘问题的目标是：确定一种加括号方式，使得计算 $A_1A_2 \cdots A_n$ 所需的标量乘法次数最少。

状态转移方程为：

$$m[i, j] = \begin{cases} 0, & i = j \\ \min_{i \leq k < j} \{m[i, k] + m[k+1, j] + p_{i-1}p_kp_j\}, & i < j \end{cases}$$

3.1.1 常规方法

```

1 void MatrixChain(int *p, int n, int **m, int **s)
2 // m[i][j]: 最少乘法次数
3 // s[i][j]: A_i...A_j 的最优断开位置
4 void MatrixChain(int* p, int n, int** m, int** s) {
5     for(int i = 1; i <= n; i++) m[i][i] = 0;
6     for(int r = 2; r <= n; r++) {
7         for(int i = 1; i <= n - r + 1; i++) {
8             int j = i + r - 1;
9             m[i][j] = m[i+1][j] + p[i-1]*p[i]*p[j];
10            s[i][j] = i;
11            for(int k = i + 1; k < j; k++) {
12                int t = m[i][k] + m[k+1][j] + p[i-1]*p[k]*p[j];
13                if(t < m[i][j]) {
14                    m[i][j] = t;
15                    s[i][j] = k;
16                }
17            }
18        }
19    }
20}

```

算法复杂度分析：MatrixChain 的主要计算量取决于算法中对 i , j 和 k 的 3 重循环。循环体内的计算量为 $O(1)$ ，而 3 重循环的总次数为 $O(n^3)$ 。因此算法的计算时间上界为 $O(n^3)$ 。算法所占用的空间显然为 $O(n^2)$ 。

3.1.2 递归方法

```

1 int LookupChain(int i, int j)
2 {
3     if (m[i][j] > 0) return m[i][j];           // 已算过：直接返回（记忆化）
4     if (i == j) return 0;                      // 只有一个矩阵：代价为0
5     int u = LookupChain(i, i) + LookupChain(i+1, j) + p[i-1] * p[i] * p[j];
6     // 先假设 k = i
7     s[i][j] = i;

```

```

8     for (int k = i+1; k < j; k++) {           // 枚举所有划分点 k
9         int t = LookupChain(i, k) + LookupChain(k+1, j) + p[i-1] * p[k] * p[j];
10        if (t < u) {                           // 取最小
11            u = t;
12            s[i][j] = k;                      // 记录最优划分点
13        }
14    }
15    m[i][j] = u;                          // 记忆化保存结果
16    return u;
17 }
```

递归复杂度：子问题总数为 $\frac{n(n+1)}{2} = O(n^2)$. 每个子问题在求最小值时要枚举 k , 最多 $O(n)$ 次, 所以总时间复杂度为 $O(n^3)$, 空间复杂度由 m, s 两张表决定, 为 $O(n^2)$.

3.2 最长公共子序列 (LCS)

问题描述：给定两个序列 $X = \langle x_1, x_2, \dots, x_m \rangle$ 与 $Y = \langle y_1, y_2, \dots, y_n \rangle$, 求它们的最长公共子序列 (LCS) 的长度, 并输出一个 LCS。

$$c[i][j] = \begin{cases} 0, & i = 0, j = 0 \\ c[i-1][j-1] + 1, & i, j > 0; x_i = y_j \\ \max\{c[i][j-1], c[i-1][j]\}, & i, j > 0; x_i \neq y_j \end{cases}$$

```

1 void LCSLength(int m, int n, char *x, char *y, int **c, int **b)
2 {
3     int i, j;
4     // 初始化边界: 任意序列与空序列的LCS长度为0
5     for (i = 0; i <= m; i++) c[i][0] = 0;
6     for (j = 0; j <= n; j++) c[0][j] = 0;
7     // 动态规划填表: 从小规模子问题推到大规模子问题
8     for (i = 1; i <= m; i++) {
9         for (j = 1; j <= n; j++) {
10            if (x[i] == y[j]) {           // xi == yj
11                c[i][j] = c[i-1][j-1] + 1;
12                b[i][j] = 1;             // 记录来自左上
13            } else if (c[i-1][j] >= c[i][j-1]) {
14                c[i][j] = c[i-1][j];
15                b[i][j] = 2;             // 记录来自上
16            } else {
17                c[i][j] = c[i][j-1];
18                b[i][j] = 3;             // 记录来自左
19            }
20        }
21    }
22 }
23 void LCS(int i, int j, char *x, int **b)
24 {
25     if (i == 0 || j == 0) return;      // 回溯到边界, 结束
26 }
```

```

26     if (b[i][j] == 1) {           // 来自左上: 说明匹配到一个字符
27         LCS(i-1, j-1, x, b);
28         printf("%c", x[i]);       // 输出该字符 (属于 LCS)
29     } else if (b[i][j] == 2) {     // 来自上: 丢弃 xi
30         LCS(i-1, j, x, b);
31     } else {                     // 来自左: 丢弃 yj
32         LCS(i, j-1, x, b);
33     }
34 }
```

复杂度: 表格大小为 $m \times n$, 每个格子 $O(1)$ 计算, 所以时间复杂度为 $O(mn)$, 空间复杂度为 $O(mn)$. 回溯输出最多走 $m + n$ 步, 为 $O(m + n)$.

3.3 最优三角形划分 (Min-Weight Triangulation)

问题描述: 给定一个凸多边形, 顶点按顺序编号为 $v_0, v_1, v_2, \dots, v_n$, 其中共有 $n + 1$ 个顶点。将多边形用不相交的对角线划分成若干三角形 (三角剖分)。设三角形 (v_i, v_k, v_j) 的代价为 $w(i, k, j)$ 。目标是找到一种三角剖分, 使总代价最小。

对所有 $i \leq k < j$ 取最小即可。

$$t[i][j] = \begin{cases} 0, & i = j \\ \min_{i \leq k < j} \{t[i][k] + t[k+1][j] + w(v_{i-1}v_kv_j)\}, & i < j \end{cases}$$

```

1 void MinWeightTriangulation(int n, Type **t, int **s)
2 {
3     for (int i = 1; i <= n; i++) t[i][i] = 0;
4     for (int r = 2; r <= n; r++) { // 子问题长度 r: j = i + r - 1
5         for (int i = 1; i <= n - r + 1; i++) {
6             int j = i + r - 1;
7             // 先令 k = i 作为初值 (即选三角形 (i-1, i, j))
8             t[i][j] = t[i+1][j] + w(i-1, i, j);
9             s[i][j] = i;
10            // 枚举 i+1 ... j-1
11            for (int k = i+1; k < j; k++) {
12                int u = t[i][k] + t[k+1][j] + w(i-1, k, j);
13                if (u < t[i][j]) {
14                    t[i][j] = u;
15                    s[i][j] = k;
16                }
17            }
18        }
19    }
20 }
```

复杂度分析: 状态数为 $O(n^2)$ (所有 $1 \leq i \leq j \leq n$), 每个状态需要枚举 k , 最多 $O(n)$ 次, 因此时间复杂度为 $O(n^3)$. 数组 t, s 的规模为 $O(n^2)$, 空间复杂度为 $O(n^2)$.

3.4 多边形游戏 (Polygon Game)

问题描述: 多边形游戏给定一个含 n 个顶点的环状表达式 (可看作一个多边形), 每条边上有一个运算符 (如 $+$ 或 \times), 每个顶点上有一个数。通过选择删边/断开位置并确定计算顺序 (等价于给表达式加括号), 最终会得到一个结果值。目标通常是求最大结果 (或同时求最大/最小以便处理乘法含负数的情况)。

$$\min f(i, j, s) = \begin{cases} a + c, & \text{op}[i+s] = '+' \\ \min\{ac, ad, bc, bd\}, & \text{op}[i+s] = '*' \end{cases}$$

$$\max f(i, j, s) = \begin{cases} b + d, & \text{op}[i+s] = '+' \\ \max\{ac, ad, bc, bd\}, & \text{op}[i+s] = '*' \end{cases}$$

由于最优断开位置 s 有 $1 \leq s \leq j-1$ 的 $j-1$ 种情况, 由此可知

$$m[i, j, 0] = \min_{1 \leq s \leq j-1} \{\min f(i, j, s)\}, \quad 1 \leq i, j \leq n$$

$$m[i, j, 1] = \max_{1 \leq s \leq j-1} \{\max f(i, j, s)\}, \quad 1 \leq i, j \leq n$$

初始边界值: $m[i, 1, 0] = v[i]$, $m[i, 1, 1] = v[i]$

```

1 void PolyMax(int n)
2 {
3     int minf, maxf;
4     for (int j = 2; j <= n; j++) {           // 子链长度 j
5         for (int i = 1; i <= n; i++) {        // 子链起点 i (环状)
6             for (int s = 1; s < j; s++) {      // 断开位置 s (划分成两段)
7                 MinMax(n, i, s, j, minf, maxf);
8                 if (m[i][j][0] > minf)
9                     m[i][j][0] = minf;          // 更新最小值
10                if (m[i][j][1] < maxf)
11                    m[i][j][1] = maxf;        // 更新最大值
12            }
13        }
14    }
15    int temp = m[1][n][1];
16    for (int i = 2; i <= n; i++) {           // 枚举起点, 取全局最大
17        if (temp < m[i][n][1])
18            temp = m[i][n][1];
19    }
20    return temp;
21 }
```

复杂度分析: 三重循环规模约为: $j : O(n)$, $i : O(n)$, $s : O(n)$, 每次 `MinMax` 计算为常数时间, 因此时间复杂度为 $O(n^3)$, 状态数组 $m[i][j][0/1]$ 的规模为 $O(n^2)$, 空间复杂度为 $O(n^2)$.

3.5 图像压缩

问题描述: 给定灰度像素序列 $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$, 其中 $0 \leq p_i \leq 255$ 。将序列划分为若干个连续段 S_1, S_2, \dots, S_m 。第 i 段记为 $S_i = \{p_{t_{i-1}+1}, \dots, p_{t_i}\}$, 并用同一位宽存储该段内所有像素。设该段所需位宽为 $b_i = \lceil \log_2 (\max_{t_{i-1}+1 \leq k \leq t_i} p_k + 1) \rceil$, 且由题意有 $b_i \leq 8$, 因此存储 b_i 需要 3 位; 段长 $l_i = t_i - t_{i-1}$ 满足 $1 \leq l_i \leq 255$, 存储 l_i 需要 8 位。因此每段头部开销为 $3 + 8 = 11$ 位。目标是: 选择一种分段方式, 使总存储位数最小, 且每段长度不超过 256。

设 $l[i], b[i]$ 是 $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ 的最优分段。显而易见, $l[1], b[1]$ 是 $\{p_1, \dots, p_{l[1]}\}$ 的最优分段, 且 $l[i], b[i]$ 是 $\{p_{l[1]+1}, \dots, p_n\}$ 的最优分段。即图象压缩问题满足最优子结构性质。

设 $s[i], 1 \leq i \leq n$, 是象素序列 $\{p_1, \dots, p_n\}$ 的最优分段所需的存储位数。由最优子结构性质易知: $s[i] = \min_{1 \leq k \leq \min\{i, 256\}} \{s[i-k] + k \cdot b \max(i-k+1, i)\} + 11$

其中 $b \max(i, j) = \lceil \log(\max_{i \leq k \leq j} \{p_k\} + 1) \rceil$

```

1 void Compress(int n, int p[], int S[], int L[], int b[])
2 {
3     int Lmax = 256, header = 1;
4     S[0] = 0;
5     for (int i = 1; i <= n; i++) {           // 依次计算 S[1..n]
6         b[i] = length(p[i]);                  // 第 i 个元素所需位数
7         int bmax = b[i];
8         S[i] = S[i-1] + bmax;                // 先假设最后一段只含 p[i]
9         L[i] = i;
10        for (int j = 2; j <= i && j <= Lmax; j++) {    // j 表示最后一段长度
11            if (bmax < b[i-j+1]) bmax = b[i-j+1];      // 更新该段最大位宽
12            if (S[i] > S[i-j] + j * bmax) {             // 选择更优的分段
13                S[i] = S[i-j] + j * bmax;
14                L[i] = j;                            // 记录最后一段长度
15            }
16        }
17        S[i] += header;                         // 加上该段头部开销
18    }
19 }
```

复杂度分析: 对每个 i , 内层最多枚举 $j = 1.. \min(i, Lmax)$, 故时间复杂度为 $O(n \cdot Lmax)$. 当 $Lmax = 256$ 为常数时, 可写为 $O(n)$. 空间复杂度主要来自数组 S, L, b , 为 $O(n)$.

3.6 电路布线问题 (MNS)

问题描述: 在电路布线问题中, 给定若干条连线, 每条连线用一对端点 $(i, \pi(i))$ 表示, 其中 i 表示左侧端点编号, $\pi(i)$ 表示其在右侧对应的端点编号。若两条连线 $(i, \pi(i))$ 与 $(t, \pi(t))$ 满足 $i < t$ 但 $\pi(i) > \pi(t)$, 则称这两条连线相交。问题的目标是: 从所有连线中选取一个最大的不相交子集, 使得任意两条被选中的连线都不相交。

边界条件: 当 $i = 1$ 时

$$\text{Size}(1, j) = \begin{cases} 0, & j < \pi(1), \\ 1, & j \geq \pi(1). \end{cases}$$

状态转移方程: 当 $i > 1$ 时, 有如下递推关系:

$$\text{Size}(i, j) = \begin{cases} \text{Size}(i - 1, j), & j < \pi(i), \\ \max\{\text{Size}(i - 1, j), \text{Size}(i - 1, \pi(i) - 1) + 1\}, & j \geq \pi(i). \end{cases}$$

```

1 void MNS(int C[], int n, int **size)
2 {
3     // 初始化 i=1 的情况
4     for (int j = 0; j < C[1]; j++) size[1][j] = 0;
5     for (int j = C[1]; j <= n; j++) size[1][j] = 1;
6     // 填表
7     for (int i = 2; i <= n; i++) {
8         for (int j = 0; j < C[i]; j++)
9             size[i][j] = size[i-1][j];
10        for (int j = C[i]; j <= n; j++)
11            size[i][j] = max(size[i-1][j], size[i-1][C[i]-1] + 1);
12    }
13    // 最终结果
14    size[n][n] = max(size[n-1][n], size[n-1][C[n]-1] + 1);
15 }
16 void Traceback(int C[], int **size, int n, int Net[], int &m)
17 {
18     int j = n;
19     m = 0;
20     for (int i = n; i > 1; i--) {
21         if (size[i][j] != size[i-1][j]) {
22             Net[m++] = i;           // 选择连线 i
23             j = C[i] - 1;
24         }
25     }
26     if (j >= C[1])
27         Net[m++] = 1;
28 }
```

复杂度分析: 状态表规模为 $O(n^2)$, 每个状态计算时间为 $O(1)$, 因此时间复杂度为 $O(n^2)$, 空间复杂度为 $O(n^2)$. 回溯过程仅需一次线性扫描, 时间复杂度为 $O(n)$.

3.7 流水作业调度 (两台机器 M_1, M_2)

问题描述: 有 n 个作业 $1, 2, \dots, n$, 需要在两台机器 M_1, M_2 上依次加工。每个作业 i 必须先在 M_1 上加工 a_i 时间, 再在 M_2 上加工 b_i 时间 (不允许改变顺序)。要求安排一个作业加工顺序, 使得: 第一个作业在机器 M_1 上开始加工, 最后一个作业在机器 M_2 上完成加工的时间 (即完工时间) 最小。

状态转移方程: 由流水作业调度问题的最优子结构性质可知,

$$T(N, 0) = \min_{1 \leq i \leq n} \{a_i + T(N - \{i\}, b_i)\}$$

$$T(S, t) = \min_{i \in S} \{a_i + T(S - \{i\}, b_i + \max\{t - a_i, 0\})\}$$

其中: a_j : 作业 j 在 M_1 的加工时间; $T(S - \{j\}, b_j)$: 剩余作业子集的最优等待时间 (将 b_j 作为状态参数); $\max(t - a_j, 0)$: 由于 M_2 的空闲/等待产生的额外影响项。

结论: 流水作业调度问题在两台机器情形下具有最优子结构性质, 可用集合型动态规划描述, 其最优完成时间为 $T(N, 0)$.

3.8 0-1 背包问题 (特殊的整数规划问题)

问题描述: 给定 n 种物品和一个背包。第 i 个物品的重量为 w_i 、价值为 v_i , 背包容量为 C 。每个物品只能取 0 或 1 次 (不可分割)。目标是在不超过容量 C 的前提下, 使装入背包的物品总价值最大。

设决策变量

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{选取物品 } i, \\ 0, & \text{否则,} \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

则模型为

$$\max \sum_{i=1}^n v_i x_i$$

满足约束

$$\sum_{i=1}^n w_i x_i \leq C, \quad x_i \in \{0, 1\}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

子问题与状态定义: 定义子问题: 当可选物品为 $i, i+1, \dots, n$, 背包容量为 j ($0 \leq j \leq C$) 时的最优值记为 $m(i, j)$. 也就是说, $m(i, j)$ 表示在约束 $\sum_{k=i}^n w_k x_k \leq j$, $x_k \in \{0, 1\}$ ($i \leq k \leq n$) 下最大化 $\sum_{k=i}^n v_k x_k$ 所能得到的最优目标值。

边界条件: 当只剩最后一个物品 n 可选时,

$$m(n, j) = \begin{cases} v_n, & j \geq w_n, \\ 0, & 0 \leq j < w_n. \end{cases}$$

状态转移方程 (最优子结构): 对 $i < n$, 考虑物品 i 的“选/不选”两种情况:

$$m(i, j) = \begin{cases} \max\{m(i+1, j), m(i+1, j-w_i) + v_i\}, & j \geq w_i, \\ m(i+1, j), & 0 \leq j < w_i. \end{cases}$$

解释:

- 若 $j < w_i$, 容量不足, 物品 i 不能选, 只能继承后续子问题: $m(i, j) = m(i+1, j)$;
- 若 $j \geq w_i$, 可选择: 不选 i 得 $m(i+1, j)$; 选 i 得 $m(i+1, j-w_i) + v_i$; 取两者最大即为最优。

```

1 void knapsack(Type v[], int w[], int c, int n, Type **m)
2 {
3     int jMax = min(w[n] - 1, c); // 初始化第 n 个物品这一行: m[n][j]
4     for (int j = 0; j <= jMax; j++)
5         m[n][j] = 0;
6     for (int j = w[n]; j <= c; j++)
7         m[n][j] = v[n]; // 从 i = n-1 递推到 2 (最后单独处理 i=1)
8     for (int i = n - 1; i > 1; i--) {
9         jMax = min(w[i] - 1, c); // j < w[i] 时装不下物品 i, 只能继承 m[i+1][j]
```

```

10     for (int j = 0; j <= jMax; j++)
11         m[i][j] = m[i+1][j]; // j >= w[i] 时, 取“选/不选”两种情况的最大值
12     for (int j = w[i]; j <= c; j++)
13         m[i][j] = max(m[i+1][j], m[i+1][j - w[i]] + v[i]);
14 }
15 // 单独处理 i=1 (只计算 m[1][c])
16 m[1][c] = m[2][c];
17 if (c >= w[1])
18     m[1][c] = max(m[1][c], m[2][c - w[1]] + v[1]);
19 }
20 // 回溯函数: 根据动态规划表 m 构造最优解 x
21 void traceback(int **m, int w[], int c, int n, int x[]) {
22     for (int i = 1; i < n; i++) {
23         if (m[i][c] == m[i + 1][c]) { // 第 i 个物品不放入背包
24             x[i] = 0;
25         } else { // 第 i 个物品放入背包
26             x[i] = 1;
27             c -= w[i];
28         }
29     }
30     x[n] = (m[n][c]) ? 1 : 0; // 处理最后一个物品
31 }
```

复杂度分析: 需要填充大部分 $m[i][j]$ (约 $n \times c$ 个状态), 每个状态 $O(1)$ 转移, 因此时间复杂度为 $O(nc)$, 空间复杂度为二维表 $O(nc)$.

3.9 最优二叉搜索树 (Optimal Binary Search Tree)

问题描述: 给定有序关键字 $k_1 < k_2 < \dots < k_n$ 。查找过程中可能命中关键字, 也可能命中相邻关键字之间的“失败区间”。设成功查找 k_i 的概率 (或权值) 为 a_i , 失败查找落在区间之间的概率 (或权值) 为 b_i (通常 b_0, \dots, b_n)。要求构造一棵二叉搜索树, 使得平均查找代价 (期望比较次数) 最小。

```

1 void OptimalBinarySearchTree(int a[], int b[], int n, int **m, int **s, int **w)
2 {
3     // 初始化空区间: m[i+1][i] = 0, 并给 w 的初值
4     for (int i = 0; i <= n; i++) {
5         w[i+1][i] = a[i]; // 以该课程版本的定义为准
6         m[i+1][i] = 0;
7     }
8     // r 表示区间长度: j = i + r
9     for (int r = 0; r < n; r++) {
10        for (int i = 1; i <= n - r; i++) {
11            int j = i + r;
12            // 计算 w[i][j]
13            w[i][j] = w[i][j-1] + a[j] + b[j];
14            // 先令 k=i 作为初值
15            m[i][j] = m[i+1][j];
16            s[i][j] = i;
17            // 枚举 k=i+1..j, 寻找最优根
18        }
19    }
20 }
```

```

18     for (int k = i+1; k <= j; k++) {
19         int t = m[i][k-1] + m[k+1][j];
20         if (t < m[i][j]) {
21             m[i][j] = t;
22             s[i][j] = k;
23         }
24     }
25     // 最后统一加上 w[i][j]
26     m[i][j] += w[i][j];
27 }
28 }
29 }
```

复杂度分析：共有 $O(n^2)$ 个区间状态 (i, j) , 每个状态枚举 k 需要 $O(n)$, 因此时间复杂度为 $O(n^3)$, 空间复杂度为三张 $n \times n$ 表, 为 $O(n^2)$.

3.10 最大子段和 (Maximum Subarray Sum)

问题描述：给定长度为 n 的整数序列 $a[1..n]$, 求其连续子段的最大和, 即 $\max_{1 \leq l \leq r \leq n} \sum_{k=l}^r a[k]$.

状态定义：令 $b[j]$ 表示以 $a[j]$ 结尾的最大子段和, 则有递推:

$$b[j] = \max\{b[j-1] + a[j], a[j]\}, \quad 1 \leq j \leq n.$$

最终答案为 $\max_{1 \leq j \leq n} b[j]$.

```

1 int MaxSum(int n, int *a)
2 {
3     int sum = 0;    // 记录目前全局最大
4     int b = 0;      // 记录以当前位置结尾的最大子段和
5     for (int i = 1; i <= n; i++) {
6         if (b > 0) b = b + a[i];
7         else b = a[i];
8         if (sum < b) sum = b;
9     }
10    return sum;
11 }
```

复杂度：时间复杂度 $O(n)$, 空间复杂度 $O(1)$.

3.11 最大子矩阵和 (Maximum Submatrix Sum)

问题描述：给定一个 $m \times n$ 的整数矩阵 A , 求其元素和最大的子矩阵 (连续行 + 连续列)。

核心思想：固定子矩阵的上边界行 i 与下边界行 j ($i \leq j$), 把第 $i..j$ 行之间的列元素累加成一个长度为 n 的数组 $b[k] = \sum_{t=i}^j A[t][k]$. 则此时“最佳子矩阵”在列方向上等价于求数组 $b[1..n]$ 的最大子段和。对所有 (i, j) 枚举即可求最优。

```

1 int MaxSum2(int m, int n, int **a)
2 {
3     int sum = 0;
4     int *b = new int[n+1];
5     for (int i = 1; i <= m; i++) {
```

```

6     for (int k = 1; k <= n; k++)
7         b[k] = 0;
8     for (int j = i; j <= m; j++) {
9         for (int k = 1; k <= n; k++)
10            b[k] += a[j][k];
11         int max = MaxSum(n, b);
12         if (max > sum) sum = max;
13     }
14 }
15 return sum;
16 }
```

复杂度：共有 $O(m^2)$ 组行边界 (i, j) , 每次更新 b 需要 $O(n)$, 求最大子段和也需要 $O(n)$, 所以时间复杂度为 $O(m^2n)$, 额外空间为数组 b , 即 $O(n)$.

3.12 最大 m 子段和 (Maximum m Disjoint Subarrays Sum)

问题描述：给定序列 $a[1..n]$, 要求选取恰好 m 段互不重叠的连续子段, 使得这些子段元素和的总和最大。

```

1 int MaxSum(int m, int n, int *a)
2 {
3     if (n < m || m < 1) return 0;
4     int *b = new int[n+1];
5     int *c = new int[n+1];
6     b[0] = 0;
7     c[1] = 0;
8     for (int i = 1; i <= m; i++) {
9         b[i] = b[i-1] + a[i];
10        c[i-1] = b[i];
11        int maxv = b[i];
12        for (int j = i+1; j <= n-m+i; j++) {
13            b[j] = (b[j-1] > c[j-1] ? b[j-1] + a[j] : c[j-1] + a[j]);
14            c[j-1] = maxv;
15            if (maxv < b[j]) maxv = b[j];
16        }
17        c[i+n-m] = maxv;
18    }
19    int sum = 0;
20    for (int j = m; j <= n; j++)
21        if (sum < b[j]) sum = b[j];
22    return sum;
23 }
```

复杂度：两重循环规模约为 $m \times n$, 因此时间复杂度为 $O(mn)$, 额外空间为 b, c 两个数组, 为 $O(n)$.

4 贪心算法

贪心算法在求解优化问题时，每一步都作出一个当前看来“最优”的选择，期望通过一系列局部最优决策得到全局最优解。贪心算法的关键在于：问题必须具有贪心选择性质和最优子结构。

4.1 活动选择问题

问题描述：设有 n 个活动 A_1, A_2, \dots, A_n ，每个活动 A_i 有开始时间 s_i 和结束时间 f_i ，同一时间只能进行一个活动。目标是从中选择尽可能多的互不冲突的活动。

贪心策略：按活动的结束时间从小到大排序；每次选择当前结束时间最早且与已选活动不冲突的活动。该策略可以保证给后续活动留下尽可能多的时间，因此是全局最优的。

```

1 void GreedySelector(int n, int s[], int f[], bool A[])
2 {
3     A[1] = true;           // 选择第一个活动
4     int j = 1;
5     for (int i = 2; i <= n; i++) {
6         if (s[i] >= f[j]) {
7             A[i] = true; // 选择活动 i
8             j = i;
9         } else {
10            A[i] = false;
11        }
12    }
13 }
```

时间复杂度：若活动已排序，则算法时间复杂度为 $O(n)$ 。若需要先排序，则总体复杂度为 $O(n \log n)$ 。

4.2 分数背包问题（Fractional Knapsack）

问题描述：给定 n 个物品，第 i 个物品重量为 w_i ，价值为 v_i ，背包容量为 M 。与 0-1 背包不同，每个物品允许取任意比例。目标是在不超过容量 M 的前提下，使装入背包的总价值最大。

贪心策略：按物品的单位重量价值 $\frac{v_i}{w_i}$ 从大到小排序；依次尽可能多地装入单位价值最高的物品；若剩余容量不足以装入整个物品，则装入该物品的一部分并结束。该策略能保证每一步都优先获得最大“单位收益”，因此可以得到全局最优解。

```

1 void Knapsack(int n, float M, float v[], float w[], float x[])
2 {
3     Sort(n, v, w);      // 按 v[i]/w[i] 从大到小排序
4     for (int i = 1; i <= n; i++)
5         x[i] = 0;
6     float c = M;
7     int i;
8     for (i = 1; i <= n; i++) {
9         if (w[i] > c) break; // 剩余容量不足，无法装入整个物品 i
10        x[i] = 1;           // 装入整个物品 i
11        c -= w[i];
12    }
13    if (i <= n) x[i] = c / w[i]; // 装入物品 i 的一部分
14 }
```

时间复杂度：排序耗时 $O(n \log n)$, 装包过程为 $O(n)$, 因此总体时间复杂度为 $O(n \log n)$.

4.3 最优装载问题 (Optimal Loading)

问题描述：有 n 个货箱，第 i 个货箱的重量为 w_i ，现有一艘载重能力为 C 的船。要求选择若干个货箱装入船中，使得装入货箱的数量尽可能多，且总重量不超过船的载重能力 C 。

贪心策略：优先装载重量较小的货箱；每次选择当前剩余货箱中重量最小者装入船中；当剩余载重不足以装下下一个货箱时，算法结束。该策略保证在相同载重条件下，能够装入尽可能多的货箱，因此是最优的。

```

1 void Loading(int x[], int w[], int C, int n)
2 {
3     int *t = new int[n+1];      // t[i] 存放排序后的货箱下标
4     Sort(w, t, n);           // 按重量 w 从小到大排序，结果存入 t
5     for (int i = 1; i <= n; i++)
6         x[i] = 0;             // 初始化：不装任何货箱
7     for (int i = 1; i <= n && w[t[i]] <= C; i++) {
8         x[t[i]] = 1;          // 装入编号为 t[i] 的货箱
9         C -= w[t[i]];        // 更新剩余载重
10    }
11 }
```

时间复杂度：排序过程需要 $O(n \log n)$ 时间，装载过程最多遍历一次货箱，为 $O(n)$ ，因此算法的总体时间复杂度为 $O(n \log n)$.

空间复杂度：额外使用了数组 t 和 x ，空间复杂度为 $O(n)$.

4.4 哈夫曼编码 (Huffman Coding)

问题描述：给定一组字符及其出现频率（或权值） $\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ ，要求为每个字符设计一个二进制编码，使得：编码满足前缀码性质（任一字符的编码不是另一个字符编码的前缀）；所有字符编码后的加权路径长度（WPL）最小。

其中，加权路径长度定义为 $WPL = \sum_{i=1}^n w_i \cdot l_i$, w_i 为字符 i 的频率（权值）， l_i 为其编码长度。

贪心策略：在当前所有结点中，反复选取权值最小的两个结点；将这两个结点合并为一个新结点，新结点的权值为二者权值之和；将新结点重新插入集合中，重复上述过程，直到只剩一个结点。该策略保证每一步的局部最优选择（合并最小权值结点）最终得到全局最优的哈夫曼树。

```

1 void Huffman(int w[], int n)
2 {
3     MinHeap<HuffmanNode> Q;
4     Initialize(Q, w, n);    // 将 n 个权值初始化到最小堆中
5     HuffmanNode x, y, z;
6     for (int i = 1; i < n; i++) {
7         Q.deleteMin(x);      // 取出权值最小的结点 x
8         Q.deleteMin(y);      // 取出权值次小的结点 y
9         z.MakeTree(x, y);   // 合并 x 和 y 为一棵新树
10        z.weight = x.weight + y.weight;
11        Q.insert(z);       // 将新结点插回最小堆
12    }
13 }
```

时间复杂度：最小堆初始化需要 $O(n)$ 时间，合并过程中共进行 $n - 1$ 次循环，每次包含两次删除最小值和一次插入操作，每个堆操作时间为 $O(\log n)$ ，因此总时间复杂度为 $O(n \log n)$.

4.5 单源最短路径问题 (Dijkstra 算法)

问题描述：给定一个带非负权值的有向图（或无向图） $G = (V, E)$ ，其中每条边 (u, v) 的权值为 $c(u, v) \geq 0$ 。指定一个源点 $v \in V$ ，要求计算从源点 v 到图中其余各顶点的最短路径长度，并可同时记录对应的最短路径。

```

1 void Dijkstra(int n, int v, Type c[][][MAXN], Type dist[], int prev[])
2 {
3     bool S[MAXN];
4     for (int i = 1; i <= n; i++) {
5         dist[i] = c[v][i]; // 初始化距离
6         S[i] = false; // 初始时所有顶点均未加入 S
7         if (dist[i] < maxint) prev[i] = v;
8         else prev[i] = -1;
9     }
10    dist[v] = 0;
11    S[v] = true; // 源点加入 S
12    for (int i = 1; i < n; i++) {
13        Type temp = maxint;
14        int u = v;
15        // 在 V-S 中寻找 dist 最小的顶点 u
16        for (int j = 1; j <= n; j++) {
17            if (!S[j] && dist[j] < temp) {
18                u = j;
19                temp = dist[j];
20            }
21        }
22        S[u] = true; // 将 u 加入 S
23
24        // 用 u 松弛其邻接点
25        for (int j = 1; j <= n; j++) {
26            if (!S[j] && c[u][j] < maxint) {
27                Type newdist = dist[u] + c[u][j];
28                if (newdist < dist[j]) {
29                    dist[j] = newdist;
30                    prev[j] = u;
31                }
32            }
33        }
34    }
35 }
```

时间复杂度：在该实现中每一轮需在 $O(n)$ 时间内寻找最小的 $dist$ ；共进行 $n - 1$ 轮。因此总时间复杂度为 $O(n^2)$.

4.6 最小生成树 (Minimum Spanning Tree)

给定一个连通无向带权图 $G = (V, E)$, 其中每条边 (u, v) 具有权值 $w(u, v)$ 。最小生成树 (MST) 是指一棵: 包含图中所有顶点; 边数为 $|V| - 1$; 总权值之和最小的生成树。

下面介绍两种经典的贪心算法: **Prim 算法** 和 **Kruskal 算法**。

4.6.1 Prim 算法

基本思想: Prim 算法从某个起始顶点出发, 逐步扩展一棵生成树。在每一步中, 选择一条连接当前生成树与外部顶点的最小权值边, 将该边及其对应的顶点加入生成树。

```

1 void Prim(int n, Type c[][][MAXN])
2 {
3     bool S[MAXN];
4     Type lowcost[MAXN];
5     int closest[MAXN];
6     // 初始化: 从顶点 1 开始
7     for (int i = 1; i <= n; i++) {
8         S[i] = false;
9         lowcost[i] = c[1][i];
10        closest[i] = 1;
11    }
12    S[1] = true;
13    for (int i = 1; i < n; i++) {
14        Type min = maxint;
15        int j = 1;
16        // 选择距离生成树最近的顶点 j
17        for (int k = 2; k <= n; k++) {
18            if (!S[k] && lowcost[k] < min) {
19                min = lowcost[k];
20                j = k;
21            }
22        }
23        S[j] = true; // 将顶点 j 加入生成树
24        // 更新其余顶点到生成树的最小距离
25        for (int k = 2; k <= n; k++) {
26            if (!S[k] && c[j][k] < lowcost[k]) {
27                lowcost[k] = c[j][k];
28                closest[k] = j;
29            }
30        }
31    }
32 }
```

时间复杂度: 该实现中每次选择最小边需 $O(n)$, 共进行 $n - 1$ 次, 因此时间复杂度为 $O(n^2)$ 。

4.6.2 Kruskal 算法

基本思想: Kruskal 算法从边的角度构造最小生成树: 将所有边按权值从小到大排序; 依次选择当前权值最小且不会形成回路的边; 直到选取 $|V| - 1$ 条边为止。

```

1 void Kruskal(int n, int m, Edge edges[])
2 {
3     MinHeap<Edge> H;
4     UnionFind U(n);
5     for (int i = 1; i <= m; i++)
6         H.insert(edges[i]);    // 将所有边加入最小堆
7     int k = 0;    // 已选边数
8     while (k < n-1 && !H.empty()) {
9         Edge x;
10        H.deleteMin(x);      // 取出权值最小的边
11        int a = U.Find(x.u);
12        int b = U.Find(x.v);
13        if (a != b) {          // 不形成回路
14            k++;
15            U.Union(a, b);    // 合并两个连通分量
16        }
17    }
18 }
```

时间复杂度：边排序（或最小堆）需要 $O(m \log m)$; 并查集操作近似为 $O(1)$; 因此总体时间复杂度为 $O(m \log m)$ 。

算法比较：Prim 算法适合稠密图; Kruskal 算法适合稀疏图; 二者均为贪心算法，且都能正确求得最小生成树。

4.7 多机调度问题 (Multi-machine Scheduling)

问题描述：设有 n 个相互独立的作业 J_1, J_2, \dots, J_n , 以及 m 台相同的机器 M_1, M_2, \dots, M_m 。第 i 个作业的处理时间为 p_i 。每个作业可以在任意一台机器上加工，但同一时刻一台机器只能加工一个作业，且作业一旦开始加工不能中断。目标是：合理安排作业顺序与分配方案，使所有作业完成的总时间（完工时间，makespan）最小。

该问题是一个经典的 NP-完全问题，目前不存在多项式时间的精确算法，通常采用贪心策略设计近似算法。

贪心策略（最长作业优先，LPT）：将所有作业按处理时间 p_i 从大到小排序；依次将当前作业分配给当前负载最小（最早空闲）的机器。该策略的直观思想是：优先处理耗时最长的作业，避免其被推迟到后期造成整体完成时间过大。

算法步骤说明：

- 当 $n \leq m$ 时，可直接将每个作业分配给一台机器，总完成时间为 $\max\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$;
- 当 $n > m$ 时：
 1. 按作业处理时间从大到小排序；
 2. 维护每台机器的当前完成时间；
 3. 每次选择当前完成时间最小的机器分配下一个作业。

时间复杂度：

- 作业排序需要 $O(n \log n)$;

- 作业分配过程可在 $O(n \log m)$ (使用优先队列) 或 $O(nm)$ 时间内完成;
因此整体时间复杂度为 $O(n \log n)$.

5 回溯法

5.1 回溯法的基本框架

5.1.1 递归回溯

思想说明：回溯法对解空间树进行深度优先搜索。在一般情况下，回溯法采用递归方式实现。搜索过程中，逐层构造解向量，当到达叶结点时输出一个解；若当前部分解违反约束或不可能得到更优解，则进行剪枝。

```

1 void backtrack(int t)
2 {
3     if (t > n) output(x);
4     else
5         for (int i = f(n, t); i <= g(n, t); i++) {
6             x[t] = h(i);
7             if (constraint(t) && bound(t))
8                 backtrack(t + 1);
9         }
10 }
```

复杂度分析：回溯法在最坏情况下需要遍历整个解空间树。若每一层有 b 个分支、深度为 n ，则最坏时间复杂度为 $O(b^n)$ 。实际运行中，由于约束函数和限界函数的剪枝作用，搜索规模通常会显著减小。

5.1.2 迭代回溯

思想说明：递归回溯可以用非递归方式实现，即采用树的非递归深度优先遍历方法。迭代回溯通过显式维护层号 t ，模拟递归调用与回退过程。

```

1 void iterativeBacktrack()
2 {
3     int t = 1;
4     while (t > 0) {
5         if (f(n, t) <= g(n, t))
6             for (int i = f(n, t); i <= g(n, t); i++) {
7                 x[t] = h(i);
8                 if (constraint(t) && bound(t)) {
9                     if (solution(t)) output(x);
10                    else t++;
11                }
12            }
13            else t--;
14        }
15 }
```

复杂度分析：迭代回溯与递归回溯本质上遍历的是同一棵解空间树，因此在最坏情况下时间复杂度相同，仍为指数级 $O(b^n)$ ，仅实现方式不同。

5.1.3 子集树与排列树

子集树：子集树用于描述每个元素只有“取 / 不取”两种选择的问题，例如 0-1 背包、装载问题、最大团问题等。解空间是一棵二叉树。

```

1 void backtrack(int t)
2 {
3     if (t > n) output(x);
4     else
5         for (int i = 0; i <= 1; i++) {
6             x[t] = i;
7             if (legal(t)) backtrack(t + 1);
8         }
9 }
```

复杂度分析：子集树共有 2^n 个叶结点，因此遍历子集树的时间复杂度为 $O(2^n)$.

排列树：排列树用于描述需要枚举元素排列顺序的问题，例如旅行售货员问题、批处理作业调度问题等。解空间是一棵多叉树。

```

1 void backtrack(int t)
2 {
3     if (t > n) output(x);
4     else
5         for (int i = t; i <= n; i++) {
6             swap(x[t], x[i]);
7             if (legal(t)) backtrack(t + 1);
8             swap(x[t], x[i]);
9         }
10 }
```

复杂度分析：排列树共有 $n!$ 个叶结点，因此遍历排列树的时间复杂度为 $O(n!)$.

5.2 装载问题（回溯法）

问题描述：有一批共 n 个集装箱，需要装载到两艘轮船上，两艘轮船的载重量分别为 c_1 和 c_2 。第 i 个集装箱的重量为 w_i ，且满足 $\sum_{i=1}^n w_i \leq c_1 + c_2$. 装载问题要求判断是否存在一种合理的装载方案，使得所有集装箱均能被装入这两艘轮船中。

问题转化：若第一艘轮船尽可能多地装载集装箱，剩余集装箱自然装入第二艘轮船。因此，该问题可转化为：从 n 个集装箱中选择一个子集，使其总重量不超过 c_1 ，且尽可能接近 c_1 。这等价于一个特殊的**0-1 背包问题**，可采用**回溯法**求解。

```

1 void backtrack(int i)
2 {
3     if (i > n) {           // 到达叶结点
4         bestw = cw;        // 更新最优解
5         return;
6     }
7     r -= w[i];            // 更新剩余重量
8     if (cw + w[i] <= c) { // 搜索左子树（装第 i 个）
9         x[i] = 1;
10        cw += w[i];
11    }
12 }
```

```

11     backtrack(i + 1);
12     cw -= w[i];
13 }
14 if (cw + r > bestw) { // 搜索右子树（不装第 i 个）
15     x[i] = 0;
16     backtrack(i + 1);
17 }
18 r += w[i];           // 回退到上一层
19 }
```

复杂度分析：装载问题的解空间为一棵子集树，共有 2^n 个叶结点。在最坏情况下，回溯算法需要遍历整个解空间，其时间复杂度为 $O(2^n)$ 。但通过可行性约束和上界函数进行剪枝，实际搜索规模通常远小于 2^n 。在一般情况下，若 n 较大且要求多次求解，可采用动态规划算法求解。

5.3 批处理作业调度问题（回溯法）

问题描述：给定 n 个作业的集合 $\{J_1, J_2, \dots, J_n\}$ ，每个作业必须先在机器 1 上加工，然后在机器 2 上加工。作业 J_i 在机器 k 上的处理时间记为 $M[i][k]$ 。对于一个确定的作业调度顺序，设 f_2 为所有作业在机器 2 上完成加工的总时间，则该调度的完成时间为 f_2 。

目标：确定一种作业加工顺序，使得所有作业在机器 2 上完成的总时间最小。

```

1 void Flowsheet::Backtrack(int i)
2 {
3     if (i > n) {
4         for (int j = 1; j <= n; j++)
5             bestx[j] = x[j];
6         bestf = f;
7     }
8     else {
9         for (int j = i; j <= n; j++) {
10            f1 += M[x[j]][1];
11            f2[i] = (f2[i-1] > f1 ? f2[i-1] : f1) + M[x[j]][2];
12            f += f2[i];
13
14            if (f < bestf) {
15                swap(x[i], x[j]);
16                Backtrack(i + 1);
17                swap(x[i], x[j]);
18            }
19            f1 -= M[x[j]][1];
20            f -= f2[i];
21        }
22    }
}
```

复杂度分析：批处理作业调度问题的解空间是一棵排列树，最多包含 $n!$ 个叶结点。在最坏情况下，回溯算法需要遍历整个排列空间，时间复杂度为 $O(n!)$ 。通过限界函数进行剪枝，可以在实际运行中大幅减少搜索结点数，但该问题本质上仍是一个 **NP-难问题**。

5.4 符号三角形问题（回溯法）

问题描述：符号三角形由符号“+”和“-”组成。设第一行有 n 个符号，其余各行由上一行相邻两个符号决定：若两个符号相同，则下一行对应位置为“+”；若两个符号不同，则下一行对应位置为“-”。整个三角形共有 $\frac{n(n+1)}{2}$ 个符号。符号三角形问题要求：对于给定的 n ，计算有多少种不同的符号三角形，使得其中“+”和“-”的个数相同。

```

1 void Triangle::Backtrack(int t)
2 {
3     if ((count > half) || (t*(t+1)/2 - count > half))
4         return;
5     if (t > n)
6         sum++;
7     else
8         for (int i = 0; i < 2; i++) { // {0,1} -> {+, -}
9             p[1][t] = i;
10            count += i;
11            for (int j = 2; j <= t; j++) {
12                p[j][t-j+1] = p[j-1][t-j+1] + p[j-1][t-j+2];
13                count += p[j][t-j+1];
14            }
15            Backtrack(t + 1);
16            for (int j = 2; j <= t; j++)
17                count -= p[j][t-j+1];
18            count -= i;
19        }
20 }
```

复杂度分析：该问题的解空间为一棵子集树，规模为 2^n ；每一次可行性判断与符号生成的代价为 $O(n)$ ；因此在最坏情况下，算法时间复杂度为 $O(n2^n)$ 。通过可行性约束进行剪枝，可以显著减少实际搜索规模，但该问题本质上仍属于指数级复杂度问题。

5.5 n 后问题（回溯法）

问题描述：在一个 $n \times n$ 的棋盘上放置 n 个皇后，使得任意两个皇后之间都不能互相攻击。按照国际象棋规则，皇后可以攻击与其处在同一行、同一列或同一条对角线上的棋子。 n 后问题要求计算在棋盘上放置 n 个皇后的所有可行方案数。

可行性检测函数：

```

1 bool Queen::Place(int k)
2 {
3     for (int j = 1; j < k; j++)
4         if ((abs(x[j] - x[k])) == abs(j - k)) || (x[j] == x[k]))
5             return false;
6     return true;
7 }
```

回溯算法代码：

```

1 void Queen::Backtrack(int t)
2 {
```

```

3     if (t > n)
4         sum++;
5     else
6         for (int i = 1; i <= n; i++) {
7             x[t] = i;
8             if (Place(t))
9                 Backtrack(t + 1);
10            }
11        }

```

复杂度分析： n 后问题的解空间是一棵排列树，最多包含 $n!$ 个叶结点。在最坏情况下，回溯算法需要遍历整个排列空间，其时间复杂度为 $O(n!)$ 。通过可行性检测函数进行剪枝，可以显著减少实际搜索规模，但该问题仍属于指数时间复杂度问题。

5.6 0-1 背包问题（回溯法）

问题描述：给定 n 个物品，第 i 个物品的重量为 w_i ，价值为 p_i ，背包容量为 c_1 。每个物品只能选择“装入”或“不装入”一次。目标是在不超过背包容量的前提下，使装入物品的总价值最大。

回溯算法代码：

```

1 template<class Typew, class Typep>
2 void Knap<Typew, Typep>::Backtrack(int i)
3 {
4     if (i > n) {
5         bestp = cp;
6         return;
7     }
8     if (cw + w[i] <= c) {
9         cw += w[i];
10        cp += p[i];
11        Backtrack(i + 1);
12        cw -= w[i];
13        cp -= p[i];
14    }
15    if (Bound(i + 1) > bestp)
16        Backtrack(i + 1);
17 }

```

上界函数代码：

```

1 template<class Typew, class Typep>
2 Typep Knap<Typew, Typep>::Bound(int i)
3 {
4     Typew cleft = c - cw;
5     Typep b = cp;
6     while (i <= n && w[i] <= cleft) {
7         cleft -= w[i];
8         b += p[i];
9         i++;
10    }
11    if (i <= n)

```

```

12     b += p[i] / w[i] * cleft;
13     return b;
14 }
```

复杂度分析：0-1 背包问题的解空间为一棵子集树，最坏情况下共有 2^n 个叶结点。回溯算法在最坏情况下需要遍历整个解空间，时间复杂度为 $O(2^n)$ 。通过上界函数进行剪枝，可以显著减少实际搜索规模，但该问题本质上仍属于指数时间复杂度问题。

5.7 最大团问题（回溯法）

问题描述：给定无向图 $G = (V, E)$ 。若 $U \subseteq V$ ，且对任意 $u, v \in U$ ，都有 $(u, v) \in E$ ，则称 U 为图 G 的一个团。若 U 不包含于任何更大的团中，则称其为极大团。图 G 中顶点数最多的团称为**最大团**。最大团问题要求找出图 G 的一个最大团。

```

1 void Clique::Backtrack(int i)
2 {
3     if (i > n) {
4         for (int j = 1; j <= n; j++)
5             bestx[j] = x[j];
6         return;
7     }
8     bool OK = true;
9     for (int j = 1; j < i; j++)
10        if (x[j] && !a[i][j]) {
11            OK = false;
12            break;
13        }
14     if (OK) {
15         x[i] = 1;
16         cn++;
17         Backtrack(i + 1);
18         cn--;
19     }
20     if (cn + n - i > bestn) {
21         x[i] = 0;
22         Backtrack(i + 1);
23     }
24 }
```

复杂度分析：最大团问题的解空间规模为 2^n 。在最坏情况下，回溯算法需要遍历整个子集树，其时间复杂度为 $O(2^n)$ 。该问题是典型的 NP-难问题。

5.8 图的 m 着色问题（回溯法）

问题描述：给定无向连通图 $G = (V, E)$ 和 m 种不同的颜色，要求用这 m 种颜色对图中每个顶点着色，使得任意一条边的两个端点颜色不同。判断图是否存在一种合法的 m 着色方案。

回溯算法代码：

```

1 void Color::Backtrack(int t)
2 {
```

```

3     if (t > n)
4         sum++;
5     else
6         for (int i = 1; i <= m; i++) {
7             x[t] = i;
8             if (OK(t))
9                 Backtrack(t + 1);
10            }
11        }

```

可行性检测函数：

```

1 bool Color::OK(int k)
2 {
3     for (int j = 1; j < k; j++)
4         if (a[k][j] && x[j] == x[k])
5             return false;
6     return true;
7 }

```

复杂度分析：图的 m 着色问题的解空间为 m^n 。在最坏情况下，回溯算法需要遍历整个解空间，时间复杂度为 $O(m^n)$ 。该问题是 NP-完全问题。

5.9 旅行售货员问题（回溯法）

问题描述：设有 n 个城市，已知任意两个城市之间的距离。旅行售货员从某一城市出发，需要恰好访问每个城市一次，并最终返回出发城市，要求使得总旅行距离最短。

```

1 template<class Type>
2 void Traveling<Type>::Backtrack(int i)
3 {
4     if (i == n) {
5         if (a[x[n-1]][x[n]] != NoEdge &&
6             a[x[n]][x[1]] != NoEdge &&
7             (cc + a[x[n-1]][x[n]] + a[x[n]][x[1]] < bestc
8             || bestc == NoEdge)) {
9                 bestc = cc + a[x[n-1]][x[n]] + a[x[n]][x[1]];
10            }
11        }
12     else
13         for (int j = i; j <= n; j++) {
14             if (a[x[i-1]][x[j]] != NoEdge &&
15                 (cc + a[x[i-1]][x[j]] < bestc
16                 || bestc == NoEdge)) {
17                 swap(x[i], x[j]);
18                 cc += a[x[i-1]][x[i]];
19                 Backtrack(i + 1);
20                 cc -= a[x[i-1]][x[i]];
21                 swap(x[i], x[j]);
22             }
23         }

```

24 }

复杂度分析：旅行售货员问题的解空间规模为 $(n - 1)!$ 。在最坏情况下，回溯算法需要遍历所有排列，时间复杂度为 $O(n!)$ 。该问题是经典的 NP-难问题。

5.10 圆排列问题（回溯法）

问题描述：给定 n 个大小不等的圆，其半径分别为 c_1, c_2, \dots, c_n 。现要求将这 n 个圆排列在一条水平直线上，使所有圆都与水平线相切，且整体排列所占的长度最小。圆排列问题要求确定一种排列顺序，使得最左端到最右端的距离最小。

回溯算法代码：

```

1 void Circle::Backtrack(int t)
2 {
3     if (t > n)
4         Compute();
5     else
6         for (int j = t; j <= n; j++) {
7             swap(r[t], r[j]);
8             if (Center(t) < best)
9                 Backtrack(t + 1);
10            swap(r[t], r[j]);
11        }
12 }
```

圆心计算函数：

```

1 float Circle::Center(int t)
2 {
3     float temp = 0;
4     for (int j = 1; j < t; j++) {
5         float value = x[j] + 2.0 * sqrt(r[j] * r[t]);
6         if (value > temp)
7             temp = value;
8     }
9     x[t] = temp;
10    float low = 0, high = 0;
11    for (int i = 1; i <= t; i++) {
12        if (x[i] - r[i] < low)
13            low = x[i] - r[i];
14        if (x[i] + r[i] > high)
15            high = x[i] + r[i];
16    }
17    if (high - low < best)
18        best = high - low;
19    return x[t];
20 }
```

复杂度分析：圆排列问题的解空间为一棵排列树，最坏情况下需要枚举 $n!$ 种排列。在每个结点需要 $O(n)$ 时间计算排列长度，因此算法在最坏情况下的时间复杂度为 $O(n \cdot n!)$ 。

5.11 连续邮资问题（回溯法）

问题描述：假设国家发行了 n 种不同面值的邮票，并规定每封信封上最多允许贴 m 张邮票。连续邮资问题要求确定这 n 种邮票的面值，使得在最多贴 m 张邮票的条件下，从 1 开始可以连续表示的邮资区间尽可能大。

```
1 void Stamp::Backtrack(int t)
2 {
3     if (t > n) {
4         if (r[n] > maxvalue) {
5             maxvalue = r[n];
6             for (int j = 1; j <= n; j++)
7                 bestx[j] = x[j];
8         }
9         return;
10    }
11    int *z = new int[maxx + 1];
12    for (int i = 1; i <= maxx; i++)
13        z[i] = y[i];
14
15    for (int i = x[t-1] + 1; i <= r[t-1] + 1; i++) {
16        x[t] = i;
17        for (int k = 1; k <= maxx; k++)
18            y[k] = z[k];
19        Update(t);
20        Backtrack(t + 1);
21    }
22    for (int k = 1; k <= maxx; k++)
23        y[k] = z[k];
24    delete[] z;
25 }
```

复杂度分析：连续邮资问题的解空间规模随 n 和 m 急剧增长，在最坏情况下，回溯算法需要枚举大量组合，时间复杂度为指数级。