

Министерство образования и науки Российской Федерации
федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Сибирский государственный аэрокосмический университет
имени академика М.Ф. Решетнева»

Сергиенко Антон Борисович

Тестовые функции для глобальной оптимизации. v.1.26

Красноярск – 2013

Оглавление

Условные обозначения	10
Введение	11
1 Задачи вещественной оптимизации	12
1.1 Функция Ackley	12
1.1.1 Описание функции	12
1.1.2 Параметры для алгоритмов оптимизации	13
1.1.3 Основная задача и подзадачи	13
1.1.4 Нахождение ошибки оптимизации	14
1.1.5 Свойства задачи	14
1.1.6 Реализация	14
1.1.7 Ссылки	15
1.2 Функция Гриванка	15
1.2.1 Описание функции	15
1.2.2 Параметры для алгоритмов оптимизации	16
1.2.3 Основная задача и подзадачи	17
1.2.4 Нахождение ошибки оптимизации	17
1.2.5 Свойства задачи	18
1.2.6 Реализация	18
1.2.7 Ссылки	18
1.3 Функция Гипер-эллипсоид	19
1.3.1 Описание функции	19
1.3.2 Параметры для алгоритмов оптимизации	20
1.3.3 Основная задача и подзадачи	20
1.3.4 Нахождение ошибки оптимизации	20

1.3.5	Свойства задачи	21
1.3.6	Реализация	21
1.3.7	Ссылки	22
1.4	Эллиптический параболоид	22
1.4.1	Описание функции	22
1.4.2	Параметры для алгоритмов оптимизации	23
1.4.3	Основная задача и подзадачи	23
1.4.4	Нахождение ошибки оптимизации	23
1.4.5	Свойства задачи	24
1.4.6	Реализация	24
1.4.7	Ссылки	25
1.5	Функция Растрогина	25
1.5.1	Описание функции	25
1.5.2	Параметры для алгоритмов оптимизации	26
1.5.3	Основная задача и подзадачи	26
1.5.4	Нахождение ошибки оптимизации	26
1.5.5	Свойства задачи	27
1.5.6	Реализация	27
1.5.7	Ссылки	28
1.6	Функция Розенброка	28
1.6.1	Описание функции	28
1.6.2	Параметры для алгоритмов оптимизации	29
1.6.3	Основная задача и подзадачи	29
1.6.4	Нахождение ошибки оптимизации	30
1.6.5	Свойства задачи	30
1.6.6	Реализация	30
1.6.7	Ссылки	31
1.7	Развёрнутый гипер-эллипсоид	31
1.7.1	Описание функции	31
1.7.2	Параметры для алгоритмов оптимизации	32
1.7.3	Основная задача и подзадачи	32
1.7.4	Нахождение ошибки оптимизации	33

1.7.5	Свойства задачи	33
1.7.6	Реализация	33
1.7.7	Ссылки	34
1.8	Функция Швефеля	34
1.8.1	Описание функции	34
1.8.2	Параметры для алгоритмов оптимизации	36
1.8.3	Основная задача и подзадачи	36
1.8.4	Нахождение ошибки оптимизации	36
1.8.5	Свойства задачи	37
1.8.6	Реализация	37
1.8.7	Ссылки	38
1.9	Функция Step (модифицированная версия De Jong 3)	38
1.9.1	Описание функции	38
1.9.2	Параметры для алгоритмов оптимизации	39
1.9.3	Основная задача и подзадачи	40
1.9.4	Нахождение ошибки оптимизации	40
1.9.5	Свойства задачи	41
1.9.6	Реализация	41
1.9.7	Ссылки	42
1.10	Аддитивная потенциальная функция	42
1.10.1	Описание функции	42
1.10.2	Параметры для алгоритмов оптимизации	42
1.10.3	Основная задача и подзадачи	43
1.10.4	Нахождение ошибки оптимизации	43
1.10.5	Свойства задачи	44
1.10.6	Реализация	44
1.10.7	Ссылки	44
1.11	Функция Egg Holder	45
1.11.1	Описание функции	45
1.11.2	Параметры для алгоритмов оптимизации	46
1.11.3	Основная задача и подзадачи	46
1.11.4	Нахождение ошибки оптимизации	46

1.11.5 Свойства задачи	47
1.11.6 Реализация	47
1.11.7 Ссылки	47
1.12 Функция Химмельблау	48
1.12.1 Описание функции	48
1.12.2 Параметры для алгоритмов оптимизации	49
1.12.3 Основная задача и подзадачи	49
1.12.4 Нахождение ошибки оптимизации	49
1.12.5 Свойства задачи	50
1.12.6 Реализация	50
1.12.7 Ссылки	51
1.13 Перевернутая функция Розенброка	51
1.13.1 Описание функции	51
1.13.2 Параметры для алгоритмов оптимизации	51
1.13.3 Основная задача и подзадачи	52
1.13.4 Нахождение ошибки оптимизации	52
1.13.5 Свойства задачи	53
1.13.6 Реализация	53
1.13.7 Ссылки	53
1.14 Функция Катникова	54
1.14.1 Описание функции	54
1.14.2 Параметры для алгоритмов оптимизации	55
1.14.3 Основная задача и подзадачи	55
1.14.4 Нахождение ошибки оптимизации	55
1.14.5 Свойства задачи	56
1.14.6 Реализация	56
1.14.7 Ссылки	56
1.15 Функция Multiextremal3	57
1.15.1 Описание функции	57
1.15.2 Параметры для алгоритмов оптимизации	58
1.15.3 Основная задача и подзадачи	58
1.15.4 Нахождение ошибки оптимизации	58

1.15.5 Свойства задачи	59
1.15.6 Реализация	59
1.15.7 Ссылки	59
1.16 Функция Multiextremal4	60
1.16.1 Описание функции	60
1.16.2 Параметры для алгоритмов оптимизации	61
1.16.3 Основная задача и подзадачи	61
1.16.4 Нахождение ошибки оптимизации	61
1.16.5 Свойства задачи	62
1.16.6 Реализация	62
1.16.7 Ссылки	62
1.17 Мультипликативная потенциальная функция	63
1.17.1 Описание функции	63
1.17.2 Параметры для алгоритмов оптимизации	64
1.17.3 Основная задача и подзадачи	64
1.17.4 Нахождение ошибки оптимизации	64
1.17.5 Свойства задачи	65
1.17.6 Реализация	65
1.17.7 Ссылки	65
1.18 Функция Rana	66
1.18.1 Описание функции	66
1.18.2 Параметры для алгоритмов оптимизации	67
1.18.3 Основная задача и подзадачи	67
1.18.4 Нахождение ошибки оптимизации	67
1.18.5 Свойства задачи	68
1.18.6 Реализация	68
1.18.7 Ссылки	68
1.19 Функция Растригина с изменением коэффициентов	69
1.19.1 Описание функции	69
1.19.2 Параметры для алгоритмов оптимизации	70
1.19.3 Основная задача и подзадачи	70
1.19.4 Нахождение ошибки оптимизации	70

1.19.5 Свойства задачи	71
1.19.6 Реализация	71
1.19.7 Ссылки	71
1.20 Функция Растригина овражная с поворотом осей	72
1.20.1 Описание функции	72
1.20.2 Параметры для алгоритмов оптимизации	73
1.20.3 Основная задача и подзадачи	73
1.20.4 Нахождение ошибки оптимизации	73
1.20.5 Свойства задачи	74
1.20.6 Реализация	74
1.20.7 Ссылки	74
1.21 Функция ReverseGriewank	75
1.21.1 Описание функции	75
1.21.2 Параметры для алгоритмов оптимизации	76
1.21.3 Основная задача и подзадачи	76
1.21.4 Нахождение ошибки оптимизации	76
1.21.5 Свойства задачи	77
1.21.6 Реализация	77
1.21.7 Ссылки	77
1.22 Функция «Лисьи норы» Шекеля	78
1.22.1 Описание функции	78
1.22.2 Параметры для алгоритмов оптимизации	79
1.22.3 Основная задача и подзадачи	79
1.22.4 Нахождение ошибки оптимизации	79
1.22.5 Свойства задачи	80
1.22.6 Реализация	80
1.22.7 Ссылки	81
1.23 Функция Сомбреро	82
1.23.1 Описание функции	82
1.23.2 Параметры для алгоритмов оптимизации	83
1.23.3 Основная задача и подзадачи	83
1.23.4 Нахождение ошибки оптимизации	83

1.23.5 Свойства задачи	84
1.23.6 Реализация	84
1.23.7 Ссылки	84
1.24 Функция Multiextremal	85
1.24.1 Описание функции	85
1.24.2 Параметры для алгоритмов оптимизации	86
1.24.3 Основная задача и подзадачи	86
1.24.4 Нахождение ошибки оптимизации	86
1.24.5 Свойства задачи	87
1.24.6 Реализация	87
1.24.7 Ссылки	87
1.25 Функция Multiextremal2	88
1.25.1 Описание функции	88
1.25.2 Параметры для алгоритмов оптимизации	89
1.25.3 Основная задача и подзадачи	89
1.25.4 Нахождение ошибки оптимизации	89
1.25.5 Свойства задачи	90
1.25.6 Реализация	90
1.25.7 Ссылки	90
1.26 Функция волна	91
1.26.1 Описание функции	91
1.26.2 Параметры для алгоритмов оптимизации	92
1.26.3 Основная задача и подзадачи	92
1.26.4 Нахождение ошибки оптимизации	92
1.26.5 Свойства задачи	93
1.26.6 Реализация	93
1.26.7 Ссылки	93
2 Задачи бинарной оптимизации	94
2.1 Сумма всех элементов бинарного вектора	94
2.1.1 Описание функции	94
2.1.2 Основная задача и подзадачи	95

2.1.3	Нахождение ошибки оптимизации	95
2.1.4	Свойства задачи	96
2.1.5	Реализация	96
Литература		97

Условные обозначения

$a \in A$ — элемент a принадлежит множеству A .

\bar{x} — обозначение вектора.

$\arg f(x)$ — возвращает аргумент x , при котором функция принимает значение $f(x)$.

$\text{Random}(X)$ — случайный выбор элемента из множества X с равной вероятностью.

$\text{Random}(\{x^i \mid p^i\})$ — случайный выбор элемента x^i из множества X , при условии, что каждый элемент $x^i \in X$ имеет вероятность выбора равную p^i , то есть это обозначение равнозначно предыдущему.

$\text{random}(a, b)$ — случайное действительное число из интервала $[a; b]$.

$\text{int}(a)$ — целая часть действительного числа a .

$\mu(X)$ — мощность множества X .

Замечание. Оператор присваивания обозначается через знак « $=$ », так же как и знак равенства.

Замечание. Индексация всех массивов в документе начинается с 1. Это стоит помнить при реализации алгоритма на С-подобных языках программирования, где индексация начинается с нуля.

Замечание. Вызывание трех функций: $\text{Random}(X)$, $\text{Random}(\{x_i \mid p_i\})$, $\text{random}(a, b)$ — происходит каждый раз, когда по ходу выполнения формул, они встречаются. Если формула итерационная, то нельзя перед ее вызовом один раз определить, например, $\text{random}(a, b)$ как константу и потом её использовать на протяжении всех итераций неизменной.

Замечание. Надстрочный индекс может обозначать как возведение в степень, так и индекс элемента. Конкретное обозначение определяется в контексте текста, в котором используется формула с надстрочным индексом.

Замечание. Если у нас имеется множество векторов, то подстрочный индекс обозначает номер компоненты конкретного вектора, а надстрочный индекс обозначает номер вектора во множестве, например, $\bar{x}^i \in X$ ($i = \overline{1, N}$), $\bar{x}_j^i \in \{0; 1\}$, ($j = \overline{1, n}$). В случае, если вектор имеет свое обозначение в виде подстрочной надписи, то компоненты вектора проставляются за скобками, например, $(\bar{x}_{\max})_j = 0$ ($j = \overline{1, n}$).

Замечание. При выводе матриц и векторов элементы могут разделяться как пробелом, так и точкой с запятой, то есть обе записи $(1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1)^T$ и $(1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1)^T$ допустимы.

Замечание. При выводе множеств элементы разделяются только точкой с запятой, то есть допустима только такая запись: $\{1; 1; 1; 1; 1; 1; 1\}^T$.

Введение

В данном документе рассмотрено множество тестовых функций, которые можно использовать для проведения исследований алгоритмов оптимизации. К каждой функции дано подробное описание, график (если это возможно), свойства и параметров, которые позволяют единственно проводить сравнения разных алгоритмов оптимизации во избежания несостыковок с точки зрения разного понимания нахождения ошибки, точности работы алгоритмом.

Данный документ представляет его версию **1.26** от 3 января 2014 г.

Последнюю версию документа можно найти по адресу:

<https://github.com/Harrix/HarrixTestFunctions>

Там же можно найти реализацию тестовых функций в среде Mathcad.

Тестовые функции реализованы на языке C++ в библиотеке **HarrixMathLibrary** в разделе «Тестовые функции для оптимизации», которую можно найти по адресу:

<https://github.com/Harrix/HarrixMathLibrary>.

Все библиографические материалы, которые используются в документе, приведены в виде скриншотов, скринов, документов в папке **_Biblio** на <https://github.com/Harrix/HarrixTestFunctions>.

С автором можно связаться по адресу sergienkoanton@mail.ru или <http://vk.com/harrix>.

Сайт автора, где публикуются последние новости: <http://blog.harrix.org/>, а проекты расположаются по адресу <http://harrix.org/>.

Глава 1

Задачи вещественной оптимизации

1.1 Функция Ackley

1.1.1 Описание функции

Идентификатор:

MHL_TestFunction_Ackley.

Наименование:

Функция Ackley.

Тип:

Задача вещественной оптимизации.

Формула (целевая функция):

$$f(\bar{x}) = 20 + e - 20e^{-0.2\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{x}_i^2}} - e^{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \cos(2\pi \cdot \bar{x}_i)}, \text{ где } \quad (1.1)$$

$\bar{x} \in X$, $\bar{x}_j \in [Left_j; Right_j]$, $Left_j = -5$, $Right_j = 5$, $j = \overline{1, n}$.

Обозначение:

\bar{x} — вещественный вектор;

n — размерность вещественного вектора.

Решаемая задача оптимизации:

$\bar{x}_{min} = \arg \min_{\bar{x} \in X} f(\bar{x})$.

Точка минимума:

$\bar{x}_{min} = (0, 0, \dots, 0)^T$, то есть $(\bar{x}_{min})_j = 0$ ($j = \overline{1, n}$).

Минимум функции:

$f(\bar{x}_{min}) = 0$.

График:

Рисунок 1.1 на с. 13 стр.

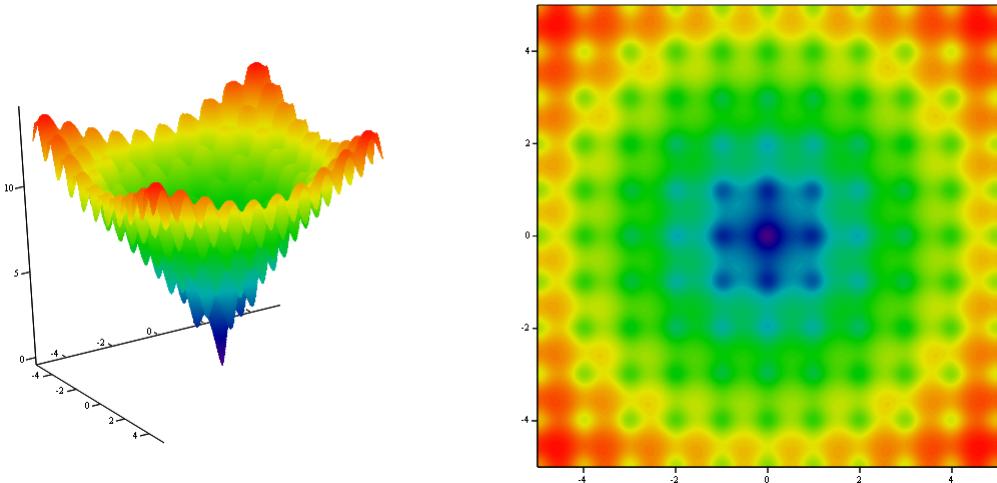


Рисунок 1.1. Функция Ackley

1.1.2 Параметры для алгоритмов оптимизации

Точность вычислений:

$$\varepsilon = 0.025.$$

Число интервалов, на которые предполагается разбивать каждую компоненту вектора \bar{x} в пределах своего изменения (для алгоритмов дискретной оптимизации) :

$$NumberOfParts_j = 4095 \ (j = \overline{1, n}).$$

Для этого длина бинарной строки для x_j координаты равна (для алгоритмов бинарной оптимизации) :

$$(k_2)_j = 12 \ (j = \overline{1, n}).$$

Замечание: $NumberOfParts_j$ выбирается как минимальное число, удовлетворяющее соотношению:

$$NumberOfParts_j = 2^{(k_2)_j} - 1 \geq \frac{10 (Right_j - Left_j)}{\varepsilon}, \text{ где } (k_2)_j \in \mathbb{N}, (j = \overline{1, n}).$$

1.1.3 Основная задача и подзадачи

Изменяемый параметр:

n — размерность вещественного вектора.

Значение в основной задаче:

$$n = 2.$$

Подзадача №2:

$$n = 3.$$

Подзадача №3:

$$n = 4.$$

Подзадача №4:

$$n = 5.$$

Подзадача №5:

$$n = 10.$$

Подзадача №6:

$$n = 20.$$

Подзадача №7:

$$n = 30.$$

1.1.4 Нахождение ошибки оптимизации

Пусть в результате работы алгоритма оптимизации за N запусков мы нашли решения \bar{x}_{submin}^k со значениями целевой функции $f(\bar{x}_{submin}^k)$ соответственно ($k = \overline{1, N}$). Используем три вида ошибок:

Надёжность:

$$R = \frac{\sum_{k=1}^N S(\bar{x}_{submin}^k)}{N}, \text{ где}$$
$$S(\bar{x}_{submin}^k) = \begin{cases} 1, & \text{если } |(\bar{x}_{submin}^k)_j - (\bar{x}_{min})_j| < \varepsilon, j = \overline{1, n}; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Ошибка по входным параметрам:

$$E_x = \frac{\sum_{k=1}^N \left(\frac{\sqrt{\sum_{j=1}^n ((\bar{x}_{submin}^k)_j - (\bar{x}_{min})_j)^2}}{n} \right)}{N}.$$

Ошибка по значениям целевой функции:

$$E_f = \frac{\sum_{k=1}^N |f(\bar{x}_{submin}^k) - f(\bar{x}_{min})|}{N}.$$

1.1.5 Свойства задачи

Условной или безусловной оптимизации: Задача безусловной оптимизации.

Одномерной или многомерной оптимизации: Многомерной: n .

Функция унимодальная или многоэкстремальная: Функция многоэкстремальная.

Функция стохастическая или нет: Функция не стохастическая.

Особенности: Нет.

1.1.6 Реализация

Реализация функции взята из библиотеки HarrixMathLibrary в разделе «Тестовые функции для оптимизации», которую можно найти по адресу <https://github.com/Harrix/HarrixMathLibrary>.

Код 1.1. Код функции MHL_TestFunction_Ackley

```
double MHL_TestFunction_Ackley(double *x, int VMHL_N)
{
    /*
```

Функция многих переменных: Ackley.
Тестовая функция вещественной оптимизации.
Входные параметры:
x – указатель на исходный массив;
VMHL_N – размер массива x.
Возвращаемое значение:
Значение тестовой функции в точке x.
**/*
double VMHL_Result;
double f1,f2=0;
f1=exp(-0.2*sqrt(TMHL_SumSquareVector(x,VMHL_N)/**double**(VMHL_N)));
for (**int** i=0;i<VMHL_N;i++) f2=f2+cos(2.*MHL_PI*x[i]);
f2=exp(f2/**double**(VMHL_N));
VMHL_Result=20.+exp(1)-20.*f1-f2;
return VMHL_Result;
}

1.1.7 Ссылки

Данная функция приводится в следующих источниках:

1. [1, стр. 5] — Empirical review of standard benchmark functions using evolutionary global optimization.
2. [2] — Ackley's Function.

1.2 Функция Гриванка

1.2.1 Описание функции

Идентификатор:	MHL_TestFunction_Griewangk.
Наименование:	Функция Гриванка.
Тип:	Задача вещественной оптимизации.

Формула (целевая функция):

$$f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{\bar{x}_i^2}{4000} - \prod_{i=1}^n \cos\left(\frac{\bar{x}_i}{\sqrt{i}}\right) + 1, \text{ где } \quad (1.2)$$

$\bar{x} \in X$, $\bar{x}_j \in [Left_j; Right_j]$, $Left_j = -16$, $Right_j = 16$, $j = \overline{1, n}$.

Обозначение:

\bar{x} — вещественный вектор;

n — размерность вещественного вектора.

Решаемая задача оптимизации:

$$\bar{x}_{min} = \arg \min_{\bar{x} \in X} f(\bar{x}).$$

Точка минимума:

$$\bar{x}_{min} = (0, 0, \dots, 0)^T, \text{ то есть } (\bar{x}_{min})_j = 0 \ (j = \overline{1, n}).$$

Минимум функции:

$$f(\bar{x}_{min}) = 0.$$

График:

Рисунок 1.2 на с. 16 стр.

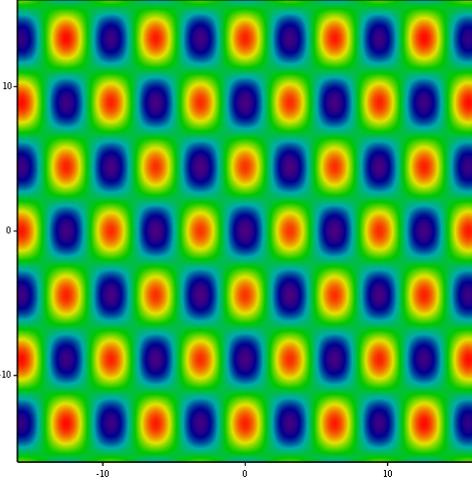
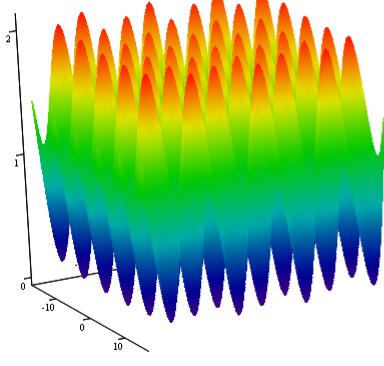


Рисунок 1.2. Функция Гриванка

1.2.2 Параметры для алгоритмов оптимизации

Точность вычислений:

$$\varepsilon = 0.08.$$

Число интервалов, на которые предполагается разбивать каждую компоненту вектора \bar{x} в пределах своего изменения (для алгоритмов дискретной оптимизации) :

$$NumberOfParts_j = 4095 \ (j = \overline{1, n}).$$

Для этого длина бинарной строки для x_j координаты равна (для алгоритмов бинарной оптимизации) :

$$(k_2)_j = 12 \ (j = \overline{1, n}).$$

Замечание: $NumberOfParts_j$ выбирается как минимальное число, удовлетворяющее соотношению:

$$NumberOfParts_j = 2^{(k_2)_j} - 1 \geq \frac{10 (Right_j - Left_j)}{\varepsilon}, \text{ где } (k_2)_j \in \mathbb{N}, (j = \overline{1, n}).$$

1.2.3 Основная задача и подзадачи

Изменяемый параметр:	n — размерность вещественного вектора.
Значение в основной задаче:	$n = 2$.
Подзадача №2:	$n = 3$.
Подзадача №3:	$n = 4$.
Подзадача №4:	$n = 5$.
Подзадача №5:	$n = 10$.
Подзадача №6:	$n = 20$.
Подзадача №7:	$n = 30$.

1.2.4 Нахождение ошибки оптимизации

Пусть в результате работы алгоритма оптимизации за N запусков мы нашли решения \bar{x}_{submin}^k со значениями целевой функции $f(\bar{x}_{submin}^k)$ соответственно ($k = \overline{1, N}$). Используем три вида ошибок:

Надёжность:

$$R = \frac{\sum_{k=1}^N S(\bar{x}_{submin}^k)}{N}, \text{ где}$$

$$S(\bar{x}_{submin}^k) = \begin{cases} 1, & \text{если } \left| (\bar{x}_{submin}^k)_j - (\bar{x}_{min})_j \right| < \varepsilon, j = \overline{1, n}; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Ошибка по входным параметрам:

$$E_x = \frac{\sum_{k=1}^N \left(\sqrt{\sum_{j=1}^n ((\bar{x}_{submin}^k)_j - (\bar{x}_{min})_j)^2} \right)}{N}.$$

Ошибка по значениям целевой функции:

$$E_f = \frac{\sum_{k=1}^N |f(\bar{x}_{submin}^k) - f(\bar{x}_{min})|}{N}.$$

1.2.5 Свойства задачи

Условной или безусловной оптимизации: Задача безусловной оптимизации.

Одномерной или многомерной оптимизации: Многомерной: n .

Функция унимодальная или многоэкстремальная: Функция многоэкстремальная.

Функция стохастическая или нет: Функция не стохастическая.

Особенности: Локальные минимумы очень похожи на глобальный по своему значению.

1.2.6 Реализация

Реализация функции взята из библиотеки HarrixMathLibrary в разделе «Тестовые функции для оптимизации», которую можно найти по адресу <https://github.com/Harrix/HarrixMathLibrary>.

Код 1.2. Код функции MHL_TestFunction_Griewangk

```
double MHL_TestFunction_Griewangk(double *x, int VMHL_N)
{
/*
Функция многих переменных: функция Гриванка.
Тестовая функция вещественной оптимизации.
Входные параметры:
    x - указатель на исходный массив;
    VMHL_N - размер массива x.
Возвращаемое значение:
    Значение тестовой функции в точке x.
*/
double VMHL_Result=0;
double f=1;
int i;

for (i=0;i<VMHL_N;i++) VMHL_Result+=x[i]*x[i];
VMHL_Result/=4000.;

for (i=0;i<VMHL_N;i++) f=f*cos(x[i]/sqrt(i+1));

VMHL_Result=VMHL_Result-f+1.;

return VMHL_Result;
}
```

1.2.7 Ссылки

Данная функция приводится в следующих источниках:

1. [3, стр. 7] – GEATbx Examples. Examples of Objective Functions.

2. [4, стр. 16] — A Literature Survey of Benchmark Functions For Global Optimization Problems.

1.3 Функция Гипер-эллипсоид

1.3.1 Описание функции

Идентификатор: MHL_TestFunction_HyperEllipsoid.

Наименование: Гипер-эллипсоид.

Тип: Задача вещественной оптимизации.

Формула (целевая функция):

$$f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^n (i \cdot \bar{x}_i)^2, \text{ где} \quad (1.3)$$

$\bar{x} \in X, \bar{x}_j \in [Left_j; Right_j], Left_j = -5, Right_j = 5, j = \overline{1, n}.$

Обозначение: \bar{x} — вещественный вектор;

n — размерность вещественного вектора.

Решаемая задача оптимизации: $\bar{x}_{min} = \arg \min_{\bar{x} \in X} f(\bar{x}).$

Точка минимума: $\bar{x}_{min} = (0, 0, \dots, 0)^T$, то есть $(\bar{x}_{min})_j = 0 (j = \overline{1, n}).$

Минимум функции: $f(\bar{x}_{min}) = 0.$

График: Рисунок 1.3 на с. 19

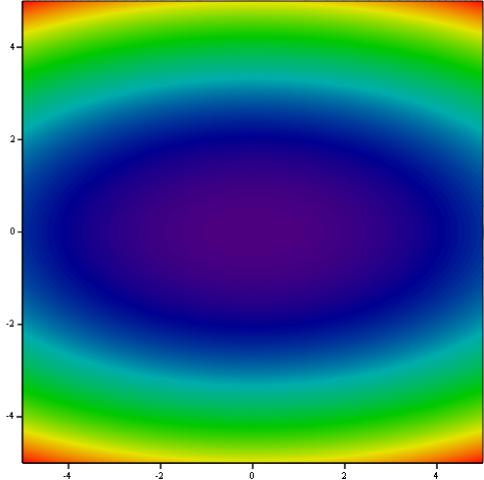
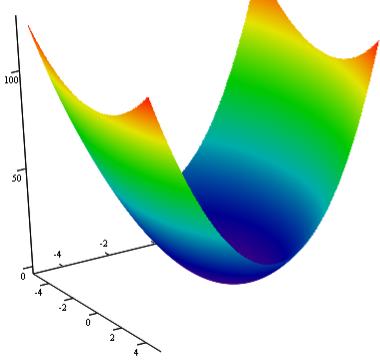


Рисунок 1.3. Гипер-эллипсоид

1.3.2 Параметры для алгоритмов оптимизации

Точность вычислений: $\varepsilon = 0.025$.

Число интервалов, на которые предполагается разбивать каждую компоненту вектора \bar{x} в пределах своего изменения (для алгоритмов дискретной оптимизации) :

Для этого длина бинарной строки для x_j координаты равна (для алгоритмов бинарной оптимизации) :

Замечание: $NumberOfParts_j$ выбирается как минимальное число, удовлетворяющее соотношению:

$$NumberOfParts_j = 2^{(k_2)_j} - 1 \geq \frac{10 (Right_j - Left_j)}{\varepsilon}, \text{ где } (k_2)_j \in \mathbb{N}, (j = \overline{1, n}).$$

1.3.3 Основная задача и подзадачи

Изменяемый параметр: n — размерность вещественного вектора.

Значение в основной задаче: $n = 2$.

Подзадача №2: $n = 3$.

Подзадача №3: $n = 4$.

Подзадача №4: $n = 5$.

Подзадача №5: $n = 10$.

Подзадача №6: $n = 20$.

Подзадача №7: $n = 30$.

1.3.4 Нахождение ошибки оптимизации

Пусть в результате работы алгоритма оптимизации за N запусков мы нашли решения \bar{x}_{submin}^k со значениями целевой функции $f(\bar{x}_{submin}^k)$ соответственно ($k = \overline{1, N}$). Используем три вида ошибок:

Надёжность:

$$R = \frac{\sum_{k=1}^N S(\bar{x}_{submin}^k)}{N}, \text{ где}$$

$$S(\bar{x}_{submin}^k) = \begin{cases} 1, & \text{если } \left| (\bar{x}_{submin}^k)_j - (\bar{x}_{min})_j \right| < \varepsilon, j = \overline{1, n}; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Ошибка по входным параметрам:

$$E_x = \frac{\sum_{k=1}^N \left(\frac{\sqrt{\sum_{j=1}^n ((\bar{x}_{submin}^k)_j - (\bar{x}_{min})_j)^2}}{n} \right)}{N}.$$

Ошибка по значениям целевой функции:

$$E_f = \frac{\sum_{k=1}^N |f(\bar{x}_{submin}^k) - f(\bar{x}_{min})|}{N}.$$

1.3.5 Свойства задачи

Условной или безусловной оптимизации: Задача безусловной оптимизации.

Одномерной или многомерной оптимизации: Многомерной: n .

Функция унимодальная или многоэкстремальная: Функция унимодальная.

Функция стохастическая или нет: Функция не стохастическая.

Особенности: Нет.

1.3.6 Реализация

Реализация функции взята из библиотеки HarrixMathLibrary в разделе «Тестовые функции для оптимизации», которую можно найти по адресу <https://github.com/Harrix/HarrixMathLibrary>.

Код 1.3. Код функции MHL_TestFunction_HyperEllipsoid

```
double MHL_TestFunction_HyperEllipsoid(double *x, int VMHL_N)
{
/*
Функция многих переменных: Гипер-эллипсоид.
Тестовая функция вещественной оптимизации.
Входные параметры:
    x - указатель на исходный массив;
    VMHL_N - размер массива x.
Возвращаемое значение:
    Значение тестовой функции в точке x.
*/
double VMHL_Result=0;

for (int i=0;i<VMHL_N;i++)
    VMHL_Result += (i+1)*(i+1)*x[i]*x[i];

return VMHL_Result;
}
```

1.3.7 Ссылки

В данном виде тестовую функцию в литературе не нашел. Обычно используется несколько иной вид этой функции, когда i не возводится в квадрат.

1.4 Эллиптический параболоид

1.4.1 Описание функции

Идентификатор:

MHL_TestFunction_ParaboloidOfRevolution.

Наименование:

Эллиптический параболоид.

Тип:

Задача вещественной оптимизации.

Формула (целевая функция):

$$f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i^2, \text{ где} \quad (1.4)$$

$\bar{x} \in X, \bar{x}_j \in [Left_j; Right_j], Left_j = -2, Right_j = 2, j = \overline{1, n}.$

Обозначение:

\bar{x} — вещественный вектор;

n — размерность вещественного вектора.

Решаемая задача оптимизации:

$\bar{x}_{min} = \arg \min_{\bar{x} \in X} f(\bar{x}).$

Точка минимума:

$\bar{x}_{min} = (0, 0, \dots, 0)^T$, то есть $(\bar{x}_{min})_j = 0 (j = \overline{1, n}).$

Минимум функции:

$f(\bar{x}_{min}) = 0.$

График:

Рисунок 1.4 на с. 22 стр.

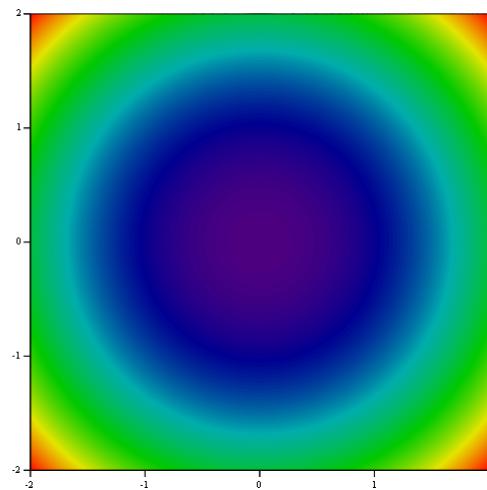
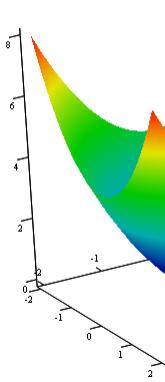


Рисунок 1.4. Эллиптический параболоид

1.4.2 Параметры для алгоритмов оптимизации

Точность вычислений:

$$\varepsilon = 0.01.$$

Число интервалов, на которые предполагается разбивать каждую компоненту вектора \bar{x} в пределах своего изменения (для алгоритмов дискретной оптимизации) :

Для этого длина бинарной строки для x_j координаты равна (для алгоритмов бинарной оптимизации) :

Замечание: $NumberOfParts_j$ выбирается как минимальное число, удовлетворяющее соотношению:

$$NumberOfParts_j = 2^{(k_2)_j} - 1 \geq \frac{10 (Right_j - Left_j)}{\varepsilon}, \text{ где } (k_2)_j \in \mathbb{N}, (j = \overline{1, n}).$$

1.4.3 Основная задача и подзадачи

Изменяемый параметр:

n — размерность вещественного вектора.

Значение в основной задаче:

$$n = 2.$$

Подзадача №2:

$$n = 3.$$

Подзадача №3:

$$n = 4.$$

Подзадача №4:

$$n = 5.$$

Подзадача №5:

$$n = 10.$$

Подзадача №6:

$$n = 20.$$

Подзадача №7:

$$n = 30.$$

1.4.4 Нахождение ошибки оптимизации

Пусть в результате работы алгоритма оптимизации за N запусков мы нашли решения \bar{x}_{submin}^k со значениями целевой функции $f(\bar{x}_{submin}^k)$ соответственно ($k = \overline{1, N}$). Используем три вида ошибок:

Надёжность:

$$R = \frac{\sum_{k=1}^N S(\bar{x}_{submin}^k)}{N}, \text{ где}$$

$$S(\bar{x}_{submin}^k) = \begin{cases} 1, & \text{если } \left| (\bar{x}_{submin}^k)_j - (\bar{x}_{min})_j \right| < \varepsilon, j = \overline{1, n}; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Ошибка по входным параметрам:

$$E_x = \frac{\sum_{k=1}^N \left(\frac{\sqrt{\sum_{j=1}^n ((\bar{x}_{submin}^k)_j - (\bar{x}_{min})_j)^2}}{n} \right)}{N}.$$

Ошибка по значениям целевой функции:

$$E_f = \frac{\sum_{k=1}^N |f(\bar{x}_{submin}^k) - f(\bar{x}_{min})|}{N}.$$

1.4.5 Свойства задачи

Условной или безусловной оптимизации: Задача безусловной оптимизации.

Одномерной или многомерной оптимизации: Многомерной: n .

Функция унимодальная или многоэкстремальная: Функция унимодальная.

Функция стохастическая или нет: Функция не стохастическая.

Особенности: Нет.

1.4.6 Реализация

Реализация функции взята из библиотеки HarrixMathLibrary в разделе «Тестовые функции для оптимизации», которую можно найти по адресу <https://github.com/Harrix/HarrixMathLibrary>.

Код 1.4. Код функции MHL_TestFunction_ParaboloidOfRevolution

```
double MHL_TestFunction_ParaboloidOfRevolution(double *x, int VMHL_N)
{
/*
Функция многих переменных: Эллиптический параболоид.
Тестовая функция вещественной оптимизации.
Входные параметры:
    x - указатель на исходный массив;
    VMHL_N - размер массива x.
Возвращаемое значение:
    Значение тестовой функции в точке x.
*/
double VMHL_Result=0;
for (int i=0;i<VMHL_N;i++) VMHL_Result+=x[i]*x[i];
return VMHL_Result;
}
```

1.4.7 Ссылки

Данная функция приводится в следующих источниках:

1. [5] — Paraboloid.

1.5 Функция Растигина

1.5.1 Описание функции

Идентификатор:

MHL_TestFunction_Rastrigin.

Наименование:

Функция Растигина.

Тип:

Задача вещественной оптимизации.

Формула (целевая функция):

$$f(\bar{x}) = 10n + \sum_{i=1}^n (\bar{x}_i^2 - 10 \cdot \cos(2\pi \cdot \bar{x}_i)), \text{ где} \quad (1.5)$$

$\bar{x} \in X, \bar{x}_j \in [Left_j; Right_j], Left_j = -5, Right_j = 5, j = \overline{1, n}.$

Обозначение:

\bar{x} — вещественный вектор;

n — размерность вещественного вектора.

Решаемая задача оптимизации:

$\bar{x}_{min} = \arg \min_{\bar{x} \in X} f(\bar{x}).$

Точка минимума:

$\bar{x}_{min} = (0, 0, \dots, 0)^T$, то есть $(\bar{x}_{min})_j = 0 (j = \overline{1, n}).$

Минимум функции:

$f(\bar{x}_{min}) = 0.$

График:

Рисунок 1.5 на 25 стр.

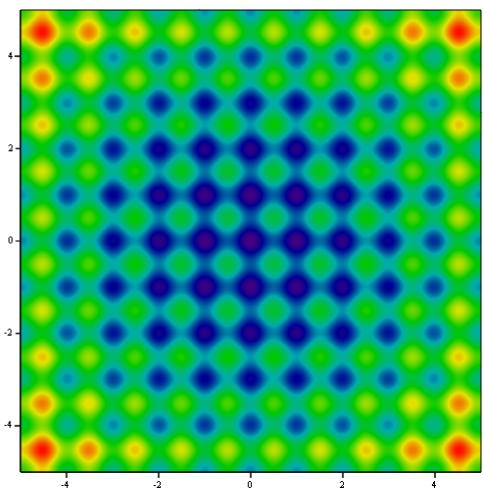
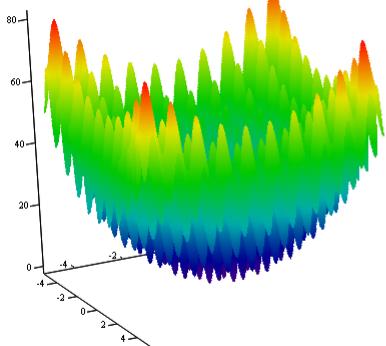


Рисунок 1.5. Функция Растигина

1.5.2 Параметры для алгоритмов оптимизации

Точность вычислений: $\varepsilon = 0.025$.

Число интервалов, на которые предполагается разбивать каждую компоненту вектора \bar{x} в пределах своего изменения (для алгоритмов дискретной оптимизации) :

Для этого длина бинарной строки для x_j координаты равна (для алгоритмов бинарной оптимизации) :

Замечание: $NumberOfParts_j$ выбирается как минимальное число, удовлетворяющее соотношению:

$$NumberOfParts_j = 2^{(k_2)_j} - 1 \geq \frac{10 (Right_j - Left_j)}{\varepsilon}, \text{ где } (k_2)_j \in \mathbb{N}, (j = \overline{1, n}).$$

1.5.3 Основная задача и подзадачи

Изменяемый параметр: n — размерность вещественного вектора.

Значение в основной задаче: $n = 2$.

Подзадача №2: $n = 3$.

Подзадача №3: $n = 4$.

Подзадача №4: $n = 5$.

Подзадача №5: $n = 10$.

Подзадача №6: $n = 20$.

Подзадача №7: $n = 30$.

1.5.4 Нахождение ошибки оптимизации

Пусть в результате работы алгоритма оптимизации за N запусков мы нашли решения \bar{x}_{submin}^k со значениями целевой функции $f(\bar{x}_{submin}^k)$ соответственно ($k = \overline{1, N}$). Используем три вида ошибок:

Надёжность:

$$R = \frac{\sum_{k=1}^N S(\bar{x}_{submin}^k)}{N}, \text{ где}$$

$$S(\bar{x}_{submin}^k) = \begin{cases} 1, & \text{если } \left| (\bar{x}_{submin}^k)_j - (\bar{x}_{min})_j \right| < \varepsilon, j = \overline{1, n}; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Ошибка по входным параметрам:

$$E_x = \frac{\sum_{k=1}^N \left(\frac{\sqrt{\sum_{j=1}^n ((\bar{x}_{submin}^k)_j - (\bar{x}_{min})_j)^2}}{n} \right)}{N}.$$

Ошибка по значениям целевой функции:

$$E_f = \frac{\sum_{k=1}^N |f(\bar{x}_{submin}^k) - f(\bar{x}_{min})|}{N}.$$

1.5.5 Свойства задачи

Условной или безусловной оптимизации: Задача безусловной оптимизации.

Одномерной или многомерной оптимизации: Многомерной: n .

Функция унимодальная или многоэкстремальная: Функция многоэкстремальная.

Функция стохастическая или нет: Функция не стохастическая.

Особенности: Нет.

1.5.6 Реализация

Реализация функции взята из библиотеки HarrixMathLibrary в разделе «Тестовые функции для оптимизации», которую можно найти по адресу <https://github.com/Harrix/HarrixMathLibrary>.

Код 1.5. Код функции MHL_TestFunction_Rastrigin

```
double MHL_TestFunction_Rastrigin(double *x, int VMHL_N)
{
/*
Функция многих переменных: функция Раstrигина.
Тестовая функция вещественной оптимизации.
Входные параметры:
    x - указатель на исходный массив;
    VMHL_N - размер массива x.
Возвращаемое значение:
    Значение тестовой функции в точке x.
*/
double VMHL_Result=0;
for (int i=0;i<VMHL_N;i++) VMHL_Result+=x[i]*x[i]-10.*cos(2.*MHL_PI*x[i]);
VMHL_Result+=10*VMHL_N;
return VMHL_Result;
}
```

1.5.7 Ссылки

Данная функция приводится в следующих источниках:

1. [6] — Rastrigin function.
2. [7] — Non-linear Continuous Multi-Extremal Optimization.
3. [8] — Parametric Optimization.

1.6 Функция Розенброка

1.6.1 Описание функции

Идентификатор:

MHL_TestFunction_Rosenbrock.

Наименование:

Функция Розенброка.

Тип:

Задача вещественной оптимизации.

Формула (целевая функция):

$$f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n-1} \left(100(\bar{x}_{i+1} - \bar{x}_i^2)^2 + (1 - \bar{x}_i)^2 \right), \text{ где} \quad (1.6)$$

$\bar{x} \in X$, $\bar{x}_j \in [Left_j; Right_j]$, $Left_j = -2$, $Right_j = 2$, $j = \overline{1, n}$.

Обозначение:

\bar{x} — вещественный вектор;

n — размерность вещественного вектора.

Решаемая задача оптимизации:

$\bar{x}_{min} = \arg \min_{\bar{x} \in X} f(\bar{x})$.

Точка минимума:

$\bar{x}_{min} = (1, 1, \dots, 1)^T$, то есть $(\bar{x}_{min})_j = 1$ ($j = \overline{1, n}$).

Минимум функции:

$f(\bar{x}_{min}) = 0$.

График:

Рисунок 1.6 на с. 29 стр.

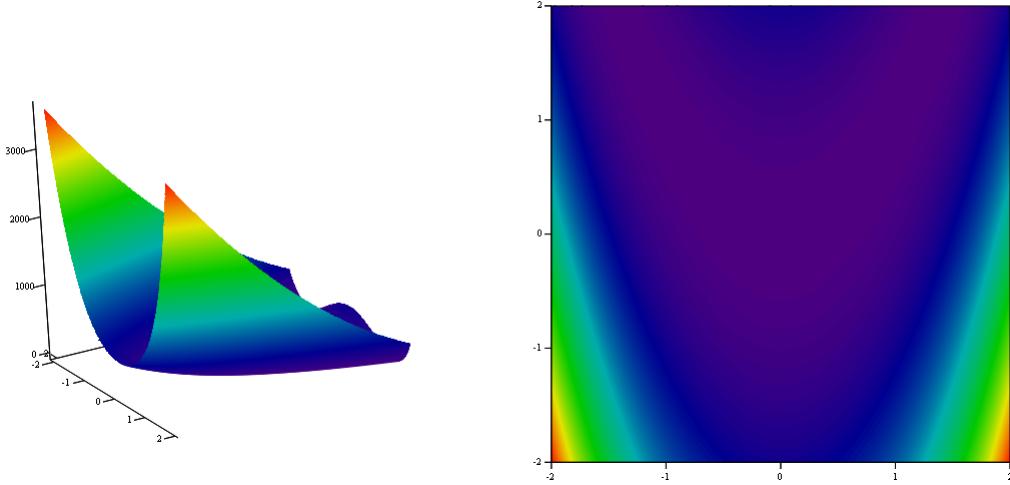


Рисунок 1.6. Функция Розенброка

1.6.2 Параметры для алгоритмов оптимизации

Точность вычислений:

$$\varepsilon = 0.01.$$

Число интервалов, на которые предполагается разбивать каждую компоненту вектора \bar{x} в пределах своего изменения (для алгоритмов дискретной оптимизации) :

$$NumberOfParts_j = 4095 \ (j = \overline{1, n}).$$

Для этого длина бинарной строки для x_j координаты равна (для алгоритмов бинарной оптимизации) :

Замечание: $NumberOfParts_j$ выбирается как минимальное число, удовлетворяющее соотношению:

$$NumberOfParts_j = 2^{(k_2)_j} - 1 \geq \frac{10 (Right_j - Left_j)}{\varepsilon}, \text{ где } (k_2)_j \in \mathbb{N}, (j = \overline{1, n}).$$

1.6.3 Основная задача и подзадачи

Изменяемый параметр:

n — размерность вещественного вектора.

Значение в основной задаче:

$$n = 2.$$

Подзадача №2:

$$n = 3.$$

Подзадача №3:

$$n = 4.$$

Подзадача №4:

$$n = 5.$$

Подзадача №5:

$$n = 10.$$

Подзадача №6:

$$n = 20.$$

Подзадача №7:

$$n = 30.$$

1.6.4 Нахождение ошибки оптимизации

Пусть в результате работы алгоритма оптимизации за N запусков мы нашли решения \bar{x}_{submin}^k со значениями целевой функции $f(\bar{x}_{submin}^k)$ соответственно ($k = \overline{1, N}$). Используем три вида ошибок:

Надёжность:

$$R = \frac{\sum_{k=1}^N S(\bar{x}_{submin}^k)}{N}, \text{ где}$$
$$S(\bar{x}_{submin}^k) = \begin{cases} 1, & \text{если } |(\bar{x}_{submin}^k)_j - (\bar{x}_{min})_j| < \varepsilon, j = \overline{1, n}; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Ошибка по входным параметрам:

$$E_x = \frac{\sum_{k=1}^N \left(\frac{\sqrt{\sum_{j=1}^n ((\bar{x}_{submin}^k)_j - (\bar{x}_{min})_j)^2}}{n} \right)}{N}.$$

Ошибка по значениям целевой функции:

$$E_f = \frac{\sum_{k=1}^N |f(\bar{x}_{submin}^k) - f(\bar{x}_{min})|}{N}.$$

1.6.5 Свойства задачи

Условной или безусловной оптимизации: Задача безусловной оптимизации.

Одномерной или многомерной оптимизации: Многомерной: n .

Функция унимодальная или многоэкстремальная: Функция многоэкстремальная.

Функция стохастическая или нет: Функция не стохастическая.

Особенности: Нет.

1.6.6 Реализация

Реализация функции взята из библиотеки HarrixMathLibrary в разделе «Тестовые функции для оптимизации», которую можно найти по адресу <https://github.com/Harrix/HarrixMathLibrary>.

Код 1.6. Код функции MHL_TestFunction_Rosenbrock

```
double MHL_TestFunction_Rosenbrock(double *x, int VMHL_N)
{
    /*
```

Функция многих переменных: функция Розенброка.

Тестовая функция вещественной оптимизации.

Входные параметры:

x – указатель на исходный массив;

VMHL_N – размер массива x.

Возвращаемое значение:

Значение тестовой функции в точке x.

**/*

```
double VMHL_Result=0;
for (int i=0;i<VMHL_N-1;i++) VMHL_Result+=100.* (x[i+1]-x[i]*x[i])*(x[i+1]-x[i]*x[i])
    +(1.-x[i])*(1.-x[i]);
return VMHL_Result;
}
```

1.6.7 Ссылки

Данная функция приводится в следующих источниках:

1. [9] – Rosenbrock function.
2. [10] – Rosenbrock Function.

1.7 Развёрнутый гипер-эллипсоид

1.7.1 Описание функции

Идентификатор: MHL_TestFunction_RotatedHyperEllipsoid.

Наименование: Развёрнутый гипер-эллипсоид.

Тип: Задача вещественной оптимизации.

Формула (целевая функция):

$$f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^i \bar{x}_j \right)^2, \text{ где } \quad (1.7)$$

$\bar{x} \in X$, $\bar{x}_j \in [Left_j; Right_j]$, $Left_j = -5$, $Right_j = 5$, $j = \overline{1, n}$.

Обозначение: \bar{x} – вещественный вектор;

n – размерность вещественного вектора.

Решаемая задача оптимизации: $\bar{x}_{min} = \arg \min_{\bar{x} \in X} f(\bar{x})$.

Точка минимума: $\bar{x}_{min} = (0, 0, \dots, 0)^T$, то есть $(\bar{x}_{min})_j = 0$ ($j = \overline{1, n}$).

Минимум функции: $f(\bar{x}_{min}) = 0$.

График: Рисунок 1.7 на с. 32 стр.

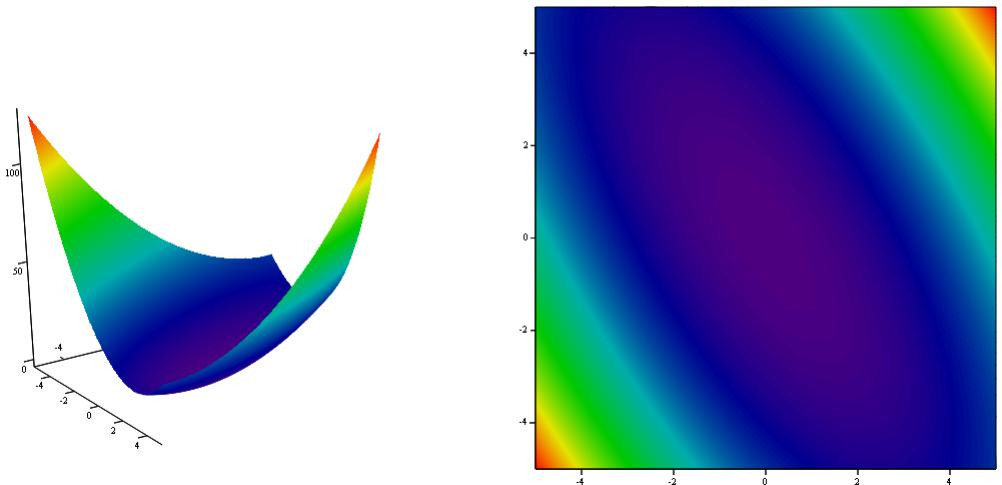


Рисунок 1.7. Развернутый гипер-эллипсоид

1.7.2 Параметры для алгоритмов оптимизации

Точность вычислений: $\varepsilon = 0.025.$

Число интервалов, на которые предполагается разбивать каждую компоненту вектора \bar{x} в пределах своего изменения (для алгоритмов дискретной оптимизации) :

Для этого длина бинарной строки для x_j координаты равна (для алгоритмов бинарной оптимизации) : $(k_2)_j = 12 (j = \overline{1, n}).$

Замечание: $NumberOfParts_j$ выбирается как минимальное число, удовлетворяющее соотношению:

$$NumberOfParts_j = 2^{(k_2)_j} - 1 \geq \frac{10 (Right_j - Left_j)}{\varepsilon}, \text{ где } (k_2)_j \in \mathbb{N}, (j = \overline{1, n}).$$

1.7.3 Основная задача и подзадачи

Изменяемый параметр: n — размерность вещественного вектора.

Значение в основной задаче: $n = 2.$

Подзадача №2: $n = 3.$

Подзадача №3: $n = 4.$

Подзадача №4: $n = 5.$

Подзадача №5: $n = 10.$

Подзадача №6: $n = 20.$

Подзадача №7: $n = 30.$

1.7.4 Нахождение ошибки оптимизации

Пусть в результате работы алгоритма оптимизации за N запусков мы нашли решения \bar{x}_{submin}^k со значениями целевой функции $f(\bar{x}_{submin}^k)$ соответственно ($k = \overline{1, N}$). Используем три вида ошибок:

Надёжность:

$$R = \frac{\sum_{k=1}^N S(\bar{x}_{submin}^k)}{N}, \text{ где}$$
$$S(\bar{x}_{submin}^k) = \begin{cases} 1, & \text{если } |(\bar{x}_{submin}^k)_j - (\bar{x}_{min})_j| < \varepsilon, j = \overline{1, n}; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Ошибка по входным параметрам:

$$E_x = \frac{\sum_{k=1}^N \left(\frac{\sqrt{\sum_{j=1}^n ((\bar{x}_{submin}^k)_j - (\bar{x}_{min})_j)^2}}{n} \right)}{N}.$$

Ошибка по значениям целевой функции:

$$E_f = \frac{\sum_{k=1}^N |f(\bar{x}_{submin}^k) - f(\bar{x}_{min})|}{N}.$$

1.7.5 Свойства задачи

Условной или безусловной оптимизации: Задача безусловной оптимизации.

Одномерной или многомерной оптимизации: Многомерной: n .

Функция унимодальная или многоэкстремальная: Функция унимодальная.

Функция стохастическая или нет: Функция не стохастическая.

Особенности: Нет.

1.7.6 Реализация

Реализация функции взята из библиотеки HarrixMathLibrary в разделе «Тестовые функции для оптимизации», которую можно найти по адресу <https://github.com/Harrix/HarrixMathLibrary>.

Код 1.7. Код функции MHL_TestFunction_RotatedHyperEllipsoid

```
double MHL_TestFunction_RotatedHyperEllipsoid(double *x, int VMHL_N)
{
    /*
```

Функция многих переменных: Развёрнутый гипер-эллипсоид.

Тестовая функция вещественной оптимизации.

Входные параметры:

x – указатель на исходный массив;

VMHL_N – размер массива x.

Возвращаемое значение:

Значение тестовой функции в точке x.

**/*

double VMHL_Result=0;

double f;

for (**int** i=0;i<VMHL_N;i++)

{

f=0;

for (**int** j=0;j<i+1;j++)

f += x[j];

VMHL_Result += f*f;

}

return VMHL_Result;

}

1.7.7 Ссылки

Данная функция приводится в следующих источниках:

1. [3, стр. 4] – GEATbx Examples. Examples of Objective Functions.

Обратите внимание, что иногда под названием Rotated Hyper Ellipsoid встречается (например, [11]) неправильно записанная функция в виде:

$$f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^j \bar{x}_j^2, \text{ где}$$

Данная функция не является развернутой по своему внешнему виду, поэтому автор склонен считать эту реализацию ошибочной.

1.8 Функция Швефеля

1.8.1 Описание функции

Идентификатор:

MHL_TestFunction_Schwefel.

Наименование:

Функция Швефеля.

Тип:

Задача вещественной оптимизации.

Формула (целевая функция):

$$f(\bar{x}) = 418.9829n - \sum_{i=1}^n \left(\bar{x}_i \sin \left(\sqrt{|\bar{x}_i|} \right) \right), \text{ где} \quad (1.8)$$

$\bar{x} \in X$, $\bar{x}_j \in [Left_j; Right_j]$, $Left_j = -500$, $Right_j = 500$, $j = \overline{1, n}$.

Обозначение:

\bar{x} — вещественный вектор;

n — размерность вещественного вектора.

Решаемая задача оптимизации:

$\bar{x}_{min} = \arg \min_{\bar{x} \in X} f(\bar{x})$.

Точка минимума:

$\bar{x}_{min} = (420.968746, 420.968746, \dots, 420.968746)^T$,
то есть $(\bar{x}_{min})_j = 420.968746$ ($j = \overline{1, n}$).

Минимум функции:

$f(\bar{x}_{min}) = 0.0000255$, если $n = 2$.

$f(\bar{x}_{min}) = 0.000127276$, если $n = 10$.

То есть для каждого значения n надо пересчитывать значение глобального минимума.

График:

Рисунок 1.8 на с 35 стр.

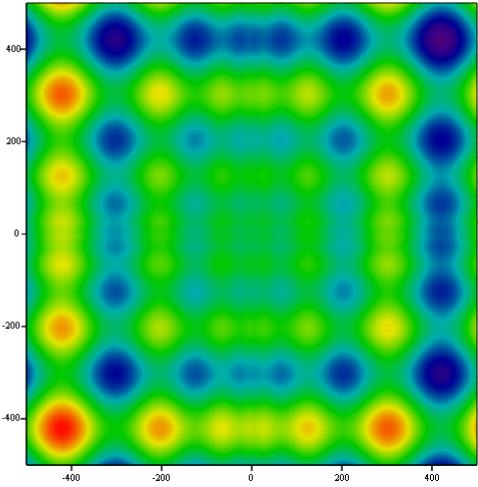
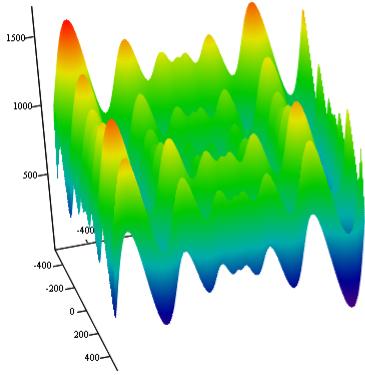


Рисунок 1.8. Функция Швефеля

1.8.2 Параметры для алгоритмов оптимизации

Точность вычислений: $\varepsilon = 2.5$.

Число интервалов, на которые предполагается разбивать каждую компоненту вектора \bar{x} в пределах своего изменения (для алгоритмов дискретной оптимизации) :

Для этого длина бинарной строки для x_j координаты равна (для алгоритмов бинарной оптимизации) :

Замечание: $NumberOfParts_j$ выбирается как минимальное число, удовлетворяющее соотношению:

$$NumberOfParts_j = 2^{(k_2)_j} - 1 \geq \frac{10 (Right_j - Left_j)}{\varepsilon}, \text{ где } (k_2)_j \in \mathbb{N}, (j = \overline{1, n}).$$

1.8.3 Основная задача и подзадачи

Изменяемый параметр: n — размерность вещественного вектора.

Значение в основной задаче: $n = 2$.

Подзадача №2: $n = 3$.

Подзадача №3: $n = 4$.

Подзадача №4: $n = 5$.

Подзадача №5: $n = 10$.

Подзадача №6: $n = 20$.

Подзадача №7: $n = 30$.

1.8.4 Нахождение ошибки оптимизации

Пусть в результате работы алгоритма оптимизации за N запусков мы нашли решения \bar{x}_{submin}^k со значениями целевой функции $f(\bar{x}_{submin}^k)$ соответственно ($k = \overline{1, N}$). Используем три вида ошибок:

Надёжность:

$$R = \frac{\sum_{k=1}^N S(\bar{x}_{submin}^k)}{N}, \text{ где}$$

$$S(\bar{x}_{submin}^k) = \begin{cases} 1, & \text{если } \left| (\bar{x}_{submin}^k)_j - (\bar{x}_{min})_j \right| < \varepsilon, j = \overline{1, n}; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Ошибка по входным параметрам:

$$E_x = \frac{\sum_{k=1}^N \left(\sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n ((\bar{x}_{submin}^k)_j - (\bar{x}_{min})_j)^2}{n}} \right)}{N}.$$

Ошибка по значениям целевой функции:

$$E_f = \frac{\sum_{k=1}^N |f(\bar{x}_{submin}^k) - f(\bar{x}_{min})|}{N}.$$

1.8.5 Свойства задачи

Условной или безусловной оптимизации: Задача безусловной оптимизации.

Одномерной или многомерной оптимизации: Многомерной: n .

Функция унимодальная или многоэкстремальная: Функция многоэкстремальная.

Функция стохастическая или нет: Функция не стохастическая.

Особенности: Для каждого значения n надо пересчитывать значение глобального минимума.

1.8.6 Реализация

Реализация функции взята из библиотеки HarrixMathLibrary в разделе «Тестовые функции для оптимизации», которую можно найти по адресу <https://github.com/Harrix/HarrixMathLibrary>.

Код 1.8. Код функции MHL_TestFunction_Schwefel

```
double double MHL_TestFunction_Schwefel(double *x, int VMHL_N)
{
/*
Функция многих переменных: функция Швефеля.
Тестовая функция вещественной оптимизации.
Входные параметры:
    x - указатель на исходный массив;
    VMHL_N - размер массива x.
Возвращаемое значение:
    Значение тестовой функции в точке x.
*/
double VMHL_Result=418.9829*VMHL_N;

for (int i=0;i<VMHL_N;i++)
    VMHL_Result -= x[i]*sin(sqrt(fabs(x[i])));

return VMHL_Result;
}
```

1.8.7 Ссылки

Данная функция приводится в следующих источниках:

1. [1, стр. 9] — Empirical review of standard benchmark functions using evolutionary global optimization.
2. [12] — Benchmark Problems.

Обратите внимание, что в англоязычном секторе часто данная функция дается с обозначением глобального минимума в точке $(\bar{x}_{min})_j = 1$ ($j = \overline{1, n}$), $f(\bar{x}_{min}) = 0$ (например, [13], [14]). Это не правильно: $f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 836.28286$. Скорее всего в каком-то источнике вначале допустили ошибку, и она стала копироваться в остальные.

В некоторых источниках (например, [15], [3, стр. 7]) в формуле тестовой функции присутствует только второе слагаемое, а глобальный минимум определяется как $418.9829n$. Это неправильно, так как хоть два слагаемых похожи друг на друга (1.8), но они не дают строгий ноль в сумме, и при увеличении размерности различие между ними увеличивается.

1.9 Функция Step (модифицированная версия De Jong 3)

1.9.1 Описание функции

Идентификатор:

MHL_TestFunction_StepFunction.

Наименование:

Функция Step (модифицированная версия De Jong 3).

Тип:

Задача вещественной оптимизации.

Формула (целевая функция):

$$f(\bar{x}) = \begin{cases} \sum_{i=1}^n (\text{int}(\bar{x}_i))^2, & \text{если } \sum_{i=1}^n |\text{int}(\bar{x}_i)| \neq 0; \\ \left(\sum_{i=1}^n |\bar{x}_i|\right) - 1, & \text{иначе.} \end{cases}, \quad (1.9)$$

$\bar{x} \in X$, $\bar{x}_j \in [Left_j; Right_j]$, $Left_j = -5$, $Right_j = 5$, $j = \overline{1, n}$.

Обозначение:

\bar{x} — вещественный вектор;

n — размерность вещественного вектора.

Решаемая задача оптимизации:

$\bar{x}_{min} = \arg \min_{\bar{x} \in X} f(\bar{x})$.

Точка минимума:

$\bar{x}_{min} = (0, 0, \dots, 0)^T$, то есть $(\bar{x}_{min})_j = 0$ ($j = \overline{1, n}$).

Минимум функции:

$f(\bar{x}_{min}) = -1$.

График:

Рисунок 1.9 на с. 39 стр., 1.10 на с. 39 стр.

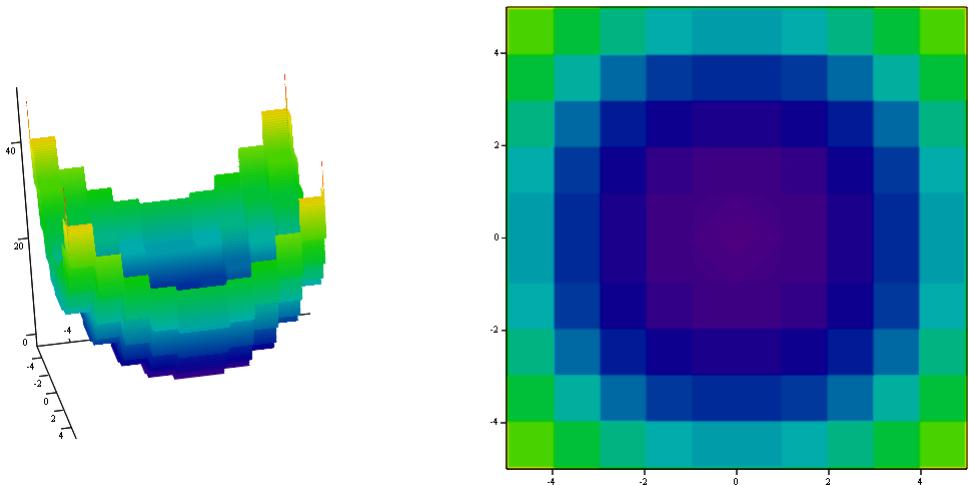


Рисунок 1.9. Функция Step (модифицированная версия De Jong 3)

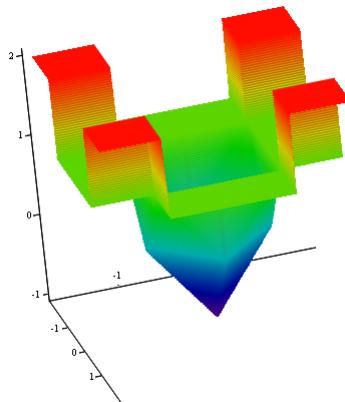


Рисунок 1.10. Функция Step (модифицированная версия De Jong 3) в области около точки минимума

1.9.2 Параметры для алгоритмов оптимизации

Точность вычислений:

$$\varepsilon = 0.025.$$

Число интервалов, на которые предполагается разбивать каждую компоненту вектора \bar{x} в пределах своего изменения (для алгоритмов дискретной оптимизации) :

Для этого длина бинарной строки для x_j координаты равна (для алгоритмов бинарной оптимизации) :

Замечание: $NumberOfParts_j$ выбирается как минимальное число, удовлетворяющее соотношению:

$$NumberOfParts_j = 2^{(k_2)_j} - 1 \geq \frac{10 (Right_j - Left_j)}{\varepsilon}, \text{ где } (k_2)_j \in \mathbb{N}, (j = \overline{1, n}).$$

1.9.3 Основная задача и подзадачи

Изменяемый параметр:	n — размерность вещественного вектора.
Значение в основной задаче:	$n = 2$.
Подзадача №2:	$n = 3$.
Подзадача №3:	$n = 4$.
Подзадача №4:	$n = 5$.
Подзадача №5:	$n = 10$.
Подзадача №6:	$n = 20$.
Подзадача №7:	$n = 30$.

1.9.4 Нахождение ошибки оптимизации

Пусть в результате работы алгоритма оптимизации за N запусков мы нашли решения \bar{x}_{submin}^k со значениями целевой функции $f(\bar{x}_{submin}^k)$ соответственно ($k = \overline{1, N}$). Используем три вида ошибок:

Надёжность:

$$R = \frac{\sum_{k=1}^N S(\bar{x}_{submin}^k)}{N}, \text{ где}$$

$$S(\bar{x}_{submin}^k) = \begin{cases} 1, & \text{если } \left| (\bar{x}_{submin}^k)_j - (\bar{x}_{min})_j \right| < \varepsilon, j = \overline{1, n}; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Ошибка по входным параметрам:

$$E_x = \frac{\sum_{k=1}^N \left(\frac{\sqrt{\sum_{j=1}^n ((\bar{x}_{submin}^k)_j - (\bar{x}_{min})_j)^2}}{n} \right)}{N}.$$

Ошибка по значениям целевой функции:

$$E_f = \frac{\sum_{k=1}^N |f(\bar{x}_{submin}^k) - f(\bar{x}_{min})|}{N}.$$

1.9.5 Свойства задачи

Условной или безусловной оптимизации: Задача безусловной оптимизации.

Одномерной или многомерной оптимизации: Многомерной: n .

Функция унимодальная или многоэкстремальная: Функция унимодальная.

Функция стохастическая или нет: Функция не стохастическая.

Особенности: На большей части множества допустимых решений производная функции равна нулю.

1.9.6 Реализация

Реализация функции взята из библиотеки HarrixMathLibrary в разделе «Тестовые функции для оптимизации», которую можно найти по адресу <https://github.com/Harrix/HarrixMathLibrary>.

Код 1.9. Код функции MHL_TestFunction_StepFunction

```
double MHL_TestFunction_StepFunction(double *x, int VMHL_N)
{
/*
Функция многих переменных: Функция Step (модифицированная версия De Jong 3).
Тестовая функция вещественной оптимизации.

Входные параметры:
    x - указатель на исходный массив;
    VMHL_N - размер массива x.

Возвращаемое значение:
    Значение тестовой функции в точке x.
*/
    double VMHL_Result=0;

    double H=0;

    for (int i=0;i<VMHL_N;i++)
        H+=fabs(int(x[i]));

    if (H!=0)
    {
        for (int i=0;i<VMHL_N;i++)
            VMHL_Result+=(int(x[i]))*(int(x[i]));
    }
    else
    {
        for (int i=0;i<VMHL_N;i++)
            VMHL_Result+=fabs(x[i]);
    }

    return VMHL_Result;
}
```

1.9.7 Ссылки

Данная функция приводится в следующих источниках (без дополнительной добавки в области $\bar{x}_i \in (-1; 1), i = \overline{1, n}$):

1. [16, стр. 729] — International Conference on Intelligent Computing: Intelligent computing.

1.10 Аддитивная потенциальная функция

1.10.1 Описание функции

Идентификатор: MHL_TestFunction_AdditivePotential.

Наименование: Аддитивная потенциальная функция.

Тип: Задача вещественной оптимизации.

Формула (целевая функция):

$$f(\bar{x}) = z(\bar{x}_1) + z(\bar{x}_2), \text{ где} \quad (1.10)$$

$$z(v) = -\frac{1}{(v-1)^2 + 0.2} - \frac{1}{2(v-2)^2 + 0.15} - \frac{1}{3(v-3)^2 + 0.3},$$

$\bar{x} \in X, \bar{x}_j \in [Left_j; Right_j], Left_j = 0, Right_j = 4, j = \overline{1, n}, n = 2.$

Обозначение: \bar{x} — вещественный вектор;

$n = 2$ — размерность вещественного вектора.

Решаемая задача оптимизации: $\bar{x}_{min} = \arg \min_{\bar{x} \in X} f(\bar{x}).$

Точка минимума: $\bar{x}_{min} = (2, 2)^T$, то есть $(\bar{x}_{min})_j = 2 (j = \overline{1, n}).$

Минимум функции: $f(\bar{x}_{min}) = -15.6060606060606060606.$

График: Рисунок 1.11 на с. 43.

1.10.2 Параметры для алгоритмов оптимизации

Точность вычислений: $\varepsilon = 0.01.$

Число интервалов, на которые предполагается разбивать каждую компоненту вектора \bar{x} в пределах своего изменения (для алгоритмов дискретной оптимизации) :

Для этого длина бинарной строки для x_j координаты равна (для алгоритмов бинарной оптимизации) : $(k_2)_j = 12 (j = \overline{1, n}).$

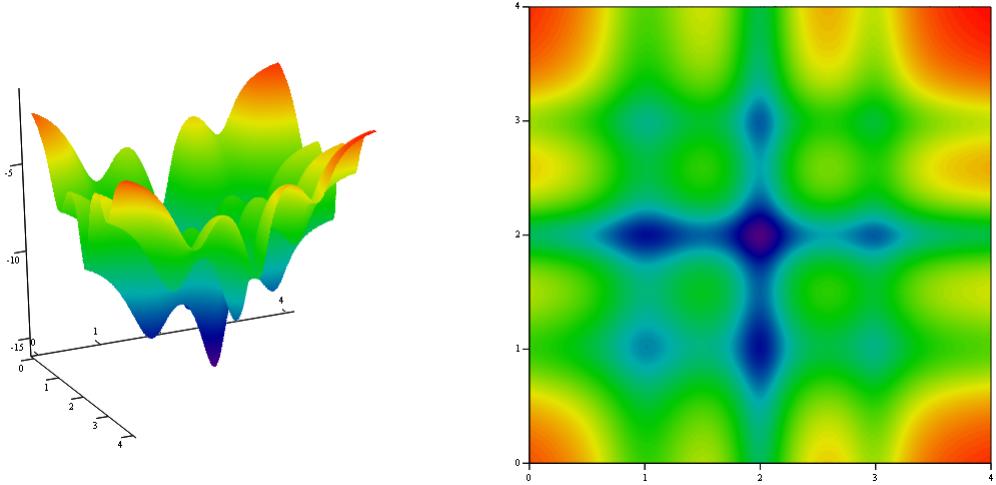


Рисунок 1.11. Аддитивная потенциальная функция

Замечание: $NumberOfParts_j$ выбирается как минимальное число, удовлетворяющее соотношению:

$$NumberOfParts_j = 2^{(k_2)_j} - 1 \geq \frac{10(Right_j - Left_j)}{\varepsilon}, \text{ где } (k_2)_j \in \mathbb{N}, (j = \overline{1, n}).$$

1.10.3 Основная задача и подзадачи

Изменяемый параметр:

n — размерность вещественного вектора.

Значение в основной задаче:

$n = 2$.

1.10.4 Нахождение ошибки оптимизации

Пусть в результате работы алгоритма оптимизации за N запусков мы нашли решения \bar{x}_{submin}^k со значениями целевой функции $f(\bar{x}_{submin}^k)$ соответственно ($k = \overline{1, N}$). Используем три вида ошибок:

Надёжность:

$$R = \frac{\sum_{k=1}^N S(\bar{x}_{submin}^k)}{N}, \text{ где}$$

$$S(\bar{x}_{submin}^k) = \begin{cases} 1, & \text{если } \left| (\bar{x}_{submin}^k)_j - (\bar{x}_{min})_j \right| < \varepsilon, j = \overline{1, n}; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Ошибка по входным параметрам:

$$E_x = \frac{\sum_{k=1}^N \left(\sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n ((\bar{x}_{submin}^k)_j - (\bar{x}_{min})_j)^2}{n}} \right)}{N}.$$

Ошибка по значениям целевой функции:

$$E_f = \frac{\sum_{k=1}^N |f(\bar{x}_{submin}^k) - f(\bar{x}_{min})|}{N}.$$

1.10.5 Свойства задачи

Условной или безусловной оптимизации: Задача безусловной оптимизации.

Одномерной или многомерной оптимизации: Многомерной (двумерной).

Функция унимодальная или многоэкстремальная: Функция многоэкстремальная.

Функция стохастическая или нет: Функция не стохастическая.

Особенности: Нет.

1.10.6 Реализация

Реализация функции взята из библиотеки HarrixMathLibrary в разделе «Тестовые функции для оптимизации», которую можно найти по адресу <https://github.com/Harrix/HarrixMathLibrary>.

Код 1.10. Код функции MHL_TestFunction_AdditivePotential

```
double MHL_TestFunction_AdditivePotential(double x, double y)
{
/*
Функция двух переменных: аддитивная потенциальная функция.
Тестовая функция вещественной оптимизации.
Входные параметры:
    x - первая вещественная переменная;
    y - вторая вещественная переменная.
Возвращаемое значение:
    Значение тестовой функции в точке (x,y).
*/
double VMHL_Result;
double z1=-(1./((x-1.)*(x-1.)+0.2))-(1./(2.*(x-2.)*(x-2.)+0.15))-(1./(3.*(x-3.)*(x-3.)+0.3));
double z2=-(1./((y-1.)*(y-1.)+0.2))-(1./(2.*(y-2.)*(y-2.)+0.15))-(1./(3.*(y-3.)*(y-3.)+0.3));
VMHL_Result=z1+z2;
return VMHL_Result;
}
```

1.10.7 Ссылки

Данная функция приводится в следующих источниках:

1. [17, стр. 33] — Эволюционные методы моделирования и оптимизации сложных систем.

1.11 Функция Egg Holder

1.11.1 Описание функции

Идентификатор:

MHL_TestFunction_EggHolder.

Наименование:

Функция Egg Holder.

Тип:

Задача вещественной оптимизации.

Формула (целевая функция):

$$f(\bar{x}) = -\bar{x}_1 \sin \left(\sqrt{|\bar{x}_1 - 47 - \bar{x}_2|} \right) - (\bar{x}_2 + 47) \sin \left(\sqrt{\left| \frac{\bar{x}_1}{2} + 47 + \bar{x}_2 \right|} \right), \text{ где} \quad (1.11)$$

$\bar{x} \in X$, $\bar{x}_j \in [Left_j; Right_j]$, $Left_j = -512$, $Right_j = 512$, $j = \overline{1, n}$, $n = 2$.

Обозначение:

\bar{x} — вещественный вектор;

$n = 2$ — размерность вещественного вектора.

Решаемая задача оптимизации:

$\bar{x}_{min} = \arg \min_{\bar{x} \in X} f(\bar{x})$.

Точка минимума:

$\bar{x}_{min} = (512, 404.2319)^T$.

Минимум функции:

$f(\bar{x}_{min}) = -959.64067$.

График:

Рисунок 1.12 на 45 стр.

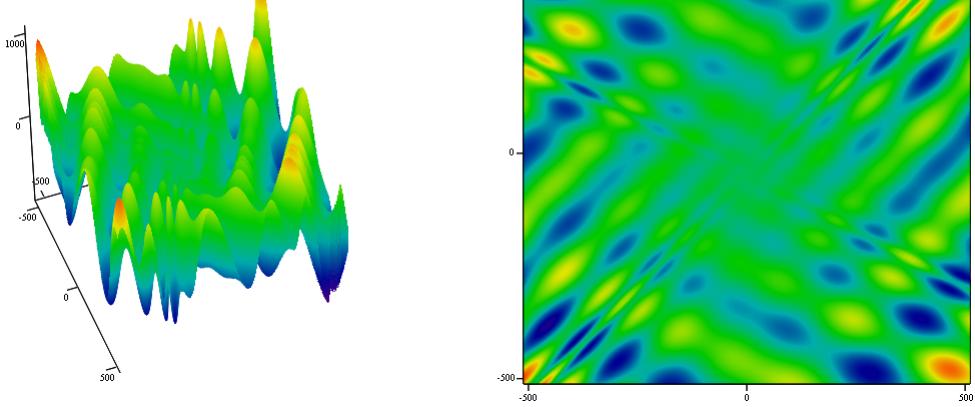


Рисунок 1.12. Функция Egg Holder

1.11.2 Параметры для алгоритмов оптимизации

Точность вычислений:

$$\varepsilon = 2.5.$$

Число интервалов, на которые предполагается разбивать каждую компоненту вектора \bar{x} в пределах своего изменения (для алгоритмов дискретной оптимизации) :

Для этого длина бинарной строки для x_j координаты равна (для алгоритмов бинарной оптимизации) :

Замечание: $NumberOfParts_j$ выбирается как минимальное число, удовлетворяющее соотношению:

$$NumberOfParts_j = 2^{(k_2)_j} - 1 \geq \frac{10 (Right_j - Left_j)}{\varepsilon}, \text{ где } (k_2)_j \in \mathbb{N}, (j = \overline{1, n}).$$

1.11.3 Основная задача и подзадачи

Изменяемый параметр:

n — размерность вещественного вектора.

Значение в основной задаче:

$$n = 2.$$

1.11.4 Нахождение ошибки оптимизации

Пусть в результате работы алгоритма оптимизации за N запусков мы нашли решения \bar{x}_{submin}^k со значениями целевой функции $f(\bar{x}_{submin}^k)$ соответственно ($k = \overline{1, N}$). Используем три вида ошибок:

Надёжность:

$$R = \frac{\sum_{k=1}^N S(\bar{x}_{submin}^k)}{N}, \text{ где}$$

$$S(\bar{x}_{submin}^k) = \begin{cases} 1, & \text{если } |(\bar{x}_{submin}^k)_j - (\bar{x}_{min})_j| < \varepsilon, j = \overline{1, n}; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Ошибка по входным параметрам:

$$E_x = \frac{\sum_{k=1}^N \left(\sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n ((\bar{x}_{submin}^k)_j - (\bar{x}_{min})_j)^2}{n}} \right)}{N}.$$

Ошибка по значениям целевой функции:

$$E_f = \frac{\sum_{k=1}^N |f(\bar{x}_{submin}^k) - f(\bar{x}_{min})|}{N}.$$

1.11.5 Свойства задачи

Условной или безусловной оптимизации: Задача безусловной оптимизации.

Одномерной или многомерной оптимизации: Многомерной (двумерной).

Функция унимодальная или многоэкстремальная: Функция многоэкстремальная.

Функция стохастическая или нет: Функция не стохастическая.

Особенности: Нет.

1.11.6 Реализация

Реализация функции взята из библиотеки HarrixMathLibrary в разделе «Тестовые функции для оптимизации», которую можно найти по адресу <https://github.com/Harrix/HarrixMathLibrary>.

Код 1.11. Код функции MHL_TestFunction_EggHolder

```
double MHL_TestFunction_EggHolder(double x, double y)
{
/*
Функция двух переменных: функция Egg Holder.
Тестовая функция вещественной оптимизации.
Входные параметры:
    x - первая вещественная переменная;
    y - вторая вещественная переменная.
Возвращаемое значение:
    Значение тестовой функции в точке (x,y).
*/
double VMHL_Result;

VMHL_Result=-x*sin(sqrt(fabs(x-(y+47.))))-(y+47)*sin(sqrt(fabs(x/2.+47+y)));

return VMHL_Result;
}
```

1.11.7 Ссылки

Данная функция приводится в следующих источниках:

1. [4, стр. 15] — A Literature Survey of Benchmark Functions For Global Optimization Problems.

1.12 Функция Химмельблау

1.12.1 Описание функции

Идентификатор:

MHL_TestFunction_Himmelblau.

Наименование:

Функция Химмельблау.

Тип:

Задача вещественной оптимизации.

Формула (целевая функция):

$$f(\bar{x}) = (\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2 - 11)^2 + (\bar{x}_1 + \bar{x}_2^2 - 7)^2, \text{ где} \quad (1.12)$$

$\bar{x} \in X, \bar{x}_j \in [Left_j; Right_j], Left_j = -5, Right_j = 5, j = \overline{1, n}, n = 2.$

Обозначение:

\bar{x} — вещественный вектор;

$n = 2$ — размерность вещественного вектора.

Решаемая задача оптимизации:

$\bar{x}_{min} = \arg \min_{\bar{x} \in X} f(\bar{x}).$

Точки минимума:

$\bar{x}_{min}^1 = (3, 2)^T,$

$\bar{x}_{min}^2 \approx (-2.8051183, 3.131312)^T$

$\bar{x}_{min}^3 \approx (-3.779310, -3.283186)^T$

$\bar{x}_{min}^4 \approx (3.584428, -1.848126)^T.$

Минимум функции:

$f(\bar{x}_{min}^i) = 0, i = \overline{1, 4}.$

График:

Рисунок 1.13 на с. 48

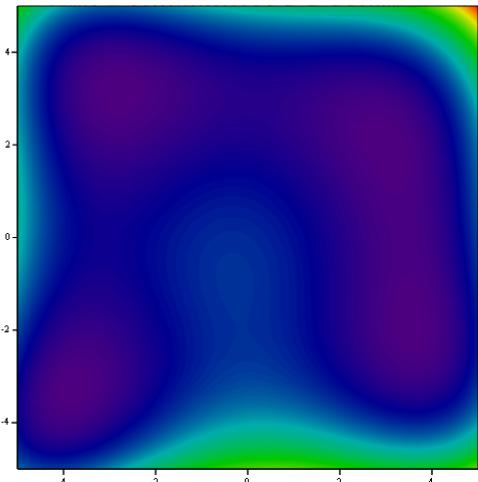
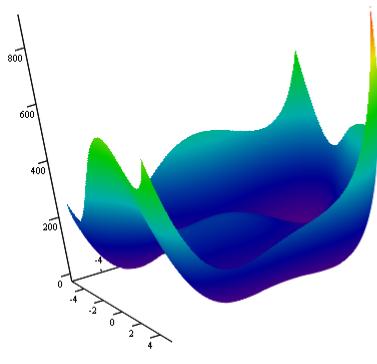


Рисунок 1.13. Функция Химмельблау

1.12.2 Параметры для алгоритмов оптимизации

Точность вычислений:

$$\varepsilon = 0.025.$$

Число интервалов, на которые предполагается разбивать каждую компоненту вектора \bar{x} в пределах своего изменения (для алгоритмов дискретной оптимизации) :

Для этого длина бинарной строки для x_j координаты равна (для алгоритмов бинарной оптимизации) :

Замечание: $NumberOfParts_j$ выбирается как минимальное число, удовлетворяющее соотношению:

$$NumberOfParts_j = 2^{(k_2)_j} - 1 \geq \frac{10 (Right_j - Left_j)}{\varepsilon}, \text{ где } (k_2)_j \in \mathbb{N}, (j = \overline{1, n}).$$

1.12.3 Основная задача и подзадачи

Изменяемый параметр:

n — размерность вещественного вектора.

Значение в основной задаче:

$$n = 2.$$

1.12.4 Нахождение ошибки оптимизации

Внимание! В отличии от других функций формулы нахождения ошибок другие, так как есть несколько идентичных по значению целевой функции глобальных минимумов.

Пусть в результате работы алгоритма оптимизации за N запусков мы нашли решения \bar{x}_{submin}^k со значениями целевой функции $f(\bar{x}_{submin}^k)$ соответственно ($k = \overline{1, N}$). Используем три вида ошибок:

Надёжность:

$$R = \frac{\sum_{k=1}^N S(\bar{x}_{submin}^k)}{N}, \text{ где}$$

$$S(\bar{x}_{submin}^k) = \begin{cases} 1, & \text{если } \left| (\bar{x}_{submin}^k)_j - (\bar{x}_{min}^1)_j \right| < \varepsilon, j = \overline{1, n}; \\ 1, & \text{если } \left| (\bar{x}_{submin}^k)_j - (\bar{x}_{min}^2)_j \right| < \varepsilon, j = \overline{1, n}; \\ 1, & \text{если } \left| (\bar{x}_{submin}^k)_j - (\bar{x}_{min}^3)_j \right| < \varepsilon, j = \overline{1, n}; \\ 1, & \text{если } \left| (\bar{x}_{submin}^k)_j - (\bar{x}_{min}^4)_j \right| < \varepsilon, j = \overline{1, n}; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Ошибка по входным параметрам:

$$E_x = \min_{i=1,4} \left\{ \frac{\sum_{k=1}^N \left(\frac{\sqrt{\sum_{j=1}^n ((\bar{x}_{submin}^k)_j - (\bar{x}_{min}^i)_j)^2}}{n} \right)}{N} \right\}.$$

Ошибка по значениям целевой функции: (без изменений)

$$E_f = \frac{\sum_{k=1}^N |f(\bar{x}_{submin}^k) - f(\bar{x}_{min})|}{N}.$$

1.12.5 Свойства задачи

Условной или безусловной оптимизации: Задача безусловной оптимизации.

Одномерной или многомерной оптимизации: Многомерной: (двумерной).

Функция унимодальная или многоэкстремальная: Функция многоэкстремальная.

Функция стохастическая или нет: Функция не стохастическая.

Особенности: Есть 4 глобальных минимума.

1.12.6 Реализация

Реализация функции взята из библиотеки HarrixMathLibrary в разделе «Тестовые функции для оптимизации», которую можно найти по адресу <https://github.com/Harrix/HarrixMathLibrary>.

```
Код 1.12. Код функции MHL_TestFunction_Himmelblau
double MHL_TestFunction_Himmelblau(double x, double y)
{
/*
Функция двух переменных: функция Химмельблау.
Тестовая функция вещественной оптимизации.
Входные параметры:
    x - первая вещественная переменная;
    y - вторая вещественная переменная.
Возвращаемое значение:
    Значение тестовой функции в точке (x,y).
*/
double VMHL_Result;
VMHL_Result=(x*x+y-11)*(x*x+y-11)+(x+y*y-7)*(x+y*y-7);
return VMHL_Result;
}
```

1.12.7 Ссылки

Данная функция приводится в следующих источниках:

1. [18] — Himmelblau's function.
2. [19] — Minimization of the Himmelblau Function.

1.13 Перевернутая функция Розенброка

1.13.1 Описание функции

Идентификатор: MHL_TestFunction_InvertedRosenbrock.

Наименование: Перевернутая функция Розенброка.

Тип: Задача вещественной оптимизации.

Формула (целевая функция):

$$f(\bar{x}) = \frac{-100}{100(\bar{x}_1^2 - \bar{x}_2) + (1. - \bar{x}_1)^2 + 600}, \text{ где} \quad (1.13)$$

$\bar{x} \in X$, $\bar{x}_j \in [Left_j; Right_j]$, $Left_j = -5$, $Right_j = 5$, $j = \overline{1, n}$, $n = 2$.

Обозначение: \bar{x} — вещественный вектор;

$n = 2$ — размерность вещественного вектора.

Решаемая задача оптимизации: $\bar{x}_{min} = \arg \min_{\bar{x} \in X} f(\bar{x})$.

Точка минимума: $\bar{x}_{min} = (0.00990099, 5)^T$.

Минимум функции: $f(\bar{x}_{min}) = -0.99019608$.

График: Рисунок 1.14 на с. 52 стр.

1.13.2 Параметры для алгоритмов оптимизации

Точность вычислений: $\varepsilon = 0.025$.

Число интервалов, на которые предполагается разбивать каждую компоненту вектора \bar{x} в пределах своего изменения (для алгоритмов дискретной оптимизации) :

Для этого длина бинарной строки для x_j координаты равна (для алгоритмов бинарной оптимизации) :

$$(k_2)_j = 12 \quad (j = \overline{1, n}).$$

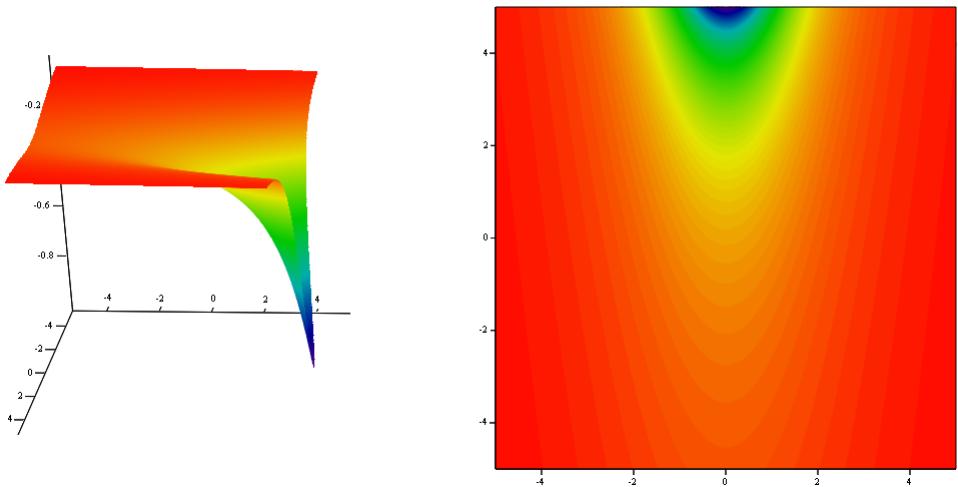


Рисунок 1.14. Перевернутая функция Розенброка

Замечание: $NumberOfParts_j$ выбирается как минимальное число, удовлетворяющее соотношению:

$$NumberOfParts_j = 2^{(k_2)_j} - 1 \geq \frac{10(Right_j - Left_j)}{\varepsilon}, \text{ где } (k_2)_j \in \mathbb{N}, (j = \overline{1, n}).$$

1.13.3 Основная задача и подзадачи

Изменяемый параметр:

n — размерность вещественного вектора.

Значение в основной задаче:

$n = 2$.

1.13.4 Нахождение ошибки оптимизации

Пусть в результате работы алгоритма оптимизации за N запусков мы нашли решения \bar{x}_{submin}^k со значениями целевой функции $f(\bar{x}_{submin}^k)$ соответственно ($k = \overline{1, N}$). Используем три вида ошибок:

Надёжность:

$$R = \frac{\sum_{k=1}^N S(\bar{x}_{submin}^k)}{N}, \text{ где}$$

$$S(\bar{x}_{submin}^k) = \begin{cases} 1, & \text{если } \left| (\bar{x}_{submin}^k)_j - (\bar{x}_{min})_j \right| < \varepsilon, j = \overline{1, n}; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Ошибка по входным параметрам:

$$E_x = \frac{\sum_{k=1}^N \left(\sqrt{\sum_{j=1}^n ((\bar{x}_{submin}^k)_j - (\bar{x}_{min})_j)^2} \right)}{N}.$$

Ошибка по значениям целевой функции:

$$E_f = \frac{\sum_{k=1}^N |f(\bar{x}_{submin}^k) - f(\bar{x}_{min})|}{N}.$$

1.13.5 Свойства задачи

Условной или безусловной оптимизации: Задача безусловной оптимизации.

Одномерной или многомерной оптимизации: Многомерной (двумерной).

Функция унимодальная или многоэкстремальная: Функция унимодальная на рассматриваемой области.

Функция стохастическая или нет: Функция не стохастическая.

Особенности: Авторская модификация функции.

1.13.6 Реализация

Реализация функции взята из библиотеки HarrixMathLibrary в разделе «Тестовые функции для оптимизации», которую можно найти по адресу <https://github.com/Harrix/HarrixMathLibrary>.

Код 1.13. Код функции MHL_TestFunction_InvertedRosenbrock

```
double MHL_TestFunction_InvertedRosenbrock(double x, double y)
{
/*
Функция двух переменных: перевернутая функция Розенброка.
Тестовая функция вещественной оптимизации.
Входные параметры:
    x - первая вещественная переменная;
    y - вторая вещественная переменная.
Возвращаемое значение:
    Значение тестовой функции в точке (x,y).
*/
double VMHL_Result;

VMHL_Result=-100./(100.* (x*x-y)+(1.-x)*(1.-x)+600.);

return VMHL_Result;
}
```

1.13.7 Ссылки

Представленная здесь функция является модификацией неправильной записи функции из данного источника:

1. [17, стр. 29] — Эволюционные методы моделирования и оптимизации сложных систем.

1.14 Функция Катникова

1.14.1 Описание функции

Идентификатор:

MHL_TestFunction_Katnikov.

Наименование:

Функция Катникова.

Тип:

Задача вещественной оптимизации.

Формула (целевая функция):

$$f(\bar{x}) = 0.5 (\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2) \left(2A + A \cos(1.5\bar{x}_1) \cos(3.14\bar{x}_2) + A \cos(\sqrt{5}\bar{x}_1) \cos(3.5\bar{x}_2) \right), \text{ где } \quad (1.14)$$

$\bar{x} \in X$, $\bar{x}_j \in [Left_j; Right_j]$, $Left_j = -5$, $Right_j = 5$, $j = \overline{1, n}$, $n = 2$, $A = 0.8$.

Обозначение:

\bar{x} — вещественный вектор;

$n = 2$ — размерность вещественного вектора.

Решаемая задача оптимизации:

$\bar{x}_{min} = \arg \min_{\bar{x} \in X} f(\bar{x})$.

Точка минимума:

$\bar{x}_{min} = (0, 0)^T$, то есть $(\bar{x}_{min})_j = 0$ ($j = \overline{1, n}$).

Минимум функции:

$f(\bar{x}_{min}) = 0$.

График:

Рисунок 1.15 на 54 стр.

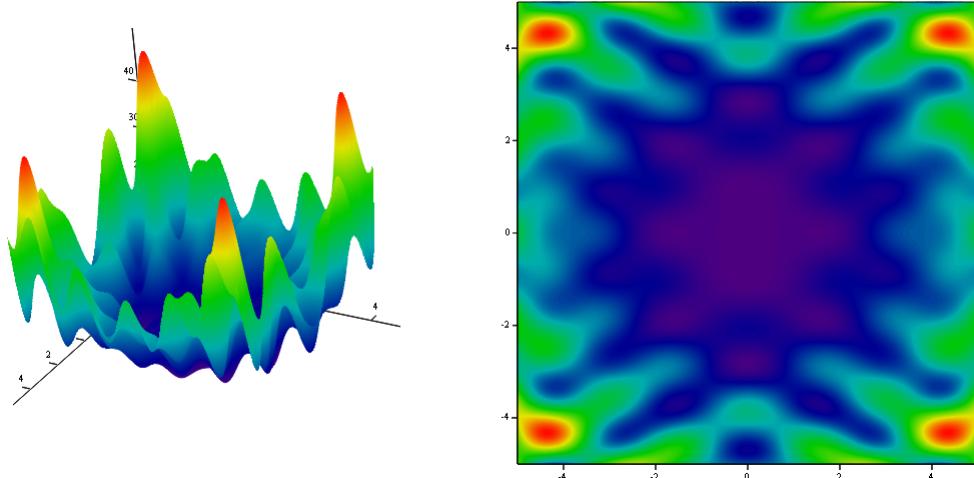


Рисунок 1.15. Функция Катникова

1.14.2 Параметры для алгоритмов оптимизации

Точность вычислений: $\varepsilon = 0.025$.

Число интервалов, на которые предполагается разбивать каждую компоненту вектора \bar{x} в пределах своего изменения (для алгоритмов дискретной оптимизации) :

Для этого длина бинарной строки для x_j координаты равна (для алгоритмов бинарной оптимизации) :

Замечание: $NumberOfParts_j$ выбирается как минимальное число, удовлетворяющее соотношению:

$$NumberOfParts_j = 2^{(k_2)_j} - 1 \geq \frac{10 (Right_j - Left_j)}{\varepsilon}, \text{ где } (k_2)_j \in \mathbb{N}, (j = \overline{1, n}).$$

1.14.3 Основная задача и подзадачи

Изменяемый параметр: n — размерность вещественного вектора.

Значение в основной задаче: $n = 2$.

1.14.4 Нахождение ошибки оптимизации

Пусть в результате работы алгоритма оптимизации за N запусков мы нашли решения \bar{x}_{submin}^k со значениями целевой функции $f(\bar{x}_{submin}^k)$ соответственно ($k = \overline{1, N}$). Используем три вида ошибок:

Надёжность:

$$R = \frac{\sum_{k=1}^N S(\bar{x}_{submin}^k)}{N}, \text{ где}$$

$$S(\bar{x}_{submin}^k) = \begin{cases} 1, & \text{если } |(\bar{x}_{submin}^k)_j - (\bar{x}_{min})_j| < \varepsilon, j = \overline{1, n}; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Ошибка по входным параметрам:

$$E_x = \frac{\sum_{k=1}^N \left(\frac{\sqrt{\sum_{j=1}^n ((\bar{x}_{submin}^k)_j - (\bar{x}_{min})_j)^2}}{n} \right)}{N}.$$

Ошибка по значениям целевой функции:

$$E_f = \frac{\sum_{k=1}^N |f(\bar{x}_{submin}^k) - f(\bar{x}_{min})|}{N}.$$

1.14.5 Свойства задачи

Условной или безусловной оптимизации: Задача безусловной оптимизации.

Одномерной или многомерной оптимизации: Многомерной: (двумерной).

Функция унимодальная или многоэкстремальная: Функция многоэкстремальная.

Функция стохастическая или нет: Функция не стохастическая.

Особенности: Нет.

1.14.6 Реализация

Реализация функции взята из библиотеки HarrixMathLibrary в разделе «Тестовые функции для оптимизации», которую можно найти по адресу <https://github.com/Harrix/HarrixMathLibrary>.

Код 1.14. Код функции MHL_TestFunction_Katnikov

```
double MHL_TestFunction_Katnikov(double x, double y)
{
/*
Функция двух переменных: функция Катникова.
Тестовая функция вещественной оптимизации.
Входные параметры:
    x - первая вещественная переменная;
    y - вторая вещественная переменная.
Возвращаемое значение:
    Значение тестовой функции в точке (x,y).
*/
double VMHL_Result;
double A=0.8;
VMHL_Result=0.5*(x*x+y*y)*(2*A+A*cos(1.5*x)*cos(3.14*y)+A*cos(sqrt(5)*x)*cos(3.5*y));
return VMHL_Result;
}
```

1.14.7 Ссылки

Данная функция приводится в следующих источниках:

1. [17, стр. 31] — Эволюционные методы моделирования и оптимизации сложных систем.

1.15 Функция Multiextremal3

1.15.1 Описание функции

Идентификатор:

MHL_TestFunction_Multiextremal3.

Наименование:

Функция Multiextremal3.

Тип:

Задача вещественной оптимизации.

Формула (целевая функция):

$$f(\bar{x}) = \bar{x}_1^2 |\sin(2\bar{x}_1)| + \bar{x}_2^2 |\sin(2\bar{x}_2)| - \frac{1}{5\bar{x}_1^2 + 5\bar{x}_2^2 + 0.2} + 5, \text{ где } \quad (1.15)$$

$\bar{x} \in X$, $\bar{x}_j \in [Left_j; Right_j]$, $Left_j = -5$, $Right_j = 5$, $j = \overline{1, n}$, $n = 2$.

Обозначение:

\bar{x} — вещественный вектор;

$n = 2$ — размерность вещественного вектора.

Решаемая задача оптимизации:

$\bar{x}_{min} = \arg \min_{\bar{x} \in X} f(\bar{x})$.

Точка минимума:

$\bar{x}_{min} = (0, 0)^T$, то есть $(\bar{x}_{min})_j = 0$ ($j = \overline{1, n}$).

Минимум функции:

$f(\bar{x}_{min}) = 0$.

График:

Рисунок 1.16 на с. 57

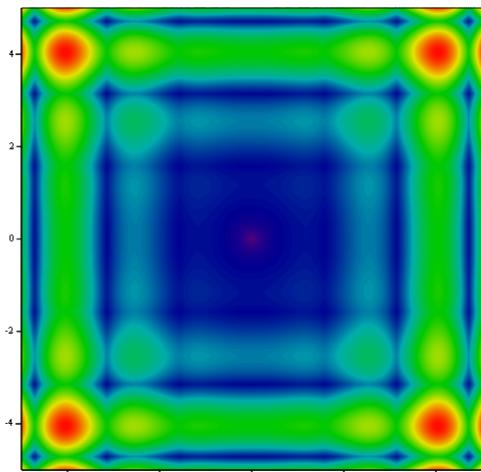
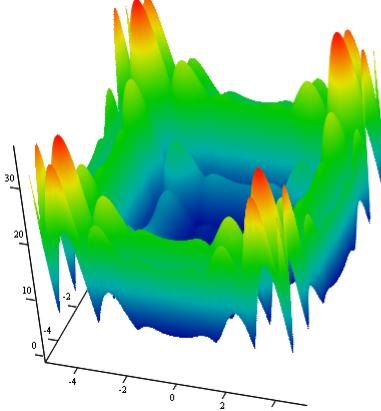


Рисунок 1.16. Функция Multiextremal3

1.15.2 Параметры для алгоритмов оптимизации

Точность вычислений: $\varepsilon = 0.025$.

Число интервалов, на которые предполагается разбивать каждую компоненту вектора \bar{x} в пределах своего изменения (для алгоритмов дискретной оптимизации) :

Для этого длина бинарной строки для x_j координаты равна (для алгоритмов бинарной оптимизации) :

Замечание: $NumberOfParts_j$ выбирается как минимальное число, удовлетворяющее соотношению:

$$NumberOfParts_j = 2^{(k_2)_j} - 1 \geq \frac{10 (Right_j - Left_j)}{\varepsilon}, \text{ где } (k_2)_j \in \mathbb{N}, (j = \overline{1, n}).$$

1.15.3 Основная задача и подзадачи

Изменяемый параметр: n — размерность вещественного вектора.

Значение в основной задаче: $n = 2$.

1.15.4 Нахождение ошибки оптимизации

Пусть в результате работы алгоритма оптимизации за N запусков мы нашли решения \bar{x}_{submin}^k со значениями целевой функции $f(\bar{x}_{submin}^k)$ соответственно ($k = \overline{1, N}$). Используем три вида ошибок:

Надёжность:

$$R = \frac{\sum_{k=1}^N S(\bar{x}_{submin}^k)}{N}, \text{ где}$$

$$S(\bar{x}_{submin}^k) = \begin{cases} 1, & \text{если } |(\bar{x}_{submin}^k)_j - (\bar{x}_{min})_j| < \varepsilon, j = \overline{1, n}; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Ошибка по входным параметрам:

$$E_x = \frac{\sum_{k=1}^N \left(\sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n ((\bar{x}_{submin}^k)_j - (\bar{x}_{min})_j)^2}{n}} \right)}{N}.$$

Ошибка по значениям целевой функции:

$$E_f = \frac{\sum_{k=1}^N |f(\bar{x}_{submin}^k) - f(\bar{x}_{min})|}{N}.$$

1.15.5 Свойства задачи

Условной или безусловной оптимизации: Задача безусловной оптимизации.

Одномерной или многомерной оптимизации: Многомерной: (двумерной).

Функция унимодальная или многоэкстремальная: Функция многоэкстремальная.

Функция стохастическая или нет: Функция не стохастическая.

Особенности: Нет.

1.15.6 Реализация

Реализация функции взята из библиотеки HarrixMathLibrary в разделе «Тестовые функции для оптимизации», которую можно найти по адресу <https://github.com/Harrix/HarrixMathLibrary>.

Код 1.15. Код функции MHL_TestFunction_Multiextremal3

```
double MHL_TestFunction_Multiextremal3(double x, double y)
{
/*
Функция двух переменных: функция Multiextremal3.
Тестовая функция вещественной оптимизации.
Входные параметры:
    x - первая вещественная переменная;
    y - вторая вещественная переменная.
Возвращаемое значение:
    Значение тестовой функции в точке (x,y).
*/
double VMHL_Result;
VMHL_Result=x*x*fabs(sin(2.*x))+y*y*fabs(sin(2.*y))-1./(5.*x*x+5.*y*y+0.2)+5.;
return VMHL_Result;
}
```

1.15.7 Ссылки

Данная функция приводится в следующих источниках:

1. [17, стр. 31] — Эволюционные методы моделирования и оптимизации сложных систем.

1.16 Функция Multiextremal4

1.16.1 Описание функции

Идентификатор:

MHL_TestFunction_Multiextremal4.

Наименование:

Функция Multiextremal4.

Тип:

Задача вещественной оптимизации.

Формула (целевая функция):

$$f(\bar{x}) = 0.5 (\bar{x}_1^2 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 + \bar{x}_2^2) (1 + 0.5 \cos(1.5\bar{x}_1) \cos(3.2\bar{x}_1 \bar{x}_2) \cos(3.14\bar{x}_2) + 0.5 \cos(2.2\bar{x}_1) \cos(4.8\bar{x}_1 \bar{x}_2) \cos(3.5\bar{x}_2)), \text{ где}$$
 (1.16)

$\bar{x} \in X$, $\bar{x}_j \in [Left_j; Right_j]$, $Left_j = 0$, $Right_j = 4$, $j = \overline{1, n}$, $n = 2$.

Обозначение:

\bar{x} — вещественный вектор;

$n = 2$ — размерность вещественного вектора.

Решаемая задача оптимизации:

$\bar{x}_{min} = \arg \min_{\bar{x} \in X} f(\bar{x})$.

Точка минимума:

$\bar{x}_{min} = (0, 0)^T$, то есть $(\bar{x}_{min})_j = 0$ ($j = \overline{1, n}$).

Минимум функции:

$f(\bar{x}_{min}) = 0$.

График:

Рисунок 1.17 на 60 стр.

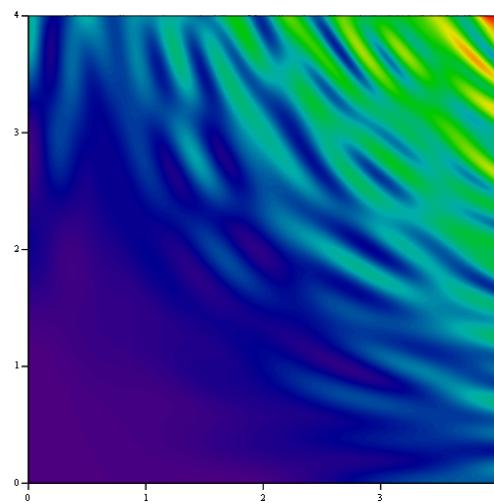
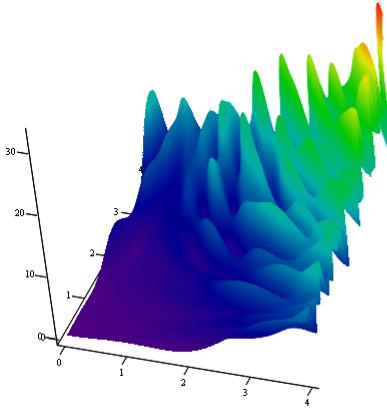


Рисунок 1.17. Функция Multiextremal4

1.16.2 Параметры для алгоритмов оптимизации

Точность вычислений:

$$\varepsilon = 0.01.$$

Число интервалов, на которые предполагается разбивать каждую компоненту вектора \bar{x} в пределах своего изменения (для алгоритмов дискретной оптимизации) :

Для этого длина бинарной строки для x_j координаты равна (для алгоритмов бинарной оптимизации) :

Замечание: $NumberOfParts_j$ выбирается как минимальное число, удовлетворяющее соотношению:

$$NumberOfParts_j = 2^{(k_2)_j} - 1 \geq \frac{10 (Right_j - Left_j)}{\varepsilon}, \text{ где } (k_2)_j \in \mathbb{N}, (j = \overline{1, n}).$$

1.16.3 Основная задача и подзадачи

Изменяемый параметр:

n — размерность вещественного вектора.

Значение в основной задаче:

$$n = 2.$$

1.16.4 Нахождение ошибки оптимизации

Пусть в результате работы алгоритма оптимизации за N запусков мы нашли решения \bar{x}_{submin}^k со значениями целевой функции $f(\bar{x}_{submin}^k)$ соответственно ($k = \overline{1, N}$). Используем три вида ошибок:

Надёжность:

$$R = \frac{\sum_{k=1}^N S(\bar{x}_{submin}^k)}{N}, \text{ где}$$

$$S(\bar{x}_{submin}^k) = \begin{cases} 1, & \text{если } |(\bar{x}_{submin}^k)_j - (\bar{x}_{min})_j| < \varepsilon, j = \overline{1, n}; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Ошибка по входным параметрам:

$$E_x = \frac{\sum_{k=1}^N \left(\frac{\sqrt{\sum_{j=1}^n ((\bar{x}_{submin}^k)_j - (\bar{x}_{min})_j)^2}}{n} \right)}{N}.$$

Ошибка по значениям целевой функции:

$$E_f = \frac{\sum_{k=1}^N |f(\bar{x}_{submin}^k) - f(\bar{x}_{min})|}{N}.$$

1.16.5 Свойства задачи

Условной или безусловной оптимизации: Задача безусловной оптимизации.

Одномерной или многомерной оптимизации: Многомерной: (двумерной).

Функция унимодальная или многоэкстремальная: Функция многоэкстремальная.

Функция стохастическая или нет: Функция не стохастическая.

Особенности: Нет.

1.16.6 Реализация

Реализация функции взята из библиотеки HarrixMathLibrary в разделе «Тестовые функции для оптимизации», которую можно найти по адресу <https://github.com/Harrix/HarrixMathLibrary>.

Код 1.16. Код функции MHL_TestFunction_Multiextremal4

```
double MHL_TestFunction_Multiextremal4(double x, double y)
{
/*
Функция двух переменных: функция Multiextremal4.
Тестовая функция вещественной оптимизации.
Входные параметры:
    x - первая вещественная переменная;
    y - вторая вещественная переменная.
Возвращаемое значение:
    Значение тестовой функции в точке (x,y).
*/
double VMHL_Result;
VMHL_Result=0.5*(x*x+x*y+y*y)*(1.+0.5*cos(1.5*x)*cos(3.2*x*y)*cos(3.14*y)+0.5*cos
    (2.2*x)*cos(4.8*x*y)*cos(3.5*y));
return VMHL_Result;
}
```

1.16.7 Ссылки

Данная функция приводится в следующих источниках:

1. [17, стр. 31] — Эволюционные методы моделирования и оптимизации сложных систем.

1.17 Мультипликативная потенциальная функция

1.17.1 Описание функции

Идентификатор:

MHL_TestFunction_MultiplicativePotential.

Наименование:

Мультипликативная потенциальная функция.

Тип:

Задача вещественной оптимизации.

Формула (целевая функция):

$$f(\bar{x}) = -z(\bar{x}_1) \cdot z(\bar{x}_2), \text{ где} \quad (1.17)$$

$$z(v) = -\frac{1}{(v-1)^2 + 0.2} - \frac{1}{2(v-2)^2 + 0.15} - \frac{1}{3(v-3)^2 + 0.3},$$

$\bar{x} \in X, \bar{x}_j \in [Left_j; Right_j], Left_j = 0, Right_j = 4, j = \overline{1, n}, n = 2.$

Обозначение:

\bar{x} — вещественный вектор;

$n = 2$ — размерность вещественного вектора.

Решаемая задача оптимизации:

$\bar{x}_{min} = \arg \min_{\bar{x} \in X} f(\bar{x}).$

Точка минимума:

$\bar{x}_{min} = (2, 2)^T$, то есть $(\bar{x}_{min})_j = 2 (j = \overline{1, n}).$

Минимум функции:

$f(\bar{x}_{min}) = -60.8872819100091.$

График:

Рисунок 1.18 на с. 63

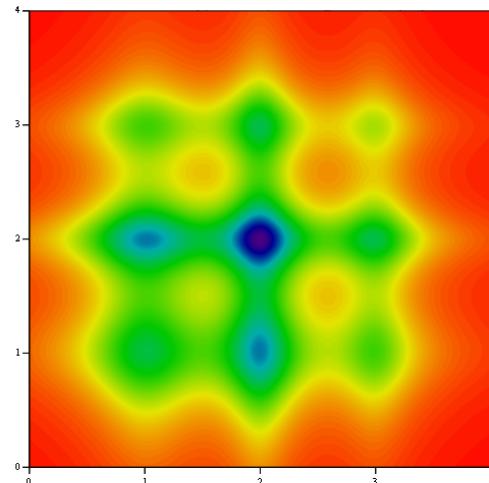
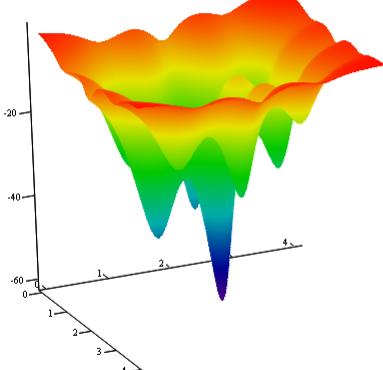


Рисунок 1.18. Мультипликативная потенциальная функция

1.17.2 Параметры для алгоритмов оптимизации

Точность вычислений:

$$\varepsilon = 0.01.$$

Число интервалов, на которые предполагается разбивать каждую компоненту вектора \bar{x} в пределах своего изменения (для алгоритмов дискретной оптимизации) :

Для этого длина бинарной строки для x_j координаты равна (для алгоритмов бинарной оптимизации) :

Замечание: $NumberOfParts_j$ выбирается как минимальное число, удовлетворяющее соотношению:

$$NumberOfParts_j = 2^{(k_2)_j} - 1 \geq \frac{10 (Right_j - Left_j)}{\varepsilon}, \text{ где } (k_2)_j \in \mathbb{N}, (j = \overline{1, n}).$$

1.17.3 Основная задача и подзадачи

Изменяемый параметр:

n — размерность вещественного вектора.

Значение в основной задаче:

$$n = 2.$$

1.17.4 Нахождение ошибки оптимизации

Пусть в результате работы алгоритма оптимизации за N запусков мы нашли решения \bar{x}_{submin}^k со значениями целевой функции $f(\bar{x}_{submin}^k)$ соответственно ($k = \overline{1, N}$). Используем три вида ошибок:

Надёжность:

$$R = \frac{\sum_{k=1}^N S(\bar{x}_{submin}^k)}{N}, \text{ где}$$

$$S(\bar{x}_{submin}^k) = \begin{cases} 1, & \text{если } |(\bar{x}_{submin}^k)_j - (\bar{x}_{min})_j| < \varepsilon, j = \overline{1, n}; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Ошибка по входным параметрам:

$$E_x = \frac{\sum_{k=1}^N \left(\frac{\sqrt{\sum_{j=1}^n ((\bar{x}_{submin}^k)_j - (\bar{x}_{min})_j)^2}}{n} \right)}{N}.$$

Ошибка по значениям целевой функции:

$$E_f = \frac{\sum_{k=1}^N |f(\bar{x}_{submin}^k) - f(\bar{x}_{min})|}{N}.$$

1.17.5 Свойства задачи

Условной или безусловной оптимизации: Задача безусловной оптимизации.

Одномерной или многомерной оптимизации: Многомерной: (двумерной).

Функция унимодальная или многоэкстремальная: Функция многоэкстремальная.

Функция стохастическая или нет: Функция не стохастическая.

Особенности: Нет.

1.17.6 Реализация

Реализация функции взята из библиотеки HarrixMathLibrary в разделе «Тестовые функции для оптимизации», которую можно найти по адресу <https://github.com/Harrix/HarrixMathLibrary>.

Код 1.17. Код функции MHL_TestFunction_MultiplicativePotential

```
double MHL_TestFunction_MultiplicativePotential(double x, double y)
{
/*
Функция двух переменных: мультипликативная потенциальная функция.
Тестовая функция вещественной оптимизации.

Входные параметры:
    x - первая вещественная переменная;
    y - вторая вещественная переменная.

Возвращаемое значение:
    Значение тестовой функции в точке (x,y).
*/
double VMHL_Result;
double z1=-(1./((x-1.)*(x-1.)+0.2))-(1./(2.*(x-2.)*(x-2.)+0.15))-(1./(3.*(x-3.)*(x-3.)+0.3));
double z2=-(1./((y-1.)*(y-1.)+0.2))-(1./(2.*(y-2.)*(y-2.)+0.15))-(1./(3.*(y-3.)*(y-3.)+0.3));
VMHL_Result=-z1*z2;
return VMHL_Result;
}
```

1.17.7 Ссылки

Данная функция приводится в следующих источниках:

1. [17, стр. 32] — Эволюционные методы моделирования и оптимизации сложных систем.

1.18 Функция Rana

1.18.1 Описание функции

Идентификатор:

MHL_TestFunction_Rana.

Наименование:

Функция Rana.

Тип:

Задача вещественной оптимизации.

Формула (целевая функция):

$$f(\bar{x}) = \bar{x}_1 \sin\left(\sqrt{|\bar{x}_2 + 1 - \bar{x}_1|}\right) \cos\left(\sqrt{|\bar{x}_2 + 1 + \bar{x}_1|}\right) + \quad (1.18)$$

$$+ (\bar{x}_2 + 1) \cos\left(\sqrt{|\bar{x}_2 + 1 - \bar{x}_1|}\right) \sin\left(\sqrt{|\bar{x}_2 + 1 + \bar{x}_1|}\right), \text{ где} \quad (1.19)$$

$\bar{x} \in X$, $\bar{x}_j \in [Left_j; Right_j]$, $Left_j = -512$, $Right_j = 512$, $j = \overline{1, n}$, $n = 2$.

Обозначение:

\bar{x} — вещественный вектор;

$n = 2$ — размерность вещественного вектора.

Решаемая задача оптимизации:

$\bar{x}_{min} = \arg \min_{\bar{x} \in X} f(\bar{x})$.

Точка минимума:

$\bar{x}_{min} = (-488.6326, 512)^T$.

Минимум функции:

$f(\bar{x}_{min}) = -511.7328819$.

График:

Рисунок 1.19 на с. 66

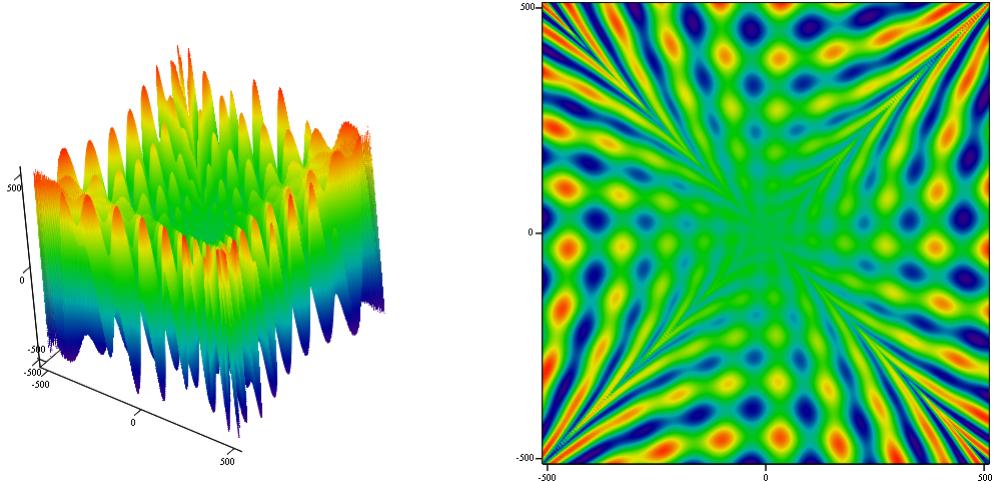


Рисунок 1.19. Функция Rana

1.18.2 Параметры для алгоритмов оптимизации

Точность вычислений:

$$\varepsilon = 2.5.$$

Число интервалов, на которые предполагается разбивать каждую компоненту вектора \bar{x} в пределах своего изменения (для алгоритмов дискретной оптимизации) :

Для этого длина бинарной строки для x_j координаты равна (для алгоритмов бинарной оптимизации) :

Замечание: $NumberOfParts_j$ выбирается как минимальное число, удовлетворяющее соотношению:

$$NumberOfParts_j = 2^{(k_2)_j} - 1 \geq \frac{10 (Right_j - Left_j)}{\varepsilon}, \text{ где } (k_2)_j \in \mathbb{N}, (j = \overline{1, n}).$$

1.18.3 Основная задача и подзадачи

Изменяемый параметр:

n — размерность вещественного вектора.

Значение в основной задаче:

$$n = 2.$$

1.18.4 Нахождение ошибки оптимизации

Пусть в результате работы алгоритма оптимизации за N запусков мы нашли решения \bar{x}_{submin}^k со значениями целевой функции $f(\bar{x}_{submin}^k)$ соответственно ($k = \overline{1, N}$). Используем три вида ошибок:

Надёжность:

$$R = \frac{\sum_{k=1}^N S(\bar{x}_{submin}^k)}{N}, \text{ где}$$

$$S(\bar{x}_{submin}^k) = \begin{cases} 1, & \text{если } |(\bar{x}_{submin}^k)_j - (\bar{x}_{min})_j| < \varepsilon, j = \overline{1, n}; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Ошибка по входным параметрам:

$$E_x = \frac{\sum_{k=1}^N \left(\sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n ((\bar{x}_{submin}^k)_j - (\bar{x}_{min})_j)^2}{n}} \right)}{N}.$$

Ошибка по значениям целевой функции:

$$E_f = \frac{\sum_{k=1}^N |f(\bar{x}_{submin}^k) - f(\bar{x}_{min})|}{N}.$$

1.18.5 Свойства задачи

Условной или безусловной оптимизации: Задача безусловной оптимизации.

Одномерной или многомерной оптимизации: Многомерной: (двумерной).

Функция унимодальная или многоэкстремальная: Функция многоэкстремальная.

Функция стохастическая или нет: Функция не стохастическая.

Особенности: Нет.

1.18.6 Реализация

Реализация функции взята из библиотеки HarrixMathLibrary в разделе «Тестовые функции для оптимизации», которую можно найти по адресу <https://github.com/Harrix/HarrixMathLibrary>.

Код 1.18. Код функции MHL_TestFunction_Rana

```
double MHL_TestFunction_Rana(double x, double y)
{
/*
Функция двух переменных: функция Rana.
Тестовая функция вещественной оптимизации.
Входные параметры:
    x - первая вещественная переменная;
    y - вторая вещественная переменная.
Возвращаемое значение:
    Значение тестовой функции в точке (x,y).
*/
double VMHL_Result;
VMHL_Result=x*sin(sqrt(fabs(y+1.-x)))*cos(sqrt(fabs(y+1.+x))) + (y+1.)*cos(sqrt(fabs(
    y+1.-x)))*sin(sqrt(fabs(y+1.+x)));
return VMHL_Result;
}
```

1.18.7 Ссылки

Данная функция приводится в следующих источниках:

1. [20] — Rana.
2. [7] — Non-linear Continuous Multi-Extremal Optimization.

1.19 Функция Растригина с изменением коэффициентов

1.19.1 Описание функции

Идентификатор:

MHL_TestFunction_RastriginWithChange.

Наименование:

Функция Растригина с изменением коэффициентов.

Тип:

Задача вещественной оптимизации.

Формула (целевая функция):

$$f(\bar{x}) = 0.1\bar{x}_1^2 + 0.1\bar{x}_2^2 - 4 \cos(0.8\bar{x}_1) - 4 \cos(0.8\bar{x}_2) + 8, \text{ где } \quad (1.20)$$

$$\bar{x} \in X, \bar{x}_j \in [Left_j; Right_j], Left_j = -16, Right_j = 16, j = \overline{1, n}, n = 2.$$

Обозначение:

\bar{x} — вещественный вектор;

$n = 2$ — размерность вещественного вектора.

Решаемая задача оптимизации:

$$\bar{x}_{max} = \arg \max_{\bar{x} \in X} f(\bar{x}).$$

Точка максимума:

$$\bar{x}_{max} = (0, 0)^T, \text{ то есть } (\bar{x}_{max})_j = 0 (j = \overline{1, n}).$$

Максимум функции:

$$f(\bar{x}_{max}) = 0.$$

График:

Рисунок 1.20 на с. 69

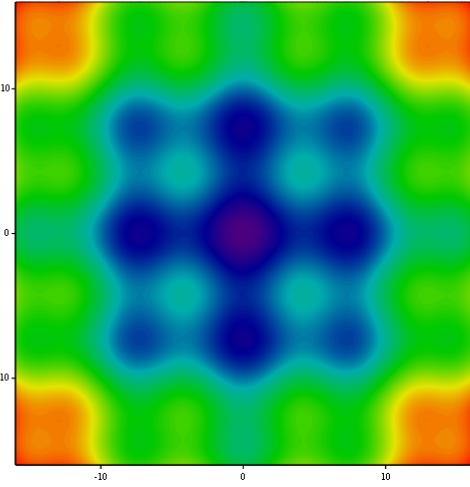
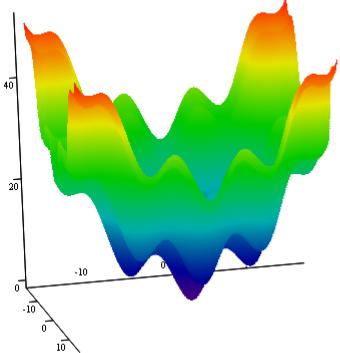


Рисунок 1.20. Функция Растригина с изменением коэффициентов

1.19.2 Параметры для алгоритмов оптимизации

Точность вычислений:

$$\varepsilon = 0.08.$$

Число интервалов, на которые предполагается разбивать каждую компоненту вектора \bar{x} в пределах своего изменения (для алгоритмов дискретной оптимизации) :

Для этого длина бинарной строки для x_j координаты равна (для алгоритмов бинарной оптимизации) :

Замечание: $NumberOfParts_j$ выбирается как минимальное число, удовлетворяющее соотношению:

$$NumberOfParts_j = 2^{(k_2)_j} - 1 \geq \frac{10 (Right_j - Left_j)}{\varepsilon}, \text{ где } (k_2)_j \in \mathbb{N}, (j = \overline{1, n}).$$

1.19.3 Основная задача и подзадачи

Изменяемый параметр:

n — размерность вещественного вектора.

Значение в основной задаче:

$$n = 2.$$

1.19.4 Нахождение ошибки оптимизации

Пусть в результате работы алгоритма оптимизации за N запусков мы нашли решения \bar{x}_{submin}^k со значениями целевой функции $f(\bar{x}_{submin}^k)$ соответственно ($k = \overline{1, N}$). Используем три вида ошибок:

Надёжность:

$$R = \frac{\sum_{k=1}^N S(\bar{x}_{submin}^k)}{N}, \text{ где}$$

$$S(\bar{x}_{submin}^k) = \begin{cases} 1, & \text{если } |(\bar{x}_{submin}^k)_j - (\bar{x}_{min})_j| < \varepsilon, j = \overline{1, n}; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Ошибка по входным параметрам:

$$E_x = \frac{\sum_{k=1}^N \left(\frac{\sqrt{\sum_{j=1}^n ((\bar{x}_{submin}^k)_j - (\bar{x}_{min})_j)^2}}{n} \right)}{N}.$$

Ошибка по значениям целевой функции:

$$E_f = \frac{\sum_{k=1}^N |f(\bar{x}_{submin}^k) - f(\bar{x}_{min})|}{N}.$$

1.19.5 Свойства задачи

Условной или безусловной оптимизации: Задача безусловной оптимизации.

Одномерной или многомерной оптимизации: Многомерной: (двумерной).

Функция унимодальная или многоэкстремальная: Функция многоэкстремальная.

Функция стохастическая или нет: Функция не стохастическая.

Особенности: Нет.

1.19.6 Реализация

Реализация функции взята из библиотеки HarrixMathLibrary в разделе «Тестовые функции для оптимизации», которую можно найти по адресу <https://github.com/Harrix/HarrixMathLibrary>.

Код 1.19. Код функции MHL_TestFunction_RastriginWithChange

```
double MHL_TestFunction_RastriginWithChange(double x, double y)
{
/*
Функция двух переменных: функция Раstrигина с изменением коэффициентов.
Тестовая функция вещественной оптимизации.

Входные параметры:
    x - первая вещественная переменная;
    y - вторая вещественная переменная.

Возвращаемое значение:
    Значение тестовой функции в точке (x,y).
*/
double VMHL_Result;

VMHL_Result=0.1*x*x+0.1*y*y-4.*cos(0.8*x)-4.*cos(0.8*y)+8.;

return VMHL_Result;
}
```

1.19.7 Ссылки

Данная функция приводится в следующих источниках:

1. [17, стр. 27] — Эволюционные методы моделирования и оптимизации сложных систем.

1.20 Функция Растригина овражная с поворотом осей

1.20.1 Описание функции

Идентификатор:

MHL_TestFunction_RastriginWithTurning.

Наименование:

Функция Растригина овражная с поворотом осей.

Тип:

Задача вещественной оптимизации.

Формула (целевая функция):

$$f(\bar{x}) = (0.1K_{\bar{x}_1}A(\bar{x}_1, \bar{x}_2))^2 + (0.1K_{\bar{x}_2}B(\bar{x}_1, \bar{x}_2))^2 - 4 \cos(0.8K_{\bar{x}_1}A(\bar{x}_1, \bar{x}_2)) - 4 \cos(0.8K_{\bar{x}_2}B(\bar{x}_1, \bar{x}_2)) + 8, \text{ где}$$
$$A(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \bar{x}_1 \cos(\alpha) - \bar{x}_2 \sin(\alpha),$$
$$B(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \bar{x}_1 \sin(\alpha) + \bar{x}_2 \cos(\alpha),$$

(1.21)

$\bar{x} \in X$, $\bar{x}_j \in [Left_j; Right_j]$, $Left_j = -16$, $Right_j = 16$, $j = \overline{1, n}$, $n = 2$, $K_{\bar{x}_1} = 1.5$, $K_{\bar{x}_2} = 0.8$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Обозначение:

\bar{x} — вещественный вектор;

$n = 2$ — размерность вещественного вектора.

Решаемая задача оптимизации:

$\bar{x}_{max} = \arg \max_{\bar{x} \in X} f(\bar{x}).$

Точка максимума:

$\bar{x}_{max} = (0, 0)^T$, то есть $(\bar{x}_{max})_j = 0$ ($j = \overline{1, n}$).

Максимум функции:

$f(\bar{x}_{max}) = 0.$

График:

Рисунок 1.21 на с. 72

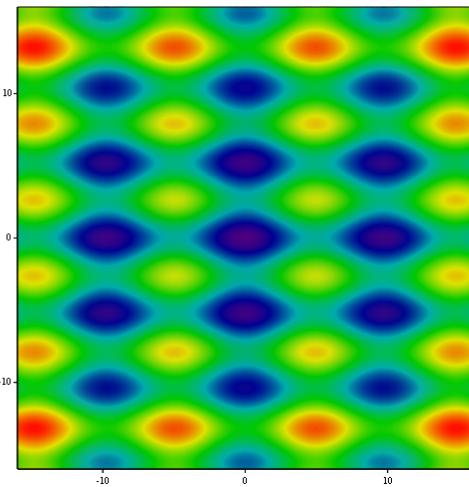
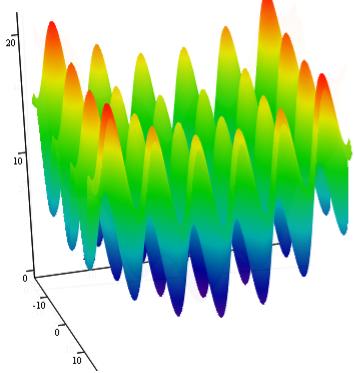


Рисунок 1.21. Функция Растригина овражная с поворотом осей

1.20.2 Параметры для алгоритмов оптимизации

Точность вычислений:

$$\varepsilon = 0.08.$$

Число интервалов, на которые предполагается разбивать каждую компоненту вектора \bar{x} в пределах своего изменения (для алгоритмов дискретной оптимизации) :

Для этого длина бинарной строки для x_j координаты равна (для алгоритмов бинарной оптимизации) :

Замечание: $NumberOfParts_j$ выбирается как минимальное число, удовлетворяющее соотношению:

$$NumberOfParts_j = 2^{(k_2)_j} - 1 \geq \frac{10 (Right_j - Left_j)}{\varepsilon}, \text{ где } (k_2)_j \in \mathbb{N}, (j = \overline{1, n}).$$

1.20.3 Основная задача и подзадачи

Изменяемый параметр:

n — размерность вещественного вектора.

Значение в основной задаче:

$$n = 2.$$

1.20.4 Нахождение ошибки оптимизации

Пусть в результате работы алгоритма оптимизации за N запусков мы нашли решения \bar{x}_{submin}^k со значениями целевой функции $f(\bar{x}_{submin}^k)$ соответственно ($k = \overline{1, N}$). Используем три вида ошибок:

Надёжность:

$$R = \frac{\sum_{k=1}^N S(\bar{x}_{submin}^k)}{N}, \text{ где}$$

$$S(\bar{x}_{submin}^k) = \begin{cases} 1, & \text{если } |(\bar{x}_{submin}^k)_j - (\bar{x}_{min})_j| < \varepsilon, j = \overline{1, n}; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Ошибка по входным параметрам:

$$E_x = \frac{\sum_{k=1}^N \left(\frac{\sqrt{\sum_{j=1}^n ((\bar{x}_{submin}^k)_j - (\bar{x}_{min})_j)^2}}{n} \right)}{N}.$$

Ошибка по значениям целевой функции:

$$E_f = \frac{\sum_{k=1}^N |f(\bar{x}_{submin}^k) - f(\bar{x}_{min})|}{N}.$$

1.20.5 Свойства задачи

Условной или безусловной оптимизации: Задача безусловной оптимизации.

Одномерной или многомерной оптимизации: Многомерной: (двумерной).

Функция унимодальная или многоэкстремальная: Функция многоэкстремальная.

Функция стохастическая или нет: Функция не стохастическая.

Особенности: Нет.

1.20.6 Реализация

Реализация функции взята из библиотеки HarrixMathLibrary в разделе «Тестовые функции для оптимизации», которую можно найти по адресу <https://github.com/Harrix/HarrixMathLibrary>.

Код 1.20. Код функции MHL_TestFunction_RastriginWithTurning

```
double MHL_TestFunction_RastriginWithTurning(double x, double y)
{
/*
Функция двух переменных: функция Раstrигина овражная с поворотом осей.
Тестовая функция вещественной оптимизации.

Входные параметры:
    x - первая вещественная переменная;
    y - вторая вещественная переменная.
Возвращаемое значение:
    Значение тестовой функции в точке (x,y).
*/
double VMHL_Result;

double alpha=MHL_PI_2;
double kx=1.5;
double ky=0.8;

double A,B;
A=x*cos(alpha)-y*sin(alpha);
B=x*sin(alpha)+y*cos(alpha);

VMHL_Result=(0.1*kx*A)*(0.1*kx*A)+(0.1*ky*B)*(0.1*ky*B)-4.*cos(0.8*kx*A)-4.*cos(0.8*
    ky*B)+8.;

return VMHL_Result;
}
```

1.20.7 Ссылки

Данная функция приводится в следующих источниках:

1. [17, стр. 28] — Эволюционные методы моделирования и оптимизации сложных систем.

1.21 Функция ReverseGriewank

1.21.1 Описание функции

Идентификатор:

MHL_TestFunction_ReverseGriewank.

Наименование:

Функция ReverseGriewank.

Тип:

Задача вещественной оптимизации.

Формула (целевая функция):

$$f(\bar{x}) = \frac{1}{\frac{\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2}{200} - \cos(\bar{x}_0) \cos\left(\frac{\bar{x}_2}{\sqrt{2}}\right) + 2}, \text{ где } \quad (1.22)$$

$\bar{x} \in X$, $\bar{x}_j \in [Left_j; Right_j]$, $Left_j = -10$, $Right_j = 10$, $j = \overline{1, n}$, $n = 2$.

Обозначение:

\bar{x} — вещественный вектор;

$n = 2$ — размерность вещественного вектора.

Решаемая задача оптимизации:

$\bar{x}_{max} = \arg \max_{\bar{x} \in X} f(\bar{x})$.

Точка максимума:

$\bar{x}_{max} = (0, 0)^T$, то есть $(\bar{x}_{max})_j = 0$ ($j = \overline{1, n}$).

Максимум функции:

$f(\bar{x}_{max}) = 1$.

График:

Рисунок 1.22 на с. 75

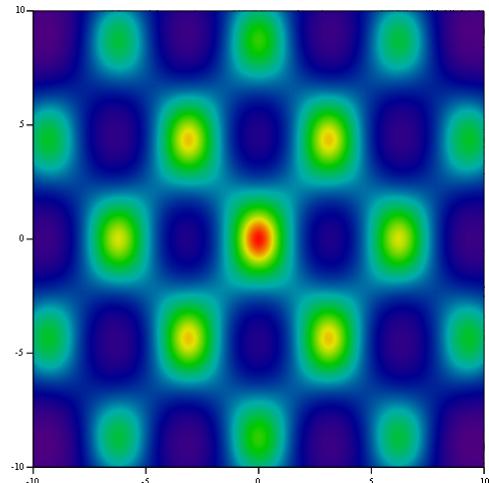
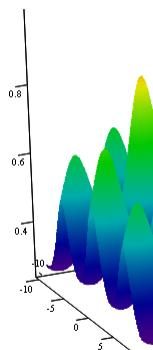


Рисунок 1.22. Функция ReverseGriewank

1.21.2 Параметры для алгоритмов оптимизации

Точность вычислений:

$$\varepsilon = 0.05.$$

Число интервалов, на которые предполагается разбивать каждую компоненту вектора \bar{x} в пределах своего изменения (для алгоритмов дискретной оптимизации) :

Для этого длина бинарной строки для x_j координаты равна (для алгоритмов бинарной оптимизации) :

Замечание: $NumberOfParts_j$ выбирается как минимальное число, удовлетворяющее соотношению:

$$NumberOfParts_j = 2^{(k_2)_j} - 1 \geq \frac{10 (Right_j - Left_j)}{\varepsilon}, \text{ где } (k_2)_j \in \mathbb{N}, (j = \overline{1, n}).$$

1.21.3 Основная задача и подзадачи

Изменяемый параметр:

n — размерность вещественного вектора.

Значение в основной задаче:

$$n = 2.$$

1.21.4 Нахождение ошибки оптимизации

Пусть в результате работы алгоритма оптимизации за N запусков мы нашли решения \bar{x}_{submin}^k со значениями целевой функции $f(\bar{x}_{submin}^k)$ соответственно ($k = \overline{1, N}$). Используем три вида ошибок:

Надёжность:

$$R = \frac{\sum_{k=1}^N S(\bar{x}_{submin}^k)}{N}, \text{ где}$$

$$S(\bar{x}_{submin}^k) = \begin{cases} 1, & \text{если } |(\bar{x}_{submin}^k)_j - (\bar{x}_{min})_j| < \varepsilon, j = \overline{1, n}; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Ошибка по входным параметрам:

$$E_x = \frac{\sum_{k=1}^N \left(\frac{\sqrt{\sum_{j=1}^n ((\bar{x}_{submin}^k)_j - (\bar{x}_{min})_j)^2}}{n} \right)}{N}.$$

Ошибка по значениям целевой функции:

$$E_f = \frac{\sum_{k=1}^N |f(\bar{x}_{submin}^k) - f(\bar{x}_{min})|}{N}.$$

1.21.5 Свойства задачи

Условной или безусловной оптимизации: Задача безусловной оптимизации.

Одномерной или многомерной оптимизации: Многомерной: (двумерной).

Функция унимодальная или многоэкстремальная: Функция многоэкстремальная.

Функция стохастическая или нет: Функция не стохастическая.

Особенности: Нет.

1.21.6 Реализация

Реализация функции взята из библиотеки HarrixMathLibrary в разделе «Тестовые функции для оптимизации», которую можно найти по адресу <https://github.com/Harrix/HarrixMathLibrary>.

Код 1.21. Код функции MHL_TestFunction_ReverseGriewank

```
double MHL_TestFunction_ReverseGriewank(double x, double y)
{
/*
Функция двух переменных: функция ReverseGriewank.
Тестовая функция вещественной оптимизации.
Входные параметры:
    x - первая вещественная переменная;
    y - вторая вещественная переменная.
Возвращаемое значение:
    Значение тестовой функции в точке (x,y).
*/
double VMHL_Result;

VMHL_Result = 1./((x*x+y*y)/200.-cos(x)*cos(y/sqrt(2.))+2.);

return VMHL_Result;
}
```

1.21.7 Ссылки

Так и не смог найти нормальный источник для этой функции. По внешнему виду похожа на функцию Грибанка, которую возвели в -1 степень. Откуда-то у меня находится со студенческих времен.

1.22 Функция «Лисьи норы» Шекеля

1.22.1 Описание функции

Идентификатор:

MHL_TestFunction_ShekelsFoxholes.

Наименование:

Функция «Лисьи норы» Шекеля.

Тип:

Задача вещественной оптимизации.

Формула (целевая функция):

$$f(\bar{x}) = \frac{1}{\frac{1}{K} + \sum_{j=1}^{25} \frac{1}{j + (\bar{x}_1 - A_{1,j})^6 + (\bar{x}_2 - A_{2,j})^6}}, \text{ где} \quad (1.23)$$

$\bar{x} \in X$, $\bar{x}_j \in [Left_j; Right_j]$, $Left_j = -50$, $Right_j = 50$, $j = \overline{1, n}$, $n = 2$, $K = 500$,

$$A = \begin{pmatrix} -32 & -16 & 0 & 16 & 32 & -32 & -16 & 0 & 16 & 32 & -32 & -16 & 0 & 16 & 32 & -32 & -16 & 0 & 16 & 32 \\ -32 & -32 & -32 & -32 & -32 & -16 & -16 & -16 & -16 & -16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 16 & 16 & 16 & 32 & 32 & 32 \end{pmatrix}.$$

Обозначение:

\bar{x} — вещественный вектор;

$n = 2$ — размерность вещественного вектора.

Решаемая задача оптимизации:

$$\bar{x}_{min} = \arg \min_{\bar{x} \in X} f(\bar{x}).$$

Точка минимума:

$\bar{x}_{min} = (-32, -32)^T$, то есть $(\bar{x}_{min})_j = -32$ ($j = \overline{1, n}$).

Минимум функции:

$$f(\bar{x}_{min}) = 0.99800384.$$

График:

Рисунок 1.23 на с. 78

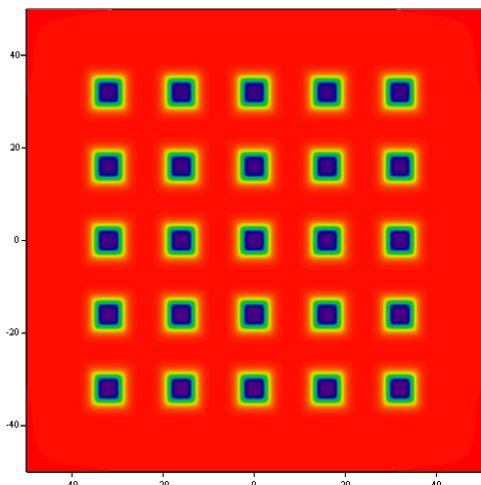
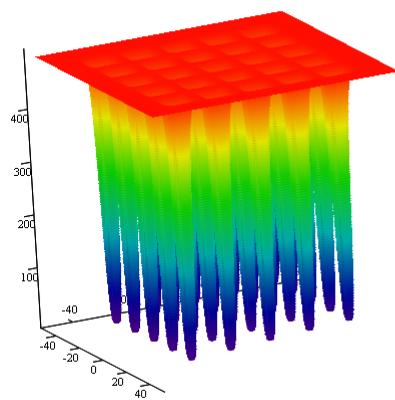


Рисунок 1.23. Функция «Лисьи норы» Шекеля

1.22.2 Параметры для алгоритмов оптимизации

Точность вычислений:

$$\varepsilon = 0.25.$$

Число интервалов, на которые предполагается разбивать каждую компоненту вектора \bar{x} в пределах своего изменения (для алгоритмов дискретной оптимизации) :

Для этого длина бинарной строки для x_j координаты равна (для алгоритмов бинарной оптимизации) :

Замечание: $NumberOfParts_j$ выбирается как минимальное число, удовлетворяющее соотношению:

$$NumberOfParts_j = 2^{(k_2)_j} - 1 \geq \frac{10 (Right_j - Left_j)}{\varepsilon}, \text{ где } (k_2)_j \in \mathbb{N}, (j = \overline{1, n}).$$

1.22.3 Основная задача и подзадачи

Изменяемый параметр:

n — размерность вещественного вектора.

Значение в основной задаче:

$$n = 2.$$

1.22.4 Нахождение ошибки оптимизации

Пусть в результате работы алгоритма оптимизации за N запусков мы нашли решения \bar{x}_{submin}^k со значениями целевой функции $f(\bar{x}_{submin}^k)$ соответственно ($k = \overline{1, N}$). Используем три вида ошибок:

Надёжность:

$$R = \frac{\sum_{k=1}^N S(\bar{x}_{submin}^k)}{N}, \text{ где}$$

$$S(\bar{x}_{submin}^k) = \begin{cases} 1, & \text{если } |(\bar{x}_{submin}^k)_j - (\bar{x}_{min})_j| < \varepsilon, j = \overline{1, n}; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Ошибка по входным параметрам:

$$E_x = \frac{\sum_{k=1}^N \left(\sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n ((\bar{x}_{submin}^k)_j - (\bar{x}_{min})_j)^2}{n}} \right)}{N}.$$

Ошибка по значениям целевой функции:

$$E_f = \frac{\sum_{k=1}^N |f(\bar{x}_{submin}^k) - f(\bar{x}_{min})|}{N}.$$

1.22.5 Свойства задачи

Условной или безусловной оптимизации: Задача безусловной оптимизации.

Одномерной или многомерной оптимизации: Многомерной: (двумерной).

Функция унимодальная или многоэкстремальная: Функция многоэкстремальная.

Функция стохастическая или нет: Функция не стохастическая.

Особенности: Глобальный минимум слабо отличается от локальных. Из локальных минимумов алгоритмам обычно сложно выбраться.

1.22.6 Реализация

Реализация функции взята из библиотеки HarrixMathLibrary в разделе «Тестовые функции для оптимизации», которую можно найти по адресу <https://github.com/Harrix/HarrixMathLibrary>.

Код 1.22. Код функции MHL_TestFunction_ShekelsFoxholes

```
double MHL_TestFunction_ShekelsFoxholes(double x, double y)
{
/*
Функция двух переменных: функция "Лисьи норы" Шекеля.
Тестовая функция вещественной оптимизации.

Входные параметры:
x - первая вещественная переменная;
y - вторая вещественная переменная.

Возвращаемое значение:
Значение тестовой функции в точке (x,y).
*/
double VMHL_Result;
double K=500.;
double f1,f2;
int j,k;
int a[2][25];

a[0][0]=-32;
a[0][1]=-16;
a[0][2]=0;
a[0][3]=16;
a[0][4]=32;
a[0][5]=-32;
a[0][6]=-16;
a[0][7]=0;
a[0][8]=16;
a[0][9]=32;
a[0][10]=-32;
a[0][11]=-16;
a[0][12]=0;
a[0][13]=16;
a[0][14]=32;
```

```

a[0][15]=-32;
a[0][16]=-16;
a[0][17]=0;
a[0][18]=16;
a[0][19]=32;
a[0][20]=-32;
a[0][21]=-16;
a[0][22]=0;
a[0][23]=16;
a[0][24]=32;

a[1][0]=-32;
a[1][1]=-32;
a[1][2]=-32;
a[1][3]=-32;
a[1][4]=-32;
a[1][5]=-16;
a[1][6]=-16;
a[1][7]=-16;
a[1][8]=-16;
a[1][9]=-16;
a[1][10]=0;
a[1][11]=0;
a[1][12]=0;
a[1][13]=0;
a[1][14]=0;
a[1][15]=16;
a[1][16]=16;
a[1][17]=16;
a[1][18]=16;
a[1][19]=16;
a[1][20]=32;
a[1][21]=32;
a[1][22]=32;
a[1][23]=32;
a[1][24]=32;

VMHL_Result=1./K;
for (j=0;j<25;j++)
{
    f1=1;
    for (k=0;k<6;k++) f1=f1*(x-a[0][j]);
    f2=1;
    for (k=0;k<6;k++) f2=f2*(y-a[1][j]);
    VMHL_Result+=1./(j+1.+f1+f2);
}

VMHL_Result=1./VMHL_Result;

return VMHL_Result;
}

```

1.22.7 Ссылки

Данная функция приводится в следующих источниках:

1. [17, стр. 34] — Эволюционные методы моделирования и оптимизации сложных систем.

1.23 Функция Сомбреро

1.23.1 Описание функции

Идентификатор:

MHL_TestFunction_Sombrero.

Наименование:

Функция Сомбреро.

Тип:

Задача вещественной оптимизации.

Формула (целевая функция):

$$f(\bar{x}) = \frac{1 - \sin\left(\sqrt{\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2}\right)^2}{1 + 0.001(\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2)}, \text{ где} \quad (1.24)$$

$\bar{x} \in X$, $\bar{x}_j \in [Left_j; Right_j]$, $Left_j = -10$, $Right_j = 10$, $j = \overline{1, n}$, $n = 2$.

Обозначение:

\bar{x} — вещественный вектор;

$n = 2$ — размерность вещественного вектора.

Решаемая задача оптимизации:

$\bar{x}_{max} = \arg \max_{\bar{x} \in X} f(\bar{x})$.

Точка максимума:

$\bar{x}_{max} = (0, 0)^T$, то есть $(\bar{x}_{max})_j = 0$ ($j = \overline{1, n}$).

Максимум функции:

$f(\bar{x}_{max}) = 1$.

График:

Рисунок 1.24 на с. 82

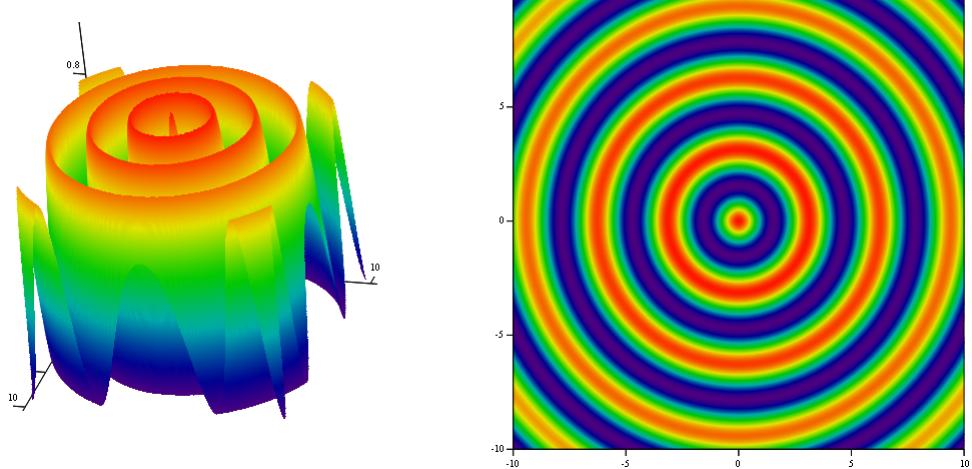


Рисунок 1.24. Функция Сомбреро

1.23.2 Параметры для алгоритмов оптимизации

Точность вычислений:

$$\varepsilon = 0.05.$$

Число интервалов, на которые предполагается разбивать каждую компоненту вектора \bar{x} в пределах своего изменения (для алгоритмов дискретной оптимизации) :

Для этого длина бинарной строки для x_j координаты равна (для алгоритмов бинарной оптимизации) :

Замечание: $NumberOfParts_j$ выбирается как минимальное число, удовлетворяющее соотношению:

$$NumberOfParts_j = 2^{(k_2)_j} - 1 \geq \frac{10 (Right_j - Left_j)}{\varepsilon}, \text{ где } (k_2)_j \in \mathbb{N}, (j = \overline{1, n}).$$

1.23.3 Основная задача и подзадачи

Изменяемый параметр:

n — размерность вещественного вектора.

Значение в основной задаче:

$$n = 2.$$

1.23.4 Нахождение ошибки оптимизации

Пусть в результате работы алгоритма оптимизации за N запусков мы нашли решения \bar{x}_{submin}^k со значениями целевой функции $f(\bar{x}_{submin}^k)$ соответственно ($k = \overline{1, N}$). Используем три вида ошибок:

Надёжность:

$$R = \frac{\sum_{k=1}^N S(\bar{x}_{submin}^k)}{N}, \text{ где}$$

$$S(\bar{x}_{submin}^k) = \begin{cases} 1, & \text{если } |(\bar{x}_{submin}^k)_j - (\bar{x}_{min})_j| < \varepsilon, j = \overline{1, n}; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Ошибка по входным параметрам:

$$E_x = \frac{\sum_{k=1}^N \left(\sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n ((\bar{x}_{submin}^k)_j - (\bar{x}_{min})_j)^2}{n}} \right)}{N}.$$

Ошибка по значениям целевой функции:

$$E_f = \frac{\sum_{k=1}^N |f(\bar{x}_{submin}^k) - f(\bar{x}_{min})|}{N}.$$

1.23.5 Свойства задачи

Условной или безусловной оптимизации: Задача безусловной оптимизации.

Одномерной или многомерной оптимизации: Многомерной: (двумерной).

Функция унимодальная или многоэкстремальная: Функция многоэкстремальная.

Функция стохастическая или нет: Функция не стохастическая.

Особенности: Нет.

1.23.6 Реализация

Реализация функции взята из библиотеки HarrixMathLibrary в разделе «Тестовые функции для оптимизации», которую можно найти по адресу <https://github.com/Harrix/HarrixMathLibrary>.

Код 1.23. Код функции MHL_TestFunction_Sombrero

```
double MHL_TestFunction_Sombrero(double x, double y)
{
/*
Функция одной переменных: функция Сомбреро.
Тестовая функция вещественной оптимизации.
Входные параметры:
    x - первая вещественная переменная;
    y - вторая вещественная переменная.
Возвращаемое значение:
    Значение тестовой функции в точке (x,y).
*/
double VMHL_Result;
VMHL_Result = 1.-sin(sqrt(x*x+y*y))*sin(sqrt(x*x+y*y));
VMHL_Result /= (1.+0.001*(x*x+y*y));
return VMHL_Result;
}
```

1.23.7 Ссылки

Данная функция приводится в следующих источниках:

1. [17, стр. 30] — Эволюционные методы моделирования и оптимизации сложных систем.

1.24 Функция Multiextremal

1.24.1 Описание функции

Идентификатор:

MHL_TestFunction_Multiextremal.

Наименование:

Multiextremal.

Тип:

Задача вещественной оптимизации.

Формула (целевая функция):

$$f(\bar{x}) = 0.05(x - 1)^2 + \left(3 - 2.9e^{-2.77257x^2}\right) \left(1 - \cos\left(x\left(4 - 50e^{-2.77257x^2}\right)\right)\right), \text{ где} \quad (1.25)$$

$\bar{x} \in X$, $\bar{x}_j \in [Left_j; Right_j]$, $Left_j = -2$, $Right_j = 2$, $j = \overline{1, n}$, $n = 1$.

Обозначение:

\bar{x} — вещественный вектор;

$n = 1$ — размерность вещественного вектора.

Решаемая задача оптимизации:

$\bar{x}_{min} = \arg \min_{\bar{x} \in X} f(\bar{x})$.

Точка минимума:

$\bar{x}_{min} \approx (0.954452)^T$, то есть $(\bar{x}_{min})_j \approx 0.954452 (j = \overline{1, n})$.

Минимум функции:

$f(\bar{x}_{min}) \approx 0.000103742$.

График:

Рисунок 1.25 на 85 стр.

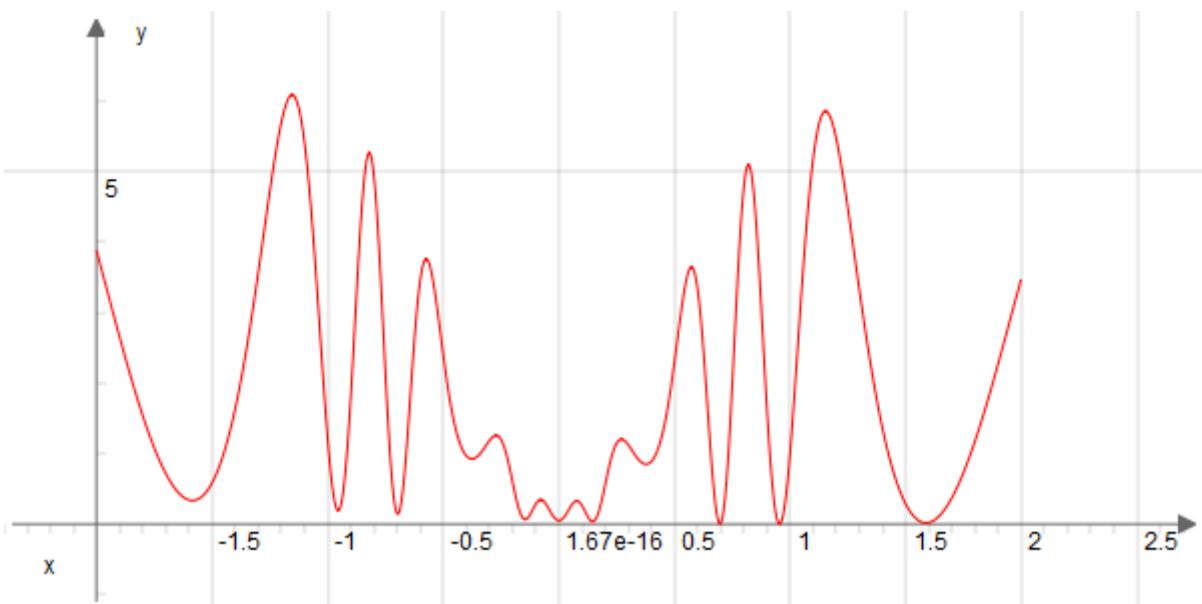


Рисунок 1.25. Функция Multiextremal

1.24.2 Параметры для алгоритмов оптимизации

Точность вычислений:

$$\varepsilon = 0.01.$$

Число интервалов, на которые предполагается разбивать каждую компоненту вектора \bar{x} в пределах своего изменения (для алгоритмов дискретной оптимизации) :

Для этого длина бинарной строки для x_j координаты равна (для алгоритмов бинарной оптимизации) :

Замечание: $NumberOfParts_j$ выбирается как минимальное число, удовлетворяющее соотношению:

$$NumberOfParts_j = 2^{(k_2)_j} - 1 \geq \frac{10 (Right_j - Left_j)}{\varepsilon}, \text{ где } (k_2)_j \in \mathbb{N}, (j = \overline{1, n}).$$

1.24.3 Основная задача и подзадачи

Изменяемый параметр:

n — размерность вещественного вектора.

Значение в основной задаче:

$$n = 1.$$

1.24.4 Нахождение ошибки оптимизации

Пусть в результате работы алгоритма оптимизации за N запусков мы нашли решения \bar{x}_{submin}^k со значениями целевой функции $f(\bar{x}_{submin}^k)$ соответственно ($k = \overline{1, N}$). Используем три вида ошибок:

Надёжность:

$$R = \frac{\sum_{k=1}^N S(\bar{x}_{submin}^k)}{N}, \text{ где}$$

$$S(\bar{x}_{submin}^k) = \begin{cases} 1, & \text{если } |(\bar{x}_{submin}^k)_j - (\bar{x}_{min})_j| < \varepsilon, j = \overline{1, n}; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Ошибка по входным параметрам:

$$E_x = \frac{\sum_{k=1}^N \left(\frac{\sqrt{\sum_{j=1}^n ((\bar{x}_{submin}^k)_j - (\bar{x}_{min})_j)^2}}{n} \right)}{N}.$$

Ошибка по значениям целевой функции:

$$E_f = \frac{\sum_{k=1}^N |f(\bar{x}_{submin}^k) - f(\bar{x}_{min})|}{N}.$$

1.24.5 Свойства задачи

Условной или безусловной оптимизации: Задача безусловной оптимизации.

Одномерной или многомерной оптимизации: Одномерной.

Функция унимодальная или многоэкстремальная: Функция многоэкстремальная.

Функция стохастическая или нет: Функция не стохастическая.

Особенности: Нет.

1.24.6 Реализация

Реализация функции взята из библиотеки HarrixMathLibrary в разделе «Тестовые функции для оптимизации», которую можно найти по адресу <https://github.com/Harrix/HarrixMathLibrary>.

Код 1.24. Код функции MHL_TestFunction_Multiextremal

```
double MHL_TestFunction_Multiextremal(double x)
{
/*
Функция одной переменных: функция Multiextremal.
Тестовая функция вещественной оптимизации.

Входные параметры:
    x - вещественная переменная.

Возвращаемое значение:
    Значение тестовой функции в точке (x).
*/
double VMHL_Result;
VMHL_Result = (0.05*(x-1.)*(x-1.) + (3.-2.9*exp(-2.77257*x*x))*(1-cos(x*(4.-50*exp
    (-2.77257*x*x))))));
return VMHL_Result;
}
```

1.24.7 Ссылки

Данная функция приводится в следующих источниках:

1. [17, стр. 26] — Эволюционные методы моделирования и оптимизации сложных систем.

По сравнению с данной работой в данном документе представлено уточненное значение функции в точке минимума.

1.25 Функция Multiextremal2

1.25.1 Описание функции

Идентификатор:

MHL_TestFunction_Multiextremal2.

Наименование:

Multiextremal2.

Тип:

Задача вещественной оптимизации.

Формула (целевая функция):

$$f(\bar{x}) = 1 - 0.5 \cos(1.5(10x - 0.3)) \cos(31.4x) + 0.5 \cos(\sqrt{5} \cdot 10x) \cos(35x), \text{ где } \quad (1.26)$$

$\bar{x} \in X, \bar{x}_j \in [Left_j; Right_j], Left_j = -2, Right_j = 2, j = \overline{1, n}, n = 1.$

Обозначение:

\bar{x} — вещественный вектор;

$n = 1$ — размерность вещественного вектора.

Решаемая задача оптимизации:

$\bar{x}_{max} = \arg \max_{\bar{x} \in X} f(\bar{x}).$

Точка максимума:

$\bar{x}_{max} \approx (-0.993263)^T$, то есть $(\bar{x}_{max})_j \approx -0.993263 (j = \overline{1, n}).$

Максимум функции:

$f(\bar{x}_{max}) \approx 1.93374.$

График:

Рисунок 1.26 на 88 стр.

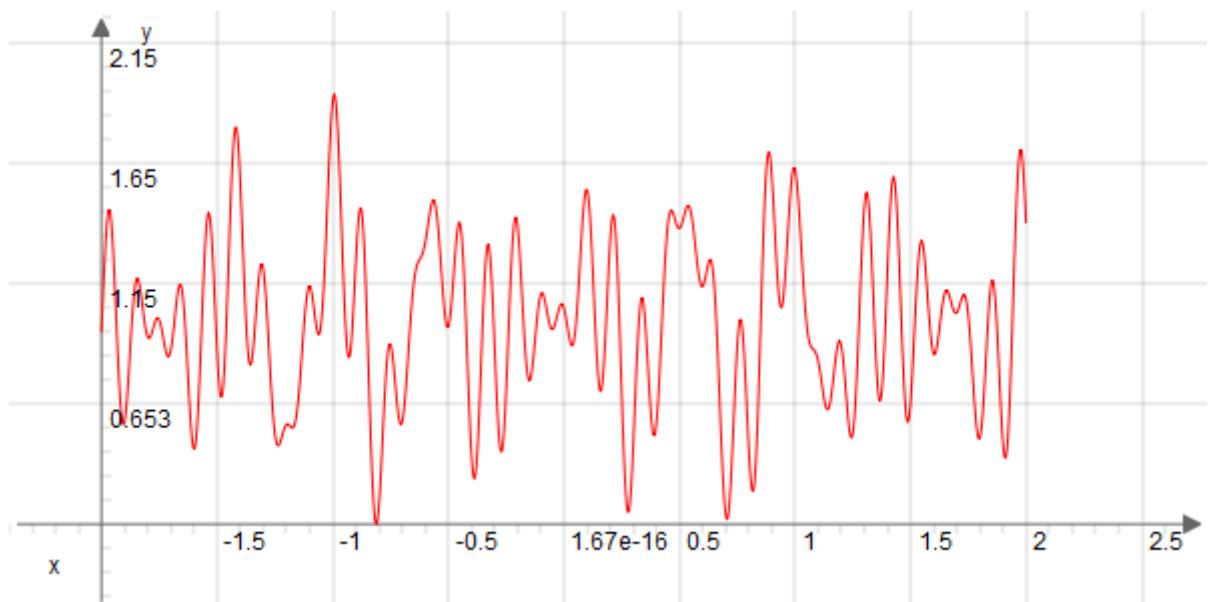


Рисунок 1.26. Функция Multiextremal2

1.25.2 Параметры для алгоритмов оптимизации

Точность вычислений:

$$\varepsilon = 0.01.$$

Число интервалов, на которые предполагается разбивать каждую компоненту вектора \bar{x} в пределах своего изменения (для алгоритмов дискретной оптимизации) :

Для этого длина бинарной строки для x_j координаты равна (для алгоритмов бинарной оптимизации) :

Замечание: $NumberOfParts_j$ выбирается как минимальное число, удовлетворяющее соотношению:

$$NumberOfParts_j = 2^{(k_2)_j} - 1 \geq \frac{10 (Right_j - Left_j)}{\varepsilon}, \text{ где } (k_2)_j \in \mathbb{N}, (j = \overline{1, n}).$$

1.25.3 Основная задача и подзадачи

Изменяемый параметр:

n — размерность вещественного вектора.

Значение в основной задаче:

$$n = 1.$$

1.25.4 Нахождение ошибки оптимизации

Пусть в результате работы алгоритма оптимизации за N запусков мы нашли решения \bar{x}_{submin}^k со значениями целевой функции $f(\bar{x}_{submin}^k)$ соответственно ($k = \overline{1, N}$). Используем три вида ошибок:

Надёжность:

$$R = \frac{\sum_{k=1}^N S(\bar{x}_{submin}^k)}{N}, \text{ где}$$

$$S(\bar{x}_{submin}^k) = \begin{cases} 1, & \text{если } |(\bar{x}_{submin}^k)_j - (\bar{x}_{min})_j| < \varepsilon, j = \overline{1, n}; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Ошибка по входным параметрам:

$$E_x = \frac{\sum_{k=1}^N \left(\frac{\sqrt{\sum_{j=1}^n ((\bar{x}_{submin}^k)_j - (\bar{x}_{min})_j)^2}}{n} \right)}{N}.$$

Ошибка по значениям целевой функции:

$$E_f = \frac{\sum_{k=1}^N |f(\bar{x}_{submin}^k) - f(\bar{x}_{min})|}{N}.$$

1.25.5 Свойства задачи

Условной или безусловной оптимизации: Задача безусловной оптимизации.

Одномерной или многомерной оптимизации: Одномерной.

Функция унимодальная или многоэкстремальная: Функция многоэкстремальная.

Функция стохастическая или нет: Функция не стохастическая.

Особенности: Нет.

1.25.6 Реализация

Реализация функции взята из библиотеки HarrixMathLibrary в разделе «Тестовые функции для оптимизации», которую можно найти по адресу <https://github.com/Harrix/HarrixMathLibrary>.

Код 1.25. Код функции MHL_TestFunction_Multiextremal2

```
double MHL_TestFunction_Multiextremal2(double x)
{
/*
Функция одной переменных: функция Multiextremal2.
Тестовая функция вещественной оптимизации.
Входные параметры:
    x - вещественная переменная.
Возвращаемое значение:
    Значение тестовой функции в точке (x).
*/
double VMHL_Result;
VMHL_Result = 1.-0.5*cos(1.5*(10.*x-0.3))*cos(31.4*x)+0.5*cos(sqrt(5.)*10.*x)*cos(35.*x);
return VMHL_Result;
}
```

1.25.7 Ссылки

Данная функция приводится в следующих источниках:

1. [17, стр. 27] — Эволюционные методы моделирования и оптимизации сложных систем.

По сравнению с данной работой в данном документе представлено уточненное значение функции в точке минимума.

1.26 Функция волна

1.26.1 Описание функции

Идентификатор:

MHL_TestFunction_Wave.

Наименование:

Волна.

Тип:

Задача вещественной оптимизации.

Формула (целевая функция):

$$f(\bar{x}) = e^{-\bar{x}_1^2} + 0.01 \cos(200 \cdot \bar{x}_1), \text{ где } \quad (1.27)$$

$\bar{x} \in X, \bar{x}_j \in [Left_j; Right_j], Left_j = -2, Right_j = 2, j = \overline{1, n}, n = 1.$

Обозначение:

\bar{x} — вещественный вектор;

$n = 1$ — размерность вещественного вектора.

Решаемая задача оптимизации:

$\bar{x}_{max} = \arg \max_{\bar{x} \in X} f(\bar{x}).$

Точка максимума:

$\bar{x}_{max} = (0)^T$, то есть $(\bar{x}_{max})_j = 0 (j = \overline{1, n}).$

Максимум функции:

$f(\bar{x}_{max}) = 1.01.$

График:

Рисунок 1.27 на 91 стр.

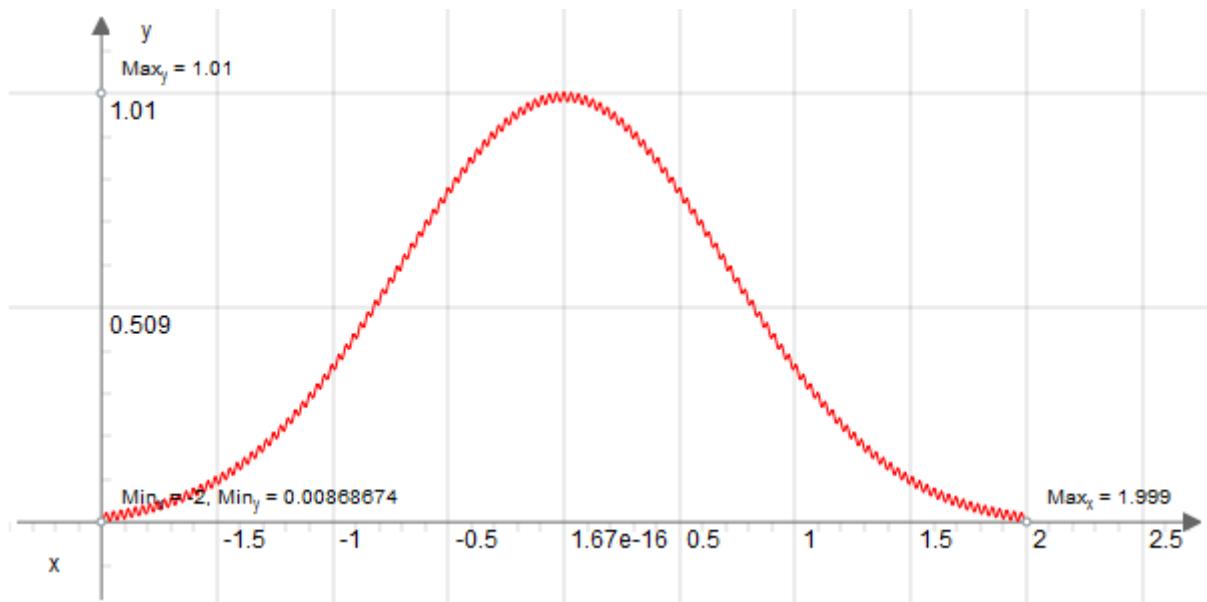


Рисунок 1.27. Волна

1.26.2 Параметры для алгоритмов оптимизации

Точность вычислений:

$$\varepsilon = 0.01.$$

Число интервалов, на которые предполагается разбивать каждую компоненту вектора \bar{x} в пределах своего изменения (для алгоритмов дискретной оптимизации) :

Для этого длина бинарной строки для x_j координаты равна (для алгоритмов бинарной оптимизации) :

Замечание: $NumberOfParts_j$ выбирается как минимальное число, удовлетворяющее соотношению:

$$NumberOfParts_j = 2^{(k_2)_j} - 1 \geq \frac{10 (Right_j - Left_j)}{\varepsilon}, \text{ где } (k_2)_j \in \mathbb{N}, (j = \overline{1, n}).$$

1.26.3 Основная задача и подзадачи

Изменяемый параметр:

n — размерность вещественного вектора.

Значение в основной задаче:

$$n = 1.$$

1.26.4 Нахождение ошибки оптимизации

Пусть в результате работы алгоритма оптимизации за N запусков мы нашли решения \bar{x}_{submin}^k со значениями целевой функции $f(\bar{x}_{submin}^k)$ соответственно ($k = \overline{1, N}$). Используем три вида ошибок:

Надёжность:

$$R = \frac{\sum_{k=1}^N S(\bar{x}_{submin}^k)}{N}, \text{ где}$$

$$S(\bar{x}_{submin}^k) = \begin{cases} 1, & \text{если } |(\bar{x}_{submin}^k)_j - (\bar{x}_{min})_j| < \varepsilon, j = \overline{1, n}; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Ошибка по входным параметрам:

$$E_x = \frac{\sum_{k=1}^N \left(\frac{\sqrt{\sum_{j=1}^n ((\bar{x}_{submin}^k)_j - (\bar{x}_{min})_j)^2}}{n} \right)}{N}.$$

Ошибка по значениям целевой функции:

$$E_f = \frac{\sum_{k=1}^N |f(\bar{x}_{submin}^k) - f(\bar{x}_{min})|}{N}.$$

1.26.5 Свойства задачи

Условной или безусловной оптимизации: Задача безусловной оптимизации.

Одномерной или многомерной оптимизации: Одномерной.

Функция унимодальная или многоэкстремальная: Функция многоэкстремальная.

Функция стохастическая или нет: Функция не стохастическая.

Особенности:

Хотя внешне можно отнести эту функцию к стохастической, так как по поведению напоминает вид плотности нормального распределения с помехой.

1.26.6 Реализация

Реализация функции взята из библиотеки HarrixMathLibrary в разделе «Тестовые функции для оптимизации», которую можно найти по адресу <https://github.com/Harrix/HarrixMathLibrary>.

Код 1.26. Код функции MHL_TestFunction_Wave

```
double MHL_TestFunction_Wave(double x)
{
/*
Функция одной переменных: волна.
Тестовая функция вещественной оптимизации.
Входные параметры:
    x - вещественная переменная.
Возвращаемое значение:
    Значение тестовой функции в точке (x).
*/
double VMHL_Result;
VMHL_Result = (exp(-x*x)+0.01*cos(200*x));
return VMHL_Result;
}
```

1.26.7 Ссылки

Так и не смог найти нормальный источник для этой функции. Откуда-то у меня находится со студенческих времен.

Глава 2

Задачи бинарной оптимизации

2.1 Сумма всех элементов бинарного вектора

2.1.1 Описание функции

Идентификатор:

MHL_TestFunction_SumVector.

Наименование:

Сумма всех элементов бинарного вектора.

Тип:

Задача бинарной оптимизации.

Формула (целевая функция):

$$f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i, \text{ где } \quad (2.1)$$

$\bar{x} \in X, \bar{x}_j \in \{0; 1\}, j = \overline{1, n}.$

Обозначение:

\bar{x} — бинарный вектор;

n — размерность бинарного вектора.

Объем поискового пространства:

$\mu(X) = 2^n.$

Решаемая задача оптимизации:

$\bar{x}_{max} = \arg \max_{\bar{x} \in X} f(\bar{x}).$

Точка максимума:

$\bar{x}_{max} = (1, 1, \dots, 1)^T$, то есть $(\bar{x}_{max})_j = 1$ ($j = \overline{1, n}$).

Максимум функции:

$f(\bar{x}_{max}) = n.$

Точка минимума:

$\bar{x}_{min} = (0, 0, \dots, 0)^T$, то есть $(\bar{x}_{min})_j = 0$ ($j = \overline{1, n}$).

Минимум функции:

$f(\bar{x}_{min}) = 0.$

2.1.2 Основная задача и подзадачи

Изменяемый параметр:	n — размерность бинарного вектора.
Значение в основной задаче:	$n = 20$.
Подзадача №2:	$n = 30$.
Подзадача №3:	$n = 40$.
Подзадача №4:	$n = 50$.
Подзадача №5:	$n = 60$.
Подзадача №6:	$n = 70$.
Подзадача №7:	$n = 80$.
Подзадача №8:	$n = 90$.
Подзадача №9:	$n = 100$.
Подзадача №10:	$n = 200$.

2.1.3 Нахождение ошибки оптимизации

Пусть в результате работы алгоритма оптимизации за N запусков мы нашли решения \bar{x}_{submax}^k со значениями целевой функции $f(\bar{x}_{submax}^k)$ соответственно ($k = \overline{1, N}$). Используем три вида ошибок:

Надёжность:

$$R = \frac{\sum_{k=1}^N S(\bar{x}_{submax}^k)}{N}, \text{ где}$$

$$S(\bar{x}_{submax}^k) = \begin{cases} 1, & \text{если } \bar{x}_{submax}^k = \bar{x}_{max}; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Ошибка по входным параметрам:

$$E_x = \frac{\sum_{k=1}^N \left(\frac{\sum_{j=1}^n |(\bar{x}_{submax}^k)_j - (\bar{x}_{max})_j|}{n} \right)}{N}.$$

Ошибка по значениям целевой функции:

$$E_f = \frac{\sum_{k=1}^N \left(\frac{|f(\bar{x}_{submax}^k) - f(\bar{x}_{max})|}{n} \right)}{N}.$$

2.1.4 Свойства задачи

Условной или безусловной оптимизации: Задача безусловной оптимизации.

Одномерной или многомерной оптимизации: Многомерной: n .

Функция унимодальная или многоэкстремальная: Функция унимодальная.

Функция стохастическая или нет: Функция не стохастическая.

Особенности: Нет.

2.1.5 Реализация

Реализация функции взята из библиотеки HarrixMathLibrary в разделе «Тестовые функции для оптимизации», которую можно найти по адресу <https://github.com/Harrix/HarrixMathLibrary>.

Код 2.1. Код функции MHL_TestFunction_SumVector

```
double MHL_TestFunction_SumVector(int *x, int VMHL_N)
{
/*
Сумма всех элементов бинарного вектора.
Тестовая функция бинарной оптимизации.
Входные параметры:
    x - указатель на исходный массив;
    VMHL_N - размер массива x.
Возвращаемое значение:
    Значение тестовой функции в точке x.
*/
double VMHL_Result=0;
for (int i=0;i<VMHL_N;i++) VMHL_Result+=x[i];
return VMHL_Result;
}
```

Литература

1. Dieterich Johannes M., Hartke Bernd. Empirical review of standard benchmark functions using evolutionary global optimization // CoRR. 2012. T. abs/1207.4318. <http://arxiv.org/pdf/1207.4318v1.pdf>.
2. Ackley's Function. <http://www.cs.unm.edu/~neal.holts/dga/benchmarkFunction/ackley.html>.
3. Pohlheim Hartmut. GEATbx Examples. Examples of Objective Functions. 2006. http://www.geatbx.com/download/GEATbx_ObjFunExpl_v38.pdf.
4. Jamil M., Yang X.-S. A Literature Survey of Benchmark Functions For Global Optimization Problems // ArXiv e-prints. 2013. aug. <http://arxiv.org/pdf/1308.4008.pdf>.
5. Paraboloid. <http://en.wikipedia.org/wiki/Paraboloid>.
6. Rastrigin function. http://en.wikipedia.org/wiki/Rastrigin_function.
7. Non-linear Continuous Multi-Extremal Optimization. <http://www.maths.uq.edu.au/CEToolBox/node3.html>.
8. Parametric Optimization. <http://www.pg.gda.pl/~mkwies/dyd/gedocu/fcnfun6.html>.
9. Rosenbrock function. http://en.wikipedia.org/wiki/Rosenbrock_function.
10. Rosenbrock Function. http://www-optima.amp.i.kyoto-u.ac.jp/member/student/hedar/Hedar_files/TestGO_files/Page2537.htm.
11. Virtual Library of Simulation Experiments: Test Functions and Datasets. Rotated hyper-ellipsoid function. 2013. <http://www.sfu.ca/~ssurjano/rothyp.html>.
12. Benchmark Problems. <http://www.cs.cmu.edu/afs/cs/project/jair/pub/volume24/ortizboyer05a-html/node6.html>.
13. Optimization Test Problems - Schwefel Function. <http://www.sfu.ca/~ssurjano/schwef.html>.
14. Test functions for Unconstrained Global Optimization - Schwefel Function. http://www-optima.amp.i.kyoto-u.ac.jp/member/student/hedar/Hedar_files/TestGO_files/Page2530.htm.
15. Parametric Optimization. Schwefel's function 7. <http://www.pg.gda.pl/~mkwies/dyd/gedocu/fcnfun7.html>.

16. Huang D.S., Li K., Irwin G.W. International Conference on Intelligent Computing: Intelligent computing. International Conference on Intelligent Computing: ICIC 2006, Kunming, China, August 16-19, 2006 : Proceedings. Springer, 2006. <http://books.google.ru/books?id=7sH4RsXYu7cC>.
17. Эволюционные методы моделирования и оптимизации сложных систем / Е. С. Семенкин, М. Н. Жукова, В. Г. Жуков [и др.]. Красноярск: Федеральное агентство по образованию, Сибирский федеральный университет, 2007. 310 с. http://files.lib.sfu-kras.ru/ebibl/umkd/22/u_lectures.pdf.
18. Himmelblau's function. http://en.wikipedia.org/wiki/Himmelblau%27s_function.
19. Minimization of the Himmelblau Function. http://pythonhosted.org/algopy/examples/minimization/himmelblau_minimization.html.
20. Rana. <http://www.cs.unm.edu/~neal.holts/dga/benchmarkFunction/rana.html>.