武汉大学 2022-2023 学年第二学期

《高等数学 B2》期末考试试题(A 卷)

考试时间：2023 年 6 月 7 日 14:30-16:30

注意事项：

1. 本试卷共 12 道试题，满分 100 分，考试时间 120 分钟.
2. 请将答案全部写在答题卡上的对应题号区域，写在其他位置无效.

一、（9 分）已知$|\vec{a}|=3, |\vec{b}|=5, (\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\pi}{3}, \vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$，计算$|\vec{c}|$，并求$m$使得$\vec{b}+m\vec{a}$与$\vec{a}$垂直.

二、（9 分）函数$z=z(x,y)$由方程$\mathrm{e}^z+xz-\cos y-y=0$确定，计算：1） $\mathrm{d}z$； 2） $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(0,0)}$.

三、（9 分）求曲面 $x^2+2y^2+3z^2=3$上的点P_0，使得该点处的切平面π与向量$\vec{s}=(1,4,3)$垂直.

1）求切平面π的方程； 2）求坐标原点$O(0,0,0)$到平面π的距离d.

四、（8 分）求二元函数$f(x,y)=x^2(2+\mathrm{e}^y)+y\ln y$的驻点，并判断驻点是极大值点还是极小值点.

五、（8 分）计算三重积分$\iiint_\Omega (x+z)\mathrm{d}v$，其中$\Omega$为$z=\sqrt{x^2+y^2}$与$z=2$所围成的区域.

六、（8 分）计算对弧长的曲线积分$I=\int_\Gamma (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s$，其中 Γ 为曲线

$x=\mathrm{e}^t\cos t, y=\mathrm{e}^t\sin t, z=\mathrm{e}^t$， $t\in[0,2]$.

七、（10 分）将$f(x)=\ln(x^2+3x+2)$展开为$x-1$的幂级数，并指出收敛半径和收敛域.

八、（9 分）计算$I=\iint_\Sigma \dfrac{(x+1)^2\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+2z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}$，其中$\Sigma$为上半球面$z=\sqrt{4-x^2-y^2}$的上侧.

九、（8 分）设函数$f(u)$的导函数连续，L为沿弧线$y=\sqrt{2x-x^2}$从点$A(0,0)$到点$B(2,0)$的有向曲线段，计算$I=\int_L (y+yf(xy))\,\mathrm{d}x+(x^2+xf(xy))\mathrm{d}y$.

十、（9 分）设函数$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy\tan(x+y)}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0 & x^2+y^2=0.\end{cases}$，考虑如下问题：

1）求$f(x,y)$在点$(0,0)$处的偏导数$f_x(0,0), f_y(0,0)$；

2）求$f(x,y)$在点$(0,0)$处沿方向$\vec{l}=(1,1)$的方向导数；

3）证明 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不可微.

十一、（8 分）求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n+1}x^n$ 的收敛半径、收敛域及其和函数.

十二（5 分）、设 $0<a_n<\frac{1}{n}$，在级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 中，哪个级数一定收敛？对于一定收敛的级数给出证明，对于可能发散的级数给出发散的例子.

武汉大学数学与统计学院

2022-2023 学年第二学期

《高等数学 B2》期末考试 A 卷 **参考解答**

考试时间：2023 年 6 月 7 日 14:30-16:30

一、（9 分）已知$|\vec{a}|=3, |\vec{b}|=5, (\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\pi}{3}, \vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$，计算$|\vec{c}|$，并求$m$使得$\vec{b}+m\vec{a}$与$\vec{a}$垂直.

解：$|\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{15\sqrt{3}}{2}$；

$\vec{b}+m\vec{a}$与$\vec{a}$垂直，因而$\left(\vec{b}+m\vec{a}\right)\cdot\vec{a}=0$，

即有$0=\left(\vec{b}+m\vec{a}\right)\cdot\vec{a}=\vec{a}\cdot\vec{b}+m\vec{a}\cdot\vec{a}=\dfrac{15}{2}+9m$. 解得$m=-\dfrac{5}{6}$.

二、（9 分）函数$z=z(x,y)$由方程$\mathrm{e}^z+xz-\cos y-y=0$，计算：1）$\mathrm{d}z$；　2）$\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(0,0)}$.

解：1）方程两边求微分得：$\mathrm{e}^z\,\mathrm{d}z+x\,\mathrm{d}z+z\,\mathrm{d}x+(\sin y-1)\,\mathrm{d}y=0$；解得：

$$\mathrm{e}^z\,\mathrm{d}z=\frac{-1}{x+\mathrm{e}^z}(z\,\mathrm{d}x+(\sin y-1)\,\mathrm{d}y)=\frac{-z}{x+\mathrm{e}^z}\mathrm{d}x+\frac{1-\sin y}{x+\mathrm{e}^z}\mathrm{d}y$$

2）由 1) 可知$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{-z}{x+\mathrm{e}^z}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1-\sin y}{x+\mathrm{e}^z}$. 另一方面，由方程可知$z(0,0)=0$，显然

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0)}=0,\ \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,0)}=1.$$

因此，$\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(0,0)}=\left.\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{-z}{x+\mathrm{e}^z}\right)\right|_{(0,0)}=\left.\dfrac{-(x+\mathrm{e}^z)\dfrac{\partial z}{\partial y}+z\,\mathrm{e}^z\dfrac{\partial z}{\partial y}}{(x+\mathrm{e}^z)^2}\right|_{(0,0)}=-1$.

三、（9 分）求曲面 $x^2+2y^2+3z^2=3$上的点P_0，使得该点处的切平面π与向量$\vec{s}=(1,4,3)$垂直.

1）求切平面π的方程；　2）求坐标原点$O(0,0,0)$到平面π的距离d.

解：1）点$P_0(x_0,y_0,z_0)$处曲面的切平面的法向量为$\vec{n}=(x_0,2y_0,3z_0)$. 由平面π与向量$\vec{s}$垂直可知$\vec{n}$与$\vec{s}$平行，即有$\dfrac{x_0}{1}=\dfrac{2y_0}{4}=\dfrac{3z_0}{3}$. 因而$y_0=2x_0, z_0=x_0$. 代入曲面方程得：

$x_0^2+2y_0^2+3z_0^2=x_0^2+8x_0^2+3x_0^2=3$，解得 $x_0=\pm\dfrac{1}{2}$．因而 P_0 可取 $(\dfrac{1}{2},1,\dfrac{1}{2})$ 及 $(-\dfrac{1}{2},-1,-\dfrac{1}{2})$．

切平面方程 $\pi:\dfrac{1}{2}x+2y+\dfrac{3}{2}z=3$，或者 $\pi:\dfrac{1}{2}x+2y+\dfrac{3}{2}z=-3$．

2）由点到平面的距离公式可知：

$$d=\frac{|\pm 3|}{\sqrt{(\frac{1}{2})^2+2^2+(\frac{3}{2})^2}}=\frac{3\sqrt{26}}{13}.$$

四、（8 分）求二元函数 $f(x,y)=x^2(2+\mathrm{e}^y)+y\ln y$ 的驻点，并判断驻点是极大值点还是极小值点.

解：解方程组 $\begin{cases} f_x=2x(2+\mathrm{e}^y)=0, \\ f_y=x^2\mathrm{e}^y+1+\ln y=0, \end{cases}$ 得驻点 $(0,\mathrm{e}^{-1})$．

在点 $(0,\mathrm{e}^{-1})$ 处，$A=f_{xx}=4+2\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-1}}, B=f_{xy}=0$，$C=f_{yy}=\mathrm{e}$．

显然 $AC-B^2>0$，且 $A>0$，因此驻点 $(0,\mathrm{e}^{-1})$ 是函数 $f(x,y)$ 的极小值点.

五、（8 分）计算三重积分 $\iiint_\Omega (x+z)\mathrm{d}v$，其中 Ω 为 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=2$ 所围成的区域.

解：由对称性可知 $\iiint_\Omega x\mathrm{d}v=0$．

因此 $$\iiint_\Omega (x+z)\mathrm{d}v=\iiint_\Omega z\mathrm{d}v=\int_0^2 z\,\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\le z^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^2 z\pi z^2\,\mathrm{d}z=\frac{\pi}{4}z^4\Big|_0^2=4\pi.$$

六、（8 分）计算对弧长的曲线积分 $I=\int_\Gamma (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s$，其中 Γ 为曲线 $x=\mathrm{e}^t\cos t, y=\mathrm{e}^t\sin t, z=\mathrm{e}^t$，$t\in[0,2]$．

解：

$$=\sqrt{\left(\mathrm{e}^t\cos t-\mathrm{e}^t\sin t\right)^2+\left(\mathrm{e}^t\sin t+\mathrm{e}^t\cos t\right)^2+\left(\mathrm{e}^t\right)^2}\mathrm{d}t=\sqrt{3}\mathrm{e}^t\mathrm{d}t$$

$$I=\int_\Gamma (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}s=\int_0^2(\mathrm{e}^{2t}\cos^2 t+\mathrm{e}^{2t}\sin^2 t+\mathrm{e}^{2t})\cdot\sqrt{3}\mathrm{e}^t\mathrm{d}t$$

$$=2\sqrt{3}\int_0^2\mathrm{e}^{3t}\mathrm{d}t=\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\mathrm{e}^6-1\right).$$

七、（10 分）将 $f(x)=\ln(x^2+3x+2)$ 展开为 $x-1$ 的幂级数，并指出收敛半径和收敛域.

解：$f(x)=\ln(x^2+3x+2)=\ln(x+1)+\ln(x+2)=\ln(2+x-1)+\ln(3+x-1)$，

由于 $\ln(1+t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}t^n$，$t\in(-1,1]$，因此

$$\ln(2+x-1)=\ln 2+\ln(1+\frac{x-1}{2})=\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n=\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n2^n}(x-1)^n,$$

$$\ln(3+x-1)=\ln 3+\ln(1+\frac{x-1}{3})=\ln 3+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{x-1}{3}\right)^n=\ln 3+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n3^n}(x-1)^n$$

所以，$f(x)=\ln(x^2+3x+2)=\ln 6+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)(x-1)^n$

收敛半径为 2，收敛域 $(-1,3]$.

八、（9 分）计算 $I=\iint_{\Sigma}\frac{(x+1)^2\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+2z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}$，其中 Σ 为上半球面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 的上侧.

解：在 Σ 上有 $x^2+y^2+z^2=4$，因此

$$I=\iint_{\Sigma}\frac{(x+1)^2\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+2z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}=\frac{1}{4}\iint_{\Sigma}(x+1)^2\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+2z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

令 $\Sigma_0:z=0,x^2+y^2\leqslant 4$，取下侧，则

$$I=\frac{1}{4}\left(\oiint_{\Sigma+\Sigma_0}-\iint_{\Sigma_0}\right)\left((x+1)^2\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+2z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)$$

由高斯公式得

$$\frac{1}{4}\iint_{\Sigma+\Sigma_0}(x+1)^2\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+2z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{1}{4}\iiint_{\Omega}(2x+4)\mathrm{d}v=\frac{16\pi}{3}$$

又 $\iint_{\Sigma_0}(x+1)^2\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+2z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0$，因此 $I=\iint_{\Sigma}\frac{(x+1)^2\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+2z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}=\frac{16\pi}{3}$.

九、（8 分）设函数 $f(u)$ 的导函数连续，L 为沿弧线 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 从点 $A(0,0)$ 到点 $B(2,0)$ 的有向曲线段，

计算 $I=\int_L(y+yf(xy))\,\mathrm{d}x+(x^2+xf(xy))\mathrm{d}y$.

解：$I=\int_L(y+yf(xy))\,\mathrm{d}x+(x^2+xf(xy))\mathrm{d}y$

$$=\left(\oint_{L+\overline{BA}}+\int_{\overline{AB}}\right)(y+yf(xy))\,\mathrm{d}x+(x^2+xf(xy))\mathrm{d}y.$$

设区域 $D=\{(x,y)|\ 0\le y\le\sqrt{2x-x^2},0\le x\le 2\}$，由格林公式可得

$$\oint_{L+\overline{AB}}(y+yf(xy))\,\mathrm{d}x+(x^2+xf(xy))\mathrm{d}y=-\iint_D(2x-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{\pi}{2}$$

并且，$\int_{\overline{AB}}(y+yf(xy))\,\mathrm{d}x+(x^2+xf(xy))\mathrm{d}y=\int_0^2 0\mathrm{d}x=0$.

故 $I=\int_L(y+yf(xy))\,\mathrm{d}x+(x^2+xf(xy))\mathrm{d}y=-\dfrac{\pi}{2}$.

十、（9 分）设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy\tan(x+y)}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0 & x^2+y^2=0.\end{cases}$，考虑如下问题：

1）求 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的偏导数 $f_x(0,0),\ f_y(0,0)$；

2）求 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处沿方向 $\vec{l}=(1,1)$ 的方向导数；

3）证明 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不可微.

解：1）显然 $f(x,0)=f(0,y)=0$，因此 $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$.

2）$\left.\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}\right|_{(0,0)}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(\frac{t}{\sqrt{2}},\frac{t}{\sqrt{2}})-f(0,0)}{t}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\frac{t^2}{2}\tan\left(t\sqrt{2}\right)}{t\cdot t^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

3）**法一**：反设 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点处可微，则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处沿方向 $\vec{l}=(1,1)$ 的方向导数

$\left.\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}\right|_{(0,0)}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}f_x(0,0)+\dfrac{\sqrt{2}}{2}f_y(0,0)=0$, 与 2）矛盾．因此 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不可微.

法二：反设 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点处可微，则有 $f(x,y)-f(0,0)=f_x(0,0)x+f_y(0,0)y+o(\rho)$，其中 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$ 也就是 $\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\rho}=0$，但是，　当取 $y=x$，　$x\to 0^+$ 时，

$\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\rho}=\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{xy\tan(x+y)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2x^3}{2^{\frac{3}{2}}|x|^3}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 与 $\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\rho}=0$ 矛盾.

因而 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点处不可微.

十一、（8 分）求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{n+1}x^n$ 的收敛半径、收敛域及其和函数.

解:令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{n+1}x^n$，显然该级数的收敛半径为 $R=1$；当 $x=\pm 1$ 时，级数发散，故该幂级数的收敛域为 $(-1,1)$.

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n+1}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)x^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^n$$

而

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)x^n=x^2\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)x^{n-2}=x^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n=x^2\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}\right)'=x^2\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{x^2}{(1-x)^2}$$

$$(\text{或})=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n-\sum_{n=1}^{\infty}2x^n=\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+1}\right)'-\frac{2x}{1-x}=\left(\frac{x^2}{1-x}\right)'-\frac{2x}{1-x}=\frac{x^2}{(x-1)^2},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^n=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1}=\frac{1}{x}\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)\mathrm{d}\,x=\frac{1}{x}\int_0^x\frac{x}{1-x}\mathrm{d}\,x=\frac{-1}{x}\big(x+\ln(1-x)\big)$$

因此， $$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n+1}x^n=\begin{cases}\dfrac{x^2}{(x-1)^2}-\dfrac{1}{x}(x+\ln(1-x)), 0<|x|<1\\ 0, \qquad x=0\end{cases}.$$

十二（5 分）、设$0<a_n<\dfrac{1}{n}$，在级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$中，哪个级数一定收敛？对于一定收敛的级数给出证明，对于可能发散的级数给出发散的例子.

解： $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$一定收敛，由$0<a_n<\dfrac{1}{n}$可知，$0<a_n^2<\dfrac{1}{n^2}$，而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$收敛，由比较审敛法可知，级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$收敛.

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$可能发散. 取$a_{2k}=\dfrac{1}{4k}$，$a_{2k+1}=\dfrac{1}{(2k+1)^2}$. 由于$\sum_{k=1}^{\infty}a_{2k}$发散，而$\sum_{k=0}^{\infty}a_{2k+1}$收敛，

因而$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$发散.