

武汉大学 2023–2024 学年第二学期

《高等数学 A2》 期末试题 (A 卷)

注意事项:

1. 本试卷共 13 道试题, 满分 100 分, 考试时间 120 分钟.
2. 请将答案全部写在考试答题纸上的对应题号区域, 写在其他位置无效.

一、计算下列各题 (本题满分 70 分, 每小题 7 分)

1. 设向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 满足 $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 1$, 求 $[(\mathbf{a} + \mathbf{c}) \times (\mathbf{a} + \mathbf{b})] \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c})$.

2. 已知直线 $L_1: \begin{cases} x - y = 6, \\ 2y + z = 3 \end{cases}$ 和 $L_2: \frac{x-1}{-1} = \frac{y-5}{2} = \frac{z+8}{-1}$. 求直线 L_1 与 L_2 的夹角.

3. 设函数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$ 问该函数在点 $(0, 0)$ 处的一阶偏导数及全微分是否存在, 并说明理由.

4. 设 $f(x, y)$ 是可微函数, 其定义域是 \mathbb{R}^2 . 给定 4 个点 $A(0, 1), B(1, 3), C(4, 4), D(3, 5)$. 若 $f(x, y)$ 在 A 点处沿 AB 方向的方向导数等于 $\frac{4}{\sqrt{5}}$, 沿 AC 方向的方向导数等于 $\frac{11}{5}$.

(1) 记函数 $f(x, y)$ 在点 A 处的梯度为 $\mathbf{grad} f = (a, b)$, 求 a, b .

(2) 求 $f(x, y)$ 在 A 点处沿 AD 方向的方向导数.

5. 求椭球面 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ 上平行于平面 $x + 4y + 6z = 0$ 的切平面方程.

6. 设曲面 $\Sigma: |x| + |y| + |z| = 1$, 计算 $\iint_{\Sigma} (x + |y| + 2|z|) dS$.

7. 求 $I = \iint_D \sqrt{|y - x^2|} dx dy$, 其中 D 由 $|x| \leq 1, 0 \leq y \leq 2$ 确定.

8. 计算

$$I = \oint_L (y^2 + z^2) dx + (z^2 + x^2) dy + (x^2 + y^2) dz,$$

其中 L 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4x$ 与柱面 $x^2 + y^2 = 2x$ 的交线 ($z \geq 0$),

从 z 轴正向往下看, L 的方向为逆时针方向.

9. 求 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2^n} + \frac{2^n}{n} \right) x^n$ 的和函数.

10. 将 $f(x) = x - 1$ ($0 \leq x \leq 2$) 展开成周期为 4 的余弦级数, 并由此求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ 的和.

二、解答下列各题 (本题满分 30 分, 每小题 10 分)

11. 物质曲线 L 的形状由方程组

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

确定, 其线密度 $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2$, 求该物质曲线的质量 m .

12. 求心脏线 $r = a(1 + \cos \theta)$ 绕极轴旋转一周所围成的立体体积 V .

13. 要制造一个无盖的长方形容器, 已规定表面积为 S , 希望容积 V 最大, 问该容器的长、宽、高应是多少?

1. 设向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 满足 $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 1$, 求 $[(\mathbf{a} + \mathbf{c}) \times (\mathbf{a} + \mathbf{b})] \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c})$.

解:

$$\begin{aligned} [(\mathbf{a} + \mathbf{c}) \times (\mathbf{a} + \mathbf{b})] \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) &= (\mathbf{a} \times \mathbf{a} + \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{c} \times \mathbf{a} + \mathbf{c} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) \\ &= (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} + (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} + (\mathbf{c} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} + (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} + (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{c} + (\mathbf{c} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} \\ &= 2(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 2. \end{aligned}$$

2. 已知直线 $L_1: \begin{cases} x - y = 6, \\ 2y + z = 3 \end{cases}$ 和 $L_2: \frac{x-1}{-1} = \frac{y-5}{2} = \frac{z+8}{-1}$. 求 L_1 与 L_2 的夹角.

解: 直线 L_1 的方向向量是

$$\mathbf{S}_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k} = (-1, -1, 2).$$

直线 L_2 的方向向量是 $\mathbf{S}_2 = (-1, 2, -1)$, 从而直线 L_1 与 L_2 的夹角 θ 的余弦为

$$\cos \theta = \frac{|\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2|}{|\mathbf{S}_1| \cdot |\mathbf{S}_2|} = \frac{3}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{1}{2},$$

因此 L_1 与 L_2 的夹角 $\theta = \frac{\pi}{3}$.

可能出现的错误解法: $\cos \theta = \frac{\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2}{|\mathbf{S}_1| \cdot |\mathbf{S}_2|} = -\frac{1}{2}$, 得 $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

3. 设函数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$ 问该函数在点 $(0, 0)$ 处的一阶偏导数及全微分是否存在, 并说明理由.

解: 由偏导数定义

$$\begin{aligned} f'_x(0, 0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1, \\ f'_y(0, 0) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y}{y} = -1. \end{aligned}$$

故在点 $(0, 0)$ 处两个偏导数都存在.

因

$$\begin{aligned} &f(x, y) - f(0, 0) - f'_x(0, 0)x - f'_y(0, 0)y \\ &= \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} - x + y = \frac{xy(x - y)}{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

而 $\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{xy(x - y)}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$ 沿直线 $y = kx$, 有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot kx(x - kx)}{(x^2 + k^2x^2)^{3/2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3k(1 - k)}{|x|^3(1 + k^2)^{3/2}},$$

极限不存在, 故函数在点 $(0, 0)$ 处不可微.

4. 设 $f(x, y)$ 是可微函数, 其定义域是 \mathbb{R}^2 . 给定 4 个点 $A(0, 1), B(1, 3), C(4, 4), D(3, 5)$. 若 $f(x, y)$ 在 A 点处沿 AB 方向的方向导数等于 $\frac{4}{\sqrt{5}}$, 沿 AC 方向的方向导数等于 $\frac{11}{5}$.

(1) 记函数 $f(x, y)$ 在点 A 处的梯度为 $\text{grad } f = (a, b)$, 求 a, b .

(2) 求 $f(x, y)$ 在 A 点处沿 AD 方向的方向导数.

解: (1) 由 $\overrightarrow{AB} = (1, 2)$, 与之同向的单位向量为 $\mathbf{e}_1 = (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$; 又 $\overrightarrow{AC} = (4, 3)$, 与之同向的单位向量为 $\mathbf{e}_2 = (\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$. 由题设知

$$\begin{cases} (a, b) \cdot (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}) = \frac{4}{\sqrt{5}}, \\ (a, b) \cdot (\frac{4}{5}, \frac{3}{5}) = \frac{11}{5}. \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} a + 2b = 4, \\ 4a + 3b = 11. \end{cases}$$

故 $a = 2, b = 1$.

(2) 由 $\overrightarrow{AD} = (3, 4)$, 与之同向的单位向量为 $\mathbf{e}_3 = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$, 故所求方向导数为

$$(a, b) \cdot \mathbf{e}_3 = 2 \cdot \frac{3}{5} + 1 \cdot \frac{4}{5} = 2.$$

5. 求椭球面 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ 上平行于平面 $x + 4y + 6z = 0$ 的切平面方程.

解: 记 $F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 21$, 有 $F_x = 2x, F_y = 4y, F_z = 6z$.

由题设知 $\frac{2x}{1} = \frac{4y}{4} = \frac{6z}{6}$, 即 $z = 2x, y = 2x$, 代回椭球面方程, 得 $x = \pm 1, y = \pm 2, z = \pm 2$. 即切点的坐标为 $(1, 2, 2)$ 或 $(-1, -2, -2)$.

故切平面方程为 $1 \cdot (x \pm 1) + 4 \cdot (y \pm 2) + 6 \cdot (z \pm 2) = 0$, 即满足条件的平面有两个: $x + 4y + 6z = 21$, 和 $x + 4y + 6z = -21$.

6. 设曲面 $\Sigma: |x| + |y| + |z| = 1$, 计算 $\iint_{\Sigma} (x + |y| + 2|z|) \, dS$.

解: 曲面 Σ 关于 yOz 面对称, x 是奇函数, 则

$$\iint_{\Sigma} x \, dS = 0.$$

由轮换对称性, $\iint_{\Sigma} |x| \, dS = \iint_{\Sigma} |y| \, dS = \iint_{\Sigma} |z| \, dS$, 故

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} (|y| + 2|z|) \, dS &= \iint_{\Sigma} (|x| + |y| + |z|) \, dS \\ &= \iint_{\Sigma} 1 \, dS = 8 \iint_{\Sigma_1} dS \\ &= 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} (\sqrt{2})^2 = 4\sqrt{3}. \end{aligned}$$

其中 Σ_1 是 Σ 在第一卦限的部分. Σ_1 是边长为 $\sqrt{2}$ 的等边三角形.

综上, $\iint_{\Sigma} (x + |y| + 2|z|) \, dS = 4\sqrt{3}$.

7. 求 $I = \iint_D \sqrt{|y - x^2|} \, dx dy$, 其中 D 由 $|x| \leq 1, 0 \leq y \leq 2$ 确定.

解: 用曲线 $y = x^2$ 将 D 分为 D_1, D_2 .

$$\begin{aligned} I &= \iint_{D_1} \sqrt{y-x^2} dx dy + \iint_{D_2} \sqrt{x^2-y} dx dy \\ &= 2 \int_0^1 dx \int_{x^2}^2 \sqrt{y-x^2} dy + 2 \int_0^1 dx \int_0^{x^2} \sqrt{x^2-y} dy \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

8. 计算 $I = \oint_L (y^2 + z^2) dx + (z^2 + x^2) dy + (x^2 + y^2) dz$, 其中 L 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4x$ 与柱面 $x^2 + y^2 = 2x$ 的交线 ($z \geq 0$), 从 z 轴正向往下看, L 的方向为逆时针方向.

解: 记 Σ 为曲线 L 所围球面部分的外侧. 则 Σ 与 L 的方向符合右手法则. 由斯托克斯公式, 有

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} dy dz & dz dx & dx dy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 + z^2 & z^2 + x^2 & x^2 + y^2 \end{vmatrix} \\ &= 2 \iint_{\Sigma} (y-z) dy dz + (z-x) dz dx + (x-y) dx dy \\ &= 2 \iint_{\Sigma} [(y-z) \cos \alpha + (z-x) \cos \beta + (x-y) \cos \gamma] dS, \end{aligned}$$

其中 $\mathbf{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ 是球面上点 (x, y, z) 处指向外侧的单位法向量. 由球面方程知指向外侧法向量为 $(x-2, y, z)$, 将其单位化则有 $\mathbf{n} = \left(\frac{x-2}{2}, \frac{y}{2}, \frac{z}{2} \right)$, 从而

$$\begin{aligned} I &= 2 \iint_{\Sigma} \left[\frac{x-2}{2}(y-z) + \frac{y}{2}(z-x) + \frac{z}{2}(x-y) \right] dS \\ &= 2 \iint_{\Sigma} (z-y) dS. \end{aligned}$$

由于曲面 Σ 关于 xOz 坐标面对称, 被积函数关于 y 是奇函数, 得 $\iint_{\Sigma} y dS = 0$. 故

$$I = 2 \iint_{\Sigma} z dS = 2 \iint_D \frac{z}{\cos \gamma} dx dy = 2 \iint_D 2 dx dy = 4\pi,$$

其中 D 是曲面 Σ 在 xOy 坐标面上的投影区域: $x^2 + y^2 \leq 2x$.

9. 求 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2^n} + \frac{2^n}{n} \right) x^n$ 的和函数.

解: (1) 等比级数两边求导, 有

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x}, \quad x \in (-1, 1),$$

$$1 + 2x + \cdots + nx^{n-1} + \cdots = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad x \in (-1, 1),$$

两边乘以 x , 得

$$x + 2x^2 + \cdots + nx^n + \cdots = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad x \in (-1, 1),$$

上式在 $x = \pm 1$ 时发散. 将上式中 x 替换为 $\frac{x}{2}$, 得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^n = \frac{\frac{x}{2}}{(1-\frac{x}{2})^2} = \frac{2x}{(2-x)^2}, \quad x \in (-2, 2).$$

(2) 等比级数两边在 $[0, x]$ 上积分:

$$\begin{aligned}1 + x + \cdots + x^{n-1} + \cdots &= \frac{1}{1-x}, & x \in (-1, 1), \\x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{1}{n}x^n + \cdots &= -\ln(1-x), & x \in [-1, 1),\end{aligned}$$

上式在 $x = -1$ 时收敛, 在 $x = 1$ 时发散. 将上式中 x 替换为 $2x$, 得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} x^n = -\ln(1-2x), \quad 2x \in [-1, 1), \quad \text{即 } x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}).$$

综上得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2^n} + \frac{2^n}{n} \right) x^n = \frac{2x}{(2-x)^2} - \ln(1-2x), \quad x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}).$$

10. 将 $f(x) = x - 1$ ($0 \leq x \leq 2$) 展开成周期为 4 的余弦级数, 并由此求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ 的和.

解:

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{2}{2} \int_0^2 (x-1) dx = 0, \\a_n &= \frac{2}{2} \int_0^2 (x-1) \cos \frac{n\pi x}{2} dx = \frac{2}{n\pi} \int_0^2 (x-1) d \sin \frac{n\pi x}{2} \\&= -\frac{2}{n\pi} \int_0^2 \sin \frac{n\pi x}{2} dx = \frac{4}{n^2\pi^2} [(-1)^n - 1] \\&= \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ -\frac{8}{(2k-1)^2\pi^2}, & n = 2k-1, \end{cases} \quad (k = 1, 2, \cdots)\end{aligned}$$

所以 $f(x) = -\frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2}$, $x \in [0, 2]$.

取 $x = 2$, 得 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

11. 物质曲线 L 的形状由方程组

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

确定, 其线密度 $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2$, 求该物质曲线的质量 m .

解: 由第一类曲线积分的物理意义知

$$m = \int_L (x^2 + y^2) ds,$$

由轮换对称性

$$\int_L x^2 ds = \int_L y^2 ds = \int_L z^2 ds = \frac{1}{3} \int_L (x^2 + y^2 + z^2) ds = \frac{1}{3} \int_L ds.$$

注意到原点到 $x + y + z = 1$ 的距离为 $\frac{1}{\sqrt{3}}$, 故 L 的半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}$, 其周长为 $2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$.

故质量 $m = \frac{2\pi}{3} \sqrt{\frac{2}{3}}$.

12. 求心脏线 $r = a(1 + \cos \theta)$ 绕极轴旋转一周所围成的立体体积 V .

解: 取极轴为 z 轴, 在球坐标系下旋转面方程为 $\rho = a(1 + \cos \varphi)$. 故立体 V :

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi, \quad 0 \leq \rho \leq a(1 + \cos \varphi).$$

因此

$$\begin{aligned} V &= \iiint_V dV = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi \int_0^{a(1+\cos \varphi)} \rho^2 d\rho \\ &= \frac{2\pi}{3} \int_0^\pi a^3 (1 + \cos \varphi)^3 \sin \varphi d\varphi = \frac{8}{3} \pi a^3. \end{aligned}$$

13. 要制造一个无盖的长方形容, 已规定表面积为 S , 希望容积 V 最大, 问该容器的长、宽、高应是多少?

解: 设长、宽、高分别为 x, y, z . 即求函数 $f = xyz$ 在约束条件 $xy + 2xz + 2yz = S$ 下的最值.

构造 $L(x, y, z, \lambda) = xyz + \lambda(S - xy - 2xz - 2yz)$, 得方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = yz - \lambda y - 2z\lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y} = xz - \lambda x - 2z\lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial z} = xy - 2x\lambda - 2y\lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = S - xy - 2xz - 2yz = 0. \end{cases}$$

将上述方程组的第一个方程乘以 x , 第二个方程乘以 y , 第三个方程乘以 z , 再两两相减得:

$$\begin{cases} 2yz - 2xz = 0, \\ \lambda xy - 2\lambda yz = 0, \\ \lambda xy - 2\lambda xz = 0. \end{cases}$$

解得 $x = y = 2z$, 代入第四个方程得 $z = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{3}}, x = y = \sqrt{\frac{S}{3}}$.