武汉大学数学与统计学院

2023-2024 学年第二学期

《高等数学 B2》期末考试 A 卷 **参考解答**

考试时间：2024 年 6 月 19 日 14:30-16:30

一、（10 分）已知$|\vec{a}|=3, |\vec{b}|=1, |\vec{c}|=2, (\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\pi}{3}, \mathrm{Prj}_{\vec{c}}(\vec{a}\times\vec{b})=-1$.

1) 计算$|\vec{a}+\vec{b}|$； **2)** 计算$\vec{a}-\vec{b}$与$\vec{a}+\vec{b}$的夹角的余弦$\cos\theta$； **3)** 计算$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$.

解：1) $|\vec{a}+\vec{b}|^2=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{a}+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b}=13$;即$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{13}$. 4 分

2) $|\vec{a}-\vec{b}|^2=\vec{a}\cdot\vec{a}-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b}=7$，因此$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{7}$；此外，

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2=8$，$\cos\theta=\dfrac{(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})}{|\vec{a}+\vec{b}|\cdot|\vec{a}-\vec{b}|}=\dfrac{8}{\sqrt{91}}=\dfrac{8\sqrt{91}}{91}$. 8 分

3) $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=|\vec{c}|\,\mathrm{Prj}_{\vec{c}}(\vec{a}\times\vec{b})=-2$. 10 分

二、（9 分）已知曲面$S: z=2x^2+y^2$, 平面$\pi: 4x+4y-z-17=0$.

1) 在曲面S上找一点$P(x_0,y_0,z_0)$，使得曲面S在点P处的切平面平行于平面π;

2) 求 1) 中的点P到平面π的距离.

解：1) 曲面S在点$P(x_0,y_0,z_0)$处的切平面方程为：

$$4x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0)-(z-z_0)=0.$$ 4 分

它与平面π平行的充要条件是：$\dfrac{4x_0}{1}=\dfrac{2y_0}{1}=\dfrac{-4}{-1}$，即$x_0=1$，$y_0=2$，点在曲面$S$上，所以$z_0=2x_0^2+y_0^2=6$.

因此，点P的坐标是$(1,2,6)$，此处的切平面是：$4x+4y-z-6=0$. 6 分

2) 点P到平面π的距离$d=\dfrac{|17-6|}{\sqrt{4^2+4^2+(-1)^2}}=\dfrac{11}{\sqrt{33}}=\dfrac{\sqrt{33}}{3}$ 9 分

三、（9 分）已知$z = y\,f(x+y, xy^2)$，其中$f(u,v)$具有连续的二阶偏导数，且$f_1'(1,0) = f_2'(1,0) = 1$.

1）求$\mathrm{d}z$； **2)** 求$\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{(1,0)}$.

解： 1） $\mathrm{d}z = f\,\mathrm{d}y + yf_1'(\mathrm{d}x + \mathrm{d}y) + yf_2'(y^2\,\mathrm{d}x + 2xy\,\mathrm{d}y)$ 6 分

$= y(f_1' + y^2 f_2')\mathrm{d}x + (f + yf_1' + 2xy^2 f_2')\mathrm{d}y$

2）由 1）可知： $\dfrac{\partial z}{\partial x} = y(f_1' + y^2 f_2')$ $\left(或\dfrac{\partial z}{\partial y} = f + yf_1' + 2xy^2 f_2'\right)$；因此，

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{(1,0)} = \left.\frac{\partial}{\partial y}\Big(y(f_1' + y^2 f_2')_2\Big)\right|_{(1,0)}$$

$$= \left.\left(f_1' + y^2 f_2' + y\frac{\partial}{\partial y}(f_1' + y^2 f_2')\right)\right|_{(1,0)} = f_1'(1,0) = 1.$$ 9 分

四、（8 分）计算二重积分$\iint\limits_D (1 + x\sin y)\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中区域$D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 4x\}$.

解： 由对称性（区域D关于$y=0$对称）可知$\iint\limits_D x\sqrt{x^2+y^2}\sin y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$. 3 分

区域D在极坐标下可表示为$D = \{(\rho,\theta) \mid \rho \le 4\cos\theta, -\dfrac{\pi}{2} \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}\}$，故

$$\iint\limits_D (1 + x\sin y)\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{4\cos\theta}\rho\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho + 0$$ 6 分

$$= \frac{64}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{256}{9}.$$ 8 分

五、（8 分）计算对面积的曲面积分$I = \iint_S (x^2 + 2x)\,\mathrm{d}S$，其中$S$是球面$x^2+y^2+z^2 = R^2$.

解：法一： 由对称性可知：$\iint_S 2x\,\mathrm{d}S = 0$，且$\iint_S x^2\,\mathrm{d}S = \iint_S y^2\,\mathrm{d}S = \iint_S z^2\,\mathrm{d}S$. 4 分

因此， $I = \iint_S (x^2+2x)\,\mathrm{d}S = \dfrac{1}{3}\iint_S (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}S + 0$ 6 分

$= \dfrac{1}{3}\iint_S R^2\,\mathrm{d}S = \dfrac{1}{3}R^2\cdot 4\pi R^2 = \dfrac{4\pi}{3}R^4$. 8 分

法二： 由对称性可知：$\iint_S 2x\,\mathrm{d}S = 0$. 因此， 3 分

$$I = \iint_S x^2\,\mathrm{d}S = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}(R\sin\varphi\cos\theta)^2 R^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$ 6 分

$$= R^4\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin^3\varphi\,\mathrm{d}\varphi = R^4\cdot\pi\cdot\frac{4}{3} = \frac{4\pi}{3}R^4$$ 8 分

六、（8 分）已知 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$，易知 $f^{(n)}(x)=\dfrac{(2n-1)!!}{2^n}(1-x)^{-n-\frac{1}{2}}$. 将函数 $f(x)$ 及 $\arcsin x$ 展开成 x 的幂级数（**已知两个函数都能在区间 $(-1,1)$ 内展开成 x 的幂级数，无需再证**）.

解：由于 $f^{(n)}(0)=\dfrac{(2n-1)!!}{2^n}$, 因此，

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{n!2^n}x^n=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n,\quad x\in(-1,1)\qquad 4\text{ 分}$$

由此可得，$\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}=1+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}t^{2n}$， $t\in(-1,1)$.　　6 分

因此，$\arcsin x=\displaystyle\int_0^x\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t=\int_0^x\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}t^{2n}\right)\mathrm{d}t$

$$=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}x^{2n+1},\quad x\in(-1,1).\qquad 8\text{ 分}$$

七、(9 分) 设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2\sin y}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$ 考虑如下问题：

1）该函数 $f(x,y)$ 在点 $O(0,0)$ 处是否连续？说明理由.

2）求函数 $f(x,y)$ 在点 $O(0,0)$ 处的偏导数 $f_x(0,0),\ f_y(0,0)$.

3）函数 $f(x,y)$ 在点 $O(0,0)$ 处是否可微？说明理由.

解：1）由 $|f(x,y)|\le|\sin y|\le|y|$, 可知 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0=f(0,0)$，因而函数 $f(x,y)$ 在点 $O(0,0)$ 处连续.　　4 分

2）由于 $f(x,0)=f(0,y)=0$，因此 $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$.　　7 分

3）$f(x,y)$ 在点 $O(0,0)$ 处可微当且仅当 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)-f_y(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$，

即 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2\sin y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=0$. 但是 $\displaystyle\lim_{\substack{y=x\\x\to0^+}}\frac{x^2\sin y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^2\sin x}{(x^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}=2^{-\frac{3}{2}}\neq0$. 因此，函数 $f(x,y)$ 在点 $O(0,0)$ 处不可微.　　9 分

八、（9 分）求 $I=\iint_{\Sigma}(x^2+\cos y)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 Σ 为圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}\ (0\le z\le 1)$ 的上侧.

解：令 $\Sigma_0: z=1, x^2+y^2\le 1$，取下侧，则

$$I=\left(\oiint_{\Sigma+\Sigma_0}-\iint_{\Sigma_0}\right)\left((x^2+\cos y)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right) \qquad 2\text{ 分}$$

其中 $\iint_{\Sigma+\Sigma_0}(x^2+\cos y)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-\iiint_{\Omega}(2x+2z)\mathrm{d}v$ （高斯公式） 5 分

$$=-\iiint_{\Omega}2z\,\mathrm{d}v=-\int_0^1 2z\,\mathrm{d}z\iint_{x^2+y^2\le z^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=-2\pi\int_0^1 z^3\,\mathrm{d}z=-\frac{\pi}{2}. \qquad 7\text{ 分}$$

此外，$\iint_{\Sigma_0}(x^2+\cos y)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-\iint_{x^2+y^2\le 1}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-\pi$. 8 分

因此，$I=\iint_{\Sigma}(x^2+\cos y)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\dfrac{\pi}{2}$. 9 分

九、（8 分）设 Γ 为圆柱面 $y^2+x^2=2x$ 与旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 的交线，从 z 轴正向看为逆时针方向，计算 $I=\int_{\Gamma}(z-y)\,\mathrm{d}x+(x-y)\,\mathrm{d}z$.

解：法一：由方程 $y^2+x^2=2x$ 以及 $z=x^2+y^2$ 可知曲线在平面 $z=2x$ 上. 因此，令 Σ 为平面 $z=2x$ 在圆柱面 $y^2+x^2=2x$ 内的部分，取上侧，单位法向量 $\vec{n}=(\frac{-2}{\sqrt5},0,\frac{1}{\sqrt5})$. 3 分

由斯托克斯公式可得：

$$I=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ z-y & 0 & x-y\end{vmatrix}\quad\left(或=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\dfrac{-2}{\sqrt5} & 0 & \dfrac{1}{\sqrt5}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ z-y & 0 & x-y\end{vmatrix}\mathrm{d}S\right) \qquad 6\text{ 分}$$

$$=\iint_{\Sigma}-\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\quad\left(或=\iint_{\Sigma}\frac{3}{\sqrt5}\mathrm{d}S\right)$$

$$=\iint_{\Sigma}3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_{D}3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=3\pi \qquad 8\text{ 分}$$

其中 $D=\{(x,y)|\ 0\le x^2+y^2\le 2x\}$.

法二：曲线可参数化：$x=1+\cos\theta,\ y=\sin\theta, z=2(1+\cos\theta), \theta:0\to 2\pi$. 可得： 3 分

$$I=\int_0^{2\pi}\big((2+2\cos\theta-\sin\theta)\cdot(-\sin\theta)+(1+\cos\theta-\sin\theta)\cdot(-2\sin\theta)\big)\mathrm{d}\theta \qquad 6\text{ 分}$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(-4-4\cos\theta+3\sin\theta\right)\cdot\sin\theta\big)\mathrm{d}\theta=12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta=3\pi \qquad 8\text{ 分}$$

十、（8 分）求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)}(x-1)^n$的收敛半径、收敛域，并计算$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^n(2n+1)}$的和.

解:收敛半径为$R=\lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)+1}{2n+1}=1$；当$x-1=1$时级数收敛，$x-1=-1$时级数发散，故该幂级数的收敛域为$(0,2]$.　　4 分

当$x\in(1,2)$时，令$x-1=t^2$，并记$S(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}t^{2n}$，$f(t)=tS(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}t^{2n+1}$，则

$$f'(t)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}=\frac{1}{1+t^2},$$　　6 分

从而

$$f(t)=\int_0^t\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=\arctan t.\ \text{即有}\ S(t)=\frac{1}{t}f(t)=\frac{1}{t}\arctan t.$$

因此，$S(\frac{1}{2})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^n(2n+1)}=2\arctan\frac{1}{2}.$　　8 分

十一、（9 分）设$z=z(x,y)$由方程$z^2+xyz-x^2y-xy^2=10$在点$(1,1,3)$的邻域内确定的隐函数.

1) 计算$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,1)}$，$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(1,1)}$以及$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}$；

2) 函数$z=z(x,y)$在$(1,1)$处是否取极值？若取极值，取极大值还是极小值？

解：1）方程两边关于x求偏导数得：

$$2z\frac{\partial z}{\partial x}+yz+xy\frac{\partial z}{\partial x}-2xy-y^2=0,\qquad(\#)$$

代入$x=1,y=1,z=3$，容易解得$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,1)}=0$.　　4 分

对方程(#)两边关于x求偏导数得：

$$2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+2z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2y\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2y=0,$$

代入$x=1,y=1,z=3$，以及$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,1)}=0$，得$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(1,1)}=\frac{2}{7}$.　　6 分

对方程(#)两边关于y求偏导数得：

$$2z\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}+y\frac{\partial z}{\partial y}+z+x\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-2x-2y=0$$

代入 $x=1, y=1, z=3$，以及 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,1)}=0$，并由对称性可知 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,1)}=0$，

得 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}=\dfrac{1}{7}$. 7 分

2) 因为 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,1)}=0$，$\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,1)}=0$. 又由对称性可知 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(1,1)}=\dfrac{2}{7}$，因而 $AC-B^2=\dfrac{3}{49}>0$，

且 $A>0$. 所以函数 $z=z(x,y)$ 在 $(1,1)$ 处取极小值. 9 分

十二、（5 分）讨论下列级数的敛散性：1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin(\pi(3-\sqrt{5})^n)$；2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin(\pi(3+\sqrt{5})^n)$.

解：1）显然 $0<3-\sqrt{5}<1$，从而 $\sin(\pi(3-\sqrt{5})^n)>0$. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin(\pi(3-\sqrt{5})^n)$ 为正项级数.

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin(\pi(3-\sqrt{5})^{n+1})}{\sin(\pi(3-\sqrt{5})^n)}=3-\sqrt{5}<1$，因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin(\pi(3-\sqrt{5})^n)$ 绝对收敛. 3 分

2）由于 $(3+\sqrt{5})^n+(3-\sqrt{5})^n=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k(1+(-1)^k)3^{n-k}(\sqrt{5})^k=2\sum\limits_{m=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}C_n^{2m}3^{n-2m}5^m$，其中 $\lfloor\cdot\rfloor$ 表示向下取整. 因而 $(3+\sqrt{5})^n+(3-\sqrt{5})^n$ 为偶数，即有 $\sin(\pi(3+\sqrt{5})^n)=-\sin(\pi(3-\sqrt{5})^n)$. 因此，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin(\pi(3+\sqrt{5})^n)$ 绝对收敛. 5 分