GIẢI ĐỀ GIỮA KÌ TOÁN RỜI RẠC HỌC KÌ 2 - K22 - UTH

Câu 1: Để mua 200 cái laptop của 5 hãng máy tính sao cho số laptop của mỗi hãng ít nhất là 5, Bình đưa ra cách giải sau:

"Gọi x_i là số laptop mua từ hãng thứ i, $i = \overline{1,5}$. Khi đó có phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 200$ (*). Số cách mua laptop chính là số nghiệm nguyên của (*) thỏa điều kiện $x_i \geq 5$ (**). Phương trình (*) với điều kiện (**) tương đương với phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 200 - 5 * 5$ với điều kiện $x_i \geq 0$, nên kết quả cuối cùng là: C^4_{225+4}".

a. Lập luận của Bình là đúng hay sai? Vì sao?

b. Bạn hãy đưa ra một cách giải khác.

c. Đếm số cách mua sao cho số laptop của hãng DELL có giá trị từ 5 đến 10.

Giải

a. Kết luận của Bình là chưa chính xác vì:

Đặt $y_i = x_i - 5$ $(y_i \geq 0) \Leftrightarrow x_i = y_i + 5$ (***)

Từ (*), (***) $\Leftrightarrow y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + 5.5 = 200$

$\Leftrightarrow y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 200 - 5.5$

$\Leftrightarrow y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 175$ (1)

Số cách mua laptop chính là số nghiệm nguyên không âm của phương trình (1) thỏa công thức:

$$\boldsymbol{K^k_n = C^k_{n+k-1} = C^{n-1}_{n+k-1}} \text{ với } k = 175,\ n = 5$$

Vậy số cách mua laptop thỏa ycbt là $C^4_{179} = C^{175}_{179}$

b. *Vẫn sử dụng công thức ở câu a nhưng theo cách lập luận khác.*

Theo yêu cầu bài toán, để số laptop mua từ mỗi hãng ít nhất là 5, ta sẽ mua 25 cái laptop (5 cái laptop từ mỗi hãng), sau đó ta chỉ cần mua thêm 175 cái laptop (200 – 25), lúc này bài toán mua laptop sẽ trở thành bài toán chia kẹo không hoán vị.

Gọi x_i là số laptop mua từ hãng thứ i ($i = \overline{1,5}$).

Số cách mua laptop sẽ là nghiệm nguyên không âm của phương trình:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 175\ (x_i \geq 0)\ (2).$$

Số cách mua laptop chính là số nghiệm nguyên không âm của phương trình (2) thỏa công thức:

$$\boldsymbol{K^k_n = C^k_{n+k-1} = C^{n-1}_{n+k-1}} \text{ với } k = 175,\ n = 5$$

Vậy số cách mua laptop thỏa ycbt là $C^4_{179} = C^{175}_{179}$.

c. Gọi x_i là số laptop mua từ hãng thứ i ($i = \overline{1,4}$), x_5 là laptop mua từ hãng DELL. Khi đó, có phương trình là $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 200$ (*).

Số cách mua laptop sẽ là **hiệu** của (*) với điều kiện $x_i \geq 5$ $(i = \overline{1,5})$ (**), và (*) với điều kiện $x_i' \geq 5$ $(i' = \overline{1,4})$, $x_5 \geq 11$(***)

(**) đã giải ở câu a, b. Ta có kết quả của (**) là C^4_{179}.

Giải (***): Đặt $z_i = x_i' - 5$ $(z_i \geq 0) \Leftrightarrow x_i' = z_i + 5$ (3)

$z_5' = x_5 - 11 \Leftrightarrow x_5 = z_5' + 11$ (4)

Từ (*), (3), (4) $\Leftrightarrow z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 + 5.4 + 11 = 200$

$\Leftrightarrow y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 200 - 5.4 - 11 = 169.$

Kết quả của (***) là C^4_{173}.

Vậy số cách mua laptop thỏa yêu cầu bài toán là C^4_{179} - C^4_{173}.

<u>Câu 2:</u> Cho ánh xạ f: **Z** → **Z** xác định như sau

$$f(x) = \begin{cases} x^2, x < -3 \\ 3, -3 \leq x \leq 3 \\ x, x > 3 \end{cases}$$

a. Cho biết f có là đơn ánh, song ánh hay toàn ánh không? Vì sao?

b. Thu hẹp tập nguồn hoặc tập đích để f là toàn ánh.

<u>Giải</u>

a. - Xét đơn ánh:

- Với $x < -3$: $f(x) = x^2$, không đơn ánh vì $x_1^2 = x_2^2$ khi $x_1 = -x_2$ (ví dụ $f(-4) = f(4) = 16$).
- Với $-3 \leq x \leq 3$: $f(x) = 3$, không đơn ánh vì mọi giá trị x trong khoảng này đều có cùng giá trị $f(x) = 3$.
- Với $x > 3$: $f(x) = x$, là đơn ánh vì $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Kết luận: f **không đơn ánh** vì không thoả mãn trên toàn miền $\mathbb{Z}$.

- Xét toàn ánh:

Với $x < -3$: $f(x) = x^2$

- Vì $x \in \mathbb{Z}$, giá trị x^2 thuộc tập các số nguyên dương $\{16, 25, 36, \ldots\}$.
- Tập giá trị là tất cả các số nguyên $y \geq 16$.

Với $-3 \leq x \leq 3$: $f(x) = 3$

- Tập giá trị chỉ có $y = 3$.

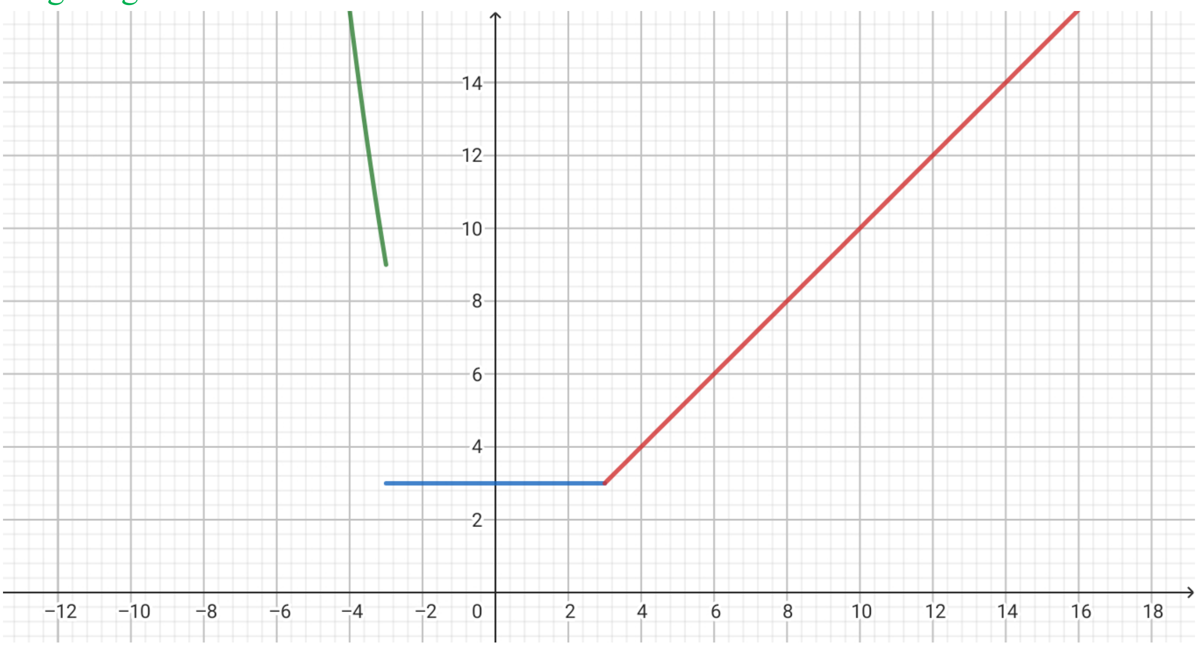
Với $x > 3$: $f(x) = x$

- Vì $x \in \mathbb{Z}$, tập giá trị là $\{4, 5, 6, \ldots\}$.

Vậy f không toàn ánh vì xét trên tập **Z** → **Z**, không tồn tại x sao cho y có giá trị bé hơn 3.

$$\{\nexists x \in \mathbf{Z} | y < 3\}$$

Vậy f không song ánh.



b. Để f toàn ánh thì tập đích chính là tập hợp chứa tất cả giá trị của f(x)

⇨ **Điều kiện để f toàn ánh là $f(x) \in [3; +\infty)$.**

<u>Câu 3:</u> Cho tập A = {1, 2, 3, 4, …, 20}

a. Tìm số tập con khác rỗng của A.

b. Tìm số tập con của A chỉ chứa các số chẵn.

<u>Giải</u>

a. Công thức tính số tập con của một tập hợp là 2^n với n là số lượng phần tử của tập hợp đó, công thức này tính cả tập hợp rỗng nên số tập con của một tập hợp khác rỗng là $2^n - 1$.
Vậy số tập con khác rỗng của A là $2^{20} - 1$.

b. Áp dụng công thức ở trên với số lượng phần tử là số chẵn trong tập A là 10.
Vậy số tập con của A chỉ chứa các số chẵn là 2^{10}.

<u>Câu 4:</u> Cho quan hệ R trên $\boldsymbol{Z}^2$ được định nghĩa như sau:

(x,y) R (u,v) ⇔ Ước chung lớn nhất của x và y bằng với ước chung lớn nhất của u và v

a. Chứng minh rằng R là một quan hệ tương đương trên $\boldsymbol{Z}^2$.

b. Mô tả lớp tương đương [2,8] bằng logic vị từ.

<u>Giải</u>

a. R là một quan hệ tương đương trên $\boldsymbol{Z}^2$ khi và chỉ khi R có:

+ **Tính phản xạ:** (x, y)R(x, y) vì ước chung lớn nhất của x và y cũng chính là ước chung lớn nhất của chúng. [UCLN(x, y) = UCLN(x, y)]

+ **Tính đối xứng:** $\begin{cases}(x,y)R(u,v)\\(u,v)R(x,y)\end{cases}$ vì ước chung lớn nhất của x và y cũng chính là ước chung lớn nhất của u và v. [UCLN(x, y) = UCLN(u, v) = k $\in \mathbb{Z}$]

+ **Tính bắc cầu:** $\begin{cases}(x,y)R(u,v)\\(u,v)R(r,s)\end{cases}$ ⇒ (x, y)R(r, s) vì ước chung lớn nhất của chúng đều bằng k $\in \mathbb{Z}$.

[UCLN(x, y) = UCLN(u, v) = UCLN(r, s) = k $\in \mathbb{Z}$]

b. ***(Định nghĩa lớp tương đương:*** Cho R là quan hệ tương đương trên A và x thuộc A. Khi đó, tập hợp tất cả các phần tử trong A có quan hệ với x được gọi là lớp tương đương của x. Kí hiệu là $\bar{x}$ hoặc [x].
Vậy [x] = {y ∈ $\boldsymbol{A}$ | $\boldsymbol{y\ R\ x}$})
Mô tả: Do lớp tương đương [2,8] có UCLN (2, 8) bằng 2 nên ∀(x, y) bất kì muốn có quan hệ với (2, 8) thì phải có UCLN cũng bằng 2.

[2,8] = {(x, y) ∈ $\boldsymbol{Z}^2$| $\boldsymbol{UCLN(x,y) = 2}$}

<u>Câu 5:</u> Để đếm số mật khẩu gồm 10 kí tự lấy ra từ tập A = {a, b, c, d, e} sao cho **mỗi kí tự xuất hiện đúng hai lần.** Bình lập luận như sau:

*"Gọi S $= \{s_1 s_2 s_3 \ldots s_{10}\}$ là tập các chuỗi mật khẩu được xây dựng từ A sao cho mỗi kí tự xuất hiện đúng hai lần. Khi đó, có 5! cách chọn 5 kí tự ở lần thứ nhất, và số cách chọn mỗi một trong 5 kí tự trong lần thứ hai luôn bằng 1 (vì phải chọn trùng với nó ở lần thứ nhất). Vậy đáp án là |S| = 5!*1= 5!"*

a. Lập luận trên của Bình là đúng hay sai? Vì sao?

b. Bạn hãy đưa ra một cách giải khác.

Giải

a. Lập luận của Bình là chưa chính xác vì ở lần chọn thứ hai không bắt buộc phải chọn trùng với lần thứ nhất tức là lập luận "và số cách chọn mỗi một trong 5 kí tự trong lần thứ hai luôn bằng 1" không chính xác.

b. Do mỗi kí tự xuất hiện hai lần và mật khẩu gồm 10 kí tự xây dựng từ tập A gồm 5 kí tự nên các ký tự trong mật khẩu sẽ thuộc tập hợp:

$$B = \{a,a,b,b,c,c,d,d,e,e\}.$$

Lúc này, bài toán đếm số mật khẩu trở thành bài toán sắp xếp: sắp xếp các kí tự từ B vào

$$S = \{s_1 s_2 s_3 \ldots s_{10}\}.\ (s_i \in B)$$

Có 10 ký tự trong mật khẩu A, sắp xếp 10 ký tự này, có 10! cách.

Nhưng lúc này, dù có hoán vị 2 kí tự giống nhau bất kì thì vẫn không tạo ra mật khẩu mới. Do đó ta cần chia cho các trường hợp bị trùng lặp như vậy.

Vậy số cách chọn mật khẩu thỏa ycbt là $|S| = \frac{10!}{2!2!2!2!2!}$.

Câu 6: Chứng minh rằng $(p \to (q \wedge r)) \wedge (r \to s) \wedge p \wedge \bar{s}$ là một mâu thuẫn.

Giải

Để chứng minh biểu thức là một mâu thuẫn, ta sẽ chứng minh biểu thức có chân trị là 0.

* *Cách 1:* **Lập bảng chân trị:** Đặt $A = (p \to (q \wedge r)) \wedge (r \to s) \wedge p \wedge \bar{s}$

p	q	r	s	$\bar{s}$	$q \wedge r$	$p \to (q \wedge r)$	$r \to s$	$[p \to (q \wedge r)] \wedge (r \to s)$	$[p \to (q \wedge r)] \wedge (r \to s) \wedge p$	A
0	**0**	**0**	**0**	1	0	1	1	1	0	0
0	**0**	**0**	**1**	0	0	1	1	1	0	0
0	**0**	**1**	**0**	1	0	1	0	0	0	0
0	**1**	**0**	**0**	1	0	1	1	1	0	0
1	**0**	**0**	**0**	1	0	0	1	0	0	0
0	**0**	**1**	**1**	0	0	1	1	1	0	0
0	**1**	**0**	**1**	0	0	1	1	1	0	0
1	**0**	**0**	**1**	0	0	0	1	0	0	0
0	**1**	**1**	**0**	1	1	1	0	0	0	0
1	**0**	**1**	**0**	1	0	0	0	0	0	0
1	**1**	**0**	**0**	1	0	0	1	0	0	0
1	**0**	**1**	**1**	0	0	0	1	0	0	0
1	**1**	**1**	**0**	1	1	1	0	0	0	0
1	**1**	**0**	**1**	0	0	0	1	0	0	0
0	**1**	**1**	**1**	0	1	1	1	1	0	0
1	**1**	**1**	**1**	0	1	1	1	1	1	0

* *Cách 2:* **Biến đổi bằng các luật logic:** $[p \to (q \wedge r)] \wedge (r \to s) \wedge p \wedge \bar{s}$

$\Leftrightarrow [\bar{p} \vee (q \wedge r)] \wedge (\bar{r} \vee s) \wedge p \wedge \bar{s}$ (Luật kéo theo)

$\Leftrightarrow [(\bar{p} \vee q) \wedge (\bar{p} \vee r)] \wedge (\bar{r} \vee s) \wedge p \wedge \bar{s}$ (Luật phân phối)

$\Leftrightarrow (\bar{p} \vee q) \wedge [(\bar{p} \vee r) \wedge (\bar{r} \vee s)] \wedge p \wedge \bar{s}$ (Luật kết hợp)

$$\Leftrightarrow (\bar{p} \vee q) \wedge \left[\underbrace{(\bar{p} \vee r \wedge p)}_{(\bar{p} \wedge p) = 0} \wedge (\bar{r} \vee s \wedge p) \right] \wedge \bar{s} \qquad \text{(Luật phân phối)}$$

$$\Leftrightarrow (\bar{p} \vee q) \wedge \left[r \wedge (\bar{r} \vee s \wedge p) \right] \wedge \bar{s}$$

$$\Leftrightarrow (\bar{p} \vee q) \wedge \left[(r \wedge \bar{r}) \vee (r \wedge s) \wedge (r \wedge p) \right] \wedge \bar{s} \qquad \text{(Luật phân phối)}$$

$$\Leftrightarrow (\bar{p} \vee q) \wedge \left[\left(\underbrace{r \wedge \bar{r}}_{0} \wedge \bar{s} \right) \vee \left(r \wedge \underbrace{s \wedge \bar{s}}_{0} \right) \wedge (r \wedge p \wedge \bar{s}) \right] \qquad \text{(Luật phân phối)}$$

$$\Leftrightarrow (\bar{p} \vee q) \wedge \left[0 \vee \underbrace{0 \wedge (r \wedge p \wedge \bar{s})}_{0} \right] \Leftrightarrow (\bar{p} \vee q) \wedge [0 \vee 0] \Leftrightarrow (\bar{p} \vee q) \wedge 0 \Leftrightarrow 0 \text{ (đpcm).}$$

Câu 7: Thí sinh chọn 1 trong 2 câu sau:

7.1: Số 2015 có bao nhiêu ước số nguyên dương?

7.2: Cho đoạn mã chương trình C như sau:

```c
i = 0; s = 0;
while (i<10)
{
      i++;
      s = s + i;
}
tiepTuc = i;
```

a. Hãy xác định giá trị của biến `tiepTuc`.

b. Chọn một phương pháp suy diễn đã học để chứng minh tính đúng đắn của giá trị vừa tìm được trong phần a.

Giải

Câu 7.1:

**** Tìm ước số nguyên dương của một số chính là phân tích số đó thành tích các thừa số nguyên tố, sau đó lấy số mũ từng thừa số cộng thêm 1, rồi lấy tích của chúng.***

$2015 = 5^1 * 13^1 * 31^1$ nên có $2 * 2 * 2 = 8$ (ước số nguyên dương)

Câu 7.2

a. Giá trị của biến `tiepTuc` là 10.

b. Sử dụng phương pháp quy nạp toán học.

Để chứng minh tính đúng đắn của giá trị vừa tìm được trong phần a, ta sẽ chứng minh rằng sau n lần lặp, có **i = n** (do i++) và $\mathbf{s} = \frac{\mathbf{n\,(n+1)}}{\mathbf{2}}$ (do s = s + i nên s = 1 + 2 +...+ n).

\+ Ta có:

$$n = 0 \Rightarrow i = 0;\ s = \frac{0(0+1)}{2} = 0;$$

$$n = 1 \Rightarrow i = 1;\ s = \frac{1(1+1)}{2} = 1;$$

$$n = 2 \Rightarrow i = 2;\ s = \frac{2(2+1)}{2} = 3;$$

+ Giả sử điều này đúng với i = n.

+ Giả sử điều này cũng đúng với n + 1 *(thế n + 1 vào vị trí của n)*

$$\Rightarrow i = n+1;\ s = \frac{(n+1)(n+1+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \text{(luôn đúng)}$$

Do đó, chúng ta đã chứng minh được giá trị của i và s luôn thỏa mãn công thức đã đưa ra. Và khi vòng lặp while kết thúc, số lần lặp sẽ là 10 nên i = 10 => tiepTuc = 10 {tiepTuc = i} => đpcm.

Câu 8: Xét khai triển Newton $(x + 3y - 5z)^{12}$

a. Tìm hệ số của $x^2y^7z^3$.

b. Có bao nhiêu hệ số trong khai triển trên.

Giải

a. **Cách 1:** Áp dụng công thức tính nhị thức Newton $(a+b)^n = C_n^i a^{n-i} b^i$

$$(x + 3y - 5z)^{12} = C_{12}^{10} x^2 (3y - 5z)^{10} = C_{12}^{10} x^2 C_{10}^{3} (3y)^7 (-5z)^3$$

Vậy hệ số cần tìm là $C_{12}^{10} C_{10}^{3} 3^7 (-5)^3$ = -2165130000.

Cách 2: Áp dụng $\boxed{(a_1 + a_2 + \ldots + a_k)^n = \sum_{n_1+n_2+\ldots+n_k=n} \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!} a_1^{n_1} a_2^{n_2} \ldots a_k^{n_k}}$

Số hạng chứa $x^2y^7z^3$ là: $\frac{12!}{2!.7!.3!} x^2.(3y)^7.(-5z)^3 = \frac{12!}{2!.7!.3!}.3^7.(-5)^3.x^2.y^7.z^3$

Hệ số cần tìm là $\frac{12!}{2!.7!.3!}.3^7.(-5)^3$ = -2165130000.

b. Số hệ số của khai triển trên ứng với **số nghiệm nguyên không âm của phương trình $x_1 + x_2 + x_3 = 12$** do với mỗi cặp gồm $x_1,\ x_2,\ x_3$ lại có một khai triển $x^{x_1} y^{x_2} z^{x_3}$ tương ứng. Vậy kết quả là C_{12+2}^{2}

GIẢI ĐỀ CUỐI KÌ TOÁN RỜI RẠC HỌC KÌ 2 - K22

ĐẠI HỌC GIAO THÔNG VẬN TẢI THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH **Mã đề thi:** 0033	**ĐỀ THI KẾT THÚC HỌC PHẦN** **Tên học phần:** Toán rời rạc **Mã học phần:** 122002 **Số TC:** 02 **Thời gian:** 60 phút **Hệ:** Đại học **Trưởng BM:** TS. Lê Văn Quốc Anh

Câu 1: (2 điểm) Đếm số mật khẩu gồm 10 kí tự lấy từ tập A = {a, b, c, d, e, 1, 2, 3, 4, 5} sao cho:

a. Ký tự đầu tiên không phải là chữ số.

b. Có ít nhất một chữ số.

Giải:

a/ Giả sử mật khẩu cần tìm có dạng $m_1m_2m_3m_4m_5m_6m_7m_8m_9m_{10}$ $(m_i \in A)$.

- Theo đề bài, m_1 không là chữ số → có 5 cách chọn m_1.
- Số cách chọn 9 kí tự còn lại tuân theo Chỉnh hợp lặp. Vì trong 9 vị trí, mỗi vị trí có 10 cách chọn, nên số cách chọn cho 9 ký tự còn lại là 10^9 cách.
- Vậy số mật khẩu theo yêu cầu bài toán là $\mathbf{5.10^9}$ (mật khẩu).

b/ Mỗi ký tự trong mật khẩu có thể chọn bất kỳ ký tự nào từ tập A, tức là 10 lựa chọn cho mỗi ký tự. Do đó, tổng số mật khẩu có thể có là: $\mathbf{10^{10}}$ (mật khẩu).

- Nếu không có chữ số, thì mỗi ký tự trong mật khẩu phải là một ký tự chữ, tức là có 5 lựa chọn cho mỗi ký tự. Vậy số mật khẩu không có chữ số là: $\mathbf{5^{10}}$ (mật khẩu).
- **Số mật khẩu có ít nhất một chữ số: $\mathbf{10^{10} - 5^{10}}$** (mật khẩu).

Câu 2: (2.5 điểm) Cho tập A = {1, 2, 3, 4, ..., 19}

a. Tìm số tập con khác rỗng của A.

b. Tìm số tập con của A chỉ chứa các số lẻ.

c. Giả sử B = {{1, 4, 5, 7}, {1, 3, 5, 7}, {3, 4, 7, 9}}. Tìm sup B và đếm số chặn trên của B.

d. Hãy chứng tỏ thứ tự (P(A), ⊂) không toàn phần.

Giải:

a/ Do tập A có 19 phần tử, vậy số tập con khác rỗng của A là $\mathbf{2^{19} - 1}$ (phần tử).

b/ Số số lẻ trong tập A: $\frac{19-1}{2}+1 = 10$ (số). Vậy số tập con của A chỉ chứa các số lẻ là: $\mathbf{2^{10} - 1}$ (phần tử) (-1 vì loại đi tập rỗng).

(Tính số số hạng có trong dãy = [(Số hạng lớn nhất của dãy - số hạng bé nhất của dãy)/ khoảng cách giữa hai số hạng liên tiếp trong dãy] + 1)

c/ Để tìm sup B, ta dùng phép hợp 3 tập con trong B, và đó cũng chính là sup B.

- Giả sử $B_1 = \{1, 4, 5, 7\}$, $B_2 = \{1, 3, 5, 7\}$, $B_3 = \{3, 4, 7, 9\}$, và $B_1, B_2, B_3 \in B$.
- Ta có: $\forall B_1, B_2\ldots, B_n \in B$, $i = 1, \ldots, n$: Sup $\{B_1, \ldots, B_n\} = B_1 \cup \ldots \cup B_n$.

  ⇨ Sup B = {1, 3, 4, 5, 7, 9}.
- **Giả sử xét B ⊂ A.**
- Chặn trên của B là tập con của A = {1, 2, 3,…, 19}mà **tất cả các phần tử trong supremum** {1, 3, 4, 5, 7, 9} đều phải có mặt trong tập con đó. Chặn trên của B có thể là supB hoặc rộng hơn supB, miễn sao chặn trên này phải thuộc vào tập A. (vì theo định nghĩa, supB là phần tử nhỏ nhất trong tập các chặn trên).

- Vì thế, sau khi chọn supB, ta có thể tự do chọn các phần tử từ các phần tử còn lại trong A, để trở thành chặn trên của B, tức là {2, 6, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19}.
- Số chặn trên của B chính là số cách chọn các tập con từ A MÀ KHÔNG KỂ CÁC PHẦN TỬ trong Sup B, gồm các phần tử kể trên, tổng cộng có 13 phần tử. **Vậy số chặn trên của B là 2^{13}.**

d/ ***Thứ tự không toàn phần*** *có nghĩa là không phải mọi cặp tập con đều có thể so sánh với nhau, tức là không phải với mọi cặp tập con X, Y $\in$ P(A), luôn có X $\subset$ Y hoặc Y $\subset$ X.*

- Ví dụ, chọn 2 tập con của A: X = {1, 2}, Y = {3, 4}
- Ta thấy rằng X không phải là tập con của Y và ngược lại. Do đó, không phải cặp nào trong P(A) cũng có thể so sánh với nhau, vì vậy thứ tự (P(A), ⊂) không phải là toàn phần (đpcm).

Câu 3: (2 điểm) Cho ánh xạ f: $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ xác định như sau: f(x) = $\begin{cases} 3x^2, x < -1 \\ 3, -1 \le x \le 1 \\ -x+3, x > 1 \end{cases}$

a. Cho biết f có là đơn ánh, song ánh hay toàn ánh không? Vì sao?
b. Thu hẹp tập nguồn hoặc đích để f là **đơn ánh.**

Giải:

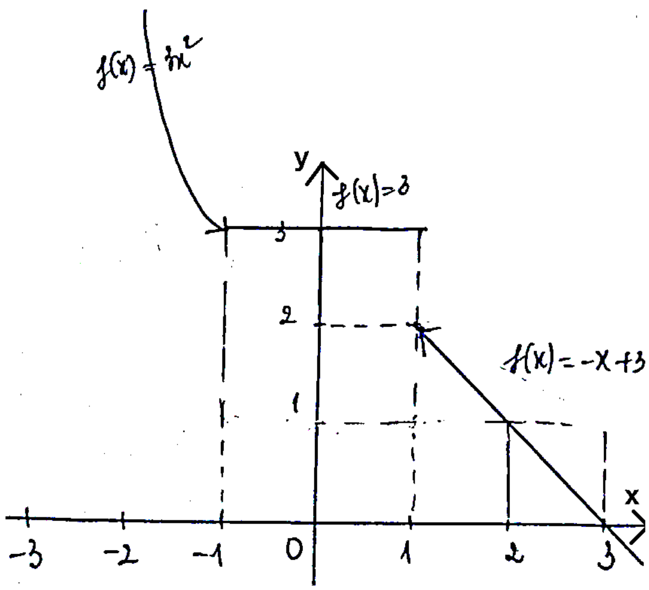
a/ - Xét đơn ánh:

Đơn ánh: Một ánh xạ f là đơn ánh nếu $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ với mọi $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$.

- Với $x < -1$: $f(x) = 3x^2$. Đây là hàm bậc hai, không đơn ánh vì $f(x_1) = f(x_2)$ khi $x_1 = -x_2$ (ví dụ $f(-2) = f(2) = 12$).
- Với $-1 \le x \le 1$: $f(x) = 3$, đây là hàm hằng, không đơn ánh vì $f(x_1) = f(x_2)$ với mọi $x_1, x_2 \in [-1, 1]$.
- Với $x > 1$: $f(x) = -x + 3$, là hàm bậc nhất và đơn ánh.

Kết luận: f **không phải đơn ánh** vì $f(x)$ không thoả mãn tính chất trên cho toàn bộ miền giá trị.

- Xét toàn ánh: **f là toàn ánh** vì f(x) phủ toàn bộ tập $\mathbb{Z}$.
- Vậy **f không song ánh.**



b/ Để f là đơn ánh, ta thu gọn tập đích như sau: $f(x) \in \mathbb{Z} \setminus [-1,1]$.

Câu 4: (2 điểm) Hãy giải thích có bao nhiêu quan hệ tương đương trên A = {1, 2, 3, 4, 5, 6} sao cho:

a. Có đúng 2 lớp tương đương, mỗi lớp 3 phần tử;

b. Có một lớp tương đương 4 phần tử.

Giải:

Số lượng quan hệ tương đương trên tập A chính là số cách phân chia tập A thành các lớp tương đương (tức là **số cách phân hoạch tập A**).

- **a/ Đây là bài toán phân chia tập A = {1, 2, 3, 4, 5, 6} thành 2 nhóm sao cho mỗi nhóm có 3 phần tử.** Đây chính là số cách phân chia tập 6 phần tử thành 2 nhóm, mỗi nhóm gồm 3 phần tử.
- Vậy số quan hệ tương đương thỏa ycbt: $\dfrac{C_6^3}{2} = 10$ (quan hệ).

✍ Chia cho 2 vì thứ tự các nhóm không quan trọng & để loại bỏ sự trùng lặp khi phân hoạch.

Sự trùng lặp không đến từ chỉnh hợp, mà từ cách chúng ta chọn lớp L_1 trong tổ hợp. Khi chọn 3 phần tử đầu tiên cho L_1, các phần tử còn lại mặc định thuộc L_2. Nhưng:

- Nếu chọn $L_1 = \{1, 2, 3\}$ và $L_2 = \{4, 5, 6\}$,
- Bạn cũng có thể chọn $L_1 = \{4, 5, 6\}$ và $L_2 = \{1, 2, 3\}$.

Hai cách chọn trên về mặt thứ tự lớp là khác nhau, nhưng thực chất là **một phân hoạch giống nhau.**

Do tổ hợp $\binom{6}{3} = 20$ đếm tất cả các cách chọn lớp L_1, và với mỗi cách chọn lớp L_1, lớp L_2 được xác định duy nhất. Tuy nhiên, cách đếm này:

- Bao gồm cả hai thứ tự giữa L_1 và L_2 (như ví dụ trên),
- Nghĩa là mỗi phân hoạch thực tế bị đếm **2 lần.**

✍ **Vì thế ta cần chia cho 2.**

b/ Nếu ta có một lớp tương đương có 4 phần tử, thì lớp còn lại sẽ chứa 2 phần tử (hoặc 2 lớp, mỗi lớp 1 phần tử). Tức là tập A sẽ được chia thành một lớp có 4 phần tử và phần còn lại có 2 phần tử.

Số cách để chọn 4 phần tử từ 6 phần tử là: $C_6^4 = 15$

Vậy có **15** quan hệ tương đương thỏa ycbt.

Câu 5: (1.5 điểm) Tìm tất cả các dạng chuẩn tắc tối thiểu của biểu thức sau:

$$\left(xz \vee y\bar{z} \vee x\bar{t}\right)xyt \vee yz \vee zt \vee xt$$

Giải:

- Ta có

$$\left(xz \vee y\bar{z} \vee x\bar{t}\right)xyt \vee yz \vee zt \vee xt = xyzt \vee xy\bar{z}t \vee \underbrace{0}_{x\bar{t} \wedge xyt;\ \bar{t} \wedge t = 0} \vee yz \vee zt \vee xt$$

$$= xyt \vee yz \vee zt \vee xt$$

- **Bước 1:** Vẽ kar(f)

	$x\bar{y}$	xy	$\bar{x}y$	$\bar{x}\bar{y}$
$z\bar{t}$		1	1	
zt	1	1	1	1
$\bar{z}t$	1	1		
$\bar{z}\bar{t}$				

- **Bước 2:** Các tế bào tối đại là

	$x\bar{y}$	xy	$\bar{x}y$	$\bar{x}\bar{y}$
$z\bar{t}$		1	1	
zt		1	1	
$\bar{z}t$				
$\bar{z}\bar{t}$				

Cell 1: yz

	$x\bar{y}$	xy	$\bar{x}y$	$\bar{x}\bar{y}$
$z\bar{t}$				
zt	1	1	1	1
$\bar{z}t$				
$\bar{z}\bar{t}$				

Cell 2: zt

	$x\bar{y}$	xy	$\bar{x}y$	$\bar{x}\bar{y}$
$z\bar{t}$				
zt	1	1		
$\bar{z}t$	1	1		
$\bar{z}\bar{t}$				

Cell 3: xt

- **Bước 3:** Toàn bộ biểu đồ đã bị phủ bởi các tế bào tối đại, do đó đây là các tế bào buộc phải chọn (vì mỗi tế bào tối đại đều có ít nhất 1 ô chỉ thuộc một tế bào tối đại).
- **Bước 4:** Dạng tuyển chuẩn tắc tối thiểu là: yz ∨ zt ∨ xt.

Lưu ý: Tác giả đã cố gắng giải các bài tập sao cho hợp lý nhất, tuy nhiên một số lời giải vẫn có thể chưa chính xác vì một số lý do nào đó. Vì thế vui lòng không hoàn toàn dựa theo mà hãy đọc lại và kiểm chứng!