CHƯƠNG 7. BÀI TOÁN LUỒNG CỰC ĐẠI (MAX FLOW PROBLEM)

Contents

7.1 Bài toán luồng cực đại

- Xét một hệ thống đường ống dầu. Trong đó các ống nối từ hệ thống cấp trung tâm đến bể chứa. Lưu lượng dầu chảy được qua các ống là khác nhau do tiết diện ống khác nhau. Cần phải tìm luồng dầu lớn nhất có thể bơm từ nguồn vào bể chứa.
- Trên một mạng máy tính cho trước, làm sao để truyền dữ liệu với tốc độ cao nhất giữa 2 nút mạng?
- Cho trước một mạng giao thông kết nối các thành phố. Làm thế nào để khai thác tối đa công suất vận chuyển của nó?
- Xác định cường độ lớn nhất của dòng vận tải giữa hai nút của một bản đồ giao thông. Bài toán luồng cực đại chỉ ra đoạn đường đông xe nhất.

Mạng	Đỉnh	Cung	Luồng
trạm giao dịch, máy tính, vệ tinh	cáp nối, cáp quang,	voice, video, packets	
mạng điện	cổng, registers, processors	dây dẫn	dòng điện
cơ khí	joints	rods, beams, springs	heat, energy
thuỷ lợi	hồ chứa, trạm bơm, nguồn nước	đường ống	dòng nước, chất lỏng
tài chính	nhà băng	giao dịch	tiền
giao thông	sân bay, ga tàu, giao lộ	đường cao tốc, ray, đường bay	hàng hoá, phương tiện, hành khách
hoá học	sites	bonds	energy

7.2 Mạng (Network)

- Mạng là đồ thị có hướng G = (V, E):

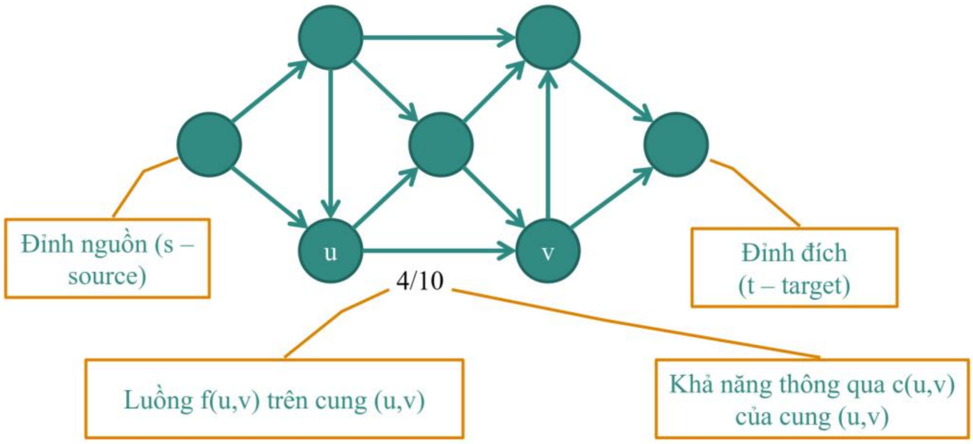
+ Có duy nhất **một** đỉnh *s* **không** có cung đi vào *(chỉ có cung đi ra)* gọi là ***đỉnh phát*** (nguồn) (source) và duy nhất **một** đỉnh *t* **không** có cung đi ra *(chỉ có cung đi vào)* gọi là ***đỉnh thu*** (đích) (target, sink).

+ **Có trọng số,** cụ thể:

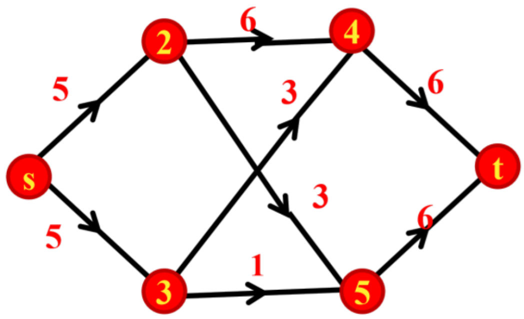
* Mỗi cung *(u, v)* của *G* được gắn với một số không âm *c(u, v)* được gọi là ***khả năng thông qua*** *(băng thông)* của cung *(u, v)*.

* Mỗi cung *(u, v)* được gắn 2 số không âm, thì số đầu tiên *(số nhỏ hơn)* được gọi là ***luồng f(u, v)*** trên cung *(u, v)*, số thứ hai *(số lớn hơn)* được gọi là ***khả năng thông qua c(u, v)*** của cung *(u, v)*.

Giá trị *f(u, v)* được gọi là ***lưu lượng thực*** của luồng **(net flow)** từ đỉnh u đến đỉnh v.



Ví dụ: Một ống cấp nước có thể dẫn tối đa lượng nước là $10m^3$, lượng nước hiện đang chảy trong ống là $4m^3$. Ta có f = 4, c = 10 (như hình trên).



Khả năng thông qua: $c_{s3} = 5$, ...

- Ta quy ước nếu mạng *không có cung (u, v)* thì ta thêm vào cung (u, v) với khả năng thông qua c[u, v] = 0.

7.3 Luồng trên mạng

- Trong lý thuyết đồ thị, một **luồng trên mạng**, thường được gọi tắt là **luồng**, là một cách gán các luồng (dòng chảy) cho các cung của một đồ thị có hướng, trong đó mỗi cung có một **khả năng thông qua**, sao cho dung lượng luồng qua một cung không vượt quá khả năng thông qua của nó.

- Giả sử có mạng *G (V, E, s, t)*

- Ánh xạ *f:* V × V → $\mathbb{R}^+$ *(Xem lại định nghĩa tích Descartes: một đỉnh thuộc V có thể chọn bắt cặp với các đỉnh khác v' cũng thuộc V tạo thành một cung e = (v, v'), vì vậy ta có V × V)* được gọi là một luồng trên mạng G [Luồng *f* trong mạng *G*=(*V*,*E*) là phép gán số *f*(*e*) cho mỗi cung *e* (*f*(*e*) được gọi là luồng trên cung *e*)] nếu thỏa 2 điều kiện:

1/ Cân bằng luồng (Flow Conversion): Với mọi đỉnh v thuộc *V* \ *{s,t}*

$$\sum_{e \in E^-(v)} f(e) = \sum_{e' \in E^+(v)} f(e')$$

Tổng luồng trên các cung vào đỉnh v bằng tổng luồng trên các cung đi ra khỏi đỉnh v.

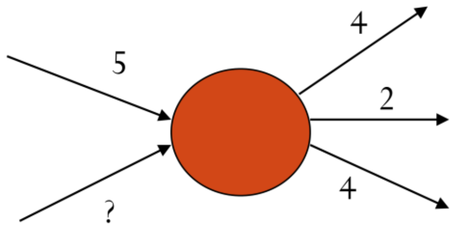
trong đó $E^-(v)$ và $E^+(v)$ tương ứng là tập các cung đi vào và đi ra khỏi đỉnh *v*.

Hoặc ta có thể viết:

$$\sum_{x \in V} f(x,v) = \sum_{y \in V} f(v,y)$$

Với (x, v) là tập các cung đi vào đỉnh v, (v, y) là tập các cung đi ra đỉnh v; x là đỉnh thuộc cung đi vào v, y là đỉnh thuộc cung đi ra v; *x, v, y* ∈ *V*.

Ví dụ:



$\Sigma f_{ra} = 10 \rightarrow \Sigma f_{vào} = 10 = 5 + ? \rightarrow ? = 5.$

2/ Giới hạn luồng trên cung (Capacity Constraint): ***$0 \le f(u,v) \le c(u,v)$***

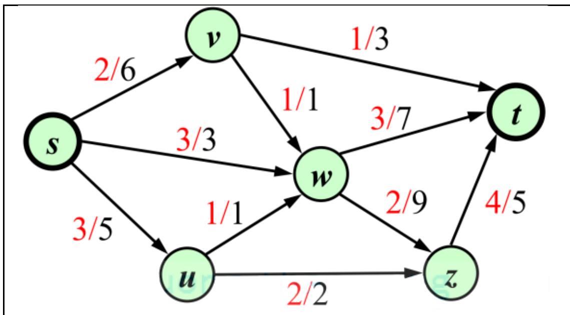
Luồng trên mỗi cung thuộc E không vượt quá khả năng thông qua của nó.

- **Giá trị luồng *f*** được xác định là:

$$\mathbf{val(f) = |f| = \sum_{x \in V} f(x,s) \; = \sum_{x \in V} f(y,t)}$$

Giá trị** của **luồng** được xác định bởi **tổng lưu lượng thực từ đỉnh phát đến tất cả các đỉnh trong mạng**, và đúng bằng **tổng lưu lượng từ tất cả các đỉnh trong mạng đến đỉnh thu. (Ra khỏi nguồn bao nhiêu thì vào đích bấy nhiêu).

Ví dụ:



- Trong 2 số viết trên mỗi cung: *giá trị luồng* trên cung là số màu đỏ (bên trái), số còn lại là *khả năng thông qua* (bên phải).
- Các điều kiện 1) và 2) được thoả mãn => *f* là luồng trên mạng.
- Giá trị luồng là:

$$8 = f(s,v) + f(s,u) + f(s,w) = f(v,t) + f(w,t) + f(z,t)$$
$$= 2 \quad + 3 \quad + 3 \quad = 1 \quad + 3 \quad + 4$$

7.4 Bài toán luồng cực đại

- Luồng trong mạng G được gọi là luồng cực đại ***(f*)*** nếu trong số tất cả các luồng trong mạng G nó là luồng có giá trị lớn nhất ***(val(f*)$_{max}$).***

7.4.1 Lát cắt

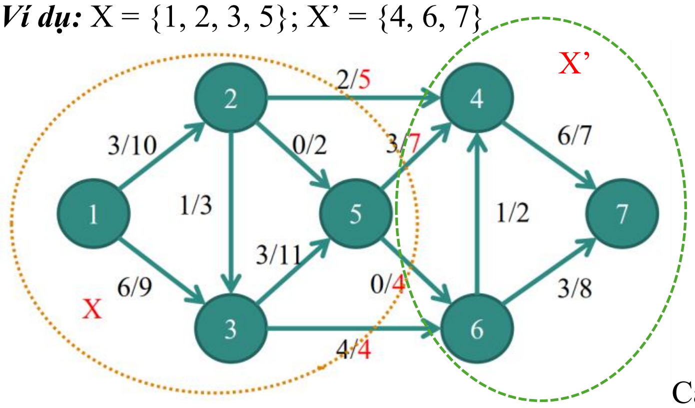
- Một lát cắt là một cách phân chia tập hợp các đỉnh của một đồ thị thành *hai tập hợp con* ***không giao nhau.***

Lát cắt (X, X') là **phân hoạch của tập V** thỏa mãn: **$s \in X$; $X' = V \setminus X$; $t \in X'$**

$X \cap X' = \varnothing$; $X \cup X' = V$.

- *Tập hợp cắt* của lát cắt là ***tập hợp các cung*** có hai đầu nằm ở hai tập hợp con khác nhau. Một cung của đồ thị là bị cắt nếu nó nằm trong tập hợp cắt.

Ví dụ: X = {1, 2, 3, 5}; X' = {4, 6, 7}



Các cung (2,4), (5,4), (5,6), (3,6) thuộc tập hợp cắt.

- *Tập hợp cắt* chỉ gồm các cung ***từ tập hợp con chứa đỉnh phát tới tập hợp con chứa đỉnh thu** (từ tập X đến tập X', không có chiều ngược lại).*

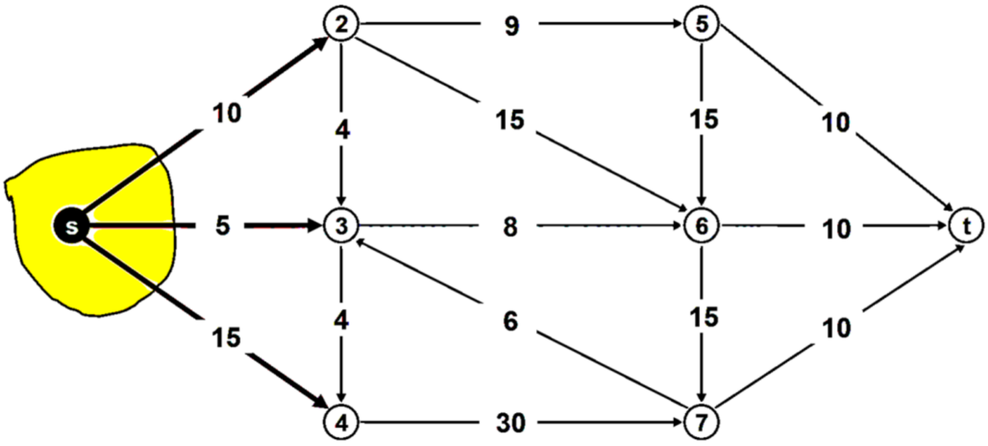
- *Khả năng thông qua* của một lát cắt s-t được định nghĩa là **tổng khả năng thông qua của các cung trong *tập hợp cắt*.**

$$C(X, X') = \sum_{u \in X,\ v \in X'} c(u, v)$$

Ví dụ:

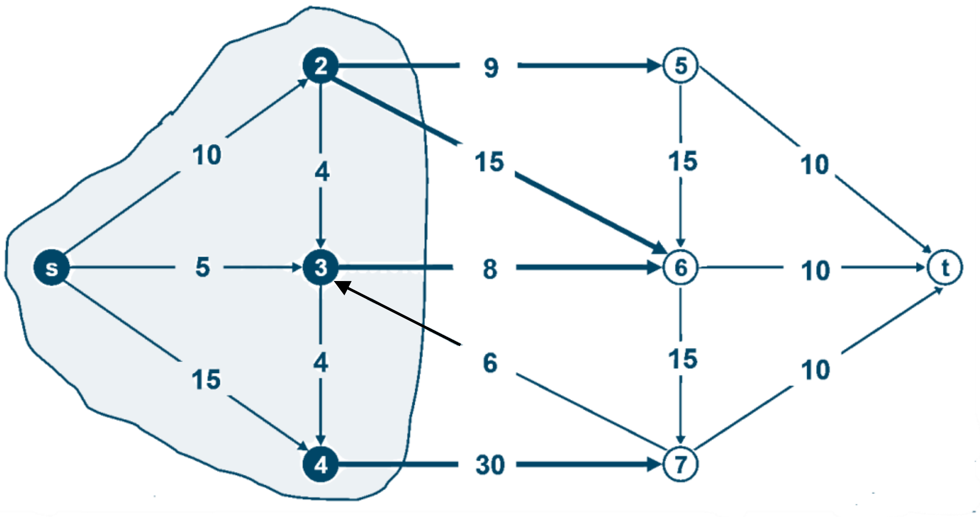
a) Từ hình trên ta có: C (X, X') = 5 + 7 + 4 + 4 = 20.

b)

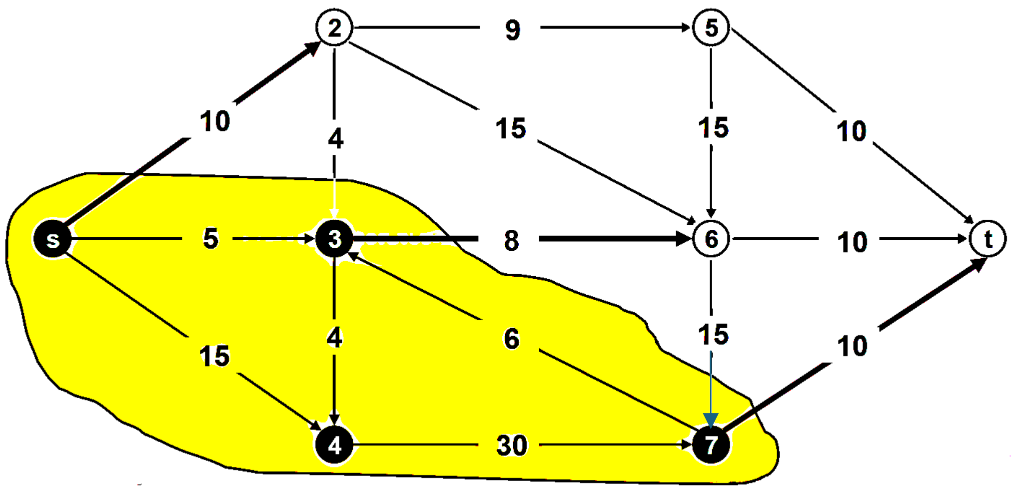


C (X, X') = 10 + 5 + 15 = 30.

c) Lát cắt (X_1, X'_1), X_1 = {s, 2, 3, 4}, X'_1 = {5, 6, 7, t) có khả năng thông qua 62:



d) Lát cắt (X_2, X'_2), X_2 = {s, 3, 4, 7}, X'_2 = {2, 5, 6, t) có khả năng thông qua 28:



- Một **lát cắt** là một cách chia các nút mạng thành hai tập X và X', sao cho s thuộc tập X và t thuộc X'. Do đó, trong một đồ thị có $\mathbf{2^{|V|-2}}$ lát cắt có thể.

- Lát cắt nhỏ nhất (hẹp nhất/ cực tiểu) là lát cắt với <u>khả năng thông qua nhỏ nhất.</u>

- Bổ đề 1: Giá trị của mọi luồng f trong mạng luôn nhỏ hơn hoặc bằng khả năng thông qua của lát cắt (X, X') bất kỳ trong nó: val(f) ≤ c(X, X').

Từ bổ đề 1 suy ra:

Hệ quả: Giá trị luồng cực đại trong mạng không vượt quá khả năng thông qua của lát cắt hẹp nhất trong mạng.

→ Giả sử f là luồng, còn (X, X') là lát cắt. Nếu **val(f) = cap(X, X')**, thì f là luồng cực đại còn (X, X') là lát cắt hẹp nhất.

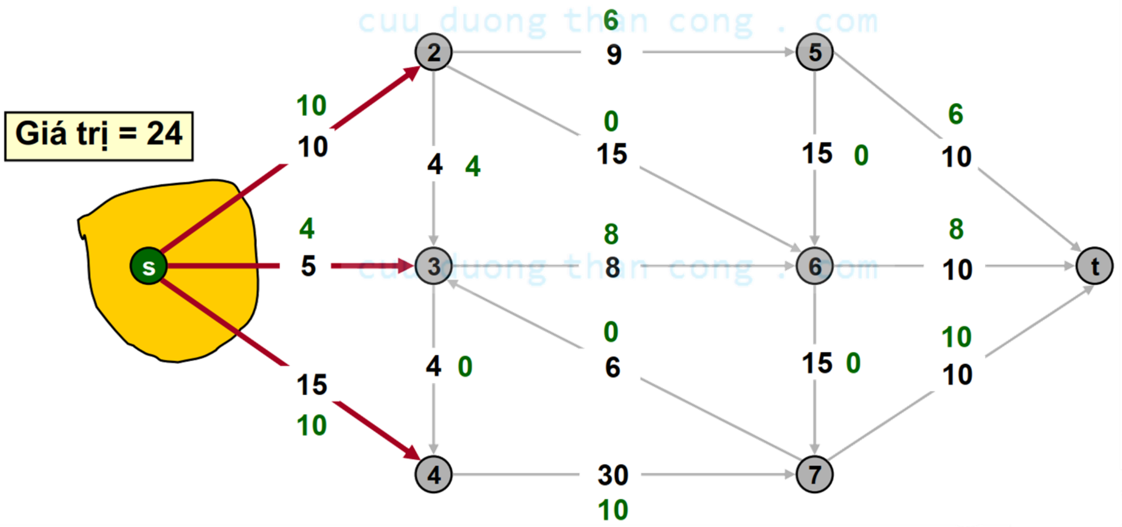
- Bổ đề 2: Giả sử *f* là luồng, và (*X, X'*) là lát cắt. Khi đó giá trị luồng chảy qua lát cắt chính bằng giá trị của luồng:

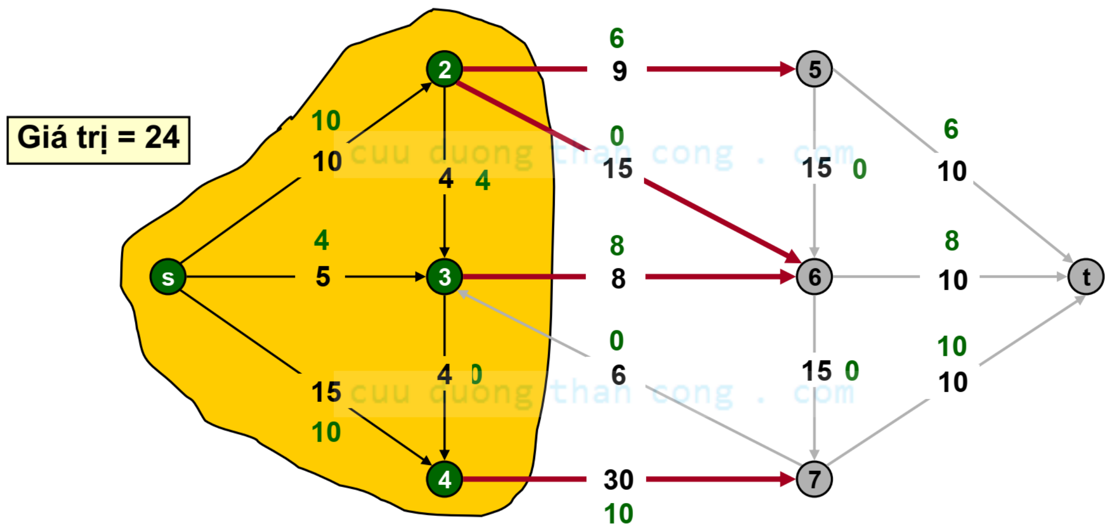
$$\sum_{e \in X \to X'} \mathbf{f(e)} - \sum_{e \in X \to X'} \mathbf{f(e)} = \sum_{e \in E^{+}(s)} \mathbf{f(e)} = \mathbf{val(f)}$$

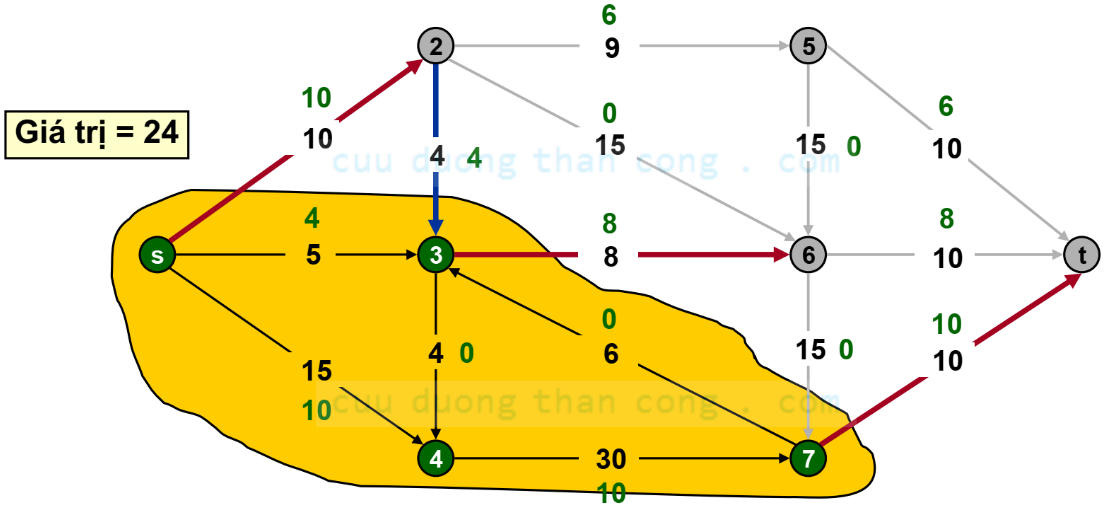
trong đó $X \to X' = \{(v, w) \in E: v \in X, w \in X'\}$

$X' \to X = \{(v, w) \in E: v \in X', w \in X\}$

$E^{+}(s)$ là tập các cung đi ra khỏi đỉnh s (đỉnh nguồn)







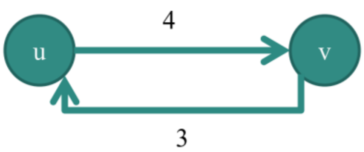
7.4.2 Đường tăng luồng – Đồ thị tăng luồng

❖ **Đồ thị tăng luồng (Mạng/ Luồng thặng dư): "thu lại" luồng đã gửi.**

- Giả sử có mạng G (V, E, C, s, t) với luồng *f*.
- Đồ thị tăng luồng G' (V, E', W) được xây dựng trên G và *f* với 3 trường hợp sau *(có thể ký hiệu đồ thị tăng luồng là G_f)*:

+ Trường hợp 1: *0 < f(u,v) < c(u,v)*

Cung (u,v) trên mạng G(V,E)



Hình thành 2 cung trên đồ thị tăng luồng G'(V,E',W):
- *(u,v)* với *w(u,v) = c(u,v)-f(u,v)*
- *(v,u)* với *w(v,u) = f(u,v)*

+ Trường hợp 2: *f*(u,v) = 0

Cung (u,v) trên mạng G(V,E)

Hình thành 1 cung trên đồ thị tăng luồng G'(V,E',W): w(u,v) = c(u,v)

+ Trường hợp 3: f(u,v) = c(u,v)

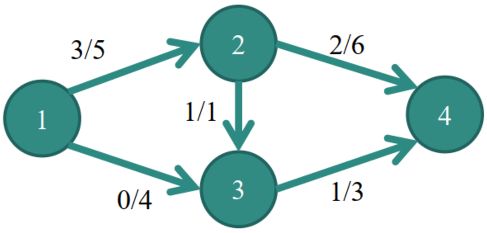
Cung (u,v) trên mạng G(V,E)

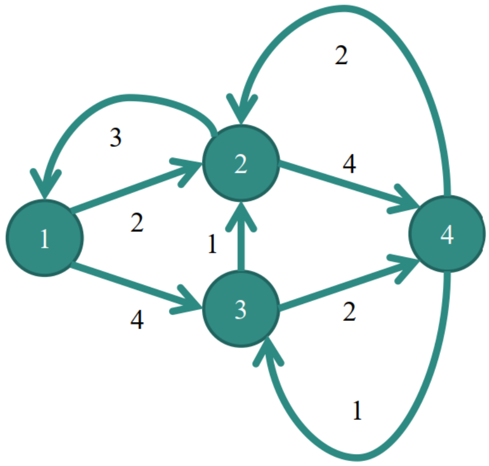
Hình thành 1 cung trên đồ thị tăng luồng G'(V,E',W): w(v,u) = f(u,v) = c(u,v)

Có thể hiểu đơn giản: Mượn bao nhiêu thì trả về bấy nhiêu (v, u), phần còn dư thì cho mượn tiếp (u, v).

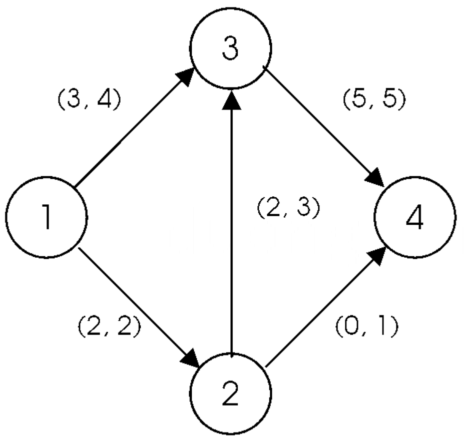
Ví dụ:

a) Mạng G (mỗi cung được gán 2 số thực) và đồ thị tăng luồng G_f tương ứng với luồng f.

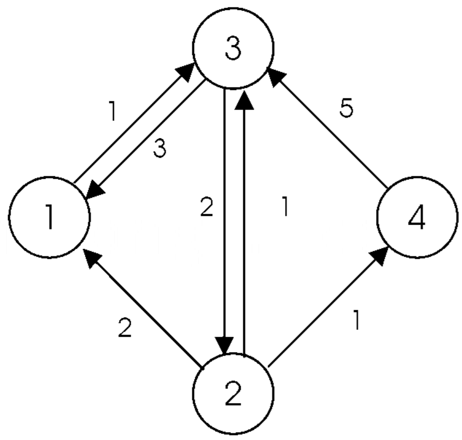




b)

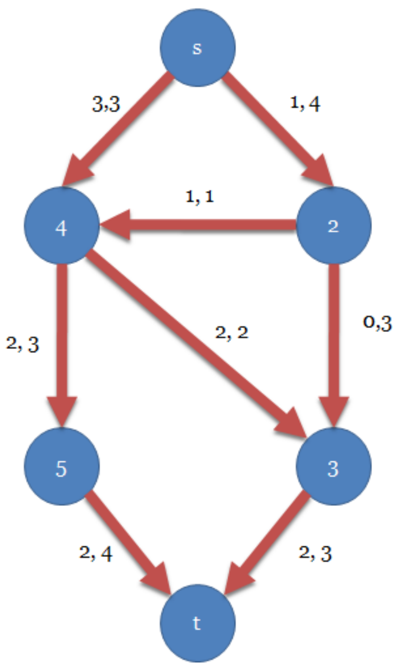


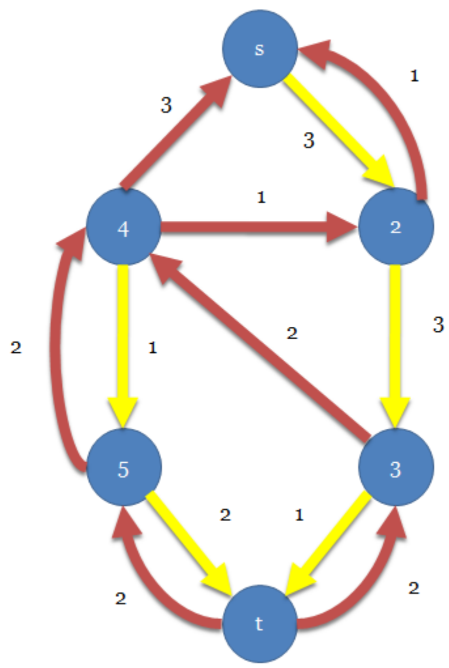
(a) Luồng ban đầu



(b) luồng thặng dư

c)





- Các cung của G_f *đồng thời cũng là cung của G* được gọi là ***cung thuận*** *(cung có cùng hướng với đồ thị ban đầu G)*, các cung còn lại được gọi là ***cung nghịch*** *(cung có hướng ngược lại với hướng của cung ban đầu thuộc đồ thị G)*. Đồ thị G_f được gọi là đồ thị tăng luồng.

Ví dụ: Từ hình c) ở đồ thị tăng luồng ta có:

+ Cặp đỉnh s, 2 (TH1): cung thuận là (s, 2) có |f| = 3, cung nghịch là (2, s) có |f| = 1.
+ Cặp đỉnh s, 4 (TH3): cung thuận là (s, 4) có |f| = 0 *(không cần vẽ)*, cung nghịch là (4, s) có |f| = 3
+ …
(Cung thuận thể hiện màu vàng, cung nghịch thể hiện màu nâu).

- ***Ý nghĩa của đồ thị tăng luồng:*** *Xét lại ví dụ c)*
  - *Lấy ví dụ về bài toán nhà máy nước. Giả sử lượng nước hiện tại ở nhà máy là s, chuyển đến các hộ dân t.*
  - *Khả năng thông qua của các ống nước chính là khả năng thông qua của mỗi cung (c), lượng nước hiện tại đang được bơm đến các hộ dân là giá trị của luồng (f).*
  - *Đồ thị tăng luồng thể hiện rằng: Nếu ta tiếp tục tăng lượng nước bơm từ s sang t (tăng luồng) thì ta có thể tăng như thế nào? (Có thể hiểu: đồ thị tăng luồng thể hiện khả năng tăng luồng của các cung trong đồ thị)*
  - *Ví dụ xét cung (s, 4): lượng nước bơm đi hiện tại là 3, đúng bằng khả năng tối đa của đường ống. Vì vậy, nếu ta tiếp tục tăng lượng nước bơm vào ở ống này thì rõ ràng là không được (thể hiện bằng cung thuận |f| = 0), mà ta chỉ có thể rút ngược nước lại về s một lượng tối đa là 3 (thể hiện bằng cung nghịch |f| = 3).*
  - *Tương tự, xét cung (s, 2): lượng nước bơm đi hiện tại là 1, khả năng truyền nước tối đa của ống là 4. Vì thế nảy sinh 2 trường hợp để không vượt quá khả năng tối đa của ống:*
    - *1/ Tăng thêm lượng nước bơm từ s đến t thêm 3 (để tổng lượng nước bơm đi đúng bằng 4) (thể hiện bằng cung thuận |f| = 3).*
    - *2/ Rút lại lượng nước đang bơm đến t về s là 1 (thể hiện bằng cung nghịch |f| = 1).*

- Vậy giả sử ta đã có đồ thị tăng luồng G_f, mà ta muốn tiếp tục tăng luồng trên đồ thị này, thì việc này dựa trên thuật toán dưới đây.

❖ **Đường tăng luồng P_f:** Là ***mọi* đường đi** *từ nguồn s đến đích t* trên đồ thị tăng luồng G_f.
→ *Dùng các thuật toán liên quan DFS (s, t) & BFS (s, t) để tìm đường tăng luồng P_f, chính là tìm một đường đi từ đỉnh s đến đỉnh t.*
- Giá trị tăng của mỗi đường tăng luồng là ***trọng số nhỏ nhất*** trong các cung thuộc đường đi, ký hiệu là **d** *(Một số tài liệu khác ký hiệu là δ(P)).*

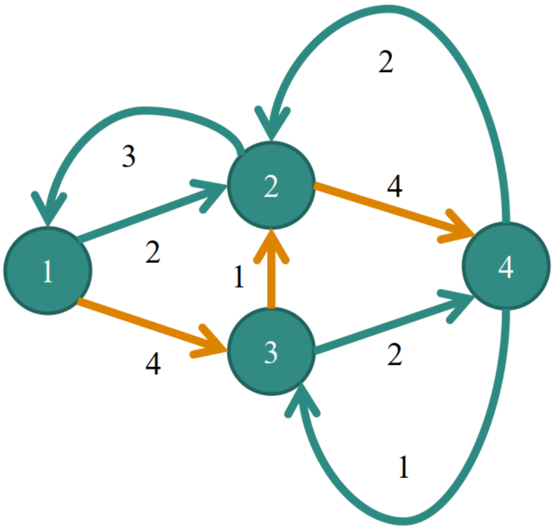
- Để **tăng luồng dọc theo đường P_f:** ta sẽ thêm d vào các cung trên đường P_f và thay đổi giá trị mạng thặng dư tương ứng theo quy tắc sau:

1. **f'(u, v) = f(u, v) - d**, nếu $(u, v) \in P_f$ là cung thuận.
2. **f'(u, v) = f(u, v) + d**, nếu $(u, v) \in P_f$ là cung nghịch.
3. **f'(u, v) = f(u, v)** nếu $(u, v) \notin P_f$.

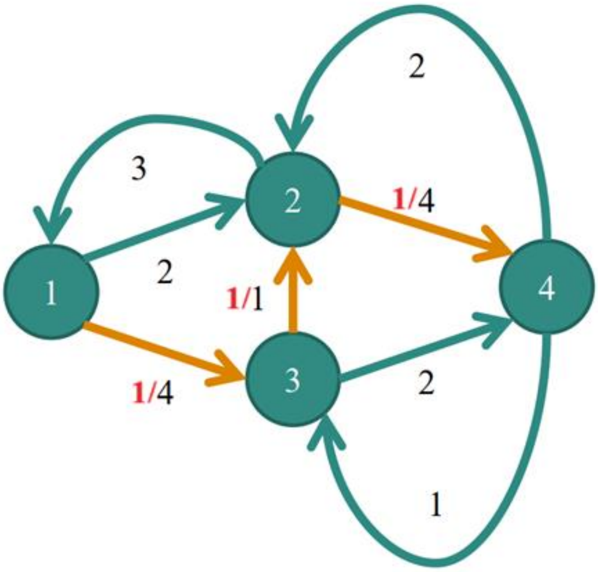
Hoặc ta có thể viết trên cung theo dạng (d/ giá_trị_luồng_f_hiện_tại_trên đồ thị) rồi thực hiện theo thuật toán ở đồ thị tăng luồng (xét 3 trường hợp) đã trình bày.

- Đường tăng luồng là cơ sở để tìm luồng cực đại f*.

Ví dụ:

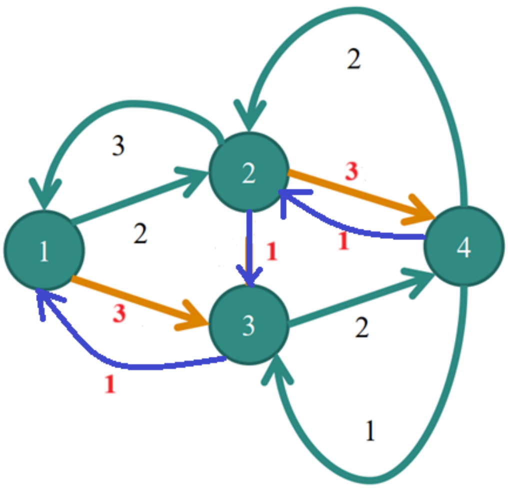


1, 3, 2, 4 là một đường tăng luồng với trọng số nhỏ nhất d = 1.
Viết giá trị d trước giá trị luồng của các cung thuộc đường tăng luồng như sau:

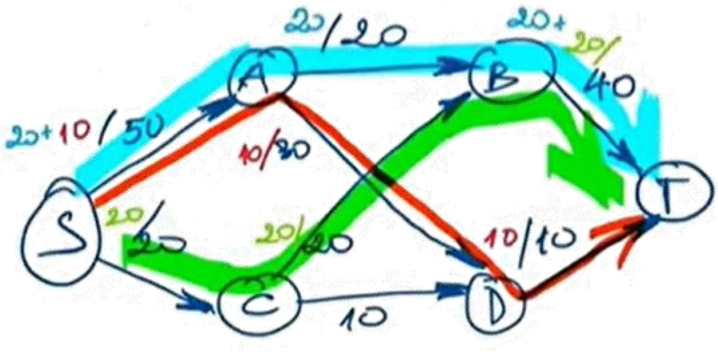


(Có thể hiểu: Giả sử đây là luồng nước chảy từ đỉnh 1 đến đỉnh 4, các cung (1,3), (2,3), (2,4) là các đường ống, vậy để tránh vỡ 1 trong 3 đường ống nước này, thì cần giới hạn lượng nước truyền vào của từng ống, cụ thể lần lượt là 4, 1, 4 (m^3). Nếu truyền lượng nước 4(m^3) vào hệ thống này, thì rõ ràng ống thứ 2 sẽ vỡ vì không chịu được luồng nước này. Do đó lượng nước tối đa mà đường đi này có thể truyền được là 1m^3 nước, hay ta có thể nói giá trị của đường tăng luồng cho mỗi cung chỉ là 1).

Thực hiện xét 3 trường hợp của đồ thị tăng luồng trên các cung thuộc đường tăng luồng. Ta được kết quả như sau:



- Ta có thể hiểu tìm luồng cực đại chính là đi tìm lượng nước lớn nhất có thể truyền được vào hệ thống ống nước từ nhà máy s đến các hộ dân t. Lượng nước tối đa này sẽ được phân bổ vào các đường đi từ s đến t, mà giới hạn của mỗi đường đi này chính là khả năng thông (giới hạn của đường ống nước) nhỏ nhất trong số các đường ống của đường đi này (khả năng thông nhỏ nhất trong số các cung thuộc đường tăng luồng).
- Ví dụ: Giả sử các đường ống này chưa truyền nước, tức giá trị luồng của mỗi cung bằng 0. Sau đây là giải thích hình dưới:



- *Bắt đầu xét đường đi đầu tiên là SADT (màu đỏ), nhận thấy luồng nước tối đa truyền được vào đường đi này chỉ là 10m³, nếu truyền quá lượng nước này thì AD sẽ vỡ ống nước. Vậy đến đây có thể hiểu vì sao ta lại chọn trọng số nhỏ nhất khi tìm đường tăng luồng.*
- *Sau đó nhận thấy có một đường đi khác cũng dẫn được nước từ S đến T: SCBT (màu xanh lá), và tương tự luồng nước tối đa được truyền vào đường đi này là 20m³.*
- *Vậy ta thấy lượng nước truyền từ S đến T tối đa hiện tại là 30m³. (nghĩa là một đường đi có thể truyền 10m³, một đường khác truyền được 20m³, vậy nhà máy có thể truyền đi tối đa 30m³ nước, sau đó luồng nước này được phân bổ các đường đi cho phù hợp với khả năng tối đa mà mỗi đường đi có được – như mô tả ở trên).*
- *Tiếp tục nhận thấy vẫn còn đường đi từ S đến T mà ống vẫn còn khả năng truyền thêm nước: SABT (Sau khi truyền 2 đường trên thì SA còn khả năng truyền được thêm 40m³, tương tự AB thì chưa xét nên vẫn 20m³, BT là 20m³). Nhận thấy AB và BT chỉ nhận được lượng 20m³ mà thôi, nên đường đi này chỉ bơm được vào luồng nước tối đa là 20m³.*
- *Tưởng rằng SCDT cũng truyền được nhưng 3 đường trên đã sử dụng hết khả năng truyền nước của ống SC và DT rồi, nên đến đây ta kết luận: lượng nước tối đa (chính là luồng cực đại) mà hệ thống ống này truyền được là 30 + 20 = 50m³.*

- Thực chất đi tìm đường tăng luồng chính là đi tìm xem ta có thể tăng thêm được lượng nước truyền đi từ nhà máy là bao nhiêu.

7.4.3 Định lý về luồng cực đại - lát cắt nhỏ nhất (Max-flow Min-cut Theorem) & Thuật toán Ford-Fulkerson

❖ **Định lý max-flow min-cut:**

▪ Trên một mạng bất kỳ, giá trị của luồng cực đại bằng khả năng thông qua của lát cắt cực tiểu.

▪ Định lý được Ford và Fulkerson chứng minh: Năm 1954 với đồ thị vô hướng, Năm 1955 với đồ thị có hướng.

▪ Giả sử f là một luồng trên **mạng G,** khi đó các phát biểu sau là tương đương:

1/ f là luồng cực đại.
2/ Đồ thị tăng luồng G_f không tồn tại đường tăng luồng.
3/ Val(f) = c(X, X’) với (X, X’) là lát cắt bất kỳ.

Chứng minh:

1⇒2

- Giả sử f là luồng cực đại. Chúng ta cần chứng minh rằng đồ thị tăng luồng G_f không tồn tại đường tăng luồng.

- *Chứng minh bằng lập luận phản đề (contrapositive): Nếu tìm được đường tăng thì f không là luồng cực đại.*

- Thực vậy, nếu tìm được đường tăng P_f, thì tăng luồng dọc theo P_f ta thu được luồng f' với giá trị lớn hơn.

- Điều này dẫn đến việc giá trị của luồng f có thể tăng lên, mâu thuẫn với giả thiết rằng f là luồng cực đại.

- Do đó, giả sử ngược lại là sai, và đồ thị tăng luồng G_f không tồn tại đường tăng luồng. ■

2 ⇒ 3

- Giả sử đồ thị tăng luồng G_f không tồn tại đường tăng luồng. Chúng ta cần chứng minh rằng Val(f) = c(X, X') với (X, X') là lát cắt bất kỳ.

- Không tồn tại đường tăng luồng: Vì không tồn tại đường tăng luồng trong G_f, nên tất cả các cung từ X đến X' đều đã đầy (không còn sức chứa) => $\sum_{u\in X,\, v\in X'} f(u,v) = \sum_{u\in X,\, v\in X'} c(u,v)$, và tất cả các cung từ X' đến X đều không có luồng nào có thể giảm bớt được => $\sum_{u\in X',\, v\in X} f(u,v) = 0$.

- Áp dụng bổ đề 2:

$$\sum_{u\in X,\ v\in X'} f(u,v) - \sum_{u\in X',\ v\in X} f(u,v) = \sum_{u\in X,\ v\in X'} c(u,v) = \mathbf{val(f)}\ ■$$

3⇒1

Theo Bổ đề 1, val(f) ≤ c(X, X') với mọi luồng f và với mọi lát cắt (X, X').

Vì vậy, từ đẳng thức val(f) = c(X, X') suy ra luồng f là luồng cực đại trong mạng. ■

❖ **Định lý đường tăng luồng:** Luồng là cực đại khi và chỉ khi không tìm được đường tăng luồng.

❖ **Thuật toán Ford-Fulkerson**

- Đầu vào: mạng G(V,E,s,t)
- Đầu ra: luồng cực đại trên G

begin

- Khởi tạo **f(u,v) = 0**, với *mọi (u,v) thuộc E. (Vì một mạng bất kỳ đều có ít nhất một luồng là luồng không); Giá trị cực đại của luồng* ***|f| = 0.***
- Trong khi *còn tồn tại đường tăng luồng* P_f **trên G_f:**

  Tăng luồng dọc theo P_f: tăng sluồng cho mạng theo đường tăng luồng đó.

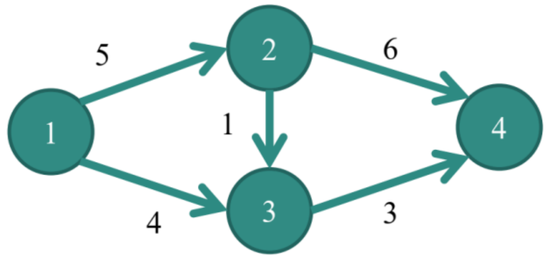
  |f| = |f| + d, với *d là trọng số nhỏ nhất trên P_f.*
- Return |f|.

end

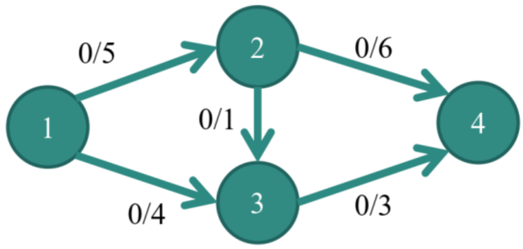
- Khi đã có luồng cực đại, xây dựng lát cắt nhỏ nhất của mạng.

- Luồng cực đại luôn không đổi và không phụ thuộc vào thứ tự chọn đường đi từ s đến t (đường tăng luồng). Vậy để ta tìm được luồng cực đại một cách nhanh chóng, ta cần lựa chọn đường tăng luồng có các trọng số lớn hơn các đường còn lại.

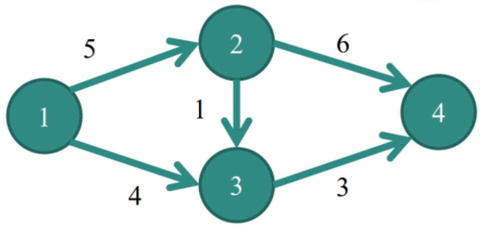
Ví dụ 1: Cho mạng G như sau



- Bước 1, khởi tạo *f (u, v)* = 0



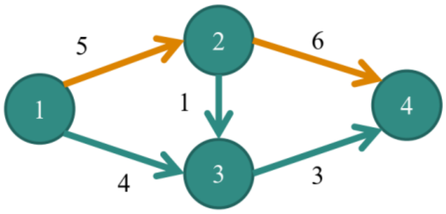
Mạng G với luồng 0 →



Đồ thị tăng luồng *Gf*

Bước 2, lặp lại quá trình tăng luồng

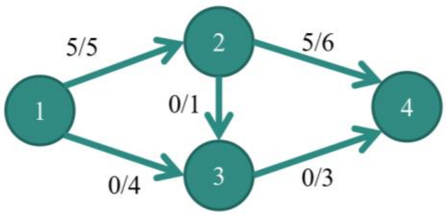
- Tìm một đường tăng luồng trên đồ thị tăng luồng G_f hiện tại (luồng 0). Giả sử chọn đường đi 1→2→4.



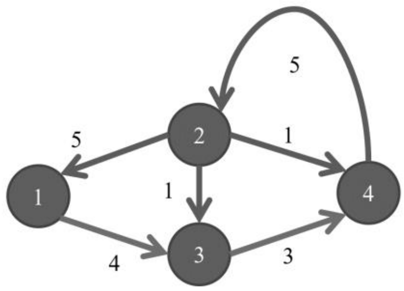
Đồ thị tăng luồng G_f

Trên đường đi này ta thấy trọng số nhỏ nhất là 5 ⇒ d = 5.

Ta tiến hành: trên mạng G tăng luồng thêm 5 trên các cung thuộc đường tăng luồng. Cập nhật giá trị của luồng cực đại theo công thức |f| = |f|+ d ⇔ |f| = 0 + 5.

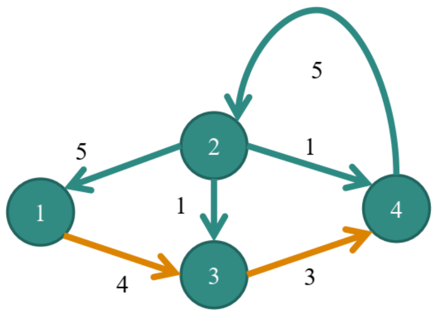


Mạng G với luồng 0 + 5 →



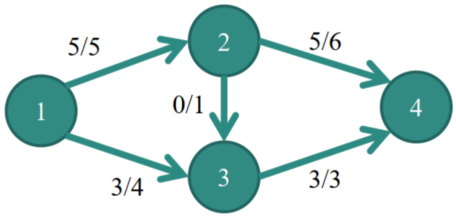
Đồ thị tăng luồng G_f mới

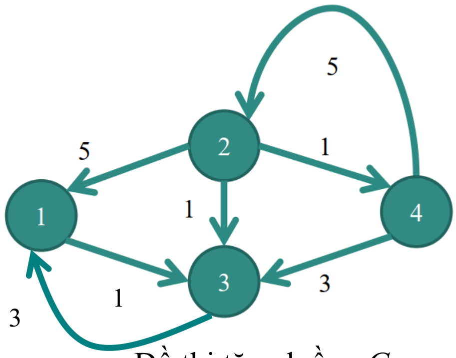
- Tìm một đường tăng luồng khác trên đồ thị tăng luồng mới (luồng 5). Giả sử chọn đường đi 1→3→4.



Đồ thị tăng luồng G_f

Trên đường đi này ta thấy trọng số nhỏ nhất là 3 ⇒ d = 3. Tiếp tục trên mạng G tăng luồng thêm 3 trên các cung thuộc đường tăng luồng. Cập nhật giá trị của luồng cực đại |f| = 0 + 5 + 3.

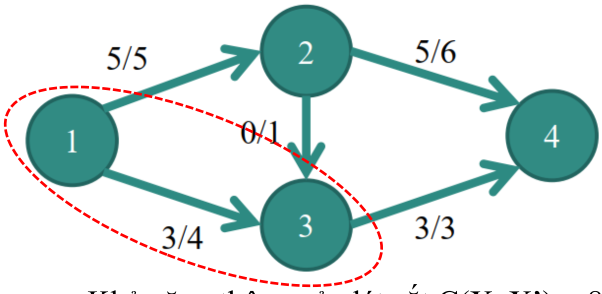




Mạng G với luồng 0 + 5 + 3 Đồ thị tăng luồng G_f

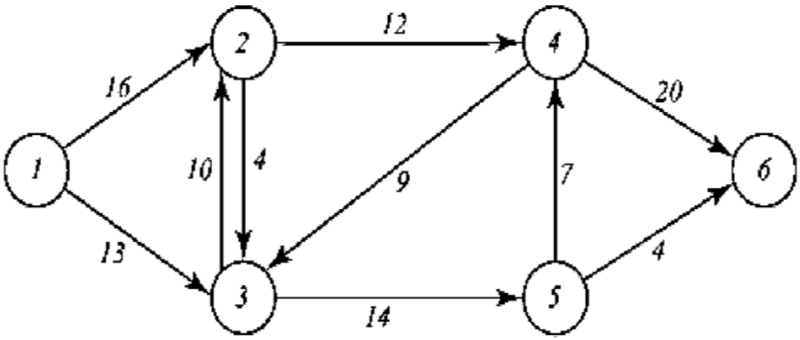
- Nhận thấy trên G_f không tồn tại đường tăng luồng, thuật toán kết thúc
- Giá trị luồng cực đại val(f) = 0 + 5 + 3 = 8. *Giá trị này cũng đúng với điều kiện 2 về luồng trên mạng (xem mục 7.3)*

- Lát cắt cực tiểu *(X, X) trên đồ thị tăng luồng G_f* với X = {1,3}, X' = {2,4}.

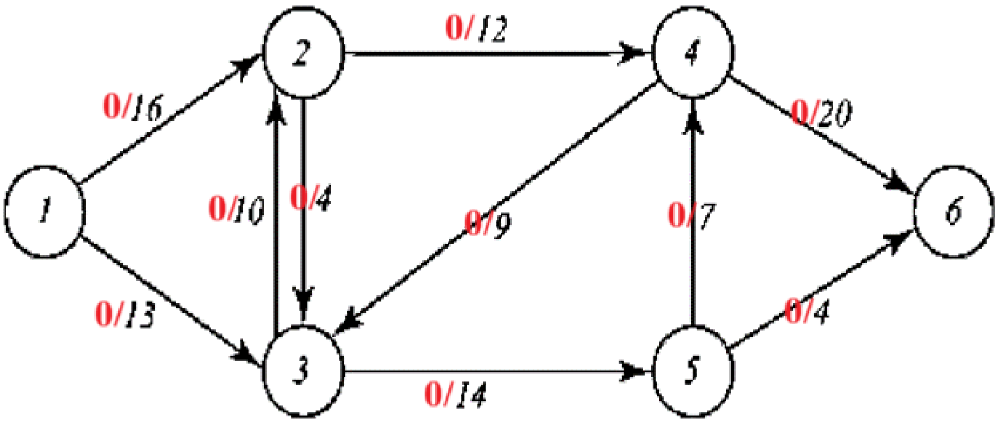


Khả năng thông của lát cắt C(X, X') = 8 = val (f).

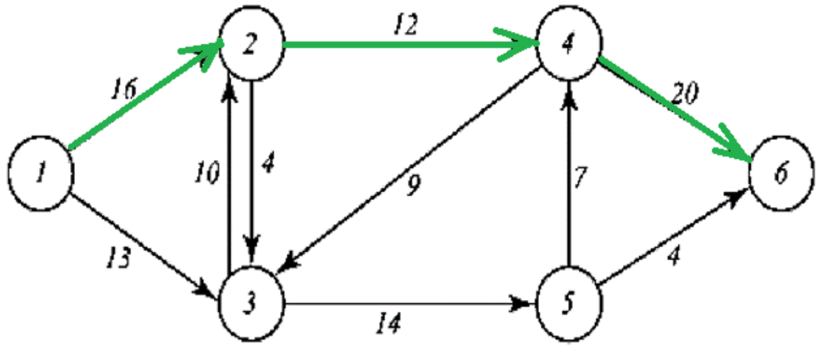
Ví dụ 2: Cho mạng như sau:



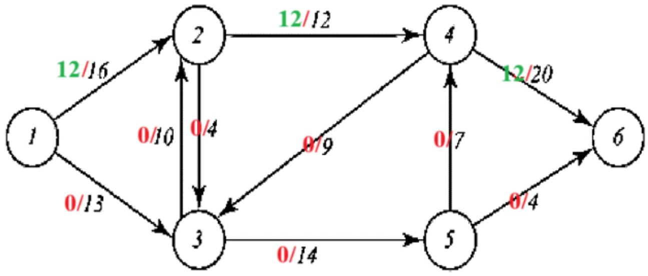
- Khởi tạo luồng f (u, v) = 0.



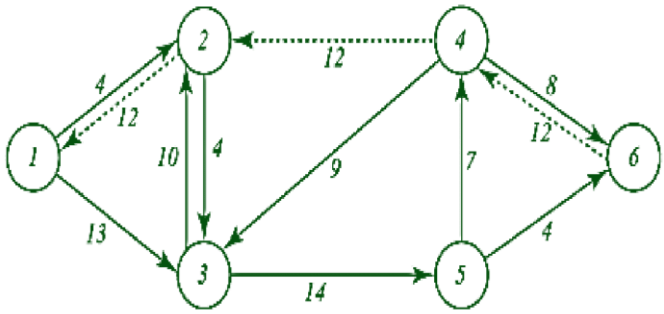
Ta có đồ thị tăng luồng chính là hình đề bài. Tìm đường đi từ đỉnh 1 đến đỉnh 6 trên đồ thị tăng luồng. Chọn 1→2→4→6.



Tiến hành cập nhật luồng của các cung thuộc P_f. Trọng số nhỏ nhất trên đường đi này là 12 → d = 12. Lúc này val(f) = 0 + 12.



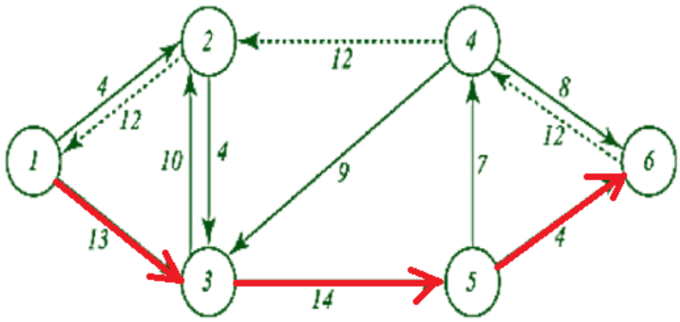
→



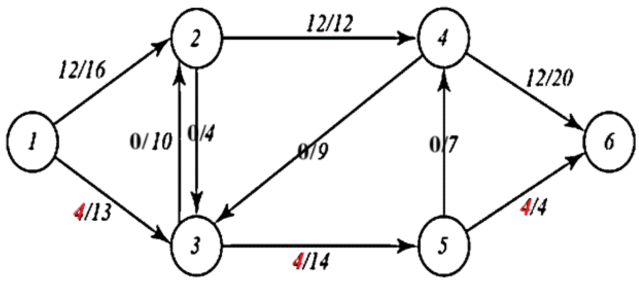
Mạng G với luồng 0 + 12

Đồ thị tăng luồng G_f mới

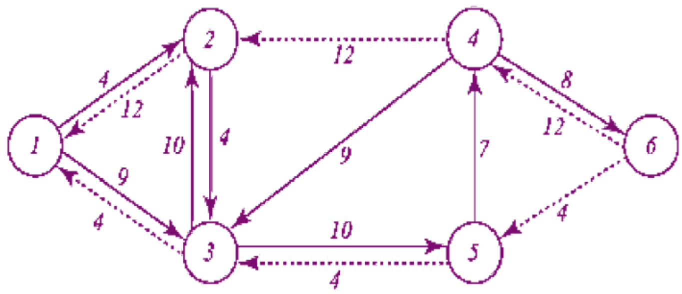
Trên đồ thị tăng luồng mới, tiếp tục tìm đường đi từ đỉnh 1 đến đỉnh 6. Chọn 1→3→5→6.



Tiến hành cập nhật luồng của các cung thuộc P_f. Trọng số nhỏ nhất trên đường đi này là 4 → d = 4. Lúc này val(f) = 0 + 12 + 4.



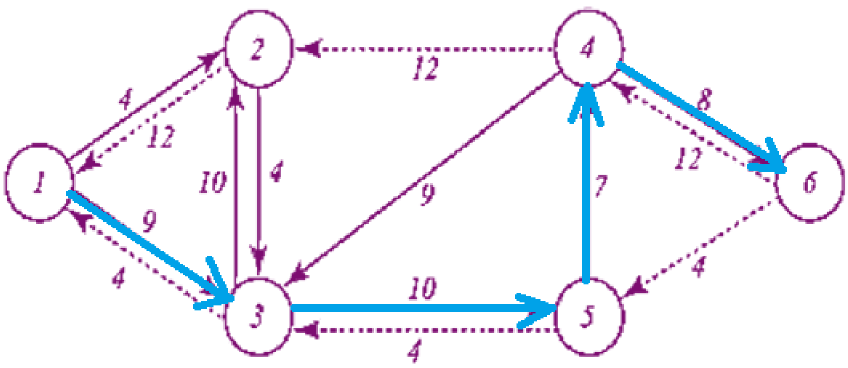
→



Mạng G với luồng 0 + 12 + 4

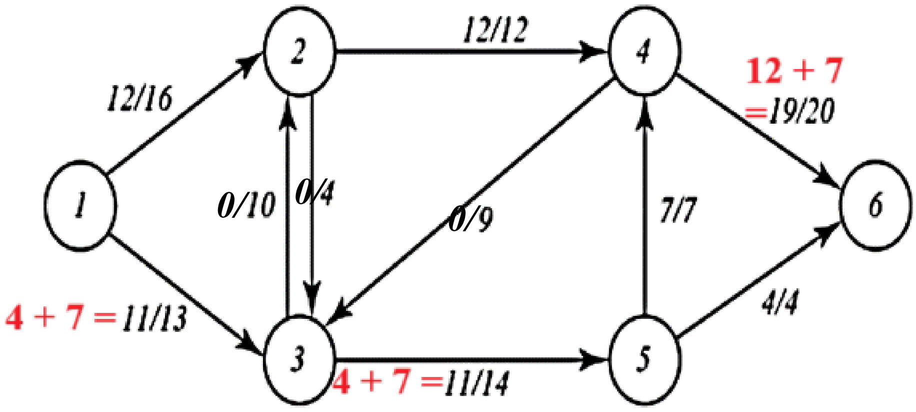
Đồ thị tăng luồng G_f mới

Trên đồ thị tăng luồng mới, tiếp tục tìm đường đi từ đỉnh 1 đến đỉnh 6. Chọn 1→3→5→4→6.



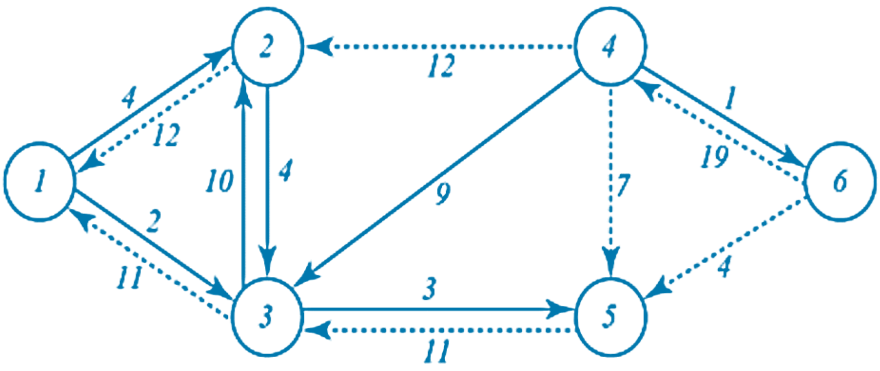
Tiến hành cập nhật luồng của các cung thuộc P_f. Trọng số nhỏ nhất trên đường đi này là 7 → d = 7. Lúc này val(f) = 0 + 12 + 4 + 7.

Do mạng G với luồng 0+12+4 đang tồn tại luồng ở đường đi 1→3→5 và cung (4,6) nên ta tiến hành cộng thêm vào luồng một lượng d = 7 nữa:



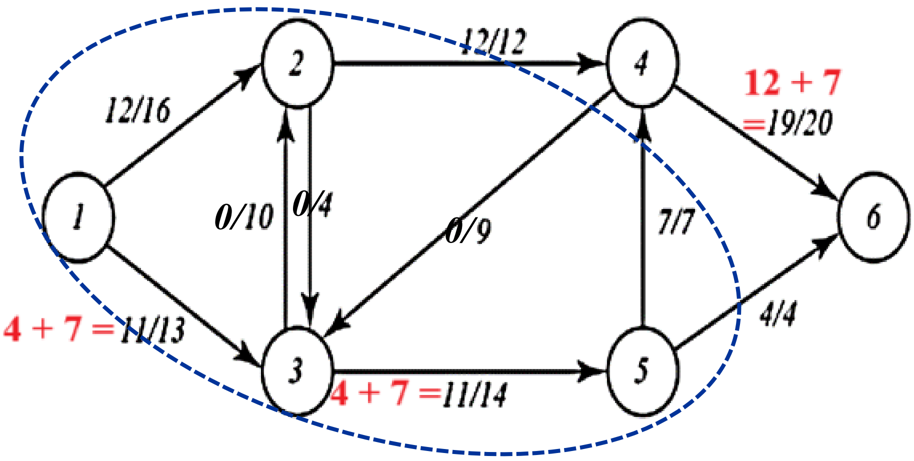
Mạng G với luồng 0 + 12 + 4 + 7

Lúc này đồ thị tăng luồng G_f được cập nhật theo nguyên tắc đã trình bày ở mục 7.4.2 (phần đường tăng luồng), kết quả như sau:



Đồ thị tăng luồng G_f mới

- *Nhận xét:* Trên đồ thị tăng luồng mới, để tồn tại đường đi từ 1 đến 6, ta thấy chỉ còn cách đi qua đỉnh 4 để tiếp cận được đỉnh 6. Tuy nhiên tại đỉnh 4 đều tồn tại các cung đi ra. Vì thế, trên G_f không tồn tại đường tăng luồng, thuật toán kết thúc.
- Giá trị luồng cực đại val(f) = 0 + 12 + 4 + 7 = 23.
- Lát cắt cực tiểu (X, X') với *X = {1,2,3,5} và X' = {4,6}*. Khả năng thông C (X, X') = 12 + 7 + 4 = 23 = |f|.



7.5 Mạng có nhiều điểm phát, nhiều điểm thu

- Nếu một đồ thị có *đa nguồn, đa đích* thì ta cần đưa nó về đồ thị có đơn nguồn đơn đích thì đồ thị mới trở thành mạng được.
- Xét mạng G có p điểm phát $s_1, \ldots, s_p$ và q điểm thu $t_1, \ldots, t_q$. Một luồng có thể xuất phát từ một đỉnh phát bất kỳ đến một trong các đỉnh thu và được định nghĩa tương tự như trên.
- Bài toán luồng cực đại trên G được đưa về bài toán trên bằng cách bổ sung 1 đỉnh phát giả s và 1 đỉnh thu giả t.
- Từ đỉnh phát giả s có cung nối đến các đỉnh phát $s_1, \ldots, s_p$ với khả năng thông qua là vô cùng lớn.
- Từ các đỉnh thu $t_1, \ldots, t_q$ có cung nối đến đỉnh thu giả t với khả năng thông qua là vô cùng lớn.

Xem thêm:
https://www.youtube.com/watch?v=MrGSCAZUbdA
https://www.youtube.com/watch?v=3dOQ3IoVmvY