HỌC PHẦN: LÝ THUYẾT ĐỒ THỊ (GRAPH THEORY)

-- Tháng 5/2024 –

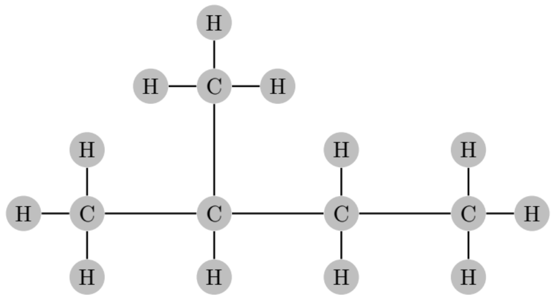
CHƯƠNG 1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

1. Đồ thị?

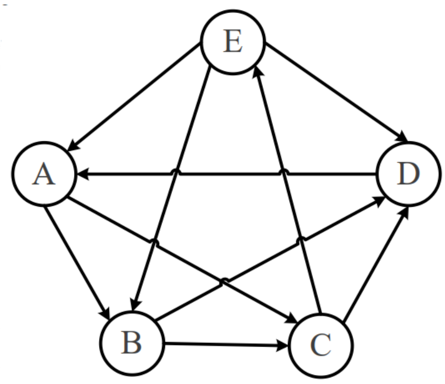
- Không phải đồ thị của khảo sát hàm số, thống kê, đồ thị liên tục…, không sử dụng hệ thống tọa độ.
- Trong cấu trúc rời rạc: Biểu diễn quan hệ giữa các đối tượng (Biểu đồ Hasse: biểu diễn quan hệ của các đối tượng có *thứ tự* với nhau); Quan hệ 2 ngôi giữa các tập hợp; Cấu trúc cây [CTDLGT]; ERD [CSDL]…).

- Ứng dụng:

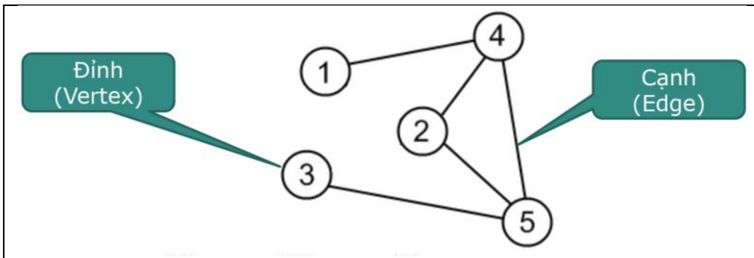
- Trong hệ thống điện thoại, chúng ta cần *"chọn" kết nối có nguy cơ tắc nghẽn thấp nhất* trong nhiều kết nối cho trước giữa 2 tổng đài chuyển mạch.
- Xác định xem *có hay không* một liên kết từ trang web này tới trang web khác trong một hệ thống web.
- Trong lĩnh vực giao thông, *tìm đường đi ngắn nhất* giữa 2 thành phố.
- Xác định tua du lịch "rẻ" nhất thăm quan *tất cả* các thành phố cho trước.
- Xác định *thứ tự* các học phần trong một chương trình đào tạo.
- Một ***mạng máy tính*** có nhiều máy tính được kết nối bằng cáp. Biểu đồ mô hình hóa tình huống này có *các đỉnh biểu thị máy tính và các cạnh biểu thị các dây cáp.*
- ***Biểu đồ web (web graph)*** là một sơ đồ mô hình hóa internet. Các đỉnh đại diện cho các trang web. Cạnh có hướng biểu thị thời điểm một trang web liên kết với một trang web khác.
- ***Một chất hóa học*** có một số nguyên tử được liên kết với nhau bằng các liên kết hóa học. Biểu đồ mô hình hóa tình huống này với các *đỉnh của nguyên tử và các cạnh của liên kết hóa học.* Tên đỉnh và cạnh có thể cần thiết để xác định các nguyên tử khác nhau và các loại liên kết khác nhau. Một biểu đồ đại diện cho isopentane, C_5H_{12}, được minh họa bên dưới.

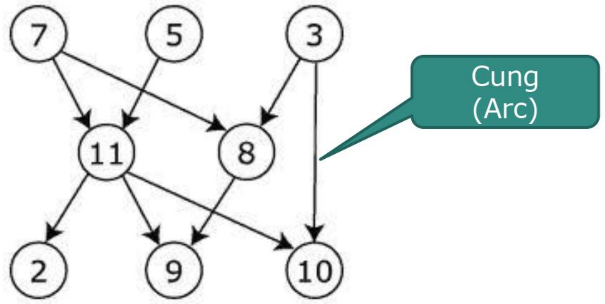


- ***Mô hình thi đấu vòng tròn:*** Là mỗi đội đều thi đấu với tất cả các đội còn lại. Giả sử có 5 đội A, B, C, D, E thi đấu theo vòng tròn. Ta có thể biểu diễn kết quả thi đấu như hình. Trong đó: Đội ở gốc mũi tên thắng đội ở đầu mũi tên.



- Một số khái niệm:

	→ Đồ thị vô hướng có tập các cạnh (E) & đỉnh (V). → Cạnh (2,4) = Cạnh (4,2)

	→ Đồ thị có hướng có tập các cạnh (E) & cung (V). → Cung (7,11) ≠ Cung (11,7)

G = (V, E) = V + E

với **G:** đồ thị (Graph);
V ≠ ∅: tập các đỉnh (vertex/ nodes/ points);
E: tập các cạnh/ cung (edge/ arc/ lines/ links).

- Each edge has either one or two vertices associated with it, called its *endpoints*.

- The number of vertices in a graph *G* is denoted |*V* (*G*)|, or more simply |*G*|. The number of edges is denoted |*E*(*G*)| or ||*G*||.

2. Biểu diễn đồ thị

- Biểu diễn hình học: Mỗi đỉnh = một điểm; Mỗi cạnh = một đường (cong hoặc thẳng) nối 2 đỉnh liên thuộc với nó.
- Biểu diễn bằng ma trận kề, danh sách kề, danh sách cạnh/ cung: Thường được dùng để biểu diễn trên máy tính.

3. Phân loại đồ thị

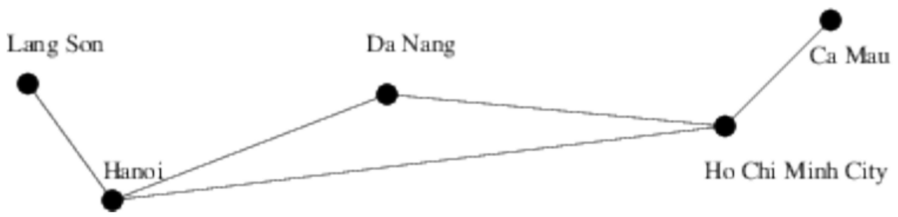
3.1 Đồ thị hữu hạn & vô hạn

- Đồ thị có tập đỉnh và tập cạnh hữu hạn được gọi là ***đồ thị hữu hạn***, gọi vắn tắt là ***đồ thị***. Ngược lại đồ thị có tập đỉnh & tập cạnh vô hạn gọi là ***đồ thị vô hạn***.

3.2 Đơn đồ thị, đa đồ thị, giả đồ thị

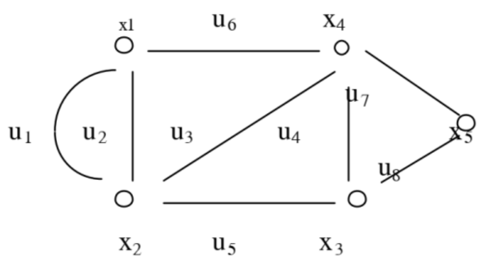
- Đơn đồ thị (Simple graph): Đồ thị ***không có vòng và cạnh song song*** (Mỗi cặp đỉnh chỉ có tối đa 1 cạnh/cung).

* An edge between two vertices *u* and *v* is denoted as ***{u; v}***.

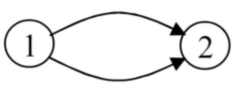


* • Cạnh/cung song song: Hai cạnh/ cung u và v được gọi là **song song** (hay lặp) nếu chúng có 2 đỉnh trùng nhau.

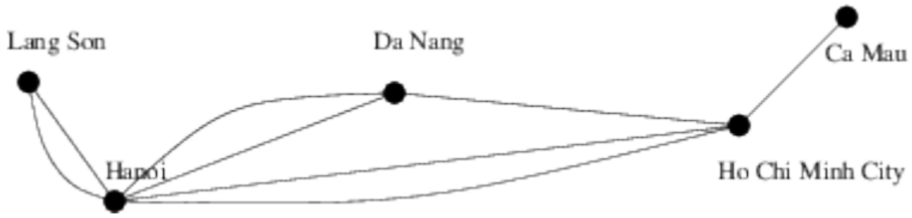
Ký hiệu u ¦ v.



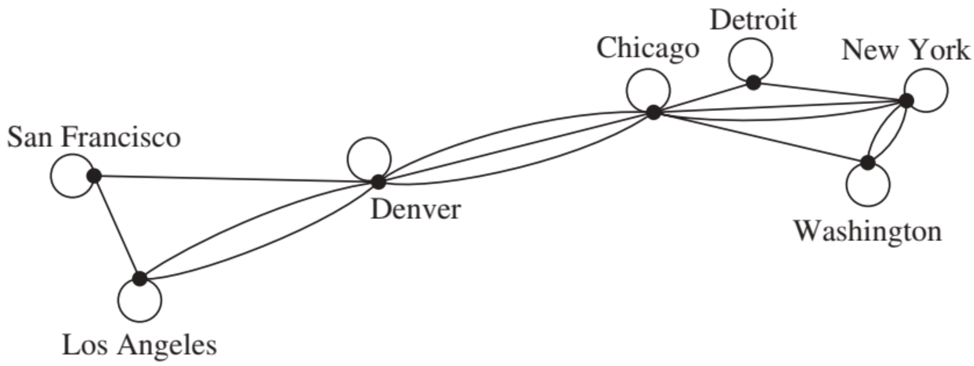
Ta có u_1 ¦ u_2.



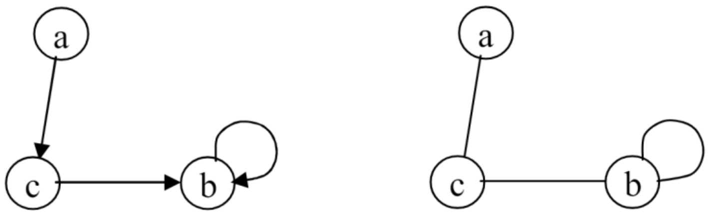
- *Đa đồ thị (Multigraph):* Các đồ thị không phải là đơn đồ thị (Một đồ thị được gọi là **đa đồ thị** *nếu có nhiều hơn một cạnh/ cung <u>cùng chiều</u> giữa hai đỉnh*).



- Pseudographs (giả đồ thị): Are multigraphs that have **loops** (*khuyên/ vòng*) – edges that connect a vertex to itself.



• **Khuyên:** Cạnh/cung được gọi là khuyên nếu có đỉnh đầu trùng với đỉnh cuối.

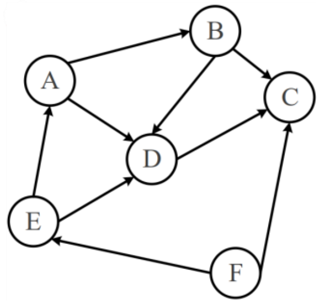


a) b)

3.3 Đồ thị có hướng & vô hướng

- Đồ thị có hướng (directed graph/ digraph): là đồ thị G = (V, E) bao gồm một tập các đỉnh V khác rỗng và một tập các cạnh có hướng (hoặc các cung) E. ***Cung là một cặp đỉnh có phân biệt thứ tự và không trùng nhau*** (ordered pairs of distinct vertices) *(đối với đơn đồ thị).* Cạnh có hướng liên kết với cặp có thứ tự, **kí hiệu (u, v)** được gọi là bắt đầu tại u và kết thúc tại v.

Ví dụ:

	V = {A, B, C, D, E, F} U = {(A, B), (A, D), (B, C), (B, D) (D, C), (E, A), (E, D), (F, C) (F, E)}

- Giả sử u và v là hai đỉnh của đồ thị có hướng G và e = (u, v) là một cung của đồ thị, khi đó ta nói:

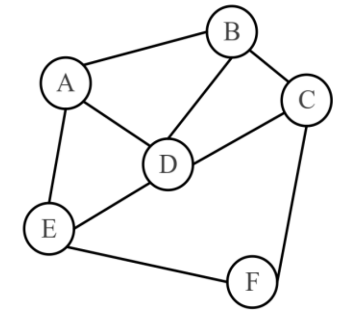
+ u và v kề nhau, cung e đi ra khỏi u và đi vào v.

+ u là đỉnh đầu, v là đỉnh cuối của cạnh e.

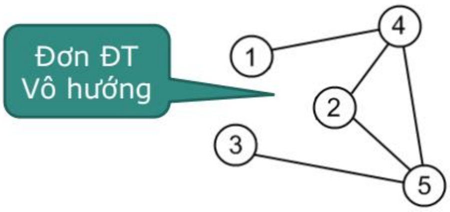
- Đồ thị vô hướng (undirected graph) G = (V, *E*): Mỗi cạnh *e* ∈ *E* được liên kết với một cặp đỉnh {*i*, *j*} ∈ V^2, **không phân biệt thứ tự** (unordered pairs).

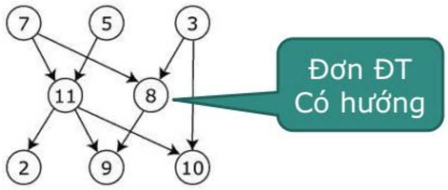
* Đối với một cạnh e = (v_i, v_j), u được gọi là CẠNH TỚI của hai đỉnh v_i và v_j.

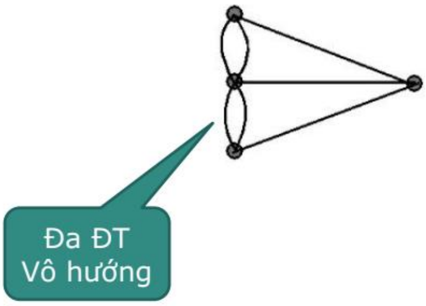
Ví dụ:

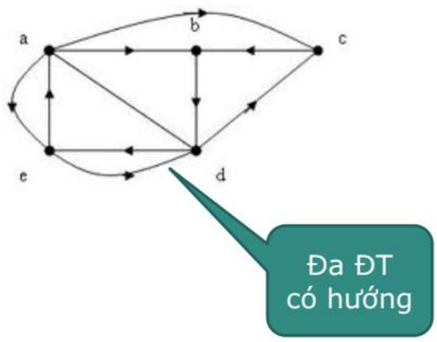
	V = {A, B, C, D, E, F, G} E = {(A, B), (A, D), (A, E), (B, C), (B, D) (C, D), (C, F), (E, D), (E, F)}

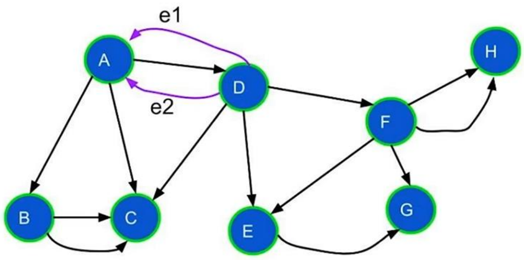
* When there are m directed edges, each associated to an ordered pair of vertices (u, v), we say that (u, v) is an edge of **multiplicity** *m (bội m)*.









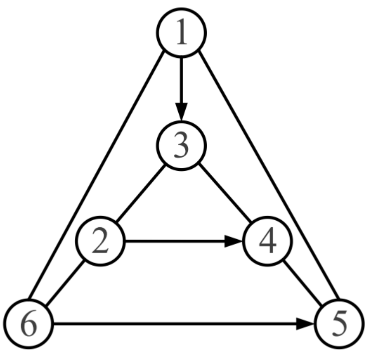


Đa đồ thị có hướng

* e_1, e_2 tương ứng với cùng một cặp đỉnh gọi là ***cung lặp.***

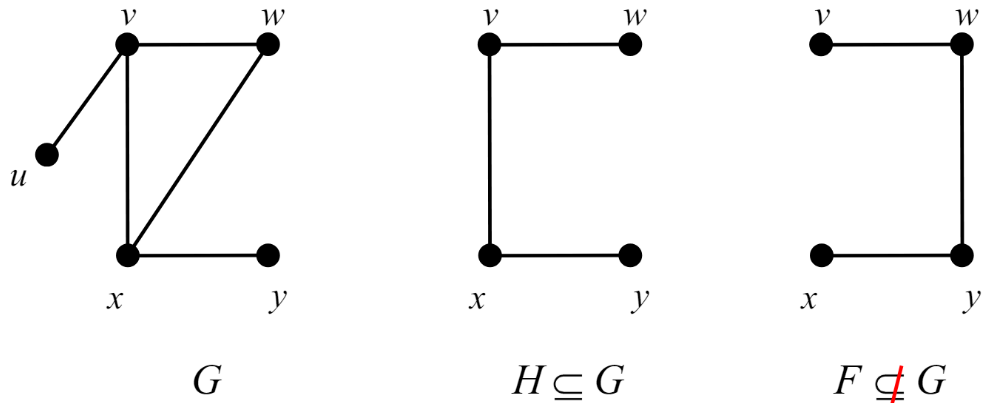
3.4 Đồ thị hỗn hợp (Mixed Graph)

Là đồ thị trong đó một số cạnh có thể có hướng và một số cạnh có thể vô hướng. Đồ thị có hướng và vô hướng là trường hợp đặc biệt của đồ thị hỗn hợp.

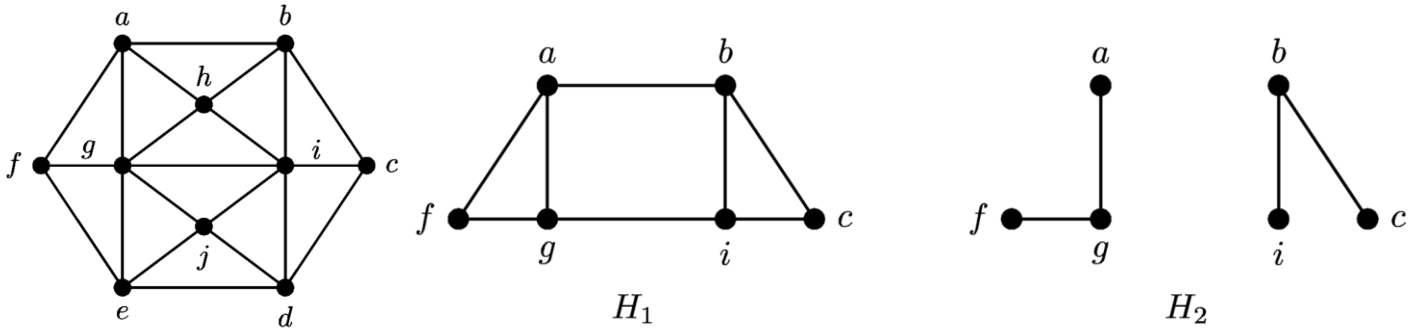


3.5 Đồ thị con (subgraph)

- A ***subgraph*** H of a graph G is a graph where H contains some of the edges and vertices of G; that is, **$V(H) \subseteq V(G)$ and $E(H) \subseteq E(G)$** **(denote H ⊆ G).**



Ví dụ: Consider the graph G below. Find two subgraphs of G, both of which have vertex set $V' = \{a, b, c, f, g, i\}$.

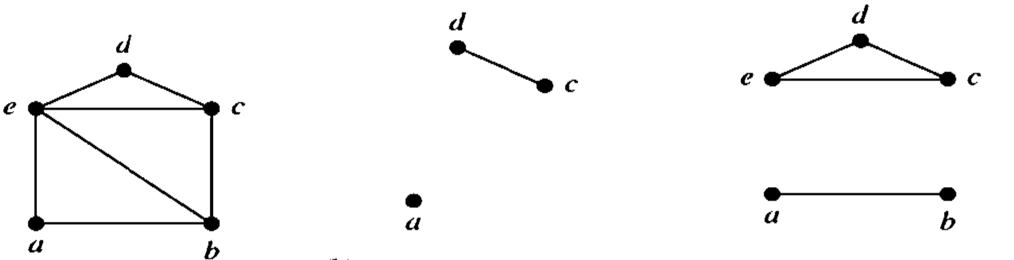


Two possible solutions are shown below. Note that **the graph H_1 on the left contains every edge from G amongst the vertices in V', whereas the graph H_2 on the right does not since some of the available edges are missing** (namely, *ab; af; ci*, and *gi*).

Đồ thị bên trái ở trên được gọi là đồ thị con cảm sinh (induced subgraph), vì tất cả các cạnh đều nằm giữa các đỉnh được chọn. Một loại đồ thị con đặc biệt khác, được gọi là đồ thị con bao trùm (spanning subgraph), bao gồm tất cả các đỉnh của đồ thị gốc.

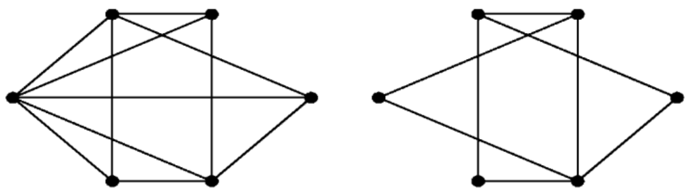
- (V_1, E_1) is a/an (vertex) induced subgraph **(đồ thị con cảm sinh (đỉnh))** of (V_2, E_2) if it is a subgraph where $V_1 \subseteq V_2$ and *E_1 contains all edges of E_2* which are subsets of V_1.

- Đồ thị con cảm sinh cạnh (edge-induced subgraph) bao gồm *một số cạnh của đồ thị gốc và* ***các đỉnh nằm ở điểm cuối*** *của chúng.*

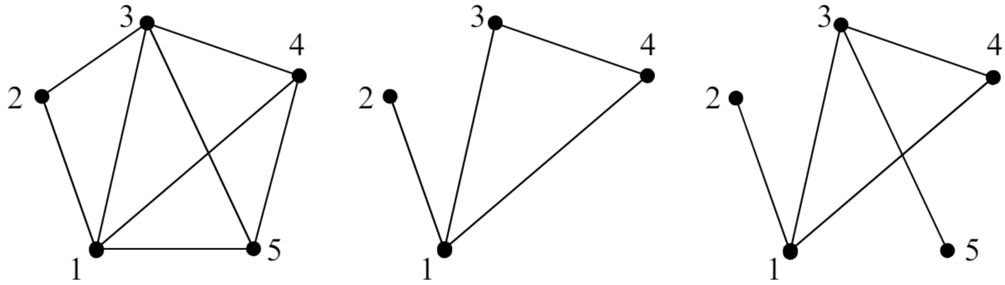


(a) The graph G (b) The induced subgraph $G[a,c,d]$ (c) The edge induced subgraph $G[ab,cd,de,ce]$

- Cho một đồ thị G = (V; E), ta nói H là **đồ thị con bao trùm/ đồ thị bộ phận/ đồ thị khung (spanning subgraph)** nếu nó *chứa tất cả các đỉnh nhưng không nhất thiết chứa tất cả các cạnh* của G; nghĩa là V (H) = V (G) và E(H) ⊆ E(G).



G spanning subgraph of *G*



G G' G''

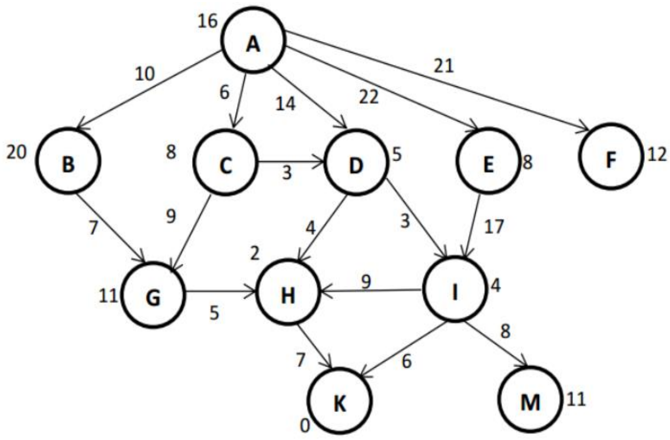
Đồ thị G' là đồ thị con, G'' là đồ thị bộ phận của G

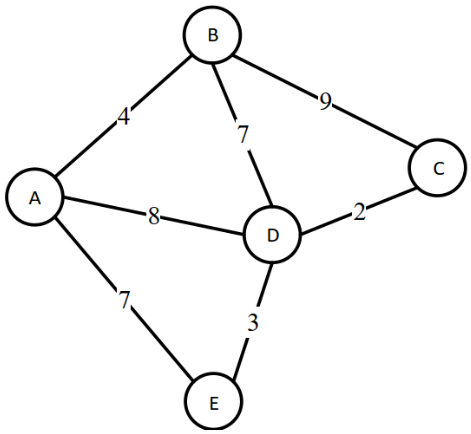
- Let *G* have *n* vertices and *m* edges: There are 2^m spanning subgraphs (all subsets of edges); There are 2^n induced subgraphs (all subsets of vertices).

3.6 Đồ thị có trọng số (weighted graph)

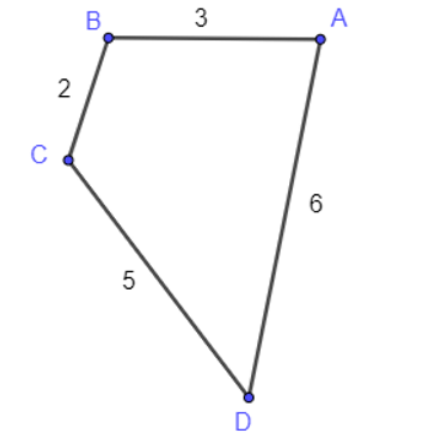
- Đồ thị có trọng số là một *đồ thị liên thông* và mỗi cạnh được gắn với (thông thường là) một số thực không âm, gọi là **trọng số** của cạnh đó. ***Ký hiệu:*** G (V, E, W) hoặc G (V, E, C).
- Trọng số của cạnh a được ký hiệu là w_a hoặc c_a.
- Such weights might represent for example *costs, lengths or capacities*, depending on the problem at hand.
- Such graphs arise in many contexts, for example *in shortest path problems such as the traveling salesman problem.*
- Tổng trọng số (hay tổng độ dài) của các cạnh tạo thành đường đi gọi là độ dài của đường đi đó. Độ dài của đường đi m được kí hiệu là l_m.
- Trong đồ thị có trọng số, đường đi có độ dài bé nhất trong tất cả các đường đi từ đỉnh A đến đinh B gọi là ***đường đi ngắn nhất từ A đến B.***

Chú ý: *Khi xét bài toán tìm đường đi ngắn nhất, ta chỉ xét đồ thị liên thông có trọng số.*





w (A, B) = 10; c (A, C) = 6.

Ví dụ 1: Có 4 trạm xe bus A, B, C, D được nối với nhau theo những con đường AB, BC, CD, DA với độ dài lần lượt là 3 km, 2 km, 5 km, 6 km. Ta có đồ thị mô tả tình huống trên như sau.	

Ví dụ 2: Adam tung đồng xu và bạn tung xúc xắc.

Nếu anh ta ra mặt ngửa và bạn tung được số chẵn, bạn thắng $2;

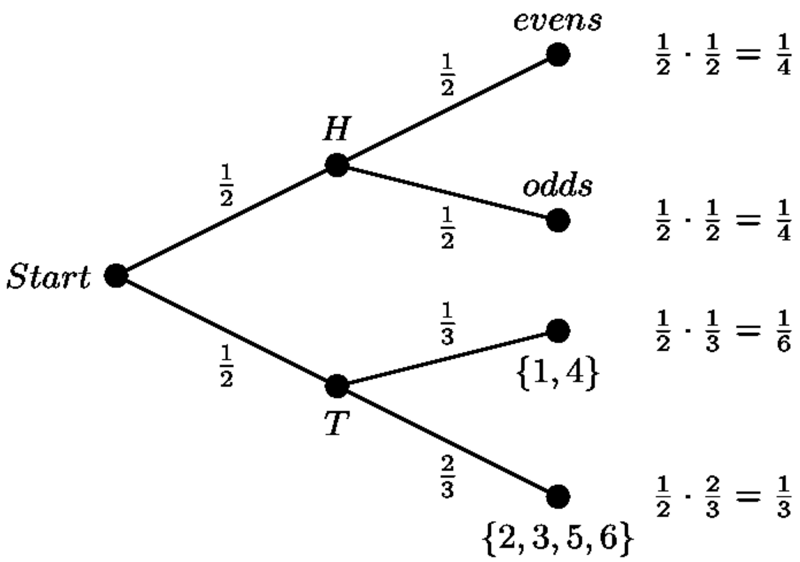
nếu anh ta ra mặt ngửa và bạn tung được số lẻ, bạn trả cho anh ta 3 đô la.

Nếu anh ta được sấp và bạn tung được 1 hoặc 4, bạn thắng 5 đô la;

nếu anh ta được mặt sấp và bất kỳ quân nào trong số 2, 3, 5, 6 được tung ra, bạn trả cho anh ta 2 đô la. Xác suất bạn giành được 5 USD là bao nhiêu? Xác suất bạn giành được bất kỳ số tiền nào là gì?

<u>Giải:</u> Cây xác suất là một biểu đồ có các đỉnh biểu thị các kết quả có thể xảy ra của từng phần của thử nghiệm (ở đây là trò chơi xu và xúc xắc) và các cạnh được gắn nhãn xác suất xảy ra kết quả đó.

Để tìm xác suất của bất kỳ kết quả cuối cùng nào, hãy nhân dọc theo đường đi từ đỉnh đầu tiên đến kết quả cuối cùng. Cây bên dưới có các cạnh được dán nhãn và xác suất cuối cùng được tính toán cho trò chơi của Adam.



Sử dụng cây xác suất ở trên, xác suất bạn thắng được 5 đô la (yêu cầu mặt sấp và 1 hoặc 4) là 1/6 và xác suất bạn thắng được bất kỳ số tiền nào là 1/6 + 1/4 = 5/12. Anh ấy có nhiều khả năng chiến thắng hơn bạn.

3.7 Đồ thị đẳng cấu

- Phép đẳng cấu đồ thị (graph isomorphism) là một **song ánh** giữa các tập đỉnh của hai đồ thị G và H: $f: V(G) \rightarrow V(H)$ với tính chất rằng ***cặp đỉnh u và v bất kỳ của G kề nhau khi và chỉ khi hai đỉnh $f(u)$ và $f(v)$ kề nhau trong đồ thị H.***

uv là cạnh của G ⇔ f(u)f(v) là cạnh của H.

Ký hiệu: **G ~ H hoặc G ≅ H**

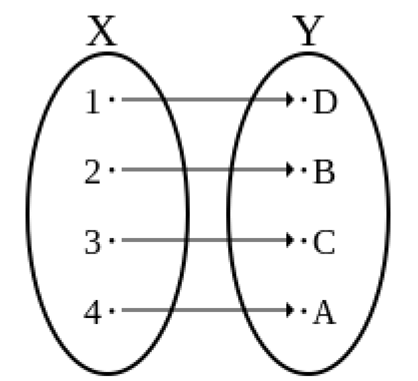
Cụ thể: Hai đồ thị vô hướng $G_1 = (V_1, E_1)$ và $G_2 = (V_2, E_2)$ được gọi là đẳng cấu với nhau nếu tồn tại hai song ánh f và q thỏa mãn điều kiện sau:

+ f: $X_1 \rightarrow X_2$ và q: $E_1 \rightarrow E_2$.

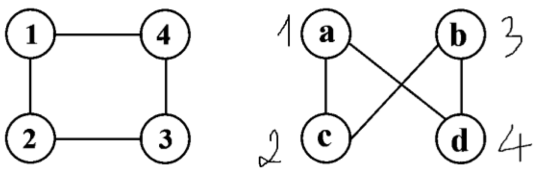
+ Nếu cạnh $e \in E_1$ kề với cặp đỉnh $\{u, v\} \subseteq X_1$ trong G_1 thì cạnh q(e) sẽ kề với cặp đỉnh {q (x), q (y)} trong G_2 ***(sự tương ứng cạnh).***

*** Song ánh:** là một ánh xạ f từ tập X vào tập Y thỏa mãn tính chất, đối với mỗi y thuộc Y, có duy nhất một x thuộc X sao cho f(x) = y.

Nói cách khác, *f* là một song ánh nếu và chỉ nếu nó là **tương ứng một-một** giữa hai tập hợp; tức là nó vừa là đơn ánh và vừa là toàn ánh.



Ví dụ 1:



G **H**

f: {1, 2, 3, 4}→ {a, b, c, d}

f(1) = a *f*(2) = c

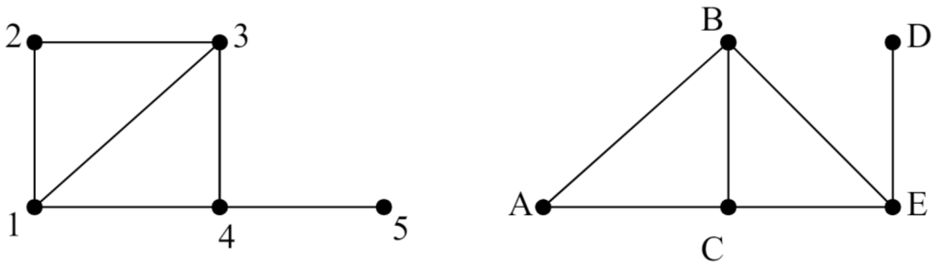
f(3) = b *f*(4) = d

(1, 2) – (a, c) (1, 4) – (a, d)

(2, 3) – (c, b) (3, 4) – (b, d)

G và H đẳng cấu với nhau

Ví dụ 2:



Hai đồ thị trên đẳng cấu vì tồn tại một song ánh f với f(1) = C, f(2) = A, f(3) = B, f(4) = E, f(5) = D.

- Nhận xét:

+ Theo định nghĩa, phép đẳng cấu bảo toàn **"quan hệ kề" (đỉnh kề đỉnh, cạnh kề cạnh, đỉnh kề cạnh).**

+ Để xác định sự đăng cấu giữa hai đồ thị là một bài toán không đơn giản, vì giữa hai đồ thị có n đỉnh tồn tại tới n! song ánh giữa hai tập đỉnh.

- Các tính chất của 2 đồ thị đẳng cấu:

+ Có cùng số đỉnh.

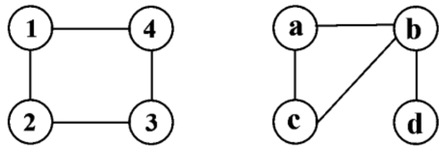
+ Có cùng số lượng đỉnh bậc *k*, mọi *k* nguyên dương ≥ 0.

+ Cùng số cạnh.

+ deg (u) = deg f(u) (số đỉnh/ cạnh kề tương ứng như nhau).

→ **Cùng số thành phần.**

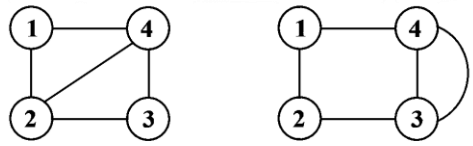
Ví dụ:



G **H**

+ Số đỉnh: cùng 4 đỉnh.
+ Số cạnh: cùng 4 cạnh.
+ Bậc của đỉnh:
G: mỗi đỉnh có bậc 2.
H: 2 đỉnh bậc 2, 1 đỉnh bậc 3, 1 đỉnh bậc 1.

G và H không đẳng cấu với nhau



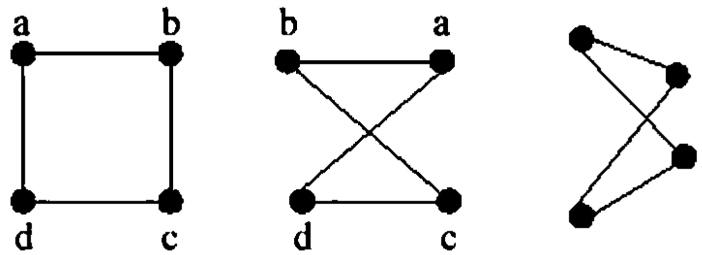
G **H**

+ Số đỉnh: cùng 4 đỉnh.
+ Số cạnh: cùng 4 cạnh.
+ Bậc của đỉnh:
G: 2 đỉnh bậc 2, 2 đỉnh bậc 3 (mỗi đỉnh bậc 2 kề với 2 đỉnh bậc 3).
H: 2 đỉnh bậc 2, 2 đỉnh bậc 3 (mỗi đỉnh bậc 2 kề với một đỉnh bậc 3 và một đỉnh bậc 2.

G và H không đẳng cấu với nhau

- Hai đồ thị G và H được gọi là đẳng cấu với nhau, nếu có thể vẽ lại (bằng cách dời đỉnh, dời cạnh...) sao cho hai đồ thị này có hình vẽ y hệt nhau.

Ví dụ: Các đồ thị sau từng đôi một đẳng cấu.



G G' G''

- ***Tính bất biến:*** Hai đồ thị đẳng cấu bất kỳ có tính chất giống nhau (số đỉnh, số cạnh, bậc của một đỉnh,…). Người ta gọi đó là tính bất biến trong các đồ thị đẳng cấu.

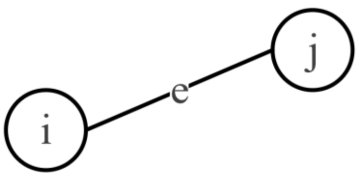
4. Đỉnh kề, cạnh kề

• If *xy* is an edge, then *x* and *y* are the ***endpoints*** for that edge. We say *x* is ***incident to (liên tiếp)*** edge *e* if *x* is an endpoint of *e*.

• *If two vertices are incident to the same edge*, we say the ***vertices are adjacent*** ***(kề)***, denoted ***x ~ y***

• If *two edges share an endpoint*, we say they are adjacent.

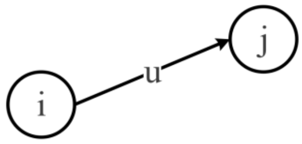
• Trên đồ thị **vô hướng**, xét cạnh *e* được liên kết với cặp đỉnh (*i*, *j*):



+ Cạnh *e* **kề** (adjacent to) với đỉnh *i* và đỉnh *j* (hay đỉnh *i* và đỉnh *j* **kề** với cạnh *e*); viết tắt *e* = (*i*, *j*). Cũng có thể nói e ***liên thuộc*** với i và j.

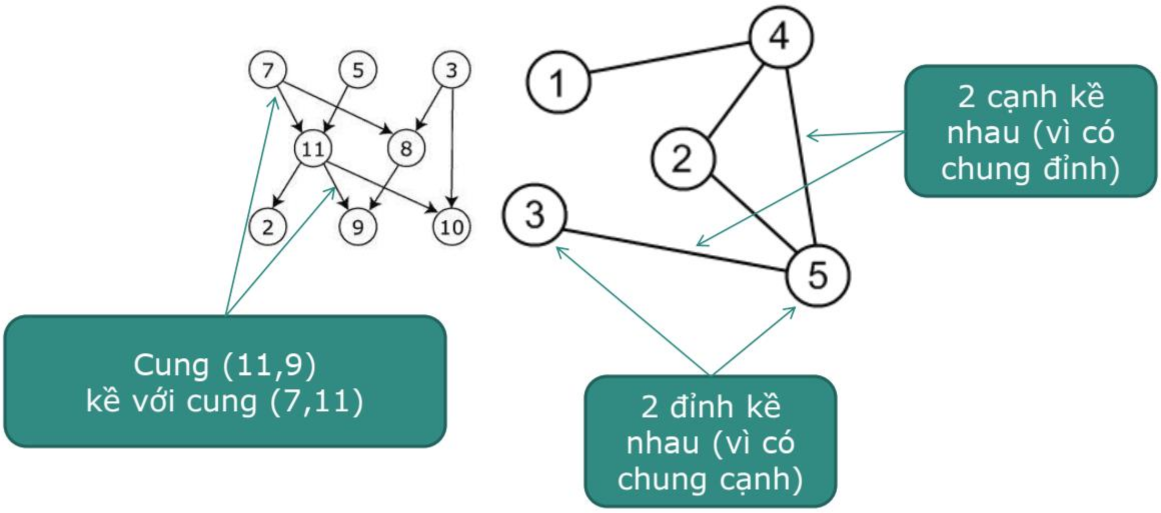
+ Đỉnh *i* và đỉnh *j* được gọi là ***2 đỉnh kề nhau*** (hay đỉnh *i* kề với đỉnh *j*; ngược lại, đỉnh *j* kề với đỉnh *i*).

• Trên đồ thị **có hướng,** xét cạnh *u* được liên kết với cặp đỉnh (*i*, *j*):

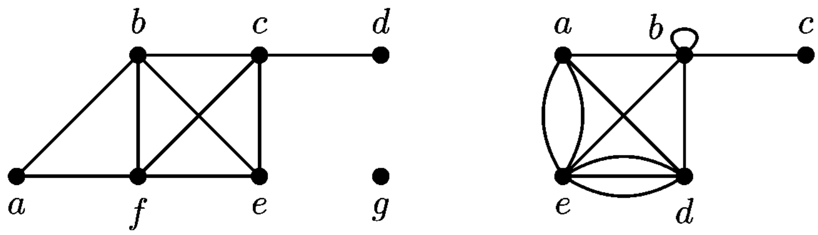


+ Cạnh u **kề** (adjacent) với đỉnh *i* và đỉnh *j* (hay đỉnh *i* và đỉnh *j* **kề** với cạnh *u*); có thể viết tắt *u* = (*i*, *j*). Cạnh *u* đi ra khỏi đỉnh *i* và đi vào đỉnh *j*.

+ Đỉnh *j* được gọi là đỉnh kề (adjacency vertex) của đỉnh *i*.



- If two vertices are adjacent, we say they are ***neighbors*** and the set of all neighbors of a vertex *x* is denoted *N*(*x*).
Ví dụ:



G H

In G: N(a) = {b, f}; N(b) = *{a, c, e, f}; …*
In H, N(a) = {b, d, e}; N(b) = *{a,* ***b,*** *c, d, e}; …*

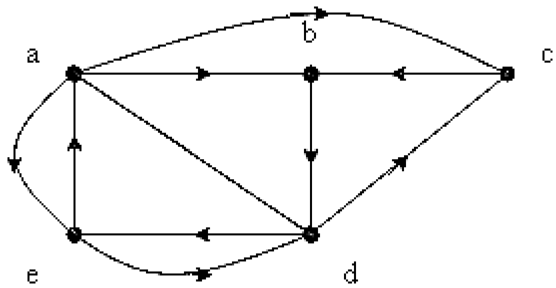
• If two vertices (or edges) are not adjacent then we call them ***independent***.
• If a vertex is not incident to any edge *(1 đỉnh không kề với bất kỳ đỉnh nào khác, kể cả chính nó)*, we call it an ***isolated vertex (Đỉnh cô lập)***.
• If both endpoints of an edge are the same vertex, then we say the edge is a ***loop***.

5. Đường đi & chu trình

5.1 Đường đi

- Là dãy các cạnh/cung/đỉnh kề nhau (Dãy các đỉnh (hoặc dãy các cạnh) trong đó 2 đỉnh liên tiếp có cạnh nối).
- *Độ dài đường đi là số cạnh trên đường đi.*

Ví dụ 1:



- (d,e),(e,a),(a,c) *Có độ dài = 3*
- d,e,a,c

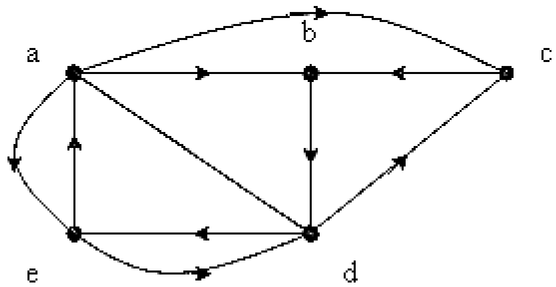
Ví dụ 2: Trong một đồ thị G, một dãy cạnh nối tiếp (hai cạnh nối tiếp là hai cạnh có chung một đầu mút) AB, BC, CD, ..., MN, NP gọi là một đường đi nối A với P, kí hiệu là ABCD ... MNP. ***Điểm A gọi là đầu đường, điểm P gọi là cuối đường.***

- Một đường đi được phép đi qua cùng một đỉnh hoặc cùng một cạnh bao nhiêu lần cũng được!
- *Đường đi đơn giản (đường đi đơn):* Đường đi không qua cạnh nào quá một lần.
- *Đường đi sơ cấp:* Đường đi không qua đỉnh nào quá một lần

5.2 Chu trình (cycle)

- Là ***đường đi*** có *đỉnh đầu trùng đỉnh cuối. (Một đường đi khép kín)*

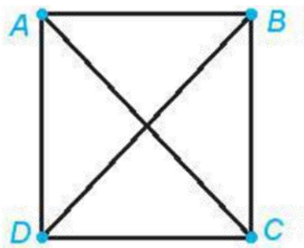
Ví dụ 1:



d,e,a,b,**d**; **b**,d,c,**b**

- *Chu trình đơn giản:* Chu trình không đi qua cạnh nào quá 1 lần
- *Chu trình sơ cấp:* Chu trình không đi qua đỉnh nào quá 1 lần (trừ đỉnh đầu, đỉnh cuối)
- *Chu trình Euler:* là chu trình qua tất cả các cạnh, mỗi cạnh đúng một lần.
- *Chu trình bao trùm (chu trình Hamilton):* là dây chuyền Hamilton xuất phát từ một đỉnh, đi qua tất cả các đỉnh khác của đồ thị, mỗi đỉnh đúng một lần và quay trở về nơi xuất phát.

Ví dụ 2:



- Những chu trình sơ cấp có độ dài 3 xuất phát từ đỉnh A là: ABCA, ABDA, ACBA, ACDA, ADBA, ADCA.
- Những chu trình sơ cấp có độ dài 4 xuất phát từ đỉnh A là: ABCDA, ABDCA, ACBDA, ACDBA, ADBCA, ADCBA.

6. Tính liên thông

6.1 Tính liên thông trong đồ thị vô hướng

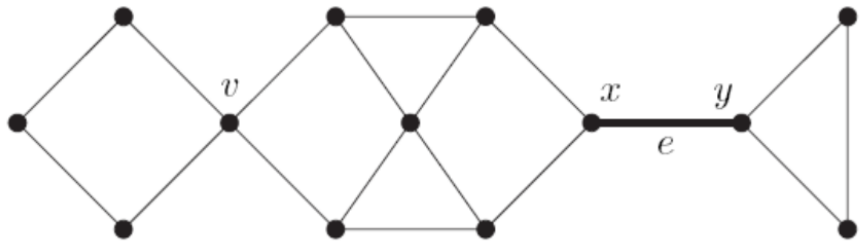
- *Định nghĩa:* Hai đỉnh v, u trong đồ thị G được gọi là liên thông *nếu tồn tại một đường đi nối chúng với nhau.*
- Đồ thị G gọi là liên thông (connected) *nếu hai đỉnh phân biệt bất kỳ trong đồ thị đều liên thông.* Ngược lại thì ta gọi là đồ thị không liên thông (disconnected) → *Đồ thị liên thông không tồn tại đỉnh cô lập.*
- Cho G = (V, E), $v \in V$.
    - V' là tập con của V gồm đỉnh v và tất cả các đỉnh liên thông với v trong G.
    - E' là tập con của E gồm tất cả các cạnh nối các đỉnh thuộc V'.

    Khi đó G' = (V', E') gọi là **thành phần liên thông của G** chứa v.

Chú ý: Nếu v và u liên thông trong G thì thành phần liên thông của G chứa v cũng là thành phần liên thông của G chứa u.

- Người ta chứng minh được rằng: Một đồ thị 2n đỉnh, mỗi đỉnh có bậc ít nhất bằng n, là đồ thị liên thông.

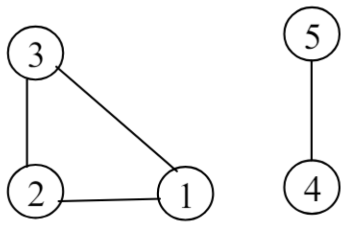
- ***Đỉnh cắt và cầu***
    - *v* là *đỉnh cắt (điểm khớp)* ⇔ số thành phần liên thông tăng lên nếu bỏ *v* và các cạnh liên thuộc với nó.
    - Cạnh *e* (giả sử có 2 đỉnh C, D) là cầu ⇔ số thành phần liên thông tăng lên nếu bỏ cạnh *e* (→ 2 đỉnh C, D không còn liên thông nữa).



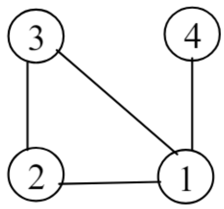
6.2 Tính liên thông trong đồ thị có hướng

- Liên thông mạnh: Đồ thị có hướng G được gọi là **liên thông mạnh** nếu giữa 2 đỉnh u, v bất kỳ trong G *luôn có đường đi từ v đến u và từ u đến v (Đồ thị có hướng liên thông).*

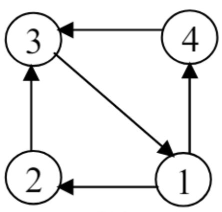
- Liên thông yếu: Đồ thị có hướng G được gọi là **liên thông yếu** nếu *đồ thị <u>vô hướng</u> tương ứng của nó là liên thông.*



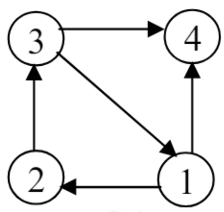
G1



G2



G3



G4

Đồ thị G1 có 2 thành phần liên thông, đồ thị G2 liên thông, đồ thị G3 liên thông mạnh, G4 liên thông yếu.

**** Liên thông mạnh chắc chắn sẽ liên thông yếu. Liên thông yếu chưa chắc là liên thông mạnh.***

6.3 Thành phần liên thông

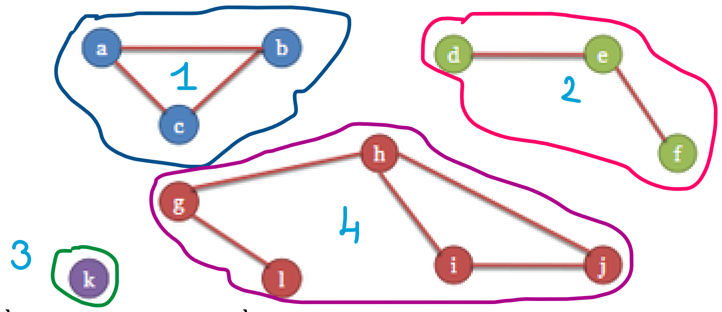
- Một đồ thị **không** liên thông sẽ bao gồm nhiều ***đồ thị con liên thông***, các đồ thị con này được gọi là các thành phần liên thông (connected components).
- **Một thành phần liên thông** của một đồ thị vô hướng là **một đồ thị con** trong đó:

  + Giữa bất kỳ hai đỉnh nào đều có đường đi đến nhau, và

  + Không thể nhận thêm bất kỳ một đỉnh nào mà vẫn duy trì tính chất trên.

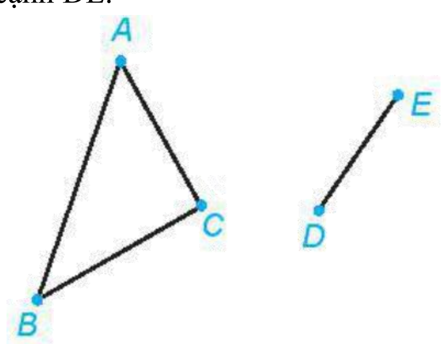
  + Một đồ thị liên thông nếu có đúng một thành phần liên thông, đó chính là toàn bộ đồ thị.

Ví dụ 1:



Trong hình trên, đồ thị có 4 thành phần liên thông. (Đỉnh k cô lập theo quy ước cũng tính là 1 thành phần liên thông, gọi là thành phần liên thông tầm thường).

Ví dụ 2: Đồ thị có hai thành phần liên thông: một thành phần gồm 3 đỉnh A, B, C và các cạnh AB, AC, BC; một thành phần gồm hai đỉnh D, E và cạnh DE.



7. Bậc của đỉnh

- Đỉnh của đồ thị G có bậc là *n* nếu nó kề với *n* đỉnh khác.
- **Xét đồ thị vô hướng *G*:**

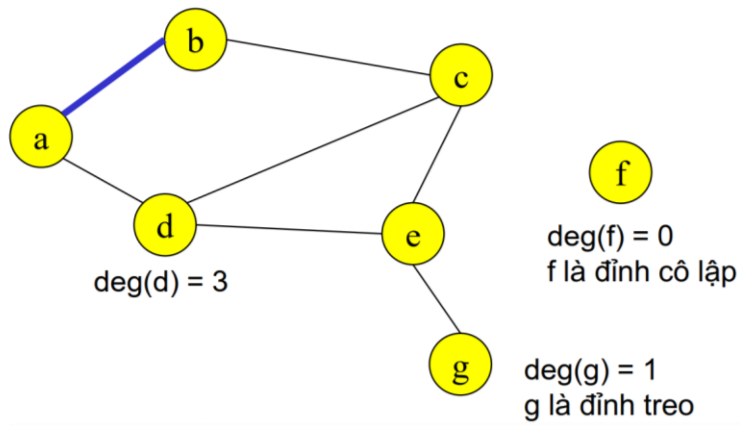
  + Bậc của đỉnh *v* trong đồ thị *G* là số các cạnh kề với đỉnh *v*, mỗi khuyên được tính hai lần (được kể là 2 cạnh tới một đỉnh).

  + Ký hiệu: *deg*(*v*) hay *d*(*v*)

  + Đỉnh cô lập ⇔ *deg*(*v*) = 0 *(Đồ thị có hướng cũng có tính chất này)*

  + Đỉnh treo ⇔ *deg*(*v*) = 1; Cạnh treo có đầu mút là một đỉnh treo

  + Đồ thị rỗng: *deg*(*v*) = 0 ∀v *(Đồ thị có hướng cũng có tính chất này)*



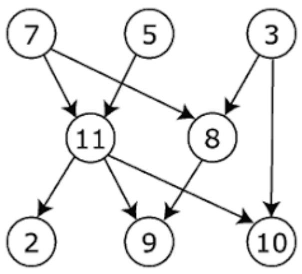
- **Xét đồ thị có hướng *G*:**

+ Cung vào/ra: Cung (u, v) gọi là cung ra khỏi đỉnh u và là cung vào đỉnh v

+ **Nửa bậc ngoài (Bán bậc ra)** của đỉnh *v* là **số các cung <u>đi ra</u>** khỏi đỉnh *v*, ký hiệu $d^+(v)$ hoặc $deg^+(v)$ hoặc *outdeg(v)*.

+ **Nửa bậc trong (Bán bậc vào)** của đỉnh *v* là **số các cung <u>đi vào</u>** đỉnh *v*, ký hiệu $d^-(v)$ hoặc $deg^-(v)$ hoặc *indeg(v)*.

+ **Bậc** của đỉnh v: $\mathbf{d(v) = d^+(x) + d^-(x).}$



outdeg(3) = 2; indeg(10) = 2.

+ Đỉnh có $deg^+(v) = 0$ được gọi là **đỉnh phát**, đỉnh có $deg^-(v) = 0$ là **đỉnh thu**.

- If the degree is even, the vertex is called ***even (đỉnh bậc chẵn)***; if the degree is odd, then the vertex is ***odd (Đỉnh bậc lẻ)***.

<u>8. Định lý bắt tay (The Handshaking Theorem)</u>

- **Định lý 1:** Trong đồ thị **vô hướng** G (V, E), tổng bậc của mọi đỉnh trong đồ thị bằng 2 lần số cạnh.

$$\sum_{v \in V} deg(v) = 2|E|$$

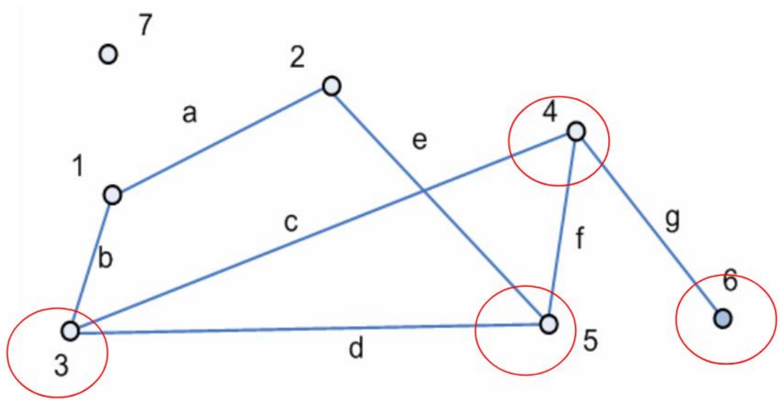
Chứng minh: Mỗi một cạnh nối với đúng hai đỉnh, vì thế một cạnh đóng góp 2 đơn vị vào tổng các bậc của tất cả các đỉnh → Tổng các bậc của tất cả các đỉnh gấp đôi số cạnh của đồ thị.

- **Định lý 2:** Trong đồ thị **có hướng** G (V, E), tổng bán bậc ra của mọi đỉnh bằng tổng bán bậc vào của chúng, và bằng số cung.

$$\textstyle\sum_{v \in V} outdeg(v) = \sum_{v \in V} indeg(v) = |E| \rightarrow \sum_{v \in V} \mathrm{deg}(v) = 2|E|$$

** Hệ quả:* + Tổng bậc của đỉnh bậc lẻ là một số chẵn.

+ Số lượng đỉnh lẻ trong một đồ thị là một số chẵn.



Các đỉnh bậc lẻ: 3, 5, 4, 6 → 4 đỉnh

Chứng minh hệ quả 2:

- $\sum_{v \in V} deg(v) = \sum_{v \in V\ lẻ} deg(v) + \sum_{v \in V\ chẵn} deg(v) = 2|E|$ là một số chẵn.
- Mà $\sum_{v \in V\ chẵn} deg(v)$ là một số chẵn (tổng các số chẵn là một số chẵn) → $\sum_{v \in V\ lẻ} deg(v)$ là một số chẵn (Hiệu của 2 số chẵn là một số chẵn).
- Gọi m_i, i = 1, … n là bậc của đỉnh lẻ → m_i là số lẻ → $m_i = 2k_i + 1$.

- Có $m_1 + m_2 + \ldots + m_n = 2k$. Ta cần chứng minh n là số chẵn (theo ycbt).

  $\Leftrightarrow 2k_1 + 1 + 2k_2 + 1 + \ldots + 2k_n + 1 = 2k$

  $\Leftrightarrow 2(k_1 + k_2 + \ldots + k_n) + \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{=n} = 2k$ Đặt $A = 2(k_1 + k_2 + \ldots + k_n)$, rõ ràng là số chẵn

  $\Leftrightarrow n = 2k - A$, mà hiệu của 2 số chẵn là số chẵn => n là số chẵn (đpcm).

9. Các định lý khác

- **Định lý 3:** Trong mọi đơn đồ thị G = (V, E), nếu số đỉnh nhiều hơn 1 thì tồn tại ít nhất hai đỉnh cùng bậc.
- **Định lý 4:** Trong mọi đơn đồ thị G = (V, E), nếu số đỉnh nhiều hơn 2 và có đúng hai đỉnh cùng bậc thì hai đỉnh này không đồng thời có bậc bằng 0 hoặc n-1.
- **Định lý 5:** Hai đồ thị có ma trận liền kề (theo một thứ tự nào đó của các đỉnh) bằng nhau thì đẳng cấu với nhau
- **Định lý 6:** G = (V, E) là một đồ thị vô hướng có
  - Số đỉnh lớn hơn hoặc bằng 3
  - Bậc của mọi đỉnh đều lớn hơn hoặc bằng 2

  thì trong G luôn tồn tại một chu trình sơ cấp.
- **Định lý 7:** G = (V, E) là một đồ thị vô hướng có
  - Số đỉnh lớn hơn hoặc bằng 4
  - Bậc của mọi đỉnh đều lớn hơn hoặc bằng 3

  thì trong G luôn tồn tại một chu trình sơ cấp có độ dài chẵn
- **Định lý 8:** Đồ thị G = (V, E) là liên thông khi và chỉ khi G có duy nhất một thành phần liên thông
- **Định lý 9:** Đơn đồ thị *G* = (*V*, *E*) có
  - $|V| = n \geq 2$
  - $\deg(u) + \deg(v) \geq n, \ \forall u,v \in V$

  thì *G* là đồ thị liên thông

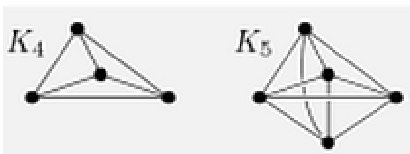
  * *Hệ quả:* Đơn đồ thị *G* = (*V*, *E*), $|V| = n$ có $\mathbf{deg(v) \geq n/2}, \ \forall v \in V$ thì *G* là đồ thị liên thông
- **Định lý 10:** Nếu đồ thị G có đúng 2 đỉnh bậc lẻ thì 2 đỉnh này phải liên thông với nhau.
- **Định lý 11:** Đồ thị G là một đồ thị lưỡng phân khi và chỉ khi mọi chu trình của nó đều có độ dài chẵn.

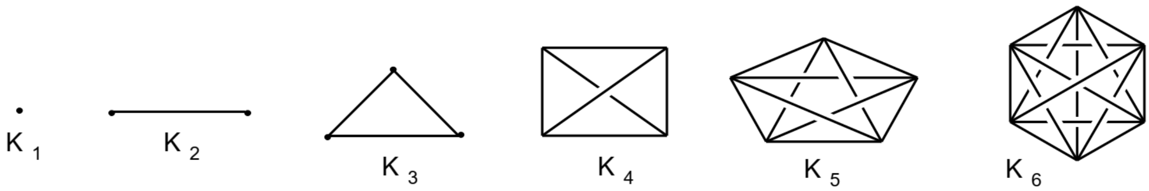
10. Một số dạng đồ thị đặc biệt

10.1 Đồ thị đầy đủ

A complete graph (*đồ thị đầy đủ*) on *n* vertices, K_n, is a **simple graph** that contains **exactly one edge between each pair of distinct vertices.**

- Số đỉnh: $|V| = n$
- Bậc: $deg(v) = n - 1, \ \forall v \in V$
- Số cạnh: $|E| = n(n - 1)/2$





Chứng minh $|E| = n(n - 1)/2$**:**

Đỉnh thứ 1 sẽ nối với n-1 đỉnh còn lại.

Đỉnh thứ 2 sẽ nối với n-1 đỉnh còn lại.

...

Đỉnh thứ n sẽ nối với n-1 đỉnh còn lại.

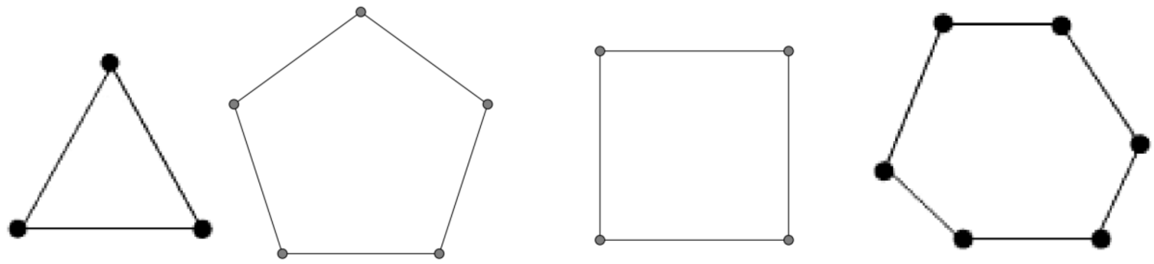
Từ đó, theo định lý bắt tay ta có:

$$\sum_{v \in V} deg(v) = (n-1) + (n-1) + \cdots + (n-1) = n(n-1) = 2|E| \rightarrow |E| = \frac{n(n-1)}{2}.$$

10.2 Đồ thị vòng

A cycle (*đồ thị vòng*) C_n, $\boldsymbol{n \geq 3}$, consists of ***n*** **vertices** $v_1, v_2, \ldots, v_n$ and edges $\{v_1, v_2\}; \{v_2, v_3\}; \ldots ; \{v_{n-1}; v_n\}$, and $\{v_n, v_1\}$.

- Đơn đồ thị
- Số đỉnh: $|V| = n \geq 3$
- Bậc: $deg(v) = 2, \; \forall v \in V$
- Số cạnh: $|E| = n$

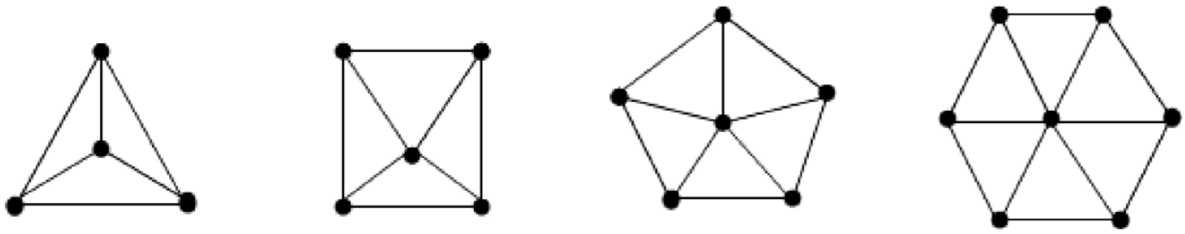


C_3 C_5 C_4 C_6

10.3 Đồ thị hình bánh xe

We obtain a wheel (*đồ thị hình bánh xe*) W_n when we add **<u>an additional vertex</u>** to a cycle C_n, for $n \geq 3$, and connect this new vertex to each of the n vertices in C_n.

- Số đỉnh: $|V| = n + 1, n \geq 3$
- Bậc: $deg(v) = 3, \; \forall v \in V \setminus \{u\}$; $deg(u) = n$
- Số cạnh: $|E| = 2n$

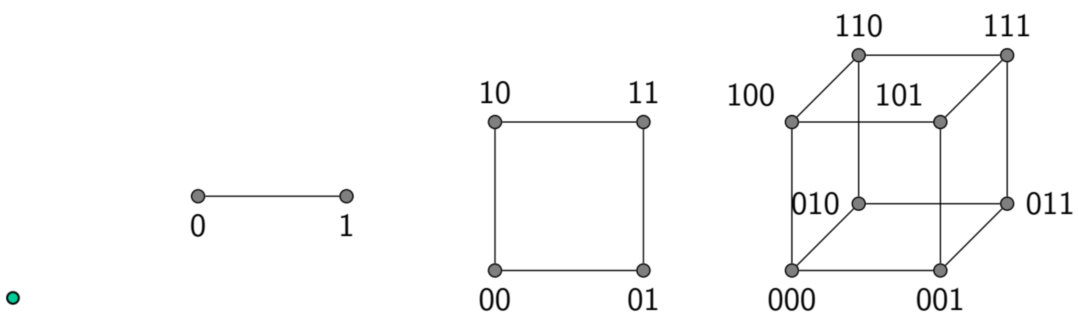


W_3 W_4 W_5 W_6

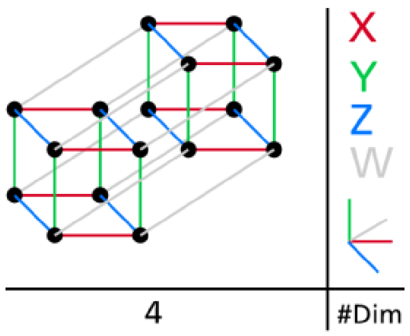
10.4 Khối n chiều

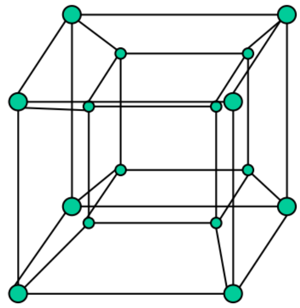
An n-dimensional hypercube (*khối n chiều*), Q_n, is a graph that has vertices representing **the $\mathbf{2^n}$ bit strings of length *n*.** Two vertices are adjacent if the bit strings that they represent differ in *exactly one bit position*.

- Số đỉnh: $|V| = 2^n$.
- Bậc: $deg(v) = n, \; \forall v \in V$
- Số cạnh: $|E| = n. \, 2^{n-1}$



Q_0 Q_1 Q_2 Q_3



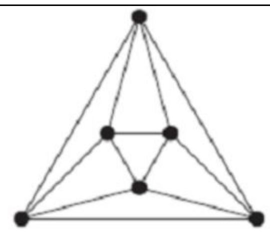


Q_4

10.5 Đồ thị đều bậc k (Đồ thị k-đều)

- Mọi đỉnh đều có cùng bậc k
- Số đỉnh: $|V| = n$
- *Bậc:* $deg(v) = k, v\ V$
- Số cạnh: $|E| = n.k/2$

Ví dụ: C_n là đồ thị đều bậc 2; K_n là đồ thị đều bậc (n-1)



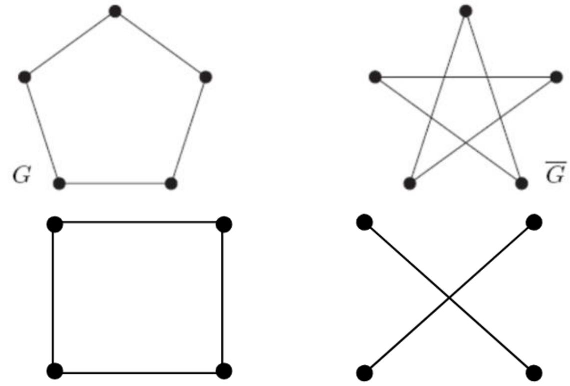
G

10.6 Đồ thị bù (graph complements)

- Hai đơn đồ thị G và G' được gọi là bù nhau nếu
    - chúng có chung các đỉnh
    - *Cạnh nào thuộc G thì không thuộc G' và ngược lại*
- Ký hiệu: G' = $\overline{G}$.

$\overline{G} = (V; \overline{E})$, where an edge $xy \in \overline{E}$ if and only if $xy \notin E$.

→ Note that graph complements are only ***defined for simple graphs*** (graphs without loops and multi-edges).



10.7 Đồ thị lưỡng phân (đồ thị hai phía - bipartite graph)

- Một đồ thị G được gọi là đồ thị lưỡng phân nếu tập các đỉnh của G có thể phân thành 2 tập hợp không rỗng, rời nhau sao cho mỗi cạnh của G nối một đỉnh thuộc tập này đến một đỉnh thuộc tập kia.

- ***Cụ thể:*** Đơn đồ thị G = (V, E) gọi là đồ thị hai phía nếu:

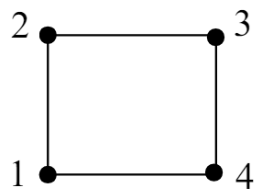
+ $V = X \cup Y,\ X \neq \emptyset,\ Y \neq \emptyset,\ X \cap Y = \emptyset$

+ Mỗi cạnh của G sẽ có một đỉnh thuộc X và một đỉnh thuộc Y.

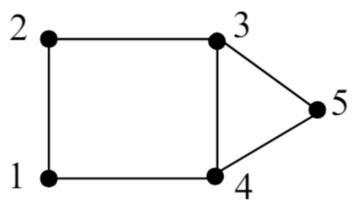
- Đồ thị hai phía xuất hiện trong các bài toán dùng đồ thị biểu diễn quan hệ hai ngôi giữa hai tập A và tập B không giao nhau. Một ví dụ cho quan hệ này là quan hệ hôn nhân giữa hai tập hợp người nam và nữ.

<u>*Định lý:*</u> **G là đồ thị hai phía ⇔ G không có chu trình độ dài lẻ.**

Ví dụ 1:

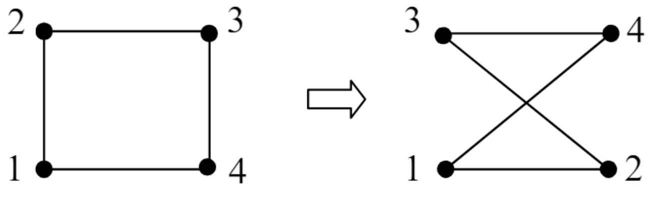


G_1



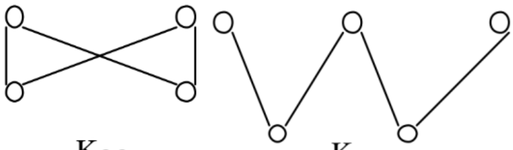
G_2

Trong hình trên, G_1 là đồ thị 2 phía vì không có chu trình độ dài lẻ, G_2 không là đồ thị hai phía vì có chu trình độ dài lẻ là 3, 4, 5, 3. Đồ thị G_1 có thể biểu diễn lại như sau:



G_1

Ví dụ 2: Đồ thị sau lưỡng phân, nhưng không đầy đủ.



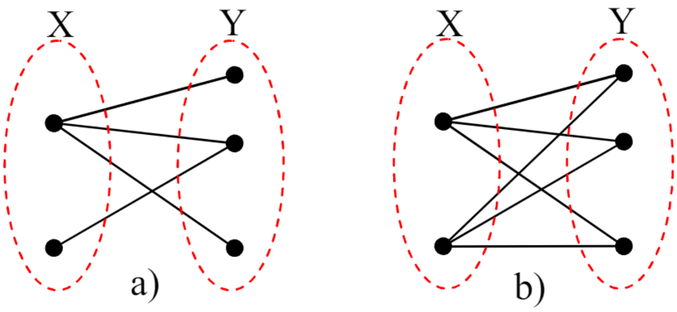
$K_{2,2}$ $K_{3,2}$

- ***Đồ thị hai phía đầy đủ (Complete bipartite graph, biclique):*** là đồ thị lưỡng phân đơn, vô hướng thỏa với mọi cặp đỉnh (i, j) mà $i \in X_1$ và $j \in X_2$ thì có đúng một cạnh của G nối i và j.

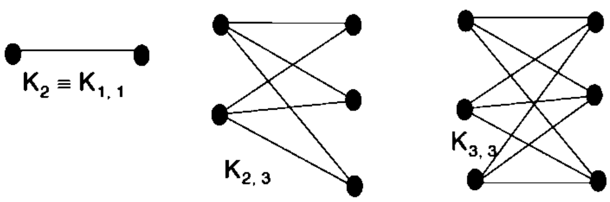
Đơn đồ thị G = (X ∪ Y, E) được gọi là đồ thị hai phía đầy đủ nếu: Mỗi đỉnh thuộc X sẽ được nối với mỗi đỉnh thuộc Y.

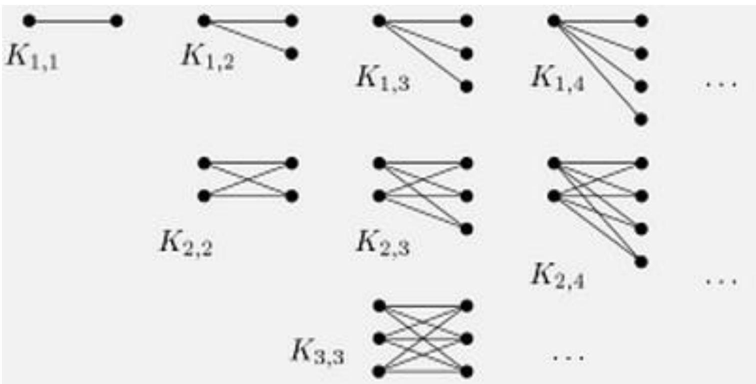
Nếu |X| = m và |Y| = n thì ta sẽ ký hiệu là: $K_{m,n}$

*** Đồ thị hai phía đầy đủ $K_{m,n}$ có:** *m + n đỉnh, m.n cạnh* (mỗi trường hợp của m có n cách chọn cạnh)

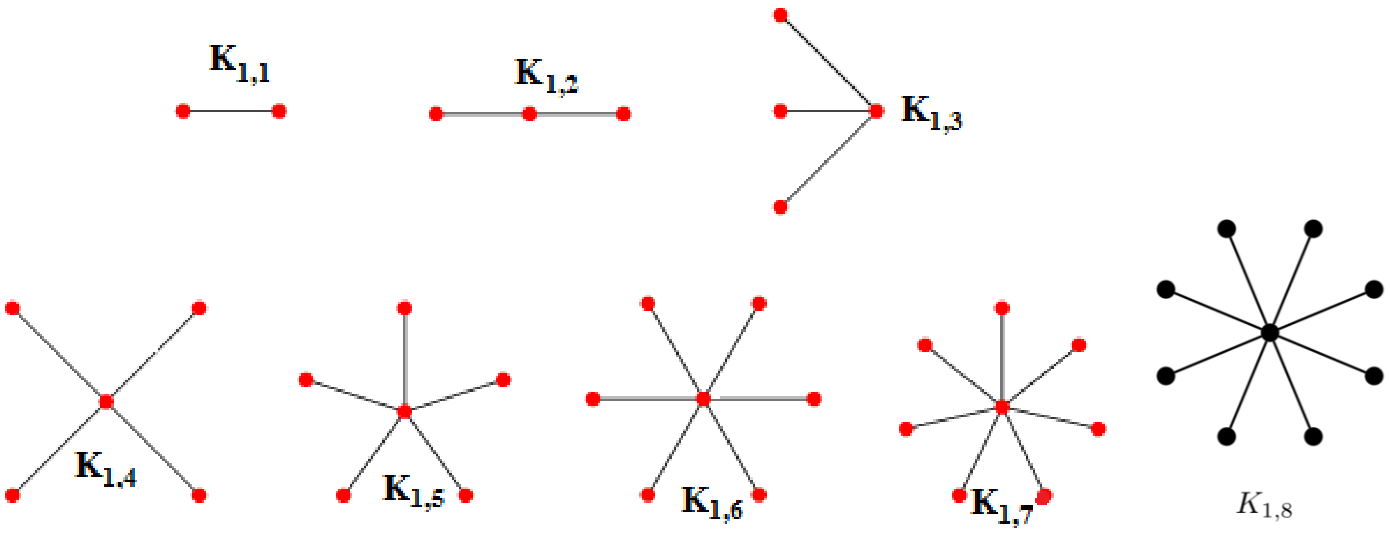


Đồ thị 2 phía a), đồ thị 2 phía đủ $K_{2,3}$ b)

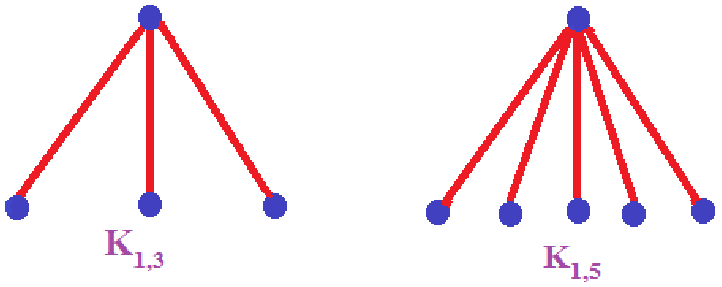




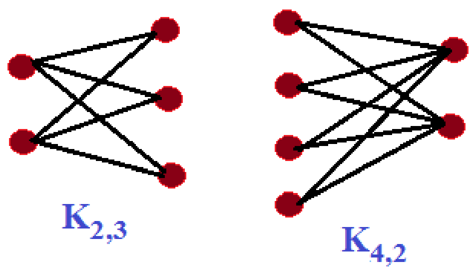
+ Với mọi k, $K_{1,k}$ ta có đồ thị hình sao.

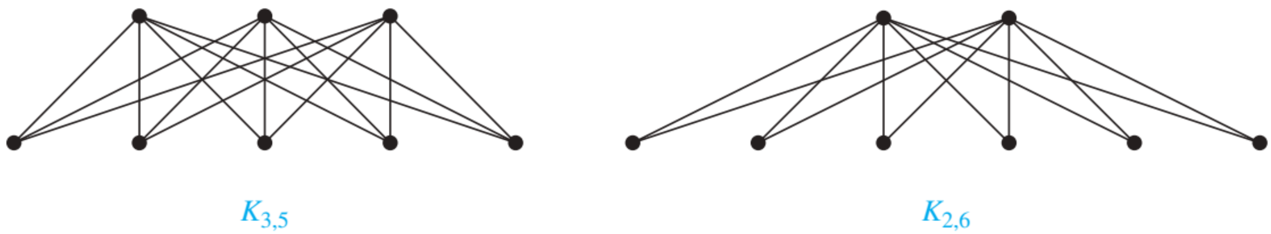


+ Hay với đồ thị $K_{1,k}$ ta có đồ thị hình vuốt, hoặc một cây.

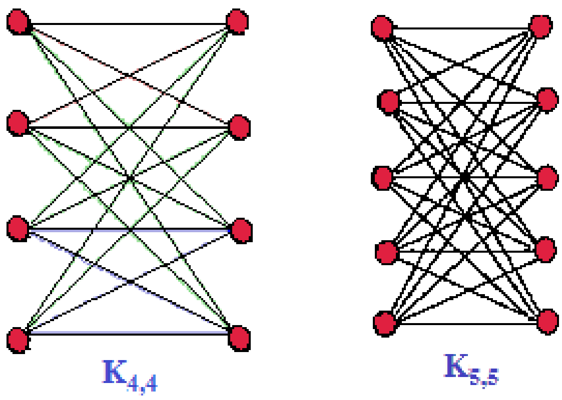


+ $K_{m,n}$ với m khác n.





+ $K_{m,n}$ với m = n.



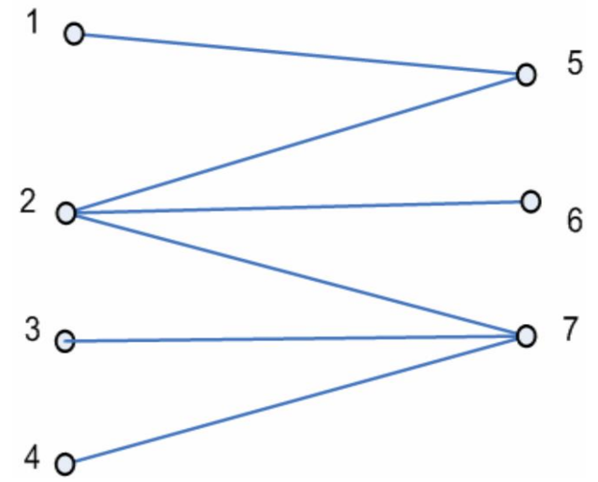
- Thuật toán kiểm tra đồ thị hai phía

1. Chọn v là đỉnh bất kỳ. Đặt X = {v}
2. Y = { u | u kề với v, ∀ v ∈ X}
3. Nếu X ∩ Y ≠ ∅ ⇒ G không là đồ thị hai phía

4. Ngược lại, đặt X := Y Quay trở lại 2.

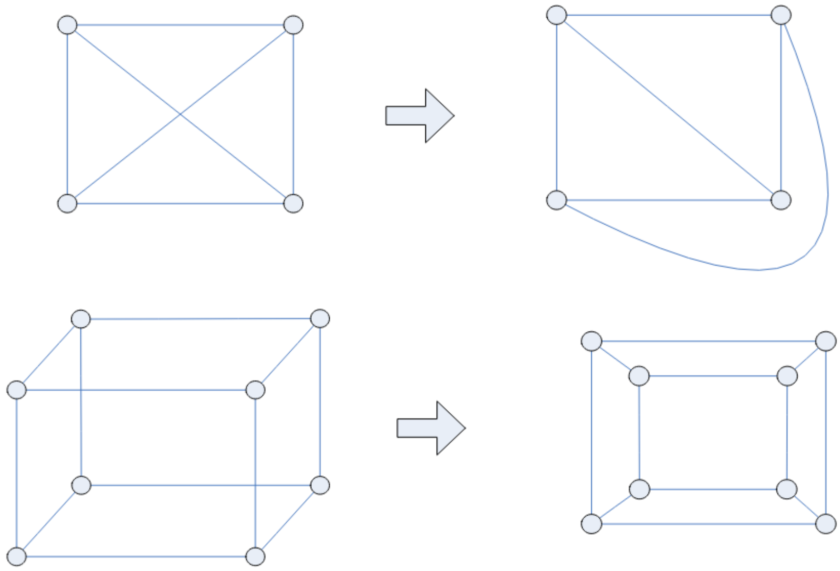
5. Nếu tất cả các đỉnh được xét hết mà không xảy ra 3. thì G là đồ thị hai phía. Ngược lại G không là đồ thị hai phía.

Ví dụ:

X= {1} Y= {5}, X ∩ Y = ∅, ⇒ X:=Y Y= {1, 2} *(5 kề với 1, 2)*, X ∩ Y = ∅, ⇒ X:=Y Y= {5, 6, 7}, X ∩ Y = ∅, ⇒ X:=Y Y = {1, 2, 3, 4} DỪNG Khi đó đồ thị là hai phía: X = {1, 2, 3, 4} Y = {5, 6, 7}	

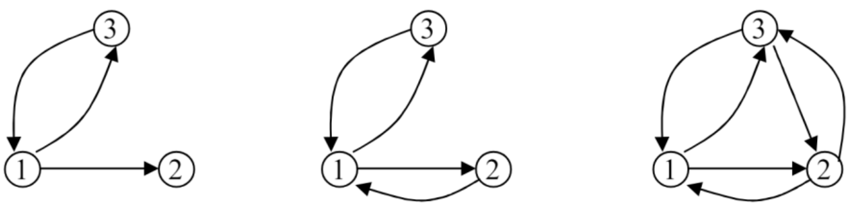
10.8 Đồ thị phẳng

Đồ thị được gọi là đồ thị phẳng nếu ta có thể vẽ nó trên một mặt phẳng mà các cạnh không giao nhau.



10.9 Đồ thị đối xứng

- Cho G = (V, E) là đồ thị có hướng, G được gọi là đồ thị đối xứng nếu (u, v) ∈ E ⇒ (v, u) ∈ E.
- G được gọi là đối xứng đủ nếu giữa 2 đỉnh bất kỳ đều có 2 cung ngược chiều nhau.

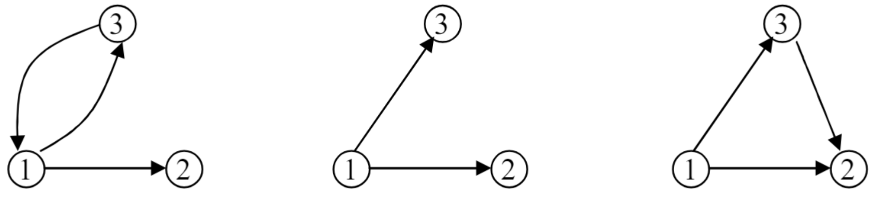


G_1 G_2 G_3

Đồ thị G_1 không đối xứng, G_2 đối xứng, G_3 đối xứng đủ

10.10 Đồ thị phản xứng

- Cho G = (V, E) là đồ thị có hướng, G được gọi là đồ thị phản xứng nếu (u,v) ∈ E ⇒ (v,u) ∉ E.
- G được gọi là phản xứng đủ nếu G đơn và giữa 2 đỉnh bất kỳ có đúng một cung, ký hiệu là T_n.

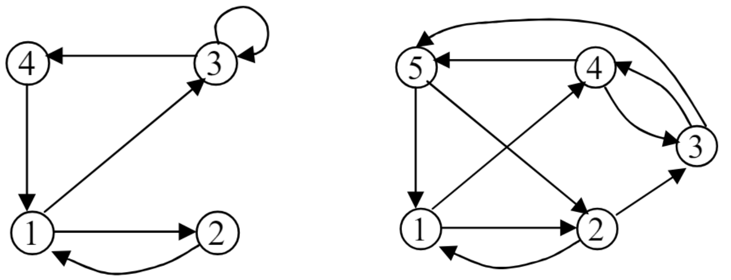


G_1 G_2 G_3

G_1 không phản xứng, G_2 phản xứng, G_3 phản xứng đủ

10.11 Đồ thị cân bằng

- Đồ thị có hướng G được gọi là căn bằng (hay giả đối xứng) nếu $d^+(v) = d^-(v)$ $\forall v \in V$.
- Nếu G đơn và $d^+(v) = d^-(v) = k$, $\forall v \in V$ thì G được gọi là k-đều.

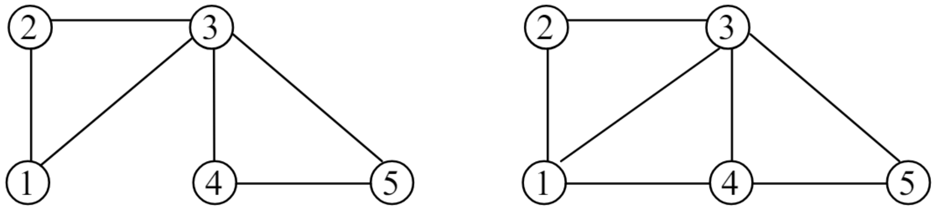


G_1 G_2

Đồ thị G_1 căn bằng, G_2 là 2-đều

10.12 Đồ thị song liên thông

Một đồ thị vô hướng được gọi là song liên thông (biconnected) nếu nó *liên thông và không có đỉnh khớp*, nghĩa là nếu xóa một đỉnh bất kì thì đồ thị vẫn liên thông (*hoặc không chứa đỉnh rẽ nhánh*).



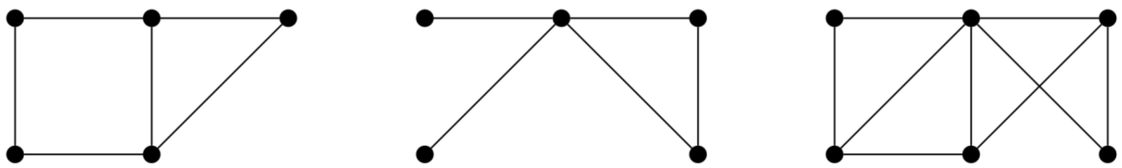
G_1 G_2

Đồ thị G_1 liên thông nhưng không song liên thông vì có đỉnh rẽ nhánh là 3, đồ thị G_2 là song liên thông.

11. Một số phép biến đổi trên đồ thị

11.1 Phép hợp hai đồ thị

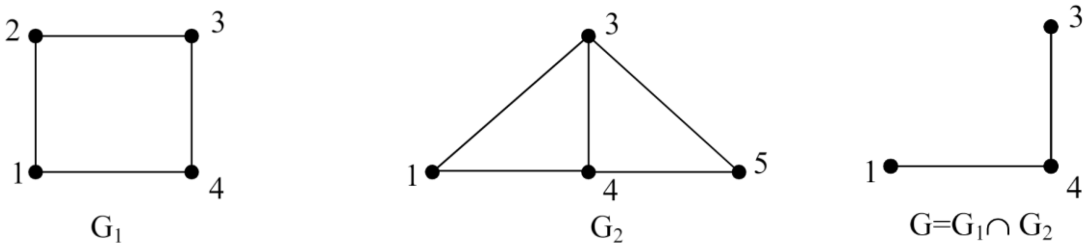
The **union** (*hợp*) of two **simple graphs** $G_1 = (V_1; E_1)$ and $G_2 = (V_2; E_2)$ is a simple graph with vertex set $V_1 \cup V_2$ and edge set $E_1 \cup E_2$. The union of G_1 and G_2 is denoted by $G_1 \cup G_2$.



G_1 G_2 $G_1 \cup G_2$

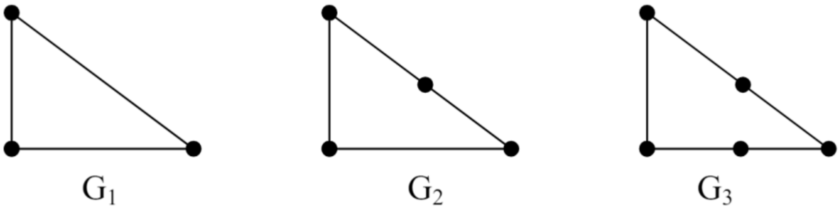
11.2 Phép giao hai đồ thị

Phép giao giữa hai đồ thị $G_1 = (V_1, E_1)$ và $G_2 = (V_2, E_2)$ có kết quả là đồ thị $G = (V, E)$ với $V = V_1 \cap V_2$ và $E = E_1 \cap E_2$, ký hiệu là $G = G_1 \cap G_2$.



11.3 Phép phân chia sơ cấp

- Phép phân chia sơ cấp là việc ***chia cạnh*** (u, v) của một đồ thị G bằng cách ***loại bỏ cạnh này*** khỏi G và ***thêm vào một đỉnh mới w cùng với hai cạnh*** (u, w) và (w, v).
- Hai đồ thị G_1 và G_2 được gọi là đồng cấu (còn gọi là đồng phôi) nếu chúng có được bằng cách *thực hiện một dãy các phép phân chia sơ cấp trên một đồ thị* nào đó.



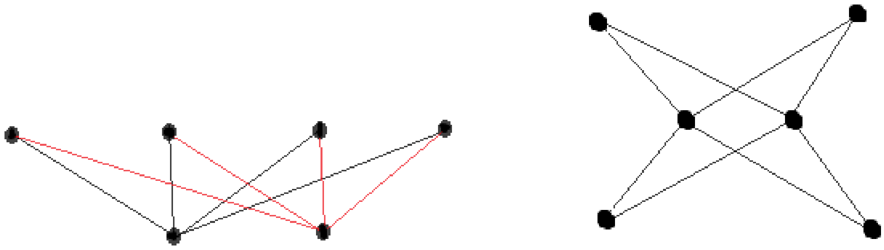
Dãy các phép phân chia sơ cấp trên đồ thị G_1

G_2 và G_3 là đồng cấu vì có được bằng cách chia cạch từ G_1

12. Bài tập

Bài tập 1: Tìm đồ thị với 6 đỉnh: 2 đỉnh bậc 4 và 4 đỉnh bậc 2. Vẽ 2 đồ thị như vậy.

Áp dụng định lý bắt tay: 2.4 + 4.2 = 16 = 2|E| → |E| = 16/2 = 8 → Tồn tại đồ thị có 8 cạnh.



Bài tập 2: Có bao nhiêu đỉnh cho đồ thị với 6 cạnh và mỗi đỉnh có bậc 2?

Áp dụng định lý bắt tay: 2.x = 6.2 → x = 6 (đỉnh).

Bài tập 3: Có tồn tại đồ thị với 12 đỉnh với 2 đỉnh bậc 3 và các đỉnh còn lại có bậc 4?

Áp dụng định lý bắt tay: 2.3 + 10.4 = 46 = 2.23 → |E| = 23.

Bài tập 4: Có tồn tại đồ thị với 4 đỉnh với và 7 cạnh?

- Có 4 đỉnh, nên một đỉnh sẽ kề với tối đa 3 đỉnh (còn lại) → Bậc của một đỉnh sẽ <= 3.

Từ đây khái quát: **Bậc của một đỉnh bất kỳ ≤ (n – 1), với n là số đỉnh trên đồ thị.**

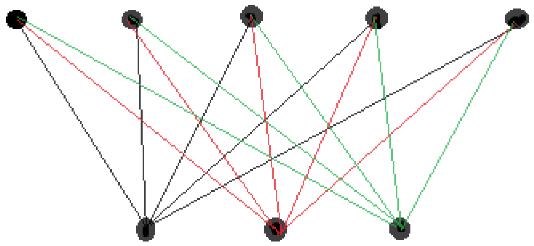
- Áp dụng định lý bắt tay: $\sum_{v \in V} deg(v) = 2|E|$ = 2.7 = 14.

Giả sử 4 đỉnh đều có bậc tối đa, là bậc 3 → $\sum_{v \in V} deg(v)$ = 4.3 = 12 < 2|E|

→ Không tồn tại đồ thị với ycbt.

Bài tập 5: G có 8 đỉnh và 15 cạnh với bậc các đỉnh là 3 hoặc 5. *Có bao nhiêu đỉnh bậc 5?* Vẽ G.

- Gọi x, y lần lượt là số đỉnh có bậc 3 & bậc 5.
- Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = 8 \\ 3x + 5y = 15.2\ (\text{Định lý BT}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \end{cases}$ → Có 3 đỉnh bậc 5.



Bài tập 6: Chứng minh rằng đơn đồ thị n đỉnh có ít nhất 2 đỉnh có cùng bậc.

- Vì G là đơn đồ thị nên mỗi đỉnh của G không có khuyên và chỉ có thể nối với các đỉnh khác không quá một cạnh, nghĩa là mỗi đỉnh của G có bậc tối đa là (n – 1) (*).
- Giả sử bậc của các đỉnh của G đều khác nhau. Khi đó bậc của n đỉnh của G lần lượt là 0, 1, ..., (n – 1), nghĩa là G phải có đỉnh bậc 0.
- Do G có đỉnh bậc 0 nên các đỉnh khác của G có bậc tối đa là (n – 2) (mâu thuẫn (*)).
- Vậy có ít nhất 2 đỉnh của G có cùng bậc.

Bài tập 7: Giả sử trong bảng *A* của giải bóng đá sinh viên khoa *CNTT* mở rộng có 5 đội thi đấu vòng tròn tính điểm.

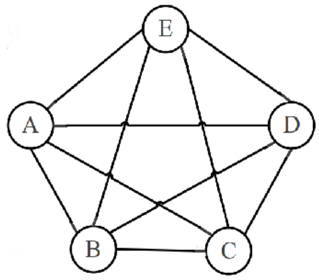
• *Hãy biểu diễn các trận đấu trong bảng này bằng 1 đồ thị.*

Với 5 đội, tổng số trận đấu sẽ là $C_5^2 = 10$ trận đấu.

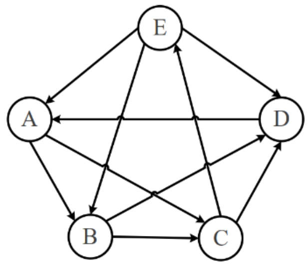
Mỗi đỉnh đại diện cho một đội.

Mỗi cạnh kết nối hai đỉnh đại diện cho một trận đấu.

Do đó, đồ thị sẽ có 5 đỉnh và 10 cạnh, và là đồ thị đầy đủ vô hướng K_5.



Giả sử nếu có xét thắng thua giữa các đội thì có thể biểu diễn bằng đồ thị có hướng như hình bên, với quy ước *đội ở gốc mũi tên thắng đội ở đầu mũi tên*:



• *Cho biết bậc của 1 đỉnh bất kỳ và ý nghĩa của nó.*

Mỗi đỉnh (đội) sẽ có bậc là 4, vì mỗi đội sẽ đấu với mỗi đội khác (1 trong 4 đội còn lại) chính xác một lần.

• *Tìm mối liên hệ giữa tổng số trận đấu và tổng số bậc.*

Tổng số cạnh trong đồ thị sẽ bằng tổng số trận đấu.

Tổng số bậc của tất cả các đỉnh sẽ bằng gấp đôi tổng số cạnh (vì mỗi cạnh được tính hai lần, một lần cho mỗi đỉnh mà nó kết nối).

Bài tập 8: Giả sử các nhóm học phần *Hp1*, *Hp2, Hp3, Hp4* và *Hp5* có thể được phân công cho các giảng viên *Gv1*, *Gv2*, *Gv3* hoặc *Gv4*.

• *Hãy vẽ đồ thị biểu diễn tất cả các khả năng có thể phân công học phần cho giảng viên.*

Có 5 nhóm học phần (Hp1, Hp2, Hp3, Hp4, Hp5) và 4 giảng viên (Gv1, Gv2, Gv3, Gv4).

Mỗi nhóm học phần có thể được phân công cho bất kỳ giảng viên nào.

Đồ thị sẽ có 5 đỉnh đại diện cho các nhóm học phần và 4 đỉnh đại diện cho các giảng viên. Các cạnh sẽ kết nối mỗi nhóm học phần với mỗi giảng viên mà nó có thể được phân công.

• *Cho biết đó là loại đồ thị gì? Giải thích.*

Loại đồ thị được sử dụng ở đây là đồ thị hai phía vô hướng đầy đủ.

Do việc phân công không có sự phân biệt giữa các chiều, nghĩa là việc phân công nhóm học phần cho một giảng viên không khác với việc phân công giảng viên cho một nhóm học phần.

Trong đồ thị này, mỗi cạnh sẽ không có hướng, chỉ đơn giản biểu thị một mối quan hệ giữa nhóm học phần và giảng viên có thể phân công.

Số cạnh:

+ Mỗi trường hợp GV được phân vào 1 trong 5 HP → Có 5 cách chọn HP.

+ Mà có 4 GV → có 20 cách chọn HP tổng cộng, tương ứng với 20 cạnh trên đồ thị.