CHƯƠNG 4. ĐỒ THỊ EULER & ĐỒ THỊ HAMILTON

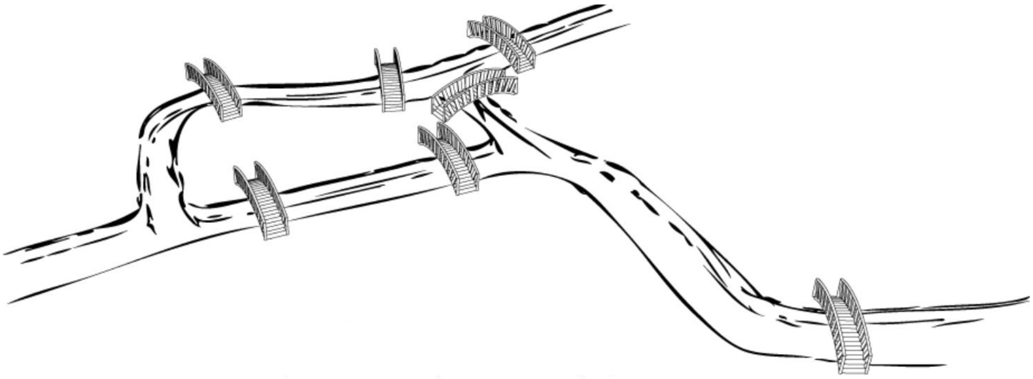
Contents

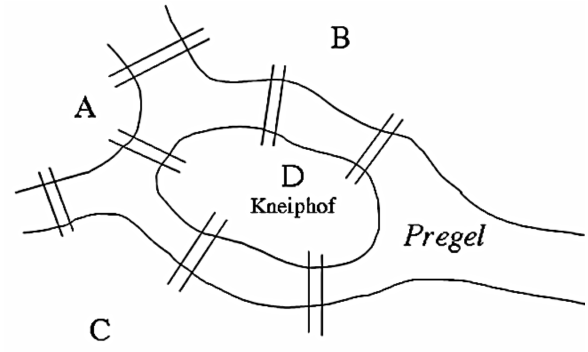
4.1 Chu trình – Đường đi - Đồ thị Euler

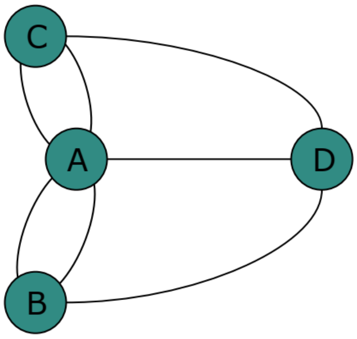
4.1.1 Bài toán Tìm đường đi qua 7 cái cầu trong thành phố Konigsberg (Bài toán Euler)

- Thành phố Konigsberg thuộc nước Cộng hòa Litva có con sông Pregel chảy qua, giữa sông có cù lao Kneiphof tạo nên bốn vùng đất. Người ta đã xây dựng 7 cây cầu để nối các vùng đất này lại với nhau

- Làm sao xuất phát từ 1 vị trí, **di chuyển qua tất cả các cầu, mỗi cầu qua 1 lần,** và trở về vị trí xuất phát







- Chuyển bài toán về dạng đồ thị:

+ Mỗi vùng là một đỉnh

+ Mỗi chiếc cầu là một cạnh

- Bài toán đồ thị đặt ra: Có thể đi qua tất cả các cạnh của đồ thị, sao cho mỗi cạnh chỉ đi qua đúng một lần được không? (Hay có thể nói: Có thể vẽ được đồ thị bằng một nét liền được hay không?)

- *Khái niệm đồ thị được đề cập bao gồm đơn đồ thị & đa đồ thị.*

4.1.2 Các khái niệm

- *Đường đi Euler* là **đường đi đơn** đi qua ***tất cả các cạnh*** của đồ thị, mỗi cạnh đi qua **đúng một lần** (~ các đỉnh vẫn được đi qua nhiều lần) **(nếu là đồ thị có hướng thì đường đi phải tôn trọng hướng của cạnh)**.

Nếu đồ thị có đường đi Euler thì được gọi là *đồ thị **nửa** Euler*.

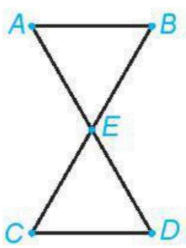
- *Chu trình Euler* là **chu trình đơn** đi qua ***tất cả các cạnh*** của đồ thị, mỗi cạnh đi qua **đúng một lần**.

Nếu đồ thị có chu trình Euler thì được gọi là *đồ thị Euler.*

- Nhận xét: Rõ ràng **đồ thị Euler là nửa Euler**, nhưng điều ngược lại không đúng.

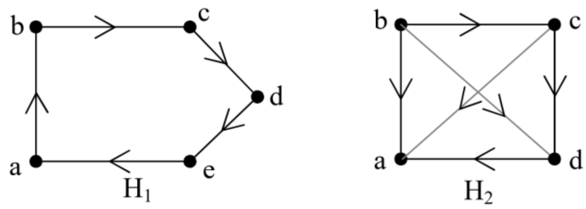
Ví dụ:

a)



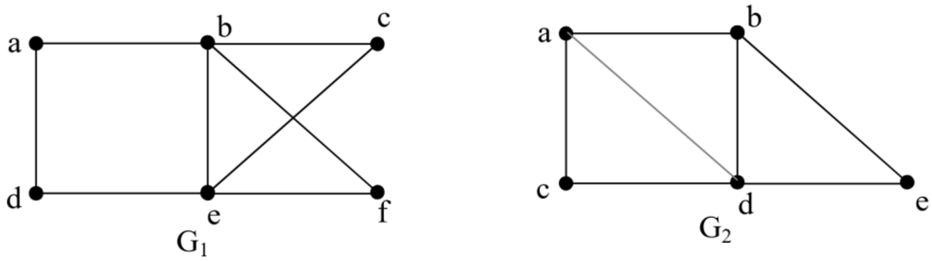
Một chu trình Euler của đồ thị là ABECDEA.

b)



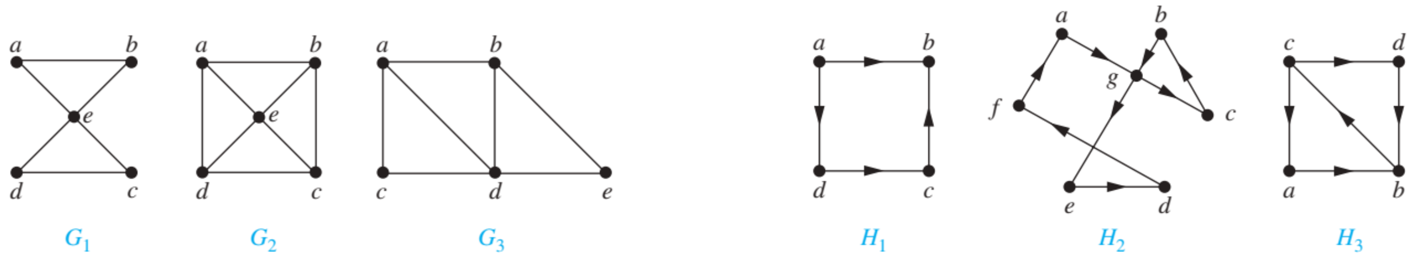
- Đồ thị H_1 là đồ thị Euler vì nó có chu trình Euler *a, b, c, d, e, a*
- Đồ thị H_2 không có chu trình cũng như đường đi Euler.

c)



- Đồ thị G_1 là đồ thị Euler vì nó có chu trình Euler: *a, d, e, b, f, e, c, b, a.*
- Đồ thị G_2 là đồ thị nửa Euler vì nó có đường đi Euler: *a, c, d, e, b, d, a, b.* Đồ thị G_2 không có chu trình Euler.

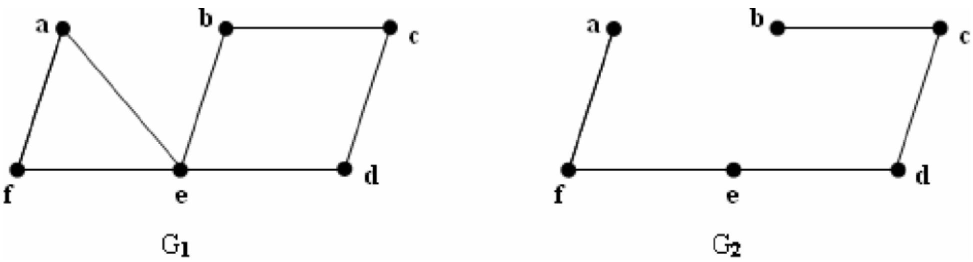
d)



- The graph G_1 has an Euler circuit, for example, *a, e, c, d, e, b, a*. Neither of the graphs G_2 or G_3 has an Euler circuit. However, G_3 has an Euler path, namely, *a, c, d, e, b, d, a, b*. G_2 does not have an Euler path
- The graph H_2 has an Euler circuit, for example, *a, g, c, b, g, e, d, f, a*. Neither H_1 nor H_3 has an Euler circuit. H_3 has an Euler path, namely, *c, a, b, c, d, b*, but H_1 does not.

* Cho đồ thị G = (V, E), nếu **mọi đỉnh *u*** của G có ***deg(u)*≥ 2 thì G có chu trình.**

Ví dụ:



- Ta thấy các đỉnh trong đồ thị G_1 đều có bậc chẵn (deg(a)=2, deg(b)=2, deg(c)=2, deg(d)=2, deg(e)=4, deg(f)=2) và G_1 có một chu trình là: *a, f, e, d, c, b, e, a.*
- Trong đồ thị G_2 có deg(a)=1, deg(b)=1 và rõ ràng G_2 không có chu trình

4.1.3 Định lý

*** <u>Định lý Euler 1:</u>**

- Đồ thị *vô hướng* **liên thông** là Euler khi và chỉ khi **mọi đỉnh đều có bậc <u>chẵn</u>.**

*** Chứng minh:**

(Điều kiện cần) G có chu trình Euler => Mọi đỉnh đều bậc chẵn

Chu trình Euler và bậc của đỉnh:

+ Khi một chu trình Euler đi qua một đỉnh u, nó sẽ sử dụng một cạnh vào và một cạnh ra tại đỉnh đó.

+ Mỗi lần đi qua đỉnh u, số lượng cạnh vào và ra đều tăng lên hai (một cạnh vào và một cạnh ra). Vì vậy, nếu u nằm trên chu trình Euler, số lần uuu xuất hiện sẽ luôn là một số chẵn.

Mọi cạnh chỉ xuất hiện một lần:

+ Chu trình Euler đi qua mỗi cạnh đúng một lần, điều này đảm bảo rằng số lượng cạnh vào và ra tại mỗi đỉnh phải bằng nhau.

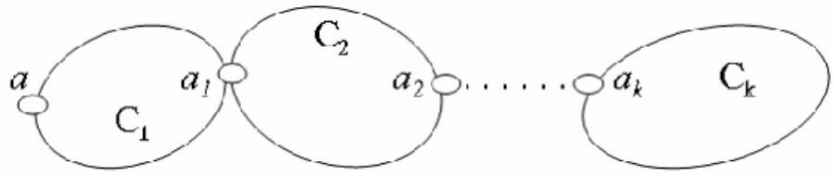
+ Do đó, số bậc của mỗi đỉnh (tổng số cạnh vào và ra) phải là một số chẵn.

(Điều kiện đủ) Mọi đỉnh đều bậc chẵn => G có chu trình Euler

<u>* Cách tìm chu trình Euler:</u>

Xuất phát từ một đỉnh *a* nào đó, ta lập dãy cạnh kề liên tiếp cho đến khi hết khả năng đi tiếp. Theo giả thiết, mọi đỉnh đều có bậc chẵn nên dãy cạnh lập được phải kết thúc tại *a*. Từ đó ta thu được chu trình C_1. Nếu đã vét hết cạnh thì đó chính là chu trình cần tìm.

Nếu vẫn còn cạnh thì do tính liên thông của đồ thị G thì phải <u>tồn tại một cạnh nào đó chưa chọn nhưng kề với một đỉnh a_1 nào đó (a_1 tồn tại trong C_1).</u> Từ a_1 và tiếp tục quá trình như trên cho đến khi hết khả năng đi tiếp, ta được chu trình C_2 ...

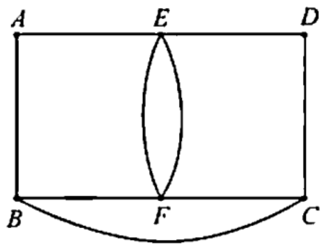


Khi đã vét hết cạnh ta lập được chu trình Euler cho đồ thị như sau: Từ đỉnh a đi theo *nửa trên* của chu trình C_1 cho đến a_1, lại tiếp tục từ a_1 đi theo *nửa trên* của C_2 cho đến a_2 ... Khi đã đến chu trình con cuối cùng ta đi *ngược lại theo các nửa dưới* của các chu trình con ... và cuối cùng trở về a. Ta nhận được một chu trình Euler.

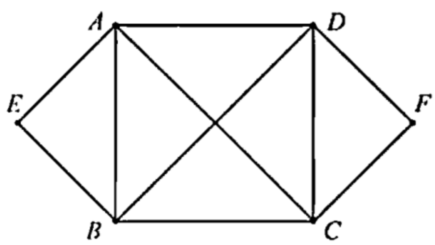
- Đồ thị *có hướng* **liên thông** là Euler khi và chỉ khi với mọi đỉnh ***tổng bán bậc vào bằng tổng bán bậc ra*** của nó (tức là mọi đỉnh đều *cân bằng*)

Từ đây cũng có thể nói: Một đồ thị G có **một chu trình Euler** nếu và chỉ nếu G ***liên thông*** & mọi đỉnh của G đều có **bậc chẵn** (*hoặc mọi đỉnh đều **cân bằng***).

Ví dụ 1:



a) Đồ thị G



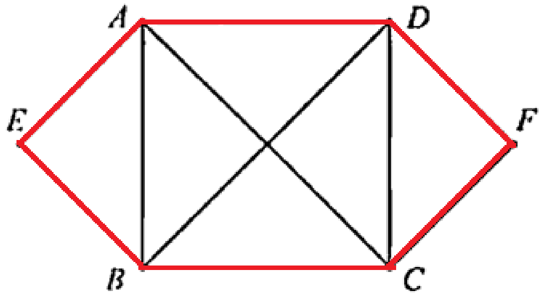
b) Đồ thị H

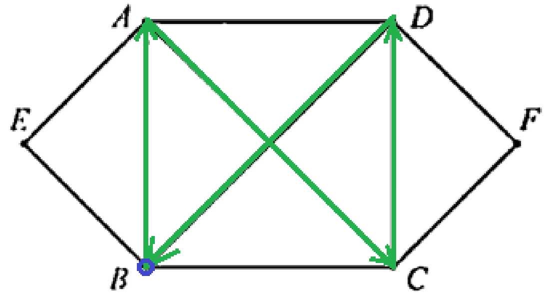
a) Đồ thị G không có chu trình Euler, vì có đỉnh B bậc 3 là bậc lẻ.

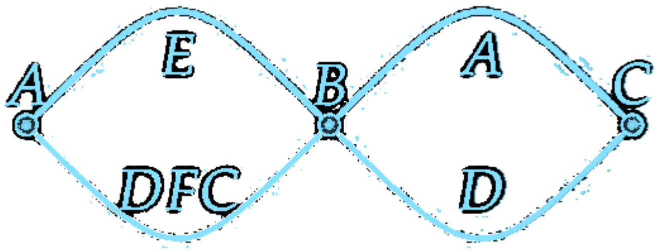
b) Ta thấy tất cả các đỉnh của đồ thị H đều có bậc chẵn nên H có chu trình Euler, chẳng hạn, AEBCDFCABDA.

**** Cách tìm chu trình đồ thị H***

- Ta dễ dàng thấy chu trình thứ nhất (C_1) là: ADFCBEA.
- Phần còn lại sẽ thuộc chu trình thứ hai (C_2). Giả sử ta chọn chu trình bắt đầu từ B. Ta được BACDB.

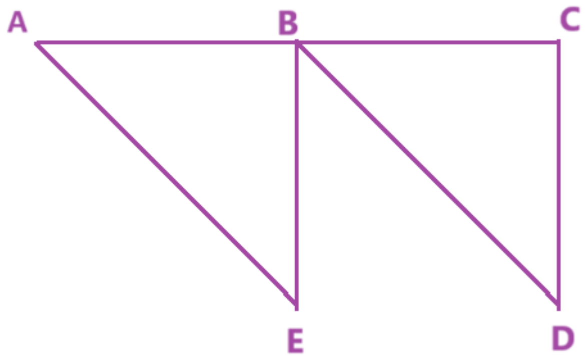


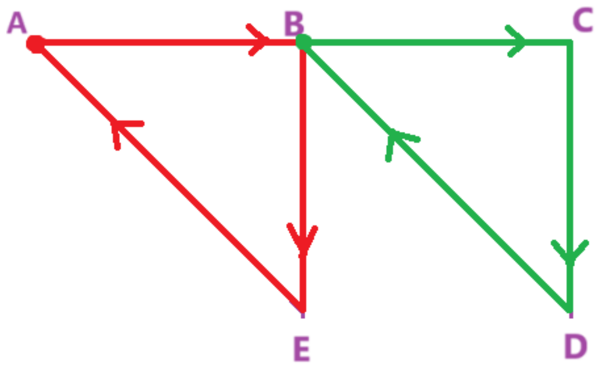


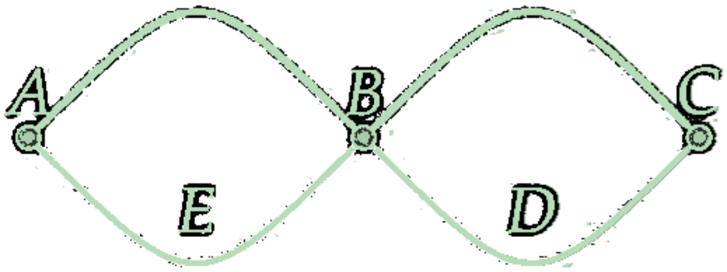


Ta có một chu trình Euler: *AEBACDBCFDA*.

Ví dụ 2:

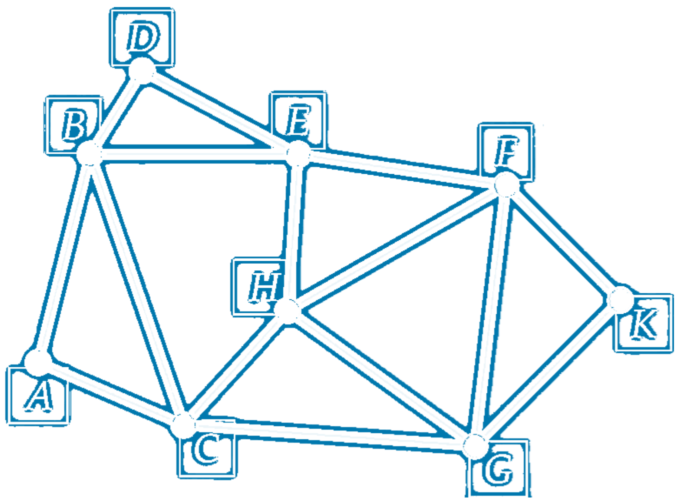


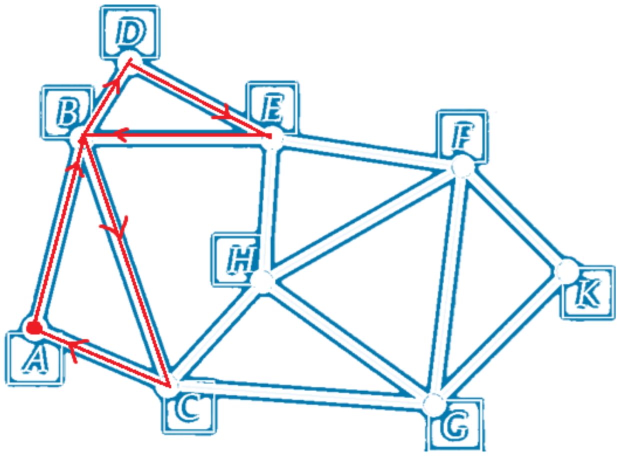


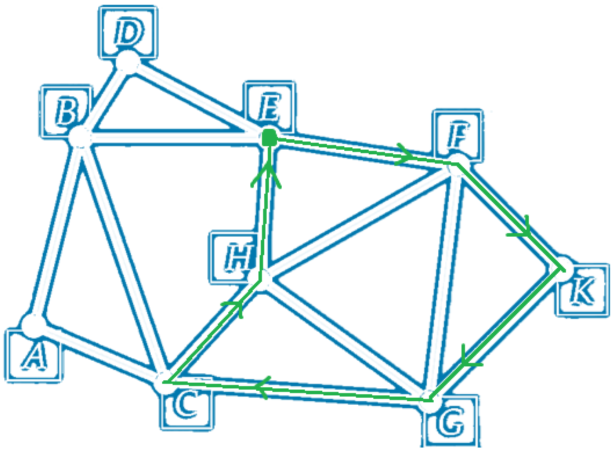


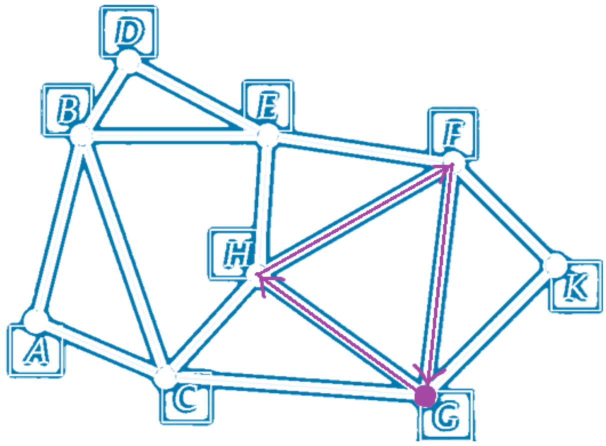
Một chu trình Euler là: *ABCDBEA*.

Ví dụ 3:





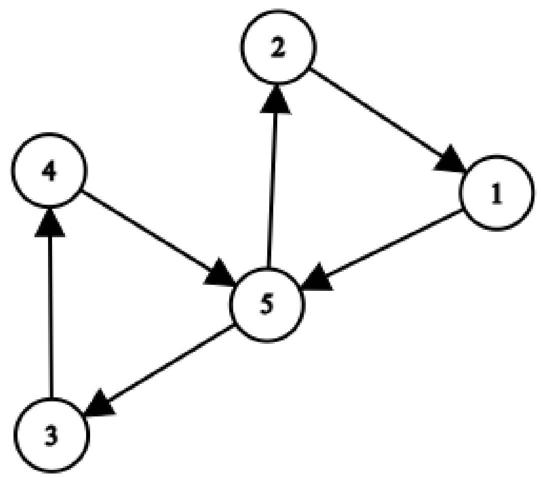




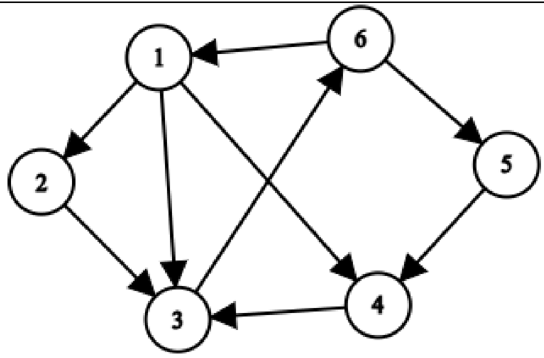
C_1: ABDEBCA, C_2: EFKGCHE và C_3: GHFG.

Ta tìm được một chu trình Euler là: *ABDEFKGHFGCHEBCA*.

Ví dụ 4:

	- Ta thấy rằng mọi đỉnh u thuộc đồ thị đều có bán bậc ra bằng bán bậc vào: outdeg(1) = 1 = indeg (1), outdeg(5) = 2 = indeg(5). - Đồng thời, các đỉnh có bậc lớn hơn 0 là 1, 2, 3, 4 và 5 đều nằm cùng một thành phần liên thông. - Do đó ta kết luận đồ thị là đồ thị Euler. - Thật vậy, 2 → 1 → 5 → 3 → 4 → 5 → 2 là một chu trình Euler trên đồ thị.

Ví dụ 5:

	- Đồ thị có những đỉnh mà bán bậc vào khác bán bậc ra. - Chẳng hạn, đỉnh 1 có 1 cạnh vào và 3 cạnh ra, tức $outdeg(1) = 1 \neq 3 = indeg(1)$. - Do đó ta kết luận đồ thị 2 không phải là đồ thị Euler.

*** <u>Định lý Euler 2:</u>**

- Đồ thị *vô hướng* **liên thông** là nửa Euler khi và chỉ khi nó chứa **0 hoặc đúng 2 đỉnh bậc <u>lẻ.</u>**

Trong trường hợp có 2 đỉnh bậc lẻ thì **<u>đường đi</u>** sẽ bắt đầu từ đỉnh bậc lẻ thứ nhất và kết thúc ở đỉnh bậc lẻ thứ hai.

*** Chứng minh:**

Nếu G có không quá hai đỉnh bậc lẻ thì số đỉnh bậc lẻ của G chỉ có thể là 0 hoặc là 2.

• Nếu số đỉnh bậc lẻ của G là 0 thì theo định lý 1: G là đồ thị Euler (tức G là nửa Euler, *vì mọi đồ thị Euler luôn là nửa Euler*)

• Nếu số đỉnh bậc lẻ của G là 2, *giả sử là u và v.*

Gọi H là đồ thị thu được từ G bằng cách thêm vào G <u>*một đỉnh mới w*</u> và <u>hai cạnh *(w, u)* và *(w, v)*.</u>

Khi đó,$\forall u \in H$: *deg(u) và deg(v) chẵn*, theo định lý 1, H có chu trình Euler.

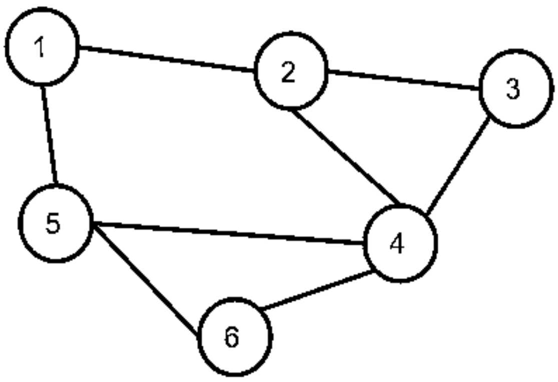
Xóa bỏ khỏi chu trình này đỉnh *w* và hai cạnh kề với nó, ta thu được đường đi Euler trong G, tức G là nửa Euler.

- Đồ thị *có hướng* **liên thông** là nửa Euler khi và chỉ khi nó chứa 2 đỉnh *a*, *b* thoả mãn: **indeg(*a*) = outdeg(*a*) – 1** và **indeg(*b*) = outdeg(*b*) + 1** **($deg^+(a) - deg^-(a) = deg^+(b) - deg^-(b) = 1$)**, còn các đỉnh khác đều *cân bằng (bán bậc vào bằng bán bậc ra)*. Khi đó đường đi bắt đầu từ đỉnh a và kết thúc ở đỉnh b.

Từ đây cũng có thể nói: Một đồ thị G có **một đường đi Euler** từ A đến B khi và chỉ khi G **liên thông** và mọi đỉnh của G đều có bậc chẵn, *chỉ trừ A và B có bậc lẻ* (*hay thỏa t/c của đồ thị có hướng*).

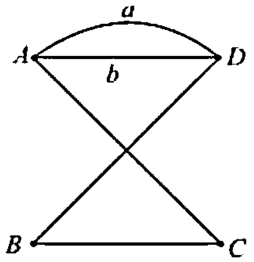
Ví dụ:

a) Với 2, 5 là các đỉnh bậc lẻ.

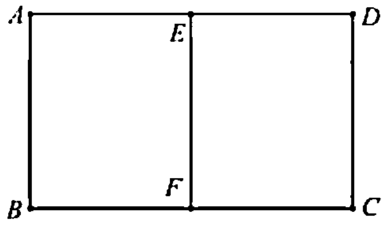


Đường đi Euler: **2**-3-4-5-6-4-2-1-**5**

b)



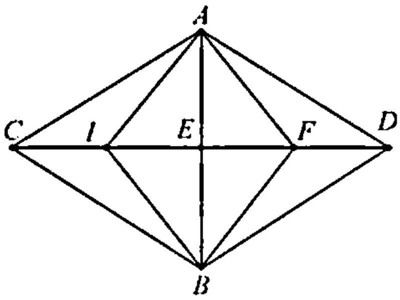
a) Đồ thị G



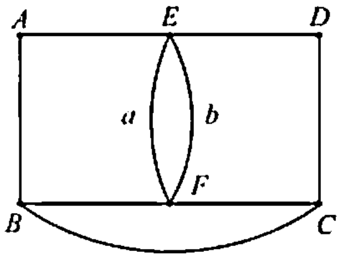
b) Đồ thị H

Hai đồ thị G và H đều có đúng hai đỉnh bậc lẻ và chúng đều có đường đi Euler.

c)



a) Đồ thị G

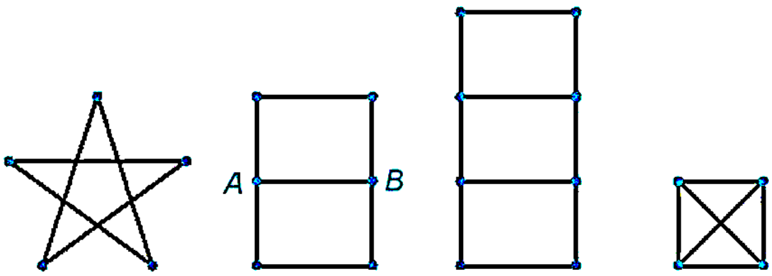


b) Đồ thị H

Đồ thị G không có đường đi Euler, có đến 4 đỉnh bậc lẻ là A, B, C, D.

Đồ thị H có đúng hai đỉnh bậc lẻ là B và C nên nó có đường đi Euler. Chăng hạn, đường đi BAEabEDCBFC là một đường đi Euler trên H.

d)



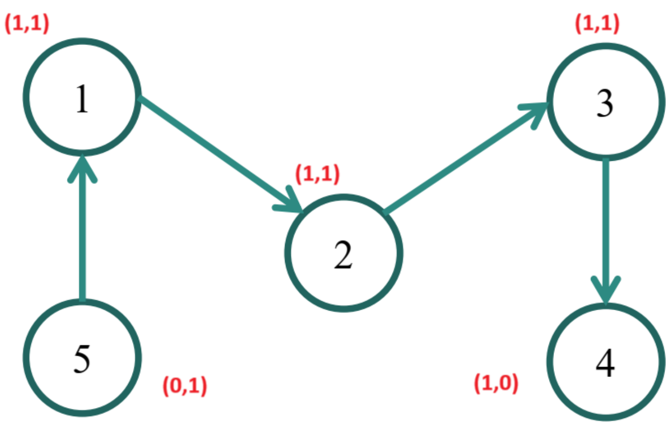
a) b) c) d)

- Đồ thị ở hình a) là liên thông và các đỉnh đều có bậc chẵn (ở đây là bậc bằng 2) nên nó có chu trình Euler.
- Đồ thị ở hình b) là liên thông và chỉ có đúng hai đỉnh bậc lẻ (ở đây là bậc bằng 3) nên nó có đường đi Euler.

Vì vậy ta có thể vẽ các hình a) và b) bằng một nét liền.

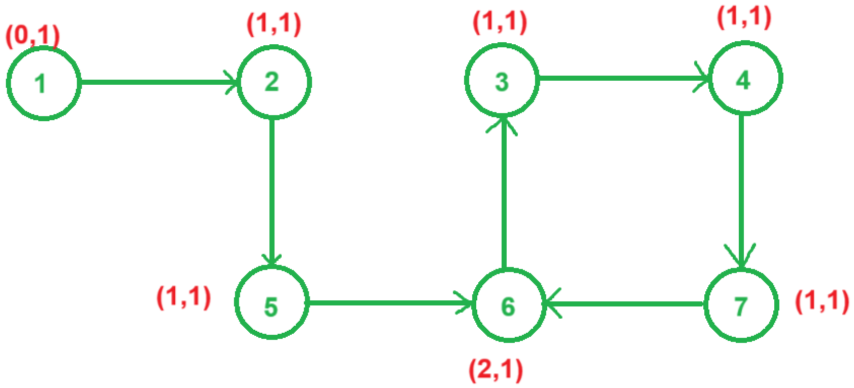
- Các đồ thị ở hình c) và d) có bốn đỉnh bậc lẻ (ở đây là bậc bằng 3) nên chúng không có chu trình Euler và cũng không có đường đi Euler. Vì vậy ta không thể vẽ các hình c) và d) bằng một nét liền.

e)



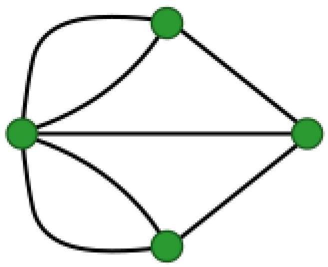
Đường đi Euler: *51234*

f)



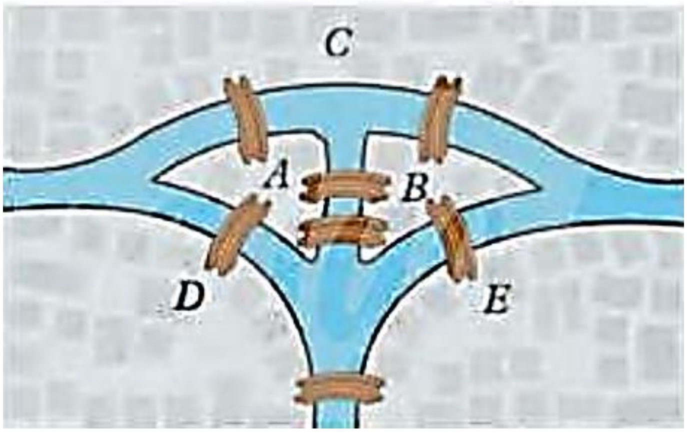
Đường đi Euler: *12563476*

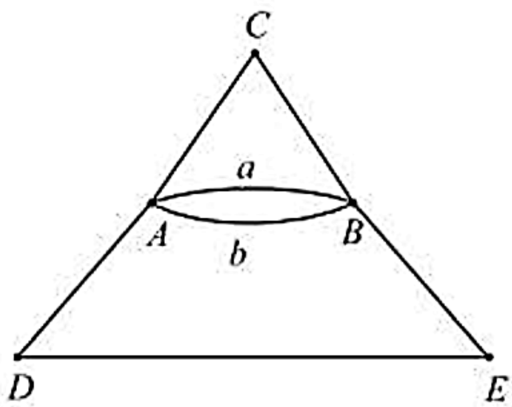
*** Xét bài toán ở 4.1.1:**



Vì các đỉnh A, B, C, D đều có bậc lẻ nên theo Định lí 2, đồ thị không có đường đi Euler và không có cả chu trình Euler. Vậy ***không thể nào đi dạo qua khắp các cây cầu của thành phố Königsberg nhưng mỗi cầu chỉ đi qua một lần.***

**** Bài toán:*** Có năm vùng đất A, B, C, D và E được nối với nhau bởi những cây cầu như Hình 11. Có hay không một cách đi qua tất cả các cây cầu, mỗi cây cầu chỉ qua một lần và quay trở lại nơi xuất phát ban đầu? Nếu có, hãy chỉ ra một cách đi như vậy.





Biểu thị mỗi vùng đất bằng một đỉnh, mỗi cây cầu bằng một cạnh nối hai đỉnh, ta được đồ thị như hình trên. Ta thấy các đỉnh của đồ thị đều có bậc chẵn. Do đó, đồ thị có chu trình Euler.

Nói cách khác, có cách đi qua tất cả các cây cầu, mỗi cây cầu chỉ đi qua một lần và quay trở lại nơi xuất phát ban đầu. Chẳng hạn, bắt đầu từ D, ta có thể đi theo chu trình Euler: DAabACBED.

4.1.4 Thuật toán tìm chu trình Euler

4.1.4.1 Thuật toán Fleury

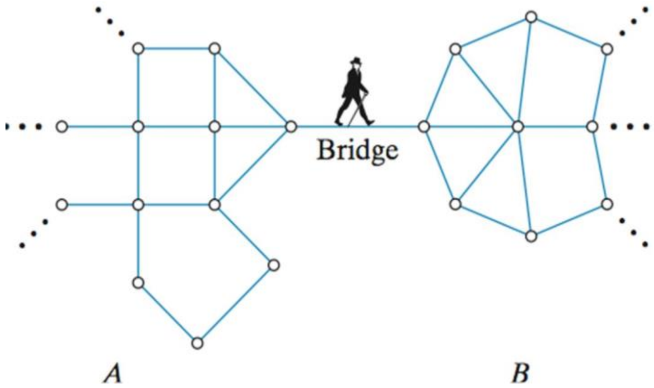
- Bắt đầu từ một đỉnh bất kỳ, đi theo các cạnh của đồ thị theo quy tắc sau:

· Qui tắc 1: Xóa các cạnh đã đi qua và các đỉnh cô lập nếu có (trừ trường hợp đỉnh cô lập là đỉnh bắt đầu).

· Qui tắc 2: Tại mỗi đỉnh, ta chỉ đi qua cầu nếu không còn đường nào khác. *(Don't burn your brigdes behind you).*

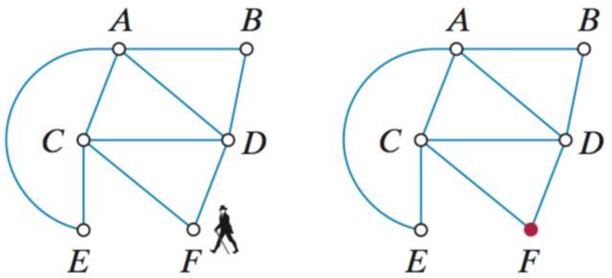
Cạnh e được gọi là cầu nếu việc loại bỏ nó sẽ làm tăng số thành phần liên thông của đồ thị

- Kết thúc thuật toán, trở về đỉnh ta đã bắt đầu.

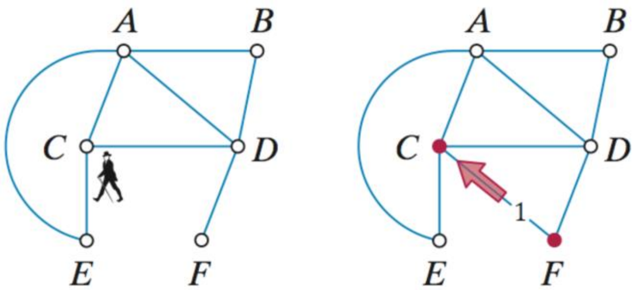


Ví dụ 1:

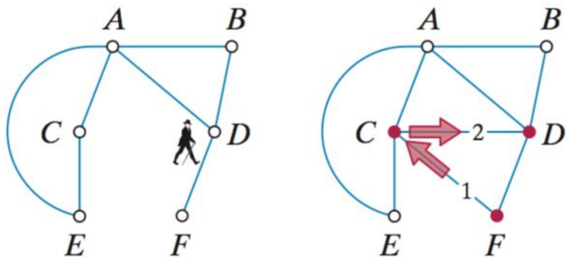
Start: We can pick any starting point we want. Let's say we start at *F*.



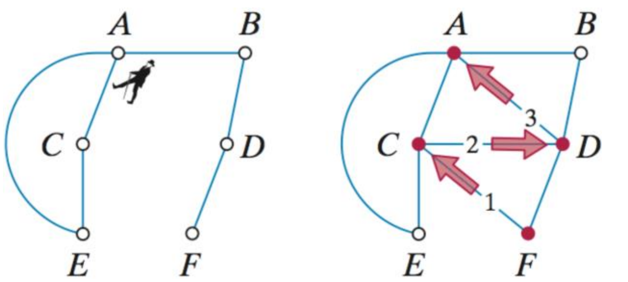
Step 1: Travel from *F* to *C*. (Could have also gone from *F* to *D*.)



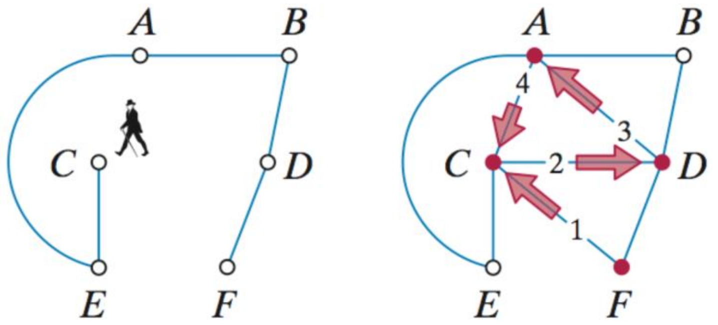
Step 2: Travel from *C* to *D*. (Could have also gone to *A* or to *E*.)



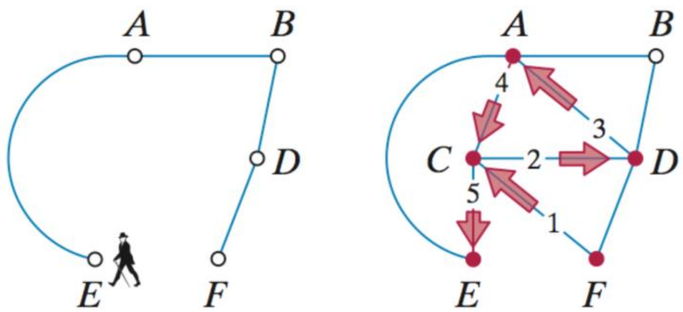
Step 3: Travel from *D* to *A*. (Could have also gone to *B* but not to *F* – *DF* is a bridge!) *(Mặc dù nếu bỏ cạnh DF thì sinh ra F là đỉnh cô lập & theo quy tắc thì ta xóa đỉnh F, nhưng do F là đỉnh xuất phát nên xóa DF là điều không thể!)*



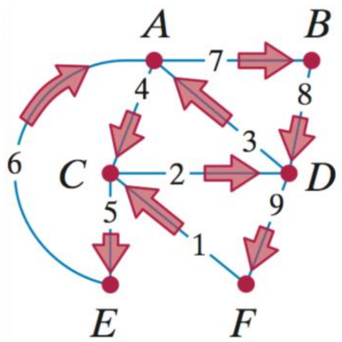
Step 4: Travel from *A* to *C*. (Could have also gone to *E* but not to *B* – *AB* is a bridge!) *(AB là cạnh cầu do nếu xóa AB thì sinh ra 2 thành phần liên thông: ACE & BDF)*



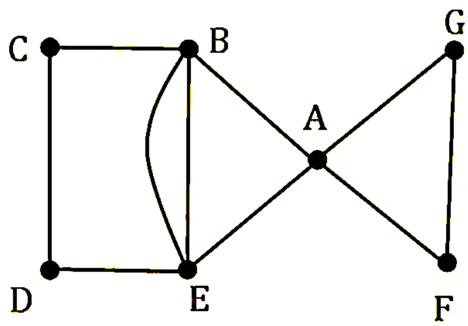
Step 5: Travel from *C* to *E*. (There is no choice!)



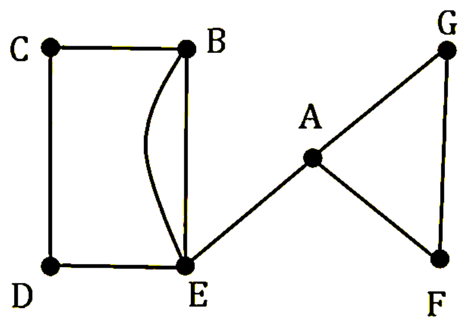
Steps 6, 7, 8, and 9: Only one way to go at each step.



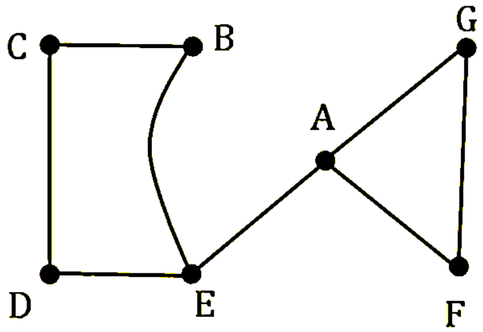
Ví dụ 2:



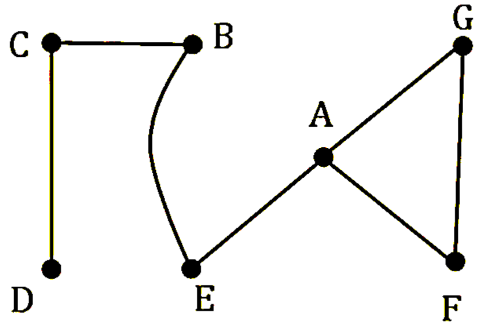
Start at A. Choose edge AB.



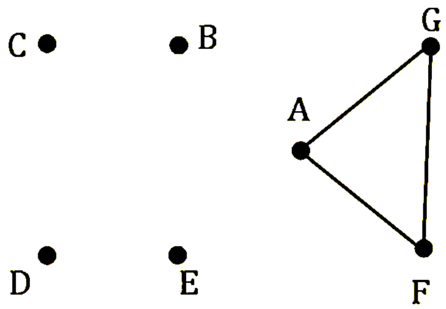
Choose edge BE.



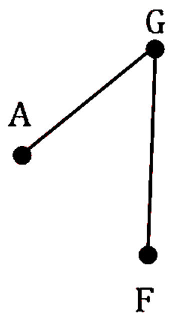
We cannot choose edge EA because this would separate the graph into two disconnected sets of edges (EA is bridge). So, we choose edge ED.



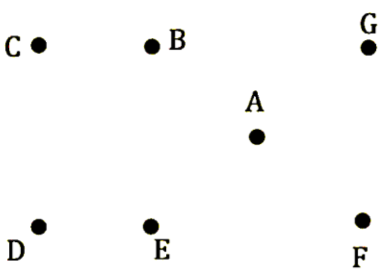
AB, BE, and ED are deleted. Notice there is only one option for the next several choices. Choose edge DC, then CB, then BE, and then EA. *(Không còn lựa chọn nào khác thì mới chọn cạnh cầu EA).*



We now can choose AF or AG. Let's choose AF.

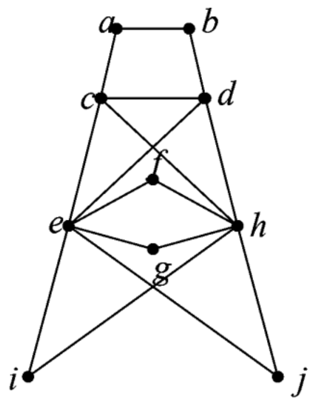


AB, BE, ED, DC, CB, BE, EA, and AF are deleted. Again we only have one choice from here. We choose edge FG and GA and we are done.

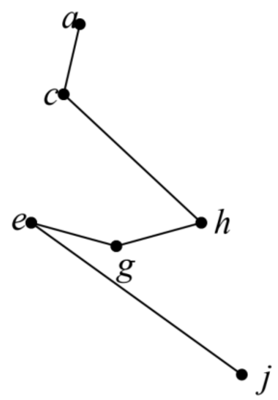


Circuit so far: ABEDCBEAFGA

Ví dụ 3:



→ ab → bd → dc → ce → ei → ih → hf → fe → ed → dh → hj

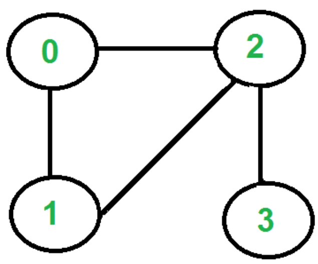


→ je → eg → gh → hc → ca => kết thúc.

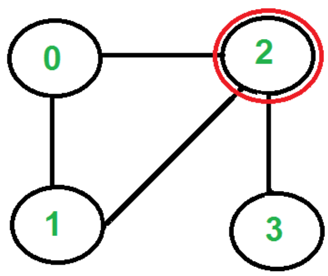
- Thuật toán Fleury còn dùng để tìm ***đường đi Euler.***

1. *Make sure the graph has either 0 or 2 odd vertices.*
2. *If there are 0 odd vertices, start anywhere. If there are 2 odd vertices, start at one of them.*
3. *Follow edges one at a time. If you have a choice between a bridge and a non-bridge, always choose the non-bridge.*
4. *Stop when you run out of edges.*

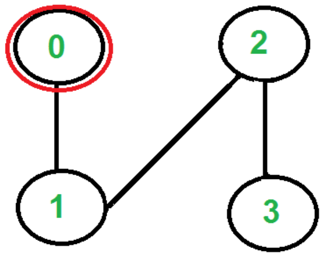
For example, let us consider the following graph.



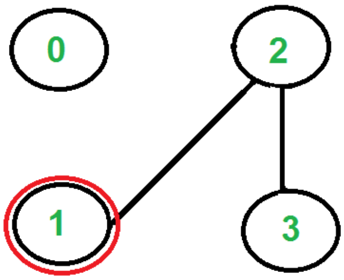
There are two vertices with odd degrees, '2' and '3', and we can start paths from any of them. Let us start the tour from vertex '2'.



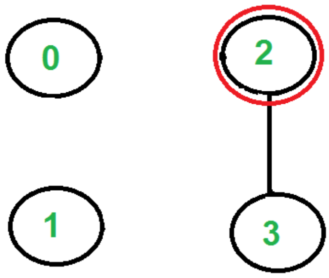
Three edges are going out from vertex '2', which one to pick? We don't pick the edge '2-3' because that is a bridge (we won't be able to come back to '3'). We can pick any of the remaining two edges. Let us say we pick '2-0'. We remove this edge and move to vertex '0'.



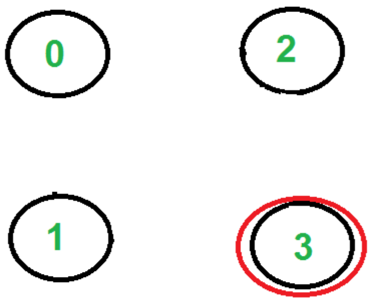
There is only one edge from vertex ‘0’, so we pick it, remove it and move to vertex ‘1’. Euler tour becomes ‘2-0 0-1’.



There is only one edge from vertex ‘1’, so we pick it, remove it and move to vertex ‘2’. Euler tour becomes ‘2-0 0-1 1-2’.



Again there is only one edge from vertex 2, so we pick it, remove it and move to vertex 3. Euler tour becomes ‘2-0 0-1 1-2 2-3’

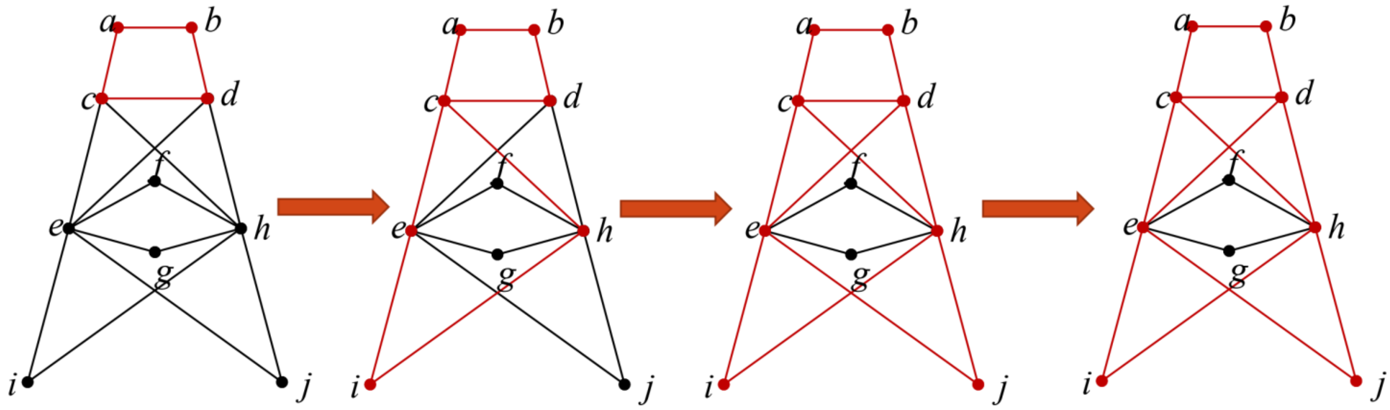


There are no more edges left, so we stop here. Final tour is ‘2-0 0-1 1-2 2-3’.

4.1.4.2 Thuật toán Hierholzer

- B1: Xác định *1 chu trình đơn* của G là R_1; i = 1
- B2: Nếu R_i chứa toàn bộ các đỉnh trong G: kết thúc; R_i là kết quả
- B3: Nếu R_i **không** chứa toàn bộ các đỉnh G
  - ➢ *Xét đỉnh $v_i \in R_i$ là đỉnh của cạnh e_j không thuộc R_i*
- B4: Xác định chu trình đơn Q_i bắt đầu từ v_i, đi qua e_j
- B5: Tạo R_{i+1} bằng cách thay v_i trong R_i bằng Q_i
- B6: Tăng i lên 1, quay lại bước 2.

Ví dụ 1:



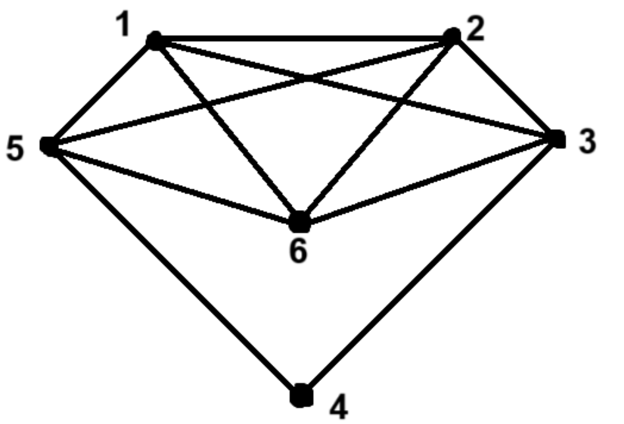
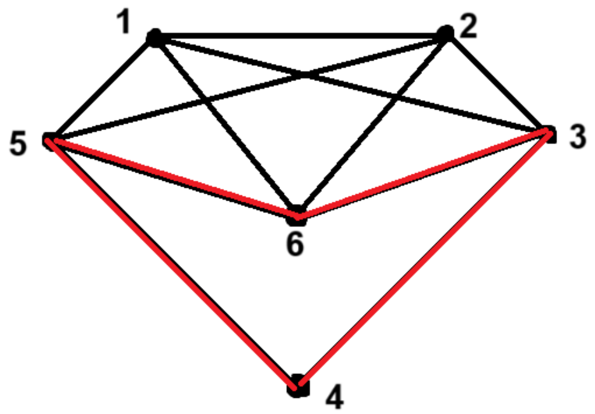
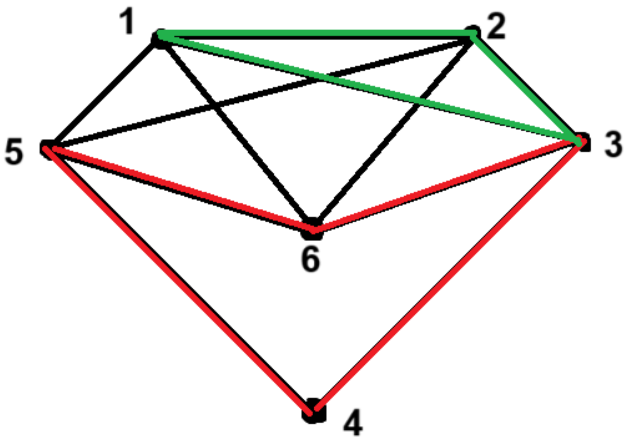
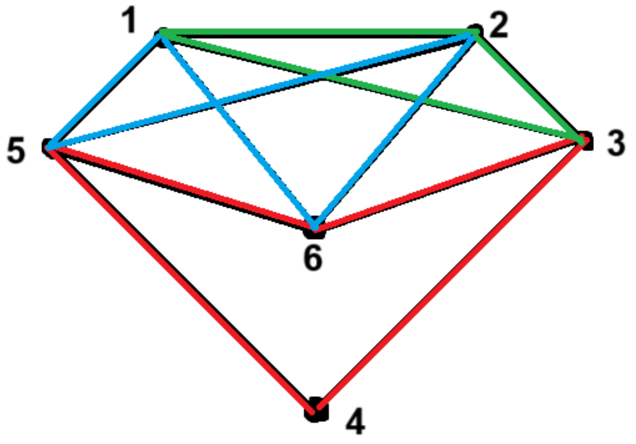
R_1 = a, b, d, c, a
Q_1 = c, e, i, h, c

R_2 = a, b, d, **c, e, i, h, c**, a
Q_2 = e, d, h, j, e

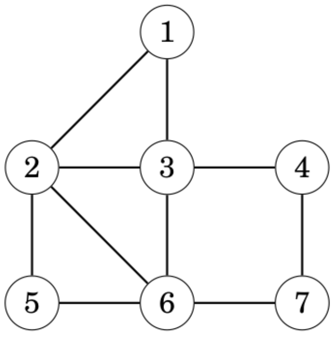
R_3 = a, b, d, c, **e, d, h, j,** e, i, h, c, a
Q_3 = e, f, h, g, e

R_4 = a, b, d, c, **e, f, h, g, e**, d, h, j e, i, h, c, a
=> Xong

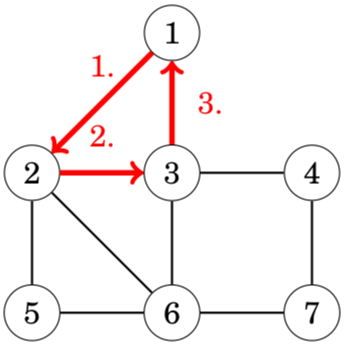
Ví dụ 2:

	
	R_1: 3 4 5 6 3 ***Q_1:*** **3** 2 1 3
	
R_2: **3** *2 1 3* 4 5 6 3 ***Q_2:*** **1** 5 2 6 1	***R_2:*** 3 2 1 5 2 6 1 *3 4 5 6 3* ***Đã quét hết tất cả các cạnh. Thuật toán dừng lại.***

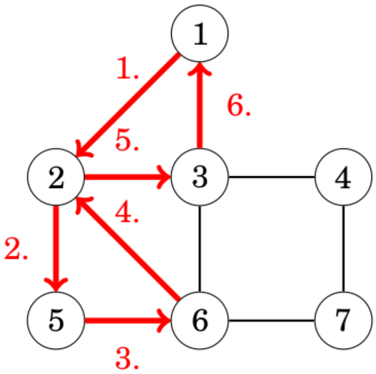
Ví dụ 3:



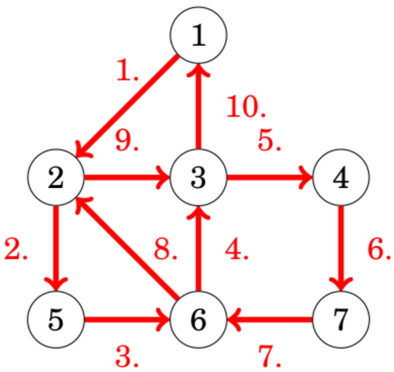
Giả thiết rằng, đầu tiên, thuật toán tạo ra một mạch bắt đầu tại đỉnh 1. Một mạch có khả năng là $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$:



Sau đó, thuật toán thêm mạch con $2 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 2$ vào mạch:



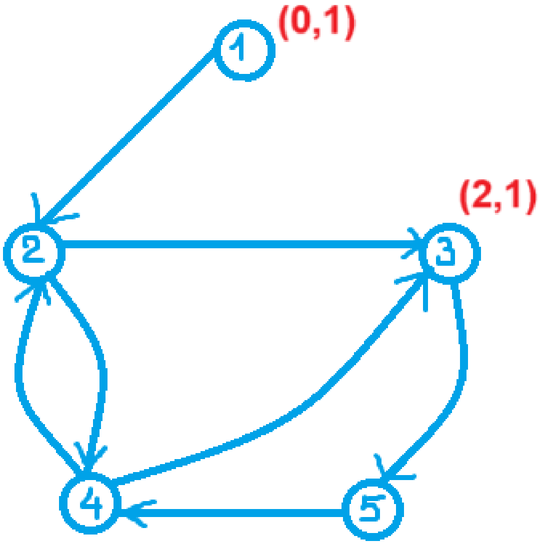
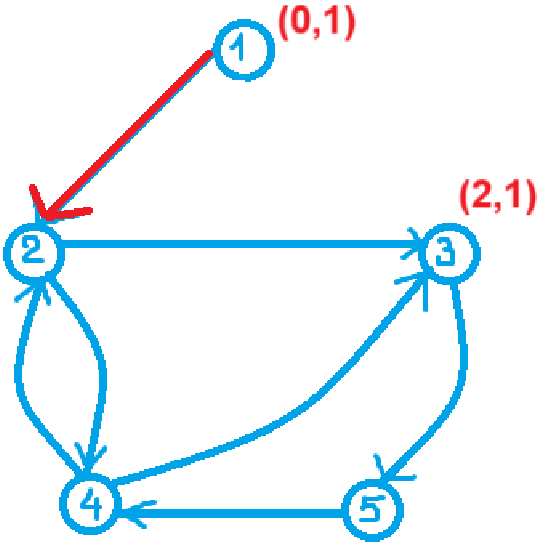
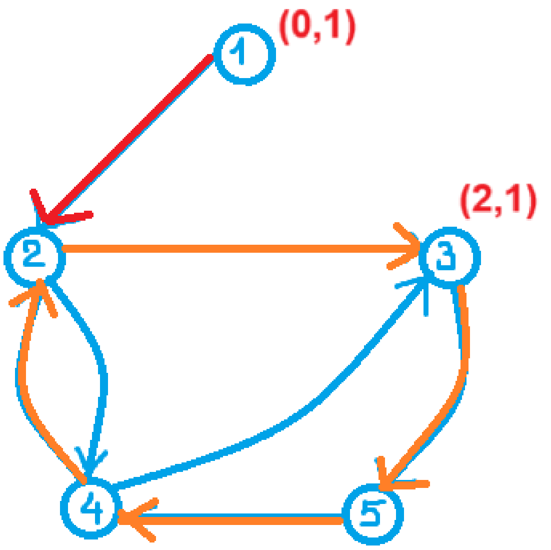
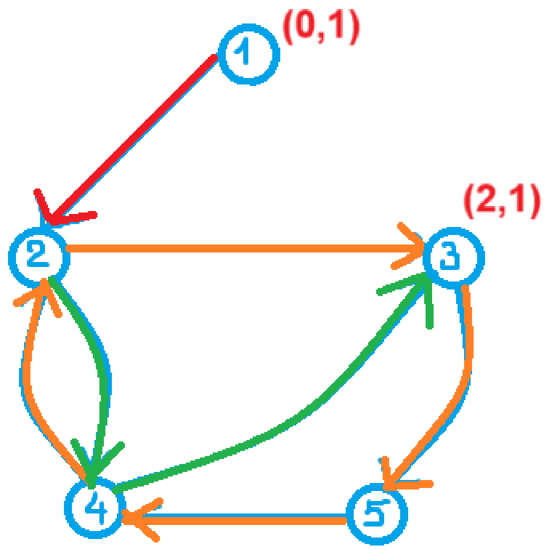
Cuối cùng, thuật toán thêm mạch con $6 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 7 \rightarrow 6$ vào mạch:



Bây giờ tất cả các cạnh đã được thêm vào trong mạch, vì thế chúng ta xây dựng thành công một mạch Eulerian.

- Ta cũng có thể áp dụng thuật toán này để tìm ***đường đi Euler.***

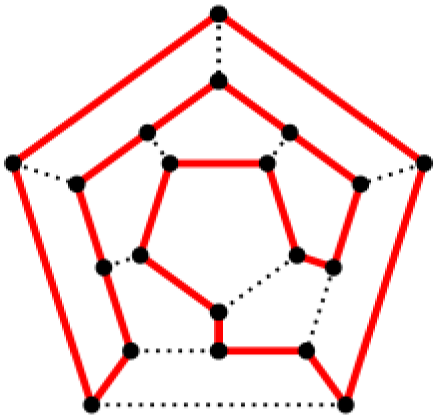
Ví dụ 4:

	
Dễ thấy, đường đi Euler phải bắt đầu từ đỉnh 1 và kết thúc ở đỉnh 3.	***R_1:*** 1 2 *(Do không có đường quay về đỉnh 1 nên phải xuất phát từ đỉnh 1)* ***Q_1:*** 2 3 5 4 2
	
R_2: 1 2 3 5 4 2 ***Q_2:*** 2 4 3	***Kết quả:*** 1 2 3 5 4 2 4 3

4.2 Chu trình – Đường đi – Đồ thị Hamilton

4.2.1 Bài toán hình khối (Hamilton 1857)

Cho một khối 12 mặt, mỗi mặt là một ngũ giác (*khối thập nhị diện đều*). Hỏi xem có thể xuất phát từ 1 đỉnh nào đó thông qua các cạnh để đi qua mọi đỉnh của khối và chỉ đi qua mỗi đỉnh 1 lần sau đó quay về đỉnh xuất phát.



4.2.2 Các định nghĩa

- *Đường đi Hamilton* là đường đi qua mỗi **đỉnh** của đồ thị đúng **một lần.**

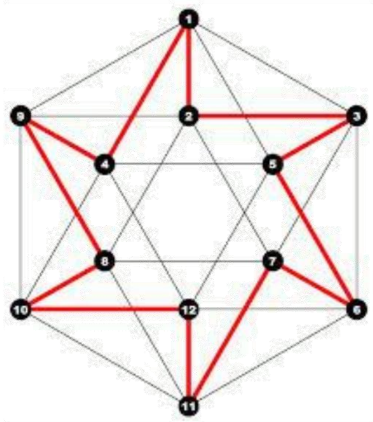
    Đồ thị nửa Hamilton là đồ thị có đường đi Hamilton.

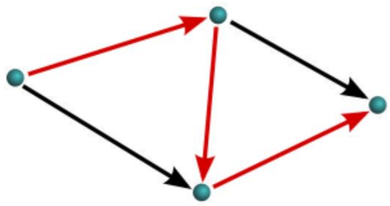
- *Chu trình Hamilton* là chu trình đi qua mỗi **đỉnh** của đồ thị đúng **một lần** (trừ đỉnh xuất phát).

    Đồ thị Hamilton là đồ thị có chu trình Hamilton.

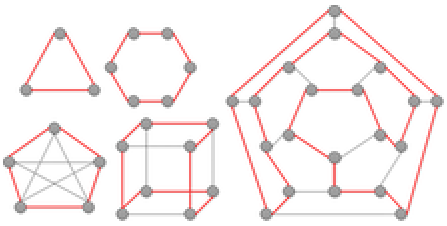
- Chú ý: Từ chu trình Hamilton, *bỏ đi cạnh cuối cùng ta được đường đi Hamilton*. Do đó, một đồ thị có chu trình Hamilton thì cũng có đường đi Hamilton (như vậy, một đồ thị không có đường đi Hamilton thì cũng không có chu trình Hamilton).

Nhận xét: Rõ ràng *đồ thị Hamilton là nửa Hamilton*, nhưng điều ngược lại không đúng.





Đồ thị Hamilton Đồ thị nửa Hamilton



Đồ thị Hamilton

Ứng dụng:

- Tổ chức tour du lịch sao cho người du lịch thăm quan mỗi thắng cảnh trong thành phố đúng một lần
- *Bài toán mã đi tuần*: cho con mã đi trên bàn cờ vua sao cho nó đi qua mỗi ô đúng một lần.

1	**2**	**3**	**4**
5	**6**	**7**	**8**
9	**10**	**11**	**12**

Đường đi Hamilton biểu diễn nước đi của con mã trên bàn cờ 3x4:

H = [8, 10, 1, 7, 9, 2, 11, 5, 3, 12, 6, 4]

- Nhiều ứng dụng yêu cầu đường dẫn hoặc mạch truy cập từng giao lộ đường trong thành phố, từng vị trí đường ống giao nhau trong lưới tiện ích hoặc mỗi nút trong mạng truyền thông chính xác một lần. Việc tìm đường đi hoặc mạch Hamilton trong mô hình đồ thị thích hợp có thể giải quyết những vấn đề như vậy.
- Bài toán nhân viên bán hàng du lịch nổi tiếng TSP (traveling salesperson problem, traveling salesman problem) yêu cầu con đường ngắn nhất mà một nhân viên bán hàng du lịch phải đi để đến thăm một tập hợp các thành phố. Bài toán này rút gọn thành việc tìm chu trình Hamilton trong một đồ thị hoàn chỉnh sao cho tổng trọng số các cạnh của nó càng nhỏ càng tốt.

Nhận biết đồ thị Hamilton:

• Chưa có dấu hiệu để nhận biết một đồ thị có là đồ thị Hamilton hay không.
• Chưa có thuật toán hiệu quả để kiểm tra
• Chưa tìm được điều kiện cần và đủ cho biết một đồ thị có chu trình Hamilton hay không → Các kết quả thu được chỉ ở dạng điều kiện đủ
• Các phát biểu đều ở dạng: "Nếu G có số cạnh đủ lớn thì G là Hamilton".

4.2.3 Định lý

*** Định lý 3 (Ore)**

Giả sử G là đồ thị vô hướng đơn gồm n đỉnh với n ≥ 3. Nếu d(x) + d(y) ≥ n với mọi cặp đỉnh x, y *không kề nhau* của G thì G là **đồ thị Hamilton**.

*** Định lý 4 (Dirak 1952) (Hệ quả định lý 3)**

Đơn đồ thị vô hướng G = (V, E) có n đỉnh (với n ≥ 3). Nếu mọi đỉnh *v* của đồ thị đều có *deg(v)* ≥ *n/2* thì G là đồ thị Hamilton.

Định lý Dirak cho đồ thị có hướng:

Cho đồ thị có hướng, liên thông mạnh G = (V, E) và có n đỉnh. Nếu mọi đỉnh *v* của G đều có $deg^+(v) \geq n/2$, $deg^-(v) \geq n/2$ thì G là Hamilton.

Một số định lý khác (Đối với đồ thị có hướng):

- **Ghouila-Houiri (1960):** Một *đồ thị liên thông mạnh* với n đỉnh là *đồ thị Hamilton* nếu *mọi đỉnh có bậc ≥ n.*
- **Meyniel (1973):** Một đồ thị *liên thông mạnh* với n đỉnh là *đồ thị Hamilton* nếu **d(x) + d(y) ≥ 2n - 1** với mọi cặp đỉnh x, y *không kề nhau.*
- **Định lý Bondy - Chvátal, 1972:** Xét đồ thị vô hướng G = (V, E) có n đỉnh, với mỗi cặp đỉnh không kề nhau (u, v) mà deg(u) + deg(v) ≥ n, ta thêm một cạnh nối u và v. Cứ làm như vậy tới khi không thêm được cạnh nào nữa, thì ta thu được một bao đóng của đồ thị G, kí hiệu *cl(G)*. Khi đó, G là đồ thị Hamilton nếu và chỉ nếu *cl(G)* là đồ thị Hamilton.

❖ Nhận xét – Bổ sung

- Đồ thị có *đỉnh bậc ≤ 1 thì* **không có chu trình Hamilton.**
- Nếu đồ thị có *các đỉnh đều có bậc ≥ 2 và có một đỉnh bậc 2* thì mọi chu trình Hamilton (nếu có) phải đi qua 2 cạnh kề của đỉnh này.
- Nếu trong đồ thị có *một đỉnh kề với 3 đỉnh bậc 2* thì **không có chu trình Hamilton.**
- *Đồ thị đầy đủ K_n* với n ≥ 3 đều có chu trình Hamilton.
- Mọi đồ thị *đầy đủ liên thông mạnh* đều có chu trình Hamilton
- Giả sử G là đồ thị vô hướng đơn gồm n đỉnh với n ≥ 3. Nếu $d(x) \geq (n-1)/2$ với mọi đỉnh x của G thì G có **đường đi Hamilton**.
- Giả sử G là đồ thị vô hướng đơn gồm n đỉnh và m cạnh. Nếu $m \geq (n^2 - 3n + 6)/2$ thì G là **đồ thị Hamilton.**
- Chu trình Hamilton *không chứa bất kỳ chu trình con* thực sự nào.

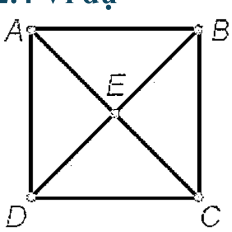
Chú ý. Trong một số trường hợp ***đơn giản***, ta có thể tìm đường đi (chu trình Hamilton) của G hoặc chứng minh G không có đường đi (chu trình Hamilton) dựa vào các nhận xét sau:

- Nếu đỉnh v có bậc là 2 thì cả 2 cạnh tới v đều phải thuộc chu trình Hamilton *(trừ khi đỉnh đó là đỉnh bắt đầu hoặc đỉnh kết thúc của đường đi).*
- Trong quá trình xây dựng chu trình Hamilton, sau khi *đã lấy 2 cạnh tới một đỉnh v đặt vào chu trình Hamilton rồi thì không thể lấy thêm cạnh nào tới v nữa*, do đó có thể xóa mọi cạnh còn lại tới v.
- Đường đi Hamilton phải đi qua cạnh nối với đỉnh bậc 1; các đỉnh bậc 1 phải là đỉnh bắt đầu hoặc đỉnh kết thúc của đường đi Hamilton.

** Các quy tắc sau dùng để xây dựng chu trình Hamilton H hoặc chỉ ra đồ thị vô hướng không là đồ thị Hamilton:*

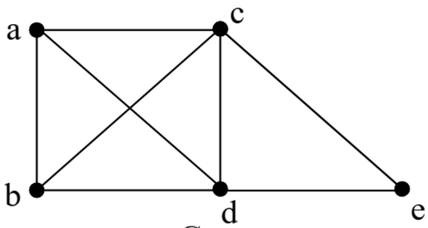
- ❖ **Qui tắc 1**: Tất cả các cạnh kề với đỉnh bậc 2 phải ở trong H.
- ❖ **Qui tắc 2**: Khi chu trình Hamilton mà chúng ta đang xây dựng đi qua đỉnh i thì xóa tất cả các cạnh kề với i mà chưa dùng (vì không còn dùng đến nữa). Điều này có thể cho chúng ta một số đỉnh bậc 2 và lại áp dụng quy tắc 1.
- ❖ **Quy tắc 3**: Không có chu trình con nào được tạo ra trong quá trình xây dựng H (nếu không thì không có chu trình Hamilton)
- ❖ **Quy tắc 4**: Không có đỉnh cô lập hay đỉnh treo nào được ta ra sau khi áp dụng quy tắc 2 (nếu không thì không có chu trình Hamilton)

4.2.4 Ví dụ

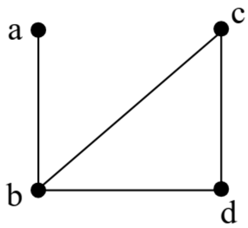
a) 

Một chu trình Hamilton của đồ thị là ABECDA.

b)



G_1

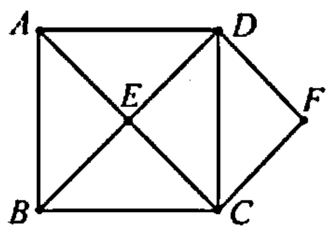


G_2

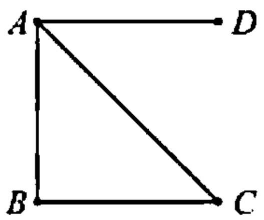
G_1 là đồ thị Hamilton vì có chu trình Hamilton: *a, b, d, e, c, a*

G_2 là đồ thị nửa Hamilton vì có đường đi Hamilton mà không có chu trình Hamilton: *a, b, d, c.*

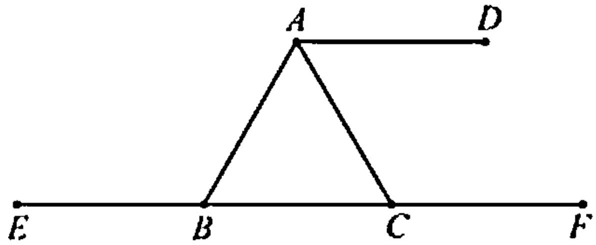
c)



a) Đồ thị G



b) Đồ thị H



c) Đồ thị K

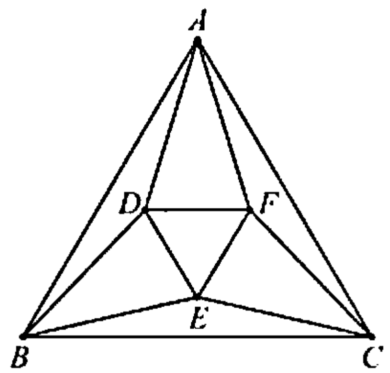
- Đồ thị G có chu trình Hamilton, chẳng hạn, ABECFDA.
- Đồ thị H không có chu trình Hamilton, vì một chu trình đi qua đỉnh D (bậc 1) đều phải đi qua cạnh AD ít nhất hai lần, tức phải qua đỉnh A ít nhất hai lần.

  Do đó, đồ thị H có đường đi Hamilton, chẳng hạn, DABC.
- Đồ thị K không có đường đi Hamilton (do đó không có chu trình Hamilton).

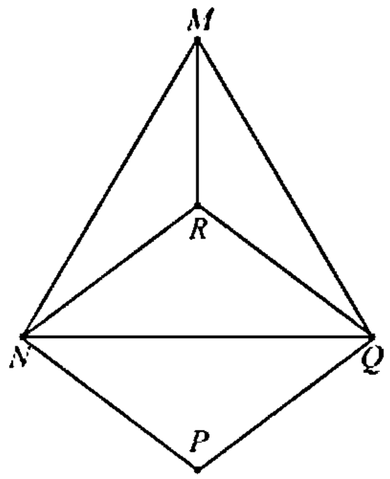
  Thật vậy, nếu có một đường đi Hamilton trên K thì phải có ít nhất một trong ba đỉnh D, E và F (đều có bậc 1) không phải là đỉnh bắt đầu hoặc đĩnh kết thúc của đường đi này.

  Nếu D là đỉnh như vậy thì đường đi Hamilton đó phải đi qua cạnh AD (tức đi qua đỉnh A) hai lần. Điều này không xảy ra. Lập luận tương tự cho trường hợp E hoặc F không phải là đinh bắt đầu hoặc kết thúc của đường đi. Vậy, đồ thị K không có đường đi Hamilton.

d)



a) Đồ thị G



b) Đồ thị H

- G là một đơn đồ thị liên thông có 6 đỉnh. Mỗi đình của G đều có bậc $4 \geq (6/2) = 3$. Theo định lí Dirac, đồ thị G có chu trình Hamilton.

  Ta có ABCEFDA là một chu trình Hamilton của G.

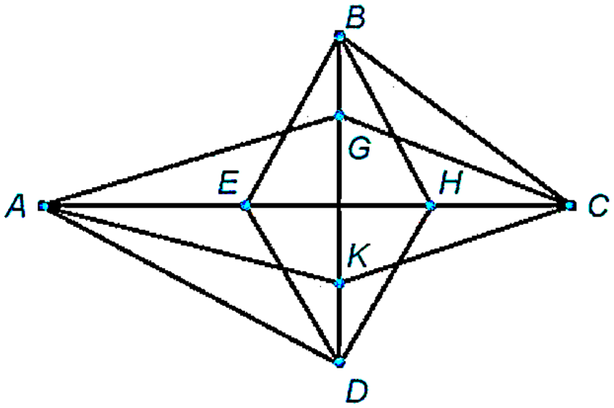
- H là một đơn đồ thị liên thông có 5 đình. Đồ thị H chi có hai cặp đinh không kề nhau là M, P và R, P. Ta có

$$d(M) + d(P) = d(R) + d(P) = 3 + 2 = 5.$$

  Theo Định lí Ore, đồ thị H có chu trình Hamilton.

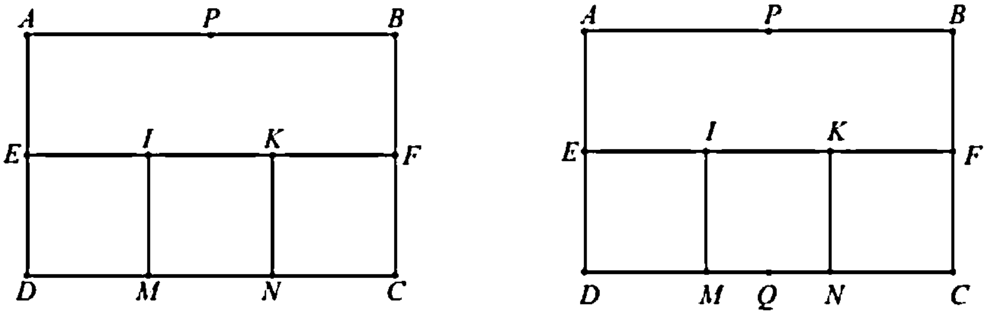
  Ta có MNPQRM là một chu trình Hamilton của H.

e)

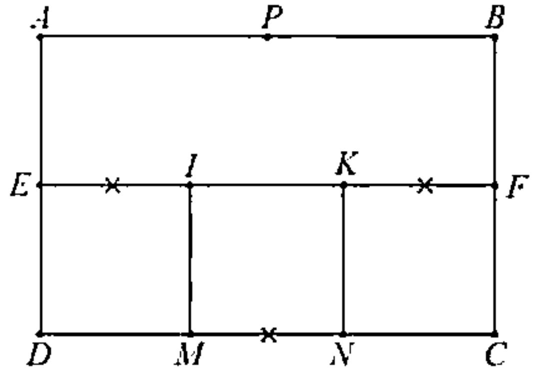
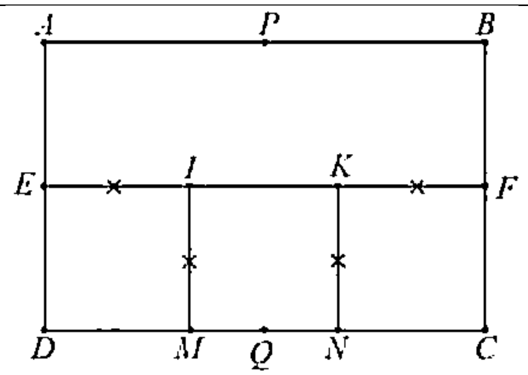


Đồ thị có 8 đỉnh, mỗi đỉnh đều có bậc là 4. Do đó, theo Định lí Dirac, đồ thị có một chu trình Hamilton. Có thể thấy một chu trình Hamilton xuất phát từ đỉnh A là: AGCKDHBEA.

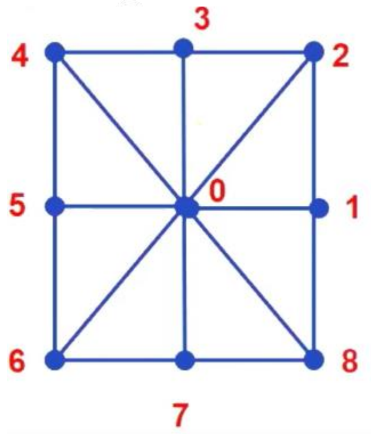
f)



a) Đồ thị G *b) Đồ thị H*

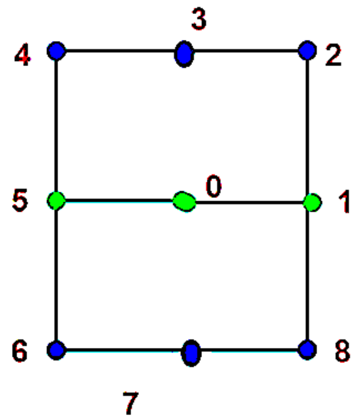
- Đồ thị G có các đỉnh A, P, B, C, D bậc 2 nên chu trình Hamilton h (nếu có) phải đi qua các cạnh AE, AP, BP, BF, CF, CN, DM, DE. - Từ đó, h không thể đi qua các cạnh EI và KF (đánh dấu x). Nếu xoá đi hai cạnh này thì các đỉnh I và K trở thành có bậc 2. Do đó, h phải đi qua các cạnh MI, IK, KN. - *Kết quả ta được chu trình Hamilton h: APBFCNKIMDEA.*	
- Đồ thị H có các đỉnh A, P, B, C, D và Q bậc 2 nên chu trình Hamilton k (nếu có) phải đi qua các cạnh EA, AP, PB, BF, FC, CN, MD, DE, NQ, QM. - Từ đó, k không thể đi qua các cạnh EI, IM, KF, KN (đánh dấu x). - Như vậy, k không thể đi qua các đỉnh I và K. *Vậy, không có chu trình Hamilton trên đồ thị H.*	

g)



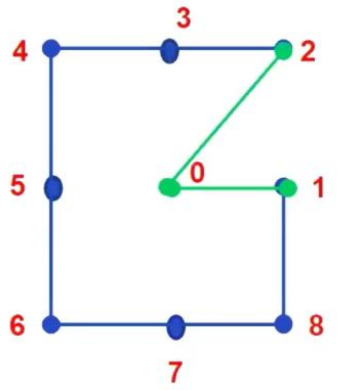
Xét đỉnh 0. Ta chọn 2 cạnh tới đỉnh này

TH1: 01 và 05: Xóa các cạnh tới 0 khác, theo quy tắc ta còn lại đồ thị



Các đỉnh 2, 3, 4 còn lại là bậc 2. Vậy lấy các cạnh 12,23,34,45 theo quy tắc: *Nếu đỉnh v bậc 2 thì cả 2 cạnh tới v đều phải thuộc chu trình Hamilton (*)*, nhưng như vậy tạo ra chu trình con thực sự => vi phạm quy tắc: *Chu trình Hamilton không chứa bất kỳ chu trình con thực sự nào (**)* => vô lý.

TH2: 01 và 02: Xóa các cạnh tới 0 khác theo quy tắc *(2/ phần 4.2.3)* và xóa cạnh 12 theo quy tắc (**) ta còn lại đồ thị



Các đỉnh 3, 4, 5, 6, 7, 8 còn lại là bậc 2.

Vậy lấy các cạnh 23, 34, 45, 56, 67, 78, 81 theo quy tắc (*), như vậy ta nhận được chu trình Hamilton 0234567810.

TH3: Lập luận tương tự các trường hợp chọn cạnh 01 và 03, 01 và 04, ... đều không được.

Tóm lại mọi chu trình Hamilton của đồ thị này đều phải chứa 2 cạnh tới đỉnh 0 hợp với nhau góc 45°