Chương 2: PHƯƠNG PHÁP ĐẾM (Counting)

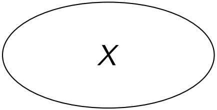
Khoa CNTT

ĐH GTVT TP.HCM

Nội dung

Tập hợp (1/7)

- Khái niệm:
  - Tập hợp là một khái niệm nguyên thủy, không có định nghĩa
  - Tập hợp thường bao gồm (các) phần tử có cùng tính chất nào đó.
- Kí hiệu:
  - Tập hợp kí hiệu bằng chữ cái in hoa, ví dụ: A, B, C, X, Y, ...
  - Phần tử của tập hợp kí hiệu bằng chữ cái in thường, ví dụ: a, b, ...
- Biểu diễn & ví dụ:

Cách biểu diễn	Ví dụ
Liệt kê	$A = \{1,2,3,4\}$
Vị từ	$A = \{x \in R : x^2 - 5x + 6 = 0\}$
Biểu đồ Venn	

Tập hợp (2/7)

- Các tập hợp đặc biệt:

Tên gọi	Kí hiệu	Ý nghĩa
Tập rỗng	$\emptyset$	Tập không chứa bất kỳ phần tử nào
Tập vũ trụ	U	Tập tất cả các phần tử ở ngữ cảnh đang xét

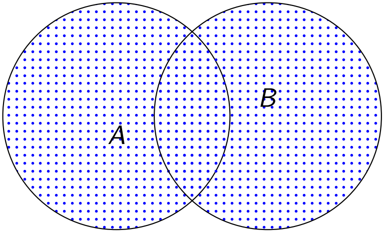
- Phần tử & tập hợp:

Kí hiệu	Ý nghĩa
$x \in A$	x là phần tử của A
$x \notin A$	x không là phần tử của A

- Các phép toán trên tập hợp:

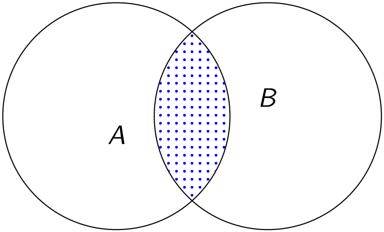
Tên phép toán	Kí hiệu
Hợp	$\cup$
Giao	$\cap$
Hiệu	$\setminus$

- Hợp của 2 tập hợp:
  + Định nghĩa: $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$



  + Ví dụ: Giả sử $A = \{x \in R : x^2 - 5x + 6 = 0\}$, $B = \{-1, 0, 2\}$
  Khi đó: $A \cup B = \{-1, 0, 2, 3\}$

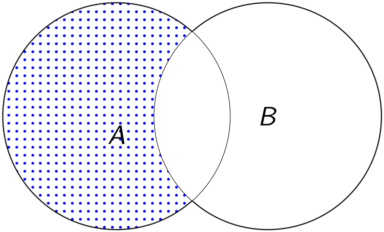
- Giao của 2 tập hợp:
  + Định nghĩa: $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$



  + Ví dụ: Giả sử $A = \{x \in R : x^2 - 5x + 6 = 0\}$, $B = \{-1, 0, 2\}$
    Khi đó: $A \cap B = \{2\}$

Tập hợp (6/7)

- Hiệu của 2 tập hợp:
  + Định nghĩa: $A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$



  + Ví dụ: Giả sử $A = \{x \in R : x^2 - 5x + 6 = 0\}$, $B = \{-1, 0, 2\}$
    Khi đó: $A \setminus B = \{3\}$
- Trường hợp đặc biệt: $\overline{A} = U \setminus A$ gọi là phần bù của tập A.

Tập hợp (7/7)

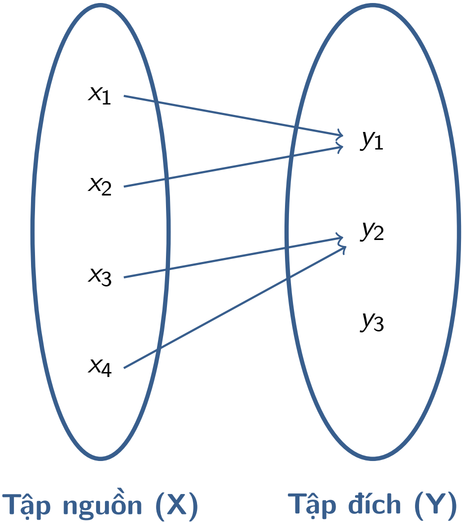
- Tích Descartes của 2 tập hợp:
  - Định nghĩa: Tích Descartes của 2 tập hợp A và B (kí hiệu là $A \times B$) là tập được xác định như sau:

$$\boxed{A \times B = \{(a, b) : (a \in A) \wedge (b \in B)\}}$$

  - Ví dụ:

$$A = \{a, b, c\}, B = \{x, y\}$$
$$\Rightarrow A \times B = \{(a, x), (a, y), (b, x), (b, y), (c, x), (c, y)\}$$

Ánh xạ (1/6)



Ánh xạ (2/6)

- Định nghĩa:

  Giả sử X, Y là 2 tập khác rỗng. Khi đó, anh xạ từ X vào Y là phép cho tương ứng mỗi phần tử thuộc X duy nhất một phần tử thuộc Y.

- Kí hiệu là: $f : X \mapsto Y$

- Ví dụ:

  + $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, f(x) = 2x^2 + 1$
  + $f : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}, f(x) = x + 1$

Ánh xạ (3/6)

- Biểu diễn: có thể biểu diễn ánh xạ bằng nhiều cách, bao gồm:
  + Dạng bảng
  + Biểu thức đại số
  + Đồ thị

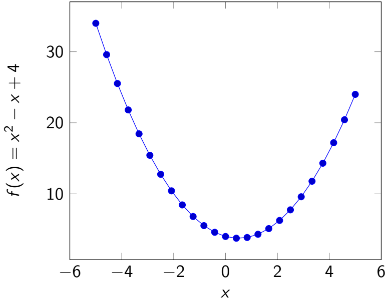
- Biểu diễn ánh xạ dưới dạng bảng:

x	1	2	3	4	5
y=f(x)	2	4	6	8	10

- Biểu diễn dưới dạng biểu thức đại số:

$$f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, f(x) = 2x^2 + 1$$

- Biểu diễn dưới dạng đồ thị:



Ánh xạ (5/6)

Đơn ánh

$$\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Ví dụ: $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, f(x) = e^x$

Toàn ánh

$$\forall y \in Y, \exists x \in X : y = f(x). \text{ Tức là f(X)} = \text{Y}$$

Ví dụ: $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^+, f(x) = e^x$

Song ánh

$$\Leftrightarrow \text{Đơn ánh} \wedge \text{Toàn ánh}$$

Ví dụ: $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, f(x) = 2x - 5$

Ánh xạ (6/6)

Ánh xạ hợp thành (tích của 2 ánh xạ):

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & y = f(x) \arrow[d, "g"] \\
& z = g(y) = g(f(x))
\end{tikzcd}
$$

Ví dụ: $f(x) = 2x + 1, g(x) = x^2 \Rightarrow g \circ f = g(f(x)) = (2x + 1)^2$

Giải tích tổ hợp

- Các nguyên lý đếm
- Chỉnh hợp *(Arrangement, k - permutation)*
- Hoán vị *(Permutation)*
- Tổ hợp *(Combination)*
- Chỉnh hợp lặp *(Variation)*
- Tổ hợp lặp

Nguyên lý cộng:

* Công thức: $\boxed{|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|}$

* Ví dụ: Một lớp gồm:
  + 10 sinh viên học Kỹ thuật lập trình.
  + 15 sinh viên học Toán rời rạc.

  Hỏi lớp có bao nhiêu sinh viên? Biết rằng có 7 sinh viên học cả 2 học phần trên.

Nguyên lý nhân:

* Công thức: $\boxed{|A \times B| = |A| \times |B|}$

* Ví dụ xét đoạn mã sau:

$$s = 0;$$
$$for(i = 1; i \leq k; i = i + 1)$$
$$\quad for(j = 1; j \leq n; j = j + 1) s = s + i * j;$$

Hỏi phép toán $+$ được thực hiện bao nhiêu lần?

Nguyên lý bù trừ:

* Công thức: $\boxed{|\overline{A}| = |U| - |A|}$

* Ví dụ: cho $A = \{0, 1, 2, 3\}, B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
  Có bao nhiêu bộ $(x, y) \in A \times B$ sao cho $xy = 0$?

Giải tích tổ hợp - Chỉnh hợp

Bài toán:

Chọn 3 trong 5 sinh viên để thành lập ban cán sự lớp. Với quy tắc:

- Sinh viên thứ nhất làm lớp trưởng
- Sinh viên thứ hai làm lớp phó
- Sinh viên còn lại làm thủy quỹ

Hỏi có bao nhiêu cách chọn?

Khái niệm:

- Mỗi cách chọn ra 3 trong 5 sinh viên *có kể thứ tự* như trên gọi là một chỉnh hợp chập 3 của 5 phần tử.
- **Tổng quát**: mỗi cách chọn k từ n $(k \leq n)$ phần tử *có kể thứ tự* gọi là một chỉnh hợp chập k của n phần tử
- Số chỉnh hợp chập k của n phần tử kí hiệu là: A_n^k

Giải tích tổ hợp - Chỉnh hợp

- Công thức tính số chỉnh hợp:
  + Phần tử thứ 1 có n cách chọn
  + Phần tử thứ 2 có $n-1$ cách chọn
  + Phần tử thứ 3 có $n-2$ cách chọn
  + ...
  + Phần tử thứ k có $n-k+1$ cách chọn
- Vậy theo quy tắc nhân ta có:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)...(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Giải tích tổ hợp - Hoán vị

- Mỗi chỉnh hợp chập n của n phần tử được gọi là một **hoán vị** của các phần tử đó.

- Số hoán vị $P_n = A_n^n = n!$

Giải tích tổ hợp - Tổ hợp

Bài toán:

Chọn k trong n ($k \leq n$) sinh viên nam để thành lập đội bóng đá.
Hỏi có bao nhiêu cách chọn?

Khái niệm:

- Mỗi cách chọn k từ n ($k \leq n$) phần tử *không kể thứ tự* gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử
- Số tổ hợp chập k của n phần tử kí hiệu là: C_n^k

Công thức tính:

- Mỗi hoán vị của một tổ hợp chập k cho trước tạo ra $k!$ chỉnh hợp tương ứng
- Vậy số tổ hợp $C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$

Giải tích tổ hợp - Chỉnh hợp lặp

Bài toán:

Có bao nhiêu cách đánh số các máy tính trong phòng thực hành nếu mỗi máy tính được đánh số bằng 3 chữ số bất kỳ?

Khái niệm:

- Mỗi cách chọn *có thứ tự và có thể lặp lại* k trong n phần tử gọi là *chỉnh hợp lặp* chập k của n phần tử đó.
- Số chỉnh hợp lặp chập k của n phần tử kí hiệu là: V_n^k

Công thức tính:

$$V_n^k = n \times n \times ... \times n = n^k$$

Bài toán:

Có bao nhiêu cách mua 4 cái laptop của 3 hãng máy tính (IBM, Dell và Sony)?

Cách giải:

- Mỗi cách mua laptop có thể được biểu diễn bằng 1 chuỗi các kí tự như sau:

$$\underset{\text{IBM}}{\times\ldots\times}\;\Big|\;\underset{\text{Dell}}{\times\ldots\times}\;\Big|\;\underset{\text{Sony}}{\times\ldots\times}$$

- Trong đó:
  - \+ Kí tự $\times$ biểu diễn số laptop của mỗi hãng
  - \+ Kí tự $|$ phân cách các laptop theo từng hãng
  - \+ Ví dụ: $\times\times \mid \times \mid \times$ biểu diễn cách mua 2 IBM, 1 Dell và 1 Sony

Giải tích tổ hợp - Tổ hợp lặp

Cách giải (tiếp):

- Mỗi cách mua chính là một cách chọn ra 2 trong 6 kí tự để làm dấu |, tương ứng với một tổ hợp chập 2 của 6 phần tử.
- Vậy tổng số cách mua là: C_6^2

Trường hợp tổng quát:

- Mỗi cách chọn *có thể lặp lại* k trong n phần tử gọi là một tổ hợp lặp chập k của n phần tử đó
- Theo lập luận trên, số tổ hợp lặp chập k của n phần tử là:

$$K_n^k = C_{n+k-1}^{k-1}$$

Nguyên lý:

"Nếu nhốt $n > m$ con chim bồ câu vào m chuồng thì tồn tại một chuồng nào đó chứa nhiều hơn 1 chim bồ câu"

Ý nghĩa:

- Có 4 lớp bài toán trong toán rời rạc, gồm:
  + Bài toán tồn tại (*)
  + Bài toán đếm
  + Bài toán liệt kê
  + Bài toán tối ưu
- Nguyên lý Dirichlet là một trong những phương pháp giải quyết lớp bài toán (*)

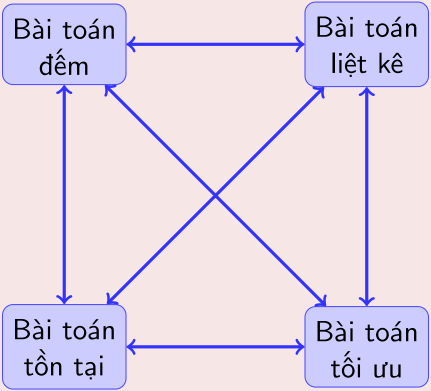
Thảo luận (1/7)

Về ánh xạ:

* Hãy liên hệ khái niệm ánh xạ trong thực tế
* Hãy lấy ra một vài ánh xạ không phải đơn ánh, toàn ánh hay song ánh.
* Khái niệm hàm số có phải là ánh xạ không? giải thích?
* Bạn có liên hệ gì trong lập trình?
  + Giữa khái niệm ánh xạ với khái niệm function
  + Giữa ánh xạ hợp thành f^n với hàm đệ quy
* Có bao nhiêu ánh xạ từ tập A vào tập B nếu $|A| = n$ và $|B| = m$
* Hãy mô tả ánh xạ $f(x) = x$

Thảo luận (2/7)

Về quan hệ giữa các (lớp) bài toán phổ biến trong Toán rời rạc:



Thảo luận (3/7)

Về tổ hợp lặp:

* Xét xem các bài toán sau đây có tương đương không?
  + Mua k món đồ cùng loại của n hãng sản xuất
  + Xếp k đồ vật vào n thùng chứa
  + Tìm số nghiệm nguyên không âm của phương trình:

$$\boxed{x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n}$$

* Làm thế nào để chia kẹo cho một nhóm trẻ sao cho đứa trẻ lớn nhất được ít nhất k chiếc kẹo?

Nhị thức Newton & Tam giác Pascal (1/2):

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & \swarrow & & \searrow & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & \swarrow\ \searrow & & & & \swarrow\ \searrow & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & \swarrow\ \searrow & & \swarrow\ \searrow & & \swarrow\ \searrow & & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
\swarrow\ \searrow & & \swarrow\ \searrow & & \swarrow\ \searrow & & \swarrow\ \searrow & & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
$$

Nhị thức Newton & Tam giác Pascal (2/2):

* Có thể dễ dàng suy ra tam giác pascal nhờ đẳng thức sau:

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$$

(Hãy tự chứng minh đẳng thức trên)

* Nhị thức Newton:

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i x^i y^{n-i} = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} y + \ldots + C_n^{n-1} x y^{n-1} + C_n^n y^n$$

(Hãy chứng minh nhị thức Newton bằng phương pháp quy nạp)

Thảo luận (6/7)

$|A| = n \Rightarrow |\mathcal{P}(A)| = ?$

* Sử dụng nhị thức Newton $\boxed{2^n = (1+1)^n = ?}$

* Sử dụng chuỗi nhị phân: mỗi tập con của A tương ứng với một chuỗi nhị phân n bit, suy ra $\boxed{|\mathcal{P}(A)| = 2^n}$

Mở rộng nguyên lý Dirichlet:

* Hãy tổng quát hóa nguyên lý Dirichlet cho trường hợp số bồ câu nhiều gấp nhiều lần số chuồng.

Bài tập (1/5)

Bài tập 1:

Xét các tập con của $\mathbb{Z}$:

$A = \{2m + 1 : m \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{2n + 3 : n \in \mathbb{Z}\}$

$C = \{2p - 3 : p \in \mathbb{Z}\}$, $D = \{2r + 1 : r \in \mathbb{Z}\}$

$E = \{3s + 2 : s \in \mathbb{Z}\}$, $F = \{3t - 2 : t \in \mathbb{Z}\}$

Xác định các khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

a. $A = B$, b. $A = C$, c. $B = C$

d. $D = E$, e. $D = F$, f. $E = F$

Bài tập (2/5)

Bài tập 2:

Cho tập $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Hãy liệt kê:

a. Các tập con của A
b. Các tập con chứa 3 phần tử của A
c. Các tập con của A chứa 1 và 2

Bài tập (3/5)

Bài tập 3:

Xét các tập con của $\mathbb{Z}$:

$A = \{2n : n \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{3n : n \in \mathbb{Z}\}$

$C = \{4n : n \in \mathbb{Z}\}$, $D = \{6n : n \in \mathbb{Z}\}$

$E = \{8n : n \in \mathbb{Z}\}$

Xác định các khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

a. $E \subset C \subset A$, b. $A \subset C \subset E$

c. $D \subset B$, d. $D \subset A$

e. $B \subset D$, f. $\overline{D} \subset \overline{A}$

Xác định các tập dưới đây:

a. $C \cup E$, b. $B \cup D$ c. $A \cap B$

d. $B \cap D$, e. $\overline{A}$ f. $A \cap E$

Bài tập (4/5)

Bài tập 4:

Đối với mỗi ánh xạ dưới đây, hãy xác định xem nó có đơn ánh không? Tìm ảnh của miền xác định?

a. $f : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}, f(x) = 2x + 1$
b. $f : \mathbb{Q} \mapsto \mathbb{Q}, f(x) = 2x + 1$
c. $f : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}, f(x) = x^3 - x$
d. $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, f(x) = e^x$
e. $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \mapsto \mathbb{R}, f(x) = sinx$
f. $f : [0, \pi] \mapsto \mathbb{R}, f(x) = sinx$

Các bài tập còn lại trong Chương 2
Toán rời rạc - GS.Nguyễn Hữu Anh

—Hết—