

ĐÁP ÁN

Câu 1: Tập hợp nào sau đây là không gian vector con của không gian vector \mathbb{R}^3 ? Tại sao?

$$\text{a) } S_1 = \left\{ u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = \frac{y+z}{2} \right\}$$

$$\text{b) } S_2 = \left\{ u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 = \frac{y^2+z^2}{2} \right\}$$

Giải:

$$\begin{aligned} \text{a) } S_1 &= \left\{ \left(\frac{y}{2} + \frac{z}{2}, y, z \right) \mid y, z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ y \left(\frac{1}{2}, 1, 0 \right) + z \left(\frac{1}{2}, 0, 1 \right) \mid y, z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \text{span} \left\{ \left(\frac{1}{2}, 1, 0 \right); \left(\frac{1}{2}, 0, 1 \right) \right\}. \end{aligned}$$

Suy ra S_1 là không gian vector con của không gian vector \mathbb{R}^3 .

b) Lấy $u_1 = (1, 1, 1); u_2 = (\sqrt{2}, 2, 0) \in S_2$. Ta thấy:

$$u_1 + u_2 = (1 + \sqrt{2}, 3, 1) \notin S_2 \text{ vì } (1 + \sqrt{2})^2 \neq \frac{3^2 + 1^2}{2}.$$

Vậy S_2 không phải là không gian vector con của \mathbb{R}^3 .

Câu 2: Trong \mathbb{R}^3 cho tập hợp:

$$W = \{u = (a, b, c): a^2 + b^2 = c^2\} \subset \mathbb{R}^3$$

a) Hãy chỉ ra 5 phần tử thuộc W .

b) Tập hợp W có là không gian con của \mathbb{R}^3 không? Tại sao?

Giải:

a) 5 phần tử thuộc W :

$$u_1 = (1, 0, 1); u_2 = (1, 0, -1); u_3 = (0, 1, 1); u_4 = (0, 1, -1); u_5 = (-1, 0, 1).$$

b) Lấy $u_1 = (1, 0, 1); u_2 = (1, 0, -1)$ thuộc $W \Rightarrow u_1 + u_2 = (2, 0, 0)$.

Ta thấy $u_1 + u_2 \notin W$ (do $2^2 + 0^2 \neq 0^2$). Vậy W không là KGC của \mathbb{R}^3 .

Câu 3: Trong \mathbb{R}^3 cho tập hợp:

$$W = \{u = (a, b, c): a + b - c = 0\}$$

Chứng minh tập hợp W là không gian con của \mathbb{R}^3 .

Giải:

$$W = \{u = (a, b, a + b) | a, b \in \mathbb{R}\} = \{a \cdot (1, 0, 1) + b \cdot (0, 1, 1) | a, b \in \mathbb{R}\}.$$

$= \text{Span}\{u_1 = (1, 0, 1); u_2 = (0, 1, 1)\}$. Vậy W là không gian con của \mathbb{R}^3 .