

Đáp án câu a:

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 5 & -1 \\ 2 & 7 & -11 & 2 \\ 3 & 11 & -6 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[d_3 - 2d_1 \rightarrow d_3]{d_2 - 4d_1 \rightarrow d_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & -21 & 4 \\ 0 & -1 & -21 & 4 \end{array} \right]$$
$$\xrightarrow{\text{Xóa } d_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & -21 & 4 \end{array} \right].$$

Vậy hệ đã cho tương đương hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x + 4y + 5z = -1 \\ -y - 21z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 4y + 5a = -1 \\ -y - 21a = 4 \\ z = a \in \mathbb{R} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 4(-4 - 21a) + 5a = -1 \\ y = -4 - 21a \\ z = a \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Cách trình bày khác:

$$\begin{cases} x + 4y + 5z = -1 \\ 2x + 7y - 11z = 2 \\ 3x + 11y - 6z = 1 \end{cases} \xrightarrow[d_3 - 2d_1 \rightarrow d_3]{d_2 - 4d_1 \rightarrow d_2} \begin{cases} x + 4y + 5z = -1 \\ -y - 21z = 4 \\ -y - 21z = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 4y + 5z = -1 \\ -y - 21z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 4y + 5a = -1 \\ -y - 21a = 4 \\ z = a \end{cases} ; (a \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 4(-4 - 21a) + 5a = -1 \\ y = -4 - 21a \\ z = a \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Đáp án câu b:

$$\text{b) } \begin{cases} x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 5x_4 - 2x_5 = -4 \\ 2x_1 + 12x_2 + 6x_3 - 18x_4 - 5x_5 = -5 \\ 3x_1 + 18x_2 + 8x_3 - 23x_4 - 6x_5 = -2 \end{cases}$$

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 6 & 2 & -5 & -2 & -4 \\ 2 & 12 & 6 & -18 & -5 & -5 \\ 3 & 18 & 8 & -23 & -6 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow[\substack{d_2 - 2d_1 \rightarrow d_2 \\ d_3 - 3d_1 \rightarrow d_3}]{\quad} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 6 & 2 & -5 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & 0 & 10 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{d_3 - d_2 \rightarrow d_3} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 6 & 2 & -5 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{array} \right]$$

$$\text{Hệ pt} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 5x_4 - 2x_5 = -4 \\ 2x_3 - 8x_4 - x_5 = 3 \\ x_5 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -6b - 3a \\ x_2 = b \\ x_3 = 5 + 4a \\ x_4 = a \\ x_5 = 7 \end{cases} \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

Đáp án:

$$2) \begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = 1 \end{cases} \text{ Ta có: } D = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = (m+2) \cdot (m-1)^2;$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = 0; \quad D_3 = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & m \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = (m+2)(m-1)^2;$$

$$\begin{cases} x = \frac{D_1}{D} = 0 \\ y = \frac{D_2}{D} = 1. \\ z = \frac{D_3}{D} = 0 \end{cases}$$

▪ Nếu $D \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$ và $m \neq -2$ thì hệ có nghiệm duy nhất là:

▪ Nếu $m = 1$ thì $D = D_1 = D_2 = D_3 = 0$. Thế $m = 1$ vào hệ pt:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x + y + z = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - \alpha - \beta \\ y = \beta \\ z = \alpha \end{cases} \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}).$$

▪ Nếu $m = -2$ thì $D = D_1 = D_2 = D_3 = 0$. Thế $m = -2$ vào hệ pt:

$$\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y + z = 1 \\ x - 2y + z = -2 \\ x + y - 2z = 1 \end{cases} \quad (1)$$

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{d_2 \leftrightarrow d_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[\begin{smallmatrix} 2d_1 + d_2 \rightarrow d_2 \\ d_3 - d_1 \rightarrow d_3 \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \end{smallmatrix}} \xrightarrow[\begin{smallmatrix} -1/3 d_2 \rightarrow d_2 \\ d_2 + d_3 \rightarrow d_3 \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}}$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z = -2 \\ y - z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2(a + 1) + a = -2 \\ y = a + 1 \\ z = a \in R. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ y = a + 1 \\ z = a \in R \end{cases}$$