TRƯỜNG ĐẠI HỌC GIAO THÔNG VẬN TẢI THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

KHOA CƠ BẢN – BỘ MÔN TOÁN

BÀI GIẢNG
ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

CHƯƠNG II. KHÔNG GIAN VECTOR

§1. Không gian vector

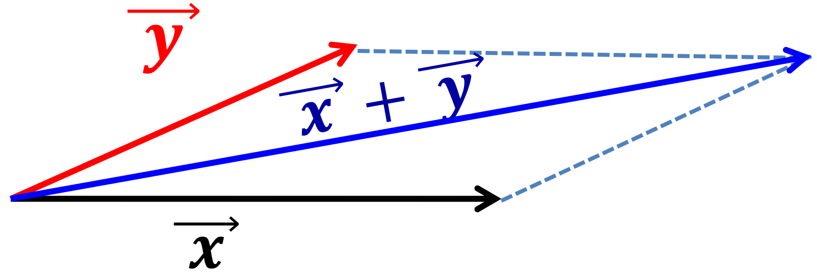
ThS. Đinh Tiến Dũng

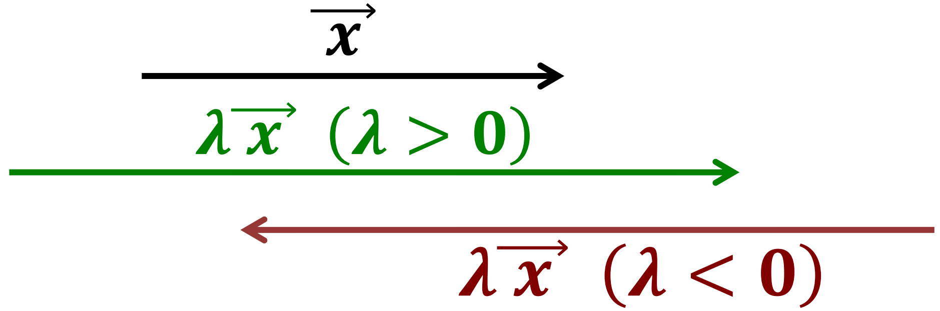
NỘI DUNG CHƯƠNG II

§1. Không gian vector.
§ 2. Tổ hợp tuyến tính, bao tuyến tính, hệ sinh.
§ 3. Họ vector độc lập tuyến tính, phụ thuộc tuyến tính
§4. Cơ sở, số chiều của không gian vector.
§5. Không gian Euclide.

DẪN NHẬP

- *Chúng ta đã biết, vectơ là đại lượng có hướng với các phép toán cộng vectơ và nhân vectơ với một số:*





1) $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$
2) $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$
3) $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$
4) $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$
5) $\lambda(\vec{x} + \vec{y}) = \lambda\vec{x} + \lambda\vec{y}$
6) $(\lambda + \mu)\vec{x} = \lambda\vec{x} + \mu\vec{x}$
7) $\lambda(\mu\vec{x}) = \mu(\lambda\vec{x}) = (\lambda\mu)\vec{x}$
8) $1\vec{x} = \vec{x}$

- *Ma trận, đa thức, nghiệm của hệ pt tuyến tính và nhiều đối tượng toán học khác cũng có 8 đặc tính trên. Vì vậy người ta gom chúng lại để nghiên cứu trong một mô hình chung gọi là "Không gian vector".*

§1. Không gian vector

I. KHÁI NIỆM KHÔNG GIAN VECTOR

1. Định nghĩa

Cho tập hợp khác rỗng V trên đó đã trang bị các phép toán:

- Phép cộng: Biến hai phần tử x, y thuộc V thành một phần tử thuộc V ký hiệu là $x + y$ và gọi là tổng của x và y.

- Phép nhân với vô hướng: Biến một số $\lambda \in \mathbb{R}$ và một phần tử x thuộc V thành một phần tử thuộc V ký hiệu là λx và gọi là tích của λ với x.

Nếu tập V cùng với hai phép toán ấy thỏa 8 tiên đề sau thì V gọi là một không gian vectơ trên R (hay vắn tắt là $R - kgvt$ V). Tám tiên đề đó là:

1) $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}, \quad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{V}$.

2) $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}), \ \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{V}$.

3) *Tồn tại* $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{V}: \boldsymbol{x}+\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{x}, \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}$.

4) *Với mỗi x thuộc V, tồn tại x′ thuộc V sao cho:* $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{\theta}$.

5) $\forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \boldsymbol{R}$ *và* $\forall x \in \boldsymbol{V}$ *ta luôn có:* $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{x}$.

6) $\forall \boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{R}$ *và* $\forall \ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{V}$ *ta luôn có* $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{y}$.

7) $\forall \ \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \boldsymbol{R}$ *và* $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}$ *ta luôn có* $(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{x})$.

8) $\forall \ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}: \ \mathbf{1}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$.

❖ **2. Chú ý: Nếu V là không gian vector thì:**

- Mỗi phần tử của V sẽ gọi là một vectơ.

- Mỗi số thực ta còn gọi là một vô hướng.

*- Phần tử $\boldsymbol{\theta}$ thoả $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{x}, \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}$ gọi là vectơ – không. Trong mỗi không gian vectơ có duy nhất một vectơ – không. Kí hiệu: **0**.*

- Với mỗi $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}$ thì tồn tại duy nhất phần tử $\boldsymbol{x}' \in V : \boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{0}$ và x' gọi là vectơ đối của x. Kí hiệu: $x' = -x$.

II. CÁC MÔ HÌNH KHÔNG GIAN VECTOR

Có rất nhiều mô hình không gian vector trên trường số thực. Ở đây ta chỉ giới thiệu 3 mô hình cơ bản nhất.

1) Mô hình 1:

Cho tập hợp $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) / x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$.

Giả sử $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n), y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ *thuộc* $\mathbb{R}^n$ *và* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ta định nghĩa phép cộng và nhân ngoài như sau:

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n)$$

$$\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \cdots, \lambda x_n)$$

thì $\mathbb{R}^n$ *cùng với hai phép toán trên lập thành một không gian vector trên trường số thực.*

❖ *Lưu ý:*

- *Hai phép toán cộng và nhân ngoài đã trang bị như trên gọi là hai phép toán thông thường trên* $\boldsymbol{R^n}$ *.*
- x_i *gọi là thành phần toạ độ thứ i của vector* $\boldsymbol{x}=(x_1;x_2;\ldots;x_n)$ *với* $\boldsymbol{i = 1, 2 \ldots, n}$.
- *Vector-không trong* $\mathbb{R}^n$ *có dạng* $\mathbf{0} = (\mathbf{0}; \mathbf{0}; \ldots; \mathbf{0})$.

2) Mô hình 2:

Tập hợp $\boldsymbol{M_{m\times n}[R]}$ *tất cả các ma trận thực cỡ* ***mxn*** *cùng với phép cộng ma trận và phép nhân một số thực với một ma trận lập thành một không gian vector thực.*

❖ *Lưu ý:* *Vector-không trong* $\boldsymbol{M_{m\times n}[R]}$ *chính là ma trận 0.*

3) Mô hình 3:

Gọi $P_n[x]$ là tập hợp tất cả các đa thức hệ số thực bậc không vượt quá n, tức là:

$$P_n[x] = \{p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n | a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}.$$

Giả sử $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$; $q(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n$ là hai đa thức thuộc $P_n[x]$ và λ là số thực. Với hai phép toán cộng đa thức và phép nhân đa thức với một số thực:

$$p(x) + q(x) = (a_0+b_0) + (a_1+b_1)x + \cdots + (a_n+b_n)x^n;$$

$$\lambda\, p(x) = \lambda a_0 + \lambda a_1 x + \cdots + \lambda a_n x^n.$$

thì $P_n[x]$ lập thành một không gian vector trên R.

❖ *Lưu ý:* *Trong $P_n[x]$ thì vector –không là:* $\mathbf{0} = 0 + 0.x + \cdots + 0.x^n$

Nhận xét: *Cách chứng minh tập hợp V cùng với hai phép toán cho trước là một không gian vectơ trên R là ta chỉ ra V thoả 8 tiên đề:*

1) $x + y = y + x, \forall x, y \in V$.

2) $(x + y) + z = x + (y + z), \ \forall x, y, z \in V$.

3) Tồn tại $\theta \in V: x + \theta = x, \forall x \in V$.

4) Với mỗi x thuộc V, tồn tại x' thuộc V sao cho: $x + x' = \theta$.

5) $\forall \alpha, \beta \in R$ và $\forall x \in V$ ta luôn có: $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$.

6) $\forall \alpha \in R$ và $\forall x, y \in V$ ta luôn có $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

7) $\forall \alpha, \beta \in R$ và $\forall x \in V$ ta luôn có $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$.

8) $\forall x \in V: 1x = x$.

III. CÁC TÍNH CHẤT ĐƠN GIẢN (ĐỌC THÊM)

1) $\mathbf{0}.\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\theta}, \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}$
2) $-\boldsymbol{x} = (-\mathbf{1})\boldsymbol{x}, \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}$
3) $\boldsymbol{\lambda}.\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}, \forall \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}$
4) $\boldsymbol{\lambda}.\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\theta} \Rightarrow \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \vee \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}, \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R})$
5) $\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\mu}.\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{\theta} \Rightarrow \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}; \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R})$
6) $\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\lambda}.\boldsymbol{y}, \boldsymbol{\lambda} \neq \mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{V}; \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R})$

IV. KHÔNG GIAN VECTOR CON

1. Định nghĩa

Tập hợp con khác rỗng $\boldsymbol{W}$ được gọi là không gian vectơ con của không gian vectơ thực $\boldsymbol{V}$ nếu $\boldsymbol{W}$ đóng kín với hai phép toán cộng và nhân ngoài của không gian vectơ $\boldsymbol{V}$. Nghĩa là:

$$\boldsymbol{i})\ \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{W} \Rightarrow \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in W;$$

$$\boldsymbol{ii})\ \forall \boldsymbol{u} \in W, \forall \boldsymbol{k} \in \boldsymbol{R} \Rightarrow \boldsymbol{k}.\boldsymbol{u} \in W.$$

❖ **Chú ý:**

- $\{0\}$ *và V là kgvt con của V và gọi là các không gian con tầm thường của V.*
- *Nếu W là kgvt-con của V thì W cũng là một không gian vectơ.*

- ***Nhận xét:***

*Cách chứng minh **W** là không gian vectơ con của không gian vectơ **V**:*

***Cách 1:** Chỉ ra W là tập con khác rỗng của V đồng thời đóng kín với phép cộng và phép nhân ngoài.*

$\boldsymbol{i})$ *Chỉ ra W là tập con khác rỗng của V.*

$\boldsymbol{ii})\ \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{W} \Rightarrow \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in W;$

$\boldsymbol{iii})\forall \boldsymbol{u} \in W, \forall \boldsymbol{k} \in \boldsymbol{R} \Rightarrow \boldsymbol{k}.\boldsymbol{u} \in W.$

***Cách 2:** (Gộp 2 tính chất)*

$\boldsymbol{i})$ *Chỉ ra W là tập con khác rỗng của V.*

$\boldsymbol{ii})\ \forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \boldsymbol{R}; \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{W} \Rightarrow \boldsymbol{\alpha}.\boldsymbol{u} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{v} \in W.$

❖VD: CMR: $W = \{(x, y, 0) / \ x, y \in R\}$ là một kgvt con của kgian vectơ R^3.

Giải.

Rõ ràng W là tập hợp con khác rỗng của R^3. (1)

Lấy bất kỳ $\alpha \in R$ và $u, v \in W$ thì u, v có dạng:

$$u = (x, y, 0) \text{ và } v = (x', y', 0) \text{ với } x, y, x', y' \in R.$$

Ta thấy:

$$i)\ u + v = (x, y, 0) + (x', y', 0) = (x + x', y + y', 0)$$

Suy ra $u+v \in W$. Vậy W đóng kín với phép cộng. (2)

$$ii)\ \alpha u = \alpha(x, y, 0) = (\alpha x, \alpha y, 0).$$

Suy ra $\alpha u \in W$. Vậy W đóng kín với phép nhân ngoài. (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra W là một không gian vectơ con của R^3.

Cách 2:

Rõ ràng W là tập hợp con khác rỗng của R^3. (1)

Lấy bất kỳ $\alpha, \beta \in R$ và $u, v \in W$ thì u, v có dạng:

$u = (x, y, 0)$ *và* $v = (x', y', 0)$ *với* $x, y, x', y' \in R$.

Ta thấy:

$$\alpha u + \beta v = \alpha(x, y, 0) + \beta(x', y', 0)$$

$$= (\alpha x, \alpha y, 0) + (\beta x', \beta y', 0)$$

$$= (\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y', 0).$$ *Suy ra* $\alpha u + \beta v \in W$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra W là một không gian vectơ con của R^3.

BÀI TẬP NHÓM

Chứng minh rằng tập hợp tập hợp $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} / a, b \in R \right\}$ *là không gian vectơ con của không gian các ma trận vuông cấp hai hệ số thực* $M_2(R)$.

2. Định lý

Gọi S là tập hợp tất cả các nghiệm của một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất gồm m phương trình và n ẩn số:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

thì S là một không gian vector con của R^n.

Khi đó S còn gọi là không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất.

❖ VD:

Tìm tập nghiệm S của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

$$\begin{cases} x+y+z-t=0 \\ x-y-z+t=0 \end{cases}$$

Chứng tỏ rằng S là không gian vectơ con của R4 (không gian nghiệm).

Giải

Giải hệ: $\begin{cases} x+y+z-t=0 \quad (1) \\ x-y-z+t=0 \quad (2) \end{cases} \xLeftrightarrow{(1)+(2)\to(2)} \begin{cases} x+y+z-t=0 \\ 2x=0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z-t=0 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0+y+z-t=0 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-\alpha+\beta \\ z=\alpha \\ t=\beta \end{cases} \quad (\alpha,\beta\in R)$$

Suy ra tập nghiệm của hệ là: $S=\{(0;-\alpha+\beta;\alpha;\beta)/\alpha,\beta\in R\}$.

Ta c/m: $\boldsymbol{S = \{(0; -\alpha + \beta; \alpha; \beta)/\alpha, \beta \in R\}}$ *là kgvt con của* $\boldsymbol{R^4}$. *Thật vậy:*

Rõ ràng S là tập hợp con khác rỗng của $\boldsymbol{R^4}$.

Giả sử: $\boldsymbol{x, y \in S}$ *và* $\boldsymbol{k \in R}$ *thì* $\boldsymbol{x, y}$ *có dạng:*

$\boldsymbol{x = (0; -\alpha + \beta; \alpha; \beta)}$ $\boldsymbol{y = (0; -a + b; a; b)}$ *với* $\boldsymbol{\alpha, \beta, a, b \in R}$.

Ta thấy:

- $\boldsymbol{x + y = (0; -\alpha + \beta; \alpha; \beta) + (0; -a + b; a; b)}$

  $\boldsymbol{= (0; -(\alpha + a) + \beta + b; \alpha + a; \beta + b)}$. *Suy ra* $\boldsymbol{x + y \in S}$.

- $\boldsymbol{kx = (0; -k\alpha + k\beta; k\alpha; k\beta)}$. *Suy ra* $\boldsymbol{kx \in S}$.

Vậy $\boldsymbol{S}$ *là một kgvt con của* $\boldsymbol{R^3}$.

V. TỔ HỢP TUYẾN TÍNH, HỆ SINH, BAO TUYẾN TÍNH

1) Định nghĩa

Trong không gian vectơ V, cho hệ vectơ $S = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$.

- *Một tổ hợp tuyến tính của họ **S** là một vectơ có dạng:*

  $$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n \text{ với } \lambda_1, \lambda_{2,\dots}, \lambda_n \in R.$$

- *Nếu vectơ v biểu diễn được dạng*

  $$v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n \text{ với } \lambda_1, \lambda_{2,\dots}, \lambda_n \in R..$$

  *thì ta nói v biểu thị tuyến tính được qua họ vectơ **S**.*

- *S gọi là một hệ sinh của V nếu bất kỳ vector nào trong V cũng biểu thị tuyến tinh được qua hệ S.*
- *Tập hợp tất cả các tổ hợp tuyến tính của họ S được gọi là bao tuyến tính của họ S, ký hiệu:* $\mathbf{span}(S)$ *hoặc* $< S >$. *Vậy:* $span(S) = \{\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n \,/\lambda_1, \lambda_{2,\dots}, \lambda_n \in R\}$.

❖**VD1:** *Trong không gian vectơ* R^3 *cho họ vectơ*

$$S = \{v = (1,-1,2), w = (2,0,-3)\}$$

a) Tìm biểu diễn tuyến tính của $u = (-1;-3;12)$ *qua* S.

b) Tìm bao tuyến tính của S.

Giải

a) Giả sử: $\boldsymbol{u = x.v + y.w}$ (*với* $\boldsymbol{x, y \in R}$)

$$\Rightarrow (-1,-3,12) = x(1,-1,2) + y(2,0,-3)$$

$$\Leftrightarrow (-1,-3,12) = (x+2y, -x, 2x-3y) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = -1 \\ -x = -3 \\ 2x - 3y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}.$$

Vậy $\boldsymbol{u = 3v - 2w}$ ·

b) Bao tuyến tính của S là:

$$span(S) = \{x.v + y.w \,/ x, y \in R\} = \{x(1,-1,2) + y(2,0,-3) \,/ x, y \in R\}$$

$$= \{(x + 2y, -x, 2x - 3y) / x, y \in R\}$$

❖VD2: *CMR*

$a)\ S = \{\boldsymbol{u_1}(1;\mathbf{0}), \boldsymbol{u_2}(\mathbf{0};\mathbf{1})\}$ *là một hệ sinh của không gian vector* R^2.

$b)\ T = \{\boldsymbol{u_1}(1;\mathbf{2}), \boldsymbol{u_2}(\mathbf{1};-\mathbf{1})\}$ *là một hệ sinh của không gian vector* R^2.

Giải

a) **Lấy bất kỳ vector** $\boldsymbol{u} \in R^2$ **thì** $\boldsymbol{u}$ **có dạng:** $\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y})$ **với x, y** $\in \boldsymbol{R}$.

Ta thấy: $\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}; \mathbf{0}) + (\mathbf{0}; \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}.(1;\mathbf{0}) + \boldsymbol{y}.(\mathbf{0};\mathbf{1})$

$\Rightarrow \boldsymbol{u} = \boldsymbol{x}.\boldsymbol{u_1} + \boldsymbol{y}.\boldsymbol{u_2}$ **với x, y** $\in \boldsymbol{R}$.

Vậy bất kỳ vector nào trong $\mathbf{R}^2$ **cũng biểu thị tuyến tính được qua hệ S, do đó S là một hệ sinh của không gian vector** $\mathbf{R}^2$.

❖VD3: *CMR*

b) $T = \{\boldsymbol{u_1}(1;\mathbf{2}), \boldsymbol{u_2}(\mathbf{1};-\mathbf{1})\}$ *là một hệ sinh của không gian vector* R^2.

Giải

b) Lấy bất kỳ vector $\boldsymbol{u} \in R^2$ thì $\boldsymbol{u}$ có dạng: $\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})$ với $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \boldsymbol{R}$.

Giả sử $\boldsymbol{u} = \alpha.\boldsymbol{u_1} + \beta.\boldsymbol{u_2}$ với $\alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$

$$\Rightarrow (\boldsymbol{x};\boldsymbol{y}) = \alpha.(1;\mathbf{2}) + \beta.(\mathbf{1};-\mathbf{1})$$

$$\Leftrightarrow (\boldsymbol{x};\boldsymbol{y}) = (\alpha;\mathbf{2}\alpha) + (\beta;-\beta)$$

$$\Leftrightarrow (\boldsymbol{x};\boldsymbol{y}) = (\alpha+\beta;\mathbf{2}\alpha-\beta) \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x} = \alpha+\beta \\ \boldsymbol{y} = \mathbf{2}\alpha-\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}}{\mathbf{3}} \\ \beta = \dfrac{\mathbf{2}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}}{\mathbf{3}} \end{cases}$$

Vậy biểu thị tuyến tính của $\boldsymbol{u}$ qua hệ S có dạng:

$$\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}}{\mathbf{3}}.\boldsymbol{u_1} + \frac{\mathbf{2}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}}{\mathbf{3}}.\boldsymbol{u_2}, \text{ với } \mathrm{x}, \mathrm{y} \in \boldsymbol{R}.$$

Do đó S là một hệ sinh của không gian vector R^2.

BÀI TẬP TẠI LỚP

Trong không gian vectơ R^3 *cho họ vectơ*

$$S = \{u_1 = (\mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{0}), u_2 = (\mathbf{1}, -\mathbf{1}, \mathbf{0})\}.$$

a) Tìm biểu diễn tuyến tính của $u = (\mathbf{3}; -2; \mathbf{0})$ *qua S.*

b) Tìm bao tuyến tính của S.

c) S có phải là hệ sinh của R^3 *hay không? Tại sao?*

2) Định lý

Trong không gian vectơ V, cho hệ vectơ** $S=\{\mathbf{u_1},\mathbf{u_2},\dots,\mathbf{u_n}\}$. **Khi đó** span(S) **là một không gian vector con của V .

CM: Ta sẽ chứng minh span(S) đóng kín với hai phép toán của V.

Giả sử k$\in R$ và $u,v\in$ span(S) thì u,v có dạng:

$$u=\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\cdots+\alpha_nu_n \text{ với } \alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\in R.$$

$$v=\beta_1u_1+\beta_2u_2+\cdots+\beta_nu_n \text{ với } \beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\in R.$$

Ta thấy: $u+v=(\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\cdots+\alpha_nu_n)+(\beta_1u_1+\beta_2u_2+\cdots+\beta_nu_n)$

$$=(\alpha_1+\beta_1)u_1+(\alpha_2+\beta_2)u_2+\cdots+(\alpha_n+\beta_n)u_n\in \text{span}(S).$$

$$ku=k(\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\cdots+\alpha_nu_n)$$

$$=k\alpha_1u_1+k\alpha_2u_2+\cdots+k\alpha_nu_n\in \text{span}(S).$$

Vậy span(S) là một không gian vectơ con của kgvt V.

❖ **Nhận xét:**

- *Muốn chứng minh S là một hệ sinh của W, ta có thể chỉ ra W là bao tuyến tính của S. Tức là:* W = span(S) .
- *Muốn chứng minh tập hợp W là một không gian vectơ con của V ta có thể chỉ ra W là bao tuyến tính của một hệ vectơ nào đó của V.*

❖**VD1: CMR Hệ vectơ S=** $\{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$ **là một hệ sinh của không gian vectơ** R^3**.**

Giải

Ta có: $R^3=\{(x,y,z): x,y,z \in R\} = \{(x,0,0) + (0,y,0) + (0,0,z)/x,y,z \in R\}$

$= \{x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)/x,y,z \in R\}$

$= \{xe_1 + ye_2 + ze_3/x,y,z \in R\} = span(S).$

Vậy S là một hệ sinh của không gian vectơ R^3.

Cách khác: *(Ta sẽ chỉ ra mọi vectơ của R^3 đều biểu thị tuyến tính được qua hệ vectơ S= $\{\boldsymbol{e_1} = (\mathbf{1,0,0}), \boldsymbol{e_2} = (\mathbf{0,1,0}), \boldsymbol{e_3} = (\mathbf{0,0,1})\}$)*

Lấy bất kỳ $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{R}^3$ thì $\boldsymbol{u}$ có dạng $\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ với $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{R}$.

Ta thấy $\boldsymbol{u}$ phân tích được thành:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} &= (\boldsymbol{x}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) + (\mathbf{0}, \boldsymbol{y}, \mathbf{0}) + (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \boldsymbol{z}) \text{ với } \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{R} \\ &= \boldsymbol{x}\boldsymbol{e_1} + \boldsymbol{y}\boldsymbol{e_2} + \boldsymbol{z}\boldsymbol{e_3} \text{ với } \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{R} \end{aligned}$$

Vậy $\boldsymbol{u}$ biểu thị tuyến tính được qua hệ S nên S là một hệ sinh của R^3.

❖**VD2:** **CMR tập hợp** $W = \{(3x, -2y) : x, y \in R\}$ **là một không gian vectơ con của** R^2.

Giải

Ta thấy W $= \{(\boldsymbol{3x}, \boldsymbol{-2y}) : \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}\}$

$$= \{(\boldsymbol{3x}, \boldsymbol{0}) + (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{-2y}): \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}\}$$

$$= \{\boldsymbol{x}(\boldsymbol{3}, \boldsymbol{0}) + \boldsymbol{y}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{-2}): \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}\}$$

Đặt: $\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{3}, \boldsymbol{0})\ ;\ \boldsymbol{b} = (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{-2})$ **thì**

W$= \{\boldsymbol{x}.\boldsymbol{a} + \boldsymbol{y}.\boldsymbol{b}\ /\ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}\}$**= span**$(\{\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}\})$.

Vậy W là một không gian vectơ con của $\boldsymbol{R}^2$.

BÀI TẬP VỀ NHÀ

Câu 1: Tập hợp nào sau đây là không gian vector con của không gian vector $\mathbb{R}^3$? Tại sao ?

$$S_1 = \left\{ u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = \frac{y + z}{2} \right\}$$

$$S_2 = \left\{ u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 = \frac{y^2 + z^2}{2} \right\}$$

Câu 2: Trong $\mathbb{R}^3$ cho tập hợp:

$$W = \{u = (a, b, c): a^2 + b^2 = c^2\} \subset \mathbb{R}^3$$

a) Hãy chỉ ra 5 phần tử thuộc W.

b) Tập hợp W có là không gian con của $\mathbb{R}^3$ không? Tại sao?

BÀI TẬP VỀ NHÀ

Câu 3: Trong $\mathbb{R}^3$ cho tập hợp:

$$W = \{u = (a, b, c): a + b - c = 0\}$$

Chứng minh tập hợp W là không gian con của $\mathbb{R}^3$.

Câu 4: Tìm tập nghiệm W của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 3x - 3y + 2z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}.$$

CMR: W là không gian vectơ con của R3.