TRƯỜNG ĐẠI HỌC GIAO THÔNG VẬN TẢI THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

KHOA CƠ BẢN – BỘ MÔN TOÁN

BÀI GIẢNG GIẢI TÍCH 1

CHƯƠNG I. GIỚI HẠN VÀ SỰ LIÊN TỤC CỦA HÀM MỘT BIẾN

§1. Giới hạn hàm số

ThS. Đinh Tiến Dũng

NỘI DUNG CHÍNH

- *Định nghĩa giới hạn hàm số, giới hạn một phía, giới hạn mở rộng.*
- *Các tính chất, qui tắc tính giới hạn.*

§2. Giới hạn hàm số

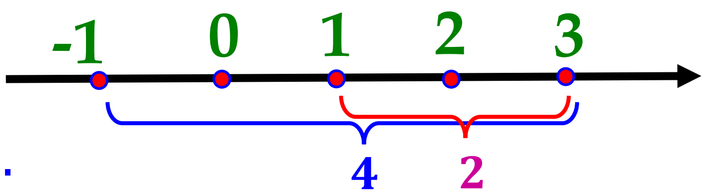
1. Khoảng cách và lân cận trên trục số thực:

1.1 Khoảng cách:

Khoảng cách giữa hai số thực a và b trên trục số thực được định nghĩa là $|a-b|$.

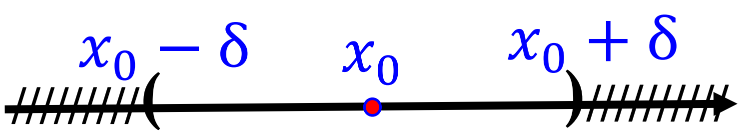
VD.

- Khoảng cách từ 3 đến 1 là: $|3-1|=2$.
- Khoảng cách từ -1 đến 3 là: $|-1-3|=4$.



1.2 Lân cận mở:

Cho $x_0 \in R$, *với mỗi số dương* δ, *khoảng* $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ *gọi là một lân cận mở bán kính* δ *của điểm* x_0. *Lân cận mở gọi tắt là lân cận.*



§2. Giới hạn hàm số

2. Giới hạn hữu hạn của hàm số tại một điểm hữu hạn:

2.1 Ví dụ mở đầu:

Xét hàm số $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ khi cho đối số x dần tới 0.

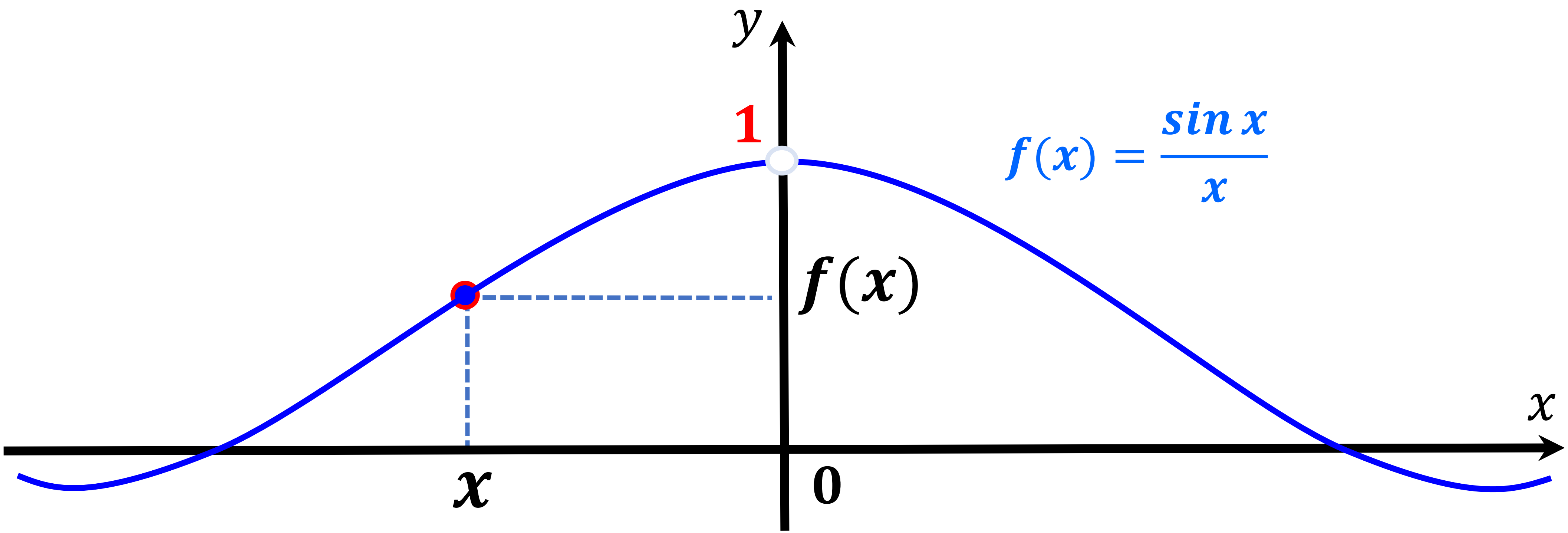
Hãy dùng máy tính CASIO tính giá trị của hàm số và điền vào bảng sau đây:

x	-1	-0,5	-0,3	-0,1	0	0,05	0,4	0,6	1
$\mathbf{f}(x) = \frac{\sin x}{x}$									

Vẽ đồ thị và nhận xét giá trị của f(x) khi cho x tiến dần tới 0 từ phía bên trái và bên phải.

Dùng máy tính CASIO ta tính được:

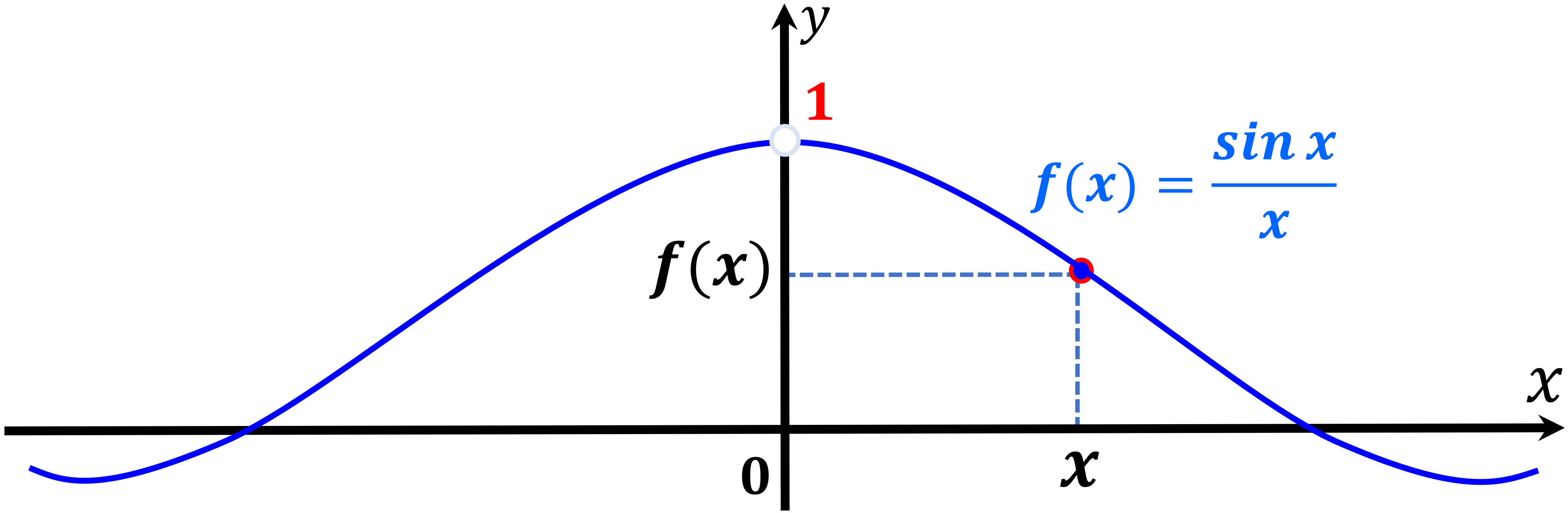
x	-1	-0,5	-0,3	-0,1	**0**	0,05	0,4	0,6	1
$f(x)=\frac{\sin x}{x}$	0,84	0,95	0,98	0,99	||	0,999	0,97	0,94	0,84



Nhận xét: Khi x tiến dần tới 0 từ phía trái thì $f(x) \to 1$

Dùng máy tính CASIO ta tính được:

x	-1	-0,5	-0,3	-0,1	**0**	0,05	0,4	0,6	1
$f(x)=\frac{\sin x}{x}$	0,84	0,95	0,98	0,99	||	0,999	0,97	0,94	0,84



Nhận xét: Khi x tiến dần tới 0 từ phía phải thì $f(x) \to 1$

❖ ***Nhận xét:*** *Khi x tiến dần đến* ***0*** *từ phía bất kỳ ta luôn có $f(x)$ tiến dần đến* ***1****. Kí hiệu:* $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. *Tóm lại:*

$\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ vì f(x) có thể gần **1** một cách tùy ý khi x đủ gần **0**.

Tổng quát

$\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ $\overset{\text{đn}}{\Leftrightarrow}$ f(x) có thể gần L một cách tùy ý
x đủ gần x_0 (về cả hai phía)
x không bằng x_0

f(x) có thể gần L một cách tùy ý → $|f(x) - L| < \varepsilon$ với mọi ε dương bé tùy ý

x đủ gần x_0 (về cả hai phía) x không bằng x_0 → $0 < |x - x_0| < \delta$ với một δ dương nào đó

2.2 Định nghĩa

Cho hàm số f(x) xác định trong một lân cận của điểm $\boldsymbol{x_0}$ *(có thể không xác định tại* $\boldsymbol{x_0}$*). Ta nói hàm số f có giới hạn* **L** *khi x dần tới* $\boldsymbol{x_0}$ *nếu với mọi số* $\varepsilon > 0$, *tồn tại số* $\delta > 0$ *sao cho với mọi x mà* $0 < |x - \boldsymbol{x_0}| < \delta$ *thì ta có* $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Kí hiệu: $\lim\limits_{x \to \boldsymbol{x_0}} f(x) = \mathbf{L}$ hoặc $f(x) \to L$ *khi* $x \to \boldsymbol{x_0}$.

❖ **Lưu ý:**

- Giả thiết hàm số f(x) xác định trong một lân cận của điểm $\boldsymbol{x_0}$ là điều kiện để ta xét được giá trị của f(x) khi biến x có thể tiến tới $\boldsymbol{x_0}$ từ hai phía.
- Ta chỉ quan tâm đến giá trị của hàm số f(x) khi x nhận những giá trị gần $\boldsymbol{x_0}$. Vậy ta không cần quan tâm đến hàm số có xác định tại $\boldsymbol{x_0}$ hay không. Chẳng hạn, hàm $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ không xác định tại $\boldsymbol{x_0} = 0$ nhưng vẫn tồn tại $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \mathbf{1}$.

❖ **Lưu ý:**

- Weierstrass là người đầu tiên sử dụng định nghĩa epsilon-delta cho giới hạn và vẫn được dùng đến ngày nay. Định nghĩa ngắn gọn và chuẩn *xác* nhất:

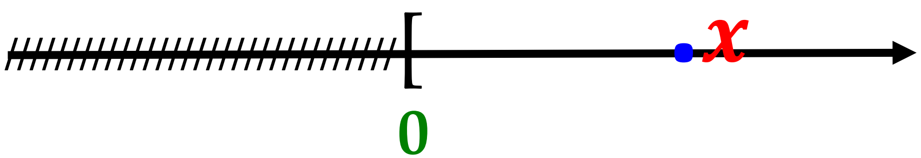
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \mathbf{L} \overset{\text{đn}}{\Leftrightarrow} (\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon).$$

3. Giới hạn một phía ($\lim\limits_{x \to x_0^{\pm}} f(x) = L$)

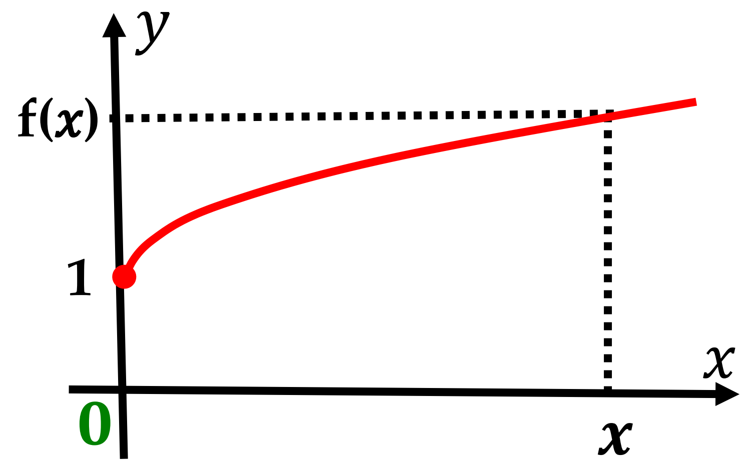
3.1 Ví dụ mở đầu: Xét hàm $f(x) = 1 + \sqrt{x}$ ta thấy:

x	-1	-0,5	-0,3	-0,1	**0**	0,01	0,04	0,09	1
$\mathbf{f}(x) = \mathbf{1} + \sqrt{x}$	||	||	||	||	**1**	1,1	1,2	1,3	2

Tập xác định của hàm số $D = [0; \infty)$, nên x chỉ có thể tiến về 0 từ phía bên phải số 0. Khi đó hàm số $f(x)$ có giới hạn phải bằng 1 khi x dần tới 0 từ bên phải.



$$\lim_{x \to \mathbf{0}^+} f(x) = \lim_{x \to \mathbf{0}^+} (\mathbf{1} + \sqrt{x}) = \mathbf{1}.$$



Tổng quát: $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \mathbf{L} \overset{\text{đn}}{\Leftrightarrow}$ f(x) có thể gần **L** một cách tùy ý x đủ gần $\boldsymbol{x_0}$ về phía bên phải (x lớn hơn $\boldsymbol{x_0}$)

f(x) có thể gần L một cách tùy ý → $|f(x) - L| < \varepsilon$ với mọi ε dương bé tùy ý

x đủ gần $\boldsymbol{x_0}$ về phía bên phải (x lớn hơn $\boldsymbol{x_0}$) → $0 < |x - \boldsymbol{x_0}| < \delta\,;\, x > \boldsymbol{x_0}$ với δ dương nào đó

↓

$\exists\delta > 0: 0 < x - \boldsymbol{x_0} < \delta$

3.2 Các định nghĩa

a) Định nghĩa giới hạn phải:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \mathbf{L} \overset{\text{đn}}{\Leftrightarrow} \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0: (0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon).$$

Ngoài ra $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \mathbf{L}$ **còn ký hiệu là:** $f(x) \to \mathbf{L}$ **khi** $x \to x_0^+$.

b) Định nghĩa giới hạn trái:

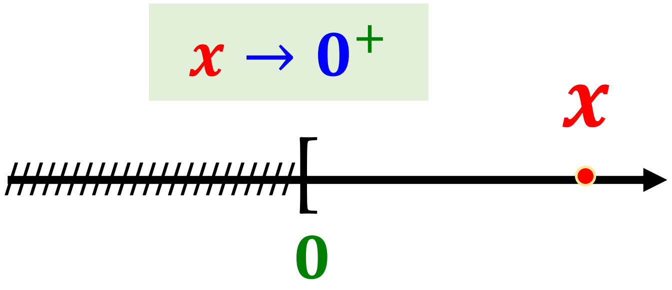
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L \overset{\text{đn}}{\Leftrightarrow} (\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon).$$

Ngoài ra $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$ còn ký hiệu là: $f(x) \to L$ khi $x \to x_0^-$.

❖ **Nhận xét:**

- Nếu $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ thì $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$ và $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$.
- *Dùng định nghĩa giới hạn một phía ta chứng minh được thêm một công thức cơ bản:*

  - $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0;$
  - $\lim_{x \to 0^-} \sqrt{x}$ không tồn tại.



4. Các khái niệm giới hạn mở rộng:

- *Giới hạn hữu hạn của hàm số $f(x)$ tại điểm x_0 hữu hạn chính là:*

$$\lim_{x \to \boxed{x_0}} f(x) = \boxed{L}$$

hữu hạn ***hữu hạn***

- *Lần lượt thay x_0 hữu hạn bởi $\pm\infty$ hoặc thay L hữu hạn bởi $\pm\infty$ ta có các khái niệm giới hạn mở rộng:*

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = L$ $\longrightarrow$ *Giới hạn của $f(x)$ tại vô cùng.*

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$ $\longrightarrow$ *Giới hạn vô cùng của $f(x)$.*

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ $\longrightarrow$ *Giới hạn vô cùng của $f(x)$ ở vô cùng.*

$\lim\limits_{x \to x_0^{\pm}} f(x) = \pm\infty$ $\longrightarrow$ *Giới hạn vô cùng một phía của $f(x)$.*

4.1 Định nghĩa giới hạn tại vô cùng, tiệm cận ngang

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \mathbf{L} \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{R}: \forall x > N \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon).$$

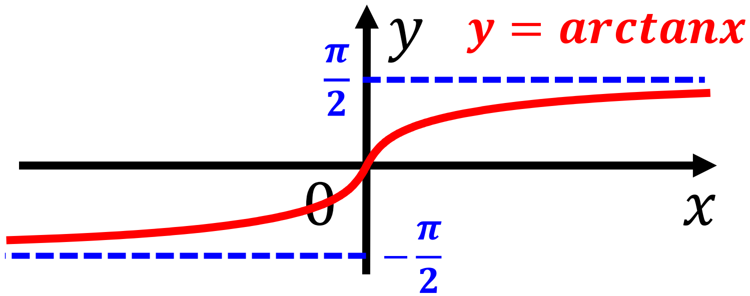
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \mathbf{L} \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{R}: \forall x < N \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon).$$

Ngoài ra, nếu $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \mathbf{L}$ *hoặc* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \mathbf{L}$ thì đường thẳng y= **L** gọi là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số y=f(x).

VD.

Đồ thị $y = \arctan x$ có TCN: $y = \pm\pi/2$.

Vì $\lim_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$; $\lim_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$.



❖ **Chú ý:**

Các Đ.lý 2,3,4,5,6 vẫn đúng khi thay $x \to x_0$ bởi $x \to +\infty$ hoặc $x \to -\infty$.

Phần tự học của SV

4.2 Định nghĩa giới hạn vô cùng, giới hạn vô cùng một phía và tiệm cận đứng:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow (\forall M > 0, \exists \delta > 0: 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M).$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow (\forall N < 0, \exists \delta > 0: 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < N).$$

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty \Leftrightarrow (\forall M > 0, \exists \delta > 0: 0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow f(x) > M).$$

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty \Leftrightarrow (\forall M > 0, \exists \delta > 0: -\delta < x - x_0 < 0 \Rightarrow f(x) > M).$$

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty \Leftrightarrow (\forall N < 0, \exists \delta > 0: 0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow f(x) < N).$$

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty \Leftrightarrow (\forall N < 0, \exists \delta > 0: -\delta < x - x_0 < 0 \Rightarrow f(x) < N).$$

Ngoài ra, nếu $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \pm\infty$; $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \pm\infty$ thì đường thẳng x= x_0 gọi là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số y=f(x).

Phần tự học của SV

VD. Tìm các tiệm cận đứng của mỗi hàm số sau:

a) $f(x) = \dfrac{2x}{x-3}$ b) $f(x) = \log_a x$

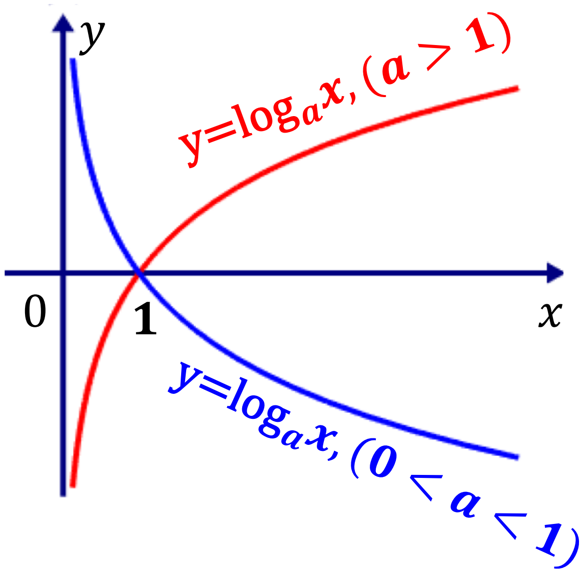
Giải.

a) Ta có: $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{2x}{x-3} = +\infty$ và $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{2x}{x-3} = -\infty$.

Vậy đ.thẳng $x = 3$ là TCĐ của đồ thị hàm số.

b) Vì $\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a x = \left[\begin{array}{l} -\infty \text{ nếu } a > 1 \\ +\infty \text{ nếu } 0 < a < 1 \end{array}\right.$

nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là trục Oy: $x = 0$.



Phần tự học của SV

4.3 Định nghĩa giới hạn vô cùng tại vô cùng và tiệm cận xiên:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow (\forall M > 0, \exists N > 0: \forall x > N \Rightarrow \mathrm{f}(x) > \mathrm{M}).$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow (\forall M < 0, \exists N > 0: \forall x > N \Rightarrow \mathrm{f}(x) < \mathrm{M}).$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow (\forall M > 0, \exists N < 0: \forall x < N \Rightarrow \mathrm{f}(x) > \mathrm{M}).$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow (\forall M < 0, \exists N < 0: \forall x < N \Rightarrow \mathrm{f}(x) < \mathrm{M}).$$

Ngoài ra, Đường thẳng $y = \mathrm{a}x + b$ được gọi là tiệm cận *xiên* của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu:

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \text{ hoặc } \lim_{x\to-\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 .$$

Phần tự học của SV

❖ **Chú ý:**

1. Điều kiện cần để đồ thị hàm y=f(x) có tiệm cận $x$iên là $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$ hoặc $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \pm\infty$.
2. Nếu $f(x) = ax + b + g(x), a \neq 0$ và hàm $g(x)$ thỏa điều kiện $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$ hoặc $\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$ thì $y = ax + b$ là đường tiệm cận $x$iên của đồ thị hàm y=f(x).
3. Trường hợp tổng quát, các hệ số a, b của đường tiệm cận $x$iên được $x$ác định theo công thức sau:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a(a \neq 0) \\ \lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - ax] = b \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a(a \neq 0) \\ \lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - ax] = b \end{cases}.$$

5. Tính chất của giới hạn

❖ ***Định lý 1:*** *(Bảng công thức giới hạn cơ bản)*

1) $\lim\limits_{x\to x_0} C = C$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} C = C$

2) $\lim\limits_{x\to x_0} x^n = x_0^n$ với $n = 1,2,3,\ldots$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} -\infty \text{ nếu n lẻ} \\ +\infty \text{ nếu n chẵn} \end{cases}$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \textbf{nếu } a > 1 \\ 0 & \text{nếu } 0 < a < 1 \end{cases}$

6) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\log_a x) = \begin{cases} +\infty & \textbf{nếu } a > 1 \\ 0 & \text{nếu } 0 < a < 1 \end{cases}$

7) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{C}{x^n} = 0$

8) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

8. $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

9. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

10. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$

11. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

12. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$

13. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

14. $\lim\limits_{t\to 0} (1 + t)^{\frac{1}{t}} = e$

❖ Ví dụ

- $\lim_{x\to-\infty} e^{-x} \underset{\text{Đặt } t=-x}{=} \lim_{t\to\infty} e^{t} = \infty$ (ADCT 5)

- $\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{x} = \lim_{x\to-\infty} 5^{-x}$

  $\underset{\text{Đặt } t=-x}{=} \lim_{t\to\infty} 5^{t} = \infty$ (ADCT 5)

- $\lim_{x\to+\infty} (\ln(2x+1)) \underset{\text{Đặt } t=2x+1}{=} \lim_{t\to+\infty} \ln t = \infty$ (ADCT 6)

❖ ***Định lý 2:*** *(Tính duy nhất của giới hạn)*

Giới hạn của hàm số f(x) tại điểm x_0 (nếu có) là duy nhất.

❖ ***Định lý 3:*** *(Tương đương định nghĩa)*

Cho hàm số f(x) $x$ác định trong một lân cận D của điểm $\boldsymbol{x_0}$ (có thể không $x$ác định tại $\boldsymbol{x_0}$). Ta có $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ khi và chỉ khi: $\forall\{x_n\} \subset D$, mà $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = L$.

❖ **Chú ý:**

ĐL này thường dùng để chứng tỏ một hàm không có giới hạn tại x_0.

Nếu tìm được hai dãy $(x_n), (x'_n)$ cùng hội tụ đến x_0 mà $f(x_n), f(x'_n)$ hội tụ về hai giá trị khác nhau thì hàm f(x) không có giới hạn tại x_0.

Phần tự học của SV

VD. Chứng tỏ rằng không tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$.

Giải:

Đặt $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ thì f có miền xác định D=R\{0}.

Trên D, chọn dãy hai dãy đối số: $x_n = \frac{1}{2n\pi}$; $x'_n = \frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$, với $n \in \mathbb{N}^*$.

Rõ ràng: $x_n \to 0$, $x'_n \to 0$, khi $n \to +\infty$.

Tuy nhiên: $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} sin\frac{1}{x_n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\sin(2n\pi) = \lim\limits_{n\to+\infty} 0 = \mathbf{0}$;

$$\lim_{n\to+\infty} f(x'_n) = \lim_{n\to+\infty} sin\frac{1}{x'_n} = \lim_{n\to+\infty}\sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1.$$

Vì $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) \neq \lim\limits_{n\to+\infty} f(x'_n)$ nên $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ không tồn tại.

❖ *Định lý 4: (Về sự tồn tại giới hạn)*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = L$$

VD. **Cho** $f(x) = \begin{cases} 3 & nếu\ x \geq 0 \\ x^2 & nếu\ \ -1 \leq x < 0 \\ x^4 & nếu\ x < -1 \end{cases}$. **Tìm** $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$.

Giải

- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}(x^2) = 0$; $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(3) = 3$.

Vì $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ nên $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ không tồn tại.

- $\lim\limits_{x\to (-1)^+} f(x) = \lim\limits_{x\to (-1)^+}(x^2) = 1$; $\lim\limits_{x\to (-1)^-} f(x) = \lim\limits_{x\to (-1)^-}(x^4) = 1$.

Vì $\lim\limits_{x\to (-1)^+} f(x) = 1 = \lim\limits_{x\to (-1)^-} f(x)$ nên $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = 1$.

❖ **Định lý 4:** *(Bất đẳng thức qua giới hạn)*

Nếu $f(x) < g(x)$ hoặc $f(x) \le g(x), \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \backslash \{x_0\}$ và tồn tại giới hạn của cả hai hàm f và g khi x tiến đến x_0 thì $\lim_{x \to x_0} f(x) \le \lim_{x \to x_0} g(x)$.

❖ **Định lý 5:** *(Giới hạn kẹp)*

Nếu $f(x) \le g(x) \le h(x), \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \backslash \{x_0\}$ và $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = L$ thì $\lim_{x \to x_0} g(x) = L$.

❖ ***Hệ quả:***

Nếu $|g(x)| \le M, \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \backslash \{x_0\}$ và $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ thì $\lim_{x \to x_0} [f(x).g(x)] = 0$.

Ví dụ: CMR: $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right) = \mathbf{0}$.

Giải

Cách 1: Ta thấy: -1 $\leq \sin\frac{1}{x} \leq 1, \forall x \in R\backslash\{0\}$

$$\Rightarrow -x^2 \leq x^2.\sin\frac{1}{x} \leq x^2, \forall x \in R\backslash\{0\}.$$

Mặt khác $\lim\limits_{x\to 0}(-x^2) = 0$ *và* $\lim\limits_{x\to 0}(x^2) = 0$ nên $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)$=0.

Cách 2: Ta thấy: $|\sin\frac{1}{x}| \leq 1, \forall x \in R\backslash\{0\}$ và $\lim\limits_{x\to 0}(x^2) = 0$

nên $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)$=0.

❖ ***Định lý 6:*** *(Quy tắc tính giới hạn hữu hạn)*

Giả sử $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = b$ mà a,b hữu hạn, ta có:

1) $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = a \pm b$

2) $\lim\limits_{x \to x_0} [Cf(x)] = C \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = C.a$ (Với C là hằng số)

3) $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x)g(x)] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = a.b$

4) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \dfrac{a}{b}$, (*nếu* $b \neq 0$)

5) $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x)]^n = [\lim\limits_{x \to x_0} f(x)]^n = a^n$ *với* $n = 1,2,3,\ldots$

6) $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)} = \sqrt[n]{a}$ (Khi n chẵn thêm ĐK $a > 0$)

7) $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = \left|\lim\limits_{x \to x_0} f(x)\right| = |a|$

8) $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x)^{g(x)}] = \left[\lim\limits_{x \to x_0} f(x)\right]^{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = a^b$ (nếu $0 < a \neq 1$)

VD1. Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x\to 5}\left(2x^2-3x+4\right)$ **b)** $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+2x^2-1}{5-3x}$

Giải

a) $\lim\limits_{x\to 5}\left(2x^2-3x+4\right)=\lim\limits_{x\to 5}\left(2x^2\right)-\lim\limits_{x\to 5}(3x)+\lim\limits_{x\to 5}(4)$ (AD Quy tắc 1)

$=2.\lim\limits_{x\to 5}\left(x^2\right)-3\lim\limits_{x\to 5}(x)+\lim\limits_{x\to 5}(4)$ (AD Quy tắc 2)

$=2.5^2-3.5+4=39$ (Giới hạn cơ bản)

❖ **Tổng quát:** Qui tắc giới hạn hàm đa thức

Nếu $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$ thì $\lim\limits_{x\to x_0}P(x)=P(x_0)$.

AD ta có ngay: $\lim\limits_{x\to 5}\left(2x^2-3x+4\right)=2.5^2-3.5+4=39.$

b) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+2x^2-1}{5-3x}=\dfrac{\lim\limits_{x\to-2}(x^3+2x^2-1)}{\lim\limits_{x\to-2}(5-3x)}$ (AD Quy tắc lim thương)

$=\dfrac{(-2)^3+2\times(-2)^2-1}{5-3\times(-2)}$ (AD Quy tắc giới hạn hàm đa thức)

$=-\dfrac{1}{11}$.

❖ **Tổng quát:** Qui tắc giới hạn hàm phân thức

Nếu $P(x)$ và $Q(x)$ là các đa thức và $Q(x_0)\neq 0$ thì $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}$.

AD ta có ngay: $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+2x^2-1}{5-3x}=\dfrac{(-2)^3+2\times(-2)^2-1}{5-3\times(-2)}=-\dfrac{1}{11}$.

VD2. Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x\to 1}(2x+1)^{x^2+5}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$, **với** $g(x) = \begin{cases} |1-3x| & \textbf{khi } x \neq 2 \\ \mathbf{2x-1} & \textbf{khi } x = 2 \end{cases}$.

Giải

a) $\lim\limits_{x\to 1}(2x+1)^{x^2+5} = \left[\lim\limits_{x\to 1}(2x+1)\right]^{\lim\limits_{x\to 1}(x^2+5)}$ (AD Quy tắc 8)

$= 3^6.$

b) Khi $x \to 2$ thì $x \neq 2$ nên $g(x) = |1-3x|$ do đó:

$\lim\limits_{x\to 2} g(x) = \lim\limits_{x\to 2}|1-3x| = \left|\lim\limits_{x\to 2}(1-3x)\right|$ (AD Quy tắc 7)

$= |1-3.2|$ (AD Quy tắc giới hạn hàm đa thức)

$= |-5| = 5.$

❖ ***Định lý 7:*** *(Quy tắc tính giới hạn mở rộng)*

$\lim\limits_{x\to x_0} \mathbf{f}(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} \mathbf{g}(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} \mathbf{f}(x).\mathbf{g}(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\mathbf{f}(x)}{\mathbf{g}(x)}$
$C \neq 0$	0	$C.0 = 0$	$\pm\infty$
$C > 0$	∞	∞	0
$C > 0$	$-\infty$	$-\infty$	0
∞	$C > 0$	∞	∞
∞	∞	∞	vô định
∞	$-\infty$	$-\infty$	vô định
$-\infty$	$-\infty$	∞	vô định

❖ ***Chú ý:***

- *Các quy tắc trên vẫn đúng khi thay* $x \to x_0$ *bởi* $x \to \infty$ *hoặc* $x \to -\infty$.
- *Gặp dạng* $\lim\limits_{x\to x_0} [\mathbf{f}(x) \pm \mathbf{g}(x)]$ *ta quy về dạng* $\lim\limits_{x\to x_0} \mathbf{f}(x).\mathbf{g}(x)$ *hoặc* $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\mathbf{f}(x)}{\mathbf{g}(x)}$.

VD. Tính các giới hạn:

a) $\mathbf{I} = \lim\limits_{x\to-\infty}(-x^3+3x^2-x+1)$ **b)** $\mathbf{J} = \lim\limits_{x\to\infty} x\sqrt{4x^2-3x}$.

Giải

a) $\mathbf{I} = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3\left(-1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)$

Ta thấy:

$\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3) = -\infty;$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}(-1) + \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3}{x} - \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2} + \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^3}$

$= -1+0-0+0 = -1.$

Từ đó suy ra I= ∞.

❖ **Chú ý:** *Chỉ được phép tách lim tích thành tích lim nếu cả hai lim sau khi tách ra đều hữu hạn.*

b) J= $\lim\limits_{x\to\infty} \boldsymbol{x}\sqrt{4x^2-3x}$

Giải

b) $\mathrm{J} = \lim\limits_{x\to\infty} x\sqrt{4x^2-3x}$

$= \lim\limits_{x\to\infty} x.\sqrt{x^2(4-\frac{3}{x})} = \lim\limits_{x\to\infty} x|x|\sqrt{4-\frac{3}{x}} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2.\sqrt{4-\frac{3}{x}}\right).$

Ta thấy:

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2\right) = \infty;$

$\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{4-\frac{3}{x}} = \sqrt{\lim\limits_{x\to\infty}(4-\frac{3}{x})} = \sqrt{\lim\limits_{x\to\infty} 4 - \lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x}} = \sqrt{4-0} = 2$

Từ đó suy ra J $= \infty$.

BÀI TẬP NHÓM

Tính giới hạn K= $\lim\limits_{x \to -\infty} \boldsymbol{x}\sqrt{4x^2 - 3x}$ **.**

ĐÁP ÁN