

Chương 4: ĐẠI SỐ BOOLEAN (Boolean Algebra)

Khoa CNTT

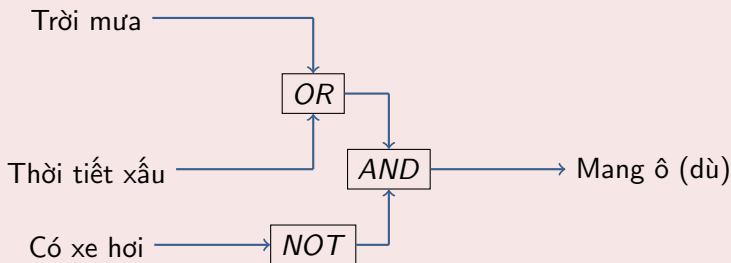
ĐH GTVT TP.HCM

- 1 Hàm boolean
- 2 Dạng tuyển chuẩn tắc tối thiểu (TCTTT)
- 3 Phương pháp Karnaugh
- 4 Bài tập

Hàm boolean (1/3)

Khái niệm:

- * Phát biểu: "Nếu trời đang mưa hoặc bản tin báo thời tiết xấu và không có xe hơi thì tôi sẽ mang ô (dù) khi đi ra ngoài."
- * Mô tả logic:
(Mang ô) = (**NOT** Có xe hơi) **AND** ((Trời mưa) **OR** (Thời tiết xấu))
- * Biểu đồ:



Hàm boolean (2/3)

Khái niệm:

- * Các mệnh đề **Trời mưa**, **Thời tiết xấu** và **Có xe hơi** có thể được đặc trưng bởi các biến x, y và z nhận giá trị trong tập $B = \{0, 1\}$
- * Khi đó việc **Mang ô** hay không trở thành một hàm của x, y và z . Kí hiệu là $f(x, y, z)$ và gọi là hàm boolean.
- * Vậy định nghĩa hình thức của một hàm boolean n biến như sau:

$$\begin{array}{ll} f : B^n & \mapsto B \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) & \mapsto f(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{array}$$

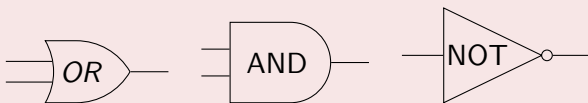
- * Ví dụ: (không viết tường minh phép toán hội \wedge)
 - $f(x) = x$
 - $f(x, y) = x \vee y$
 - $f(x, y, z) = xy \vee \bar{y}$
 - $f(x, y, z, t) = xyt \vee x\bar{y}z \vee \bar{x}y$

Hàm boolean (3/3)

Cổng & Mạch logic:

- * Trong kỹ thuật điện tử để có các bo mạch (vật lý), thì mô hình logic của nó phải được phân tích và thiết kế trước, chúng được gọi là các mạch logic (logic circuit).
- * Mỗi mạch logic tương ứng bởi một hàm boolean.
- * Xét cho cùng, mỗi mạch logic (dù phức tạp) đều được cấu tạo từ những mạch cơ bản, gọi là các cổng (gate). Gồm: cổng **and**, cổng **or** và cổng **not**.

Các cổng logic:



Dạng tuyển chuẩn tắc tối thiểu (1/3)

Một số khái niệm:

Giả sử x_1, x_2, \dots, x_n là các biến boolean. Khi đó:

- * $y_1 y_2 \dots y_n$ được gọi là 1 hội sơ cấp của các biến x_1, x_2, \dots, x_n nếu $y_i = x_i$ hoặc $y_i = \overline{x_i}$
- * Nếu $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigvee (y_1 y_2 \dots y_n) (*)$ ta nói $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ được biểu diễn dưới dạng tuyển chuẩn tắc của các hội sơ cấp.

Nhận xét:

- * Mọi hàm boolean đều có thể được biểu diễn dưới dạng (*)

Dạng tuyến chuẩn tắc tối thiểu (2/3)

Ví dụ (1/2) - Minh họa cho Nhận xét trên:

Xét hàm boolean $f(x, y, z) = xy \vee x\bar{y}z \vee x(yz \vee \bar{z})$ Ta có
 $f(x, y, z) = xy \vee x\bar{y}z \vee xyz \vee x\bar{z}$. Và có bảng biểu diễn f như sau:

x	y	z	xy	$x\bar{y}z$	xyz	$x\bar{z}$	$f(x, y, z)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	0	0	1
1	1	0	1	0	0	1	1
1	1	1	1	0	1	0	1

Dạng tuyển chuẩn tắc tối thiểu (3/3)

Ví dụ (2/2) - Minh họa cho Nhận xét trên:

Từ những dòng $f(x, y, z)$ có giá trị bằng **1** ta được:

$$f(x, y, z) = x\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z} \vee xyz$$

Tức là $f(x, y, z)$ đã được biểu diễn dưới dạng tuyển chuẩn tắc.

Bài toán:

- Cho hàm boolean f bất kỳ, yêu cầu tìm dạng tuyển chuẩn tắc tối thiểu của nó.
- Ý nghĩa của bài toán: f tối thiểu \Rightarrow Mạch logic tối thiểu

Phương pháp Karnaugh (1/9)

Biểu đồ Karnaugh (K):

- * Biểu đồ K là một hình chữ nhật, gồm tập hợp các ô, mỗi ô biểu diễn một hội sơ cấp của **tất cả** các biến.
- * Nếu hàm boolean có n biến thì biểu đồ K có 2^n ô.
- * Biểu đồ K trường hợp 3 biến:

	x	x	\bar{x}	\bar{x}
z				
\bar{z}				
	\bar{y}	y	y	\bar{y}

- * Ví dụ:

$x\bar{y}z$

Phương pháp Karnaugh (2/9)

Biểu đồ Karnaugh:

- * Biểu đồ K trường hợp 4 biến:

	x	x	\bar{x}	\bar{x}	
z					\bar{t}
z					t
\bar{z}					t
\bar{z}					\bar{t}
	\bar{y}	y	y	\bar{y}	

- * Ví dụ:

$\bar{x}\bar{t}$

Phương pháp Karnaugh (3/9)

Nhận xét:

- + Mỗi hàm boolean f đều tồn tại một biểu diễn Karnaugh.
- + Ví dụ: hàm $f(x, y, z) = xyz \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{z}$ có biểu diễn như sau:

1	0	1	1
0	0	1	0

$f(x, y, z)$

Khái niệm tế bào & tế bào tối đại:

- + Tế bào là các ô của biểu đồ Karnaugh **phủ (vừa đúng) 1 hội sơ cấp**.
- + Giả sử hàm f có biểu đồ tương ứng là K. Tế bào **tối đại** là tế bào lớn nhất chỉ phủ các ô thuộc K. **Tế bào càng lớn \Rightarrow Số biến càng ít**
- + Với hàm f có biểu đồ như trên, ta có các tế bào tối đại sau:
 $xyz, \bar{x}z, \bar{x}y$ (Hãy tự vẽ biểu đồ cho từng tế bào!)

Kết luận:

- Tìm dạng tuyến chuẩn tắc tối thiểu của f chính là tìm số **ít nhất** các tế bào tối đại phủ kín f .
- Mỗi ô của f có thể được phủ bởi **1 hoặc nhiều** tế bào tối đại.
 - + Nếu ô bất kỳ của f được phủ bởi duy nhất 1 tế bào \Rightarrow tế bào đó **bắt buộc** phải chọn trong dạng TCTTT.
 - + Ngược lại, chỉ cần chọn 1 trong những tế bào tối đại phủ ô đó - tế bào **tùy chọn**

Thuật toán: tìm tất cả các dạng tuyến chuẩn tắc tối thiểu của hàm boolean cho trước

- 1 Tìm tất cả các tế bào tối đại của f
- 2 Phủ f bằng các tế bào bất buộc, chọn từ các tế bào tối đại
- 3 Chọn số ít nhất các tế bào tùy chọn để phủ các ô còn lại của f . Mỗi khi f được phủ kín, ta thu được 1 tuyến chuẩn tắc \Rightarrow danh sách các dạng tuyến chuẩn tắc của f .
- 4 Chọn (những) kết quả cực tiểu trong danh sách ở bước 3 \Rightarrow (các) dạng TCTTT

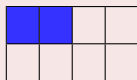
Phương pháp Karnaugh (6/9)

Ví dụ phương pháp Karnaugh với 3 biến:

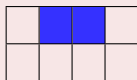
Tìm dạng TCTTT của hàm f có biểu đồ Karnaugh sau:



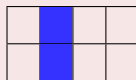
Danh sách các tế bào tối đại:



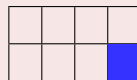
xz



yz



xy



$\bar{x} \bar{y} \bar{z}$

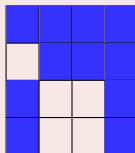
Cả 4 tế bào trên đều thuộc nhóm **bắt buộc chọn**

Vậy dạng TCTTT là: $f(x, y, z) = xz \vee yz \vee xy \vee \bar{x} \bar{y} \bar{z}$

Phương pháp Karnaugh (7/9)

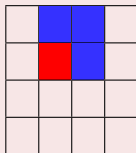
Ví dụ phương pháp Karnaugh với 4 biến:

Tìm dạng TCTTT của hàm f có biểu đồ Karnaugh sau:

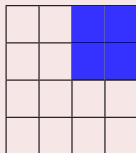


Phương pháp Karnaugh (8/9)

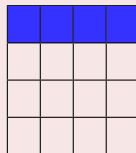
Danh sách các tế bào tối đại:



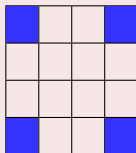
yz



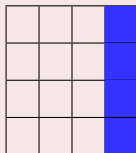
$\bar{x}z$



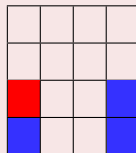
$z\bar{t}$



$\bar{y}\bar{t}$



$\bar{x}\bar{y}$



$\bar{y}\bar{z}$

Phương pháp Karnaugh (9/9)

- * Ghi chú: các tế bào tô đỏ là bắt buộc
- * Lựa chọn trong các tế bào còn lại, suy ra có 4 dạng TCTTT là:
 - + $f(x, y, z, t) = yz \vee \bar{y} \bar{z} \vee \bar{z} \bar{t} \vee \bar{x} z$
 - + $f(x, y, z, t) = yz \vee \bar{y} \bar{z} \vee \bar{z} \bar{t} \vee \bar{x} \bar{y}$
 - + $f(x, y, z, t) = yz \vee \bar{y} \bar{z} \vee z \bar{t} \vee \bar{x} z$
 - + $f(x, y, z, t) = yz \vee \bar{y} \bar{z} \vee z \bar{t} \vee \bar{x} \bar{y}$

Các bài tập Chương 4 (Đại số boolean) Toán rời rạc - GS. Nguyễn Hữu Anh