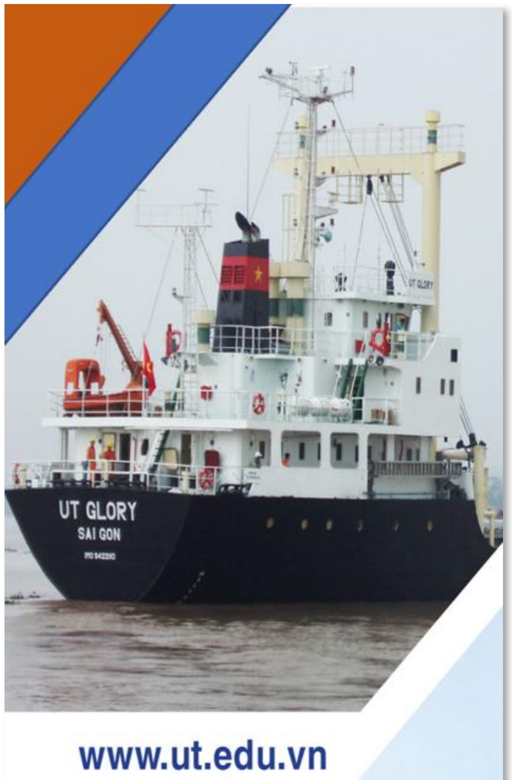
TRƯỜNG ĐẠI HỌC GIAO THÔNG VẬN TẢI THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

KHOA CƠ BẢN – BỘ MÔN TOÁN



BÀI GIẢNG ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

CHƯƠNG I. MA TRẬN, ĐỊNH THỨC, HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

§1. Khái niệm và phép toán ma trận

ThS. Đinh Tiến Dũng

Giới thiệu giảng viên

- *ThS:* ***Đinh Tiến Dũng***
- *SĐT: 0793112122 (Zalo)*
- *Mail: dung.dinh@ut.edu.vn*

Giới thiệu học phần

Học phần này cung cấp các kiến thức cơ bản về: ma trận; định thức; hệ phương trình tuyến tính; không gian vector; không gian Euclide; chéo hóa ma trận.

Đây là phần kiến thức cần thiết để sinh viên tiếp thu các học phần khác trong tất cả các chuyên ngành kinh tế, kỹ thuật.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- **Bộ môn Toán, Bài giảng Đại số (lưu hành nội bộ), Trường đại Học GTVT TP.HCM, 2015**
- **Đỗ Công Khanh (chủ biên), Đại số tuyến tính, NXB. ĐHQG. TPHCM, 2010.**
- **Nguyễn Đình trí (chủ biên), Giáo trình Toán cao cấp, tập 1. NXB Giáo dục, Hà nội, 2005.**
- **Jean – Marie Monier, Giáo trình Toán, Tập 5, 6. NXB Giáo dục, Hà nội, 2006 (dịch từ tiếng Pháp, DUNOD, Paris, 1996).**
- **Các hệ thống học liệu, bài giảng từ Internet.**

NỘI DUNG CHƯƠNG I

§1. Khái niệm và phép toán ma trận.
§2. Định thức.
§3. Tính khả nghịch và hạng của ma trận.
§4. Hệ phương trình tuyến tính.

CHƯƠNG I. MA TRẬN, ĐỊNH THỨC, HỆ PHƯƠNG TRÌNH

§1. Khái niệm và phép toán ma trận

I. CÁC KHÁI NIỆM

❖ *Ví dụ mở đầu*

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x - 3y = -4 \end{cases} \quad\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\overset{-2.d_1+d_2\to d_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 0.x - 7y = -14 \end{cases} \quad\quad \xrightarrow{-2.d_1+d_2\to d_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -7 & -14 \end{pmatrix}$$

$$\overset{-\frac{1}{7}.d_2\to d_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 0.x + y = 2 \end{cases} \quad\quad \xrightarrow{-\frac{1}{7}.d_2\to d_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\overset{-2d_2+d_1\to d_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x + 0.y = 1 \\ 0.x + y = 2 \end{cases} \quad\quad \xrightarrow{-2d_2+d_1\to d_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Giải hệ phương trình bằng phép biến đổi sơ cấp trên ma trận

1. Khái niệm ma trận

❖ *Định nghĩa ma trận*

Cho m, n nguyên dương. Ma trận A cỡ m×n là một bảng hình chữ nhật gồm m × n số a_{ij} $(i = 1, \dots, m;\ j = 1, \dots, n)$ *được sắp thành m dòng, n cột:*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{m\times n} = (a_{ij})_{m\times n}$$

với a_{ij} *gọi là phần tử (số hạng) nằm ở dòng thứ i và cột thứ j của ma trận A.*

Ngoài ra:

- *Khi* $\boldsymbol{m = 1}$: $\boldsymbol{A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix}}$ *gọi là ma trận dòng.*

- *Khi* $\boldsymbol{n = 1}$: $\boldsymbol{A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}}$ *gọi là ma trận cột .*

- *Khi* $\boldsymbol{m = n = 1}$: $\boldsymbol{A = [a_{11}]}$ *, khi đó A là một số thực.*

❖ **Ví dụ**

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -5 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix};\ B = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix};\ C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix};\ D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Khái niệm ma trận không

❖ *Định nghĩa*

***Ma trận–không là ma trận có tất cả các phần tử đều bằng 0.** K/h: $O_{m\times n}$ hay $\boldsymbol{O}$.*

❖ **Ví dụ:** $O_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};\ O_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$

❖ **Nhận xét:** Có nhiều *ma trận-không* khác nhau.

3. Khái niệm hai ma trận bằng nhau

❖ *Định nghĩa*

Hai ma trận A và B gọi là bằng nhau nếu chúng cùng cỡ và tất cả các phần tử ở các vị trí tương ứng bằng nhau. Ký hiệu: A = B.

❖ ***Ví dụ:*** $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -5 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -5 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow A = E.$

❖ ***Hỏi: So sánh $O_{2\times 3}$ và $O_{3\times 2}$?***

4. Khái niệm ma trận vuông:

❖ *Định nghĩa*

Ma trận $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ *cỡ* $n \times n$ *được gọi là ma trận vuông cấp* n.

Kí hiệu $A = [a_{ij}]_n$. *Ngoài ra, các đường chéo được hiểu như sau:*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Đường chéo phụ

Đường chéo chính

5. Một số ma trận vuông đặc biệt:

a) Ma trận đơn vị

❖ *Định nghĩa*

Ma trận vuông cấp n có các phần tử trên đường chéo chính bằng 1 và tất cả các phần tử nằm ngoài đường chéo chính bằng 0 được gọi là ma trận đơn vị cấp n.

Ký hiệu: I_n ***hay*** I.

❖ **Ví dụ:**

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

b) Ma trận chéo:

❖ *Định nghĩa*

Ma trận vuông cấp n có các phần tử nằm ngoài đường chéo chính đều bằng 0 được gọi là ma trận chéo cấp n.

❖ **Ví dụ:** $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

c) Ma trận tam giác:

❖ *Định nghĩa 1*

Ma trận tam giác trên là ma trận vuông mà các phần tử ở phía dưới đường chéo chính đều bằng 0.

❖ **Ví dụ:**

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & -1\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}$$

❖ *Định nghĩa 2*

Ma trận tam giác dưới là ma trận vuông mà các phần tử ở phía trên đường chéo chính đều bằng 0.

❖ **Ví dụ:**

$$B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 2 & 0\\ 3 & -1 & 5\end{bmatrix}$$

d) Ma trận đối xứng:

❖ *Định nghĩa*

Ma trận đối xứng là ma trận vuông $\boldsymbol{A} = \left[\boldsymbol{a_{ij}}\right]_{\boldsymbol{n}}$ *thỏa mãn:* $\boldsymbol{a_{ij}} = \boldsymbol{a_{ji}}$ *với mọi* $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j} = \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots, \boldsymbol{n}$.

❖ **Ví dụ:** $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \\ -1 & 5 & 0 \end{bmatrix}$

❖ **Nhận xét.** *Các phần tử đối xứng nhau qua đường chéo chính bằng nhau.*

II. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN MA TRẬN

1. Phép cộng-trừ hai ma trận:

❖ *Định nghĩa*

Cho các ma trận $\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{a_{ij}}]_{\boldsymbol{m\times n}}$ *và* $\boldsymbol{B} = [\boldsymbol{b_{ij}}]_{\boldsymbol{m\times n}}$ *cùng cỡ m×n.*
Ta định nghĩa: $\boldsymbol{A} \pm \boldsymbol{B} = [\boldsymbol{a_{ij}} \pm \boldsymbol{b_{ij}}]_{\boldsymbol{m\times n}}$.

❖ **Ví dụ:** Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Ta có:

$$A + B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 7 \\ -2 & 3 & 3 \end{bmatrix};\ A - B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Phép nhân một số với một ma trận:

❖ *Định nghĩa*

Cho số thực k và ma trận $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ ta định nghĩa tích của k và ma trận A là một ma trận ký hiệu kA với:

$$kA = [ka_{ij}]_{m\times n}.$$

❖ **Ví dụ:** Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Ta có:

$$2A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 \\ -4 & 2 & 4 \end{bmatrix};\ 3B = \begin{bmatrix} -6 & 3 & 12 \\ 0 & 6 & 3 \end{bmatrix}.$$

3. Phép nhân hai ma trận:

❖ *Định nghĩa*

Cho hai ma trận $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ và $B = [b_{ij}]_{n\times p}$ (với số cột của A bằng số dòng của ma trận B). Ta định nghĩa tích của A với B là ma trận $C = [c_{ij}]_{m\times p}$ trong đó các phần tử c_{ij} được xác định như sau:

$$c_{ij} = a_{i1}\, b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}.$$

Ta có sơ đồ phép nhân:

+

$$\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix} = c_{ij}$$

❖ **Ví dụ:**

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = [2.1 + (-1).0 + 3.4] = [14]$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & -6 \end{bmatrix}$$

Hàng nhân cột

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & -6 \\ 24 & -9 \end{bmatrix}$$

BÀI TẬP NHÓM

Các ma trận nào sau đây có thể nhân được với nhau? Tìm tích của chúng nếu có.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

ĐÁP ÁN

4. Phép chuyển vị ma trận

❖ Định nghĩa

Cho ma trận A = [aij]$_{m\times n}$ cỡ m×n. Ma trận cỡ n×m có được từ ma trận A bằng cách đổi hàng thành cột (cột thành hàng) gọi là ma trận chuyển vị của A, ký hiệu A^t.

❖ ***Ví dụ:***

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow X^t = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

5. Tính chất của các phép toán:

Cho các ma trận A, B, C, O và các số thực k, l. Ta có:

1) $(A+B)+C = A+(B+C)$
2) $A+O = O+A = A$
3) $A+(-A) = (-A)+A = O$
4) $A+B = B+A$
5) $k(A+B) = kA+kB$
6) $(k+l)A = kA+lA$
7) $(kl)A = k(lA)$
8) $(AB)C = A(BC)$
9) $A(B+C) = AB+AC$
10) $(A+B)C = AC+BC$
11) $k(AB) = (kA)B = A(kB)$
12) $A.I = A = I.A$
13) $(A+B)^t = A^t + B^t$
14) $(kA)^t = k(A^t)$
15) $(A^t)^t = A$
16) $(AB)^t = B^tA^t$

❖ **Chú ý:** *Phép nhân ma trận không có tính chất giao hoán. Với A, B là hai ma trận vuông tùy ý thì thông thường $AB \neq BA$. Nhưng với mỗi ma trận vuông A cho trước, thì tồn tại vô số ma trận vuông B sao cho AB=BA.*

6. Phép tính luỹ thừa của ma trận vuông:

❖ Định nghĩa

Nếu A là ma trận vuông cấp n và p là số tự nhiên, ta định nghĩa luỹ thừa bậc p của ma trận A, ký hiệu A^p, là ma trận vuông cấp n xác định như sau:

- $A^0 = I_n$ với mọi ma trận $A \neq O$.
- $A^2 = A.A$
- ....
- $A^p = A^{p-1}.A$.

❖ **Tính chất:** a) $(I_n)^p = I_n$, $0^p = 0$, (p thuộc N^*)

$$b)\ D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_k \end{pmatrix} \rightarrow D^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_k^n \end{pmatrix}$$

VD1. Cho ma trận $C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$. Hãy tính C^{50}.

Giải

Do C là ma trận chéo nên: $C^{50} = \begin{bmatrix} 2^{50} & 0 \\ 0 & (-3)^{50} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^{50} & 0 \\ 0 & 3^{50} \end{bmatrix}$.

VD2. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Hãy tính A^2, A^3, A^4. Dự đoán A^p.

Giải

$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$; $A^3 = A^2A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$;

$A^4 = A^3A = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{bmatrix}$; $A^p = \begin{bmatrix} 2^{p-1} & 2^{p-1} \\ 2^{p-1} & 2^{p-1} \end{bmatrix}$.

VD3: Cho ma trận $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Hãy tính B^{2021}.

Giải

$$B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix};$$

$$B^3 = B^2B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix};$$

$$B^4 = B^3B = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} = -4\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -4I_2.$$

$$B^{2021} = B^{4.505+1} = B^{4.505}B = (B^4)^{505}B$$

$$= (-4I_2)^{505}B = (-4)^{505}I_2\,B = -4^{505}B = \begin{bmatrix} -4^{505} & -4^{505} \\ 4^{505} & -4^{505} \end{bmatrix}$$

BÀI TẬP VỀ NHÀ

<u>Câu 1</u>: Cho các ma trận: $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&1&1\\3&1&4\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}-1&2&3&a\\0&4&1&-1\\2&0&-5&a\end{bmatrix}$. Tính: $B^t A^t$.

<u>Câu 2</u>: Cho ma trận $A=\begin{bmatrix}1&-a\\a&1\end{bmatrix}$.

a) Tính $B = A.A^t$.

b) Khi a=2, Tìm ma trận X sao cho : $X.B=\begin{bmatrix}15&65\\25&15\end{bmatrix}$.

<u>Câu 3:</u> Tìm tất cả các ma trận A vuông cấp 2 với phần tử thực, thỏa phương trình sau $A^2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

<u>Câu 4:</u> Tính A^n biết rằng $A=\begin{pmatrix}4&-3\\5&-4\end{pmatrix}$.

ĐÁP ÁN

ĐÁP ÁN

ĐÁP ÁN