Chương 1

CƠ SỞ LOGIC

lvluyen@hcmus.edu.vn

https://goo.gl/VdaPTv

FB: **fb.com/trr1718**

Đại học Khoa Học Tự Nhiên Tp. Hồ Chí Minh

—— —— Tháng 9 năm 2017 —— ——

Nội dung

Chương 1. CƠ SỞ LOGIC

1. Mệnh đề
2. Dạng mệnh đề
3. Vị từ, lượng từ
4. Quy tắc suy luận

1.1. Mệnh đề

1. Định nghĩa và chân trị của mệnh đề
2. Phân loại mệnh đề
3. Các phép toán trên mệnh đề

Định nghĩa. ***Mệnh đề*** là một phát biểu có giá trị chân lý xác định, đúng hoặc sai.

Nhận xét. Câu hỏi, câu cảm thán, mệnh lệnh không là mệnh đề.

Ví dụ. Phát biểu nào sau đây là mệnh đề

a) Mặt trời quay quanh trái đất
b) $1 + 1 = 2$
c) Hôm nay trời đẹp quá! (không là mệnh đề)
d) Học bài đi! (không là mệnh đề)
e) 3 là số lẻ phải không? (không là mệnh đề)

Chúng ta dùng các ký hiệu $P, Q, R, \ldots$ để chỉ mệnh đề.

Chân trị của mệnh đề

Một mệnh đề chỉ có thể đúng hoặc sai. Khi mệnh đề P đúng ta nói P có chân trị đúng, ngược lại ta nói P có chân trị sai.

Chân trị đúng và chân trị sai sẽ được ký hiệu lần lượt là **1** (hay Đ, T) và **0** (hay S, F)

Ví dụ. Kiểm tra các phát biểu sau có phải là mệnh đề không? Nếu có, hãy xác định chân trị.

a) Paris là thành phố của Mỹ.

b) n là số tự nhiên.

c) Con nhà ai mà xinh thế!

d) 3 là số nguyên tố.

e) Toán rời rạc là môn bắt buộc của ngành Tin học.

f) Bạn có khỏe không?

g) $x^2 + 1$ luôn dương.

1.1.2. Phân loại mệnh đề

Mệnh đề gồm 2 loại:

1. ***Mệnh đề phức hợp***: là mệnh đề được xây dựng từ các mệnh đề khác nhờ liên kết bằng các liên từ (và, hay, khi và chỉ khi,...) hoặc trạng từ "không".
2. ***Mệnh đề sơ cấp*** (nguyên thủy): Là mệnh đề không thể xây dựng từ các mệnh đề khác thông qua liên từ hoặc trạng từ "không".

Ví dụ. Phân loại các mệnh đề sau:

a) 2 không là số nguyên tố

b) 2 là số nguyên tố

c) Nếu $3 > 4$ thì trời mưa

d) An đang xem phim hay An đang học bài

e) Hôm nay trời đẹp và $1 + 1 = 3$

1.1.3. Các phép toán trên mệnh đề

a. Phép phủ định

Phủ định của mệnh đề P được ký hiệu là $\neg \boldsymbol{P}$ hay $\overline{\boldsymbol{P}}$ (đọc là "không" P hay "phủ định của" P), là mệnh đề được định bởi:

$$\neg P \textbf{ đúng} \Leftrightarrow P \textbf{ sai}.$$

Bảng chân trị:

P	$\neg P$
1	0
0	1

Ví dụ.

1. P="2 là số nguyên tố"$\Rightarrow$ $\neg \boldsymbol{P}$= "2 không là số nguyên tố"
2. Q ="$1 > 2$"$\Rightarrow$ $\neg \boldsymbol{Q}$= "$1 \leq 2$"

b. Phép nối liền (hội, giao)

Phép nối liền của hai mệnh đề P và Q được kí hiệu bởi $\boldsymbol{P \wedge Q}$ (đọc là "P và Q"), là mệnh đề được định bởi:

$$\boldsymbol{P \wedge Q} \textbf{ đúng} \Leftrightarrow \boldsymbol{P} \text{ và } \boldsymbol{Q} \textbf{ đồng thời đúng}.$$

Bảng chân trị:

P	Q	$P \wedge Q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	**1**	**1**

Ví dụ. Xác định chân trị của các mệnh đề sau:

a) $3 > 4$ và Trần Hưng Đạo là vị tướng

b) 2 là số nguyên tố và là số chẵn

c) An đang hát và uống nước

c. Phép nối rời (tuyển, hợp)

Phép nối rời của hai mệnh đề P và Q được kí hiệu bởi $\boldsymbol{P \vee Q}$ (đọc là "P hay Q"), là mệnh đề được định bởi:

$P \vee Q$ **sai** $\Leftrightarrow$ P và Q **đồng thời sai**.

Bảng chân trị:

P	Q	$P \vee Q$
0	**0**	**0**
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Ví dụ. Xác định chân trị của các mệnh đề sau:

a) $3 > 4$ hay Paris là thủ đô của Anh

b) Mặt trời mọc ở hướng Đông hay $1 + 3 = 5$

c) $\pi > 4$ hay trời không mưa

d) 2 là số nguyên tố hay là số chẵn

d. Phép kéo theo

Mệnh đề P ***kéo theo*** Q của hai mệnh đề P và Q, kí hiệu bởi $\boldsymbol{P \to Q}$ (đọc là

- "P kéo theo Q" hay
- "Nếu P thì Q" hay
- "P là điều kiện đủ của Q" hay
- "Q là điều kiện cần của P")

là mệnh đề được định bởi:

$\boldsymbol{P \to Q}$ **sai** $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{P}$ **đúng** và $\boldsymbol{Q}$ **sai**.

Bảng chân trị:

P	Q	$P \to Q$
0	0	1
0	1	1
1	**0**	**0**
1	1	1

Ví dụ. Xác định chân trị của các mệnh đề sau:

a) Nếu $1 = 2$ thì tôi là người Việt Nam

b) Nếu trái đất quay quanh mặt trời thì $1 + 3 = 5$

c) $\pi < 4$ kéo theo $5 < 6$

d) Nếu $2 + 1 = 0$ thì tôi là chủ tịch nước

e. Phép kéo theo hai chiều

Mệnh đề P kéo theo Q và ngược lại của hai mệnh đề P và Q, ký hiệu bởi $\boldsymbol{P \leftrightarrow Q}$ (đọc là

- "P nếu và chỉ nếu Q" hay
- "P khi và chỉ khi Q" hay
- "P là điều kiện cần và đủ của Q")

là mệnh đề được định bởi:

$$P \leftrightarrow Q \textbf{ đúng} \Leftrightarrow P \text{ và } Q \text{ có } \textbf{cùng chân trị}.$$

Bảng chân trị:

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
0	**0**	**1**
0	1	0
1	0	0
1	**1**	**1**

Ví dụ. Xác định chân trị của các mệnh đề sau:

a) $2 = 4$ khi và chỉ khi $2 + 1 = 0$

b) 6 chia hết cho 3 khi và chi khi 6 chia hết cho 2

c) London là một thành phố nước Anh nếu và chỉ nếu thành phố HCM là thủ đô của VN

d) $\pi > 4$ là điều kiện cần và đủ của $5 < 6$

1.2. Dạng mệnh đề

1. Định nghĩa và chân trị của dạng mệnh đề
2. Sự tương đương logic
3. Các luật logic

1.2.1. Định nghĩa và chân trị của dạng mệnh đề

Định nghĩa. ***Dạng mệnh đề*** là một biểu thức được cấu tạo từ:

- Các mệnh đề (các hằng mệnh đề **0**, **1**)
- Các biến mệnh đề $p, q, r, \ldots$, tức là các biến lấy giá trị là các mệnh đề nào đó
- Các phép toán $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ và dấu đóng mở ngoặc ().

Ví dụ.

a) $E(p, q) = \neg(\neg p \vee q) \vee 1$

b) $F(p, q, r) = (p \rightarrow q) \vee \neg(q \vee r)$

Định nghĩa. ***Bảng chân trị*** của dạng mệnh đề $E(p, q, r)$ là bảng ghi tất cả các trường hợp chân trị có thể xảy ra đối với dạng mệnh đề E theo chân trị của các biến mệnh đề p, q, r.

Ví dụ. Cho p, q, r là biến mệnh đề. Lập bảng chân trị của dạng mệnh đề sau

$$E(p,q,r) = (p \vee q) \to r.$$

Giải.

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \to r$
0	0	0	0	1
0	0	1	0	1
0	1	0	1	**0**
0	1	1	1	1
1	0	0	1	**0**
1	0	1	1	1
1	1	0	1	**0**
1	1	1	1	1

Nhận xét. Nếu có n biến, bảng này sẽ có 2^n dòng, chưa kể dòng tiêu đề.

Độ ưu tiên các phép toán mệnh đề trong dạng mệnh đề

Thứ tự ưu tiên lần như sau

- mức 1: $\neg$
- mức 2: $\wedge, \vee$
- mức 3: $\rightarrow, \leftrightarrow$

Các phép toán trên cùng mức có cùng độ ưu tiên.

Ví dụ.

a) $\boldsymbol{\neg p \vee q \rightarrow r \vee s}$ có nghĩa là $\big[(\neg p) \vee q\big] \rightarrow (r \vee s)$.

b) $\boldsymbol{\neg p \wedge q \vee r}$ là nhập nhằng. Ta cần phải dùng các dấu ngoặc để chỉ rõ nghĩa.

Ví dụ.(tự làm) Lập bảng chân trị của các dạng mệnh đề sau:

a) $A(p,q) = \neg(p \wedge q) \wedge p$

b) $B(p,q,r) = p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow \neg q$

Định nghĩa. Dạng mệnh đề được gọi là

1. ***hằng đúng*** nếu nó luôn lấy giá trị **1**
2. ***hằng sai*** (hay mâu thuẫn) nếu nó luôn lấy giá trị **0**.

Ví dụ. Kiểm tra các dạng mệnh đề sau là hằng đúng hay hằng sai

a) $A(p) = \neg(\neg p) \leftrightarrow p$

b) $B(p,q) = (p \wedge q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$

c) $C(p,q) = p \vee (p \wedge q) \to \neg p$

d) $D(p,q,r) = [p \vee (p \wedge q)] \wedge \neg p \to r$

e) $E(p,q,r) = (p \to q) \vee \neg p \to r$

Ví dụ. Gọi P và Q là các mệnh đề:

P : "Minh giỏi Toán"

Q : "Minh yếu Anh văn"

Hãy viết các mệnh đề sau thành công thức mệnh đề:

a) Minh giỏi Toán nhưng yếu Anh văn

b) Minh yếu cả Toán lẫn Anh văn

c) Minh giỏi Toán hay Minh vừa giỏi Anh văn vừa yếu Toán

d) Nếu Minh giỏi Toán thì Minh giỏi Anh văn

e) Minh giỏi Toán và Anh văn hay Minh giỏi Toán và yếu Anh văn

Ví dụ. Gọi P, Q, R là các mệnh đề sau:

P= "ABC là tam giác cân"

Q= "ABC là tam giác đều"

R := "Tam giác ABC có ba góc bằng nhau"

Hãy viết các mệnh đề sau theo ngôn ngữ thông thường

a) $Q \to P$

b) $\neg P \to Q$

c) $P \wedge \neg Q$

d) $R \to P$

1.2.2. Tương đương logic

Định nghĩa. Hai dạng mệnh đề E và F được gọi là ***tương đương logic*** nếu chúng có cùng bảng chân trị.

Ký hiệu. $E \Leftrightarrow F$ (hay $E \equiv F$).

Ví dụ. $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

Ví dụ. Chứng minh các tương đương logic sau

1. $\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$
2. $p \vee p \Leftrightarrow p$
3. $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$
4. $p \to q \Leftrightarrow \neg p \vee q$
5. $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

Mệnh đề. *Hai dạng mệnh đề E và F tương đương logic khi và chỉ khi $E \leftrightarrow F$ là một hằng đúng.*

Định nghĩa. Dạng mệnh đề F được nói là ***hệ quả logic*** của dạng mệnh đề E nếu $E \to F$ là một hằng đúng. Khi đó ta viết $\boldsymbol{E \Rightarrow F}$.

Ví dụ. Xét dạng mệnh đề

$$(p \to q) \wedge \neg q \to \neg p.$$

Ta chứng minh được đây là dạng mệnh đề hằng đúng. Suy ra $\neg p$ là hệ quả logic của $(p \to q) \wedge \neg q$, hay được viết dưới dạng

$$\boldsymbol{(p \to q) \wedge \neg q \Rightarrow \neg p}.$$

Ví dụ.(tự làm) Chứng minh $[(p \to q) \wedge p] \Rightarrow q$.

Các quy tắc thay thế

Qui tắc 1

Trong dạng mệnh đề E, nếu ta thay thế biểu thức con F bởi một dạng mệnh đề tương đương logic thì dạng mệnh đề thu được vẫn còn tương đương logic với E.

Ví dụ.

- $\neg(\neg \boldsymbol{p}) \to r \Leftrightarrow p \to r$
- $\neg(\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}) \wedge r \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \wedge r$

Qui tắc 2

Giả sử dạng mệnh đề E là hằng đúng, nếu ta thay thế một biến p bằng một dạng mệnh đề nào đó thì mệnh đề có được vẫn là hằng đúng.

Ví dụ. Ta biết $\boldsymbol{E(p) = \neg p \vee p}$ là hằng đúng. Do đó $\boldsymbol{\neg(q \to r) \vee (q \to r)}$ vẫn là hằng đúng

1.2.3. Các luật logic

1. Phủ định của phủ định

$$\neg\neg p \Leftrightarrow p$$

2. Luật De Morgan

$$\begin{aligned} \neg(p \wedge q) &\Leftrightarrow \neg p \vee \neg q \\ \neg(p \vee q) &\Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q \end{aligned}$$

3. Luật giao hoán

$$\begin{aligned} p \vee q &\Leftrightarrow q \vee p \\ p \wedge q &\Leftrightarrow q \wedge p \end{aligned}$$

4. Luật kết hợp

$$\begin{aligned} (p \vee q) \vee r &\Leftrightarrow p \vee (q \vee r) \\ (p \wedge q) \wedge r &\Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r) \end{aligned}$$

5. Luật phân phối

$$\begin{aligned} p \vee (q \wedge r) &\Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r) \\ p \wedge (q \vee r) &\Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \end{aligned}$$

6. Luật lũy đẳng

$$p \vee p \Leftrightarrow p$$
$$p \wedge p \Leftrightarrow p$$

7. Luật trung hòa

$$p \vee 0 \Leftrightarrow p$$
$$p \wedge 1 \Leftrightarrow p$$

8. Luật về phần tử bù

$$p \wedge \neg p \Leftrightarrow \mathbf{0}$$
$$p \vee \neg p \Leftrightarrow \mathbf{1}$$

9. Luật thống trị

$$p \wedge \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{0}$$
$$p \vee \mathbf{1} \Leftrightarrow \mathbf{1}$$

10. Luật hấp thu

$$\boldsymbol{p} \vee (\boldsymbol{p} \wedge q) \Leftrightarrow \boldsymbol{p}$$
$$\boldsymbol{p} \wedge (\boldsymbol{p} \vee q) \Leftrightarrow \boldsymbol{p}$$

11. Luật về phép kéo theo

$$\begin{aligned} p \to q &\Leftrightarrow \neg p \vee q \\ &\Leftrightarrow \neg q \to \neg p \end{aligned}$$

Nhận xét. $\neg(p \to q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q.$

Ví dụ. Cho p, q là các biến mệnh đề. Hãy dùng các luật logic chứng minh $[(p \to q) \wedge p] \to q$ là hằng đúng.

Giải. Ta có

$$\begin{aligned} & [(p \to q) \wedge p] \to q \\ \Leftrightarrow\ & \neg[(p \to q) \wedge p] \vee q \\ \Leftrightarrow\ & [\neg(p \to q) \vee \neg p] \vee q \\ \Leftrightarrow\ & \neg(p \to q) \vee (\neg p \vee q) \\ \Leftrightarrow\ & \neg(p \to q) \vee (p \to q) \\ \Leftrightarrow\ & 1 \end{aligned}$$

Ví dụ.(tự làm) Cho p, q là các biến mệnh đề. Chứng minh rằng $p \to (p \vee q)$ là hằng đúng

Ví dụ. Cho p, q, r là các biến mệnh đề. Chứng minh rằng:

$$(\neg p \to r) \wedge (q \to r) \Leftrightarrow (p \to q) \to r$$

Giải. Ta có

$$\begin{aligned}
& (\neg p \to r) \wedge (q \to r) \\
\Leftrightarrow\ & (p \vee r) \wedge (\neg q \vee r) \text{ (luật về phép kéo theo)} \\
\Leftrightarrow\ & (p \wedge \neg q) \vee r \text{ (luật phân phối)} \\
\Leftrightarrow\ & \neg(\neg p \vee q) \vee r \text{ (luật phủ định)} \\
\Leftrightarrow\ & \neg(p \to q) \vee r \text{ (luật về phép kéo theo)} \\
\Leftrightarrow\ & (p \to q) \to r \text{ (luật về phép kéo theo)}
\end{aligned}$$

Ví dụ.(tự làm) Cho p, q, r là các biến mệnh đề. Chứng minh rằng

$$(p \to q) \wedge [\neg q \wedge (q \to r)] \Leftrightarrow \neg q \wedge \neg p$$

Ví dụ. Phủ định các mệnh đề sau

$a)$ Ngày mai nếu trời mưa hay trời lạnh thì tôi sẽ không ra ngoài

$b)$ 15 chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 4

$c)$ Hình tứ giác này không phải là hình chữ nhật mà cũng không phải là hình thoi

$d)$ Nếu An không đi làm ngày mai thì sẽ bị đuổi việc

Ví dụ.(tự làm) Chứng minh

$$(\neg(x \wedge y) \vee z) \to (y \to z) \Leftrightarrow y \to (x \vee z),$$

trong đó x, y, z là các biến mệnh đề.

Ví dụ.(tự làm) Cho các biến mệnh đề p, q, r. Chứng minh $A \Leftrightarrow B$ trong đó

$$A = (p \to q) \wedge \neg(r \to q) \text{ và } B = \neg(r \to (p \vee q)).$$

Ví dụ.(tự làm) Cho 3 biến mệnh đề x, u và v. Đặt

$$A = (u \to \neg x) \to (v \to \neg x) \text{ và } B = [x \to (v \to u)].$$

Chứng minh $A \Leftrightarrow B$.

Ví dụ.(tự làm) Cho 3 biến mệnh đề x, y và z. Đặt

$$A = [(x \vee y) \to (x \vee z)], \ B = [\neg x \to (y \to z)].$$

a) Chứng minh $A \Leftrightarrow B$.

b) Nếu y sai thì chân trị của A ra sao ?

Ví dụ.(tự làm) Cho 3 biến mệnh đề p, q và r. Chứng minh

$$\{(p \to \neg q) \to [(p \to r) \to \neg q]\} \Leftrightarrow (q \to p)$$

Ví dụ.(tự làm) Cho 3 biến mệnh đề p, q và r. Đặt $A = [(r \vee q) \to q]$, $B = [p \to (p \wedge q)]$, $C = (A \to B)$ và $D = [\neg q \to (p \to r)]$. Dùng các luật logic để rút gọn A và B rồi chứng minh $C \Leftrightarrow D$.

Ví dụ.(tự làm) Cho các biến mệnh đề p, q và r. Chứng minh

$$(p \wedge r) \to (q \wedge r) \Leftrightarrow r \to (p \to q).$$

Ví dụ.(tự làm) Cho các biến mệnh đề p, q và r. Đặt

$$A = [p \to (q \to r)] \to (p \to r) \text{ và } B = p \to (q \vee r).$$

Chứng minh $A \Leftrightarrow B$.

1.3. Vị từ và lượng từ

1. Định nghĩa
2. Các phép toán trên vị từ
3. Mệnh đề lượng từ hóa vị từ
4. Phủ định mệnh đề lượng từ hóa vị từ
5. Các quy tắc phổ dụng

1.3.1. Định nghĩa

Nhắc lại. ***Tập hợp*** là một khái niệm cơ bản của Toán học, dùng để chỉ một nhóm các đối tượng nào đó.

Ký hiệu. $A, B, X, \ldots$

Nếu x là phần tử của tập hợp A, ta kí hiệu $x \in A$, ngược lại ta ký hiệu $x \notin A$.

Ví dụ.

1. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ là tập hợp các số tự nhiên.
2. $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}$ tập hợp các số nguyên.
3. $\mathbb{Q} = \{\dfrac{m}{n} \,|\, m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$ tập hợp các số hữu tỉ.
4. $\mathbb{R}$: Tập hợp các số thực.
5. $\mathbb{C}$: Tập hợp các số phức.

Định nghĩa. ***Vị từ*** là một phát biểu $p(x, y, ..)$, trong đó $x, y, \ldots$ là các biến thuộc tập hợp $A, B, \ldots$ cho trước sao cho:

- Bản thân $p(x, y, \ldots)$ không phải là mệnh đề.
- Nếu thay $x, y, \ldots$ thành giá trị cụ thể thì $p(x, y, \ldots)$ là mệnh đề.

Ví dụ.

1. $r(x, y, z) =$ "$x^2 + y^2 > z$".
2. $q(x, y) =$ "$x^2 + y = 1$".
3. $p(n) =$ "$n + 1$ là số nguyên tố".

1.3.2. Các phép toán trên vị từ

Cho trước các vị từ $p(x), q(x)$ theo một biến $x \in A$. Khi ấy, ta cũng có các phép toán tương ứng như trên mệnh đề

- Phủ định $\neg p(x)$
- Phép nối liền $p(x) \wedge q(x)$
- Phép nối rời $p(x) \vee q(x)$
- Phép kéo theo $p(x) \to q(x)$
- Phép kéo theo hai chiều $p(x) \leftrightarrow q(x)$

Ví dụ.

1. $\neg(x^2 > 1)$
2. $(x^2 + 3 > 1) \wedge (2x - 1 < 0)$
3. x là người miền Nam hay x là người miền Bắc
4. Nếu $x > 1$ thì $x > 5$

Các trường hợp của vị từ

Khi xét một vị từ $p(x)$ với $x \in A$. Ta có các trường hợp sau:

TH 1. Khi thay x bởi một phần tử a tùy ý thuộc A, ta có $p(a)$ đúng.

TH 2. Với một số giá trị a thuộc A, ta có $p(a)$ đúng.

TH 3. Khi thay x bởi một phần tử a tùy ý thuộc A, ta có $p(a)$ sai.

Ví dụ. Với $x \in \mathbb{R}$, các vị từ sau thuộc trường hợp nào

1. $q(x) =$ "$x^2 - 2x + 1 = 0$"
2. $r(x) =$ "$x^2 + 3 = 0$"
3. $p(x) =$ "$x^2 + 1 > 0$"

1.3.3. Mệnh đề lượng từ hóa vị từ

Định nghĩa. Cho $p(x)$ là một vị từ theo một biến xác định trên A. Ta định nghĩa các mệnh đề lượng từ hóa của $p(x)$ như sau:

Mệnh đề "***Với mọi*** x ***thuộc*** A ***sao cho*** $p(x)$ ", kí hiệu bởi

$$\text{“}\forall x \in A, p(x)\text{”},$$

là mệnh đề đúng khi và chỉ khi $p(a)$ luôn đúng với mọi giá trị $a \in A$.

- Mệnh đề "***Tồn tại một*** x ***thuộc*** A ***sao cho*** $p(x)$" kí hiệu bởi :

$$\text{“}\exists x \in A, p(x)\text{”},$$

là mệnh đề đúng khi và chỉ khi có ít nhất một giá trị $x = a_0$ nào đó sao cho mệnh đề $p(a_0)$ đúng.

Lưu ý. Từ "tồn tại" có thể được thay thế bởi "có" hay "có ít nhất".

Ví dụ. Các mệnh đề sau đúng hay sai

a) "$\forall x \in \mathbb{R}, x + 1 > 0$"

b) "$\exists x \in \mathbb{R}, x + 1 > 0$"

c) "$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 > 5$"

d) "$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 > 5$"

e) "$\forall n \in \mathbb{Z}, 2n + 1$ lẻ"

f) "$\exists n \in \mathbb{Z}, 3n + 1$ chẵn"

Định nghĩa. Cho $p(x, y)$ là một vị từ theo hai biến x, y xác định trên $A \times B$. Ta định nghĩa các mệnh đề lượng từ hóa của $p(x, y)$ như sau:

(i) "$\forall x \in A, \forall y \in B, p(x, y)$" := "$\forall x \in A, (\forall y \in B, p(x, y))$"

(ii) "$\forall x \in A, \exists y \in B, p(x, y)$" := "$\forall x \in A, (\exists y \in B, p(x, y))$"

(iii) "$\exists x \in A, \forall y \in B, p(x, y)$" := "$\exists x \in A, (\forall y \in B, p(x, y))$"

(iv) "$\exists x \in A, \exists y \in B, p(x, y)$" := "$\exists x \in A, (\exists y \in B, p(x, y))$"

Ví dụ. Mệnh đề "$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + 2y < 1$" đúng hay sai?

Giải. Mệnh đề sai vì tồn tại $x_0 = 0, y_0 = 1 \in \mathbb{R}$ mà $x_0 + 2y_0 = 2$.

Ví dụ. Mệnh đề "$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + 2y < 1$" đúng hay sai?

Giải. Mệnh đề đúng vì với mỗi $x = a \in \mathbb{R}$, tồn tại $y_a \in \mathbb{R}$ như $y_a = -a/2$, sao cho $a + 2y_a < 1$.

Định lý. *Cho $p(x, y)$ là một vị từ theo hai biến x, y xác định trên $A \times B$. Khi đó:*

i) "$\forall x \in A, \forall y \in B, p(x, y)$" $\Leftrightarrow$ "$\forall y \in B, \forall x \in A, p(x, y)$"

ii) "$\exists x \in A, \exists y \in B, p(x, y)$" $\Leftrightarrow$ "$\exists y \in B, \exists x \in A, p(x, y)$"

iii) "$\exists x \in A, \forall y \in B, p(x, y)$' $\Rightarrow$ "$\forall y \in B, \exists x \in A, p(x, y)$"

Chiều đảo của 3) nói chung không đúng.

1.3.4. Phủ định của mệnh đề lượng từ hóa vị từ

Phủ định của mệnh đề lượng từ hóa vị từ $p(x, y, ..)$ có được bằng cách thay $\forall$ thành $\exists$, thay $\exists$ thành $\forall$ và vị từ $p(x, y, ..)$ thành $\neg p(x, y, ..)$.

Ví dụ. Phủ định các mệnh đề sau

a) $\forall x \in A, 2x + 1 > 0$

b) $\exists x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{R}, (x + y > 1) \to (x^2 < y)$

c) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x - a| < \delta \wedge |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

Giải.

a) $\exists x \in A, 2x + 1 \leq 0$

b) $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{R}, (x + y > 1) \wedge (x^2 \geq y)$

c) $\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in \mathbb{R}, |x - a| \geq \delta \vee |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$

Ví dụ.(tự làm) Phủ định các mệnh đề sau

a) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (x > y) \vee (x^2 - 1 > y) \to (x^2 \geq y^2)$

b) $\exists x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z}, (2x + y = 5)$ và $(x - 3y = -1)$

Ví dụ.(tự làm) Viết mệnh đề phủ định của mệnh đề sau:

"Nếu vở kịch hấp dẫn thì tất cả khán giả không ra về sớm".

Ví dụ.(tự làm) Cho $C =$ "$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{Z}, y \neq x$ và $|y - x| \leq 1$". Viết mệnh đề phủ định C.

Ví dụ.(tự làm) Cho $C =$ "$\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{Z}, 2x + y > 5$ và $5y - x = 1$". C đúng hay sai ? Tại sao ? Viết mệnh đề phủ định $\overline{C}$.

Ví dụ.(tự làm) Cho C = "$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{Z}, 8y - 2y^2 \leq 3^{-x}$". Xét chân trị của C và viết mệnh đề phủ định $\overline{C}$ của C.

Ví dụ.(tự làm) Cho A = "$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{Z}, y^2 + 6y > 3^x$". Viết mệnh đề phủ định $\overline{A}$ của A và xét chân trị của A.

Ví dụ.(tự làm) Cho mệnh đề

$$A = \text{“}\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (x^2 \geq y^2) \to (x \geq y \text{ và } xy \leq 0)\text{”}.$$

Viết mệnh đề phủ định của A.

Ví dụ.(tự làm) Cho A = "Nếu Tuấn thắng trận chung kết thì tất cả các bạn trong lớp đến chúc mừng". Hãy viết mệnh đề phủ định của A.

1.3.5. Các quy tắc phổ dụng

Đặc biệt hóa phổ dụng

$$\begin{array}{l} \forall x \in A,\ p(x) \\ a \in A \\ \hline \therefore p(a) \end{array}$$

Ví dụ. "Mọi người đều chết"
"Socrate là người"
Vậy "Socrate cũng chết"

Tổng quát hóa phổ dụng

Nếu với mỗi $a \in X$ ta có $p(a)$ là mệnh đề đúng thì khẳng định "$\forall x \in X, p(x)$" là mệnh đề đúng.

Ví dụ. Mỗi số thực đều có bình phương không âm nên mọi số thực đều có bình phương không âm.

1.4. Quy tắc suy luận

1. **Các quy tắc suy luận**
2. **Các phương pháp chứng minh**

Giới thiệu

Ví dụ. Xem xét suy luận sau:
- Nếu ca sĩ Sơn Tùng không trình diễn hay số vé bán ra ít hơn 1000 thì đêm diễn sẽ bị hủy bỏ và ông bầu rất buồn.
- Nếu đêm biểu diễn bị hủy bỏ thì phải trả lại tiền vé cho khán giả.
- Nhưng tiền vé đã không được trả lại cho khán giả.

Vậy ca sĩ Sơn Tùng có trình diễn.

Hỏi Suy luận trên đúng hay sai?

Ví dụ. Xem xét suy luận sau: Ông Minh nói rằng nếu không được tăng lương thì ông ta sẽ nghỉ việc. Mặt khác, nếu ông ấy nghỉ việc và vợ ông ấy bị mất việc thì phải bán xe. Biết rằng nếu vợ ông Minh hay đi làm trễ thì trước sau gì cũng sẽ bị mất việc. Và cuối cùng ông Minh đã được tăng lương.

Suy ra, nếu ông Minh không bán xe thì vợ ông ta đã không đi làm trễ

Hỏi Suy luận trên đúng hay sai?

1.4.1. Các quy tắc suy luận

Trong các chứng minh toán học, xuất phát từ một số khẳng định đúng $p, q, r, \ldots$ (tiền đề), ta áp dụng các qui tắc suy luận để suy ra chân lí của một mệnh đề h mà ta gọi là kết luận.

Nói cách khác, dùng các qui tắc suy luận để chứng minh:
$(p \wedge q \wedge r \wedge \ldots)$ có hệ quả logic là h.

Ta thường mô hình hóa phép suy luận đó dưới dạng

$$\begin{array}{c} p \\ q \\ r \\ \ldots \\ \hline \therefore h \end{array}$$

Viết dưới dạng hằng đúng

$$(p \wedge q \wedge r \wedge \ldots) \to h$$

a. Qui tắc khẳng định (Modus Ponens)

Sơ đồ

$$\begin{array}{l} p \to q \\ p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

Thể hiện bằng hằng đúng

$$[(p \to q) \land p] \to q$$

Ví dụ.

- Trời mưa thì đường ướt.

- Mà chiều nay trời mưa.

Suy ra: Chiều nay đường ướt.

b. Quy tắc phủ định

Sơ đồ

$$\begin{array}{c} p \to q \\ \neg q \\ \hline \therefore \neg p \end{array}$$

Thể hiện bằng hằng đúng

$$[(p \to q) \land \neg q] \to \neg p$$

Ví dụ.

- Nếu An đi học đầy đủ thì sẽ đậu môn Toán Rời Rạc.
- An không đậu Toán Rời Rạc.

Suy ra: An không đi học đầy đủ.

c. Quy tắc tam đoạn luận

Sơ đồ

$$\begin{array}{c} p \to q \\ q \to r \\ \hline \therefore p \to r \end{array}$$

Thể hiện bằng hằng đúng

$$[(p \to q) \land (q \to r)] \to (p \to r)$$

Ví dụ.
- Nếu trời mưa thì đường ướt
- Nếu đường ướt thì đường trơn

Suy ra: Nếu trời mưa thì đường trơn

Ví dụ. Xem xét suy luận sau đúng hay sai?
- Một con ngựa rẻ là một con ngựa hiếm
- Cái gì hiếm thì đắt

Suy ra: Một con ngựa rẻ thì đắt

d. Quy tắc tam đoạn luận rời

Sơ đồ

$$\begin{array}{c} p \vee q \\ \neg p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

Thể hiện bằng hằng đúng

$$[(p \vee q) \wedge \neg p] \to q$$

Ví dụ.

- Tối nay An sẽ đi uống cafe với bạn hoặc ở nhà học bài
- Tối nay An không học bài ở nhà

Suy ra: Tối nay, An đi uống cafe với bạn

e. Những quy tắc suy luận đơn giản

Quy tắc	Sơ đồ	Hằng đúng
Nối liền	$\dfrac{\begin{matrix} p \\ q \end{matrix}}{\therefore p \wedge q}$	$(p \wedge q) \to (p \wedge q)$
Đơn giản	$\dfrac{p \wedge q}{\therefore p}$	$(p \wedge q) \to p$
Cộng	$\dfrac{p}{\therefore p \vee q}$	$p \to (p \vee q)$

Ví dụ. Xem xét suy luận sau:
- Nếu ca sĩ Sơn Tùng không trình diễn hay số vé bán ra ít hơn 1000 thì đêm diễn sẽ bị hủy bỏ và ông bầu rất buồn.
- Nếu đêm biểu diễn bị hủy bỏ thì phải trả lại tiền vé cho khán giả.
- Nhưng tiền vé đã không được trả lại cho khán giả.

Vậy ca sĩ Sơn Tùng có trình diễn.

Hỏi Suy luận trên đúng hay sai?

Nếu ta đặt:

p: "ca sĩ Sơn Tùng đã trình diễn"

q: "số vé bán ra ít hơn 1000"

r: "đêm diễn sẽ bị hủy bỏ"

t: "trả lại tiền vé cho khán giả"

s: "ông bầu rất buồn"

Ta có sơ đồ suy luận sau:

$$\begin{array}{l} (\neg p \vee q) \to (r \wedge s) \\ r \to t \\ \neg t \\ \hline \therefore p \end{array}$$

Ví dụ. Chứng minh suy luận sau

$$\begin{array}{l} p \to (q \to r) \\ p \vee s \\ t \to q \\ \neg s \\ \hline \therefore \neg r \to \neg t \end{array}$$

Giải.

$$\begin{array}{l} p \vee s \\ \neg s \\ \hline \therefore p \end{array}$$

Tam đoạn luận rời

$$\begin{array}{l} p \to (q \to r) \\ p \\ \hline \therefore q \to r \end{array}$$

Khẳng định

$$\begin{array}{l} t \to q \\ q \to r \\ \hline \therefore t \to r \end{array}$$

Tam đoạn luận

Cuối cùng ta có

$$t \to r \Leftrightarrow \neg r \to \neg t \quad \text{(Luật phép kéo theo)}$$

Ví dụ.(tự làm) Chứng minh các suy luận sau:

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \neg q \\ \neg r \\ \hline \therefore \neg(p \vee r) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} p \to (q \to r) \\ \neg q \to \neg p \\ p \\ \hline \therefore\ r \end{array}$$

$$\begin{array}{l} p \wedge q \\ p \to (r \wedge q) \\ r \to (s \vee t) \\ \neg s \\ \hline \therefore\ t \end{array}$$

$$\begin{array}{c} t \to u \\ r \to (s \vee t) \\ (\neg p \vee q) \to r \\ \neg(s \vee u) \\ \hline \therefore p \end{array}$$

f. Quy tắc mâu thuẫn

Ta có tương đương logic

$$[(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \to \boldsymbol{q}] \Leftrightarrow [(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n \wedge \boldsymbol{\neg q}) \to \mathbf{0}].$$

Do đó nếu chứng minh được dạng mệnh đề ở bên phải là một hằng đúng thì dạng mệnh đề ở bên trái cũng là một hằng đúng.

Nói cách khác nếu thêm giả thiết phụ $\neg q$ vào các tiền đề cho trước mà dẫn đến một mâu thuẫn thì q là hệ quả logic của các tiền đề cho trước.

Ví dụ. Chứng minh suy luận sau

$$\begin{array}{l} p \to r \\ \neg p \to q \\ q \to s \\ \hline \therefore \neg r \to s \end{array}$$

Giải. Phủ định kết luận

$$\neg(\neg r \to s) \Leftrightarrow \neg(r \vee s) \Leftrightarrow \neg r \wedge \neg s$$

Ta thêm điều này vào tiền đề. Khi đó ta sẽ chứng minh suy luận sau:

$$\begin{array}{l} p \to r \\ \neg p \to q \\ q \to s \\ \neg r \wedge \neg s \\ \hline \therefore \mathbf{0} \end{array}$$

Ta lần lượt thực hiện các quy tắc suy luận sau:

$$\begin{array}{l} \neg r \wedge \neg s \\ \hline \therefore \neg r \end{array} \qquad \begin{array}{l} p \to r \\ \neg r \\ \hline \therefore \neg p \end{array} \qquad \begin{array}{l} \neg r \wedge \neg s \\ \hline \therefore \neg s \end{array} \qquad \begin{array}{l} q \to s \\ \neg s \\ \hline \therefore \neg q \end{array} \qquad \begin{array}{l} \neg p \to q \\ \neg p \\ \hline \therefore q \end{array} \qquad \begin{array}{l} \neg q \\ q \\ \hline \therefore \mathbf{0} \end{array}$$

Như vậy suy luận trên đã được chứng minh

Ví dụ. Xem suy luận sau đúng hay sai?

Ông Minh nói rằng nếu không được tăng lương thì ông ta sẽ nghỉ việc. Mặt khác, nếu ông ấy nghỉ việc và vợ ông ấy bị mất việc thì phải bán xe. Biết rằng nếu vợ ông Minh hay đi làm trễ thì trước sau gì cũng sẽ bị mất việc. Và cuối cùng ông Minh đã được tăng lương.

Suy ra, nếu ông Minh không bán xe thì vợ ông ta đã không đi làm trễ.

Nếu ta đặt:

p: "ông Minh được tăng lương"

q: "ông Minh nghỉ việc"

r: "vợ ông Minh mất việc"

s: "gia đình phải bán xe"

t: "vợ ông hay đi làm trể"

Ta có sơ đồ suy luận sau:

$$\begin{array}{l} \neg p \to q \\ (q \wedge r) \to s \\ t \to r \\ p \\ \hline \therefore \neg s \to \neg t \end{array}$$

Phản ví dụ

▷ Để chứng minh suy luận đúng, chúng ta sẽ sử dụng các luật logic và quy tắc suy luận.
▷ Để chỉ một suy luận sai (hay còn gọi là ngụy biện) ta sẽ đưa giá các giá trị làm cho các tiền đề đúng nhưng kết luận thì sai.

Ví dụ. Kiểm tra suy luận sau đúng hay sai

$$\begin{array}{l} \neg p \to q \\ (q \wedge r) \to s \\ t \to r \\ p \\ \hline \therefore \neg s \to \neg t \end{array}$$

Giải. Cho $s = 0, t = 1, p = 1, q = 0, r = 1$, ta thấy các tiền đề đều đúng, nhưng kết luận sai. Suy ra suy luận trên là sai.

1.4.2. Các phương pháp chứng minh

Mỗi bài toán chứng minh gồm 2 phần chính: giả thiết và kết luận. Quá trình chứng minh bài toán là quá trình sử dụng các tiên đề, luật logic, các quy tắc suy luận,... và áp dụng các phương pháp chứng minh để từ giả thiết đã cho ta có được kết luận.

Trong phần này ta tìm hiểu các phương pháp chứng minh sau:

1. Chứng minh trực tiếp
2. Chứng minh gián tiếp
3. Chứng minh phản chứng
4. Chứng minh theo từng trường hợp

a. Chứng minh trực tiếp

Để chứng minh A suy ra B, chúng ta giả sử A đúng, sau đó áp dụng các quy tắc suy luận, các luật logic, các tiên đề,... để chỉ ra B đúng.

Ví dụ. Chứng minh rằng, nếu n là một số lẻ thì n^2 cũng là số lẻ.

Giải. Vì n là số lẻ nên $n = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$. Ta có

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1.$$

Do $4k^2 + 4k$ chẵn nên n^2 là số lẻ. ∎

Ví dụ.(tự làm) Cho ABC là tam giác và M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng nếu $AM = MB$ thì tam giác ABC vuông tại A.

b. Chứng minh gián tiếp

Ta có
$$A \to B \Leftrightarrow \neg B \to \neg A.$$

Do đó để chứng minh A đúng suy ra B đúng, ta có thể giả sử B sai và chứng minh A sai.

Ví dụ. Cho n là một số nguyên, nếu $5n$ là số lẻ thì n là số lẻ

Giải. Ta sẽ dùng phương pháp chứng minh gián tiếp. Nghĩa là, cho n là số chẵn cần chứng minh $5n$ là số chẵn.

Vì n là số chẵn nên $n = 2k$ (với $k \in \mathbb{Z}$). Do đó $5n = 5.2k = 10k$ là một số chẵn. ■

c. Chứng minh phản chứng

Ta có
$$A \to B \Leftrightarrow \neg A \vee B.$$

Suy ra
$$\neg(A \to B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B.$$

Như vậy để chứng minh từ A đúng suy ra B đúng, ta có thể giả sử B sai. Sau đó dùng các tiền đề, các luật logic, các quy tắc suy luận,... chứng tỏ điều này mâu thuẫn.

Ví dụ. Chứng minh rằng $\sqrt{2}$ là số vô tỉ.

Giải. Giả sử $\sqrt{2}$ là số hữu tỉ, nghĩa là $\sqrt{2}$ có thể biểu diễn thành
$$\sqrt{2} = \frac{m}{n} \qquad (m, n \in \mathbb{Z}).$$

Ta có thể giả sử m, n là hai số nguyên tố cùng nhau. Bình phương 2 vế ta có
$$2 = \frac{m^2}{n^2} \Leftrightarrow m^2 = 2n^2.$$

$$2 = \frac{m^2}{n^2} \Leftrightarrow m^2 = 2n^2.$$

Từ đây suy ra m là số chẵn (vì bình phương số lẻ là số lẻ). Do đó $m = 2k$ (với $k \in \mathbb{Z}$). Ta có

$$(2k)^2 = 2n^2 \Leftrightarrow 4k^2 = 2n^2.$$

Suy ra $n^2 = 2k^2$. Như vậy n cũng là một số chẵn. Do m, n đều là số chẵn nên chúng không là số nguyên tố cùng nhau (mâu thuẫn) ■

Ví dụ.(tự làm) Trong mặt phẳng, nếu hai đường thẳng cùng song song với đường thẳng thứ ba thì chúng song song với nhau.

Gợi ý. Sử dụng tiên đề Euclide:

"Qua một điểm nằm ngoài một đường thẳng ta vẽ được một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đã cho."

d. Chứng minh theo trường hợp

Ta có
$$(A \vee B) \to C \Leftrightarrow (A \to C) \wedge (B \to C)$$

Do đó, để chứng minh $(A \vee B) \to C$ ta chỉ cần chứng minh $A \to C$ và $B \to C$ là được.

Ví dụ. Chứng minh rằng $n^3 + 2n$ luôn chia hết cho 3 với mọi số nguyên n.

Giải. Chia hai trường hợp

Trường hợp 1. n chia hết cho 3, hiển nhiên $n^3 + 2n$ chia hết cho 3.

Trường hợp 2. n không chia hết cho 3, khi ấy ta có thể viết $n = 3k \pm 1$ với $k \in \mathbb{Z}$ nào đó. Ta có

$$n^2 + 2 = (3k \pm 1)^2 + 2 = 9k^2 \pm 6k + 3 = 3(3k^2 \pm 2k + 1).$$

Suy ra $n(n^2 + 2)$ cũng chia hết cho 3.

Như vậy $n^3 + 2n$ chia hết cho 3 với mọi số nguyên n.

1.5. Nguyên lý quy nạp

Với những bài toán chứng minh tính đúng đắn của một biểu thức mệnh đề có chứa tham số $n \in \mathbb{Z}$, như $P(n)$. Quy nạp toán học là một kỹ thuật chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số $n \geq N_0$.

Quy nạp yếu

Gồm 2 bước:

- **Bước cơ sở**: Chỉ ra $P(N_0)$ đúng.

- **Bước quy nạp**: Với $k \geq N_0$, chứng minh nếu $P(k)$ đúng thì $P(k+1)$ đúng. Trong đó $P(k)$ được gọi là giả thiết quy nạp.

Ví dụ. Chứng minh $1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2$ với mọi số nguyên dương n.

Giải. Gọi $P(n) =$ "$1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2$"

- Bước cơ sở: Hiển nhiên $P(1)$ đúng vì $1 = 1^2$.

- Bước quy nạp:

Với $k \geq 1$, giả sử $P(k)$ đúng, tức là

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2.$$

Ta cần chứng minh $P(k+1)$ đúng, tức là

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k + 1) = (k + 1)^2.$$

Từ giả thiết quy nạp ta có

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + \cdots + (2k + 1) &= 1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + (2k + 1) \\ &= k^2 + (2k + 1). \\ &= (k + 1)^2. \end{aligned}$$

Suy ra, $P(k+1)$ đúng. Vậy theo nguyên lý quy nạp $P(n)$ đúng với mọi số nguyên dương n.

Ví dụ.(tự làm) Chứng minh $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ với mọi số nguyên dương n.

Quy nạp mạnh

Gồm 2 bước:

- **Bước cơ sở**: Chỉ ra $P(N_0) \wedge P(N_0+1) \wedge \ldots \wedge P(K_0)$ đúng.
- **Bước quy nạp mạnh**: Với $k \geq K_0$, chứng minh nếu $P(m)$ đúng với mọi $m \leq k$ thì $P(k+1)$ đúng.

Ví dụ. Mọi số tự nhiên lớn hơn 1 đều phân tích được thành tích những thừa số nguyên tố.

Giải. Gọi $P(n)$ = "n phân tích được thành tích các thừa số nguyên tố"

- Bước cơ sở: Hiển nhiên $P(2)$ đúng vì $2 = 2$ là số nguyên tố.

- Bước quy nạp mạnh: Với $k \geq 2$, giả sử $P(m)$ đúng với mọi $m \leq k$, tức là, với $1 < m \leq k$ thì m phân tích được thành tích các thừa số nguyên tố.

Ta cần chứng minh $P(k+1)$ đúng, tức là $k+1$ phân tích được thành tích các thừa số nguyên tố.

- Nếu $k+1$ là số nguyên tố thì $P(k+1)$ đúng,
- Ngược lại, nếu $k+1$ không là số nguyên tố. Gọi p là một ước nguyên tố của $k+1$. Khi đó $k+1 = p.a$ với $1 < p, a < k+1$. Vì a nhỏ hơn $k+1$ nên theo giả thiết quy nạp a phân tích được thành tích các thừa số nguyên tố.

Do đó $k+1$ phân tích được thành tích các thừa số nguyên tố. ■

Ví dụ.(tự làm) Cho dãy số $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ được định bởi

$$a_0 = 0, a_1 = 1 \text{ và } a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} \text{ với mọi } n \geq 2.$$

Chứng minh rằng $a_n = 2^n - 1$ với mọi $n \geq 0$.