Câu 2

Xét ma trận dòng tọa độ

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 & 6 \\ 2 & -3 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{d_1 - 2d_3 \to d_3 \\ d_1 - d_4 \to d_4}]{d_1 - 2d_2 \to d_2} \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[4d_2 + d_4 \to d_4]{3d_2 + d_3 \to d_3} \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{d_3 \leftrightarrow d_4} \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ta có rank $A = 3 < |S|$ nên S là hệ phụ thuộc tuyến tính

$,2), (-2, 1, 3, 0)$

Câu 5

a) Xét $a(2,1,m) + b(0,-m,1) + c(m,1,0) = 0_{\mathbb{R}^3}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + mc = 0 \\ a - mb + c = 0 \\ ma + b = 0 \end{cases}$$

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & m & 0 \\ a & -m & 1 & 0 \\ m & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[2d_3 - md_1 \to d_3]{2d_2 - d_1 \to d_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & m & 0 \\ 0 & -2m & 2-m & 0 \\ 0 & 2 & -m^2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_2 \leftrightarrow d_3]{md_3 + d_2 \to d_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & m & 0 \\ 0 & 2 & -m^2 & 0 \\ 0 & 0 & -m^3 - m + 2 & 0 \end{array}\right)$$

S pttt $\Leftrightarrow r(A) = r(\bar{A})$

$\Leftrightarrow -m^3 - m + 2 = 0$

$\Leftrightarrow m = 1$

Với $m = 1$ thì S pttt

b) Với $m = 2$

$S = \{u_1 = (2,1,2), u_2 = (0,-2,1),$

$u_3 = (2,1,0)\}$

Xét $a(2,1,2) + b(0,-2,1) + c(2,1,0) = 0_{\mathbb{R}^3}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 2c = 0 \\ a - 2b + c = 0 \\ 2a + b = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow a = b = c = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{d_1 - d_3 \to d_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Ta có

$r(A) = r(\bar{A}) = 3$

$\Rightarrow$ S độc lập tuyến tính, S là cơ sở của $\mathbb{R}^3$

Câu 4

a) Ma trận toạ độ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & -2 \\ 6 & 7 & 18 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{d_3 - 3d_1 \to d_3 \\ d_4 - 6d_1 \to d_4}]{d_2 + 2d_1 \to d_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & 4 & -8 \\ 0 & -5 & 18 & -16 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{d_4 - d_3 \to d_4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 14 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_2 + d_3 \to d_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & -4 \\ 0 & 0 & 14 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{2d_3 + d_4 \to d_4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow rank(A) = rank(S) = 3$ và hệ vecto $\{(1, 2, 0, 2), (-2, 1, 3, 0), (3, 1, 4, -2)\}$ là 1 cơ sở $\Rightarrow dim(S) = 3$

Câu 2

Xét ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 & 6 \\ 2 & -3 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[4d_2 + d_4 \to d_4]{3d_2 + d_3 \to d_3}$$

$$\xrightarrow{d_3 \leftrightarrow d_4} \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & - \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$W = \{u = (a, b, a+b) / a, b \in R\}$

$= \{a(1,0,1) + b(0,1,1) / a, b \in R\}$

$W = span\{(1,0,1), (0,1,1)\}$

$\to$ W là kgvt con của R^3

Đặt $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow r(W) = r(A)$

$= 2$ và $\{(1,0,1), (0,1,1)\}$ là 1 cơ sở của W $\Rightarrow dim(W) = 2$