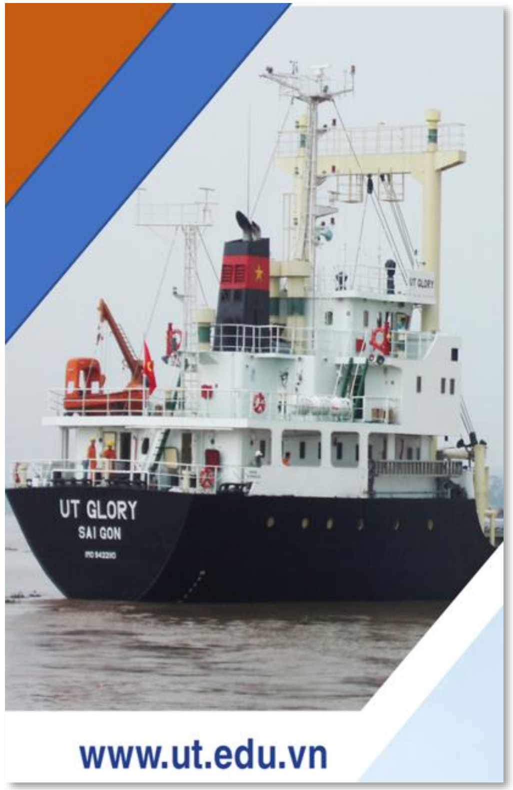
TRƯỜNG ĐẠI HỌC GIAO THÔNG VẬN TẢI THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

KHOA CƠ BẢN – BỘ MÔN TOÁN



BÀI GIẢNG ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

CHƯƠNG II. KHÔNG GIAN VECTOR

§3. Không gian vector Euclide

ThS. Đinh Tiến Dũng

NỘI DUNG

1. *Khái niệm Tích vô hướng; Không gian Euclide*
2. *Quá trình trực giao, trực chuẩn hoá (Gram – Schmidt)*
3. *Không gian con bù trực giao (vuông góc)*

§3. Không gian vector Euclide

I. TÍCH VÔ HƯỚNG

1) Định nghĩa

Trong kgvt $\boldsymbol{V}$, phép toán nhân hai vectơ $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ với kết quả là một số thực ký hiệu là $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$ ta gọi là một tích vô hướng nếu thỏa 4 tiên đề sau:

i) $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}: \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \rangle;$

ii) $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{V}: \langle \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \rangle + \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle;$

iii) $\forall \alpha \in \boldsymbol{R}, \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}: \langle \alpha \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \alpha \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle;$

iv) $\forall \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}: \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle \geq \boldsymbol{0}$ *và* $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}.$

2) Các ví dụ:

VD1: Trong kgvt $\mathbb{R}^n$, cho vectơ:

$$u = (x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ và } v = (y_1, y_2, \dots, y_n).$$

Tổng quát từ tích vô hướng trong $\mathbb{R}^3$, người ta định nghĩa phép nhân hai vectơ trong $\mathbb{R}^n$ như sau:

$$\langle u, v\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_n\, y_n.$$

Phép nhân này thoả 4 tiên đề của ĐN tích vô hướng nên nó là một tích vô hướng trên $\mathbb{R}^n$.

Ta gọi đó là tích vô hướng Euclide hay tích vô hướng thông thường trên $\mathbb{R}^n$ và còn kí hiệu riêng là:

$$uv = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_n\, y_n = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i.$$

Ngoài ra, ta có thể xây dựng nhiều kiểu tích vô hướng khác.

❖ **VD2:** *Trong không gian $\mathbb{R}^2$ cho qui tắc:*

Với hai vectơ bất kỳ $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2})$; $\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{y_2}) \in \mathbb{R}^2$, đặt:

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \langle (\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}), (\boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{y_2}) \rangle = \boldsymbol{x_1 y_1} + \boldsymbol{2 x_1 y_2} + \boldsymbol{2 x_2 y_1} + \boldsymbol{10 x_2 y_2}.$$

Ta dễ dàng chứng minh được đó là một tích vô hướng.

Hãy tính tích vô hướng của hai vectơ $\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{2}, \boldsymbol{1}), \boldsymbol{v} = (\boldsymbol{1}, \boldsymbol{-1})$.

Giải

ADCT: $\langle x, y \rangle = \langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1 y_1 + 2x_1 y_2 + 2x_2 y_1 + 10x_2 y_2$.

Ta có $\langle u, v \rangle = \langle (2,1), (1, -1) \rangle = 2.1 + 2.2.(-1) + 2.1.1 + 10.1.(-1) = -10$

II. KHÔNG GIAN EUCLIDE

1) Định nghĩa không gian Euclide:

Không gian vector hữu hạn chiều V trên đó có trang bị một tích vô hướng $\langle .,. \rangle$ được gọi là không gian Euclide. ***Ký hiệu:*** $(V; \langle .,. \rangle)$.

2) Chuẩn (chiều dài) vectơ:

a) Định nghĩa

Trên không gian Euclide $(V; \langle .,. \rangle)$ cho vectơ u. Chuẩn (chiều dài) của vectơ u được ký hiệu và tính bởi: $||u||=\sqrt{\langle u, u\rangle}$.

Đặc biệt, nếu $||u|| = 1$ thì u gọi là vector đơn vị.

Chú ý: Trên không gian R^n với tích vô hướng Euclide:

$$u = (x_1, x_2, \dots, x_n) \Longrightarrow ||u||=\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

❖ **Ví dụ:** ***Trong không gian $\mathbb{R}^4$ với tích vô hướng Euclide thông thường, cho $\boldsymbol{u} = (-3, \sqrt{6}, 1, 0), \boldsymbol{v} = (1, 0, 2, 1)$. Tính $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle$ và $||\boldsymbol{u}||$***

Giải

$$\langle u, v\rangle = -3.1 + \sqrt{6}.0 + 1.2 + 0.1 = -1$$

$$u = (-3, \sqrt{6}, 1,0) \Longrightarrow ||u||=\sqrt{(-3)^2 + (\sqrt{6})^2 + 1^2 + 0^2}=\sqrt{16} = 4.$$

b) Tính chất:

- Chuẩn của vectơ là một số thực không âm: $||u|| \geq 0 , \forall u$.
  (dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $u = 0$).
- $||\mathrm{k}u|| = |\mathrm{k}|.\,||u||, \forall u \in \mathrm{V}, \forall k \in \mathrm{R}$.
- Nếu $u \neq 0$ thì $\frac{u}{||u||}$ là một vectơ đơn vị.

❖**VD:** ***Trong k.gian Euclide $\mathbb{R}^3$ (với tích vô hướng thông thường), cho $u = (3; 4; 0)$. Chứng tỏ rằng $v = \frac{u}{||u||}$ là một vectơ đơn vị.***

Giải: Ta có $||u|| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 0^2} = 5$.

$$\Longrightarrow \mathrm{v} = \frac{u}{||u||} = \left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}; 0\right) \Longrightarrow ||\mathrm{v}|| = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 + 0} = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}} = 1.$$

Vậy $\mathrm{v} = \frac{u}{||u||}$ là một vectơ đơn vị.

3. Hệ vector trực giao – trực chuẩn

a) Định nghĩa

Cho họ vectơ $S = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ trong kgian Euclide $(V; \langle .,. \rangle)$.

- Hai vectơ u_1, u_2 gọi là trực giao (vuông góc) nếu $\langle u_1, u_2 \rangle = 0$.

  Kí hiệu: $u_1 \perp u_2$

- Họ S được gọi là họ vectơ trực giao nếu các vectơ của họ S vuông góc nhau từng đôi một. Tức là $\langle u_i, u_j \rangle = 0, \forall i \neq j$.

- Họ S được gọi là họ vectơ trực chuẩn nếu nó là họ trực giao và tất cả các vectơ của họ đều là vectơ đơn vị. Tức là $\langle u_i, u_j \rangle = 0, \forall i \neq j$ và $||u_i||=1, \forall i$.

b) Định lý:

Nếu $S = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ là họ trực giao không chứa vectơ-không trong không gian Euclide thì S là họ đltt.

c) Định nghĩa cơ sở trực giao, trực chuẩn:

- ***Nếu S là một cơ sở có các vectơ đôi một trực giao thì ta gọi S là cơ sở trực giao.***
- ***Nếu S là cơ sở trực giao mà tất cả các vectơ của S đều là vectơ đơn vị thì ta gọi S là cơ sở trực chuẩn.***

VD: Trong không gian Euclide $\mathbb{R}^3$ (với tích vô hướng thông thường), xét họ: $E = \{e_1 = (1,0,0); e_2 = (0,1,0); e_3 = (0,0,1)\}$.

Ta thấy: $e_1 e_2 = e_2 e_3 = e_3 e_1 = 0 \Rightarrow e_1 \perp e_2; e_2 \perp e_3; e_3 \perp e_1$

$$\|e_1\| = \|e_2\| = \|e_3\| = 1; \dim(R^3) = 3 = |E|$$

Vậy E là một *cơ sở trực chuẩn* của $\mathbb{R}^3$.

4. Quá trình trực giao, trực chuẩn hoá (Gram – Schmidt)

Từ một cơ sở bất kỳ S= $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ *của không gian Euclide V hoặc một không gian con của V, quá trình trực giao giúp biến đổi S thành một cơ sở trực giao* $F = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ *và quá trình trực chuẩn tiếp tục biến đổi nó thành một cơ sở trực chuẩn* $S' = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ *sao cho:*

$$span(\{u_1, u_2, \dots, u_n\}) = span(\{f_1, f_2, \dots, f_n\}) = span(\{e_1, e_2, \dots, e_n\}).$$

Cơ sở bất kỳ $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ → Quá trình trực giao → **Cơ sở trực giao** $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ → Quá trình trực chuẩn → **Cơ sở Trực chuẩn** $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$

Quá trình Gram – Schmidt

❖ *Chú ý: Trong quá trình trực giao có thể thay các* f_i *bởi* $f'_i = kf_i$ *với* $k \neq 0$.

Giả sử S= $\{\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \dots, \boldsymbol{u_n}\}$ là cơ sở đã cho của không gian Euclide V

❖ **Quá trình trực giao hoá:**

Đặt: $f_1 = u_1$

$$f_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, f_1\rangle}{||f_1||^2} f_1$$

$$f_3 = u_3 - \frac{\langle u_3, f_1\rangle}{||f_1||^2} f_1 - \frac{\langle u_3, f_2\rangle}{||f_2||^2} f_2$$

....

$$f_n = u_n - \frac{\langle u_n, f_1\rangle}{||f_1||^2} f_1 - \frac{\langle u_n, f_2\rangle}{||f_2||^2} f_2 - \dots - \frac{\langle u_n, f_{n-1}\rangle}{||f_{n-1}||^2} f_{n-1}$$

Kết thúc quá trình tìm được $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ là cơ sở trực giao.

❖ **Quá trình trực chuẩn hoá:**

Đặt: $\boldsymbol{e_i} = \dfrac{\boldsymbol{f_i}}{||\boldsymbol{f_i}||}$ với $i = 1,2, \dots n$. Khi đó $\{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \dots, \boldsymbol{e_n}\}$ là cơ sở trực chuẩn.

❖ **VD: Trong $\mathbb{R}^4$ với tích vô hướng thông thường cho họ đltt**

$$S = \{u_1 = (1,0,1,1), u_2 = (0,1,1,1), u_3 = (1,1,1,1)\}.$$

Dùng quá trình G-S tìm họ trực chuẩn S' sao cho $\langle S' \rangle = \langle S \rangle$.

Giải. Đặt: $f_1 = u_1 = (1,0,1,1)$

$$f'_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, f_1 \rangle}{||f_1||^2} f_1 = (0,1,1,1) - \frac{2}{3}(1,0,1,1) = (\frac{-2}{3}, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$$

Chọn $f_2 = 3.f'_2 = (-2,3,1,1)$.

$$f'_3 = u_3 - \frac{\langle u_3, f_1 \rangle}{||f_1||^2} f_1 - \frac{\langle u_3, f_2 \rangle}{||f_2||^2} f_2 = (\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{-1}{5}, \frac{-1}{5})$$

Chọn $f_3 = 5.f'_3 = (2,2,-1,-1)$. Suy ra $F = \{f_1, f_2, f_3\}$ là họ trực giao.

Chia lần lượt f_1, f_2, f_3 cho độ dài của nó ta được họ trực chuẩn cần tìm

$$\mathbf{S}' = \left\{ \mathbf{e_1} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right), \mathbf{e_2} = \left(\frac{-2}{\sqrt{15}}, \frac{3}{\sqrt{15}}, \frac{1}{\sqrt{15}}, \frac{1}{\sqrt{15}} \right), \mathbf{e_3} = \left(\frac{2}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}, \frac{-1}{\sqrt{10}}, \frac{-1}{\sqrt{10}} \right) \right\}.$$

❖ **Chú ý:** Để việc tính toán đơn giản, ta có thể trình bày lời giải như sau:

Đặt: $f_1 = u_1 = (1,0,1,1)$; $f'_2 = u_2 - \dfrac{\langle u_2, f_1\rangle}{||f_1||^2} f_1 = (0,1,1,1) - \dfrac{2}{3}(1,0,1,1)$

Chọn $f_2 = 3.f'_2 = 3(0,1,1,1) - 2(1,0,1,1) = (0,3,3,3) - (2,0,2,2) = (-2,3,1,1)$.

$$f'_3 = u_3 - \frac{\langle u_3, f_1\rangle}{||f_1||^2} f_1 - \frac{\langle u_3, f_2\rangle}{||f_2||^2} f_2 = (1,1,1,1) - (1,0,1,1) - \frac{1}{5}(-2,3,1,1)$$

Chọn $f_3 = 5.f'_3 = 5(1,1,1,1) - 5(1,0,1,1) - (-2,3,1,1)$

$$= (5,5,5,5) - (5,0,5,5) - (-2,3,1,1) = (2,2,-1,-1).$$

Suy ra $F = \{f_1, f_2, f_3\}$ là họ trực giao.

Chia lần lượt f_1, f_2, f_3 cho độ dài của nó ta được họ trực chuẩn cần tìm

$$\mathbf{S}' = \left\{\mathbf{e_1} = \left(\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{3}}}, \mathbf{0}, \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{3}}}, \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{3}}}\right), \mathbf{e_2} = \left(\frac{\mathbf{-2}}{\sqrt{\mathbf{15}}}, \frac{\mathbf{3}}{\sqrt{\mathbf{15}}}, \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{15}}}, \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{15}}}\right), \mathbf{e_3} = \left(\frac{\mathbf{2}}{\sqrt{\mathbf{10}}}, \frac{\mathbf{2}}{\sqrt{\mathbf{10}}}, \frac{\mathbf{-1}}{\sqrt{\mathbf{10}}}, \frac{\mathbf{-1}}{\sqrt{\mathbf{10}}}\right)\right\}.$$

BÀI TẬP NHÓM

Trong R^4 cho:

$\boldsymbol{S = \{u_1 = (1, -1, 2, 0); u_2 = (2, 1, 3, 0); u_3 = (-1, 5, 0, 0)\}}$

*Dùng quá trình Gram-Schmidt biến đổi **S** thành một hệ vectơ trực chuẩn **S'** sao cho $<$ **S'** $>=<$ **S** $>$.*

ĐÁP ÁN

Đặt $f_1 = u_1 = (1,-1,2,0)$; $f_2' = u_2 - \frac{\langle u_2, f_1\rangle}{\|f_1\|^2} = (2,1,3,0) - \frac{7}{6}(1,-1,2,0)$.

Chọn $f_2 = 6f_2' = (12,6,18,0) - (7,-7,14,0) = (5;13;4;0)$.

$f_3' = u_3 - \frac{\langle u_3,, f_1\rangle}{\|f_1\|^2} \cdot f_1 - \frac{\langle u_3, f_2\rangle}{\|f_2\|^2} = (-1,5,0,0) - \frac{-6}{6}(1;-1,2,0) - \frac{60}{210}(5,13,4,0)$.

$= (-1,5,0,0) + 1(1,-1,2,0) - \frac{2}{7}(5,13,4,0)$

Chọn $f_3 = 7.f_3' = 7(-1,5,0,0) + 7(1,-1,2,0) - 2(5,13,4,0)$

$= (-7,35,0,0) + (7,-7,14,0) - (10,26,8,0) = (-10,2,6,0)$.

Suy ra $F = \{f_1, f_2, f_3\}$ là họ trực giao.

Chia lần lượt f_1, f_2, f_3 cho độ dài của nó ta được họ trực chuẩn cần tìm

$$S' = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{6}}; -\frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{2}{\sqrt{6}}; 0\right); \left(\frac{5}{\sqrt{210}}; \frac{13}{\sqrt{210}}; \frac{4}{\sqrt{210}}; 0\right); \left(\frac{-10}{2\sqrt{35}}; \frac{2}{2\sqrt{35}}; \frac{6}{2\sqrt{35}}; 0\right)\right\}$$

5. Không gian con bù trực giao

a) Các định nghĩa:

Cho W là không gian con của kgvt V. Trong kgvt V:

- Vectơ x gọi là trực giao với không gian con W nếu x trực giao với tất cả các vectơ của W. Ký hiệu $x \perp W$.
- Tập hợp tất cả các vectơ vuông góc với W gọi là tập hợp bù trực giao của W trong V. Ký hiệu: $W^{\perp} = \{x \in V | x \perp W\}$

b) Tính chất:

Cho W là không gian con của kgvt V. Khi đó:

- $W^{\perp}$ cũng là một không gian con của V và gọi là không gian bù trực giao của W.
- $dim(W^{\perp}) + dim(W) = dim(V)$ và $W \cap W^{\perp} = \{0\}$.
- Nếu $W = span(S)$ thì: $x \perp W$ khi và chỉ khi $x \perp S$.
- Với mỗi $x \in V$ đều tồn tại duy nhất một cặp vectơ $u \in W, v \in W^{\perp}$ sao cho $x = u + v$. Do đó V gọi là tổng trực tiếp của W và $W^{\perp}$.

Ký hiệu: $V = W \oplus W^{\perp}$.

❖ Bài toán: Cho không gian con W, tìm cơ sở và số chiều của $W^{\perp}$

B1. Tìm tập sinh $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ của W. Tức là $W =< \{\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \ldots, \boldsymbol{u_m}\} >$.

B2. Tìm không gian $W^{\perp}$.

Giả sử: $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in W^{\perp}$

$$\Leftrightarrow x \perp W \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{u_1} \\ \boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{u_2} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{u_m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u_1} \rangle = \boldsymbol{0} \\ \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u_2} \rangle = \boldsymbol{0} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u_m} \rangle = \boldsymbol{0} \end{cases} \quad (*)$$

Giải hệ pttt thuần nhất $(*)$ gồm m phương trình, n ẩn số $x_1, x_2, \ldots, x_n$ để tìm tập nghiệm. Vậy $W^{\perp}$ chính là không gian nghiệm của hệ $(*)$.

B3. Tìm một cơ sở của $W^{\perp}$ chính là hệ nghiệm cơ bản của $(*)$ và từ đó kết luận $\dim(W^{\perp})$.

❖**VD1: Cho W= $\{(a, b, a-b, 2a)|a, b \in R\}$ là kgvt con của kgvt $\mathbb{R}^4$ với tích vô hướng Euclide. Tìm cơ sở và số chiều của $W^{\perp}$.**

Giải

$$W = \{a(1,0,1,2) + b(0,1,-1,0)|a, b \in R\} = span(\{(1,0,1,2);(0,1,-1,0)\})$$

$\Longrightarrow$ *W có tập sinh là:* $\{u_1 = (1,0,1,2); u_2 = (0;1,-1,0)\}$.

Giả sử: $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in W^{\perp} \quad \Leftrightarrow \quad x \perp W \Leftrightarrow \begin{cases} x \perp u_1 \\ x \perp u_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \langle x, u_1 \rangle = 0 \\ \langle x, u_2 \rangle = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1x_1 + 0.x_2 + 1.x_3 + 2.x_4 = 0 \\ 0.x_1 + 1.x_2 - 1.x_3 + 0.x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 + 2.x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\alpha - 2\beta \\ x_2 = x_3 = \alpha \\ x_4 = \beta \end{cases} \quad (\alpha, \beta \in R)$$

Vậy $W^{\perp} = \{(-\alpha - 2\beta, \alpha, \alpha, \beta)/\alpha, \beta \in R\}$

$= \{\alpha(-1,1,1,0) + \beta(-2,0,0,1)\ /\alpha, \beta \in R\}$

$= span(\{v_1 = (-1,1,1,0); v_2(-2,0,0,1)\})$.

Dễ thấy rank$\{v_1; v_2\}$=2. *Vậy* $\{v_1; v_2\}$ *là một cơ sở của* $W^{\perp} \Rightarrow dim(W^{\perp})$=2.

❖**VD2:** **Cho họ vectơ S= $\{(1,1,1),(2,1,0),(1,0,-1)\}$ trong không gian R^3 với tích vô hướng Euclide. Tìm cơ sở và số chiều không gian bù trực giao của Span(S).**

Giải: $Đặt: u_1 = (1,1,1);\ u_2(2,1,0); u_3(1,0,-1).$

$\forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \langle \boldsymbol{S} \rangle^{\perp} \Leftrightarrow x \perp \langle \boldsymbol{S} \rangle$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \perp u_1 \\ x \perp u_2 \\ x \perp u_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x.u_1 = 0 \\ x.u_2 = 0 \\ x.u_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = & 0 \\ 2x_1 + x_2 & = & 0 \\ x_1 - x_3 & = & 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = & \alpha \\ x_2 = & -2\alpha \\ x_3 = & \alpha \end{cases} \Rightarrow \langle \boldsymbol{S} \rangle^{\perp} = \{\alpha(1,-2,1)/\alpha \in \mathrm{R}\} = span\{(1,-2,1)\}$$

Suy ra $\langle \boldsymbol{S} \rangle^{\perp}$ có một cơ sở là $\{(1,-2,1)\}$ và do đó $\boldsymbol{dim}(\langle \boldsymbol{S} \rangle^{\perp}) = 1.$

BÀI TẬP NHÓM

Trên không gian $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng Euclide, cho tập hợp

W$= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1 + x_2 + x_3 = 0, 2x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$.

a) CMR: W là một kgvt con của không gian $\mathbb{R}^3$.

b) Tìm cơ sở và số chiều của $W^{\perp}$.

BÀI TẬP VỀ NHÀ

<u>Câu 1</u>: Trong không gian $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng Euclide, cho họ vector

$$S = \{u_1 = (2-m, 1,2); u_2 = (4,2+m, -5), u_3 = (1, -2, m)\}$$

Hãy tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để S là họ véctơ trực giao. Tìm họ véctơ trực chuẩn từ họ S ứng với m vừa tìm được.

<u>Câu 2</u>: Trong không gian vector $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng thông thường, áp dụng quá trình Gram – Schmidt, hãy trực giao hóa họ vector sau:

$S = \{x = (1, -1,1), y = (0,1,2), z = (1,0,2)\}$.

<u>Câu 3</u>: Trong không gian vector $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng thông thường, áp dụng quá trình Gram – Schmidt, hãy trực giao hóa họ vector sau:

$$E = \{e_1 = (2,1,1), e_2 = (1,2,1), e_3 = (1,1,2)\}.$$

BÀI TẬP VỀ NHÀ

<u>Câu 4</u>: Trong $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng Euclide, cho họ vector:

$S = \{s_1 = (2,1,1); s_2 = (0,-1,1); s_3 = (m,n,1)\}$.

Tìm giá trị của các tham số m, n để S là một cơ sở trực giao của $\mathbb{R}^3$.

Tìm họ véc tơ trực chuẩn từ họ Sứng với m, n vừa tìm được.

<u>Câu 5</u>: Trong không gian $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng Euclide, cho cơ sở :

$$B = \{b_1 = (1,2,2); b_2 = (-2,0,1); b_3 = (-1,2,0)\}$$

Áp dụng quá trình Gram-Schmidt hãy trực giao cơ sở B.**<u>Câu 2</u>:** Trong không gian vector $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng thông thường, áp dụng quá trình Gram – Schmidt, hãy trực giao hóa họ vector sau:

$S = \{x = (1,-1,1), y = (0,1,2), z = (1,0,2)\}$.