BÀI TẬP VỀ NHÀ

Câu 1: Cho các ma trận: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & a \\ 0 & 4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -5 & a \end{bmatrix}$. Tính: $B^t A^t$.

Câu 2: Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & -a \\ a & 1 \end{bmatrix}$.

a) Tính $B = A.A^t$.

b) Khi a=2, Tìm ma trận X sao cho : $X.B = \begin{bmatrix} 15 & 65 \\ 25 & 15 \end{bmatrix}$.

Câu 3: Tìm tất cả các ma trận A vuông cấp 2 với phần tử thực, thỏa phương trình sau $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Câu 4: Tính A^n biết rằng $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$.

ĐÁP ÁN

Câu 1: Cho các ma trận: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & a \\ 0 & 4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -5 & a \end{bmatrix}$. Tính:

$B^t A^t$.

Giải

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}; B^t = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & -5 \\ a & -1 & a \end{bmatrix}.$$

$$B^t A^t = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 5 \\ 10 & 8 & 10 \\ -10 & 2 & -10 \\ 4a-2 & 3a-1 & 7a-1 \end{bmatrix}.$$

<u>Câu 2</u>: Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & -a \\ a & 1 \end{bmatrix}$.

a) Tính $B = A.A^t$.

b) Khi a=2 Tìm ma trận X sao cho : $X.B = \begin{bmatrix} 15 & 65 \\ 25 & 15 \end{bmatrix}$.

Giải

a) $B = A.A^t = \begin{bmatrix} 1 & -a \\ a & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & a \\ -a & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+a^2 & 0 \\ 0 & a^2+1 \end{bmatrix}$.

b) Khi a=2: $B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$.

Giả sử $X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ với $x,y,z,t \in R$. Theo giả thiết: $X.B = \begin{bmatrix} 15 & 65 \\ 25 & 15 \end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 65 \\ 25 & 15 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 5x & 5y \\ 5z & 5t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 65 \\ 25 & 15 \end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow x = 3; y = 13; z = 5; t = 3$. Vậy $X = \begin{bmatrix} 3 & 13 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$.

<u>Câu 3</u>: Tìm tất cả các ma trận A vuông cấp 2 với phần tử thực, thỏa phương trình sau $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Giải

Ma trận A có dạng: $A = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$.

Theo giả thiết $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + yz = 1 \\ xy + yt = 0 \\ zx + tz = 0 \\ zy + t^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + yz = 1 \\ y(x + t) = 0 \\ z(x + t) = 0 \\ zy + t^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + yz = 1 \\ y = 0 \text{ hoặc } x = -t \\ z = 0 \textit{ hoặc } x = -t \\ zy + t^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + yz = 1 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ zy + t^2 = 1 \end{cases} V \begin{cases} x^2 + yz = 1 \\ y = 0 \\ x = -t \\ zy + t^2 = 1 \end{cases} \mathrm{V} \begin{cases} x^2 + yz = 1 \\ \mathrm{x} = -\mathrm{t} \\ z = 0 \\ zy + t^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+0=1 \\ y=0 \\ z=0 \\ 0+t^2=1 \end{cases} V \begin{cases} x^2+0=1 \\ y=0 \\ x=-t \\ 0+t^2=1 \end{cases} V \begin{cases} x^2+0=1 \\ x=-t \\ z=0 \\ 0+t^2=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 1 \\ y=0 \\ z=0 \\ t=\pm 1 \end{cases} V \begin{cases} x=\pm 1 \\ y=0 \\ z \text{ tùy ý} \\ t=\mp 1 \end{cases} V \begin{cases} x=\pm 1 \\ y \text{ tùy ý} \\ z=0 \\ t=\mp 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow A=\begin{bmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix} \text{ hoặc } A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ z & -1 \end{bmatrix} \text{ hoặc } A=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ z & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{hoặc } A=\begin{bmatrix} 1 & y \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ hoặc } A=\begin{bmatrix} -1 & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \text{Với } y, z \in R.$$

Câu 4: Tính A^n biết rằng $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$.

Giải

$$\Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2;$$

- Nếu n chẵn $n = 2k$ thì:

$$A^n = A^{2k} = \left(A^2\right)^k = (I_2)^k = I_2.$$

- Nếu n lẻ: $n = 2k + 1$ thì:

$$A^n = A^{2k+1} = \left(A^2\right)^k . A = (I_2)^k . A = I_2 . \mathrm{A} = \mathrm{A}.$$