ĐỀ ÔN TẬP ĐẠI SỐ

ĐỀ 01

Câu 1: Cho các ma trận :

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&1&1\\3&1&4\end{bmatrix};B=\begin{bmatrix}-1&2&3&-a\\0&4&1&-1\\2&0&-5&-a\end{bmatrix}$$

a) Tính: $B^t A^t$

b) Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận A.

Câu 2: Cho hệ thuần nhất dưới đây:

$$\begin{cases}-mx+y+z=0\\x-my+z=0\\x+y-mz=0\end{cases}$$

a) Tìm m để hệ có nghiệm không tầm thường.

b) Giải hệ khi m=2.

Câu 3: Tìm số chiều và một cơ sở của không gian con sinh bởi họ vector sau:

$$S=\{(1,2,0,2);(2-,1,-3,0);(3,1,4,-2);(6,7,18,-4)\}$$

Câu 4: Trong không gian $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng Euclide, cho họ vector

$$S=\{u_1=(2+m,1,2);u_2=(4,2-m,-5),u_3=(1,-2,-m)\}$$

a) Hãy tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để S là họ véctơ trực giao.

b) Tìm họ véctơ trực chuẩn từ họ S ứng với m vừa tìm được.

Câu 5: Cho ma trận $A=\begin{pmatrix}1&-2\\1&4\end{pmatrix}$. Tìm ma trận P sao cho $P^{-1}AP$ có dạng chéo.

ĐỀ 2

Câu 1:

Cho các ma trận :

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&1&1\\3&1&4\end{bmatrix};B=\begin{bmatrix}-1&2&3&-m\\0&4&1&-1\\2&0&-5&-m\end{bmatrix}$$

a) Tính A.B

b) Tính $\det(A^{10})$

Câu 2:

Cho hệ thuần nhất dưới đây:

$$\begin{cases}mx+y+z=0\\x+my+z=0\\x+y+mz=0\end{cases}$$

a) Tìm m để hệ có nghiệm không tầm thường.

b) Giải hệ khi m=-2.

Câu 3:

Tìm hạng của họ vector sau đây trong $\mathbb{R}^4$

$S=\{u_1=(4,-5,2,6);u_2=(2,-3,1,3);u_3=(2,-1,1,3);u_4=(4,-1,5,6)\}$

Câu 4:

Gọi W là không gian nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x+2y+z-6t=0 \\ 3x+5y+4z+7t=0 \\ x+y+2z+19t=0 \end{cases}$$

Tìm cơ sở và số chiều của W.

Câu 5:

Cho ma trận $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Hãy chéo hóa ma trận A.

ĐỀ SỐ 03

Câu 1:

Cho ma trận :

$$A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{bmatrix}$$

a) Tính det(A)

b) Chứng minh rằng nếu a = b = c hoặc a +b+c = 0 thì ma trận A không khả nghịch.

Câu 2:

Giải hệ sau bằng phương pháp Gauss :

$$\begin{cases} x+y+2z-t=1 \\ x-y+2z+t=3 \\ x+y+4z-t=2 \end{cases}$$

Câu 3:

Tìm hạng của họ vector sau đây trong $\mathbb{R}^4$

$S=\{u_1=(4,-5,2,6);u_2=(2,-3,1,3);u_3=(2,-1,1,3);u_4=(4,-1,5,6)\}$

Câu 4:

Gọi W là không gian nghiệm của hệ

$$\begin{cases} -7a+5b+4c=0 \\ 6a-7b+c=0 \\ a+2b-5c=0 \end{cases}$$

a. Tìm số chiều của W

b. Tìm $(a,b,c)\in \mathrm{W}:\ a+b+c=1$

Câu 5:

Cho ma trận $A=\begin{pmatrix}-1 & -2 & -2\\ 2 & 3 & 2\\ -1 & -2 & -2\end{pmatrix}$

a) Tìm các giá trị riêng của A.

b) Tìm số chiều và 1 cơ sở của không gian riêng ứng với giá trị riêng lớn nhất của A.

ĐỀ SỐ 04

Câu 1:

Giải phương trình ma trận :

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 0\\ 3 & 0 & 0\end{bmatrix}X=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 2\\ 2 & 3 & 4 & -1\\ 0 & -3 & 2 & 6\end{bmatrix}$$

Câu 2:

Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Gauss :

$$\begin{cases}x+2y-3z=a\\ 3x+2y-4z=b\\ 2x-y=c\end{cases}$$

(a,b,c: tham số)

Câu 3:

Tìm hạng của họ vector sau:

$S=\{\alpha_1=(1,0,2,1);\alpha_2=(0,-1,3,0);\alpha_3=(2,1,1,2);\alpha_4=(-1,1,4,3)\}$

Câu 4:

Gọi W là không gian nghiệm của hệ

$$\begin{cases}-7a+5b+4c=0\\ 6a-7b+c=0\\ a+2b-5c=0\end{cases}$$

a. Tìm số chiều của W

b. Tìm $(a,b,c)\in \mathrm{W}:\ a+b+c=1$

Câu 5:

Chéo hóa hóa ma trận $A=\begin{pmatrix}-3 & 2 & 2\\ 2 & -3 & 2\\ 2 & 2 & -3\end{pmatrix}$.

ĐỀ SỐ 05

Câu 1:

Tính định thức :

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a \end{vmatrix}$$

Câu 2:

Giải và biện luận hệ sau bằng phương pháp Gauss:

$$\begin{cases} x - y + z = 4 \\ x + 4y + 2z = 1 \\ x - y + az = 2(a+1) \end{cases} \quad \text{(a: tham số)}$$

Câu 3:

Trong không gian $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng Euclide, cho họ vector sau:

$$S = \{u_1 = (1, m, 2); u_2 = (-1,1,0); u_3 = (2,-1,1)\}$$

a) Tìm điều kiện của tham số thực m để S là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

Với $m = 2$, Tìm tọa độ của véc tơ $u = (1,2,3)$ đối với S

Câu 4:

Trong không gian vector $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng thông thường, áp dụng quá trình Gram – Schmidt, hãy trực giao hóa họ vector sau:

$S = \{x = (1,-1,1), y = (0,1,2), z = (1,0,2)\}$.

Câu 5:

Tìm tất cả các giá trị riêng thực của ma trận:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ĐỀ 06

Câu 1:

Giải phương trình :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & x \\ 4 & 9 & 16 & x^2 \\ 8 & 27 & 64 & x^3 \end{vmatrix} = 0$$

Câu 2:

Tính hạng của ma trận :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & -3 \\ 3 & 6 & 5 & -8 & 13 \\ 4 & 8 & 5 & 1 & -1 \\ -2 & -4 & -3 & 3 & -5 \end{bmatrix}$$

Câu 3:

Trong không gian $\mathbb{R}^3$ cho họ véc tơ

$$S = \{v_1 = (2;1;m), v_2 = (0;-m;1); v_3 = (m;1;0)\}$$

a) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để họ S phụ thuộc tuyến tính.

Chứng tỏ rằng với $m = 2$ thì S là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

Câu 4:

Trong không gian vector $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng thông thường, áp dụng quá trình Gram – Schmidt, hãy trực giao hóa họ vector sau:

$$E = \{e_1 = (2,1,1), e_2 = (1,2,1), e_3 = (1,1,2)\}.$$

Câu 5:

Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -2 \\ -26 & -2 & 14 \\ 8 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

Chứng minh rằng ma trận $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -10 & -4 & -3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ làm chéo hóa ma trận A. Từ kết quả này hãy chỉ ra các giá trị riêng của ma trận A

ĐỀ 07

Câu 1:

Tính giá trị biểu thức :

$$F = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & bc \\ 1 & b & c \\ 1 & c & b \end{vmatrix}}{(1-b)(b-c)(c-1)}$$

Câu 2:

Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Gauss :

$$\begin{cases} x+y-3z=-1 \\ x+y+z=3 \\ 2x+y-2z=1 \\ x+2y-3z=1 \end{cases}$$

Câu 3:

Cho $W=\{u=(a+3b+2c,-a+2b+13c,2a-4b-26c):a,b,c\in\mathbb{R}\}$ là không gian vector con của $\mathbb{R}^3$. Tìm số chiều và một cơ sở của W.

Câu 4:

Trong $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng Euclide, cho họ vector:

$$S=\{s_1=(2,1,1);s_2=(0,-1,1);s_3=(m,n,1)\}.$$

- **a)** Tìm giá trị của các tham số m,n để S là một cơ sở trực giao của $\mathbb{R}^3$.
- **b)** Tìm họ véc tơ trực chuẩn từ họ S ứng với m,n vừa tìm được.

Câu 5:

Cho ma trận $A=\begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 7 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

- **a)** Tìm tất cả các giá trị riêng thực của ma trận A.
- **b)** Vector $v=(7,7,-7)$ có là một vector riêng của ma trận A tương ứng với một giá trị riêng nào đó hay không? Tại sao?

ĐỀ 08

Câu 1:

Tìm ma trận X thoả mãn hệ thức :

$$X\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Câu 2:

Cho ma trận : $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

Tìm A^{-1}. Từ đó suy ra nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+2y+3z=1 \\ 3y+z=2 \end{cases}$

Câu 3:

Trong không gian vector $\mathbb{R}^3$, cho họ vector

$$S = \{u_1 = (-1;1;-2),\ u_2 = (0;3;1),\ u_3 = (4;-3;0)\}$$

a) Chứng minh rằng S là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

b) Tìm $[v]_S$ biết $v = (17;-5;-2) \in \mathbb{R}^3$.

Câu 4:

Trong không gian $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng Euclide, cho cơ sở :

$$B = \{b_1 = (1,2,2); b_2 = (-2,0,1); b_3 = (-1,2,0)\}$$

Áp dụng quá trình Gram-Schmidt hãy trực giao cơ sở B.

Câu 5:

Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

a) Tìm tất cả các giá trị riêng thực của ma trận A.

b) Vector $v = (-1,-3,4)$ có là một vector riêng của ma trận A tương ứng với một giá trị riêng nào đó hay không? Tại sao?

ĐỀ 09

Câu 1:

Cho ma trận :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -m \\ m & 1 \end{bmatrix}$$

a) Tính B = A.A^t.

b) Khi m=2, Tìm ma trận X sao cho : XB = $\begin{bmatrix} 15 & 65 \\ 25 & 15 \end{bmatrix}$

Câu 2:

Biện luận hạng của ma trận sau theo m :

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & m & 1 \\ -1 & 1 & -1 & m \end{bmatrix}$$

Câu 3:

Tập hợp nào sau đây là không gian vector con của không gian vector $\mathbb{R}^3$? Tại sao ?

a) $S_1 = \left\{ u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = \dfrac{y+z}{2} \right\}$

b) $S_2 = \left\{ u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 = \dfrac{y^2 + z^2}{2} \right\}$

Câu 4:

Tìm số chiều và một cơ sở cho không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất sau:

$$\begin{cases} x + 2y + z - t = 0 \\ -x - y + z + t = 0 \\ 2x + z + t = 0 \end{cases}$$

Câu 5:

Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

a) Tìm các giá trị riêng của A.

b) Tìm một vector riêng ứng với giá trị riêng nhỏ nhất của A.

ĐỀ 10

Câu 1:

Cho ma trận: $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

Tìm $\det(A^2)$

Câu 2:

Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Gauss :

$$\begin{cases} x - 2y + z - t + u = 0 \\ 3x - 2y - z + t - 2u = -1 \\ 2x + y - z + 2t - 3u = 1 \\ 2x - 5y + z - 2t + 2u = -2 \end{cases}$$

Câu 3:

Trong $\mathbb{R}^3$ cho tập hợp:

$W = \left\{ u = (a, b, c) : a^2 + b^2 = c^2 \right\} \subset \mathbb{R}^3$

a) Hãy chỉ ra 5 phần tử thuộc W .

b) Tập hợp W có là không gian con của $\mathbb{R}^3$ không? Tại sao?

Câu 4:

Tìm số chiều và một cơ sở cho không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất sau:

$$\begin{cases} x-2y-z+t+2u=0 \\ -2x+3y-t+u=0 \\ 4y+8z-4t+12u=0 \end{cases}$$

Câu 5:

Cho ma trận $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ m & 1 & m \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Tìm đa thức đặc trưng $P_A(x)=\det\left(A-x.I_3\right)$ của A theo tham số thực m.

b) Tìm m để $x=1$ là một giá trị riêng của A và tìm tất cả các giá trị riêng còn lại của A.