

Giải thuật qui hoạch động

Dynamic programming

Nguyễn Văn Huy

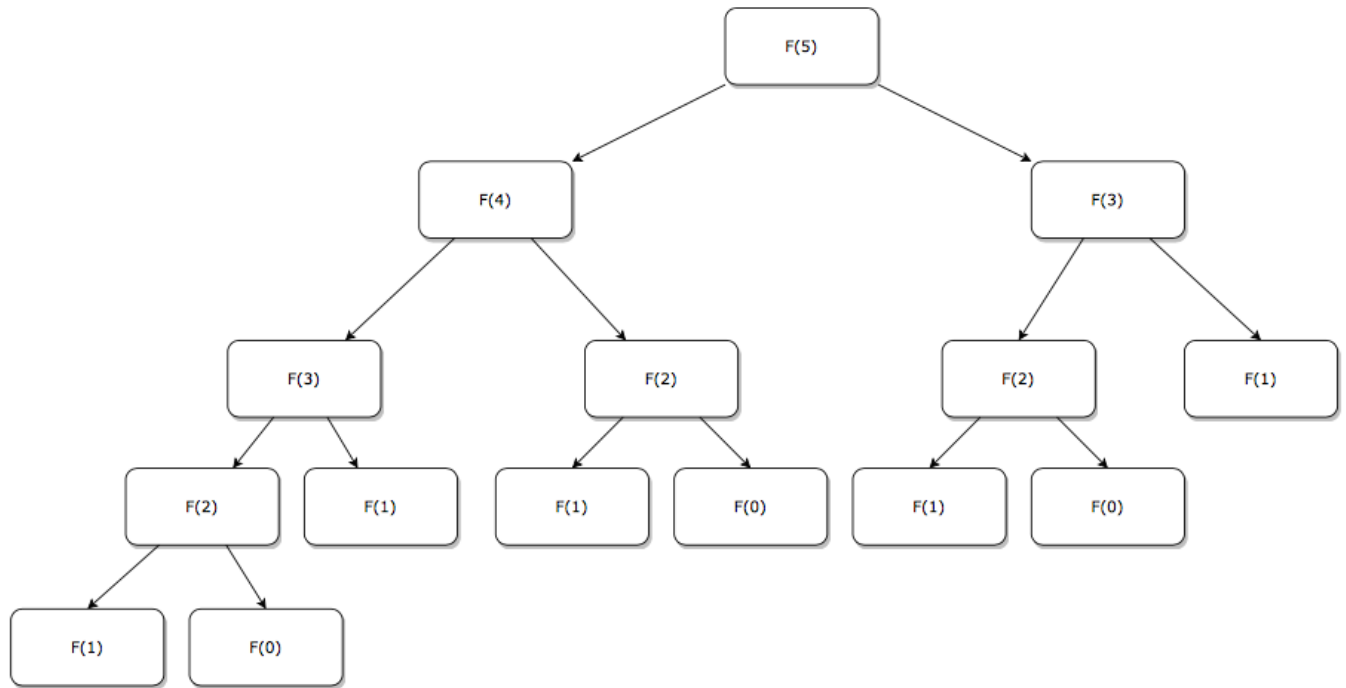
huyite.vn@gmail.com

Ngày 28 tháng 3 năm 2024

Outline

- 1 Giới thiệu
- 2 Giải bài toán quy hoạch động
- 3 Bài tập

- giải bài toán tối ưu có bản chất đệ quy, có thể đưa về tìm phương án tối ưu của một số hữu hạn các bài toán con.
- chia bài toán lớn thành các bài toán con, các bài toán con có tính chất gối đầu nhau
- giải của các bài toán con và lưu vào bộ nhớ (thường là một mảng),
- sau đó lấy lời giải của bài toán con ở trong mảng đã tính trước để giải bài toán lớn



Giải bài toán quy hoạch động

- Xác định công thức truy hồi
- Xây dựng mảng
- Cài đặt giải thuật

Công thức truy hồi

Fibonacci

$$F[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 1 & n = 1 \\ F[n - 1] + F[n - 2] & n > 1 \end{cases}, \quad (1)$$

Cấu trúc mảng

Xây dựng mảng



Recursive

Algorithm 1: $F(n)$

Input: Some non-negative integer n

Output: The n th number in the Fibonacci Sequence

if $n \leq 1$ **then**

return n

else

return $F(n - 1) + F(n - 2)$;

Dynamic programming

Algorithm 2: $F(n)$

Input: Some non-negative integer n

Output: The n th number in the Fibonacci Sequence

$A[0] \leftarrow 0$; Rendered by QuickLaTeX.com

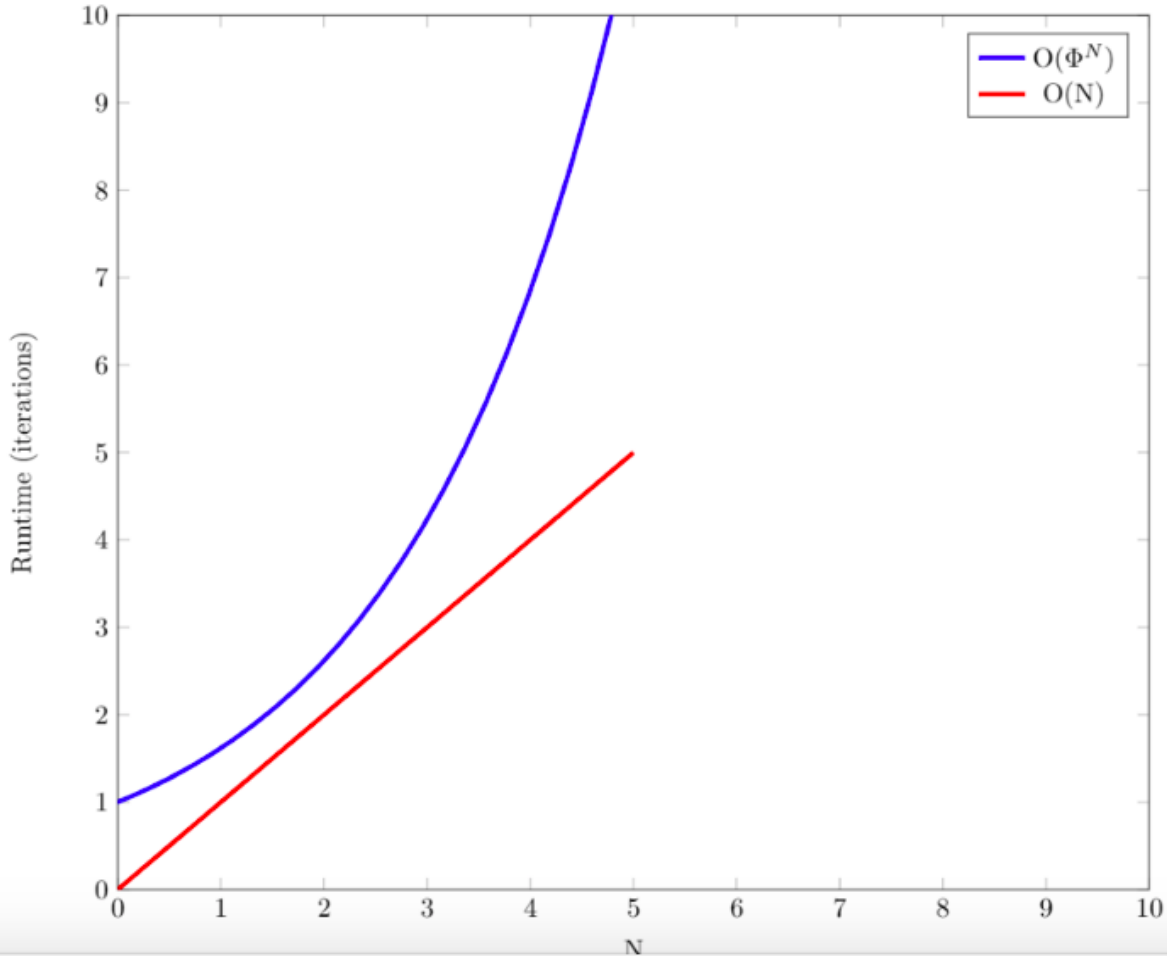
$A[1] \leftarrow 1$;

for $i \leftarrow 2$ **to** $n - 1$ **do**

$A[i] \leftarrow A[i - 1] + A[i - 2]$;

return $A[n - 1]$

Complexity



Bài toán phân tích số- Partition

Cho một số tự nhiên $n \leq 100$. Hãy cho biết có bao nhiêu cách phân tích số n thành tổng của các dãy số nguyên dương, trong đó các cách phân tích là hoán vị của nhau chỉ tính là một cách.

Công thức truy hồi

$$P[i, j] = \begin{cases} 1 & \text{if } i \in [0, n], j = 0, \\ 0 & \text{if } i = 0, j \in [1, n], \\ P[i - 1, j] + P[i, j - i] \times \boxed{j \geq i} & \text{if } i, j \in [1, n]. \end{cases}$$

Table

$P[i, j]$	0	1	2	3	4	5
0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	2	2	3	3
3	1	1	2	3	4	5
4	1	1	2	3	5	6
5	1	1	2	3	5	7

PARTITIONS(n)

Input: A natural number n .

Output: Partitions of n .

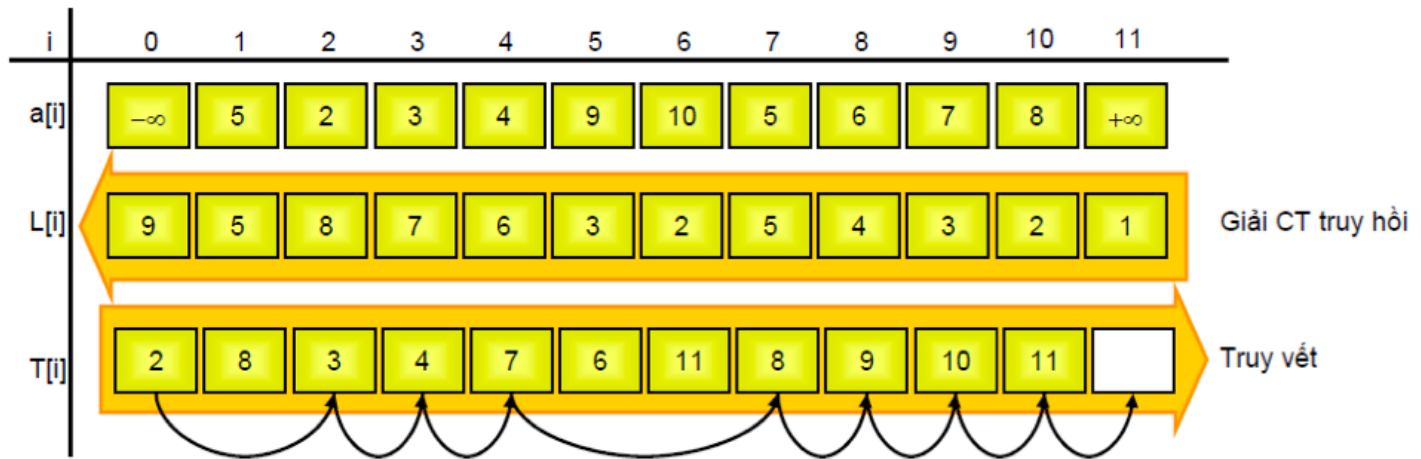
1. **for** $i \leftarrow 0$ **to** n **then** $P[i, 0] \leftarrow 1$
2. **for** $j \leftarrow 1$ **to** n **then** $P[0, j] \leftarrow 0$
3. **for** $i \leftarrow 1$ **to** n **do**
4. **for** $j \leftarrow 1$ **to** $i - 1$ **do** $P[i, j] \leftarrow P[i - 1, j]$
5. **for** $j \leftarrow i$ **to** n **do** $P[i, j] \leftarrow P[i - 1, j] + P[i, j - i]$
6. **return** $P[n, n]$

Bài toán dãy con dài nhất

- Cho dãy số nguyên A có n phần tử. Tìm dãy con đơn điệu tăng của A có độ dài lớn nhất.
- Ví dụ: $A = (1, 2, 3, 4, 9, 10, 5, 6, 7)$. Dãy con đơn điệu tăng dài nhất là $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$

Công thức truy hồi

$$L[i] = \max_{\substack{i < j \leq n-1 \\ a[i] < a[j]}} L[j] + 1$$



- ❶ Tính giai thừa bằng phương pháp quy hoạch động
- ❷ Tính tổ hợp chập k của n bằng phương pháp quy hoạch động

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} \quad (2)$$

- ❸ Giải bài toán Knapsack bằng phương pháp quy hoạch động

Knapsack

Có n đồ vật, vật thứ i có trọng lượng A_i và giá trị B_i . Hãy chọn ra một số các đồ vật, mỗi vật một cái để xếp vào 1 vali có trọng lượng tối đa W sao cho tổng giá trị của vali là lớn nhất.

- $L(i, j)$: tổng giá trị lớn nhất của vali khi xét từ vật 1 .. vật i và trọng lượng của vali chưa vượt quá j
- Chú ý rằng khi xét đến $L[i, j]$ thì các giá trị trên bảng phương án đều đã được tối ưu.

Tính $L(i,j)$: vật đang xét là ai với trọng lượng của vali không được quá j . Có 2 khả năng xảy ra:

- Nếu chọn A_i đưa vào vali, trọng lượng vali trước đó phải không quá $j - A_i$. Vì mỗi vật chỉ được chọn 1 lần nên giá trị lớn nhất của vali lúc đó là $L(i - 1, j - A_i) + B_i$.
- Nếu không chọn A_i , trọng lượng của vali là như cũ (như lúc trước khi chọn A_i): $L(i - 1, j)$.

$$L[i, j] = \max(L(i - 1, j - A_i) + B_i, L(i - 1, j)) \quad (3)$$

Dãy con có tổng bằng S

Cho dãy A_1, A_2, \dots, A_N . Tìm một dãy con của dãy đó có tổng bằng S .

- Đặt $L[i, t] = 1$ nếu có thể tạo ra tổng t từ một dãy con của dãy gồm các phần tử A_1, A_2, \dots, A_i . Ngược lại thì $L[i, t] = 0$.
- Nếu $L[n, S] = 1$ thì đáp án của bài toán trên là “có”.
- Ta có thể tính $L[i, t]$ theo công thức: $L[i, t] = 1$ nếu $L[i - 1, t] = 1$ hoặc $L[i - 1, t - A[i]] = 1$.

Bài tập ứng dụng

- 1 Một xâu gọi là xâu đối xứng (palindrome) nếu xâu đó đọc từ trái sang phải hay từ phải sang trái đều như nhau. Cho một xâu S , hãy tìm số kí tự ít nhất cần thêm vào S để S trở thành xâu đối xứng.
- 2 Ở đất nước Omega người ta chỉ tiêu tiền xu. Có N loại tiền xu, loại thứ i có mệnh giá là A_i đồng. Một người khách du lịch đến Omega du lịch với số tiền M đồng. Ông ta muốn đổi số tiền đó ra tiền xu Omega để tiện tiêu dùng. Ông ta cũng muốn số đồng tiền đổi được là ít nhất (cho túi tiền đỡ nặng khi đi đây đi đó). Bạn hãy giúp ông ta tìm cách đổi tiền.
- 3 Có n cuộc họp, cuộc họp thứ i bắt đầu vào thời điểm A_i và kết thúc ở thời điểm B_i . Do chỉ có một phòng hội thảo nên 2 cuộc họp bất kì sẽ được cùng bố trí phục vụ nếu khoảng thời gian làm việc của chúng chỉ giao nhau tại đầu mút. Hãy bố trí phòng họp để phục vụ được nhiều cuộc họp nhất.