

BÀI TẬP ÔN THI MÔN TOÁN RỜI RẠC

Bài 1: Có bao nhiêu cách chọn 20 tờ giấy bạc từ các loại tiền 1 đồng, 2 đồng, 5 đồng, 10 đồng và 20 đồng? Nếu yêu cầu thêm có ít nhất 7 tờ 5 đồng và không quá 8 tờ 20 đồng thì có bao nhiêu cách chọn?

Gọi số tờ tiền của các loại tiền 1 đồng, 2 đồng, 5 đồng, 10 đồng và 20 đồng lần lượt là:

$x_1, x_2, x_5, x_{10}, x_{20}$. Theo đề bài, ta có phương trình sau:

$$x_1 + x_2 + x_5 + x_{10} + x_{20} = 20 \text{ với } x_1, x_2, x_{10} \geq 0; x_5 \geq 7; 0 \leq x_{20} \leq 8 \quad (1)$$

Số cách chọn thỏa yêu cầu của đề bài cũng là số nghiệm nguyên của phương trình (1).

Đổi biến:

$$x'_5 = x_5 - 7 \geq 0$$

Xét phương trình:

$$x_1 + x_2 + x'_5 + x_{10} + x_{20} = 20 - 7 = 13 \text{ với } x_1, x_2, x_{10}, x'_5, x_{20} \geq 0 \quad (I)$$

Số nghiệm phương trình (I) là $K_5^{13} = C_{13+5-1}^{5-1} = C_{17}^4$

Xét phương trình:

$$x_1 + x_2 + x'_5 + x_{10} + x_{20} = 13 \text{ với } x_1, x_2, x_{10}, x'_5 \geq 0; x_{20} \geq 9 \quad (II)$$

Đổi biến:

$$x'_{20} = x_{20} - 9 \geq 0$$

Phương trình (II) tương đương

$$x_1 + x_2 + x'_5 + x_{10} + x'_{20} = 13 - 9 = 4 \text{ với } x_1, x_2, x_{10}, x'_5, x'_{20} \geq 0$$

Số nghiệm phương trình (II) là $K_5^4 = C_{4+5-1}^{5-1} = C_8^4$

Ta có: Số nghiệm phương trình (1) = Số nghiệm phương trình (I) – Số nghiệm phương trình (II)

$$= C_{17}^4 - C_8^4 = 2380 - 70 = 2310$$

Vậy số cách chọn thỏa yêu cầu đề bài là 2310 cách.

Bài 2: Tìm hệ số của đơn thức

a) xy^2z^3t khi khai triển $(x + 2y - z + 4t - 5u)^7$

b) $x^3y^9z^4t^3$ khi khai triển $(2x - y^3 - 3z^2 + 4t^3)^9$

a) Đặt:

$$a = x;$$

$$b = 2y;$$

$$c = -z;$$

$$d = 4t;$$

$$e = -5u;$$

Ta có:

$$\begin{aligned}(x + 2y - z + 4t - 5u)^7 &= (a + b + c + d + e)^7 = \\ P_7^*(1,2,3,1,0) a^1 b^2 c^3 d^1 e^0 + \dots &= \frac{7!}{1!2!3!1!0!} x^1 (2y)^2 (-z)^3 (4t)^1 (-5u)^0 + \\ \dots &= -6720(xy^2z^3t) + \dots\end{aligned}$$

Vậy hệ số cần tìm là: -6720

b) Đặt:

$$a = 2x;$$

$$b = -y^3$$

$$c = -3z^2$$

$$d = 4t^3$$

Ta có:

$$\begin{aligned}(2x - y^3 - 3z^2 + 4t^3)^9 &= (a + b + c + d)^9 = \\ P_9^*(3,3,2,1) a^3 b^3 c^2 d^1 + \dots &= \frac{9!}{3!3!2!1!} (2x)^3 (-y^3)^3 (-3z^2)^2 (4t^3)^1 + \\ \dots &= -1451520(x^3y^9z^4t^3)\end{aligned}$$

Vậy hệ số cần tìm là: -1451520

Bài 3: Tìm số nghiệm nguyên không âm của bất phương trình: $x + y + z \leq 19$

Đặt $t = 19 - (x + y + z) \geq 0$

Phương trình đã cho tương đương:

$x + y + z + t = 19$ với $x, y, z, t \geq 0$

Số nghiệm của phương trình là $K_4^{19} = C_{22}^3 = 1540$ nghiệm

Bài 4: Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình: $x + y + z + t > -20$ trong đó $x < 1, y \leq 4, z \leq -3$ và $t < 6$

$$\text{Đặt } x' = -x \geq 0 \Rightarrow x = -x'$$

$$\text{Đặt } y' = -(y - 4) = -y + 4 \geq 0 \Rightarrow y = 4 - y'$$

$$\text{Đặt } z' = -(z + 3) = -z - 3 \geq 0 \Rightarrow z = -3 - z'$$

$$\text{Đặt } t' = -(t - 5) = -t + 5 \geq 0 \Rightarrow t = 5 - t'$$

Khi đó bất phương trình trở thành

$$-x' + 4 - y' - 3 - z' + 5 - t' \geq -19$$

$$\Leftrightarrow x' + y' + z' + t' \leq 19 + 4 - 3 + 5 = 25 \quad (1)$$

Đặt $k = 25 - (x' + y' + z' + t') \geq 0 \in \mathbb{Z}$, Bất phương trình (1) sẽ có cùng số nghiệm với phương trình

$$x' + y' + z' + t' + k = 25$$

Phương trình trên có số nghiệm tương ứng là $K_5^{25} = C_{25+5-1}^{5-1} = C_{29}^4 = 23751$

Vậy bất phương trình đề bài cho có 23751 nghiệm

Bài 5: Tính tổng số sau theo n nguyên:

$$S_n = \sum_{k=0}^n (k+1)(k+2)2^k \quad (n \geq 0)$$

$$\text{Ta thấy } S_n = \sum_{k=0}^n (k+1)(k+2)2^k$$

$$= (n+1)(n+2)2^n + \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)(k+2)2^k$$

$$= S_{n-1} + (n+1)(n+2) \cdot 2^n$$

$$\text{Ta có } S_0 = 1 \cdot 2 \cdot 1 = 2$$

Ta sẽ giải hệ thức đệ quy

$$\begin{cases} S_n = S_{n-1} + (n+1)(n+2)2^n \text{ (với } n \geq 1) (*) \\ S_0 = 2 (**) \end{cases}$$

Ta thấy (1) là hệ thức đệ quy không thuần nhất có dạng

$$S_n = \lambda S_{n-1} + \varphi_2(n)\alpha^n \text{ (với } n \geq 1)$$

Với $\lambda = 1$, $\varphi_2(n) = (n+1)(n+2)$ có $\deg(\varphi_2) = 2$ và $\alpha = 2$

Xét hệ thức đệ quy thuần nhất của (*)

$$S_n = S_{n-1} \text{ với } n \geq 1 \quad (\square)$$

Ta có (\square) là hệ thức đệ quy cấp 1 có dạng $S_n = \lambda S_{n-1}$ với $\lambda = 1$, có nghiệm tổng quát $s'_n = p \cdot \lambda^n = p$ với $p \in \mathbb{R}$ và $n \geq 0$

Do $\lambda \neq \alpha$ nên (*) có một nghiệm cụ thể dạng:

$$s''_n = \psi_2(n)2^n \text{ (với } n \geq 0)$$

Với $\deg(\psi_2) = 2$. Giả sử $\psi_2(n) = a \cdot n^2 + b \cdot n + c$ với $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$

Thay s'' vào (*) ta có

$$\begin{aligned} (a n^2 + b n + c) \cdot 2^n \\ = (a(n-1)^2 + b(n-1) + c) \cdot 2^{n-1} + (n+1) \cdot (n+2) \cdot 2^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow 2a n^2 + 2b n + 2c \\ &\quad = a(n^2 - 2n + 1) + b n - b + c + 2 * (n^2 + 3n + 2) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 2a n^2 + 2b n + 2c = (a + 2)n^2 + (-2a + b + 6) * n + a - b + c + 4$$

Đồng nhất phương trình trên ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} 2a = a + 2 \\ 2b = -2a + b + 6 \\ 2c = a - b + c + 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \\ c = 4 \end{cases}$$

Vậy $s''(n) = (2n^2 + 2n + 4)2^n$ (với $n \geq 0$)

Khi đó ta có nghiệm tổng quát của $S_n = s'_n + s''_n = p + (2n^2 + 2n + 4)2^n$ (với $n \geq 0$)

Thay vào (**) ta có $p + 4 = 2 \Rightarrow p = -2$. Vậy $S_n = -2 + (2n^2 + 2n + 4)2^n$ (với $n \geq 0$)

Bài 6: Giải hệ thức đệ quy sau:

$$\begin{cases} x_n + 4x_{n-1} - 5x_{n-2} = 12n + 8 \text{ (với } n \geq 2) \text{ (*)} \\ x_0 = 0, x_1 = -5 \text{ (**)} \end{cases}$$

Ta thấy hệ thức đề bài cho là một hệ thức đệ quy bậc 2 không đồng nhất có dạng

$$\begin{cases} x_n + \lambda x_{n-1} + \mu x_{n-2} = \varphi_1(n) \text{ (với } n \geq 2) \alpha^n \\ x_0 = 0, x_1 = -5 \end{cases}$$

Với $\lambda = 4, \mu = -5, \varphi_1(n) = 12n + 8$ có $\deg(\varphi_1) = 1, \alpha = 1$

Xét hệ thức đệ quy đồng nhất tương ứng của (*)

$$x_n + 4x_{n-1} - 5x_{n-2} = 0 \text{ (với } n \geq 2) \text{ (}\square\text{)}$$

Khi đó (□) có tam thức tương ứng là $f(x) = x^2 + 4x - 5$

Vì $f(x) = 0$ có 2 nghiệm $x = 1$ và $x = -5$

Nên (□) sẽ có nghiệm tổng quát là

$$x'_n = p * 1^n + q(-5)^n = p + q(-5)^n \text{ (với } n \geq 0)$$

Với $p, q \in \mathbb{R}$

Ta lại có $f(\alpha) = f(1) = 0$ và $f'(\alpha) = 2 * 1 + 4 = 6 \neq 0$ nên (*) có một nghiệm cụ thể dạng:

$$x''_n = n \psi_1(n) \text{ (với } n \geq 0)$$

Với $\deg(\psi_1) = 1$, giả sử $\psi_1(n) = a n + b$ với $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$

Thay x'' vào (*), ta có $n(a n + b) + 4(n - 1)[a(n - 1) + b] - 5(n - 2)[a(n - 2) + b] = 12n + 8$

$$\Leftrightarrow a n^2 + b n + 4a(n^2 - 2n + 1) + 4b(n - 1) - 5a(n^2 - 4n + 4) - 5b(n - 2) - 12n - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a + 4a - 5a)n^2 + (b - 8a + 4b + 20a - 5b - 12)n + 4a - 4b - 20a + 10b - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow (12a - 12)n - 16a + 6b - 8 = 0$$

Đồng nhất hệ số phương trình trên ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases} 12a - 12 = 0 \\ -16a + 6b - 8 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \end{cases}$$

Vậy $x_n'' = n * (n + 4)$ (với $n \geq 0$)

Khi đó $x_n = x_n' + x_n'' = p + q(-5)^n + n * (n + 4)$ (với $n \geq 0$)

Thay x_n vào (**) ta được hệ $\begin{cases} p+q=0 \\ p-5q+1*5=-5 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p + q = 0 \\ p - 5q = -10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p = -\frac{5}{3} \\ q = \frac{5}{3} \end{cases}$$

Khi đó $x_n = -\frac{5}{3} + \frac{5}{3}(-5)^n + n * (n + 4)$ với $n \geq 0$