# HÀM SINH VÀ ỨNG DỤNG

Phạm Thế Bảo
Khoa Toán – Tin học
Trường Đại học Khoa học Tự nhiên Tp.HCM

## Giới thiệu

- Bài toán: có 12 trái táo chia cho 03 bạn A, B, C. Theo qui định: A lấy ít nhất 04 trái, B và C lấy ít nhất 02 trái, C không lấy quá 05 trái. Vậy, có bao nhiêu cách chia?

  Giải: gọi a, b, c là số táo của các bạn A, B, C được chia. Ta có:

$$\begin{cases} a+b+c=12 \\ a \geq 4 \\ b \geq 2 \\ 5 \geq c \geq 2 \end{cases} \qquad (*)$$

Số cách chia táo chính là số nghiệm của phương trình (*)

- Hay gọi G={a+b+c=12/ a≥4, b ≥2, 5≥c ≥2}. Thì |G|=số lời giải. Ta đặt H={$x^{a+b+c}$/ a,b,c∈N, $x^{a+b+c} = x^{12}$, a≥4, b ≥2, 5≥c ≥2} thì |G|= |H| → cần tìm |H| → chính là hệ số của $x^{12}$ trong phương trình
  $f(x)=(x^4+x^5+...)(x^2+x^3+...)(x^2+ ... +x^5)$
  $$= \sum_{\substack{4\le a\le\infty \\ 2\le b\le\infty \\ 2\le c\le 5}} x^{a+b+c} = \sum_{k=8} a_k x^k$$

  Khi k=12 thì $a_k$ chính là giá trị cần tìm → mục tiêu của bài toán là tìm khai triển của f(x).



# Chuỗi lũy thừa

- Xét chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ với $a_n \in C$ nếu

  $S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ hội tụ về G(z) thì chuỗi hội tụ và

  $G(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$
- Cho dãy số $\{a_n\}^{\infty}_{n=0}$. Hàm sinh của dãy này là chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

- Quay lại bài toán chia táo. Thay vì 4≤a≤∞ và 2≤b≤∞ ta cũng có thể viết 4≤a≤8 và 2≤b≤6. Thì:

$$f(z) = \left(\sum_{a=4}^{8} z^a\right)\left(\sum_{b=2}^{6} z^b\right)\left(\sum_{c=2}^{5} z^c\right)$$

$$= z^4(1+z+z^2+z^3+z^4)z^2(1+z+z^2+z^3+z^4)z^2(1+z+z^2+z^3)$$

$$= z^8(1+z+z^2+z^3+z^4)^2(1+z+z^2+z^3)$$

$$= z^8\left(\frac{1-z^5}{1-z}\right)^2\left(\frac{1-z^4}{1-z}\right) = z^8(1-z^5)^2(1-z^4)\frac{1}{(1-z)^3}$$

$\Rightarrow$ cần xác định hệ số của $z^4$ trong $(1-z^5)^2(1-z^4)\dfrac{1}{(1-z)^3}$



Theo chuỗi lũy thừa ta có:

$$\frac{1}{(1-z)^3} = \left(1+\binom{3}{1}z+\binom{4}{2}z^2+\ldots+\binom{k+2}{k}z^k+\ldots\right)$$

Nên ta có hệ số của $z^4$ trong chuỗi này là

$$= \binom{6}{4} - 1 = \frac{6!}{4!2!} - 1 = \frac{5*6}{2} - 1 = 14$$

Vậy có 14 cách giải bài toán chia táo.

Tương tự cho bài toán:

Xét tập hợp {1,2, ...,15} có bao nhiêu tập con có 04 phần tử mà không chứa 02 số liên tiếp nhau. Vị trí các phền tử trong một tập con không quan trọng, ví dụ: {4,7,9,12} và {9,12,4,7} là như nhau.



# Dùng hàm sinh giải hệ thức truy hồi

- Trong quá trình phân tích thuật toán, chúng ta tìm được độ phức tạp của thuật toán là công thức truy hồi.Ví dụ:

$$x_0 = 0 \qquad x_n = \frac{n+2}{2} + \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1} x_k$$

hay

$$a_0 = 0 \quad a_1 = 5 \qquad 6a_n - 5a_{n-1} + a_{n-2} = 0 \ \forall n \geq 2$$

- Chúng ta sẽ dùng hàm sinh để tìm nghiệm (độ phức tạp của thuật toán)

# Hàm sinh của dãy xác suất

- Xét biến A có thể lấy các giá trị 0, 1, 2, ... Với xác suất là $p_0$, $p_1$, $p_2$, ... Với $p_i \geq 0$ và $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$ thì hàm sinh của dãy xác suất (phân bố) là

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k$$

- Ví dụ xét thuật toán tìm số lớn nhất trong mảng (ví dụ 3 – phần đánh giá bằng công cụ toán học cơ bản).



- Có thể thấy độ phức tạp là O(n). Vậy số lần thực hiện $\alpha$:
  - Tối thiểu: 0
  - Tối đa: n-1
  - Trung bình: ?

Nếu xét n=3, dữ liệu là một dãy số đôi một phân biệt {a[0], a[1], a[0]} → có 6 tổ hợp thứ tự

với xác suất ngang nhau là 1/6

| Vị trí | Số lần gán | Trung bình |
|---|---|---|
| A[0] < A[1] < A[2] | 2 | =5/6 |
| A[0] < A[2] < A[1] | 1 | |
| A[1] < A[0] < A[2] | 1 | |
| A[1] < A[2] < A[0] | 0 | |
| A[2] < A[0] < A[1] | 1 | |
| A[2] < A[1] < A[0] | 0 | |

Dùng hàm sinh tính giá trị trung bình của α.
Giả sử mỗi n, gọi $A_n$ là số lần thực hiện α thì $0 \le A_n \le n-1$.
Với mỗi k gọi $p_{n,k}$ là xác suất để $A_k = k$.
Có $p_{n,k} \ge 0$, $\forall k \in \{0,1,2,\ldots,n-1\}$ và

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k} = 1$$



- Hàm sinh $G_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k} z^k$
- Gọi B là biến cố $a_n$ lớn nhất trong $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$

$P(B) = \frac{1}{n}$ (xác suất tại bước thứ n có 1 phép gán)

và $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = \frac{n-1}{n}$ (xác suất tại bước thứ n không có phép gán)

có $P(A_n) = P(B).P(A_n / B) + P(\overline{B}).P(A_n / \overline{B})$

và $P(A_n/B) = p_{n-1,k-1}$ , $P(A_n/\overline{B}) = p_{n-1,k}$

$$\Rightarrow \quad p_{n,k} = \frac{1}{n} p_{n-1,k-1} + \frac{n-1}{n} p_{n-1,k}$$

- Tại bước thứ n có 01 phép gán thì n-1 bước trước đó có k-1 phép gán.
- Tại bước thứ n không có phép gán thì n-1 bước trước đó có k phép gán.

$$G_n(z) = \frac{1}{n}\sum_{k=1} p_{n-1,k-1}z^k + \frac{\text{n-1}}{\text{n}}\sum_{k=1} p_{n-1,k}z^k$$

$$= \frac{z+n-1}{n}G_{n-1}(z)$$

truy hồi ...

$$= \left(\frac{z+n-1}{n}\right)\left(\frac{z+n-2}{n-1}\right)\cdots\left(\frac{z+1}{2}\right)$$

hạng tử thứ k:

$$\mathrm{g_k}(z) = \frac{z+k-1}{k} = \frac{z}{k} + \frac{k-1}{k} \text{ mà ta có } \frac{1}{\mathrm{k}} + \frac{k-1}{k} = 1$$

nên $\frac{z+k-1}{k}$ là hàm sinh của dãy xác suất

$$\Rightarrow \mathrm{mean(G_n)} = \sum_{k=2}^{n} mean(g_k) = \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}$$



- Quay lại bài toán khi n=3 ta có

  mean($G_3$) = 1/2 +1/3 =5/6