ĐÁP ÁN

Câu 1: Giải phương trình ma trận: $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 1 & 0\\3 & 0 & 0\end{bmatrix}X=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 2\\2 & 3 & 4 & -1\\0 & -3 & 2 & 6\end{bmatrix}$.

Giải:

$$\text{PT}\Leftrightarrow X=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 1 & 0\\3 & 0 & 0\end{bmatrix}^{-1}.\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 2\\2 & 3 & 4 & -1\\0 & -3 & 2 & 6\end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow X=\frac{1}{-9}\begin{bmatrix}0 & 0 & -3\\0 & -9 & 6\\-3 & 6 & -3\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 2\\2 & 3 & 4 & -1\\0 & -3 & 2 & 6\end{bmatrix}\Leftrightarrow X=\begin{bmatrix}0 & -1 & \frac{2}{3} & 2\\2 & 5 & \frac{8}{3} & -5\\-1 & -3 & -\frac{7}{3} & \frac{10}{3}\end{bmatrix}$$

Câu 2: Cho hệ thuần nhất dưới đây: $\begin{cases} mx + y + z = 0 \\ x + my + z = 0. \\ x + y + mz = 0 \end{cases}$

a) Tìm m để hệ có nghiệm không tầm thường.

b) Giải hệ khi m=-2.

Giải:

a)Ta có định thức của ma trận hệ số là: $D = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = (m+2)(m-1)^2$

Hệ có nghiệm không tầm thường $\Leftrightarrow D = 0 \Leftrightarrow m = -2$ hoặc $m = 1$.

b) Khi $m = -2$:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[d1+d2+d3 \to d3]{d1+2d2 \to d2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Hệ tương đương: $\begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ -3y + 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + a + a = 0 \\ y = a \\ z = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ y = a \\ z = a \end{cases}, (a \in \mathrm{R}).$

<u>Câu 3:</u> Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Gauss:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = a \\ 3x + 2y - 4z = b. \\ 2x - y = c \end{cases}$$

Giải:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & a \\ 3 & 2 & -4 & b \\ 1 & -1 & 10 & c \end{array}\right) \xrightarrow[-2d1+d3\to d3]{-3d1+d2\to d2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & a \\ 0 & -4 & 5 & b-3a \\ 0 & -5 & 6 & c-2a \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-d2+d3\to d3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & a \\ 0 & -4 & 5 & b-3a \\ 0 & -1 & 1 & c+a-b \end{array}\right) \xrightarrow{d2\leftrightarrow d3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & a \\ 0 & -1 & 1 & c+a-b \\ 0 & -4 & -5 & b-3a \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-4d2+d3\to d3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & a \\ 0 & -1 & 1 & c+a-b \\ 0 & 0 & 1 & -7a+5b-4c \end{array}\right)$$

Vì r(A)=r($\overline{A}$)=3 nên hpt có nghiệm duy nhất:

$x = -4a + 3b - 2c$; $y = -8a + 6b - 5c$; $z = -7a + 5b - 4c$.

<u>Câu 4</u>: Giải và biện luận hệ sau bằng phương pháp Gauss:

$$\begin{cases} x - y + z = 4 \\ x + 4y + 2z = 1 \\ x - y + mz = 2(m+1) \end{cases}.$$

Giải:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & m & 2(m+1) \end{array}\right) \xrightarrow[d3-d1\to d3]{d2-d1\to d2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & m-1 & 2(m-1) \end{array}\right)$$

- Nếu $m \neq 1$ thì hệ duy nhất nghiệm: $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 2 \end{cases}$
- Nếu $m = 1$ thì hệ vô số nghiệm: $x = \frac{17-6a}{5}, y = -\frac{3+a}{5}, z = a \in R$.

<u>Câu 5</u>: Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Gauss:

$$\begin{cases} x + y - 3z = -1 \\ x + y + z = 3 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ x + 2y - 3z = 1 \end{cases}.$$

Giải:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[d4-d1\to d4]{\substack{d2-d1\to d2 \\ d3-2d1\to d3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{d4+d3\to d4 \\ d2\leftrightarrow d3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{d4-d3\to d4} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Vì $r(A) = 3 < r\left(\overline{A}\right) = 4$ nên hpt vô nghiệm.

Câu 6: Cho ma trận : $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$. Tìm A^{-1}. Từ đó suy ra nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 3z = 1. \\ 3y + z = 2 \end{cases}$

Giải:

$$A^{-1} = \frac{1}{-3}\begin{bmatrix} -7 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 6 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{-3}\begin{bmatrix} -7 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 6 & -3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

<u>Câu 7</u>: Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Gauss :

$$\begin{cases} x-2y+z-t+u=0 \\ 3x-2y-z+t-2u=-1 \\ 2x+y-z+2t-3u=1 \\ 2x-5y+z-2t+2u=-2 \end{cases}.$$

Giải:

$$\bar{A} \xrightarrow[d4-2d1\to d4]{\substack{d2-3d1\to d2 \\ d3-2d1\to d3}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 4 & -5 & -1 \\ 0 & 5 & -3 & 4 & -5 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{d2\to d4} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & -3 & 4 & -5 & 1 \\ 0 & 4 & -4 & 4 & -5 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{d3+5d2\to d3 \\ d4+4d2\to d4}]{} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -8 & 4 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & -8 & 4 & -5 & -9 \end{array}\right) \xrightarrow[d4-d3\to d4]{} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -8 & 4 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\text{Hpt} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+z-t+u=0 \\ -y-z=-2 \\ -8z+4t-5u=-9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{5}{8}-\frac{a}{2}+\frac{7b}{8} \\ y=\frac{7}{8}-\frac{a}{2}+\frac{5b}{8} \\ z=\frac{9}{8}+\frac{a}{2}-\frac{5b}{8} \\ t=a\in R \\ u=b\in R \end{cases}$$