TRƯỜNG ĐẠI HỌC GIAO THÔNG VẬN TẢI THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
KHOA CƠ BẢN – BỘ MÔN TOÁN

BÀI GIẢNG GIẢI TÍCH 1

CHƯƠNG II. PHÉP TÍNH VI PHÂN HÀM MỘT BIẾN

§2. Ứng dụng đạo hàm

GV: Đinh Tiến Dũng

NỘI DUNG CHÍNH

- *Các ứng dụng cơ bản của đạo hàm.*
- *Quy tắc L'Hospital vận dụng vào tính giới hạn.*
- *Công thức Taylor, Maclaurin và các ứng dụng.*

BÀI 2. ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM

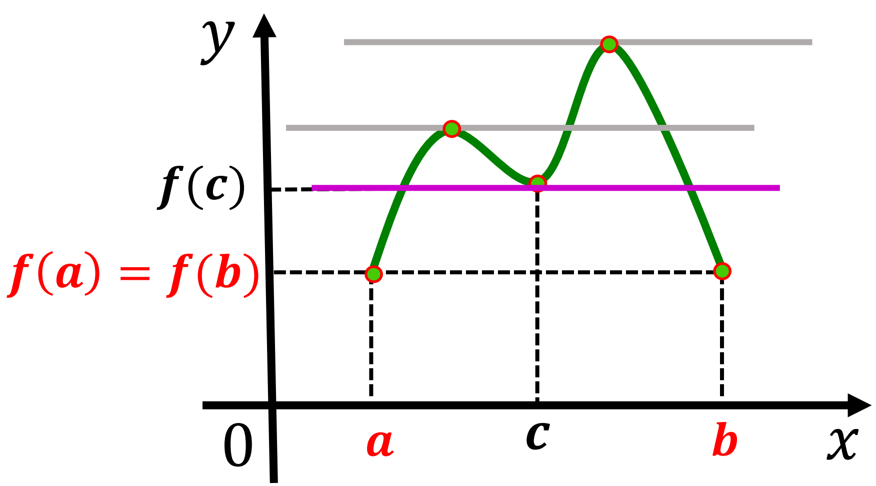
1. Các ứng dụng cơ bản (SV tự học)

❖ *Định lý 1: (Định lý Rolle)*

Giả sử hàm f liên tục trên đoạn [a,b] và khả vi trên (a,b). Nếu f(a)=f(b) thì có ít nhất một điểm c thuộc (a,b) sao cho f′(c)=0.

❑ **Ý nghĩa hình học:**

Trong khoảng (a,b), nếu hàm f thỏa định lý Rolle thì tồn tại ít nhất một điểm c mà tại đó tiếp tuyến nằm ngang.



❖ Định lý 2: (Định lý giá trị trung bình)

Giả sử hàm f liên tục trên đoạn $[a, b]$ và khả vi trên (a, b). Khi đó tồn tại ít nhất một điểm c thuộc khoảng (a, b) sao cho:

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \text{ hay } f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

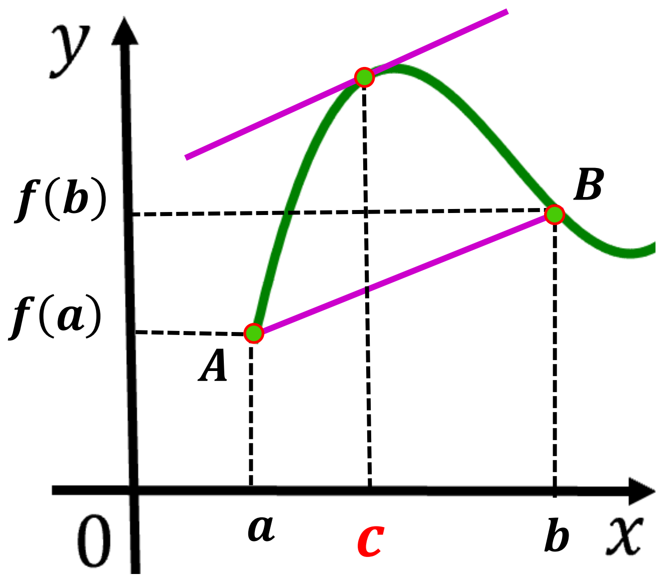
❑ Ý nghĩa hình học:

Xét 2 điểm A(a,f(a)), B(b,f(b)) là 2 điểm thuộc đồ thị hàm f .

Hệ số góc của cát tuyến *AB* là:

$$m_{AB} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Vậy định lý khẳng định là có điểm c ∈ (a, b) mà tiếp tuyến tại x=c song song với cát tuyến *AB*.



❖ Định lý 3: (Định lý về sự đồng biến, nghịch biến)

Giả sử hàm f liên tục trên $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ và khả vi trên $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$. Khi đó:

- ***Nếu $\boldsymbol{f'(x) > 0, \forall x \in (a, b)}$, thì f là hàm tăng trên $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$.***
- ***Nếu $\boldsymbol{f'(x) < 0, \forall x \in (a, b)}$, thì f là hàm giảm trên $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$.***

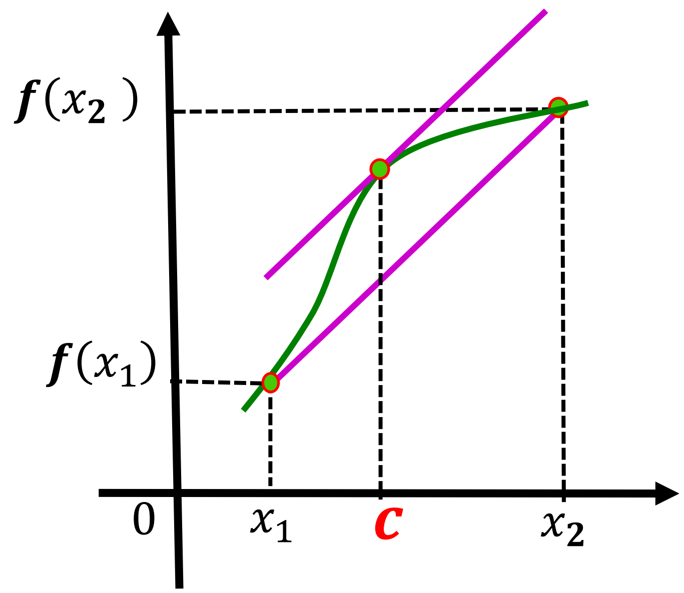
CM: Lấy bất kỳ x_1 và x_2 thuộc $[a, b]$ với $x_1 < x_2$. Áp dụng định lý giá trị trung bình cho hàm f trên $[x_1, x_2]$, ta có:

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad (\text{với } x_1 < c < x_2)$$

- Nếu $f'(x) > 0, \forall x \in (a, b)$, thì $f'(c) > 0$.

$$\Rightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0$$

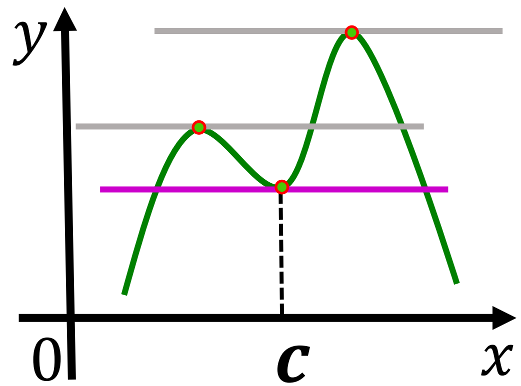
$\Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f$ đồng biến trên [a,b].



- Nếu $f'(x) < 0, \forall x \in (a, b)$, tương tự suy ra f nghịch biến trên [a,b].

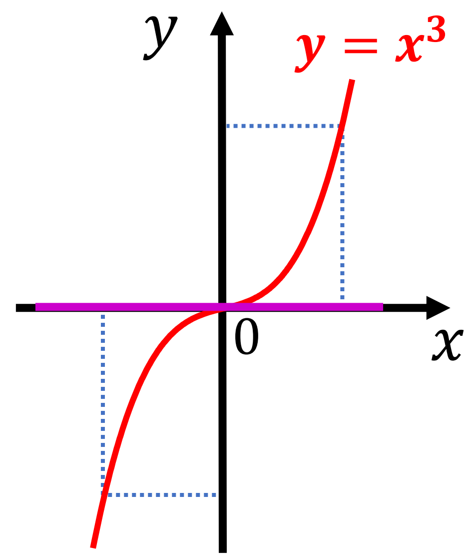
❖ *Định lý 4: (Định lý Fermat - điều kiện cần để có cực trị)*

Nếu hàm f đạt cực đại hay cực tiểu (địa phương) tại c và nếu $f'(c)$ tồn tại thì $f'(c) = 0$.



❑ **Ý nghĩa hình học:** Tiếp tuyến tại điểm cực trị có phương nằm ngang.

Chú ý: Chiều ngược lại của định lý không đúng. Chẳng hạn, xét hàm $y = x^3$, ta thấy: $y' = 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ nhưng hàm số này không đạt cực trị tại $x = 0$. Tiếp tuyến có thể đi xuyên qua đồ thị.



❖ Định lý 5: (ĐK đủ để đạt cực trị)

Giả sử x_0 là một điểm tới hạn của hàm liên tục f . Khi đó:

1) ***Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi x đi qua x_0, thì f(x) đạt cực tiểu địa phương tại $x = x_0$.***
2) ***Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi x đi qua x_0, thì f(x) đạt cực đại địa phương tại x_0.***
3) ***Nếu $f'(x)$ không đổi dấu khi x đi qua x_0 thì f(x) không đạt cực trị tại x_0.***

❑ **Chú ý:** x_0 gọi là điểm tới hạn của hàm f nếu nó thỏa 1 trong 2 đk:

- $f'(x_0) = 0$ (x_0 là nghiệm của đạo hàm cấp một);
- Hàm f(x) xác định tại x_0 nhưng $f'(x_0)$ không tồn tại.

❖ Định lý 6

Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ thì f đạt được GTLN, GTNN trên $[a;b]$.

❑ Cách tìm GTLN-GTNN của hàm số f(x) liên tục trên [a;b].

B1. Tìm trong (a;b) tất cả các điểm tới hạn $x_1, x_2, \ldots, x_n$ của f(x).

B2. Tính $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), f(a), f(b)$.

B3. Kết luận:

$$\min_{[a;b]} f(x) = \min\{f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), f(a), f(b)\};$$

$$\max_{[a;b]} f(x) = \max\{f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), f(a), f(b)\}.$$

Ví dụ: Ngày 24 tháng 8 năm 1990, tàu con thoi Discovery đã phóng kính viễn vọng không gian Hubble vào vũ trụ. Bằng các mô hình tính toán, người ta xác định được trong thời gian thực thi nhiệm vụ từ lúc phóng $t = 0$ cho đến lúc các tên lửa đẩy nhiên liệu rắn được vứt bỏ $t = 126$ s, vận tốc của tàu con thoi (tính bằng ft/s) có phương trình:

$$v(t) = 0{,}001302t^3 - 0{,}09029t^2 + 23{,}61t - 3{,}083$$

Tìm GTLN, NN của gia tốc tàu trong thời gian làm nhiệm vụ.

Giải. Từ phương trình vận tốc:

$$v(t) = 0,001302t^3 - 0,09029t^2 + 23,61t - 3,083$$

suy ra gia tốc của tàu con thoi: $a(t) = v'(t)$

$$\Rightarrow a(t) = 0,003906t^2 - 0,18058t + 23,61; 0 \le t \le 126$$

Ta cần tìm $\min\limits_{[0;126]} a(t)$ và $\max\limits_{[0;126]} a(t)$. Ta có:

$$a'(t) = 0,007812t - 0,18058$$

$$a'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{0,18058}{0,007812} \approx 23,12$$

Tính được: $\begin{cases} a(0) = 23,61 \\ a(23,12) \approx 21,52. \\ a(126) = 62,87 \end{cases}$ Suy ra: $\begin{cases} \min\limits_{[0;126]} a(t) \approx 21,52 \\ \max\limits_{[0;126]} a(t) = 62,87 \end{cases}.$

Vậy gia tốc cực đại khoảng $62,87\left(\text{ft/s}^2\right)$ và gia tốc cực tiểu khoảng $21,52\left(\text{ft/s}^2\right)$.

2. Quy tắc L'Hospital

❖ *Định lý 7 (L'Hospital)*

Cho f, g là hai VCB khi $x \to x_0$ (tức $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$)

hoặc hai VCL khi $x \to x_0$ (tức $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = \infty$ và $\lim\limits_{x \to x_0} |g(x)| = \infty$).

Giả sử f, g khả vi và $g(x) \neq 0$ trong một lân cận của điểm x_0 (có thể trừ tại x_0). Khi đó :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Chú ý :

- *Quy tắc L'Hospital chỉ áp dụng được cho 2 dạng vô định $\frac{0}{0}$ và $\frac{\infty}{\infty}$. Đối với các dạng vô định, khác ta biến đổi đưa về một trong các dạng $\frac{0}{0}$ và $\frac{\infty}{\infty}$.*
- *Có thể áp dụng quy tắc L 'Hospital nhiều lần, liên tục trong một bài toán giới hạn. Trước khi áp dụng quy tắc L'Hospital, chúng ta nên áp dụng quy tắc thay thế VCB hoặc VCL tương đương (nếu có) để làm giảm độ phức tạp của biểu thức khi tính giới hạn.*

VD1. Áp dụng quy tắc L 'Hospital, tính các giới hạn sau:

a) $A = \lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1}$ **b)** $B = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^2}$

Giải

a) Vì $\lim\limits_{x\to 1} (\ln x) = 0, \lim\limits_{x\to 1}(x-1) = 0$, AD quy tắc L 'Hospital:

$$A = \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(\ln x)'}{(x-1)'} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x} = 1.$$

b) Vì $\lim\limits_{x\to +\infty} e^x = +\infty, \lim\limits_{x\to +\infty} x^2 = +\infty$, AD quy tắc L 'Hospital:

$$B = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^2} \stackrel{(L)}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{(e^x)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{2x} \stackrel{(L)}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{(e^x)'}{(2x)'}$$

$$\stackrel{(L)}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty.$$

❖ **Cách khử các dạng vô định mũ $0^0, \infty^0, 1^\infty$:**

Giả sử $A = \lim\limits_{x \to x_0}\left[f(x)^{g(x)}\right]$ có dạng vô định mũ. Ta đưa dạng mũ về dạng thương nhờ phép lấy lôgarit:

$$\ln A = \ln\left\{\lim_{x \to x_0}\left[f(x)^{g(x)}\right]\right\} = \lim_{x \to x_0} ln\left[f(x)^{g(x)}\right]$$

$$= \lim_{x \to x_0}\left[\mathrm{g(x)}.\, lnf(x)\right]$$

$$= \lim_{x \to x_0}\left[\frac{lnf(x)}{\frac{1}{g(x)}}\right]$$

Sau đó dùng VCB, VCL và quy tắc L' Hopital để tính giới hạn dạng phân thức.

VD2. **Áp dụng quy tắc L 'Hospital, tính các giới hạn sau:**

a) $A = \lim\limits_{x\to 0^+} (\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}$ **b)** $B = \lim\limits_{x\to 0^+} x^x$

Giải

a) $A = \lim\limits_{x\to 0^+} (\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}$ (dạng ∞^0)

$$\Rightarrow \ln A = \ln[\lim_{x\to 0^+} (\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}] = \lim_{x\to 0^+} [\ln(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}]$$

$$= \lim_{x\to 0^+} [\frac{1}{\ln x}.\ln(\cot x)] = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\cot x)}{\ln x} \quad (\text{Dạng } \frac{\infty}{\infty})$$

$$\overset{(L)}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{[\ln(\cot x)]'}{(\ln x)'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{-1}{\sin^2 x \cot x}}{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x}{\sin x.\cos x}$$

$$\overset{(VCB)}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{-x}{x.\cos x} = -\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\cos x} = -1 \quad \Rightarrow A = e^{-1}.$$

b) $B = \lim\limits_{x \to 0^+} x^x$ (Dạng 0^0)

$$\Rightarrow \ln B = \ln[\lim_{x \to 0^+} x^x] = \lim_{x \to 0^+} [\ln(x^x)]$$

$$= \lim_{x \to 0^+} (x \ln x) \quad \text{(Dạng } 0.\infty\text{)}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\left(\frac{1}{x}\right)} \quad \text{(Dạng } \frac{\infty}{\infty}\text{)}$$

$$\overset{(L)}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} (-x) = 0 \qquad \Rightarrow B = e^0 = 1.$$

BÀI TẬP NHÓM

Tính các giới hạn:

$$A = \lim_{x\to\infty}\left[\sin\frac{1}{x}\right]^{\frac{2x+1}{x^2-1}}; \quad B = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+2}\right)^{\frac{x^2+1}{x-1}}.$$

ĐÁP ÁN

a) $$\ln A = \ln\left[\lim_{x\to\infty}\left[\sin\frac{1}{x}\right]^{\frac{2x+1}{x^2-1}}\right] = \lim_{x\to\infty}\ln\left[\left(\sin\frac{1}{x}\right)^{\frac{2x+1}{x^2-1}}\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x^2-1}.\ln\left(\sin\frac{1}{x}\right)$$

$$\overset{(VCL)}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x^2}.\ln\left(\sin\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}.\ln\left(\sin\frac{1}{x}\right) = \lim_{t\to0^+}2t.\ln(\sin t)$$

$$= 2\lim_{t\to0^+}\frac{\ln(\sin t)}{\frac{1}{t}} \overset{(L)}{=} 2\lim_{t\to0^+}\frac{[\ln(\sin t)]'}{\left(\frac{1}{t}\right)'} \overset{(L)}{=} 2\lim_{t\to0^+}\frac{\frac{\cos t}{\sin t}}{-\frac{1}{t^2}} = 2\lim_{t\to0^+}\frac{-t^2\cos t}{\sin t}$$

$$\overset{(VCB)}{=} 2\lim_{t\to0^+}\frac{-t^2\cos t}{t} = 2\lim_{t\to0^+}(-t\cos t) = 0$$ $$\Rightarrow A = e^0 = 1.$$

$$b)\ \ln B = \ln\left[\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+2}\right)^{\frac{x^2+1}{x-1}}\right] = \lim_{x\to\infty}\ln\left[\left(\frac{x+3}{x+2}\right)^{\frac{x^2+1}{x-1}}\right]$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x-1}.\ln\frac{x+3}{x+2} \overset{(VCL)}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x}.\ln\frac{x+3}{x+2}$$

$$= \lim_{x\to\infty}x.\ln\frac{x+3}{x+2} = \lim_{x\to\infty}x.\ln\left(1+\frac{1}{x+2}\right) \overset{(VCB)}{=} \lim_{x\to\infty}x.\frac{1}{x+2}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+2} \overset{(L)}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1} = 1$$

$$\Rightarrow B = e^1 = e.$$

3. Khai triển Taylor

❑ Đặt vấn đề:

Cho $f(x) = sinx$. *Không dùng máy tính, hãy tính* $f(1)$?

- ***Trong các hàm số sơ cấp, đa thức là loại hàm số đơn giản, dễ tính đạo hàm và khảo sát nhất. Với các loại hàm phức tạp hơn, làm thế nào để viết nó xấp xỉ một đa thức?***
- ***Người ta đã tìm cách biểu diễn công thức của một hàm liên tục khả vi xấp xỉ với một hàm đa thức trên mỗi khoảng xác định của nó. Định lý Taylor sẽ cho ta một công thức biểu diễn xấp xỉ như vậy. Chúng ta sẽ tìm hiểu các ứng dụng của nó trong phần sau...***

3. Khai triển Taylor

3.1 Định lý 8 (Taylor)

Nếu hàm số $f(x)$ khả vi đến cấp $n+1$ trong một lân cận của điểm x_0 thì tồn tại số C nằm giữa x và x_0 sao cho $f(x)$ có thể viết dạng:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(C)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(C)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Đó gọi là khai triển Taylor của hàm f(x) đến cấp n trong lân cận của điểm x_0. Ngoài ra:

- $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(C)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ *gọi là phần dư Lagrange của khai triển.*
- *Khi $x \to x_0$ thì $(x - x_0)^n \to 0$, $R_n(x) \to 0$. Và $R_n(x)$ là VCB và bậc cao hơn $(x - x_0)^n$ nên có thể viết phần dư thành dạng sau và ta gọi đó là phần dư Peano:* $R_n(x) = 0(x - x_0)^n$.

❖ Hệ quả (Khai triển Maclaurin)

Khai triển Taylor trong lân cận của điểm $x_0 = 0$ được gọi khai triển Maclaurin. Công thức Maclaurin có dạng:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(C)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \frac{f^{(n+1)}(C)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

Phần dư Lagrange: $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(C)}{(n+1)!}x^{n+1}$ *(Với C nằm giữa 0 và x).*

Phần dư Peano: $R_n(x) = 0(x^n)$

❖ Cách viết thu gọn:

- ***Taylor***: $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x)$

$$\big\downarrow\ x_0 = 0$$

- ***Maclaurin***: $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x)$

Taylor:

Lagrange: $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(C)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

Peano: $R_n(x) = 0[(x-x_0)^n]$

Maclaurin:

Lagrange: $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(C)}{(n+1)!}x^{n+1}$

Peano: $R_n(x) = 0(x^n)$

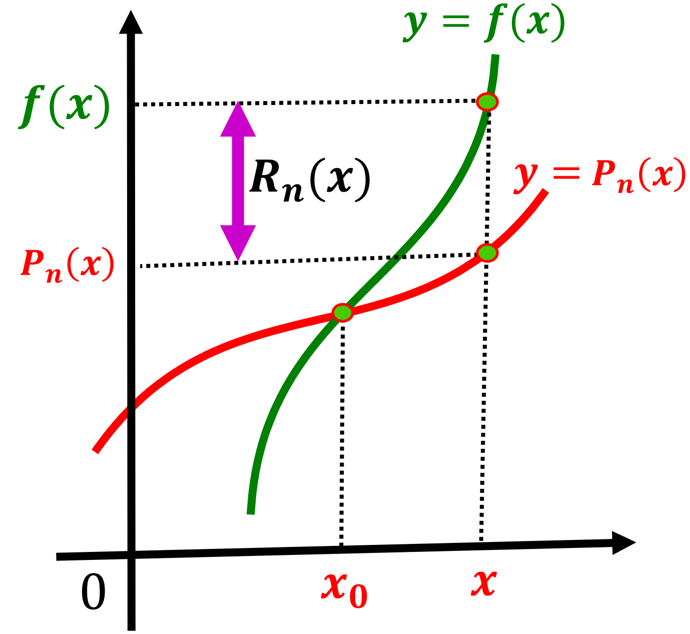
❖ Ý nghĩa hình học của công thức Taylor :

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(x_0) + \frac{\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{\mathbf{f}''(\mathbf{x}_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{\mathbf{f}^{(n)}(\mathbf{x}_0)}{\mathbf{n}!}(x-x_0)^{\mathbf{n}} + R_n(x)$$

Đặt $P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$

Và gọi đây là đa thức Taylor. Khi đó:

$$\boldsymbol{f(x) = P_n(x) + R_n(x)}$$



Trong lân cận rất nhỏ quanh điểm x_0, phần dư $R_n(x)$ là "rất nhỏ" nên ta có thể xấp xỉ $\boldsymbol{f(x) \approx P_n(x)}$.

Do đó, đồ thị của hai hàm số $y = f(x)$ và $y = \boldsymbol{P_n(x)}$ xấp xỉ nhau trong lân cận của điểm x_0.

VD1. Tìm công thức Taylor của hàm số $f(x) = x^2 + e^{2(x-1)}$ tại điểm $x_0 = 1$ đến cấp 4 với phần dư Peano.

Giải

ADCT Taylor với phần dư Peano với n=4, $x_0 = 1$:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(x_0) + \frac{\mathbf{f}'(\mathbf{x_0})}{\mathbf{1!}}(x - x_0) + \frac{\mathbf{f}''(\mathbf{x_0})}{\mathbf{2!}}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{\mathbf{f}^{(n)}(\mathbf{x_0})}{\mathbf{n!}}(x - x_0)^n + 0((x - x_0)^n)$$

Với n=4, $x_0 = 1$:

$$f(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \frac{f^{(4)}(1)}{4!}(x-1)^4 + 0(x-1)^4$$

Tính được: $f'(x) = 2x + 2e^{2(x-1)}$ $\quad f'''(x) = 8e^{2(x-1)}$

$f''(x) = 2 + 4e^{2(x-1)}$ $\quad f^{(4)}(x) = 16e^{2(x-1)}$

Suy ra: $f(1) = 2$; $f'(1) = 4$; $f''(1) = 6$; $f'''(1) = 8$; $f^{(4)}(1) = 16$.

Vậy $\boldsymbol{f(x) = 2 + 4(x-1) + 3(x-1)^2 + \frac{4}{3}(x-1)^3 + \frac{2}{3}(x-1)^4 + O((x-1)^4)}$.

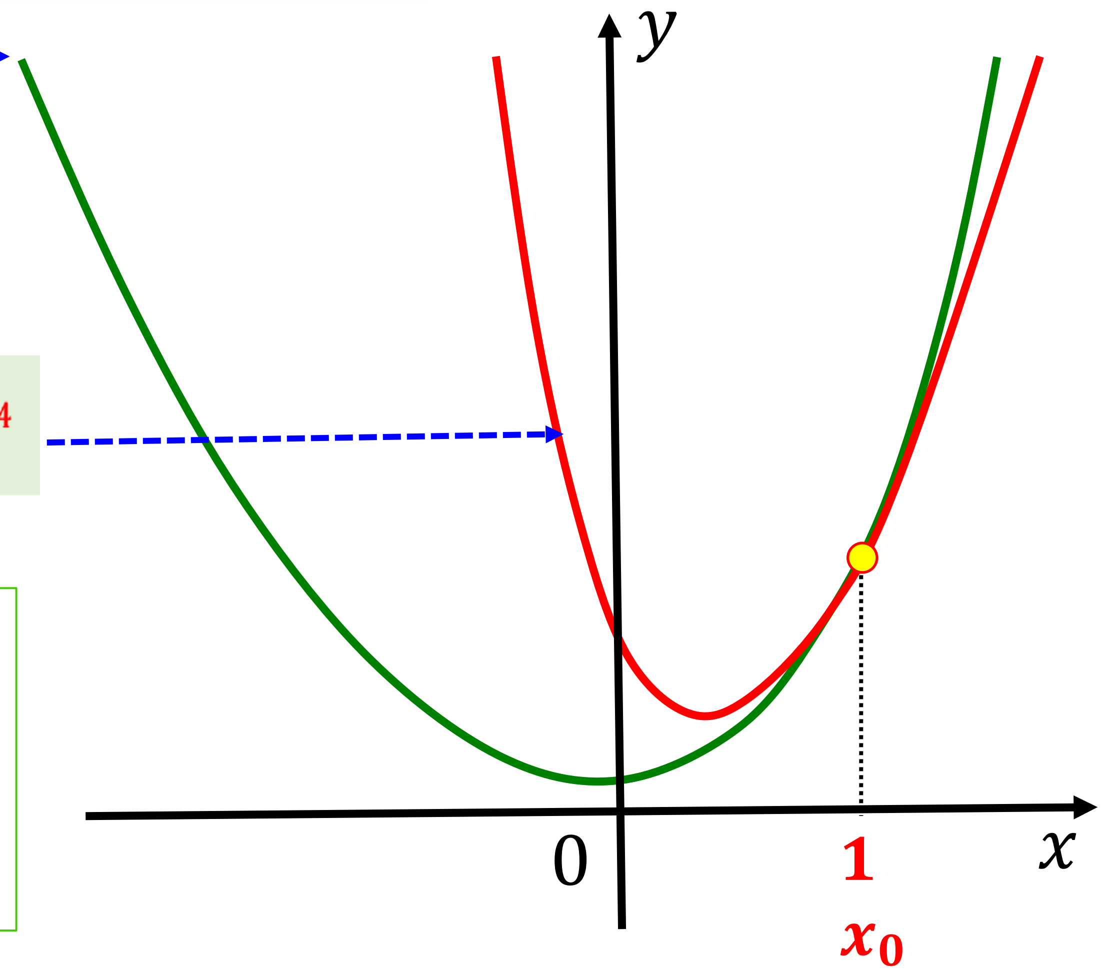
Đồ thị minh họa

$$f(x) = x^2 + e^{2(x-1)}$$

Khai triển Taylor tại $x_0 = 1$

$$P_4(x) = 2 + 4(x-1) + 3(x-1)^2 + \frac{4}{3}(x-1)^3 + \frac{2}{3}(x-1)^4$$

❖ Nhận xét:
Càng gần điểm $x_0 = 1$ thì $f(x) \approx P_4(x)$ với độ chính xác càng cao.



Vẽ đồ thị online tại https://www.geogebra.org/calculator

VD2. Khai triển Maclaurin hàm $f(x) = e^x$ đến cấp n với phần dư Lagrange.

Giải

ADCT Khai triển Maclaurin với phần dư Lagrange

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

Ta có: $f^{(n)}(x) = e^x, \forall n \geq 0 \Rightarrow f^{(n)}(0) = e^0 = 1; \forall n \geq 0$

$$f^{(n+1)}(x) = e^x \Rightarrow f^{(n+1)}(c) = e^c.$$

Vậy: $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}$. *($c$ nằm giữa $x_0 = 0$ và x)*

❖ **Chú ý:** Nếu YCBT là khai triển Maclaurin với phần dư Peano thì ta viết kết quả dạng:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + O(x^n).$$

3.2 Bảng khai triển Maclaurin của các hàm sơ cấp cơ bản

1) $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$

2) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + o(x^n)$

3) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n})$

4) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n-1}) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + o(x^{2n-1})$

5) $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$

6) $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n)$

7) $(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$

3.3 Ứng dụng của khai triển Taylor-Maclaurin

❑ ***Ứng dụng 1:*** *Dùng Bảng khai triển Maclaurin tìm khai triển Maclaurin một hàm sơ cấp f(x) bằng cách phân tách f(x) thành tổng, tích các hàm có trong bảng khai triển.*

VD1. Khai triển Maclaurin hàm $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{1+x}$ đến cấp 4 với phần dư Peano.

Giải Ta có: $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{1+x} = \frac{1}{1+x}.\ln(x+1)$

ADCT: $\ln(x+1) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + O(x^4)$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + O(x^4)$$

Vậy $f(x) = [1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + O(x^4)].\left[x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + O(x^4)\right]$

$$= x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3 - \frac{25}{12}x^4 + O(x^4).$$

VD2. **Khai triển Maclaurin hàm $f(x) = \frac{2x-2}{2x-3}$ đến cấp 4 với phần dư Peano.**

Giải

Ta có: $f(x) = \dfrac{2x-3+1}{2x-3} = 1 + \dfrac{1}{2x-3} = 1 + \dfrac{1}{-3(1-\frac{2x}{3})} = 1 - \dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{1-\frac{2x}{3}}$

Đặt X=2x/3. Ta thấy, khi x->0 thì X->0. ADCT:

$$\frac{1}{1-X} = 1 + X + X^2 + X^3 + X^4 + o(X^4)$$

Ta được: $\dfrac{1}{1-\frac{2x}{3}} = 1 + \dfrac{2x}{3} + \left(\dfrac{2x}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{2x}{3}\right)^3 + \left(\dfrac{2x}{3}\right)^4 + o(x^4)$

Vậy: $f(x) = \dfrac{2}{3} - \dfrac{2}{9}x - \dfrac{4}{27}x^2 - \dfrac{8}{81}x^3 - \dfrac{16}{243}x^4 + o(x^4).$

VD3. **Khai triển Maclaurin hàm $f(x) = \ln(2x+3)$ đến cấp 4 với phần dư Peano.**

Giải

Phân tách $f(x) = \ln(2x+3) = \ln[3(1+\frac{2x}{3})] = \ln 3 + \ln(1+\frac{2x}{3})$

Đặt X=2x/3. Ta thấy, khi x->0 thì X->0. ADCT

$$\ln(1+X) = X - \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{3}X^3 - \frac{1}{4}X^4 + O(X^4)$$

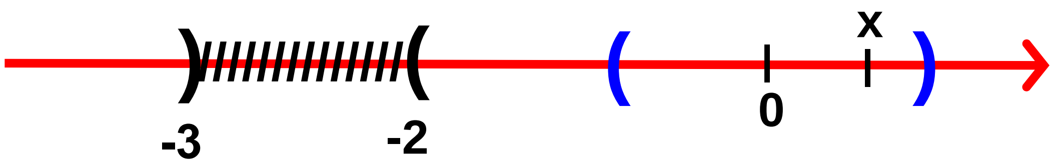
Ta được: $\ln(1+\frac{2x}{3}) = \frac{2x}{3} - \frac{1}{2}.\left(\frac{2x}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{2x}{3}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{2x}{3}\right)^4 + O(x^4)$

Vậy $f(x) = \ln 3 + \frac{2x}{3} - \frac{2x^2}{9} + \frac{8x^3}{81} - \frac{4x^4}{81} + O(x^4).$

VD4. Khai triển Maclaurin hàm $f(x) = \ln(x^2 + 5x + 6)$ đến cấp 3 với phần dư Peano.

Giải

Txđ: D=(-∞;-3)∪(-2;+∞)



Xét trong một lân cận đủ nhỏ của điểm $x_0 = 0$ ta có $x > -2$.

$$f(x) = \ln[(x+2)(x+3)] = \ln(x+2) + \ln(x+3)$$

$$= \ln\left[2\left(1+\frac{x}{2}\right)\right] + \ln\left[3\left(1+\frac{x}{3}\right)\right]$$

$$= \ln 2 + \ln 3 + \ln\left(1+\frac{x}{2}\right) + \ln\left(1+\frac{x}{3}\right)$$

$$= \ln 6 + \ln\left(1+\frac{x}{2}\right) + \ln\left(1+\frac{x}{3}\right)$$

ADCT: $\ln(1+X) = X - \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{3}X^3 + o(X^3)$

Ta được:

$$\ln\left(1+\frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}.\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^3 + o(x^3) = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{24} + o(x^3)$$

$$\ln\left(1+\frac{x}{3}\right) = \frac{x}{3} - \frac{1}{2}.\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{3}\right)^3 + o(x^3) = \frac{x}{3} - \frac{x^2}{18} + \frac{x^3}{81} + o(x^3)$$

Vậy $f(x) = \ln 6 + \frac{5x}{6} - \frac{13x^2}{72} + \frac{35x^3}{648} + o(x^3)$.

(Sinh viên tự học)

❑ ***Ứng dụng 2: Dùng Bảng Maclaurin để khai triển Taylor hàm f(x) tại điểm $x = x_0$.***

- **B1.** Đặt $t = x - x_0$. Khi $\mathbf{x = x_0}$ thì $t = 0$. Ta được $f(x) = f(t + x_0)$.
- **B2.** Khai triển Maclaurin hàm $f(t + x_0)$ tại điểm $t = 0$.
- **B3.** Thế lại $t = x - x_0$ được khai triển Taylor hàm f(x) tại $x = x_0$.

VD. Khai triển Taylor hàm $f(x) = \frac{2}{3+x}$ trong lân cận của điểm $x_0 = 1$ đến cấp n với phần dư Peano.

Giải Đặt $t = x - 1$, ta có $x = t + 1$. Khi $x = 1$ thì $t = 0$. Ta có:

$$f(x) = \frac{2}{3+x} = \frac{2}{3+t+1} = \frac{2}{t+4} = \frac{\frac{2}{4}}{\frac{t+4}{4}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{t}{4}}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left(\frac{t}{4}\right)^k + O(t^n) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left(\frac{x-1}{4}\right)^k + O\left(\frac{x-1}{4}\right)^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2.2^{2k}}(x-1)^k + O(x-1)^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2^{2k+1}}(x-1)^k + O(x-1)^n.$$

❖ Ứng dụng 3: Tính gần đúng

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$ với sai số $|R_n(x)|$.

Trong đó $\boldsymbol{R_n(x)} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ (với c nằm giữa x và x_0)

Sai số sẽ càng nhỏ dần khi x càng gần x_0 hoặc n càng lớn.

VD. Tìm khai triển Maclaurin hàm f(x) = sinx đến cấp 9 với phần dư Lagrange. Áp dụng để tính gần đúng sin(1) và ước lượng sai số.

Giải

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \boldsymbol{R_9(x)}$$

Trong đó $\boldsymbol{R_9(x)} = \frac{f^{(10)}(c)}{10!}x^{10}$ (với c nằm giữa 0 và x)

Ta sẽ tìm $\boldsymbol{R_9(x) = \frac{f^{(10)}(c)}{10!}x^{10}}$ (với c nằm giữa 0 và x).

Ta có: $f(x) = \sin x \Rightarrow f^{(10)}(x) = \sin\left(x + 10.\frac{\pi}{2}\right) = \sin(x + 5\pi)$

$$\Rightarrow f^{(10)}(c) = \sin(c + 5\pi) \Rightarrow \boldsymbol{R_9(x) = \frac{\sin(c+5\pi)}{10!}x^{10}}$$

Khai triển Maclaurin $f(x) = \sin x$ đến cấp 9 với phần dư Lagrange là:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \frac{\sin(c+5\pi)}{10!}x^{10}$$

$$\Rightarrow \sin(1) = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \frac{1}{9!} + \frac{\sin(c+5\pi)}{10!}$$

Cắt bỏ phần dư: $\sin(1) \approx 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \frac{1}{9!} = \mathbf{0,8414710097}$

Sai số mắc phải: $|R_9(1)| = \frac{|\sin(c+5\pi)|}{10!} \le \frac{1}{10!} < 10^{-6}$.

(Sinh viên tự học)

❖ Ứng dụng 4: Dùng Khai triển Taylor_Maclaurin để tính giới hạn

Khi tính giới hạn tại $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)\pm g(x)}{h(x)\pm k(x)}$, ta có thể khai triển Taylor các hàm f,g,h,k tại x_0 xấp xỉ thành các hàm đa thức. Kết hợp với quy tắc ngắt bỏ VCB sẽ tính được giới hạn.

VD. Tính giới hạn $A=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-sinx-e^{2x}}{\ln(1+x)-2x+x^2}$.

Giải

Trong giới hạn xuất hiện x^2 là VCB bậc hai khi $x\to 0$ nên ta chỉ cần khai triển Maclaurin các hàm sau thành đa thức bậc ba:

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+O_1(x^3);\quad e^{2x}=1+\frac{2x}{1!}+\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^3}{3!}+O_2(\boldsymbol{x^3})$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+O_3(\boldsymbol{x^3})$$

Thế các kết quả khai triển vào giới hạn:

$$A = \lim_{x \to 0} \frac{1 - sinx - e^{2x}}{\ln(1+x) - 2x + x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 - [x - \frac{x^3}{3!} + O_1(x^3)] - [1 + \frac{2x}{1!} + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + O_2(\boldsymbol{x^3})]}{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + O_3(\boldsymbol{x^3}) - 2x + x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-x - 2x^2 - \frac{7x^3}{6} - O_1(x^3) - O_2(\boldsymbol{x^3})]}{-x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + O_3(\boldsymbol{x^3})}$$

Ngắt bỏ tất cả các VCB bậc cao giữ lại VCB bậc thấp nhất, ta được:

$$\text{A} = \lim_{x \to 0} \frac{-x}{-x} = 1.$$

BÀI TẬP VỀ NHÀ

Câu 1: Tìm khai triển Taylor của hàm số $f(x) = \sqrt{2x - 5}$ tại điểm $x_0 = 7$ đến số hạng chứa $(x - 7)^2$ với phần dư Peano.

Câu 2: Tìm khai triển Maclaurin của hàm số $f(x) = \frac{\sin x}{1+x^4}$ đến số hạng chứa x^5 với phần dư Peano.

Câu 3: Tìm khai triển Maclaurin của hàm số $f(x) = e^{x^3}\cos x$ đến số hạng chứa x^5 với phần dư Peano.

<u>Câu 1</u>: Tìm khai triển Taylor của hàm số $f(x) = \sqrt{2x - 5}$ tại điểm $x_0 = 7$ đến số hạng chứa $(x - 7)^2$ với phần dư Peano.

Giải:

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

<u>Câu 2</u>: Tìm khai triển Maclaurin của hàm số $f(x) = \frac{\sin x}{1+x^4}$ đến số hạng chứa x^5 với phần dư Peano.

Giải:

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Câu 3: Tìm khai triển Maclaurin của hàm số $f(x) = e^{x^3}\cos x$ đến số hạng chứa x^5 với phần dư Peano.

Giải:

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....