Độ Phức Tạp Thuật Toán

Nguyễn Văn Huy

huyite.vn@gmail.com

Ngày 2 tháng 10 năm 2021

Outline

1. Định nghĩa và ký hiệu

2. Các phương pháp phân tích
   - Đếm các phép toán cơ bản

Giới thiệu

Input size	Algorithm A	Algorithm B
n	$5000\ n$	1.2^n
10	50,000	6
100	500,000	2,817,975
$1,000$	5,000,000	1.5×10^{79}
$100,000$	5×10^8	1.3×10^{7918}

- Phần lớn các bài toán thường có nhiều giải thuật khác nhau để giải một bài toán.
- Lựa chọn giải thuật phù hợp với ngữ cảnh và tài nguyên hệ thống.
- So sánh các giải thuật được giải trên một bài toán.
- Thời gian tính toán là tài nguyên quan trọng nhất.

Ví dụ

Tính tổng $S = 1 + 2 + ... + n$

Độ phức tạp thuật toán

1. Thời gian chạy trong trường hợp tốt nhất(Best-case). Thời gian chạy ít nhất của thuật toán trên tất cả các tập dữ liệu cùng cỡ.
2. Thời gian chạy trung bình. Là thời gian chạy trung bình cộng trên tất cả các tập dữ liệu.
3. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất(Worse-case). Thời gian chay lớn nhất của thuật toán trên cùng tập dữ liệu

Đánh giá thời gian chạy thuật toán

1. Hầu hết các giải thuật thường có một thông số chính, N, số mẩu dữ liêu input.
2. $T(n)$ số lượng các phép toán sơ cấp phải thực hiện(phép toán số học, logic, so sánh).
3. Quan tâm tốc độ tăng của hàm $T(n)$

Ví dụ

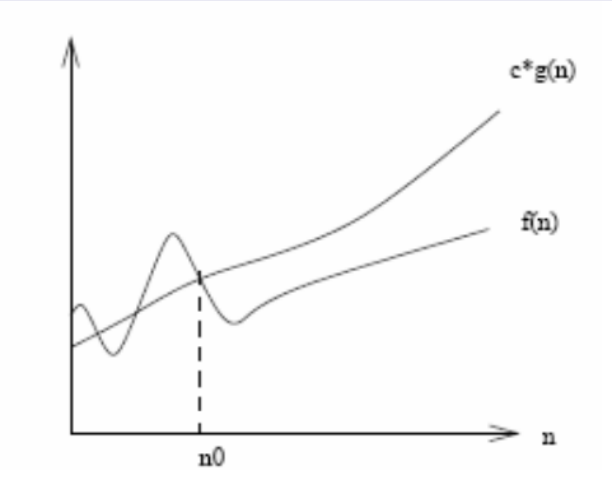
$T(n) = 3 \times n^4 + 5 \times n$

Big-O

Định nghĩa: Giả sử $f(n)$ và $g(n)$ là các hàm số thực không âm. Ta nói:

$$f(n) = O(g(n))$$

Nếu tồn tại hằng số c và n_0 sao cho $f(n) \leq c \times g(n), \forall n_0$



Big-O

Ví dụ

Let $T(n) = 2n + 3n^3 + 5$. $T(n)$ is in $O(n^3)$ with:

- ($c = 8$ and $n_0 = 1$) or ($c = 5$ and $n_0 = 2$)

Complexity classes - a small vocabulary

- Constant: $O(1)$ (independing on the input size)
- Sub-linear or logarithmic: $O(\log n)$
- Linear: $O(n)$
- Quasi-linear: $O(n \log n)$
- Quadratic: $O(n^2)$
- Cubic: $O(n^3)$
- Polynomial: $O(n^p)$ ($O(n^2)$, $O(n^3)$, etc)
- Quasi-polynomial: $O(n^{\log(n)})$
- Exponential: $O(2^n)$
- Factorial: $O(n!)$

Example

1. **Var** int: $d = 0$
2. **For** i from 1 to n **do**
   1. $d = d + 1$
   2. $a[i] = a[i] \times a[i] + d \times d$
3. **Endfor**

Example

1. (1)**Var** int: $d = 0$
2. **For** i from 1 to n **do**
   1. $d = d + 1$
   2. $a[i] = a[i] \times a[i] + d \times d$
3. **Endfor**

Example

1. (1)**Var** int: $d = 0$
2. (n)**For** i from 1 to n **do**
   1. $d = d + 1$
   2. $a[i] = a[i] \times a[i] + d \times d$
3. **Endfor**

Example

1. (1)**Var** int: $d = 0$
2. (n)**For** i from 1 to n **do**
   1. $(1)d = d + 1$
   2. $a[i] = a[i] \times a[i] + d \times d$
3. **Endfor**

Example

1. (1)**Var** int: $d = 0$
2. (n)**For** i from 1 to n **do**
   1. $(1)d = d + 1$
   2. $(1)a[i] = a[i] \times a[i] + d \times d$
3. **Endfor**

Example

1. (1)**Var** int: $d = 0$
2. (n)**For** i from 1 to n **do**
   1. $(1)d = d + 1$
   2. $(1)a[i] = a[i] \times a[i] + d \times d$
3. **Endfor**

Number of elementary operations: $1 + n \times (1 + 1) = 2n + 1$.

Linear loop example

1. **Var** int: $i = 1$
2. **While** $i \leq n$ **do**
   1. Write “Bonjour”
   2. $i = i + 1$
3. **EndWhile**

Linear loop example

1. **Var** int: $i = 1$
2. **While** $i \leq n$ **do**
   1. Write "Bonjour"
   2. $i = i + 1$
3. **EndWhile**

1. **Var** int: $i = n$
2. **While** $i \geq 1$ **do**
   1. Write "Bonjour"
   2. $i = i - 1$
3. **EndWhile**

Linear loop example

1. **Var** int: $i = 1$
2. **While** $i \leq n$ **do**
   1. Write "Bonjour"
   2. $i = i + 1$
3. **EndWhile**

1. **Var** int: $i = n$
2. **While** $i \geq 1$ **do**
   1. Write "Bonjour"
   2. $i = i - 1$
3. **EndWhile**

Number of elementary operations: $2n + 1$.

Logarithmic loop example

1. **Var** int: $i = 1$
2. **While** $i \leq n$ **do**
   1. Write “Bonjour”
   2. $i = i \times 2$
3. **EndWhile**

Logarithmic loop example

1. **Var** int: $i = 1$
2. **While** $i \leq n$ **do**
   1. Write "Bonjour"
   2. $i = i \times 2$
3. **EndWhile**

1. **Var** int: $i = n$
2. **While** $i \geq 1$ **do**
   1. Write "Bonjour"
   2. $i = i/2$
3. **EndWhile**

Logarithmic loop example

1. **Var** int: $i = 1$
2. **While** $i \leq n$ **do**
   1. Write "Bonjour"
   2. $i = i \times 2$
3. **EndWhile**

1. **Var** int: $i = n$
2. **While** $i \geq 1$ **do**
   1. Write "Bonjour"
   2. $i = i/2$
3. **EndWhile**

Number of elementary operations: $1 + \log_2(n)$.

Nested loop example

Nb of iterations = nb of iterations of external loop $\times$ nb of iterations of internal loop

Nested loop example

Nb of iterations = nb of iterations of external loop $\times$ nb of iterations of internal loop

1. **Var** int: $i = 1$
2. **While** $i \leq n$ **do**
    1. **Var** int: $j = 1$
    2. **While** $j \leq n$ **do**
        1. Write "Bonjour"
        2. $j = j \times 3$
    3. **EndWhile**
    4. $i = i + 1$
3. **EndWhile**

Nested loop example

Nb of iterations = nb of iterations of external loop $\times$ nb of iterations of internal loop

1. **Var** int: $i = 1$
2. **While** $i \leq n$ **do**
   1. **Var** int: $j = 1$
   2. **While** $j \leq n$ **do**
      1. Write "Bonjour"
      2. $j = j \times 3$
   3. **EndWhile**
   4. $i = i + 1$
3. **EndWhile**

Number of elementary operations: $1 + n + n \times \log_3(n)$.

Exercise

Function XYZ(array: $a[]$)

1. **Var** int: i
2. **For** i from 1 to n **do**
    1. **Var** int: $t = a[i]$
    2. **Var** int: j
    3. **For** j from $i - 1$ to 0 **do**
        1. $a[j + 1] = a[j]$
    4. **EndFor**
    5. $a[j + 1] = t$
3. **EndFor**

Exercise

Function XYZ(array: $a[]$)

1. (1)**Var** int: i
2. **For** i from 1 to n **do**
    1. **Var** int: $t = a[i]$
    2. **Var** int: j
    3. **For** j from $i - 1$ to 0 **do**
        1. $a[j + 1] = a[j]$
    4. **EndFor**
    5. $a[j + 1] = t$
3. **EndFor**

Exercise

Function XYZ(array: $a[]$)

1. (1)**Var** int: i
2. (n)**For** i from 1 to n **do**
    1. **Var** int: $t = a[i]$
    2. **Var** int: j
    3. **For** j from $i - 1$ to 0 **do**
        1. $a[j + 1] = a[j]$
    4. **EndFor**
    5. $a[j + 1] = t$
3. **EndFor**

Exercise

Function XYZ(array: $a[]$)

1. (1)**Var** int: i
2. (n)**For** i from 1 to n **do**
    1. (1)**Var** int: $t = a[i]$
    2. **Var** int: j
    3. **For** j from $i - 1$ to 0 **do**
        1. $a[j + 1] = a[j]$
    4. **EndFor**
    5. $a[j + 1] = t$
3. **EndFor**

Exercise

Function XYZ(array: $a[]$)

1. (1)**Var** int: i
2. (n)**For** i from 1 to n **do**
    1. (1)**Var** int: $t = a[i]$
    2. (1)**Var** int: j
    3. **For** j from $i - 1$ to 0 **do**
        1. $a[j + 1] = a[j]$
    4. **EndFor**
    5. $a[j + 1] = t$
3. **EndFor**

Exercise

Function XYZ(array: $a[]$)

1. (1)**Var** int: i
2. (n)**For** i from 1 to n **do**
    1. (1)**Var** int: $t = a[i]$
    2. (1)**Var** int: j
    3. (?)**For** j from $i - 1$ to 0 **do**
        1. $a[j + 1] = a[j]$
    4. **EndFor**
    5. $a[j + 1] = t$
3. **EndFor**

Exercise

Function XYZ(array: $a[]$)

1. (1)**Var** int: i
2. (n)**For** i from 1 to n **do**
    1. (1)**Var** int: $t = a[i]$
    2. (1)**Var** int: j
    3. (?)**For** j from $i - 1$ to 0 **do**
        1. (1)$a[j + 1] = a[j]$
    4. **EndFor**
    5. $a[j + 1] = t$
3. **EndFor**

Exercise

Function XYZ(array: $a[]$)

1. (1)**Var** int: i
2. (n)**For** i from 1 to n **do**
    1. (1)**Var** int: $t = a[i]$
    2. (1)**Var** int: j
    3. (?)**For** j from $i - 1$ to 0 **do**
        1. (1)$a[j + 1] = a[j]$
    4. **EndFor**
    5. (1)$a[j + 1] = t$
3. **EndFor**

Homeworks

Give algorithms having number of elementary operations as below.

- $T_1(n) = 3 + 5n$
- $T_2(n) = n \log_2 n$
- $T_3(n) = n^3$
- $T_4(n) = (3n)!$
- $T_5(n) = \log_2(3n)$
- $T_6(n) = 2 \log_3(2n)$
- $T_7(n) = n^2 \log_4 n$
- $T_8(n) = \sqrt{n}$
- $T_9(n) = \sqrt[3]{n^2}$
- $T_{10}(n) = 2^n$
- $T_{11}(n) = n!$

Solving recurrences

logaritmic recurrence

$f(n) = 1 + f(n/2)$
$= k + f(0)$ where $2^k <= n < 2^k$

Bài tập

1. Cài đặt các thuật toán có độ phức tạp lần lượt là $O(n), O(log(n)), O(n^2)$. Chạy thự nghiệm đo thời gian thực thi với tập dữ liệu lần lượt là: 10, 100, 1000, 10000, 100000, 1000000
2. Xây dựng các tập dữ liệu sau:
   - Gồm 10 số được sinh ngẫu nhiêu khác nhau trong khoảng [1..100]
   - Gồm 100 số được sinh ngẫu nhiêu khác nhau trong khoảng [1..1000]
   - Gồm 1000 số được sinh ngẫu nhiêu khác nhau trong khoảng [1..10000]

   Xây dưng cây tìm kiếm nhị phân và danh sách liên kết đơn với các tập dữ liệu đã sinh ở trên. sinh một số ngẫu nhiên thự nghiệm tìm kiếm trên các cấu trúc để đo thời gian thực thi