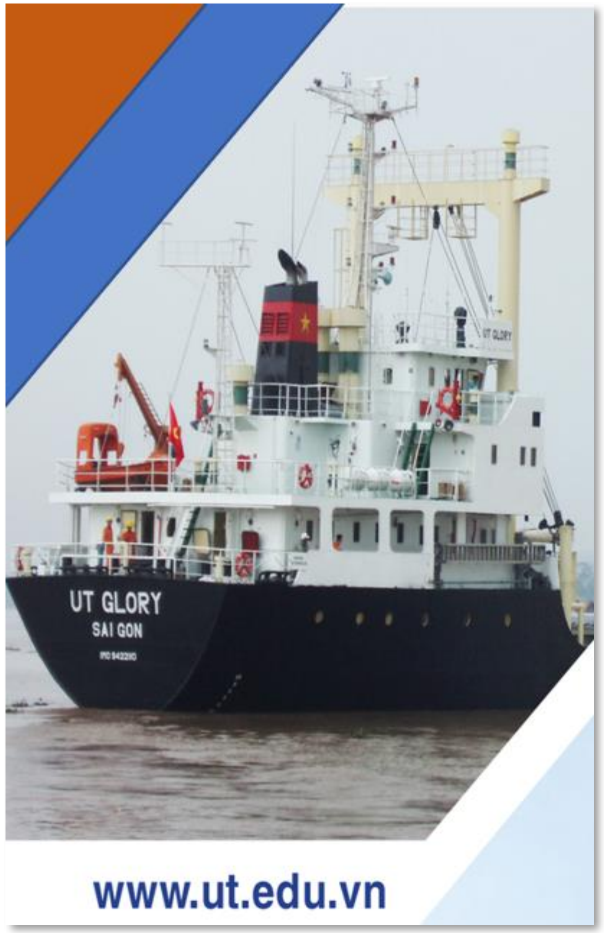
TRƯỜNG ĐẠI HỌC GIAO THÔNG VẬN TẢI THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
KHOA CƠ BẢN – BỘ MÔN TOÁN



BÀI GIẢNG
ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

CHƯƠNG I. MA TRẬN, ĐỊNH THỨC, HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

§ 4. Hệ phương trình tuyến tính

ThS. Đinh Tiến Dũng

NỘI DUNG

1. *Các khái niệm về hệ phương trình tuyến tính.*
2. *Điều kiện có nghiệm.*
3. *Các phương pháp giải.*

§ 4. Hệ phương trình tuyến tính

I. CÁC KHÁI NIỆM

❖ 1. Định nghĩa

Hệ phương trình tuyến tính m phương trình, n ẩn số có dạng:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1)$$

trong đó: a_{ij} *(với i=1,…,m; j=1,…,n) là hệ số của ẩn,*

b_i *(i=1,…,m) là hệ số tự do,* $x_1,\dots, x_n$ *là các ẩn số.*

- ***Đặc biệt, khi*** $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$ ***ta gọi là hệ phương trình tuyến tính thuần nhất, vậy hệ thuần nhất có dạng:***

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Trong đó: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ *gọi là ma trận hệ số,*

$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$ *gọi là ma trận cột ẩn số,*

$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}$ *gọi là ma trận cột hệ số tự do.*

Khi đó dạng ma trận của hệ phương trình tuyến tính:

$$(1) \Leftrightarrow A.X = B; \qquad (2) \Leftrightarrow A.X = 0$$

❖ 2. *Ví dụ:* *Cho các ma trận* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$. *Ta thấy:*

$$A.X = B \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x + 2y \\ 3x + 4y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$ *(Thực hiện phép nhân ma trận ở vế trái)*

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x + 4y = 6 \end{cases}.$$ *(Dùng ĐN hai ma trận bằng nhau)*

Do đó dạng ma trận của hệ phương trình $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x + 4y = 6 \end{cases}$ *là :*

A.X = B, *với* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$.

II. ĐIỀU KIỆN CÓ NGHIỆM

❖ *Định lý (về điều kiện có nghiệm của hệ pttt)*

Cho hệ phương trình tuyến tính gồm m phương trình, n ẩn số có dạng:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots.\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1)$$

Gọi $\overline{A} = [A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$ *là ma trận hệ số mở rộng. Khi đó:*

a) Nếu $r(A) < r\left(\overline{A}\right)$ *thì hệ (1) vô nghiệm.*

b) Nếu $r(A) = r\left(\overline{A}\right) = n$ *(số ẩn) thì hệ (1) có duy nhất nghiệm.*

c) Nếu $r(A) = r\left(\overline{A}\right) = r < n$ *thì hệ (1) có vô số nghiệm phụ thuộc* ***n-r*** *tham số.*

❖ Hệ quả: (Điều kiện có nghiệm của hệ thuần nhất)

Cho hệ p.trình tuyến tính thuần nhất gồm n phương trình, n ẩn số có dạng:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Khi đó $\overline{A} = [A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 \end{array}\right]$ *nên* $r(A) = r\left(\overline{A}\right)$ *do đó hệ (2) luôn có nghiệm và chỉ có hai khả năng sau:*

a) *Hệ (2) có duy nhất nghiệm* $\Leftrightarrow r(A) = n \Leftrightarrow det(A) \neq 0$. *(Nghiệm duy nhất là nghiệm tầm thường* $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$*).*

b) *Nếu* $r(A) = r < n$ *thì hệ (1) có vô số nghiệm phụ thuộc n-r tham số.*

III. CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1) Phương pháp biến đổi sơ cấp Gauss

Đây là phương pháp tổng quát để giải một hệ phương trình tuyến tính gồm m phương trình và n ẩn số dạng AX=B. Gồm các bước sau:

- ***Bước 1: Lập ma trận hệ số mở rộng $\overline{A} = [A|B]$, sử dụng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng đưa ma trận ấy về dạng bậc thang (dòng).***
- ***Bước 2: Giải ngược từ phương trình cuối lên phương trình đầu bằng cách lấy nghiệm của phương trình ở dưới thế dần lên trên.***

- *Chú ý:*
  - *Nếu trong $\overline{A}$ có hai dòng giống nhau hoặc tỷ lệ nhau thì xoá bỏ một dòng.*
  - *Nếu trong $\overline{A}$ có một dòng gồm toàn số 0 thì xoá dòng đó.*
  - *Nếu trong $\overline{A}$ có một dòng có dạng (0 0 0 0 .... 0 | b) với $b \neq 0$ thì hệ vô nghiệm.*
  - *Nếu hệ có dạng tương tự bậc thang thì không cần đưa về bậc thang nữa mà giải ngay từ phương trình ít ẩn số đến phương trình nhiều ẩn số của hệ.*

❖ *VD1.* *Giải hệ phương trình bằng phương pháp Gauss:*

$$\begin{cases} 2x - 3y - 4z + 5t = -13 \\ 4x - 6y + z - t = 14 \\ 6x - 9y + z + 2t = 13 \\ 2x - 3y - 2z - 4t = 9 \end{cases}.$$

Giải

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & -4 & 5 & -13 \\ 4 & -6 & 1 & -1 & 14 \\ 6 & -9 & 1 & 2 & 13 \\ 2 & -3 & -2 & -4 & 9 \end{array}\right] \xrightarrow[d_4 - d_1 \to d_4]{\substack{d_2 - 2d_1 \to d_2 \\ d_3 - 3d_1 \to d_3}} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & -4 & 5 & -13 \\ 0 & 0 & 9 & -11 & 40 \\ 0 & 0 & 13 & -13 & 52 \\ 0 & 0 & 2 & -9 & 22 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{13}d_3 \leftrightarrow d_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & -4 & 5 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 9 & -11 & 40 \\ 0 & 0 & 2 & -9 & 22 \end{array}\right] \xrightarrow[d_4 - 2d_2 \to d_4]{d_3 - 9d_2 \to d_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & -4 & 5 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 14 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{7}d_4 \to d_4]{\frac{1}{2}d_3 \to d_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & -4 & 5 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{xóa } d_4} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & -4 & 5 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

Vậy hệ đã cho tương đương hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} 2x - 3y - 4z + 5t = -13 \\ z - t = 4 \\ -t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y - 4z + 5t = -13 \\ z - (-2) = 4 \\ t = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y - 4.2 + 5(-2) = -13 \\ z = 2 \\ t = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ z = 2 \\ t = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} + \frac{3a}{2} \\ y = a \\ z = 2 \\ t = -2 \end{cases} \quad (a \in R)$$

❖ *Nhận xét:* *Vì* $r(A) = r\left(\overline{A}\right) = 3 < 4$ *(số ẩn) nên hệ có vô số nghiệm phụ thuộc vào 4-3=1 tham số tự do.*

❖ *VD2. Giải hệ sau bằng phương pháp Gauss:* $\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ y + 3z = 3 \\ 2x + y + z = -1 \end{cases}.$

Giải

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{d_3 - d_1 \to d_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right]$$

Vậy hệ đã cho tương đương hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ y + 3z = 3 \\ 2z = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ y + 3.(-1) = 3 \\ z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 6 - (-1) = 1 \\ y = 6 \\ z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 6 \\ z = -1 \end{cases}.$$

❖ ***Nhận xét:*** *Vì* $r(A) = r\left(\overline{A}\right) = 3$ *(số ẩn) nên hệ có nghiệm duy nhất.*

❖ *VD3. Giải hệ bằng phương pháp Gauss:* $\begin{cases} 5x - 2y + 5z - 3t = 3 \\ 4x + y + 3z - 2t = 1 \\ 2x + 7y - z = -1 \end{cases}$.

Giải

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 5 & -2 & 5 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 7 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{d_1 - d_2 \to d_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 7 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[d_3 - 2d_1 \to d_3]{d_2 - 4d_1 \to d_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 13 & -5 & 2 & -7 \\ 0 & 13 & -5 & 2 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{d_3 - d_2 \to d_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 13 & -5 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right].$$

Vì $r(A) = 2 < r\left(\overline{A}\right) = 3$ *nên hệ đã cho vô nghiệm.*

❖ *VD4. Giải và biện luận hệ phương trình:* $\begin{cases} x + 2y + 3t = 7 \\ 2x + 5y + z + 5t = 16 \\ 3x + 7y + z + 8t = 23 \\ 5x + 12y + 2z + 13t = m \end{cases}$.

Giải

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 7 \\ 2 & 5 & 1 & 5 & 16 \\ 3 & 7 & 1 & 8 & 23 \\ 5 & 12 & 2 & 13 & m \end{array}\right] \xrightarrow[d_4-5d_1\to d_4]{\substack{d_2-2d_1\to d_2 \\ d_3-3d_1\to d_3}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & m-35 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[xóa\ \ d_3]{d_4-2d_2\to d_4} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m-39 \end{array}\right]$$

Ta thấy $r(A) = 2$ *và* $r(\overline{A}) = \begin{cases} 2 \ \ khi\, m = 39 \\ 3 \ \ khi\, m \neq 39 \end{cases}$ *từ đó ta kết luận:*

- *Khi m ≠ 39: Hệ vô nghiệm vì* $\boldsymbol{r(A) = 2 < 3 = r\left(\overline{A}\right)}$.
- *Khi m = 39:* $\boldsymbol{r(A) = r\left(\overline{A}\right) = 2 < 4}$ *hệ có vô số nghiệm. Thay m=39 vào ma trận bậc thang ta được hệ:*

$$\begin{cases} x + 2y \quad\;\; + 3t = 7 \\ \qquad\;\; y + z - t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3b = 7 \\ y + a - b = 2 \\ z = a \\ t = b \end{cases} \quad (a, b \in R)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2(-a + b + 2) + 3b = 7 \\ y = -a + b + 2 \\ z = a \\ t = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + 2a - 5b \\ y = 2 - a + b \\ z = a \\ t = b \end{cases} \quad (a, b \in R).$$

BÀI TẬP TẠI LỚP

Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp Gauss:

a) $$\begin{cases} x + 4y + 5z = -1 \\ 2x + 7y - 11z = 2 \\ 3x + 11y - 6z = 1 \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 5x_4 - 2x_5 = -4 \\ 2x_1 + 12x_2 + 6x_3 - 18x_4 - 5x_5 = -5 \\ 3x_1 + 18x_2 + 8x_3 - 23x_4 - 6x_5 = -2 \end{cases}$$

Đáp án câu a:

Đáp án câu b:

2) Phương pháp giải hệ phương trình bằng định thức (Cramer)

Phương pháp Cramer dùng để giải một trường hợp đặc biệt của hệ phương trình tuyến tính khi số phương trình đúng bằng số ẩn. Ưu điểm của phương pháp này là ta tính được nghiệm bằng công thức nên rất thuận lợi khi lập trình cho máy tính bỏ túi. Tuy nhiên, khi hệ không có duy nhất nghiệm thì ta phải dùng phương pháp Gauss hỗ trợ mới giải được triệt để. Nội dung phương pháp như sau:

Cho hệ phương trình tuyến tính gồm n phương trình, n ẩn số có dạng:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (3)$$

B1. *Tính n+1 định thức:*

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}; \quad D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_{1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_{2} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & b_{i} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_{n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$ *với j=1,…,n.*

Thay cột thứ j bởi cột hệ số tự do

B2. *Kết luận nghiệm:*

- ***Nếu D≠ 0 thì hệ có nghiệm duy nhất*** $x_j = \frac{D_j}{D}$ ***với j=1,2,…,n.***
- ***Nếu D= 0 và tồn tại ít nhất một chỉ số j sao cho*** $D_j \neq 0$ ***thì hệ VN.***
- ***Nếu D=*** $D_j = 0, \forall j = 1, 2, \ldots, n$ ***thì hệ vô định (vô nghiệm hoặc vô số nghiệm). Trường hợp này phương pháp Cramer bế tắc, ta phải dùng phương pháp biến đổi sơ cấp Gauss để giải.***

❖ *VD1.* *Giải hệ bằng phương pháp Cramer:* $\begin{cases} 2x+y-z &= 1 \\ y+3z &= 3 \\ 2x+y+z &= -1 \end{cases}$.

Giải

$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4;$ $D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -12;$

$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 24;$ $D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4;$

Vì $D = 4 \neq 0$ *nên hệ đã cho có nghiệm duy nhất:* $\begin{cases} x = \dfrac{D_1}{D} = -3 \\ y = \dfrac{D_2}{D} = 6 \\ z = \dfrac{D_3}{D} = -1 \end{cases}$.

❖ *Lưu ý: Có thể kết luận nghiệm của hệ dạng vector nghiệm* $(-3; 6; -1)$.

❖ *VD2. Giải hệ thuần nhất bằng phương pháp Cramer:* $\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ y + 3z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$.

Giải

$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4$; $D_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$; *tương tự* $D_2 = D_3 = 0$.

Vì $D = 4 \neq 0$ *nên hệ đã cho có nghiệm duy nhất:* $\begin{cases} x = \dfrac{D_1}{D} = 0 \\ y = \dfrac{D_2}{D} = 0 \\ z = \dfrac{D_3}{D} = 0 \end{cases}$.

❖ *Lưu ý: Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất nếu có duy nhất nghiệm thì đó là nghiệm tầm thường.*

BÀI TẬP TẠI LỚP

Giải các hệ phương trình

a) $\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x + y + 2z = 2 \\ -2x + y - z = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ -x + 2y + 2z = 2 \\ x + y + 3z = 3 \end{cases}$

❖ VD3. Giải và biện luận hệ phương trình $\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases}$.

Giải

$$D = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = (m+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & m-1 & 0 \\ 0 & 0 & m-1 \end{vmatrix} = (m+2).(m-1)^2;$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m & 1 \\ m^2 & 1 & m \end{vmatrix} = -(m+1).(m-1)^2;$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & m^2 & m \end{vmatrix} = (m-1)^2; \; D_3 = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & m \\ 1 & 1 & m^2 \end{vmatrix} = (m-1)^2.(m+1)^2.$$

▪ *Nếu* $D \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -2$ *và* $m \neq 1$ *thì hệ có nghiệm duy nhất là:*

$$\begin{cases} x = \dfrac{D_1}{D} = \dfrac{-(m+1).(m-1)^2}{(m-1)^2.(m+2)} = \dfrac{-(m+1)}{m+2} \\ y = \dfrac{D_2}{D} = \dfrac{(m-1)^2}{(m-1)^2.(m+2)} = \dfrac{1}{m+2} \\ z = \dfrac{D_3}{D} = \dfrac{(m-1)^2.(m+1)^2}{(m-1)^2.(m+2)} = \dfrac{(m+1)^2}{m+2} \end{cases}.$$

▪ *Nếu* $m = -2$ *thì* $D=0$ *và* $D_2 = 9 \neq 0$ *nên hệ vô nghiệm.*

▪ *Nếu* $m = 1$ *thì* $D = D_1 = D_2 = D_3 = 0$. *Thế vào hệ pt ta được* $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x + y + z = 1$. *Hệ có VSN là:* $\begin{cases} x = 1-\alpha-\beta \\ y = \beta \\ z = \alpha \end{cases}$ $(\alpha, \beta \in R)$.

BÀI TẬP TẠI LỚP

Giải và biện luận hệ phương trình

$$\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = 1 \end{cases}$$

Đáp án:

3) Phương pháp ma trận giải hệ phương trình tuyến tính:

*Phương pháp ma trận dùng để giải một trường hợp đặc biệt của hệ phương trình tuyến tính khi **số phương trình đúng bằng số ẩn đồng thời ma trận hệ số là ma trận khả nghịch**. Nội dung phương pháp như sau:*

Cho hệ phương trình tuyến tính gồm n phương trình, n ẩn số

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (1)$$

- *Bước 1: Biểu diễn hệ phương trình ở dạng ma trận:* $A.X = B$.
- *Bước 2: Biến đổi:* $A.X = B \Leftrightarrow A^{-1}.(AX) = A^{-1}.B$

$$\Leftrightarrow (A^{-1}.A)X = A^{-1}.B$$

$$\Leftrightarrow I_n.X = A^{-1}.B \Leftrightarrow X = A^{-1}.B$$

❖ *Ví dụ: Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp ma trận:*

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ y + 3z = 3 \\ 2x + y + z = -1 \end{cases}.$$

Giải

Gọi A là ma trận hệ số, X là ma trận cột của ẩn, B là ma trận cột hệ số tự do thì hệ sẽ có dạng:

$$A.X = B \Leftrightarrow A^{-1}.(AX) = A^{-1}.B \Leftrightarrow (A^{-1}.A)X = A^{-1}.B \Leftrightarrow I_3.X = A^{-1}.B$$

$$\Leftrightarrow X = A^{-1}.B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}.\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & 1 \\ \frac{3}{2} & 1 & \frac{-3}{2} \\ \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất: $X = \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}$.

BÀI TẬP TẠI LỚP

Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp ma trận

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_4 = 0 \\ x_2 + 4x_3 + x_4 = -1 \\ -2x_2 - x_3 - 4x_4 = 0 \end{cases}$$

ĐÁP ÁN

BÀI TẬP VỀ NHÀ

<u>Câu 1</u>: Giải phương trình ma trận: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & 6 \end{bmatrix}$.

<u>Câu 2</u>: Cho hệ thuần nhất dưới đây: $\begin{cases} mx + y + z = 0 \\ x + my + z = 0 \\ x + y + mz = 0 \end{cases}$.

a) Tìm m để hệ có nghiệm không tầm thường.

b) Giải hệ khi m=-2.

<u>Câu 3:</u> Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Gauss:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = a \\ 3x + 2y - 4z = b \\ 2x - y = c \end{cases}.$$

<u>Câu 4</u>: Giải và biện luận hệ sau bằng phương pháp Gauss:

$$\begin{cases} x - y + z = 4 \\ x + 4y + 2z = 1 \\ x - y + mz = 2(m+1) \end{cases}.$$

BÀI TẬP VỀ NHÀ

<u>Câu 5</u>: Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Gauss:

$$\begin{cases} x+y-3z=-1 \\ x+y+z=3 \\ 2x+y-2z=1 \\ x+2y-3z=1 \end{cases}.$$

<u>Câu 6:</u> Cho ma trận : $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$. Tìm A^{-1}. Từ đó suy ra nghiệm

của hệ phương trình: $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+2y+3z=1. \\ 3y+z=2 \end{cases}$

<u>Câu 7</u>: Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Gauss :

$$\begin{cases} x-2y+z-t+u=0 \\ 3x-2y-z+t-2u=-1 \\ 2x+y-z+2t-3u=1 \\ 2x-5y+z-2t+2u=-2 \end{cases}.$$