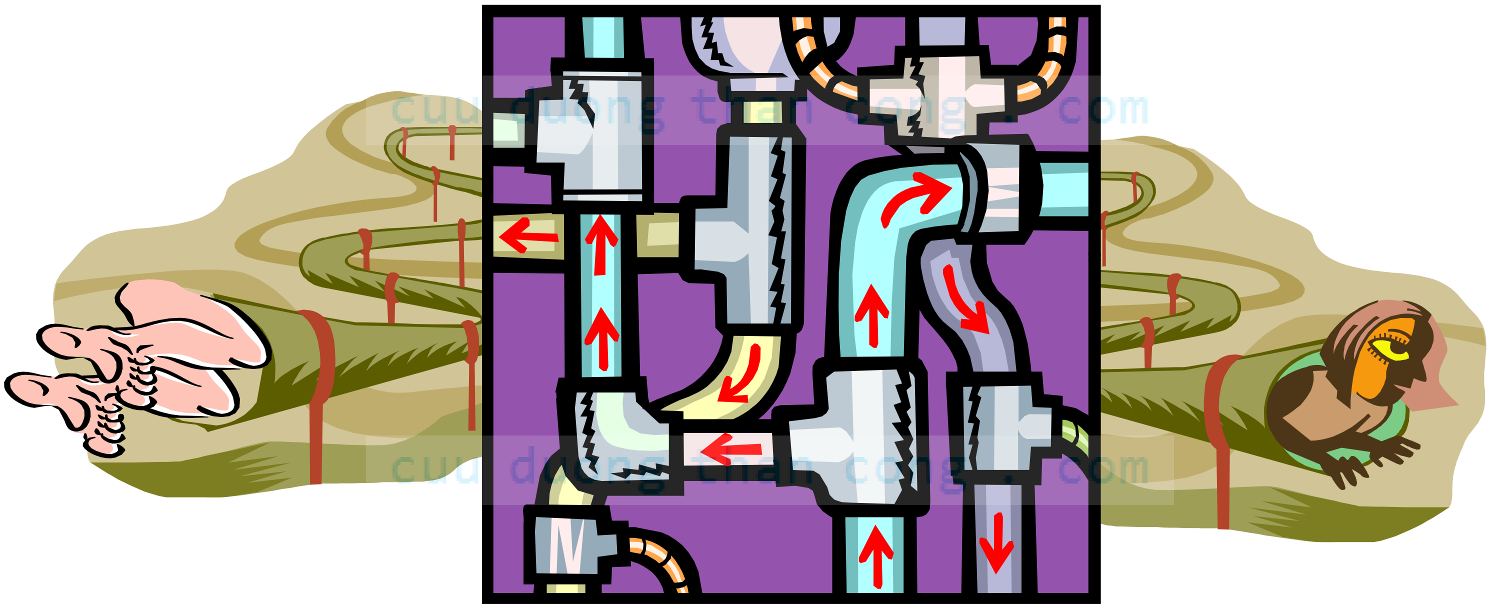
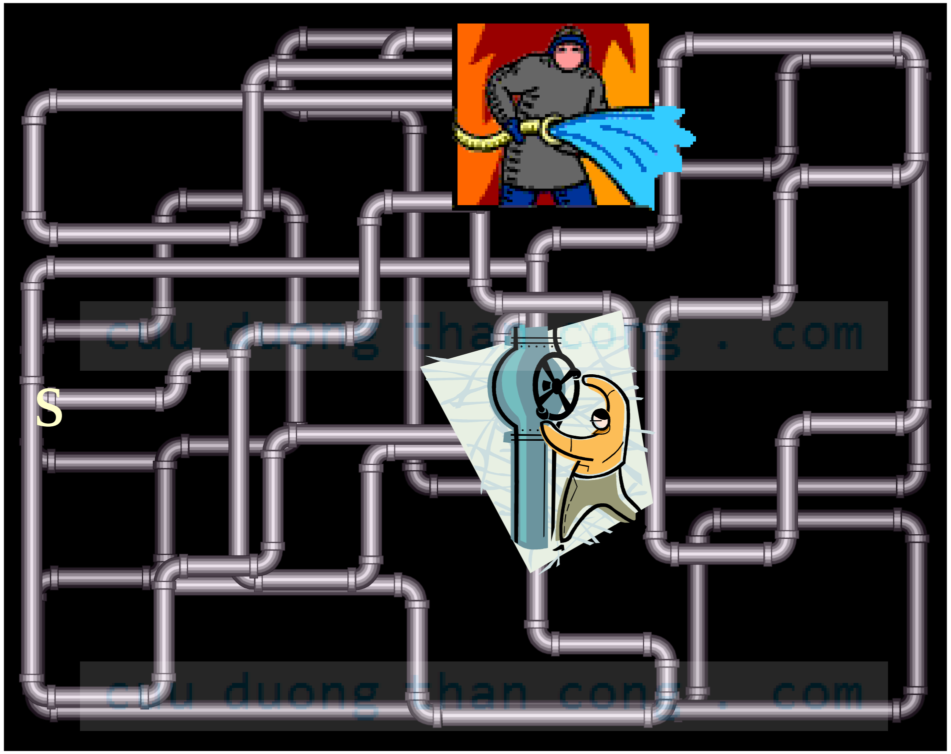
Các ứng dụng của
Bài toán luồng cực đại



Max Flow Applications



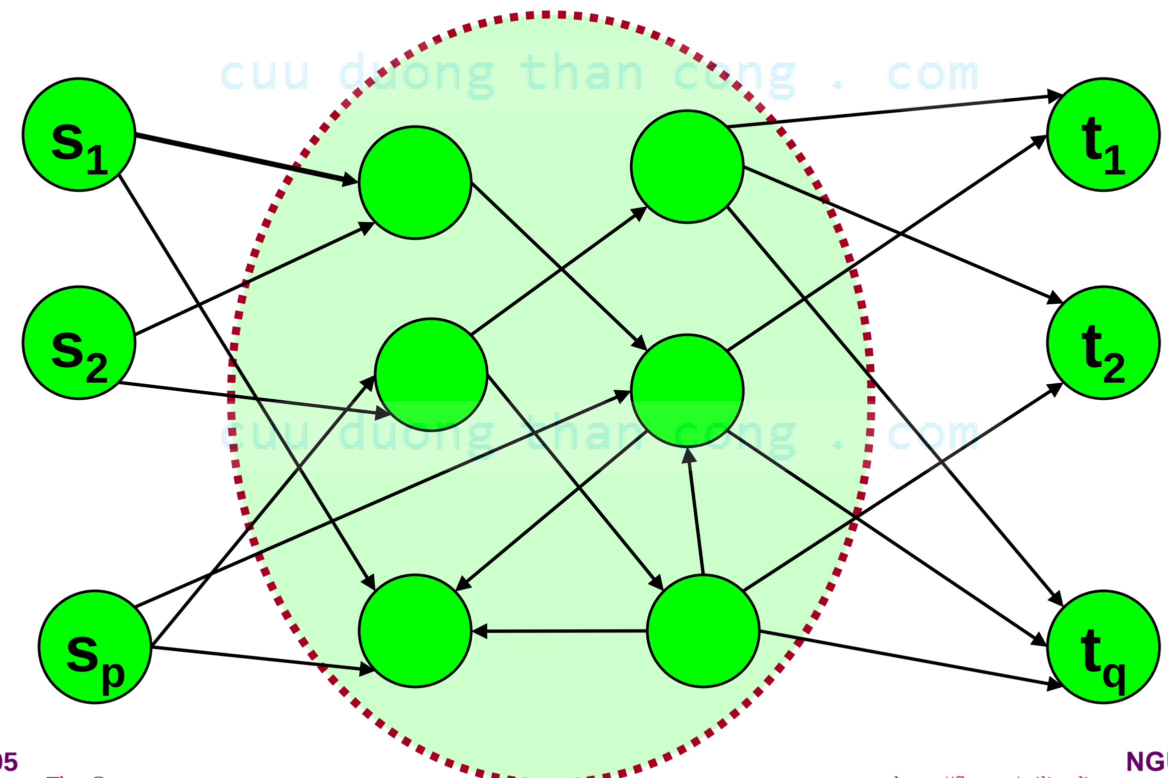
NỘI DUNG

- **Một số bài toán luồng tổng quát**
  – Bài toán với nhiều điểm phát và điểm thu
  – Bài toán với hạn chế thông qua ở nút
- **Một số ứng dụng trong tổ hợp**
  – Bài toán cặp ghép cực đại trong đồ thị hai phía
  – Độ tin cậy của mạng

Một số bài toán luồng tổng quát

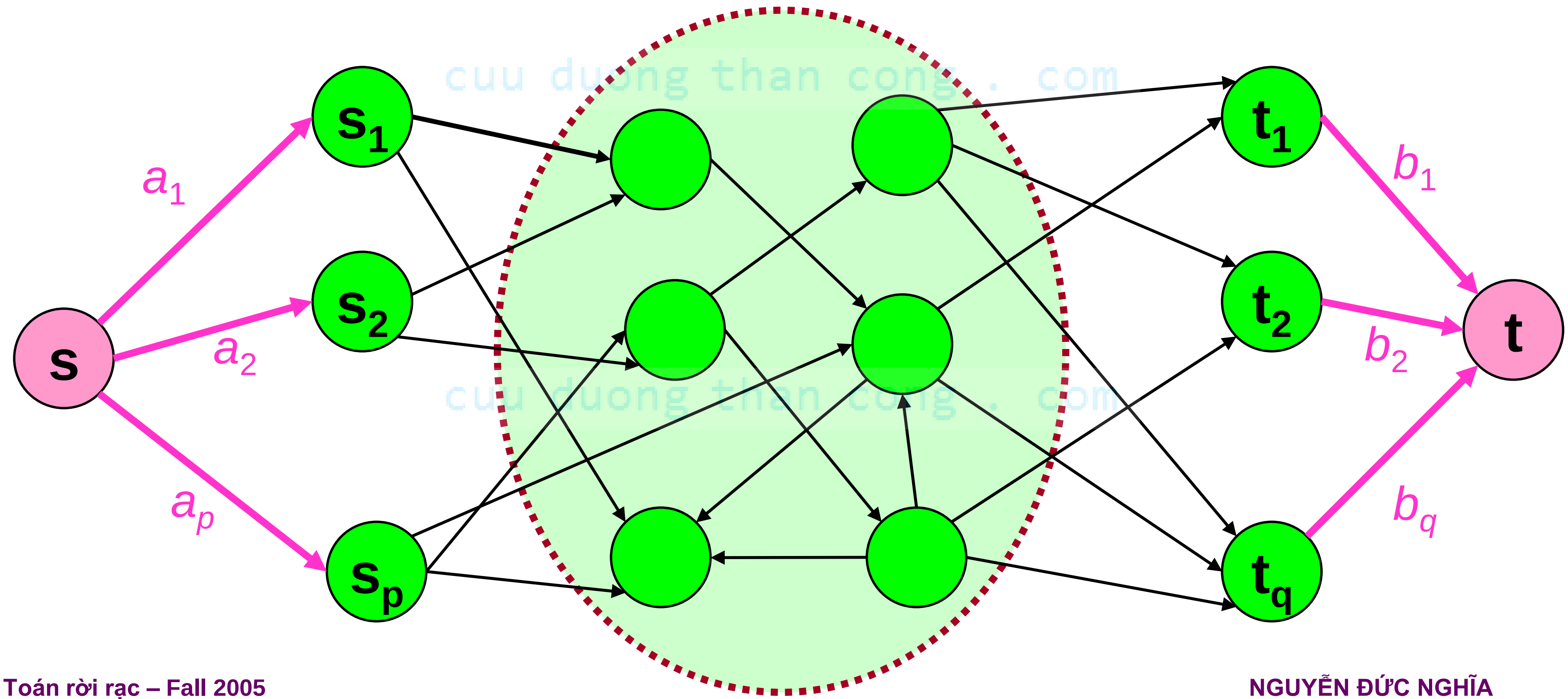
M¹ng víi nhiÒu ®iÓm ph¸t vµ ®iÓm thu

- XÐt m¹ng *G* víi *p* ®iÓm ph¸t $s_1, s_2, \ldots, s_p$ với lượng ph¸t là $a_1, a_2, \ldots, a_p$ vµ *q* ®iÓm thu $t_1, t_2, \ldots, t_q$ *với lượng thu là* $b_1, b_2, \ldots, b_q$
- Gi¶ sö r»ng luång cã thÓ ®i tõ mét ®iÓm ph¸t bÊt kú ®Õn tÊt c¶ c¸c ®iÓm thu.
- T×m luång cùc ®¹i tõ c¸c ®iÓm ph¸t ®Õn c¸c ®iÓm thu



M¹ng víi nhiÒu ®iÓm ph¸t vµ ®iÓm thu

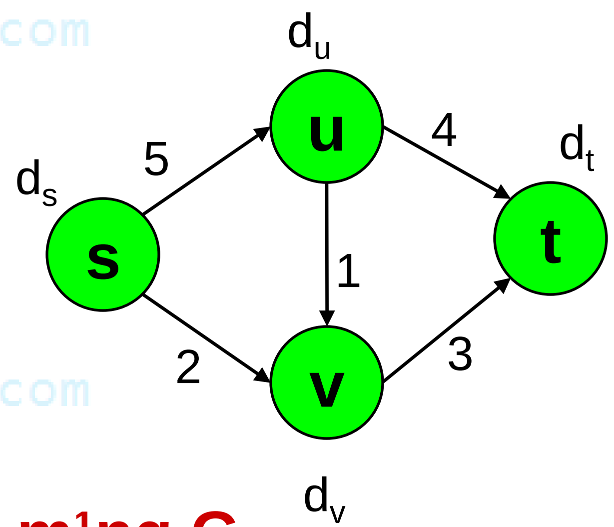
- **Đ-a vµo mét ®iÓm ph¸t gi¶ *s* vµ mét ®iÓm thu gi¶ *t* vµ c¸c c¹nh nèi *s* víi tÊt c¶ c¸c ®iÓm ph¸t vµ c¸c c¹nh nèi c¸c ®iÓm thu víi *t*.**
- **Kntq cña cung (s,s_i) sÏ b»ng a_i là l-îng ph¸t cña s_i.**
- **Kntq cña (t_i, t) sÏ bằng b_i là l-îng thu cña ®iÓm thu t_i.**
- **Bài to¸n dẫn về bài to¸n với 1 điểm ph¸t và một điểm thu.**



Bài toán với hạn chế thông qua ở nút

- Gi¶ sö trong m¹ng *G*, ngoµi kh¶ n¨ng th«ng qua cña c¸c cung *c*(*u, v*), ë mçi ®Ønh *v*□*V* cßn cã kh¶ n¨ng th«ng qua cña ®Ønh lµ *d*(*v*), vµ ®ßi hái tæng luång ®i vµo ®Ønh *v* kh«ng ®-îc v-ît qu¸ *d*(*v*), tøc lµ

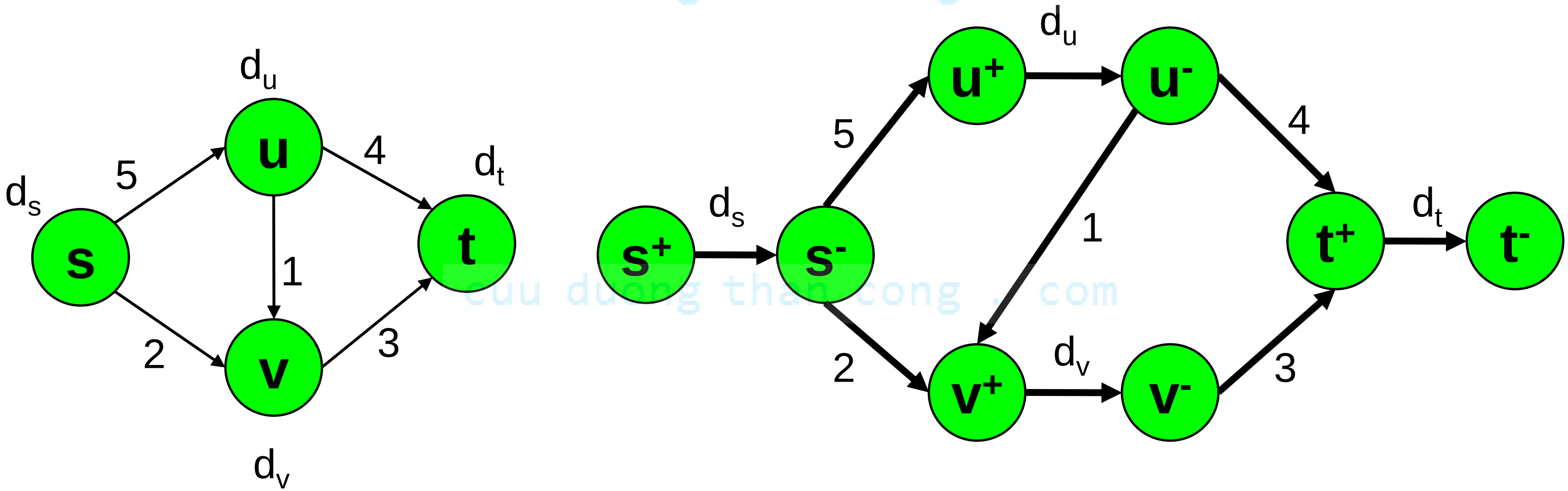
$$\sum_{w\in V} f(w,v) \le d(v).$$



- T×m luång cùc ®¹i từ *s* đến *t* trong m¹ng G.

Bài toán với hạn chế thông qua ở nút

- X©y dùng mét m¹ng *G′* sao cho: mçi ®Ønh *v* cña *G* t-¬ng øng víi 2 ®Ønh *v+, v-* trong *G′*, mçi cung (*u, v*) trong *G* øng víi cung (*u-, v+*) trong *G′*, mçi cung (*v,w*) trong *G* øng víi cung (*v-, w+*) trong *G′*. Ngoµi ra, mçi cung (*v+, v-*) trong *G′* cã kh¶ n¨ng th«ng qua lµ *d(v)*, tøc lµ b»ng kh¶ n¨ng th«ng qua cña ®Ønh *v* trong *G*.



Qui về bài toán tìm luồng cực đại trong G'

ỨNG DỤNG TRONG TỔ HỢP

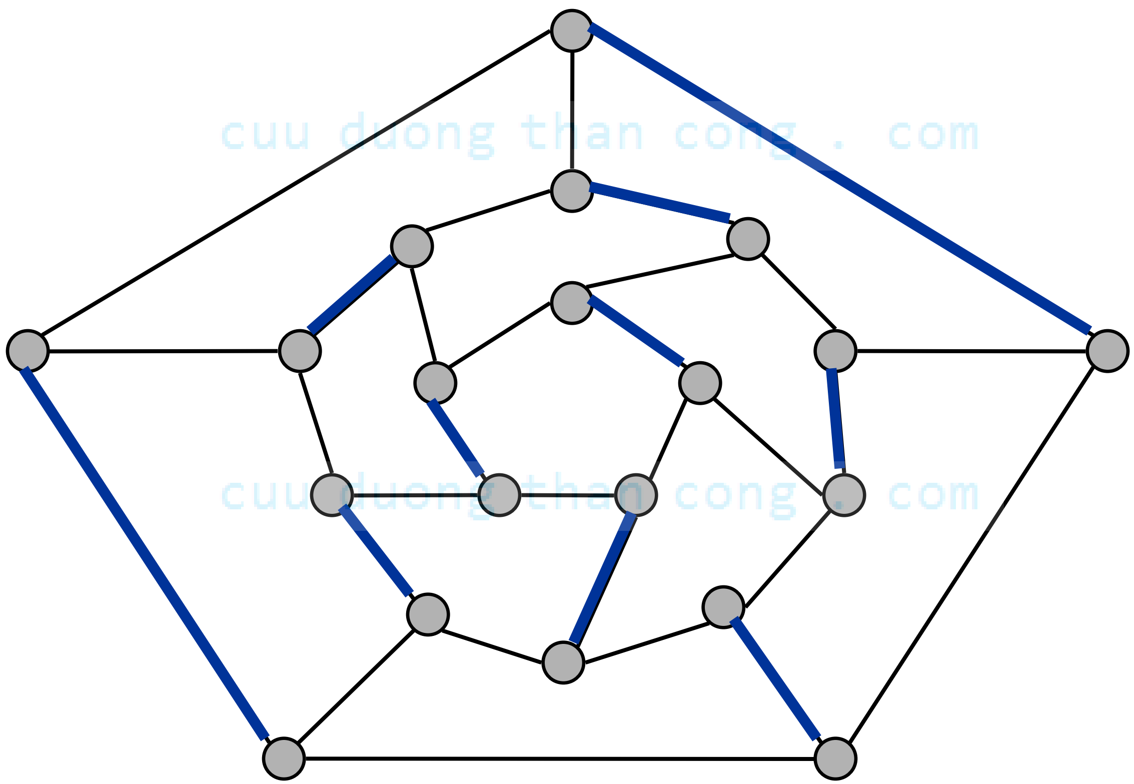
Bài toán ghép cặp (Matching Problems)

Cặp ghép (Matching)

Cho G = (V, E) là đồ thị vô hướng.

Cặp ghép trong đồ thị G là tập các cạnh của đồ thị đôi một không có đỉnh chung

***Bài toán cặp ghép cực đại* : Tìm cặp ghép với lực lượng lớn nhất**

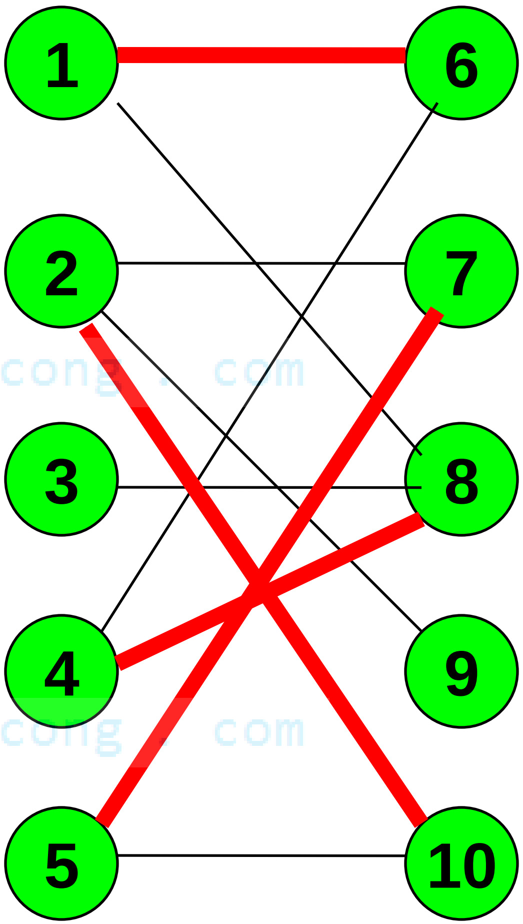


Bài toán cặp ghép cực đại trên đồ thị hai phía

Đồ thị vô hướng G=(V,E) là hai phía nếu V có thể phân hoạch thành 2 tập X và Y sao cho mỗi cạnh e∈E đều có thể biểu diễn e=(x, y) với x∈X và y∈Y.

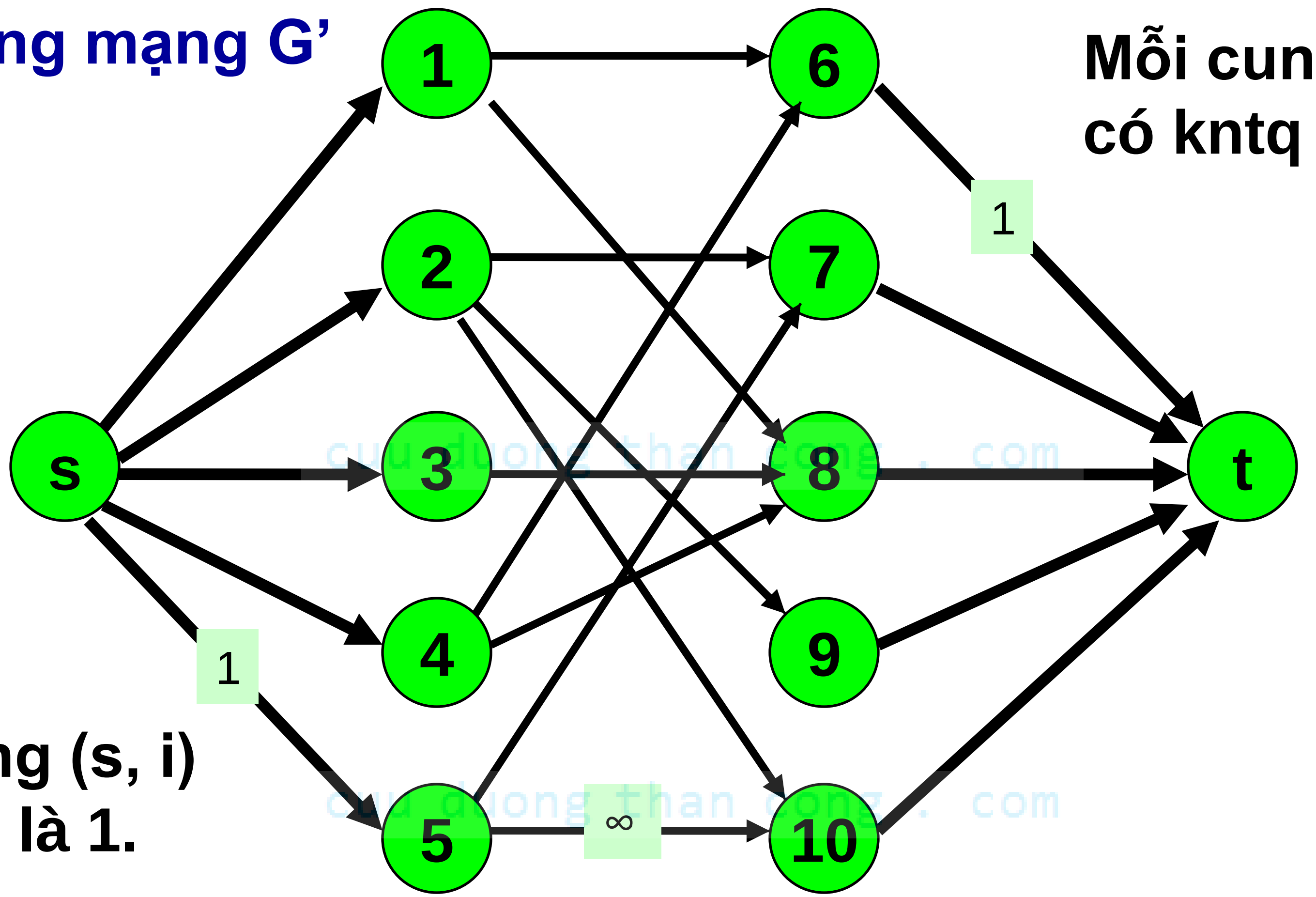
Cặp ghép là tập các cạnh đôi một không có đỉnh chung.

Bài toán cặp ghép cực đại **: Tìm cặp ghép có lực lượng lớn nhất**



Qui dẫn về bài toán luồng cực đại

Xây dựng mạng G'

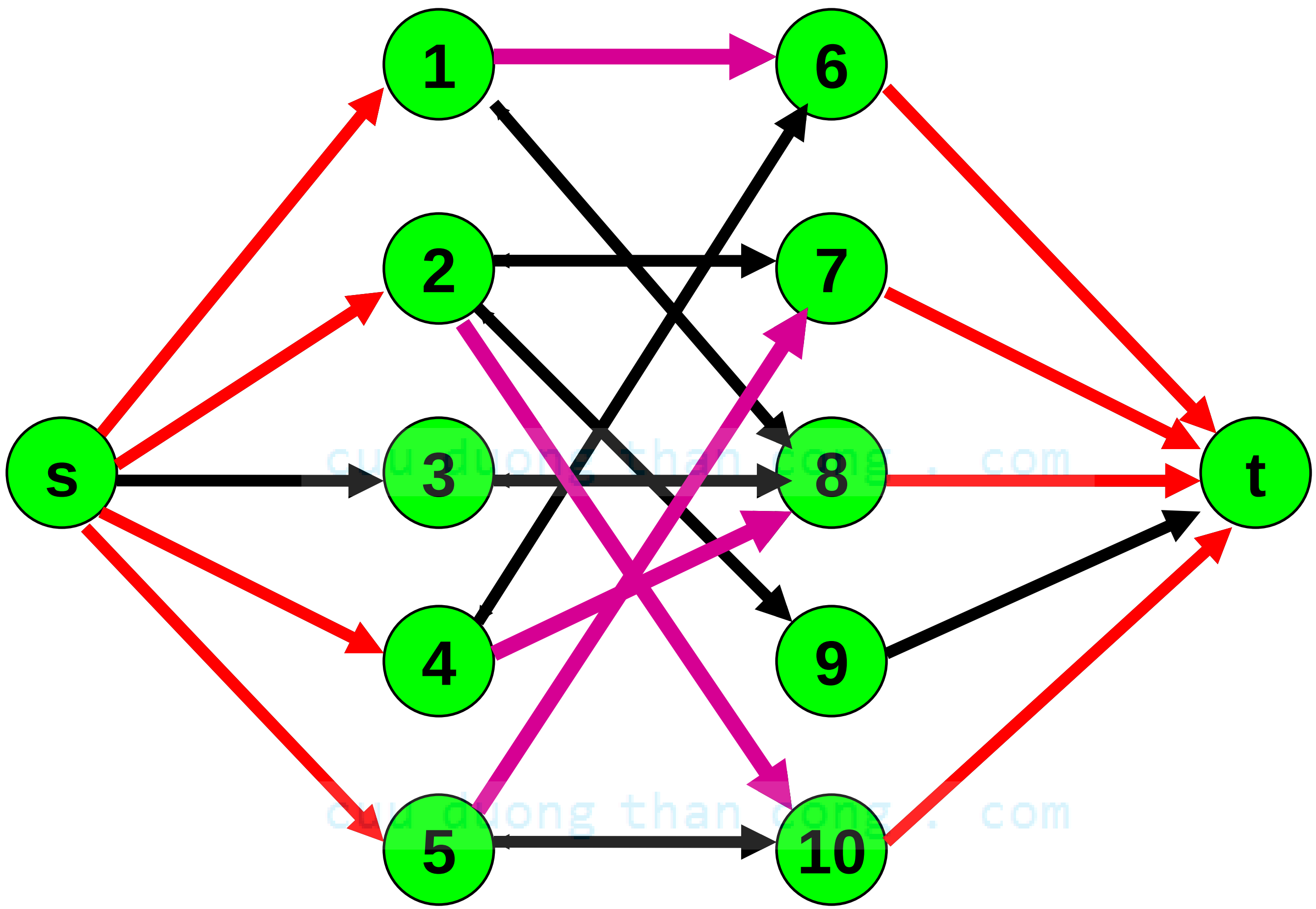


Mỗi cung (j, t) có kntq là 1.

Mỗi cung (s, i) có kntq là 1.

Mỗi cạnh (x,y) thay bởi cung (x,y) với kntq +∞.

Tìm luồng cực đại



Giá trị luồng cực đại từ s đến t là 4.

Cặp ghép cực đại có lực lượng là 4.

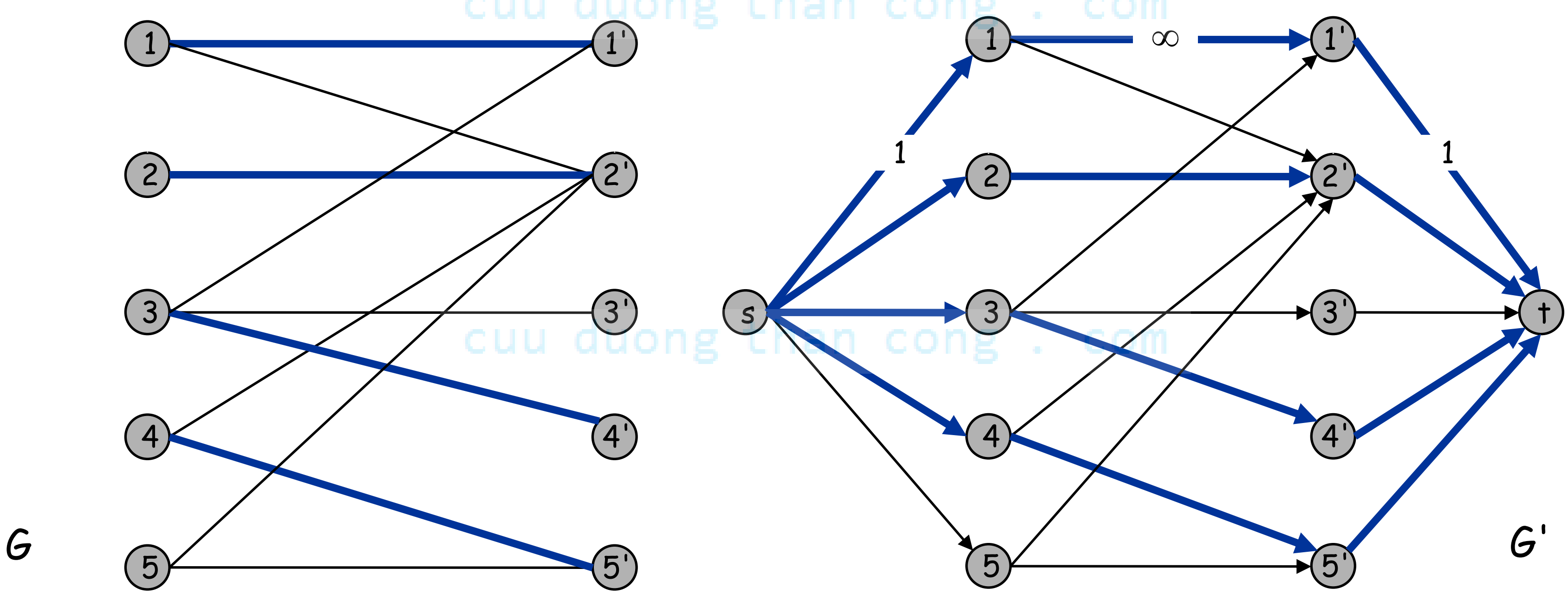
Bipartite Matching: Tính đúng đắn

Định lý. Lực lượng của cặp ghép cực đại trong G = giá trị của luồng cực đại trong G'.

CM. Chỉ cần chứng minh G có cặp ghép lực lượng k khi và chỉ khi G' có luồng với giá trị k.

⇒) Cho cặp ghép M có lực lượng k.

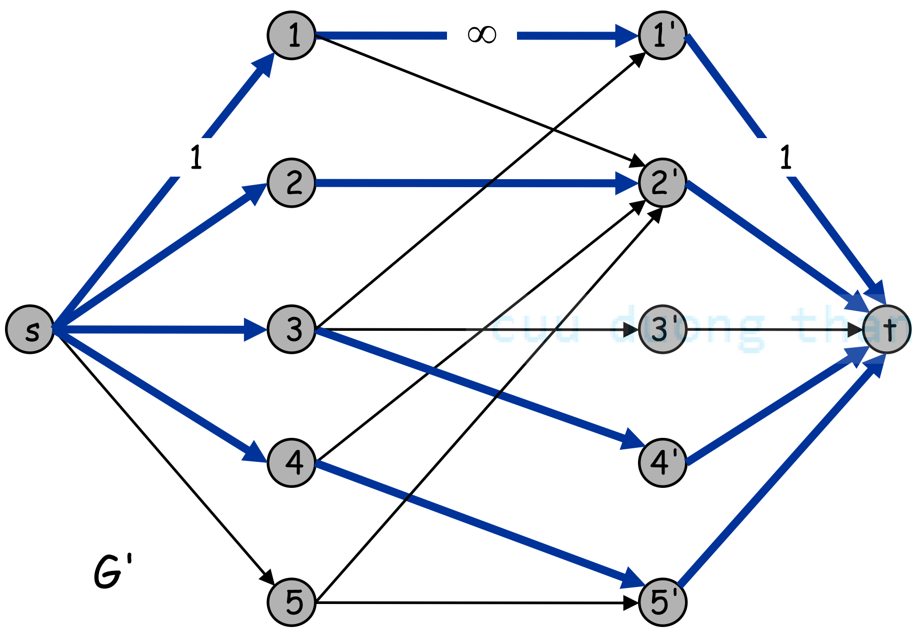
- **Xét luồng f đẩy luồng 1 đơn vị dọc theo mỗi một trong k đường đi.**
- **f là luồng có giá trị k. ■**

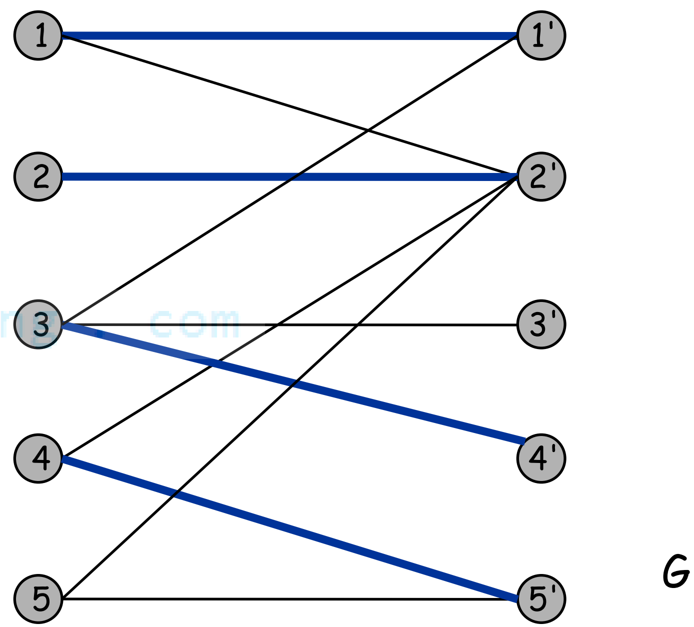


Bipartite Matching: Tính đúng đắn

⇐) Cho f là luồng giá trị k trong G'.

- Từ định lý về tính nguyên ⇒ tìm được luồng nguyên: f(e) chỉ là 0 hoặc 1.
- Gọi M = tập các cạnh e từ X sang Y với f(e) = 1.
  - mỗi đỉnh trong X và Y là đầu mút của ≤ một cạnh trong M
  - |M| = k, do luồng có giá trị k nên có đúng k cạnh từ X sang Y với giá trị luồng trên cung là 1 ▪





Cặp ghép hoàn hảo (Perfect Matching)

ĐN. Cặp ghép $M \subseteq E$ được gọi là **hoàn hảo (perfect)** nếu mỗi đỉnh của đồ thị là đầu mút của đúng 1 cạnh trong M.

Câu hỏi. Khi nào đồ thị hai phía có cặp ghép hoàn hảo?

Cấu trúc của đồ thị hai phía có cặp ghép hoàn hảo.

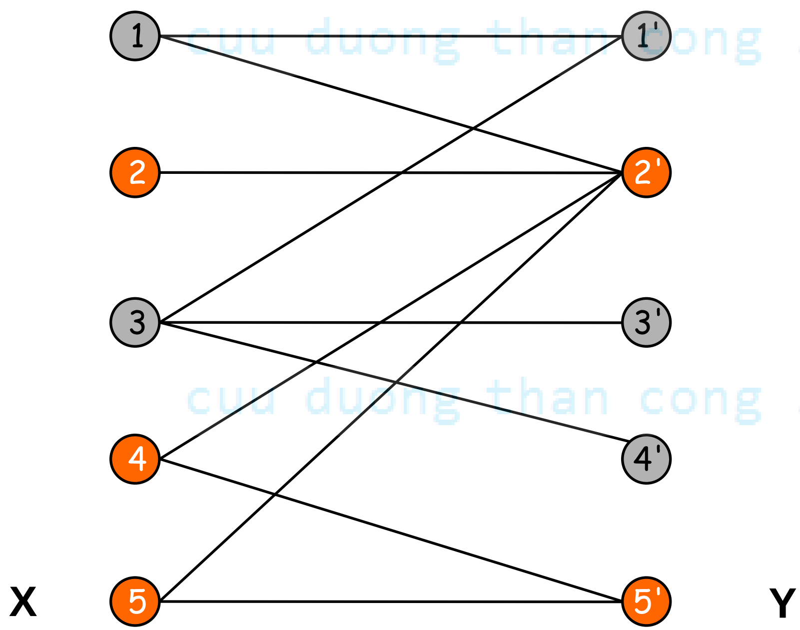
- Rõ ràng ta phải có $|X| = |Y|$.
- Điều kiện nào là cần nữa?
- Các điều kiện đủ là gì?

Cặp ghép hoàn hảo

Ký hiệu. **Gỉa sử S là tập con các đỉnh, ký hiệu Γ(S) là tập các đỉnh kề với các đỉnh trong S.**

Nhận xét. **Nếu đồ thị hai phía G = (X $\cup$ Y, E) có cặp ghép hoàn hảo, thì | Γ(S)| $\geq$ |S| với mọi tập con S $\subseteq$ X.**

CM. **Hai đỉnh bất kỳ trong S gắn với hai đỉnh khác nhau trong Γ(S).**



Không có cặp ghép hoàn hảo:

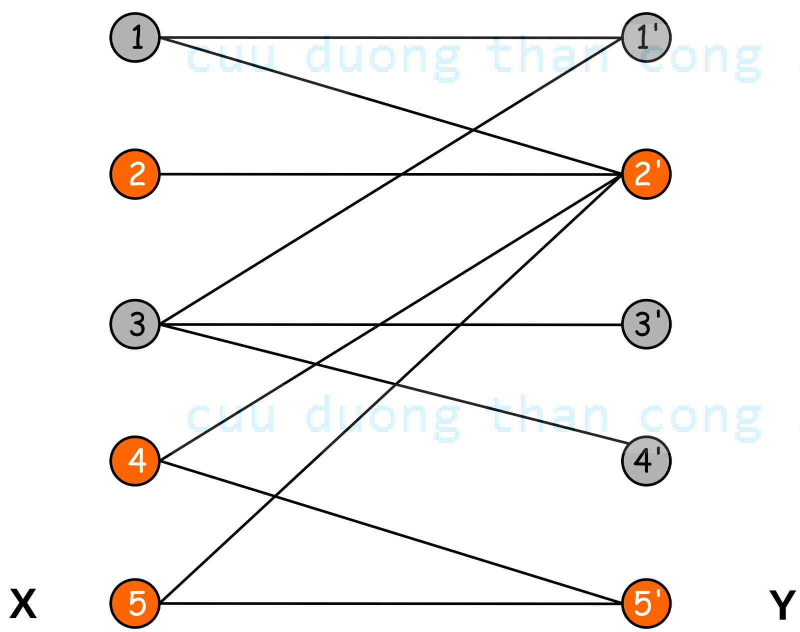
S = { 2, 4, 5 }

Γ(S) = { 2', 5' }.

Định lý về các đám cưới (Marriage Theorem)

Marriage Theorem. **[Frobenius 1917, Hall 1935]** **Giả sử G = (X $\cup$ Y, E) là đồ thị hai phía với |X| = |Y|. Khi đó, G có cặp ghép hoàn hảo khi và chỉ khi | Γ(S)| $\geq$ |S| với mọi tập con S $\subseteq$ X.**

CM. **$\Rightarrow$)** **Vừa chứng minh ở trên.**



Không có cặp ghép hoàn hảo:

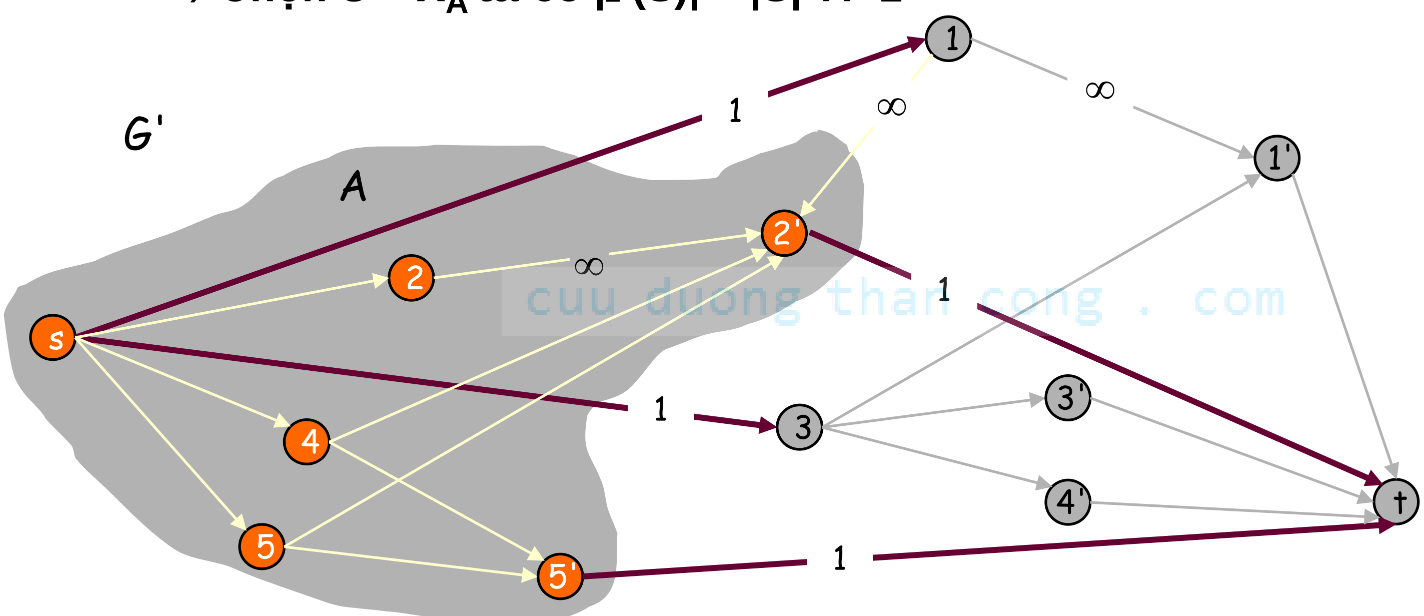
S = { 2, 4, 5 }

Γ(S) = { 2' , 5' }.

Chứng minh định lý về các đám cưới

CM. $\Leftarrow$) Giả sử G **không có** cặp ghép hoàn hảo.

- Xét bài toán luồng cực đại tương ứng và (A, B) là lát cắt nhỏ nhất trong G'.
- Theo định lý luồng cực đại và lát cắt nhỏ nhất, cap(A, B) < | X |.
- Gọi $X_A = X \cap A$, $X_B = X \cap B$, $Y_A = Y \cap A$.
- cap(A, B) = $|X_B| + |Y_A|$.
- Do lát cắt nhỏ nhất không sử dụng cạnh ∞ : $\Gamma(X_A) \subseteq Y_A$. Suy ra:
- $|\Gamma(X_A)| \leq |Y_A| = (|X_B| + |Y_A|) - |X_B| = \text{cap}(A, B) - |X_B| < |X| - |X_B| = |X_A|$.
- $\Rightarrow$ Chọn $S = X_A$ ta có $|\Gamma(S)| < |S|$?! ■



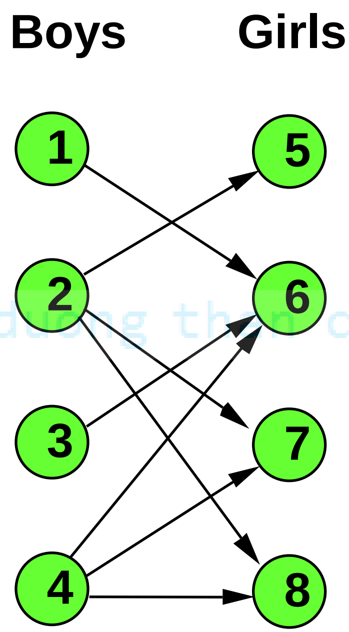
$X_A = \{2, 4, 5\}$

$X_B = \{1, 3\}$

$Y_A = \{2', 5'\}$

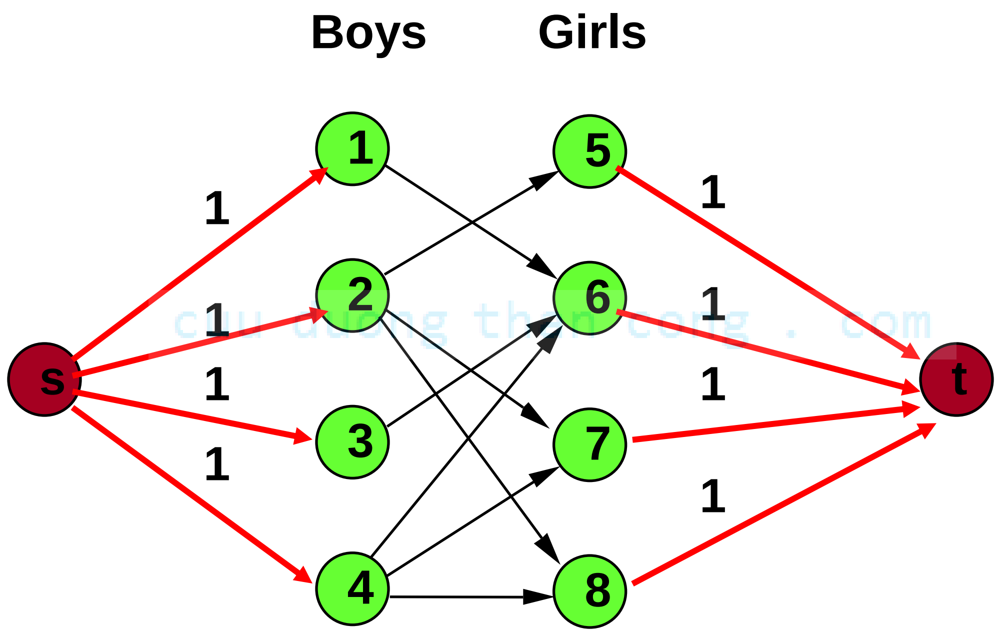
$\Gamma(X_A) = \{2', 5'\}$

Ví dụ



Có cách tổ chức các đám cưới?

Qui về bài toán luồng cực đại



Tồn tại luồng cực đại với giá trị 4?

Bipartite Matching: Thời gian tính

Sử dụng thuật toán luồng cực đại nào để tìm cặp ghép?

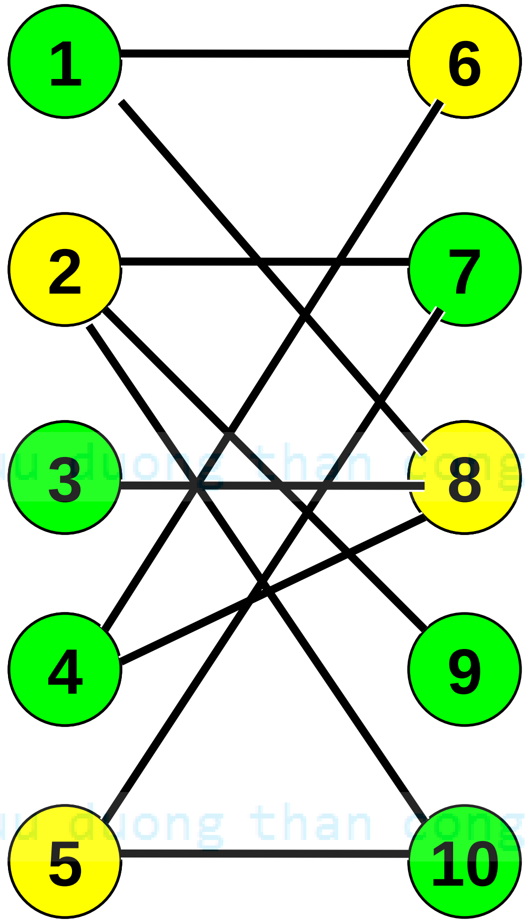
- Đường tăng luồng tuỳ ý: O(m val(f*)) = O(mn).
- Thang độ hoá kntq: $O(m^2 \log C) = O(m^2)$.
- Đường tăng ngắn nhất: $O(m\, n^{1/2})$.

Cặp ghép trên đồ thị tổng quát.

- Thuật toán trổ hoa (Blossom algorithm): $O(n^4)$. [Edmonds 1965]
- Thuật toán tốt nhất hiện biết: $O(m\, n^{1/2})$. [Micali-Vazirani 1980]

Đối ngẫu: Bài toán phủ đỉnh tối thiểu

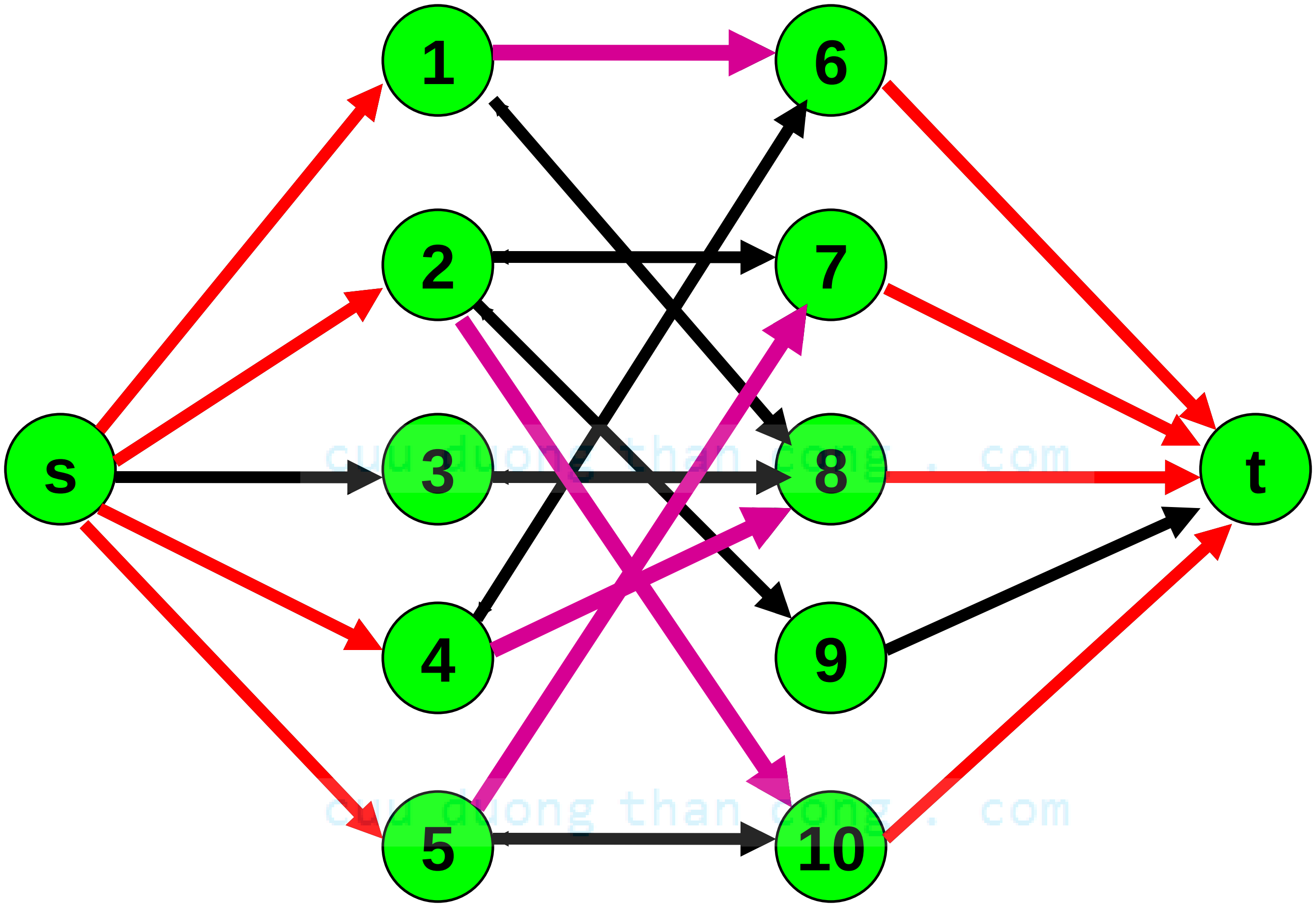
Phủ đỉnh là tập đỉnh C⊆V sao cho mỗi cạnh của đồ thị có ít nhất một đầu mút trong C



Bài toán phủ đỉnh tối thiểu: Tìm phủ đỉnh với lực lượng nhỏ nhất

Ví dụ: C = {2, 5, 6, 8} là một phủ đỉnh

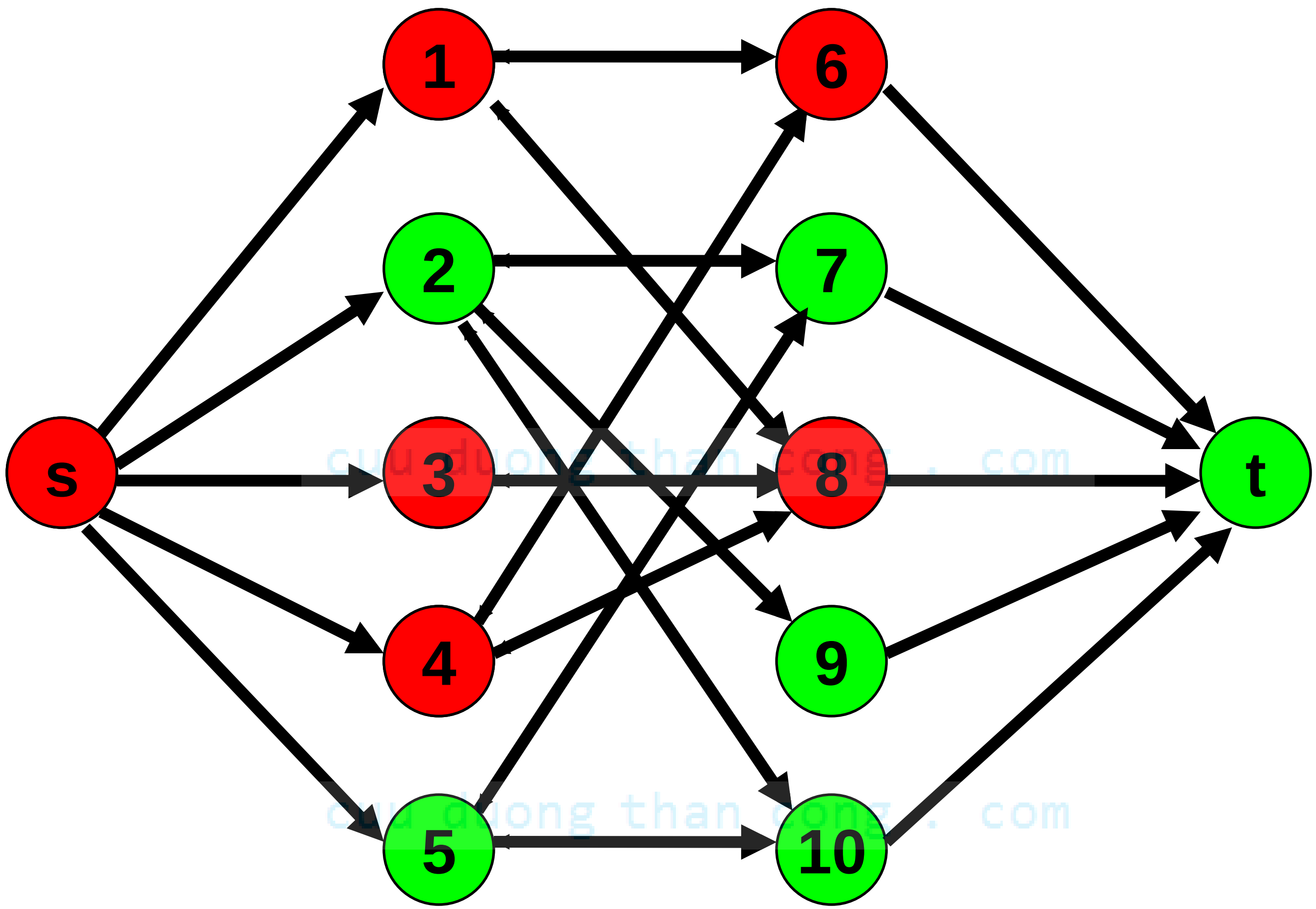
Tìm luồng cực đại



Giá trị luồng cực đại từ s đến t là 4.

Cặp ghép cực đại có lực lượng là 4.

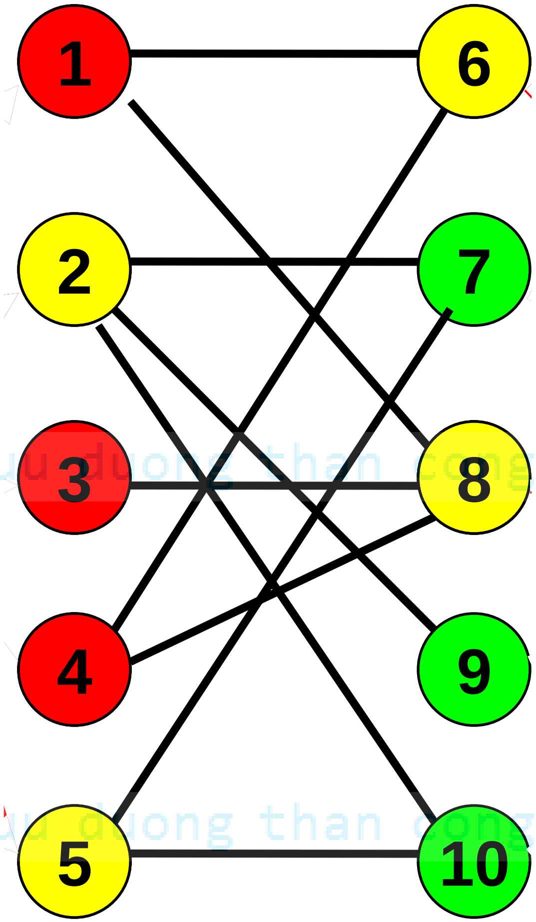
Xác định lát cắt nhỏ nhất



S = {s, 1, 3, 4, 6, 8}.
T = {2, 5, 7, 9, 10, t}.

Không có cung từ {1, 3, 4} đến {7, 9, 10} hoặc từ {6, 8} đến {2, 5}.

Ý nghĩa của lát cắt nhỏ nhất

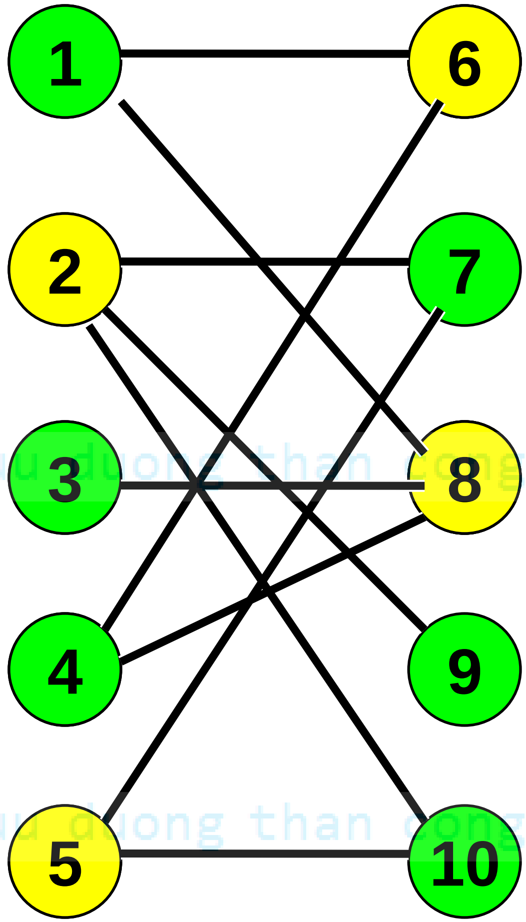


Xét tập đỉnh C = (X \ S) ∪ (T\t).

Mỗi cạnh của đồ thị xuất phát G kề với một đỉnh như vậy.

Đối ngẫu

Phủ đỉnh là tập đỉnh $C \subseteq V$ sao cho mỗi cạnh của đồ thị có ít nhất một đầu mút trong C



Tập đỉnh C = (X \ S) ∪ (T\ t) = { 2, 5, 6, 8 } là một phủ đỉnh

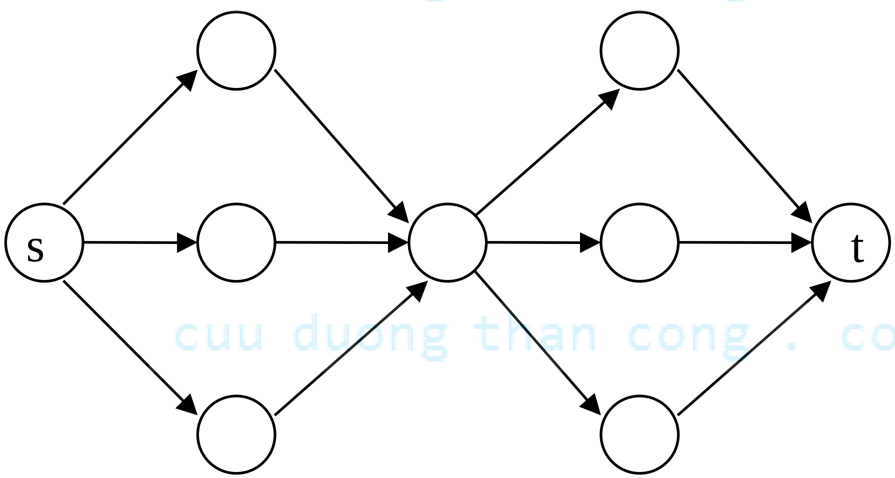
Lực lượng của cặp ghép cực đại là bằng lực lượng của phủ đỉnh nhỏ nhất.

Độ tin cậy của mạng
Network Reliability

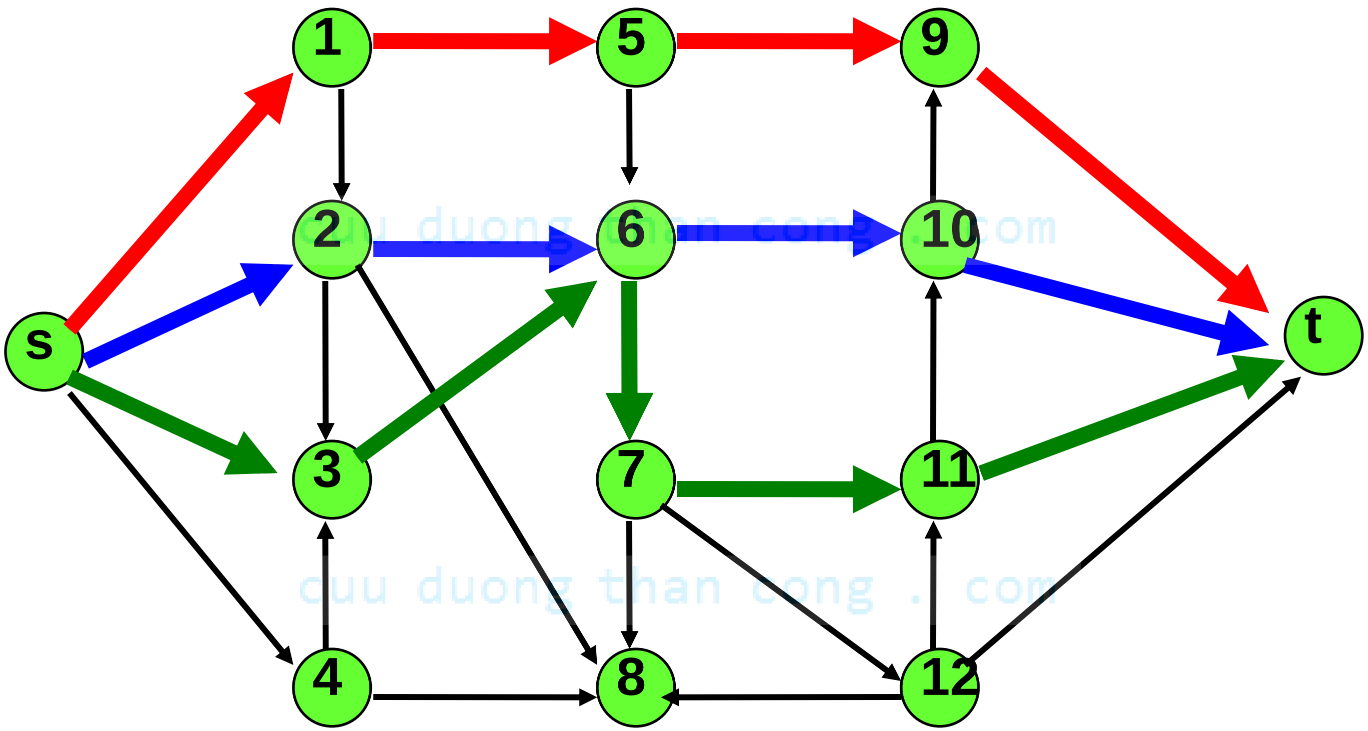
Độ tin cậy của mạng

- Xét mạng truyền thông (Communication Network)
- Hỏi có bao nhiêu đường đi không giao nhau cạnh từ s đến t?
  - Xác định số này bằng cách nào?

Định lý. ***Giả sử G = (V,E) là đồ thị có hướng. Khi đó số lớn nhất các đường đi không giao nhau cạnh từ s đến t là bằng số ít nhất các cạnh cần loại bỏ khỏi G để không còn đường đi từ s đến t.***

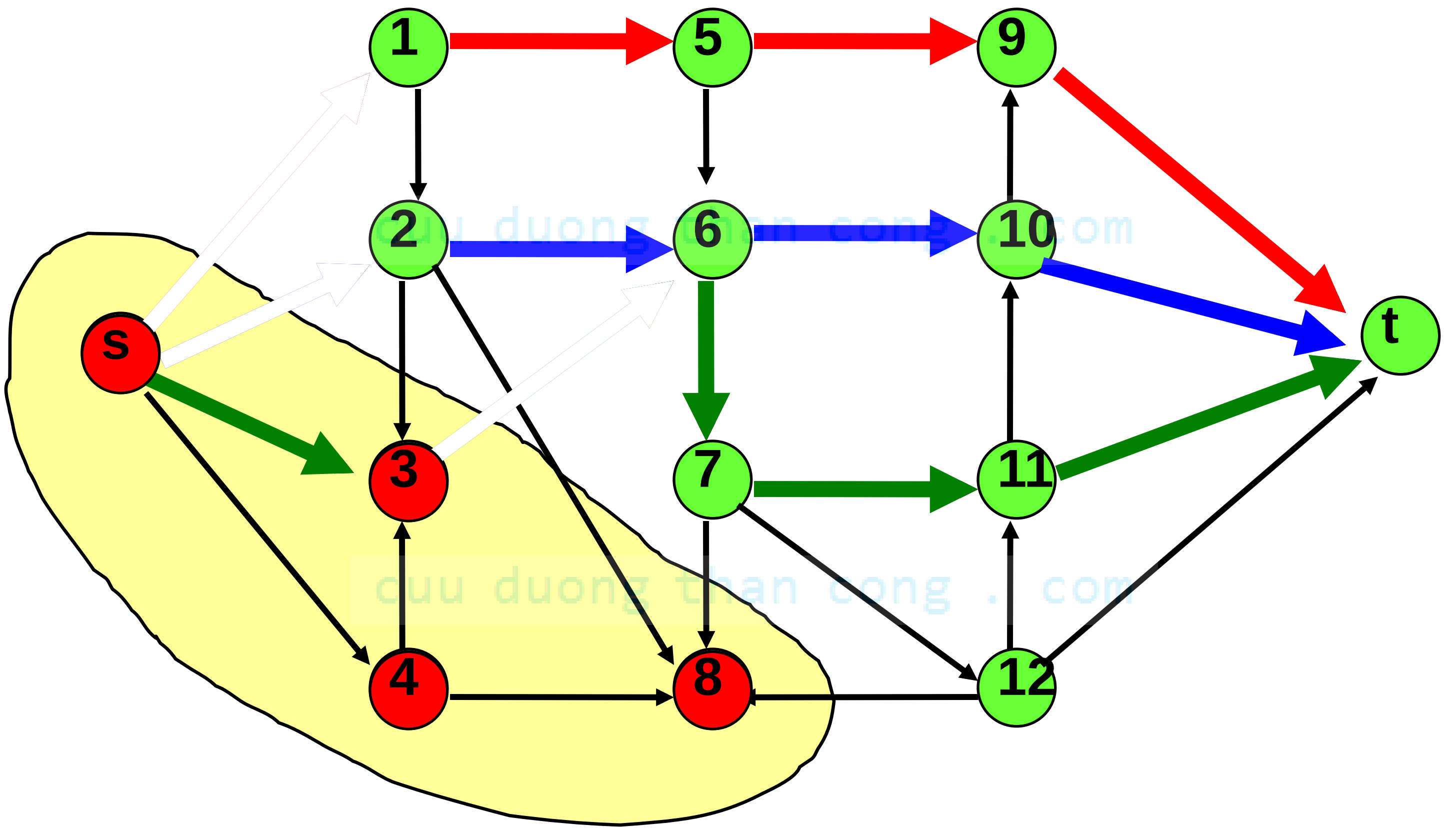


Có 3 đường đi không giao nhau cạnh từ s đến t



Xoá 3 cạnh để tách s và t

Đặt S = {s, 3, 4, 8}. 3 cạnh cần xoá là tất cả các cạnh từ S sang T = N\S.



Đường đi không giao nhau đỉnh

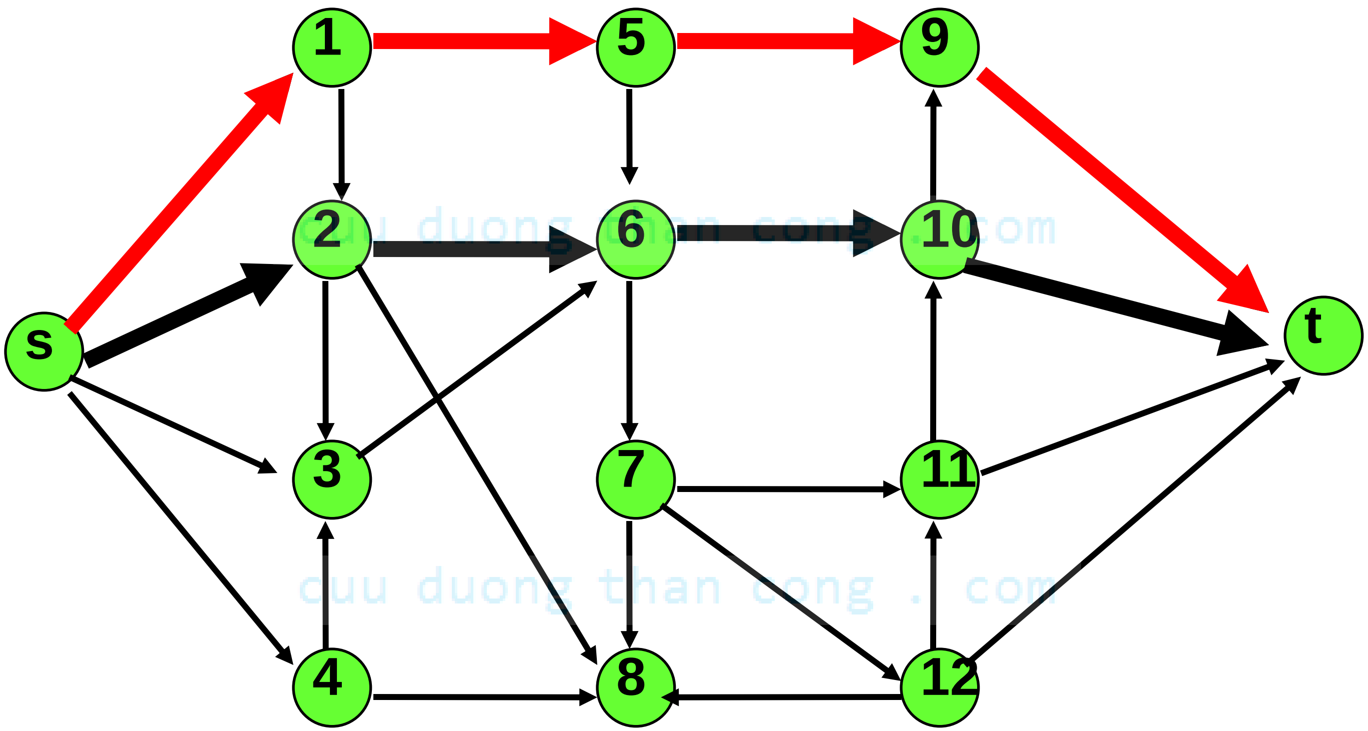
- Hai đường đi từ s đến t được gọi là **không giao nhau đỉnh** nếu chúng có duy nhất hai đỉnh chung là s và t.

- Bằng cách nào có thể xác định số lượng đường đi từ s đến t không giao nhau đỉnh?

Trả lời: Tách nút

Định lý. *Giả sử G = (V,E) là mạng không có cung trực tiếp từ s đến t. Số lớn nhất các đường đi không giao nhau đỉnh là bằng số nhỏ nhất các đỉnh mà việc loại bỏ chúng làm gián đoạn mọi đường đi từ s đến t.*

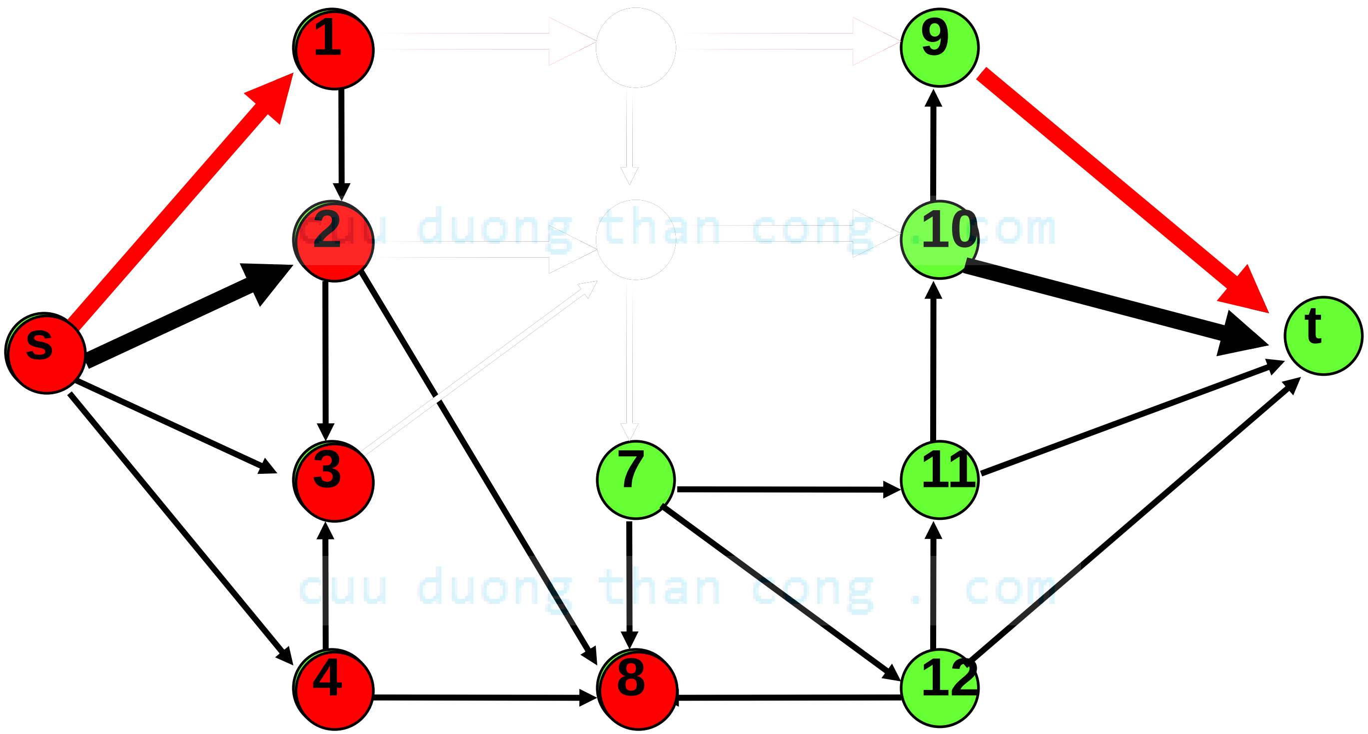
Có 2 đường đi không giao nhau đỉnh từ s đến t



Xoá đỉnh 5 và 6 tách t khỏi s?

Gọi S = {s, 1, 2, 3, 4, 8}

Gọi T = {7, 9, 10, 11, 12, t}



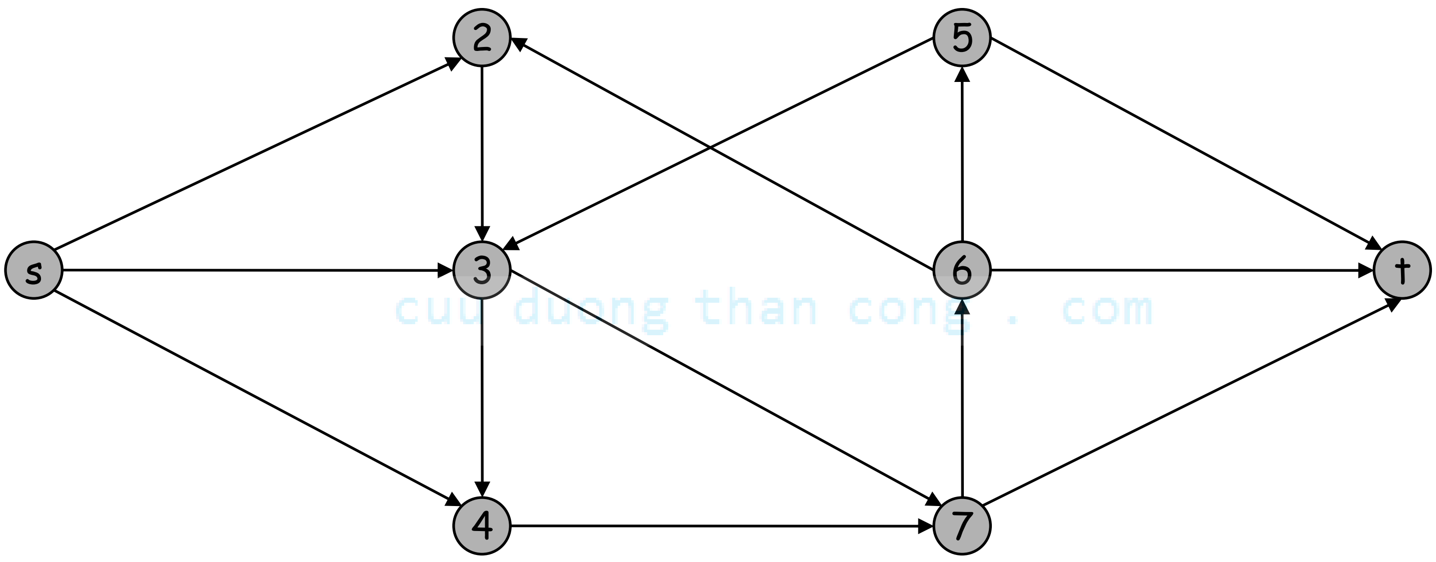
Không có cung từ S sang T.

Bài toán đường đi không giao nhau cạnh
(Edge Disjoint Paths)

Định nghĩa. **Hai đường đi được gọi là không giao nhau cạnh nếu chúng không có cạnh chung.**

Bài toán đường đi không giao nhau cạnh. **Cho đồ thị có hướng G = (V, E) và hai đỉnh s và t, tìm số lượng lớn nhất các đường đi từ s đến t không giao nhau cạnh.**

Ví dụ: **mạng truyền thông**

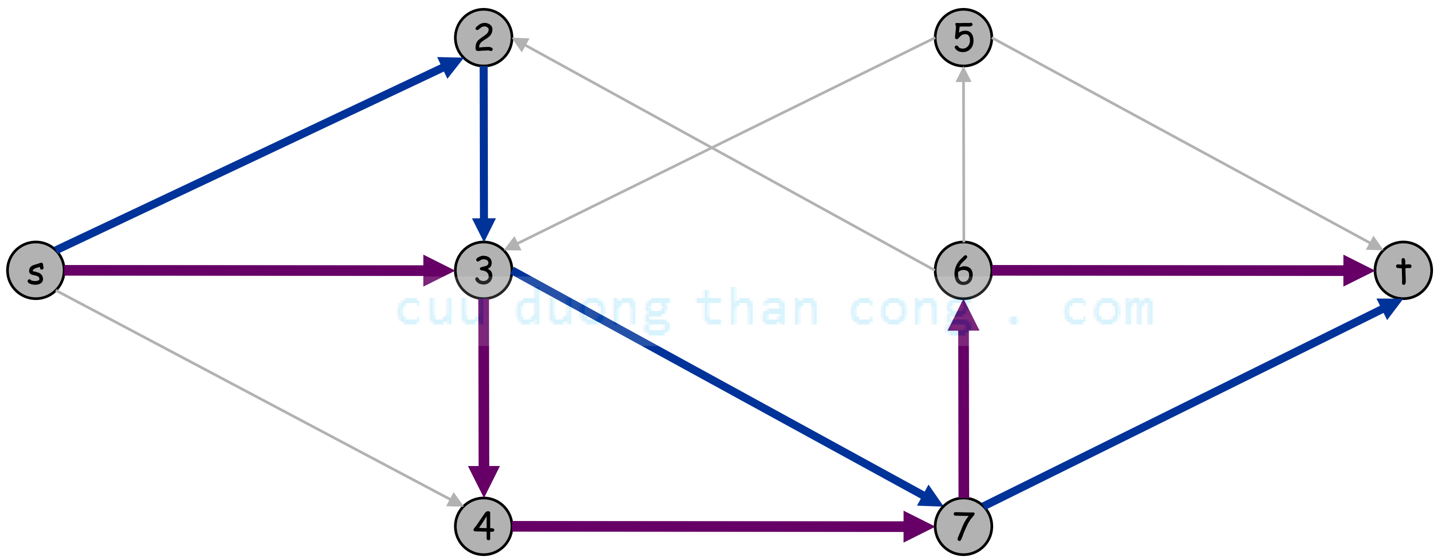


Bài toán đường đi không giao nhau cạnh
(Edge Disjoint Paths)

Định nghĩa. **Hai đường đi được gọi là không giao nhau cạnh nếu chúng không có cạnh chung.**

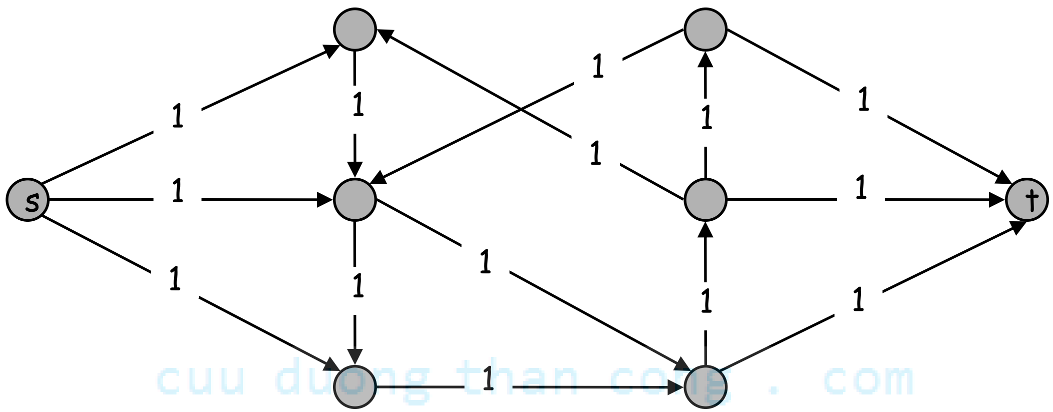
Bài toán đường đi không giao nhau cạnh. **Cho đồ thị có hướng G = (V, E) và hai đỉnh s và t, tìm số lượng lớn nhất các đường đi từ s đến t không giao nhau cạnh.**

Ví dụ: **mạng truyền thông**



Bài toán đường đi không giao nhau cạnh

Quy về bài toán luồng cực đại: gán cho mỗi cạnh kntq là 1.



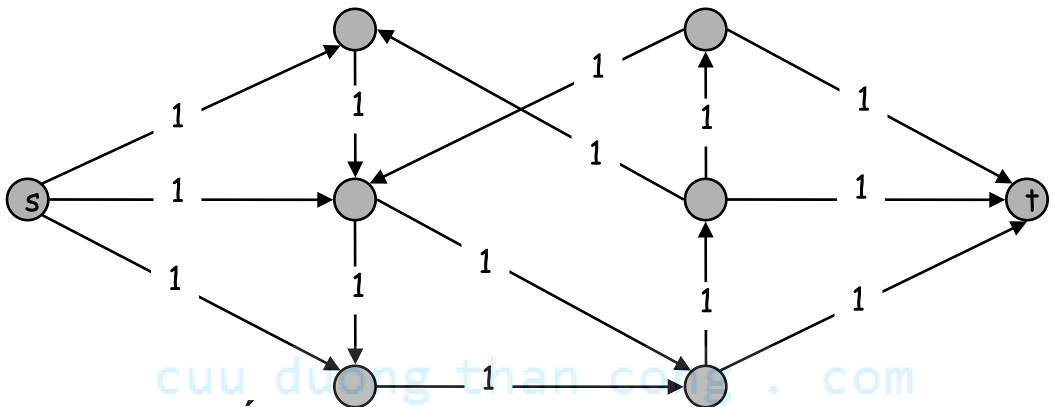
Định lý. Số lượng lớn nhất các đường đi từ s đến t không giao nhau cạnh là bằng giá trị của luồng cực đại.

CM. Điều kiện cần

- Giả sử có k đường đi không giao nhau cạnh $P_1, \ldots, P_k$.
- Đặt f(e) = 1 nếu e thuộc vào ít nhất một trong số các đường đi; và f(e) = 0, nếu trái lại.
- Do các đđ không có cạnh chung nên f là luồng có giá trị k. ■

Bài toán đường đi không giao nhau cạnh

Quy về bài toán luồng cực đại: gán cho mỗi cạnh kntq là 1.



Định lý. Số lượng lớn nhất các đường đi từ s đến t không giao nhau cạnh là bằng giá trị của luồng cực đại.

CM. Điều kiện đủ

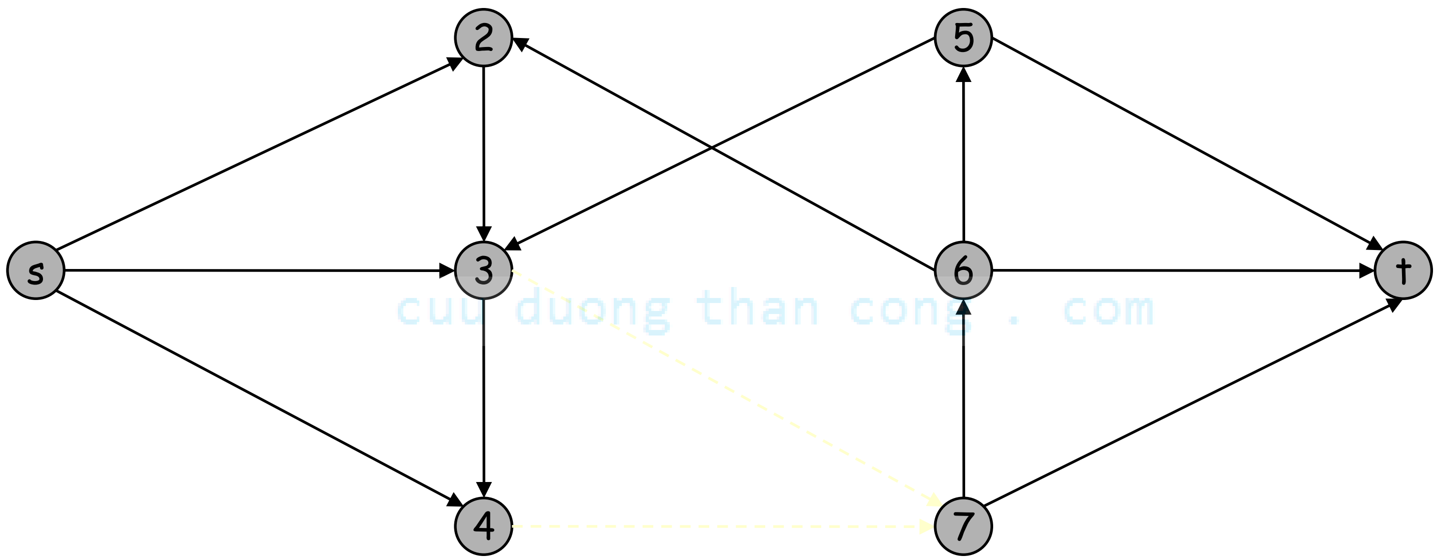
- Giả sử luồng cực đại có giá trị k.
- Theo định lý về tính nguyên ⇒ tồn tại f là luồng 0-1 với giá trị k.
- Xét cạnh (s, u) với f(s, u) = 1.
  - theo đk cân bằng luồng, tồn tại cạnh (u, v) với f(u, v) = 1
  - tiếp tục cho đến khi đạt tới t, luôn sử dụng cạnh mới
- Tạo được k đường đi (không nhất thiết là đơn) không giao nhau cạnh. ■

nếu cần, có thể cắt chu trình để thu được đường đi đơn

Bài toán về độ liên kết của mạng (Network Connectivity)

ĐN. Tập cạnh $F \subseteq E$ được gọi là **tách t với s** nếu mọi đường đi từ s đến t đều đi qua ít nhất một cạnh trong F.

Liên kết mạng. Cho đồ thị có hướng G = (V, E) và hai đỉnh s và t, tìm số lượng cạnh ít nhất cần loại bỏ để tách t với s.

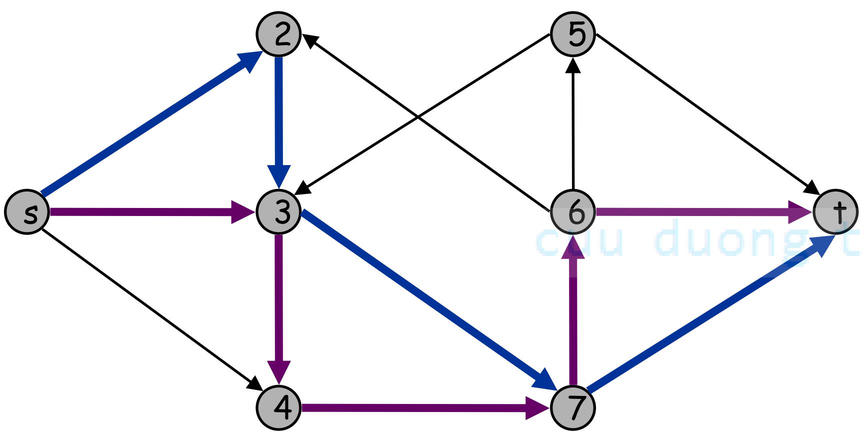


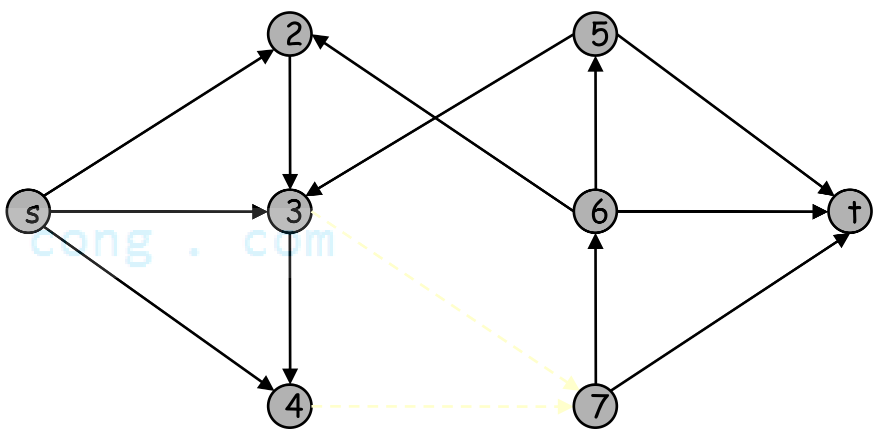
Đường đi không giao nhau cạnh và Độ liên kết mạng

Định lý. [Menger 1927] Số lớn nhất các đường đi không giao nhau cạnh từ s đến t là bằng số nhỏ nhất các cạnh cần loại bỏ để tách t với s.

CM. Điều kiện đủ

- **Giả sử loại bỏ F $\subseteq$ E ngăn cách t từ s, và |F| = k.**
- **Do mọi đường đi từ s đến t đều có ít nhất một cạnh trong F, suy ra số lượng đường đi không giao nhau cạnh không vượt quá k. ■**



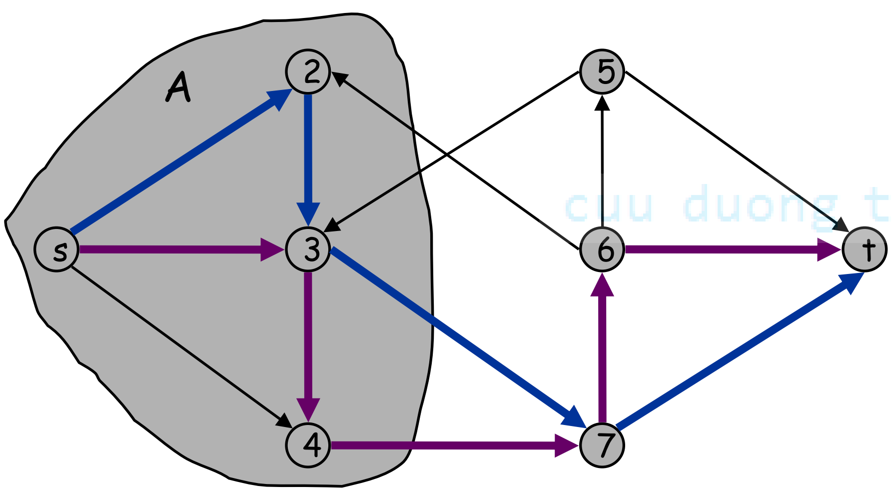


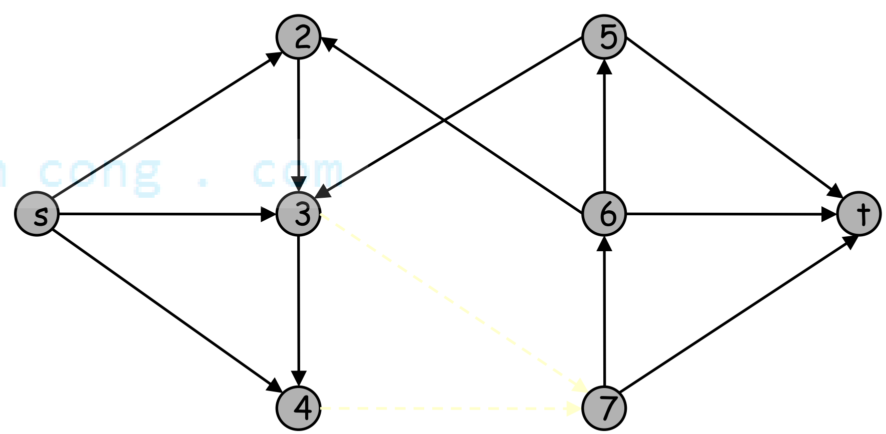
Đường đi không giao nhau cạnh và Độ liên kết mạng

Định lý. **[Menger 1927]** **Số lớn nhất các đường đi không giao nhau cạnh từ s đến t là bằng số nhỏ nhất các cạnh cần loại bỏ để tách t với s.**

CM. Điều kiện cần

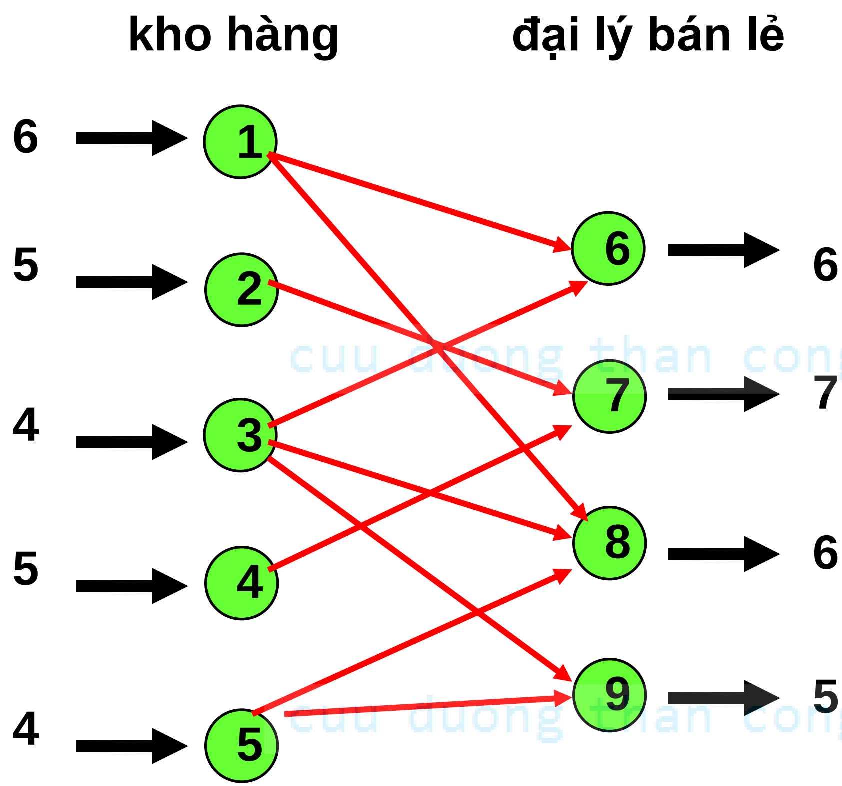
- **Giả sử k là số lượng lớn nhất các đường đi không giao nhau cạnh.**
- **Khi đó giá trị luồng cực đại là k.**
- **Từ định lý Max-flow min-cut $\Rightarrow$ lát cắt nhỏ nhất (A, B) có kntq k.**
- **Gọi F là tập các cạnh từ A sang B.**
- **|F| = k và F tách t với s. ■**





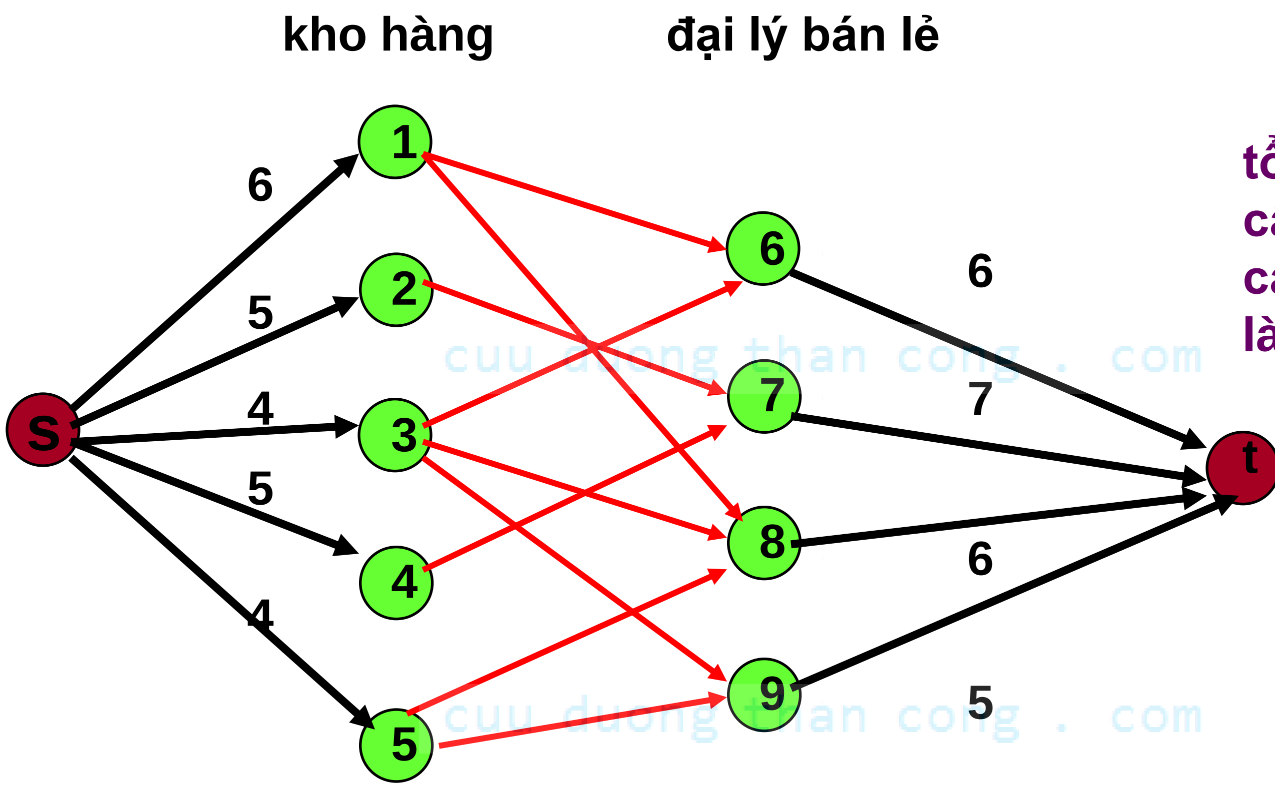
Bài toán giao hàng

Bài toán giao hàng



Có cách chuyển hàng từ các kho đáp ứng yêu cầu của các đại lý bán lẻ?

Quy về bài toán luồng cực đại



tổng yêu cầu của các đại lý là 24

Tồn tại tương ứng 1-1 giữa luồng từ s đến t với giá trị 24 với một cách chuyển hàng đáp ứng yêu cầu của các đại lý bán lẻ.

Bài toán lập lịch

Bài toán

- Có n chi tiết (job) cần được gia công.
- Có M máy (giống hệt nhau) để thực hiện việc gia công.
- Đối với chi tiết j biết:
  - t_j - thời gian hoàn thành
  - r_j - thời điểm sẵn sàng
  - d_j - thời hạn hoàn thành

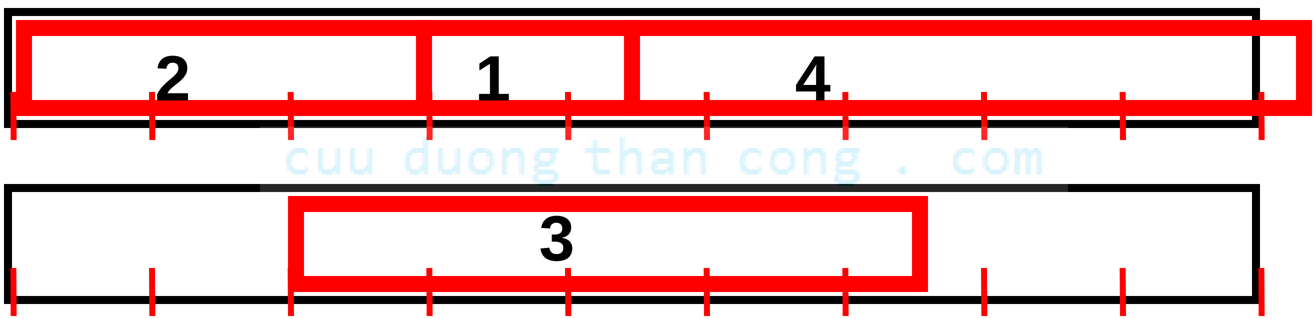
- Tìm cách bố trí việc thực hiện gia công n chi tiết trên M máy:
  - Mỗi chi tiết j được bắt đầu gia công ở thời điểm không sớm hơn r_j
  - Thời điểm hoàn thành việc gia công chi tiết j không muộn hơn d_j
  - Tại mỗi thời điểm có không quá 1 máy thực hiện việc gia công chi tiết j và tổng thời gian thực hiện gia công chi tiết j trên M máy là bằng t_j

- Cách bố trí thoả mãn các điều kiện vừa nêu gọi là lịch

Lập lịch trên các máy song song

Job (j)	1	2	3	4
Thời gian hoàn thành (t_j)	1.5	3	4.5	5
Thời điểm sẵn sàng (r_j)	2	0	2	4
Thời hạn (d_j)	5	4	7	9

Giả sử có M = 2 máy song song

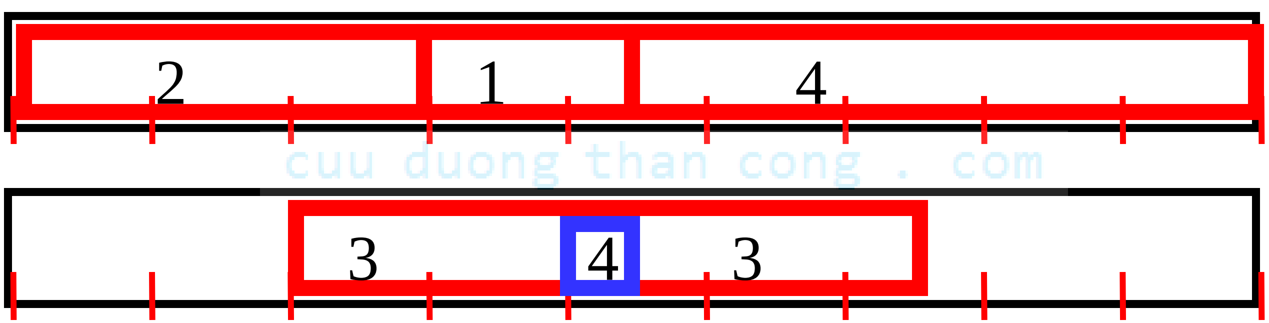


Không có lịch ngoại trừ khi cho phép ngắt quãng

Lập lịch trên các máy song song

Job (j)	1	2	3	4
Thời gian hoàn thành (t_j)	1.5	3	4.5	5
Thời điểm sẵn sàng (r_j)	2	0	2	4
Thời hạn (d_j)	5	4	7	9

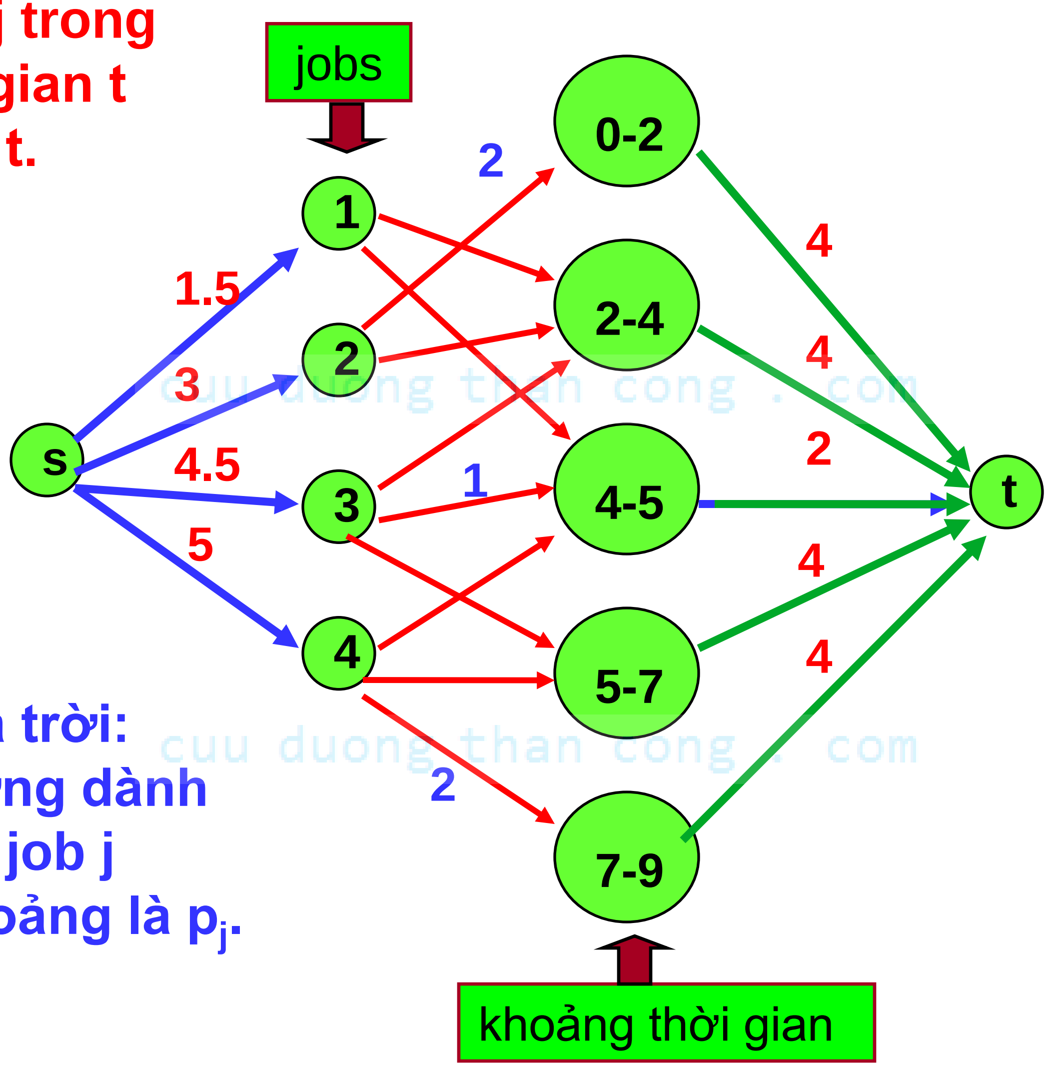
Giả sử có M = 2 máy song song



Có lịch nếu cho phép ngắt quãng

Qui về bài toán luồng cực đại

cung đỏ: thời lượng gia công job j trong khoảng thời gian t nhiều nhất là t.



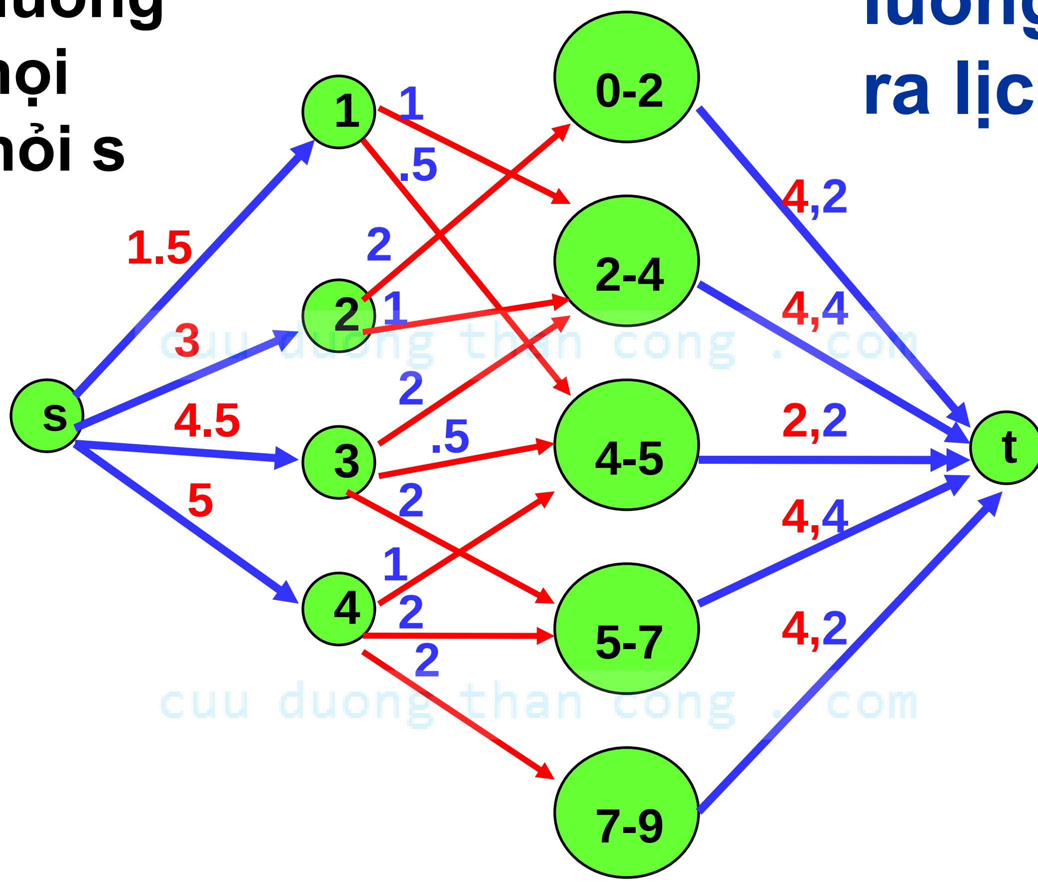
cung xanh lá cây: thời lượng của khoảng thời gian t nhiều nhất là M×t. (M là số máy có thể dùng)

cung xanh da trời: tổng thời lượng dành cho gia công job j trong mọi khoảng là p_j.

Luồng cực đại – Lịch

Lịch tồn tại ⇔ tìm được luồng bão hoà mọi cung ra khỏi s

Cần phân rã luồng để đưa ra lịch



Questions?