TRƯỜNG ĐẠI HỌC GIAO THÔNG VẬN TẢI THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
KHOA CƠ BẢN – BỘ MÔN TOÁN

BÀI GIẢNG GIẢI TÍCH 1

CHƯƠNG III. PHÉP TÍNH TÍCH PHÂN HÀM MỘT BIẾN

§3. Tích phân suy rộng

GV: Đinh Tiến Dũng

NỘI DUNG CHÍNH

- *Định nghĩa tích phân suy rộng loại I và loại II.*
- *Các tiêu chuẩn hội tụ của tích phân suy rộng.*

CHƯƠNG III. PHÉP TÍNH TÍCH PHÂN HÀM MỘT BIẾN

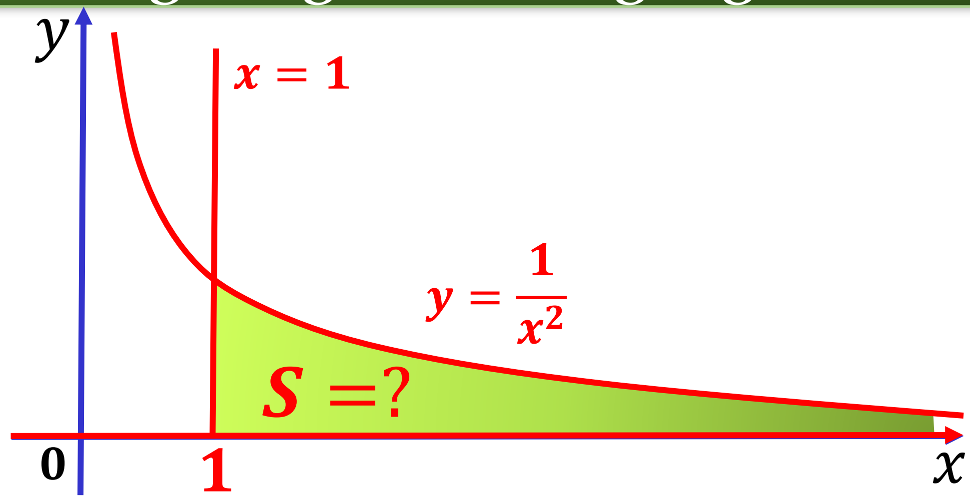
§3. Tích phân suy rộng

1. TÍCH PHÂN SUY RỘNG LOẠI I

1.1 Bài toán mở đầu:

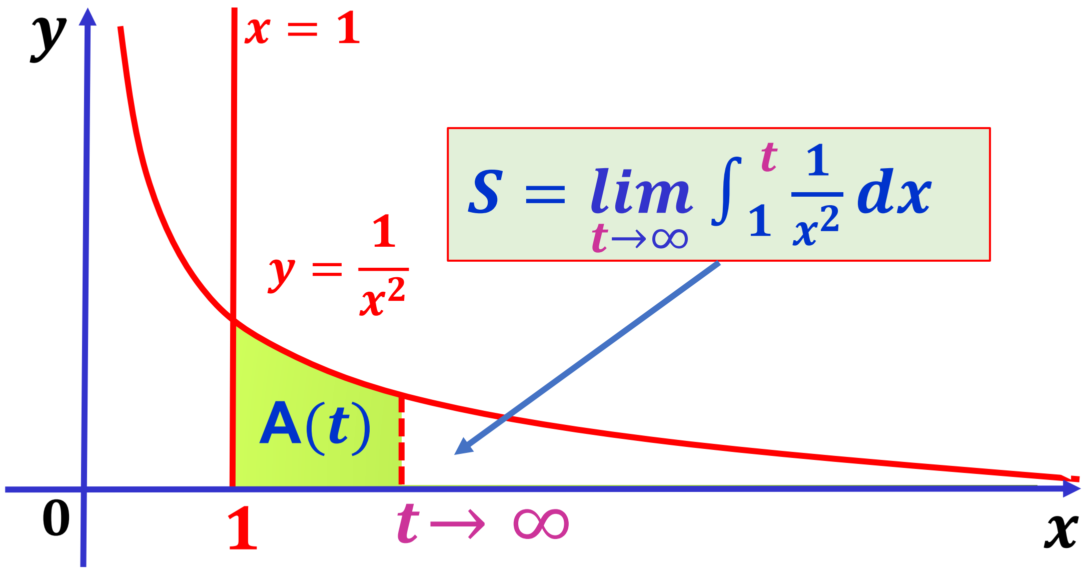
❖ *Bài toán diện tích hình thang cong có biên ngang vô hạn*

*Tính diện tích hình phẳng **S** được giới hạn bởi đồ thị $y = \frac{1}{x^2}$ các đường thẳng $x = 1$, và trục hoành Ox.*



❖ *Lời giải*

Lấy giá trị t bất kỳ lớn hơn 1.
Gọi $A(t)$ là diện tích hình thang cong hữu hạn giới hạn bởi các đường: $y = \frac{1}{x^2}$, trục Ox, $x = 1$, $x = t$ thì:



$$A(t) = \int_1^t \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x}\Big|_1^t = -\left(\frac{1}{t} - 1\right) = 1 - \frac{1}{t}$$

Cho $t \to \infty$ thì ta tính được diện tích toàn bộ hình thang cong .

Vậy: $S = \lim\limits_{t\to\infty} A(t) = \lim\limits_{t\to\infty}\left(1 - \frac{1}{t}\right) = 1$ *(đvdt)*

Ta kí hiệu: $S = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}dx$ *và gọi đó là tích phân suy rộng của f(x).*

1.2 Khái niệm tích phân suy rộng loại I:

❖ **Định nghĩa**

Các tích phân có cận vô hạn như $\int_a^{\infty} f(x)dx$, $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ *gọi chung là tích phân suy rộng loại I nếu hàm* $f(x)$ *lần lượt liên tục trên các miền lấy tích phân tương ứng* $[a;\infty)$, $(-\infty, a]$, $(-\infty;\infty)$ *và được tính bởi:*

1) $\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim\limits_{t\to\infty} \int_a^{t} f(x)dx$

2) $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim\limits_{t\to-\infty} \int_t^{a} f(x)dx$

3) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_a^{\infty} f(x)dx \quad (\forall a \in R)$

Nếu các giới hạn 1) và 2) cho kết quả hữu hạn thì tích phân suy rộng gọi là hội tụ; nếu giới hạn bằng $\pm\infty$ *hoặc giới hạn không tồn tại thì ta nói tích phân suy rộng ấy phân kỳ. Tích phân ở trường hợp 3) hội tụ nếu cả hai tích phân vế phải cùng hội tụ.*

Có thể tính $\int_a^{\infty} f(x)dx$ thông qua nguyên hàm hay không?

Giả sử F(x) một là nguyên hàm của f(x) trên $[a, +\infty)$ *thì:*

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^{t} f(x)dx = \lim_{t\to\infty}\left(F(x)\Big|_a^t\right)$$

$$= \lim_{t\to\infty}(F(t) - F(a)) = \lim_{t\to\infty} F(t) - F(a)$$

$$= \lim_{x\to\infty} F(x) - F(a)$$

Ký hiệu: $F(\infty) = \lim_{x\to\infty} F(x)$ *và* $F(x)|_a^{\infty} = F(\infty) - F(a)$

ta được công thức

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = F(x)|_a^{\infty} = F(\infty) - F(a);$$

1.3 Công thức Newton-Leibnitz cho tích phân suy rộng loại I

Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của f(x) trên miền tính tích phân thì:

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = F(x)|_a^{\infty} = \mathrm{F}(\infty) - F(a);$$

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = F(x)|_{-\infty}^{a} = F(\mathrm{a}) - F(-\infty);$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = F(x)|_{-\infty}^{\infty} = F(\infty) - F(-\infty).$$

Trong đó: $F(\infty) = \lim\limits_{x\to\infty} F(x)$; $F(-\infty) = \lim\limits_{x\to-\infty} F(x)$.

❖ ***Chú ý:*** *Các qui tắc và tính chất của tích phân xác định không đúng đối với tích phân suy rộng. Chẳng hạn như công thức:*

$$\int_a^{\infty}[f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^{\infty} f(x)dx \pm \int_a^{\infty} g(x)dx$$

chỉ đúng nếu cả hai tích phân vế phải tồn tại hữu hạn.

1.4 Phương pháp tính tích phân suy rộng loại I

Tính $A = \int_a^{\infty} f(x)dx$

Cách 1

Tính tích phân xác định

$\int_a^t f(x)dx$.

ĐN

Tính giới hạn

$A = \lim\limits_{t\to\infty} \int_a^t f(x)dx$

Cách 2

Tính tích phân bất định

$\int f(x)dx = F(x) + C$

Tính giới hạn

$A = F(x)\Big|_a^{\infty} = \lim\limits_{x\to\infty} F(x) - F(a)$

Newton-Leibnitz

❖ *Ví dụ*

Tích phân nào sau đây là tích phân suy rộng loại I? Hãy tính các tích phân suy rộng loại I và cho biết nó hội tụ hay phân kỳ:

1) $A = \int_0^{\infty} \frac{dx}{x-1}$ 2) $B = \int_0^{\infty} \ln x.\,dx$ 3) $I = \int_4^{\infty} \frac{dx}{x^2-5x+6}$

4) $K = \int_{-\infty}^{0} x^3 e^{-x} dx$ 5) $H = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4}$ 6) $L = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2} dx$

Giải

1) *Ta thấy* $f(x) = \frac{1}{x-1}$ *gián đoạn tại* $x=1 \in [0;\infty)$.

$\Rightarrow$ *f(x) không liên tục trên miền lấy tích phân* $[0;\infty)$

$\Rightarrow$ ***A không phải là tích phân suy rộng loại 1.***

2) *Ta thấy* $f(x) = \ln x$ *gián đoạn tại cận dưới* $x=0 \in [0;\infty)$

$\Rightarrow$ *f(x) không liên tục trên miền lấy tích phân* $[0;\infty)$

$\Rightarrow$ ***B không phải là tích phân suy rộng loại 1.***

$$3)\ I = \int_4^{\infty} \frac{dx}{x^2-5x+6}$$

$f(x) = \dfrac{1}{x^2-5x+6}$ *liên tục trên* $[4;\infty) \Rightarrow I$ *là TPSR loại 1.*

Ta thấy: $I = \displaystyle\int_4^{\infty} \frac{dx}{(x-3)(x-2)}$

Giả sử: $\dfrac{1}{(x-3)(x-2)} = \dfrac{A}{x-3} + \dfrac{B}{x-2}$. Ta có: $\begin{cases} A = \left.\dfrac{1}{x-2}\right|_{x=3} = 1 \\ B = \left.\dfrac{1}{x-3}\right|_{x=2} = -1 \end{cases}$.

$$I = \int_4^{\infty} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}\right) dx = \left(ln\,|x-3| - ln\,|x-2|\right)\Big|_4^{+\infty}$$

$$= ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|\Bigg|_4^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty}\left(ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|\right) - \ln\frac{1}{2} = ln\left(\lim_{x\to+\infty}\left|\frac{x-3}{x-2}\right|\right) - \ln\frac{1}{2}$$

$$= ln\left(\left|\lim_{x\to+\infty}\frac{x-3}{x-2}\right|\right) - \ln\frac{1}{2} = ln\left(\left|\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-3)'}{(x-2)'}\right|\right) - \ln\frac{1}{2}$$

$= ln1 - \ln\frac{1}{2} = ln\,2.$ *Vậy tích phân I hội tụ.*

4) $K = \int_{-\infty}^{0} x^3 e^{-x} dx$

$$\int x^3 e^{-x} dx = -x^3 e^{-x} \ -3x^2 e^{-x} \ -6x e^{-x} \ -6e^{-x} + \int 0.dx$$

$$= -e^{-x}(x^3 + 3\mathrm{x}^2 + 6\mathrm{x} + 6) + C$$

$$K = -e^{-x}(x^3 + 3\mathrm{x}^2 + 6\mathrm{x} + 6)\Big|_{-\infty}^{0}$$

$$= e^{-x}(x^3 + 3\mathrm{x}^2 + 6\mathrm{x} + 6)\Big|_{0}^{-\infty}$$

$$= \lim_{x \to -\infty}\left(e^{-x}(x^3 + 3\mathrm{x}^2 + 6\mathrm{x} + 6\right) - 6e^0$$

$$= \lim_{x \to -\infty}\left(e^{-x}x^3\right) - 6 \ = \lim_{t \to \infty}\left(e^{t}(-t)^3\right) - 6$$

$$= -\infty.$$

Vậy tích phân K phân kỳ.

u		dv
x^3	(+)	e^{-x}
$3x^2$	(-)	$-e^{-x}$
$6x$	(+)	e^{-x}
6	(-)	$-e^{-x}$
0	$+\int$	e^{-x}

$5)\ H=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+4}$

ADCT: $\int\frac{1}{x^2+m^2}dx=\frac{1}{m}\arctan\frac{x}{m}+C$

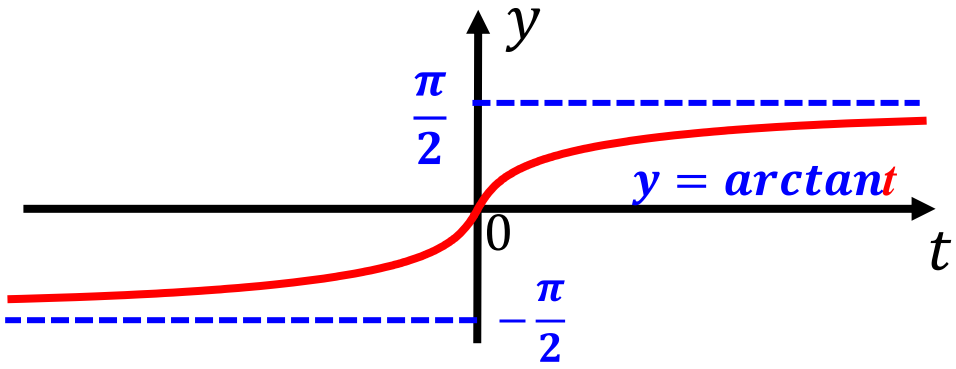
$$H=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+2^2}=\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}\Big|_{-\infty}^{+\infty}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\left(\arctan\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{2}\lim_{x\to-\infty}\left(\arctan\frac{x}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}(\arctan t)-\frac{1}{2}\lim_{t\to-\infty}(\arctan t)$$

$$=\frac{1}{2}.\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}.\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}.$$



Vậy tích phân H hội tụ.

6) $L = \int_0^{\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2} dx$

Đặt: $t = \arctan x \Rightarrow dt = \dfrac{dx}{1 + x^2}$

Đổi cận:

$x = 0$	$x \to \infty$
$t = 0$	$t \to \dfrac{\pi}{2}$

Ta được $L = \int_0^{\pi/2} t\,dt = \left.\dfrac{t^2}{2}\right|_0^{\pi/2} = \dfrac{\pi^2}{8}$. Vậy tích phân L hội tụ.

❖ *Chú ý: Phương pháp đổi biến số có thể đưa tích phân suy rộng về phân xác định hoặc ngược lại. Do đó, tích phân suy rộng là một bổ sung cần thiết hỗ trợ cho việc tính tích phân xác định.*

BÀI TẬP THẢO LUẬN

Hãy chỉ ra lỗi sai trong lời giải bài toán tính tích phân dưới đây, giải thích nguyên nhân và giải lại:

$$\boldsymbol{I = \int_4^{\infty} \frac{dx}{x^2-4x+3} = \int_4^{\infty} \frac{1}{(x-1)(x-3)}dx}$$

Giả sử: $\dfrac{1}{(x-1)(x-3)} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x-3}$. Ta có: $\begin{cases} A = \dfrac{1}{x-3}\Big|_{x=1} = -\dfrac{1}{2} \\ B = \dfrac{1}{x-1}\Big|_{x=3} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$.

$$\boldsymbol{I = -\int_4^{\infty} \frac{\frac{1}{2}}{x-1}dx + \int_4^{\infty} \frac{\frac{1}{2}}{x-3}dx = -\frac{1}{2}\ln|x-1|\Big|_4^{\infty} + \frac{1}{2}\ln|x-3|\Big|_4^{\infty}}$$

$$\boldsymbol{= -\infty + \infty = 0.}$$

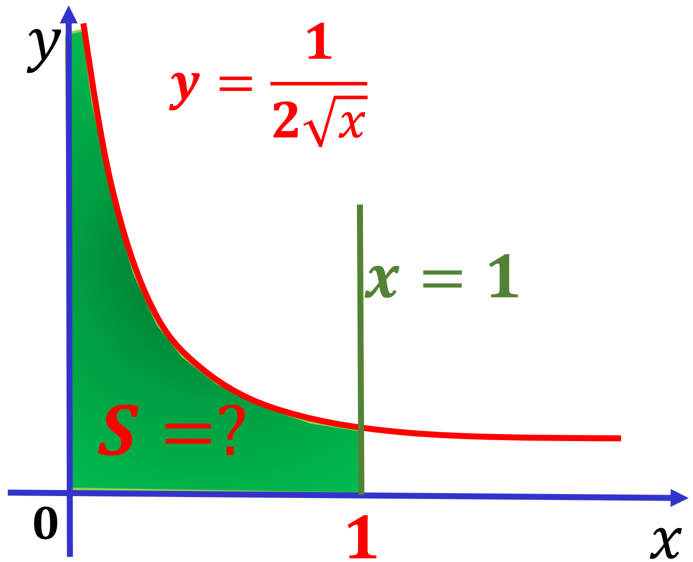
ĐÁP ÁN

2. TÍCH PHÂN SUY RỘNG LOẠI II

2.1 Bài toán mở đầu:

❖ *Bài toán diện tích hình thang cong cạnh đứng vô hạn*

Hãy tính diện tích hình thang cong S được giới hạn bởi đồ thị $y = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, trục hoành Ox, đường thẳng $x = 0$ và đường thẳng $x = 1$.

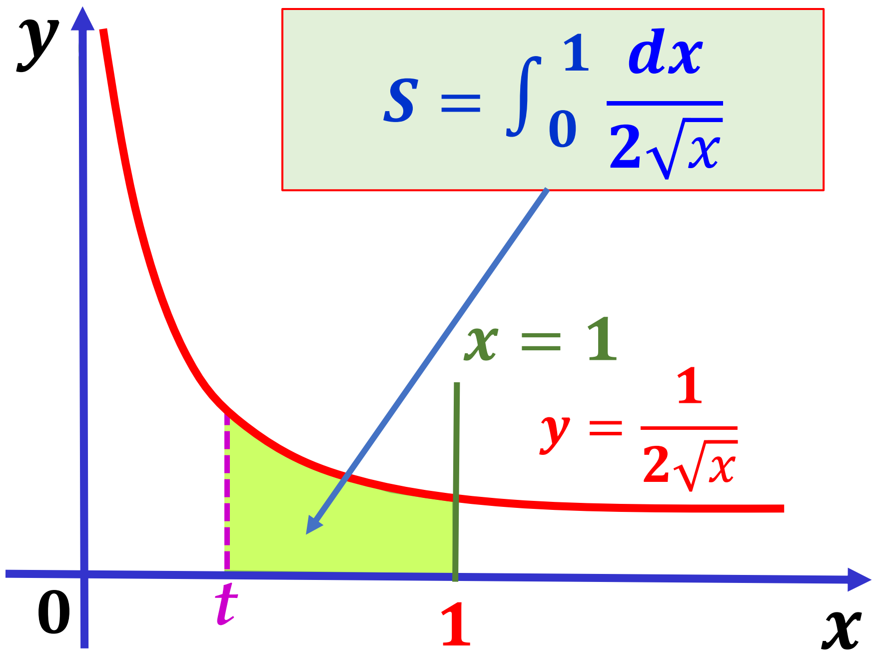


❖ Lời giải

Lấy giá trị t bất kỳ lớn hơn 0 và bé hơn 1.

Diện tích của hình thang cong hữu hạn giới hạn bởi các đường:

$y = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, *trục Ox*, $x = 1$, $x = t$ *là:*



$$\int_t^1 \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x}\Big|_t^1 = 1 - \sqrt{t}$$

Cho $t \to 0^+$ *thì ta tính được diện tích toàn bộ hình thang cong vô hạn.*

Vậy: $S = \lim\limits_{t\to 0^+} \int_t^1 \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \lim\limits_{t\to 0^+}(1 - \sqrt{t}) = 1$ *(đvdt).*

2.2 Khái niệm tích phân suy rộng loại II:

❖ *Định nghĩa*

Nếu hàm $f(x)$ có một điểm gián đoạn vô hạn trên [a;b] thì $\int_a^b f(x)dx$ gọi là tích phân suy rộng loại II. Cách tính như sau:

1) f liên tục$/[a,b)$ và $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = \pm\infty$ thì: $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{t\to b^-} \int_a^t f(x)dx$

2) f liên tục$/(a,b]$ và $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ thì: $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{t\to a^+} \int_t^b f(x)dx$

3) f liên tục trên $[a,c),(c,b]$ với $c\in (a;b)$ và $\lim\limits_{t\to c^+} f(x) = \pm\infty$ hoặc $\lim\limits_{t\to c^-} f(x) = \pm\infty$ thì: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$

Nếu các giới hạn ở 1), 2) cho kết quả hữu hạn thì tích phân suy rộng gọi là hội tụ; nếu giới hạn bằng $\pm\infty$ hoặc giới hạn không tồn tại thì ta nói tích phân suy rộng ấy phân kỳ. Tích phân ở trường hợp 3) hội tụ nếu cả hai tích phân vế phải cùng hội tụ.

2.3 Công thức Newton-Leibnitz cho tích phân suy rộng loại II

Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của f(x) trên [a;b) thì:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^{b^-} = F(b^-) - F(a)$$

Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của f(x) trên (a;b] thì:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_{a^+}^{b} = F(\mathrm{b}) - F(a^+)$$

Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của f(x) trên (a;b) thì:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_{a^+}^{b^-} = F(b^-) - F(a^+)$$

Trong đó: $F(\mathrm{a}^+) = \lim\limits_{x\to a^+} F(\mathrm{x})\,;\, F(\mathrm{b}^-) = \lim\limits_{x\to b^-} F(\mathrm{x})\,.$

❖ ***Chú ý:*** *Các qui tắc và tính chất của tích phân xác định không đúng đối với tích phân suy rộng. Chẳng hạn như công thức:*

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

chỉ đúng nếu cả hai tích phân vế phải tồn tại hữu hạn.

***Phép đổi biến số** có thể đưa tích phân suy rộng về phân xác định hoặc tích phân suy rộng mới đơn giản hơn.*

2.4 Phương pháp tính tích phân suy rộng loại II

Tính $A = \int_a^b f(x)dx$

(f(x) gián đoạn vô cùng tại b)

Cách 1

Tính tích phân xác định

$$\int_a^t f(x)dx.$$

ĐN

Tính giới hạn

$$A = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)dx$$

Cách 2

Tính tích phân bất định

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Tính giới hạn

$$A = F(x)\Big|_a^{b^-} = \lim_{x \to b^-} \mathrm{F}(\mathrm{x}) - \mathrm{F}(\mathrm{a})$$

Newton-Leibnitz

❖ ***Ví dụ***

Hãy tính các tích phân suy rộng sau và cho biết nó hội tụ hay phân kỳ:

1) $A = \int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x-2}}$ 2) $B = \int_0^1 \frac{dx}{1-x}$ 3) $C = \int_{-1}^1 \frac{dx}{x}$.

Giải

1) *Ta thấy* $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$ *gián đoạn vô cực tại* $x=2$.

Vậy A là tích phân suy rộng loại II. Do đó:

$$A = \int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x-2}} = 2\sqrt{x-2}\,\Big|_{2^+}^{3} = 2\sqrt{3-2} - \lim_{x\to 2^+} 2\sqrt{x-2} = 2.$$

Suy ra A là tích phân hội tụ.

2) $B = \int_0^1 \frac{dx}{1-x}$

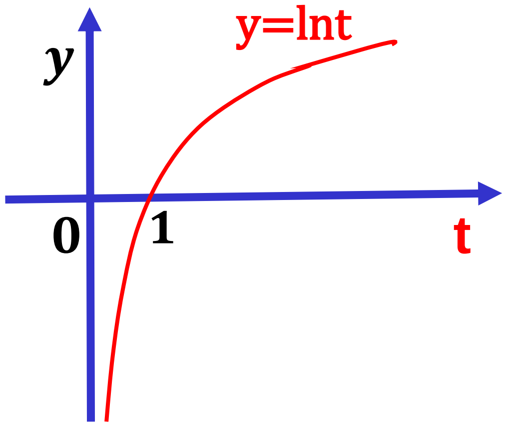
Ta thấy f gián đoạn vô cùng tại $x = 1$.

Vậy B là tích phân suy rộng loại II. Do đó:

$$B = \int_0^1 \frac{dx}{1-x} = -(\ln|1-x|)\Big|_0^{1^-} = (\ln|1-x|)\Big|_{1^-}^{0}$$

$$= \ln|1| - \lim_{x\to 1^-}(\ln|1-x|) = 0 - \lim_{x\to 1^-}(\ln|1-x|)$$

Đặt $t = |1-x|$. *Khi* $x \to 1^-$ *thì* $t \to 0^+$ *nên*



$$B = -\lim_{t\to 0^+}(\ln t) = +\infty$$

Suy ra B là tích phân phân kỳ.

3) $C = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{x}$

Ta thấy f gián đoạn vô cùng tại $x = 0$.

Vậy C là tích phân suy rộng loại II. Do đó:

$$C = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{x}$$

Ta thấy $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x} = ln|x|\Big|_{-1}^{0^-} = \lim\limits_{x \to 0^-} (ln|x|) - ln|-1| = -\infty$

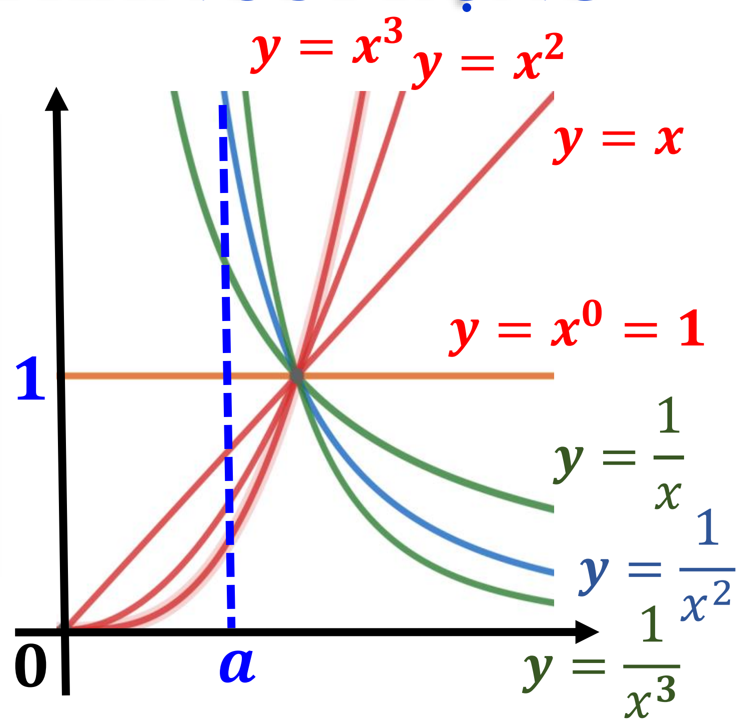
Suy ra C là tích phân phân kỳ.

3. TIÊU CHUẨN HỘI TỤ CỦA TÍCH PHÂN SUY RỘNG

3.1 Định lý 1:

$$\boldsymbol{a})\ \int_{a>0}^{\infty} \frac{1}{x^k}\,dx = \begin{cases} \text{hội tụ}, & \text{nếu } k > 1 \\ \text{phân kỳ}, & \text{nếu } k \le 1 \end{cases}.$$

$$\boldsymbol{b})\ \int_{0}^{a>0} \frac{1}{x^k}\,dx = \begin{cases} \text{hội tụ}, & \text{nếu } k < 1 \\ \text{phân kỳ}, & \text{nếu } k \ge 1 \end{cases}.$$



Chứng minh

(Ta sẽ đi tính tích phân trong mỗi TH)

$$F(x) = \int \frac{1}{x^k}\,dx = \left[\begin{array}{l} \int \frac{1}{x}\,dx,\ \text{khi } k = 1 \\ \int x^{-k}\,dx,\ \text{khi } k \ne 1 \end{array}\right. = \left[\begin{array}{l} \ln|x| + C,\ \text{khi } k = 1 \\ \frac{x^{1-k}}{1-k} + C,\ \text{khi } k \ne 1 \end{array}\right.$$

$$F(x) = \int \frac{1}{x^k} dx = \left[\begin{array}{l} \ln|x| + C, khi\ k = 1 \\ \frac{x^{1-k}}{1-k} + C, khi\ k \neq 1 \end{array} \right.$$

a) Với $a > 0$: $f(x) = \frac{1}{x^k}$ liên tục/$[a; \infty)$ $\Rightarrow \int_a^{\infty} \frac{dx}{x^k}$ là TPSR loại I.

- TH1: Nếu $k = 1$

$$\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^k} = \ln|x|\Big|_a^{\infty} = \ln(\infty) - \ln a = \infty \Rightarrow \int_a^{+\infty} \frac{1}{x^k} dx \text{ phân kỳ.}$$

- TH2: Nếu $k > 1$

$$\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^k} = \frac{x^{1-k}}{1-k}\Big|_a^{\infty} = \frac{1}{1-k} \cdot \left[\frac{1}{x^{k-1}}\right]_a^{\infty} = \frac{1}{1-k} \cdot \left(0 - \frac{1}{a^{k-1}}\right) \Rightarrow \int_a^{+\infty} \frac{1}{x^k} dx \text{ hội tụ.}$$

- TH3: Nếu $k < 1$

$$\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^k} = \frac{x^{1-k}}{1-k}\Big|_a^{\infty} = \infty - \frac{a^{1-k}}{1-k} = \infty \Rightarrow \int_a^{+\infty} \frac{1}{x^k} dx \text{ p.kỳ.}$$

$$F(x)=\int\frac{1}{x^k}dx=\left[\begin{array}{l} ln\,|x|+C,khi\ k=1\\ \frac{x^{1-k}}{1-k}+C,khi\ k\neq 1\end{array}\right.$$

b) Với $a>0$: $f(x)=\frac{1}{x^k}$ *liên tục trên* $(0;a]$ *và* $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\infty$

$\Rightarrow \int_0^a \frac{dx}{x^k}$ *là tích phân suy rộng loại II.*

- *TH1: Nếu* $k=1$

$$\int_0^a \frac{dx}{x^k}=\ln|x|\Big|_{0^+}^{a}=lna-\infty=-\infty \Rightarrow \int_0^a \frac{dx}{x^k}\ \textit{phân kỳ.}$$

- *TH2: Nếu* $k>1$

$$\int_0^a \frac{dx}{x^k}=\frac{x^{1-k}}{1-k}\Big|_{0^+}^{a}=\frac{1}{(1-k)(x^{k-1})}\Big|_{0^+}^{a}=-\infty \Rightarrow \int_0^a \frac{dx}{x^k}\ \textit{phân kỳ.}$$

- *TH3: Nếu* $k<1$

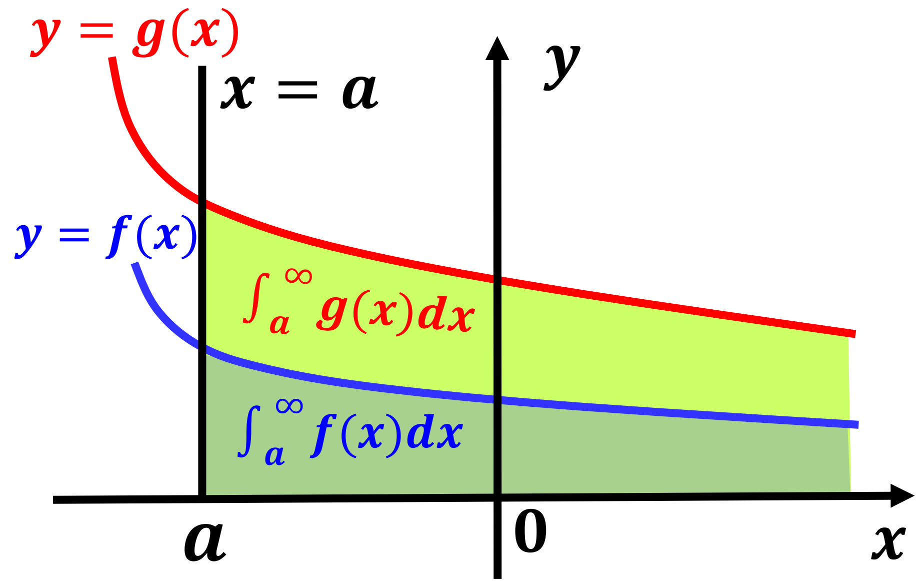
$$\int_0^a \frac{dx}{x^k}=\frac{x^{1-k}}{1-k}\Big|_{0^+}^{a}=\frac{a^{k-1}}{1-k}-0=\frac{a^{k-1}}{1-k}\Rightarrow \int_0^a \frac{dx}{x^k}\ \textit{hội tụ.}$$

Quan sát và trả lời câu hỏi

Cho: $\begin{cases} 0 \le f(x) \le g(x), \forall x \ge a \\ \int_a^{\infty} g(x)dx \text{ hữu hạn (hội tụ)} \end{cases}$

a) So sánh $\int_a^{\infty} f(x)dx$ và $\int_a^{\infty} g(x)dx$?

b) $\int_a^{\infty} f(x)dx$ hội tụ hay phân kỳ? Tại sao?



ĐÁP ÁN

3.2 Định lý 2: (Tiêu chuẩn so sánh trực tiếp)

1) Cho f và g là hai hàm liên tục trên $[a, \infty)$ thỏa $0 \leq f(x) \leq g(x)$ với mọi $x \geq a$. Khi đó:

a) Nếu $\int_a^{\infty} g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^{\infty} f(x)dx$ hội tụ .

b) Nếu $\int_a^{\infty} f(x)dx$ phân kỳ thì $\int_a^{\infty} g(x)dx$ phân kỳ.

2) Cho f và g là hai hàm liên tục trên $[a, b)$ thỏa $0 \leq f(x) \leq g(x)$ với mọi $a \leq x < b$, và $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to b^-} g(x) = \infty$. Khi đó:

a) Nếu $\int_a^{b} g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^{b} f(x)dx$ hội tụ .

b) Nếu $\int_a^{b} f(x)dx$ phân kỳ thì $\int_a^{b} g(x)dx$ phân kỳ.

❖ Chú ý: Các dạng còn lại của tích phân suy rộng loại I và loại II được phát biểu tương tự.

Sơ đồ tóm tắt

$\begin{cases} f, g \text{ liên tục } /[a;\infty) \\ 0 \le f(x) \le g(x), \forall x \in [a;\infty) \end{cases}$

- $\xrightarrow{\int_a^\infty g(x)dx \text{ (hội tụ)}}$ $\int_a^\infty f(x)dx$ hội tụ.
- $\xrightarrow{\int_a^\infty f(x)dx \text{ phân kỳ}}$ $\int_a^\infty g(x)dx$ phân kỳ.

$\begin{cases} f, g \text{ liên tục } /[a;b) \\ f, g \text{ gián đoạn vô cùng tại } b \\ 0 \le f(x) \le g(x), \forall x \in [a;b) \end{cases}$

- $\xrightarrow{\int_a^b g(x)dx \text{ (hội tụ)}}$ $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ.
- $\xrightarrow{\int_a^b f(x)dx \text{ phân kỳ}}$ $\int_a^b g(x)dx$ phân kỳ.

❖ *Chú ý:*

- *Nếu* $f(x) \le g(x), \forall x \in K$ *thì f, g gọi là chặn dưới và chặn trên của nhau trên K.*
- *Muốn xét sự hội tụ của hàm không âm f(x) bất kỳ ta thường tìm hàm hội tụ* $g(x) = \frac{c}{x^k}$ *để chặn trên hoặc hàm phân kỳ* $g(x) = \frac{c}{x^k}$ *chặn dưới f(x). Sau đó sử dụng ĐL1 và ĐL2 so sánh.*

❖ Ví dụ 1

Xét sự hội tụ của tích phân suy rộng $I = \int_1^{\infty} \frac{5\sin^2 x}{x^2} dx$.

Giải

- *Ta có:* $0 \leq \sin^2 x \leq 1, \forall x \Rightarrow 0 \leq \frac{5\sin^2 x}{x^2} \leq \frac{5}{x^2}, \forall x \in [1; \infty)$
- *Dễ thấy hàm:* $f(x) = \frac{5\sin^2 x}{x^2}, g(x) = \frac{5}{x^2}$ *liên tục và không âm trên* $[1, \infty)$.
- AD: $\int_{a>0}^{\infty} \frac{1}{x^k} dx = \begin{cases} \text{hội tụ}, & k > 1 \\ \text{p. kỳ}, & k \leq 1 \end{cases}$ $\Rightarrow \int_1^{\infty} g(x) dx = 5 \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ ***hội tụ.***
- *Áp dụng Tiêu chuẩn so sánh trực tiếp ta suy ra tích phân I là hội tụ.*

❖ *Ví dụ 2*

Xét sự hội tụ của tích phân suy rộng $K = \int_2^{\infty} \frac{dx}{3x^2+4\sin^2 3x}$.

Giải

- *Ta thấy:* $0 \le \frac{1}{3x^2+4\sin^2 3x} \le \frac{1}{3x^2}, \forall x \in [2;\infty)$
- *Các hàm* $f = \frac{1}{3x^2+4\sin^2 3x}$ *và* $g = \frac{1}{3x^2}$ *liên tục trên* $[2,\infty)$.
- $\int_2^{\infty} g(x)dx = \frac{1}{3}\int_2^{\infty} \frac{1}{x^2}dx$ ***hội tụ theo ĐL1*** *(k=2>1)*
- *Áp dụng Tiêu chuẩn so sánh trực tiếp suy ra tích phân K là hội tụ.*

❖ *Ví dụ 3*

Xét sự hội tụ của tích phân $H = \int_0^1 \left(1 - x + \frac{1}{5x^2}\right) dx.$

Giải

- *Ta có:* $0 \le \frac{1}{x^2} \le 1 - x + \frac{1}{x^2}, \forall x \in (0; 1].$
- *Ta thấy hàm* $f(x) = \frac{1}{x^2}$ *và* $g(x) = 1 - x + \frac{1}{x^2}$ *liên tục trên* $(0; 1].$
- AD: $\int_0^{a>0} \frac{1}{x^k} dx = \begin{cases} \text{h. tụ}, k < 1 \\ \text{p. kỳ}, k \ge 1 \end{cases}$ $\Rightarrow \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$ **phân kỳ.**
- *AD Tiêu chuẩn so sánh trực tiếp suy ra tích phân H phân kỳ.*

3.3 Định lý 3: (Tiêu chuẩn so sánh bằng giới hạn)

1) Cho f và g là hai hàm số dương và liên tục trên $[a, \infty)$.

   Giả sử $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = C$ với $0 < C < \infty$, khi đó các tích phân suy rộng $\int_a^{\infty} f(x)dx$ và $\int_a^{\infty} g(x)dx$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

2) Cho f và g là hai hàm số dương và liên tục trên $[a, b)$ và cùng gián đoạn vô cùng tại b.

   Giả sử $\lim\limits_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = C$ với $0 < C < \infty$ khi đó các tích phân suy rộng $\int_a^{b} f(x)dx$ và $\int_a^{b} g(x)dx$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

❖ *Chú ý:*

- *Các dạng còn lại của tích phân suy rộng loại I và loại II được phát biểu tương tự.*
- *Nếu* $f(x) \sim g(x), x \to x_0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ *nên ta có hệ quả sau:*

Hệ quả

a) $\begin{cases} \text{f, g dương và liên tục } /[a;\infty) \\ f(x) \sim g(x),\, x \to \infty \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\int_a^{\infty} f(x)dx$ và $\int_a^{\infty} g(x)dx$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

b) $\begin{cases} \text{f, g dương và liên tục } /[a;b) \\ \text{f, g gián đoạn vô cực tại } b \\ f(x) \sim g(x),\, x \to b^- \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\int_a^{b} f(x)dx$ và $\int_a^{b} g(x)dx$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

❖ *Chú ý:*

- *Quy tắc ngắt bỏ VCB bậc cao khi đánh giá VCB tương đương:*

$$\frac{VCB_1 + VCB_2 + \cdots + VCB_n}{VCB_{n+1} + VCB_{n+2} + \cdots + VCB_{n+m}} \sim \frac{\text{VCB bậc thấp nhất của tử thức}}{\text{VCB bậc thấp nhất của mẫu thức}}.$$

- **Quy tắc ngắt bỏ VCL bậc thấp khi đánh giá VCL tương đương:**

$$\frac{VCL_1 + \cdots + VCL_n + \text{Hàm bị chặn} + C}{VCL_{n+1} + \cdots + VCL_{n+m} + \text{Hàm bị chặn} + C} \sim \frac{\text{VCL bậc cao nhất của tử}}{\text{VCL bậc cao nhất của mẫu}}.$$

- **Quy tắc thay thế: Nếu** $f(x) \sim \overline{f(x)},\, g(x) \sim \overline{g(x)},\, h(x) \sim \overline{h(x)},\, x \to x_0$ **thì:**

$$\frac{f(x).g(x)}{h(x)} \sim \frac{\overline{f(x)}.\overline{g(x)}}{\overline{h(x)}},\, x \to x_0.$$

❖ Ví dụ 1

Xét sự hội tụ của tích phân suy rộng $I = \int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}+1}{x^2-2x+5}\,dx.$

Giải

- *Khi* $x \to \infty$ *ta có:* $\frac{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}+1}{x^2-2x+5} \sim \frac{\sqrt{x}}{x^2} = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^2} = x^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{x^{3/2}}.$
- *Đặt* $f(x) = \frac{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}+1}{x^2-2x+5}$, $g(x) = \frac{1}{x^{3/2}}$ *thì* f, g *dương và liên tục trên* $[1;\infty)$.
- AD: $\int_{a>0}^{\infty} \frac{1}{x^k}\,dx = \begin{cases} \text{hội tụ}, & k > 1 \\ \text{p. kỳ}, & k \leq 1 \end{cases}$ $\Rightarrow \int_1^{\infty} g(x)\,dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^{3/2}}\,dx$ *hội tụ.*
- *ÁD Tiêu chuẩn so sánh giới hạn suy ra tích phân I hội tụ.*

❖ *Ví dụ 2*

Xét sự hội tụ của tích phân suy rộng $H = \int_0^1 \frac{x\,dx}{e^{x^{3/2}} - 1}$.

Giải

- *Khi* $x \to 0^+$ *ta có:* $\frac{x}{e^{x^{3/2}} - 1} \sim \frac{x}{x^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$.
- *Đặt* $f(x) = \frac{x}{e^{x^{3/2}} - 1}$, $g(x) = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$ *thì f, g dương và liên tục trên* $(0; 1]$.
- AD: $\int_0^{a>0} \frac{1}{x^k} dx = \begin{cases} \text{h. tụ}, & k < 1 \\ \text{p. kỳ}, & k \geq 1 \end{cases}$ $\Rightarrow \int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{1/2}} dx$ *hội tụ.*
- *ÁD Tiêu chuẩn so sánh giới hạn suy ra tích phân H hội tụ.*

❖ *Ví dụ 3*

Xét sự hội tụ của tích phân suy rộng $K = \int_{-\infty}^{-1} \frac{1+e^{2x}}{x^2} dx.$

Giải

- *Ta thấy:* $1 + e^{2x} \to 1, x \to -\infty.$

$$\Rightarrow \frac{1+e^{2x}}{x^2} \sim \frac{1}{x^2}, x \to -\infty.$$

- *Đặt* $f = \frac{1+e^{2x}}{x^2}$, $g = \frac{1}{x^2}$ *thì f,g dương và liên tục trên* $(-\infty; -1]$.

- AD: $\int_{a>0}^{\infty} \frac{1}{x^k} dx = \begin{cases} \text{hội tụ}, & k > 1 \\ \text{p. kỳ}, & k \le 1 \end{cases}$

Ta thấy $\int_{-\infty}^{-1} g(x) dx = \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2} dx = -\int_{\infty}^{1} \frac{1}{t^2} dt = \int_{1}^{\infty} \frac{1}{t^2} dt$ *hội tụ.*

- *ÁD Tiêu chuẩn so sánh giới hạn suy ra tích phân K hội tụ.*

3.4 Định lý 4: (Tiêu chuẩn hội tụ tuyệt đối)

Nếu phân suy rộng $\int_a^{\infty} |f(x)|dx$ hội tụ thì tích phân suy rộng $\int_a^{\infty} f(x)dx$ cũng hội tụ. Khi đó ta nói tích phân suy rộng $\int_a^{\infty} f(x)dx$ hội tụ tuyệt đối.

❖ *Chú ý:*

- *Các ĐL1, ĐL2, ĐL3 chỉ dùng để xét sự hội tụ tích phân của các hàm số không âm trên miền tích phân.*
- *Khi xét sự hội tụ $\int_a^{\infty} f(x)dx$ mà f(x) có dấu thay đổi ta sẽ vận dụng ĐL1, ĐL2, ĐL3 xét sự hội tụ của $\int_a^{\infty} |f(x)|$.*

$\int_a^{\infty} |f(x)|dx$ hội tụ → $\int_a^{\infty} f(x)dx$ hội tụ

$\int_a^{\infty} |f(x)|dx$ không hội tụ → Chưa thể kết luận sự hội tụ của $\int_a^{\infty} f(x)dx$

- *Các dạng còn lại của tích phân suy rộng phát biểu tương tự.*

❖ *Ví dụ 1*

Xét sự hội tụ của tích phân suy rộng I $= \int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^2+\ln 2x}\,dx$.

Giải

- ***Ta thấy: 0*** $\le \left|\frac{\sin x}{x^2+\ln 2x}\right| \le \frac{1}{x^2+\ln 2x} \le \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x^2}}, \mathbf{x} \in [\mathbf{1}, \infty)$
- ***Hàm*** $|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})| = \left|\frac{\sin x}{x^2+\ln 2x}\right|$ ***và*** $g(x) = \frac{1}{x^2}$ ***không âm và liên tục trên*** $[\mathbf{1}, \infty)$.
- AD: $\int_{a>0}^{\infty} \frac{1}{x^k}\,dx = \begin{cases} \text{hội tụ}, k > 1 \\ \text{p. kỳ}, \ k \le 1 \end{cases} \Rightarrow \int_1^{\infty} g(x)\,dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ *hội tụ.*
- ***Áp dụng Tiêu chuẩn so sánh trực tiếp suy ra tích phân*** $\int_1^{\infty} |f(x)|dx$ ***là hội tụ. Suy ra I hội tụ.***

❖ *Ví dụ 2*

Xét sự hội tụ của tích phân suy rộng $I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{sinx}{x} dx.$

- *Nhận xét: 0* $\le \left|\frac{sinx}{x}\right| \le \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}, \mathbf{x} \in [\frac{\pi}{2}, \infty)$
- AD: $\int_{a>0}^{\infty} \frac{1}{x^k} dx = \begin{cases} \text{hội tụ}, k > 1 \\ \text{p. kỳ}, \ k \le 1 \end{cases} \Rightarrow \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}} dx$ *phân kỳ.*

⇨ Bài toán bế tắc do k=1. Muốn $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} g(x)dx$ hội tụ thì k>1.

⇨ Ta dùng tích phân từng phần để tính I và làm cho k tăng lên.

Giải

$$I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = -\left.\frac{\cos x}{x}\right|_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$$

$$= 0 - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$$

u		dv
$\frac{1}{x}$	(+)	sinx
$\frac{-1}{x^2}$	(-) $\int$	-cosx

$\Rightarrow I = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$. Ta xét sự hội tụ của tích phân mới này.

- *Ta thấy: 0* $\leq \left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}, \mathbf{x} \in [\frac{\pi}{2}, \infty)$
- *Hàm* $|f(x)| = \left|\frac{\cos x}{x^2}\right|$ *và* $g(x) = \frac{1}{x^2}$ *không âm và liên tục trên* $[\frac{\pi}{2}, \infty)$.
- AD: $\int_{a>0}^{\infty} \frac{1}{x^k} dx = \begin{cases} \text{hội tụ}, k > 1 \\ \text{p. kỳ}, \ k \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} g(x)dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ *phân kỳ.*
- *Áp dụng Tiêu chuẩn so sánh trực tiếp suy ra tích phân* $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} |f(x)|dx$ *là hội tụ. Suy ra I hội tụ.*

HẾT CHƯƠNG 3

BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 1: Tính các tích phân suy rộng sau:

$$A = \int_3^7 \frac{x^2+4}{\sqrt{x-3}}dx\ ; \qquad \mathrm{B} = \int_{-\infty}^{-2}\left(\frac{x}{1+x^2} - \frac{1}{1+x}\right)dx\ ; \qquad \mathrm{C} = \int_{-\infty}^{-2}\left(\frac{x}{1+x^2} - \frac{1}{1+x}\right)dx$$

$$\mathrm{D} = \int_0^{\infty} x^3.e^{-x}\,d\,x\ ; \quad \mathrm{E} = \int_0^{\infty} e^{-x}.cosxdx\ ; \qquad \mathrm{F} = \int_3^7 \frac{x^2+4}{\sqrt{x-3}}dx$$

Bài 2: Tính diện tích miền phẳng D nằm dưới đường cong $y = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$, phía trên trục hoành và nằm giữa hai đường thẳng $x = 1, x = 2$.

Bài 3: Tính diện tích miền phẳng vô hạn được giới hạn bởi các đường cong có phương trình : $y = (1-3x)e^{3x}, y = 0$ với $x \leq 0$.

Bài 4: Khảo sát sự hội tụ của tích phân suy rộng:

$$\mathrm{A} = \int_0^1 \frac{\sqrt{x^3}dx}{(e^{x^2}-1)\sin x}\ ; \qquad \mathrm{B} = \int_1^{\infty} \frac{1+x+x^2}{\sqrt{x+x^3+2x^7}}dx; \quad \mathrm{C} = \int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2+3x+1}.$$

Bài 1: Tính các tích phân suy rộng sau: $A = \int_3^7 \frac{x^2+4}{\sqrt{x-3}}dx$.

Giải:

Đặt $t = \sqrt{x-3}$. $\Rightarrow t^2 = x - 3 \Rightarrow x = t^2 + 3 \Rightarrow dx = 2tdt$.

Đổi cận:

x	**3**	**7**
t	0	2

$$A = \int_0^2 \frac{(t^2+3)^2+4}{t}.2tdt = 2\int_0^2 [(t^2+3)^2+4]dt$$

$$= 2\int_0^2 \left(t^4 + 6t^2 + 13\right)dt = \frac{484}{5}.$$

<u>Bài 1:</u> Tính các tích phân suy rộng sau: $E = \int_0^{\infty} e^{-x}.cosxdx$.

Giải:

$$E = (e^{-x}.sinx - e^{-x}cosx)|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} e^{-x}.cosxdx .$$

$$= \left.\frac{sinx - cosx}{e^x}\right|_0^{\infty} - E$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{sinx - cosx}{e^x} - \frac{sin0 - cos0}{e^0} - E$$

$$= \quad 0 \quad + \quad 1 \quad - \quad E$$

$$\Rightarrow 2E = 1 \quad \Rightarrow E = \frac{1}{2}.$$

u	dv
e^{-x}	$cosx$
$(+)$	
$-e^{-x}$	$sinx$
$(-)$	
e^{-x}	$-cosx$
$(+)\int$	

<u>Bài 3</u>: Tính diện tích miền phẳng vô hạn được giới hạn bởi các đường cong có phương trình: $y = (1-3x)e^{3x}, y = 0$ với $x \leq 0$.

Giải:

Diện tích miền phẳng là:

$$\boldsymbol{S} = \int_{-\infty}^{0} (1-3x)e^{3x}\boldsymbol{dx}$$

$$= \left((1-3x)\frac{e^{3x}}{3} + e^{3x}\right)\Big|_{-\infty}^{0} = \frac{4-3x}{3}e^{3x}\Big|_{-\infty}^{0}$$

$$= \left(\frac{4-0}{3}\right)e^{0} - \lim_{x\to-\infty}\frac{4-3x}{3}e^{3x}$$

$$= \frac{4}{3} - \lim_{x\to-\infty}\frac{4-3x}{3e^{-3x}} = \frac{4}{3} - \lim_{x\to-\infty}\frac{(4-3x)'}{(3e^{-3x})'}$$

$$= \frac{4}{3} - \lim_{x\to-\infty}\frac{-3}{-9e^{-3x}} = \frac{4}{3} - \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{3e^{-3x}} = \frac{4}{3} - 0 = \frac{4}{3} \text{ (đvdt).}$$

u		dv
$1-3x$	(+)	e^{3x}
-3	(-)	$\frac{e^{3x}}{3}$
0	$(+)\int$	$\frac{e^{3x}}{3}$

Bài 4: Khảo sát sự hội tụ của tích phân suy rộng:

$$A = \int_0^1 \frac{\sqrt{x^3}}{(e^{x^2}-1)\sin x}dx\ ;\ B = \int_1^{\infty} \frac{1+x+x^2}{\sqrt{x+x^3+2x^7}}dx;\ C = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+3x+1}\ ;$$

Giải:

- ***Khi*** $x \to 0^+$ ***ta có:*** $\dfrac{\sqrt{x^3}}{(e^{x^2}-1)\sin x} \sim \dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{x^2.x} = \dfrac{x^{3/2}}{x^3} = \dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$.
- ***Đặt*** $f(x) = \dfrac{x}{e^{x^{3/2}}-1}$, $g(x) = \dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ ***thì f, g dương và liên tục trên*** $(0;1]$.
- AD: $\int_0^{a>0} \frac{1}{x^k}dx = \begin{cases} \text{h. tụ}, & k < 1 \\ \text{p. kỳ}, & k \geq 1 \end{cases}$ $\Rightarrow \int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{3/2}}dx$ *phân kỳ.*
- ***Áp dụng Tiêu chuẩn so sánh giới hạn suy ra tích phân A phân kỳ.***

Bài 4: Khảo sát sự hội tụ của tích phân suy rộng:

$$B = \int_1^{\infty} \frac{1+x+x^2}{\sqrt{x+x^3+2x^7}} dx; \; C = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+3x+1}.$$

Giải:

- ***Khi x → ∞ ta có:*** $\frac{1+x+x^2}{\sqrt{x+x^3+2x^7}} \sim \frac{x^2}{\sqrt{2x^7}} = \frac{\boldsymbol{x^2}}{\sqrt{2}.\boldsymbol{x^{\frac{7}{2}}}} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{2}}.\boldsymbol{x^{-\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}.x^{3/2}}.$

- *Đặt* $f(x) = \frac{1+x+x^2}{\sqrt{x+x^3+2x^7}}$, $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2}.x^{3/2}}$ *thì f , g dương và liên tục trên* $[1;\infty)$.

- AD: $\int_{a>0}^{\infty} \frac{1}{x^k} dx = \begin{cases} \text{hội tụ}, k > 1 \\ \text{p. kỳ}, \;\; k \leq 1 \end{cases}$ $\Rightarrow \int_1^{\infty} g(x)dx = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{2}}.\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{3/2}} dx$ *hội tụ.*

- ***ÁD Tiêu chuẩn so sánh giới hạn suy ra tích phân B hội tụ.***

Bài 4: Khảo sát sự hội tụ của tích phân suy rộng: $C = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+3x+1}$.

Giải:

- ***Khi x*** $\to \infty$ ***ta có:*** $\frac{1}{x^2+3x+1} \sim \frac{\mathbf{1}}{x^2}$
- ***Đặt*** $f(x) = \frac{1}{x^2+3x+1}$, $g(x) = \frac{\mathbf{1}}{x^2}$ ***thì f , g dương và liên tục trên*** $[\mathbf{1}; \infty)$.
- AD: $\int_{a>0}^{\infty} \frac{1}{x^k} dx = \begin{cases} \text{hội tụ}, k > 1 \\ \text{p. kỳ}, \quad k \leq 1 \end{cases}$ $\Rightarrow \int_1^{\infty} g(x) dx = \int_1^{\infty} \frac{\mathbf{1}}{x^2} dx$ *hội tụ.*
- ***ÁD Tiêu chuẩn so sánh giới hạn suy ra tích phân C hội tụ.***