TRƯỜNG ĐẠI HỌC GIAO THÔNG VẬN TẢI THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
KHOA CƠ BẢN – BỘ MÔN TOÁN

BÀI GIẢNG GIẢI TÍCH 1

CHƯƠNG III. PHÉP TÍNH TÍCH PHÂN HÀM MỘT BIẾN

§2. Tích phân xác định và ứng dụng

GV: Đinh Tiến Dũng

NỘI DUNG CHÍNH

- *Định nghĩa tích phân xác định, các tính chất, các định lý cơ bản của giải tích toán học.*
- *Ứng dụng tính diện tích hình phẳng, độ dài đường cong phẳng, thể tích vật thể.*

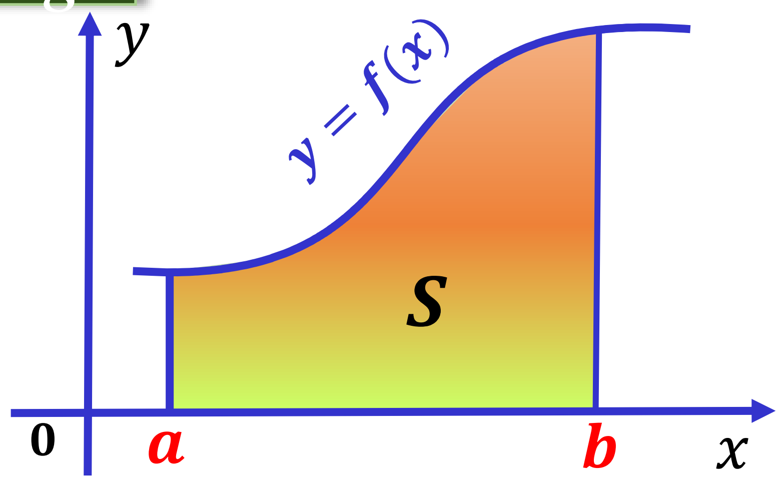
CHƯƠNG III. PHÉP TÍNH TÍCH PHÂN HÀM MỘT BIẾN

§2. Tích phân xác định và ứng dụng

1. Hai bài toán dẫn đến khái niệm tích phân xác định

❖ Bài toán diện tích hình thang cong

Tính diện tích hình phẳng S được giới hạn bởi đường cong liên tục $y = f(x) \geq 0$ và các đường thẳng $x = a$, $x = b, y = 0$ với $a < b$.



❖ Tìm cách giải

- *Xấp xỉ S với một hình chữ nhật:*

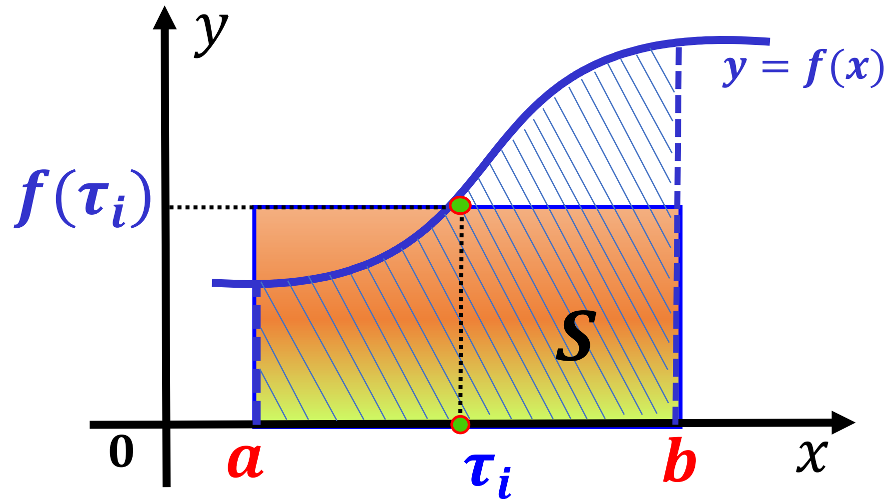
  Lấy điểm τ_i bất kỳ thuộc (a;b).

  Vẽ hình chữ nhật có:

  - Cạnh đáy $\Delta x = b - a$

  - Đường cao $f(\tau_i)$.

  Ta có kết quả gần đúng: $S \approx f(\tau_i).\,\Delta x$



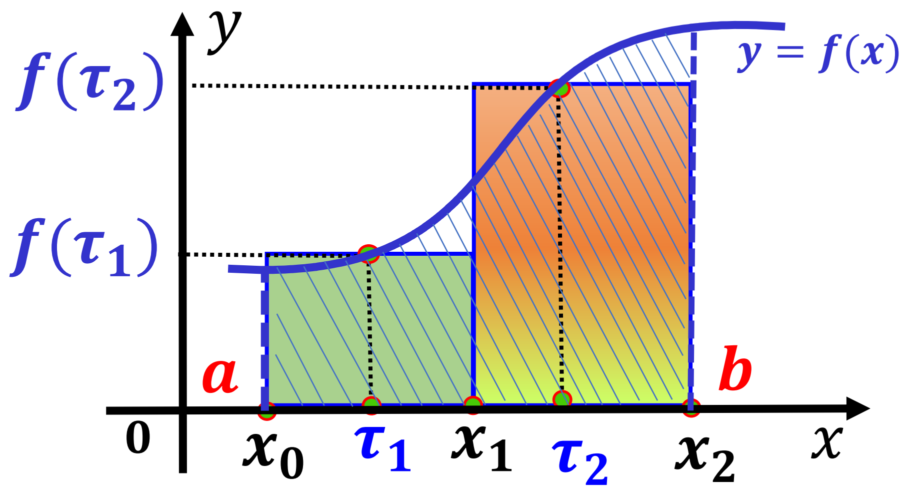
- *Xấp xỉ S với hai hình chữ nhật:*

  Chia $[a, b]$ thành 2 đoạn nhỏ một cách tùy ý bởi các điểm chia:

$$x_0 = a < x_1 < x_2 = b.$$

Đặt $\Delta x_1 = x_1 - x_0$, $\Delta x_2 = x_2 - x_1$ và lấy tùy ý $\tau_1 \in [x_0, x_1]$, $\tau_2 \in [x_1, x_2]$.

Ta có: $S \approx f(\tau_1)\Delta x_1 + f(\tau_2)\Delta x_2$

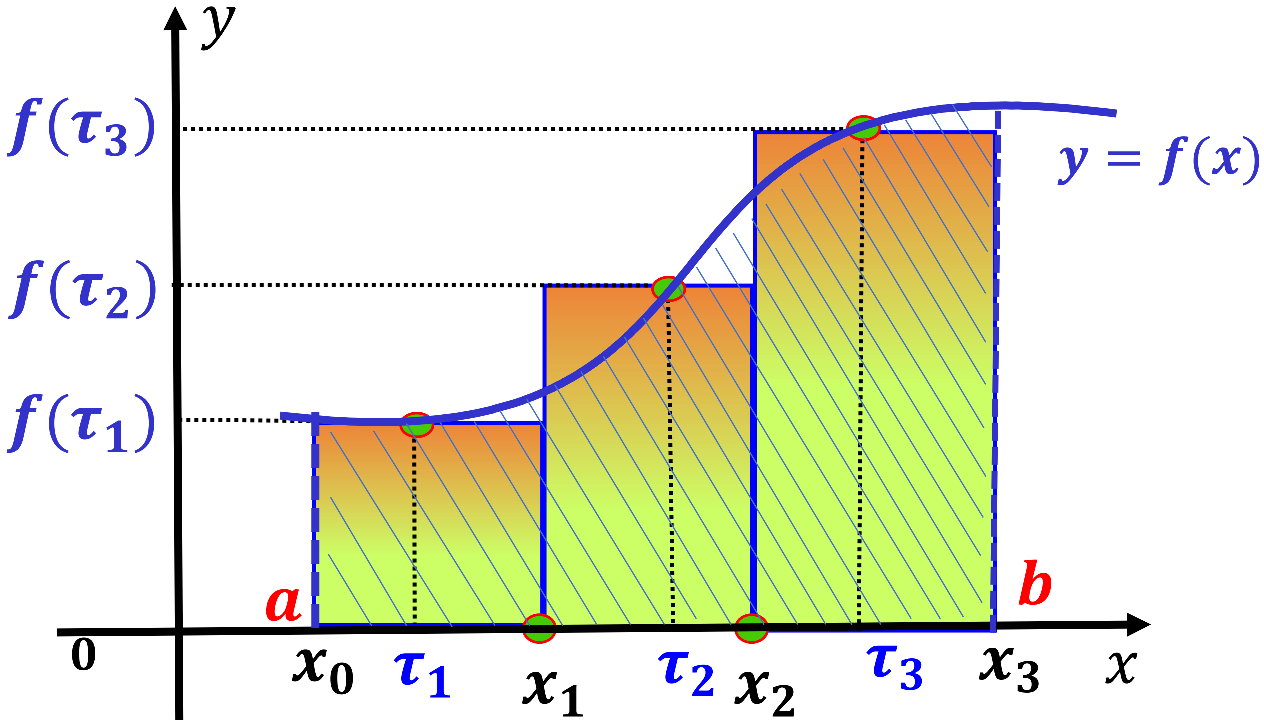


- *Xấp xỉ S với 3 hình chữ nhật:*

Chia $[a, b]$ *thành* **3** *đoạn nhỏ một cách tùy ý bởi các điểm chia:*

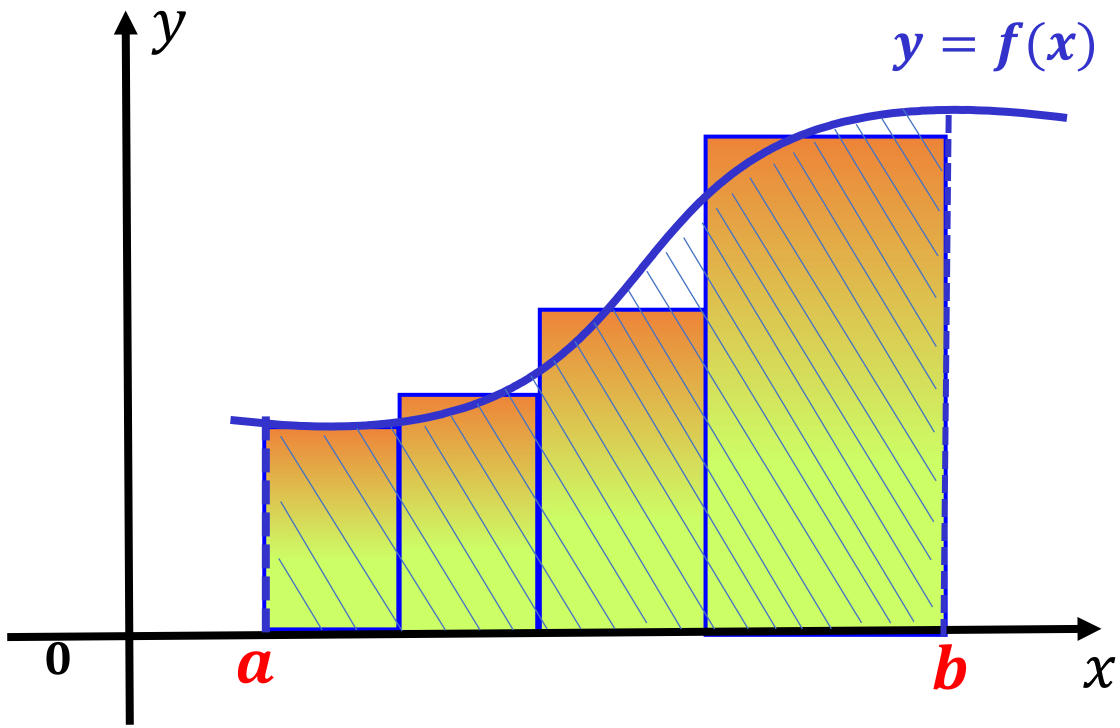
$$x_0 = a < x_1 < x_2 < x_3 = b.$$

Đặt $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ *và lấy* τ_i *tùy ý thuộc* $[x_{i-1}, x_i]$ *với* $i = 1, 2, 3$



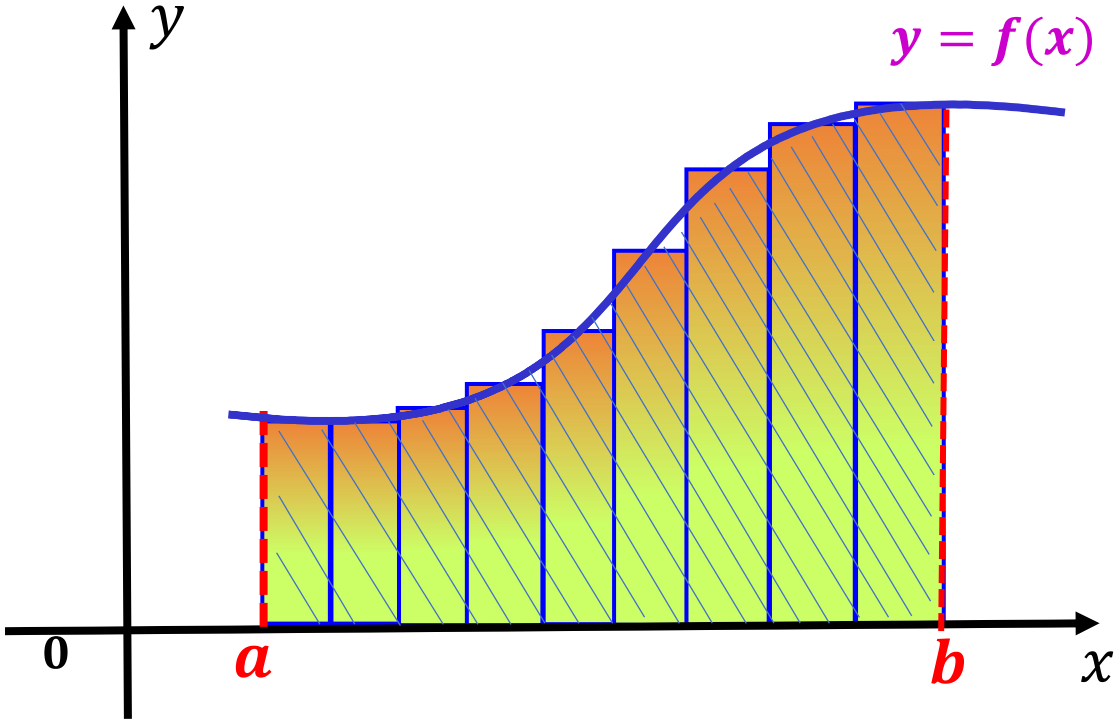
Ta có: $S \approx f(\tau_1)\Delta x_1 + f(\tau_2)\Delta x_2 + f(\tau_3)\Delta x_3 = \sum_{i=1}^{3} f(\tau_i)\Delta x_i$

- *Xấp xỉ S với 4 hình chữ nhật:*



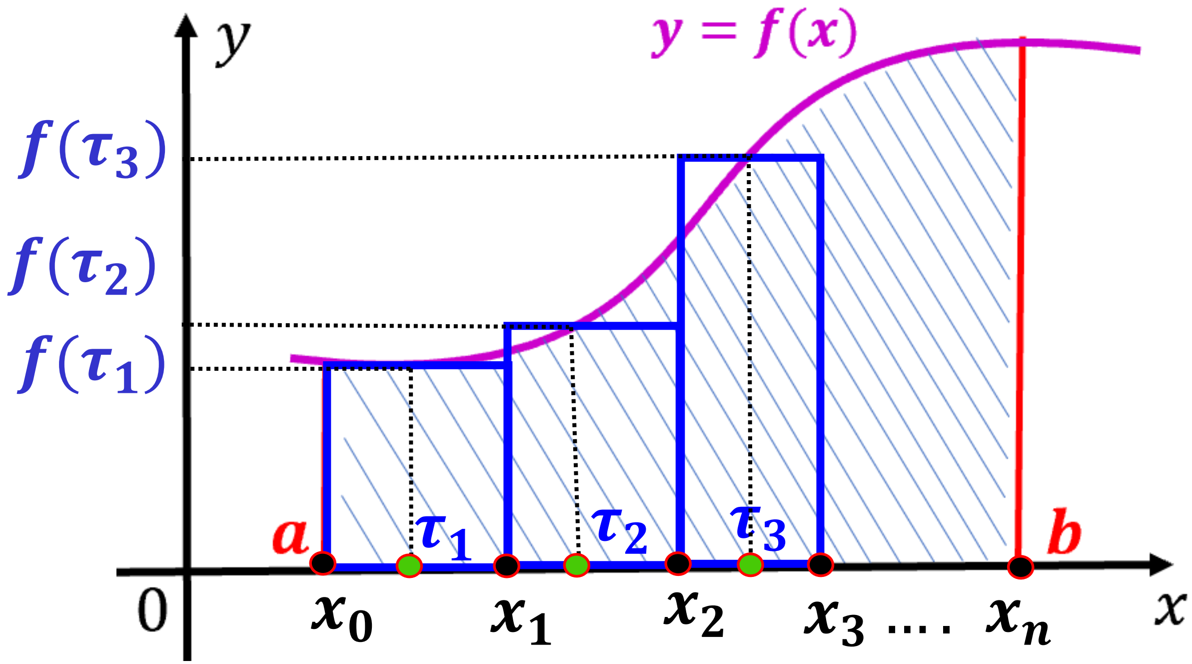
$$S \approx \sum_{i=1}^{4} f(\tau_i)\Delta x_i$$

- **Xấp xỉ S với 9 hình chữ nhật:**



$$S \approx \sum_{i=1}^{9} f(\tau_i)\Delta x_i$$

❖ Lời giải Bài toán tính diện tích hình thang cong:



Chia $[a, b]$ thành n đoạn nhỏ một cách tùy ý bởi các điểm chia:

$$x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

Đặt $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ và lấy τ_i tùy ý thuộc đoạn $[x_{i-1}, x_i]$.

Diện tích hình thang cong là: $S = \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\tau_i)\Delta x_i$ (sao cho các Δx_i tiến về 0)

❖ Bài toán quãng đường

Giả sử một vật chuyển động theo hướng dương với vận tốc: $v = f(t)$, với $a \le t \le b$ và $f(t) \ge 0$. Hãy tìm quãng đường đi được của vật trong khoảng thời gian $a \le t \le b$.

Giải

Chia $[a, b]$ thành n khoảng thời gian nhỏ bởi các điểm chia:

$$t_0 = a < t_1 < \cdots < t_n = b.$$

Trên mỗi đoạn $[t_{i-1}; t_i]$ lấy bất kỳ $\tau_i \in [t_{i-1}; t_i]$ thì:

- *Vận tốc của vật $v_i \approx f(\tau_i)$; thời gian tiêu tốn: $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$*
- *Quãng đường đi được: $S_i \approx f(\tau_i)\Delta t_i$.*

Khi $a \le t \le b$ tổng quãng đường là $S \approx \sum_{i=1}^{n} S_i = \sum_{i=1}^{n} f(\tau_i)\Delta t_i$.

Nếu Δt_i càng nhỏ thì vật gần như là chuyển động đều trên khoảng thời gian $[t_{i-1}; t_i]$ và sự xấp xỉ càng chính xác. Do đó: $S = \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\tau_i)\Delta t_i$ *(sao cho các Δt_i tiến về 0).*

2. Định nghĩa tích phân xác định

❖ **Định nghĩa**

Cho hàm số $f(x)$ xác định và bị chặn trên đoạn $[a,b]$. Chia $[a,b]$ thành n đoạn nhỏ một cách tùy ý bởi các điểm chia:

$$x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

Đặt $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ và lấy τ_i tùy ý thuộc đoạn $[x_{i-1}, x_i]$.

Cho $n \to \infty$ sao cho $max\Delta x_i \to 0$, nếu $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\tau_i)\Delta x_i = I$ hữu hạn, không phụ thuộc vào cách chia đoạn $[a,b]$ và cách lấy các điểm τ_i thì I được gọi là tích phân xác định của hàm $f(x)$ trên $[a,b]$. Ký hiệu:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (max\Delta x_i \to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f(\tau_i)\Delta x_i$$

Kí hiệu $\int$ gọi là dấu tích phân, f là hàm lấy tích phân; a, b là các cận dưới, cận trên; dx là vi phân của biến độc lập x.

❖ *Chú ý:*

i. $\int_a^b f(x)dx$ *không phụ thuộc vào* x *nên* $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$

ii. $\int_a^b f(x)dx$ *không phụ thuộc vào cách chia* $[a,b]$ *và cách chọn các điểm* τ_i. *Khi tính tích phân bằng định nghĩa, ta thường chia* $[a,b]$ *thành* n *đoạn nhỏ có chiều dài bằng nhau và thường lấy* $\tau_i = x_{i-1}$ *hoặc* $\tau_i = x_i$. *Khi đó,* $\sum_{i=1}^{n} f(\tau_i)\Delta x_i$ *gọi là tổng Riemann của hàm f(x) ứng với cách chia ấy.*

❖ *Định nghĩa 2:*

Hàm f *có tích phân xác định trên đoạn* $[a,b]$ *thì ta nói hàm* f *khả tích Riemann hay gọi tắt là khả tích trên* $[a,b]$.

❖ *Định lý:*

Nếu hàm số f *liên tục trên* $[a,b]$ *hoặc* f *bị chặn và có một số hữu hạn điểm gián đoạn bỏ được hoặc điểm nhảy trên* $[a,b]$ *thì* f *khả tích trên* $[a,b]$.

❖ *Ví dụ (có tính lịch sử)*

Dùng định nghĩa, hãy tính tích phân sau: $\int_0^1 x^2 dx$.

Giải

Chia [0;1] bởi các điểm chia $x_i = \frac{i}{n}, i = \overline{0,n}$. *Khi đó [0;1] được chia thành n đoạn có cùng chiều dài:* $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{1}{n}, i = \overline{1,n}$.

Trên đoạn $[x_{i-1}; x_i] = \left[\frac{i-1}{n}; \frac{i}{n}\right]$, *lấy* $\tau_i = x_i = \frac{i}{n}$.

Tổng Riemann của hàm $f(x) = x^2$ *ứng với cách chia này là:*

$$\sum_{i=1}^{n} f(\tau_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^3}.\, i^2 = \frac{1}{n^3}\left(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2\right)$$

$$= \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2n^2 + 3n + 1}{6n^2}$$

Theo ĐN: $\int_0^1 x^2 dx = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2+3n+1}{6n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2}{6n^2} = \frac{1}{3}$.

3. Tính chất và quy tắc tích phân xác định

Cho f, g là các hàm khả tích trên đoạn $[a, b]$. Ta có:

1) $\int_a^a f(x)dx = 0$; $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$;

2) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$, với k là hằng số;

3) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.

4) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ với $a < c < b$;

5) Nếu $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$ thì $\int_a^b f(x)dx \geq 0$;

6) Nếu $f(x) \leq g(x), \forall x \in [a, b]$ thì $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$
Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $f(x) = g(x), \forall x \in [a, b]$;

7) Nếu $m \leq f(x) \leq M$ với $a \leq x \leq b$ thì

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a);$$

8) $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$. Dấu "=" xảy ra khi $f(x) = 0$ vô nghiệm trên $(a; b)$.

4. Các định lý nền tảng của giải tích cổ điển:

❖ Định lý giá trị trung bình

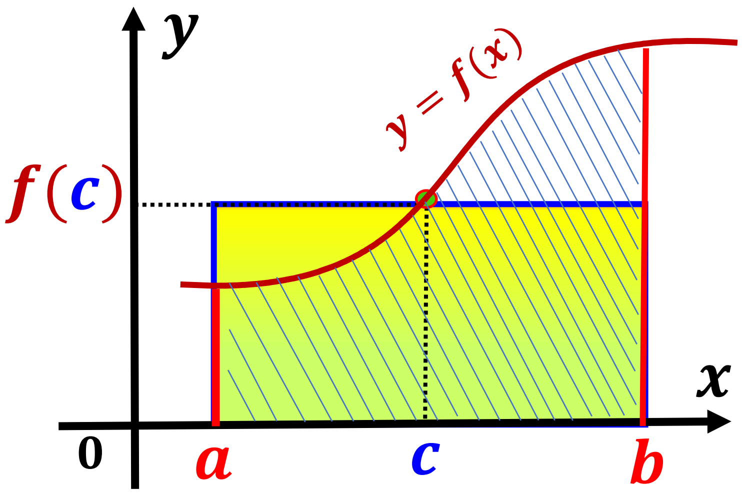
Nếu hàm số f liên tục trên $[a,b]$ thì tồn tại ít nhất một giá trị $c \in [a,b]$ sao cho: $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)$.

- Chú ý: Giá trị $f_{ave} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)$ được gọi là giá trị trung bình của hàm số liên tục f trên [a,b].
- Ý nghĩa hình học:

  Xét trường hợp $f(x) \geq 0$, $x \in [a,b]$.

  Ta có: $(b-a)f(c) = \int_a^b f(x)dx$.

  Tức là diện tích hình thang cong bằng diện tích của hình chữ nhật.



Chứng minh:

Do hàm f liên tục trên đoạn $[a,b]$ nên tồn tại giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của f trên $[a,b]$.

Đặt $m=\min_{x\in[a,b]} f(x), M=\max_{x\in[a,b]} f(x)$, ta có:

$$m\le f(x)\le M, \forall x\in[a,b]$$

$$\Rightarrow \int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b M\,dx$$

$$\Rightarrow m\le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$$

Theo định lý giá trị trung gian của hàm liên tục, thì có ít nhất một $c\in[a,b]$ để cho $f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

❖ Định lý cơ bản thứ nhất của giải tích

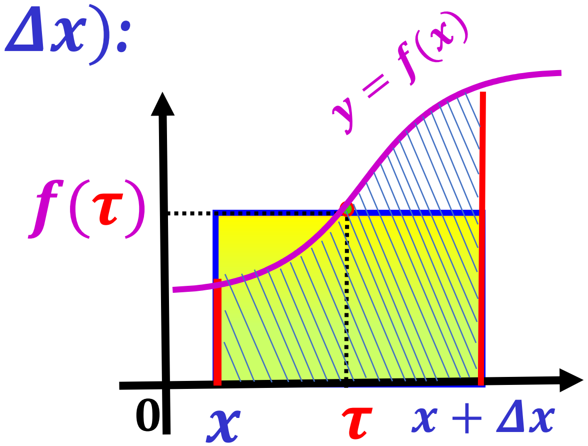
Nếu hàm f liên tục trên $[a,b]$ thì hàm số $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ liên tục trên đoạn $[a,b]$, khả vi trên khoảng (a,b) và $F'(x)=f(x)$.

Chứng minh:

Cho $x\in(a,b)$ một số gia Δx thỏa $x+\Delta x\in[a,b]$.

Theo Đlý giá trị trung bình, có τ thuộc $(x;x+\Delta x)$:

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt=\Delta x\cdot f(\tau)$$



Ta có $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ nên:

$$F(x+\Delta x)-F(x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt$$

$$=\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt+\int_x^a f(t)dt=\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt=\Delta x.f(\tau).$$

Suy ra: $F'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\tau\to x} f(\tau)=f(x).$

❖ *Định lý cơ bản thứ hai của giải tích*

Nếu f liên tục trên $[a,b]$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ thì

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

(Công thức này được gọi là công thức Newton – Leibnitz)

Chứng minh:

Đặt $G(x) = \int_a^x f(t)dt \quad (1)$

thì $G'(x) = f(x)$ *(Theo ĐL cơ bản thứ nhất).*

Suy ra G là một nguyên hàm của f.

Nếu F là một nguyên hàm khác của f trên $[a,b]$ thì

$$F(x) = G(x) + C, \text{ với } C \text{ là hằng số.} \qquad (2)$$

Ta có: $(1) \Rightarrow G(a) = \int_a^a f(t)dt = 0.$

$$(2) \Rightarrow F(b) - F(a) = [G(b) + C] - [G(a) + C] = G(b) - G(a)$$

$$= G(b) - 0 = G(b) \underset{(1)}{=} \int_a^b f(x)dx.$$

❖ *Ví dụ 1*

Áp dụng công thức Newton - Leibnitz, hãy tính

$a)\ \int_0^3 x^2 dx$ $\qquad$ $b)\ \int_0^{\pi/2}\left(\sin t - \frac{1}{t+1}\right)dt$

Giải

$$a)\ \int_0^3 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^3 = 9$$

$$b)\ \int_0^{\pi/2}\left(sint - \frac{1}{t+1}\right)dt = -\cos x\Big|_0^{\pi/2} - \ln|t+1|\Big|_0^{\pi/2}$$

$$= -\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos 0\right) - \left[\ln\left(\frac{\pi}{2}+1\right) - \ln 1\right]$$

$$= 1 - \ln\left(\frac{\pi}{2}+1\right).$$

❖ Ví dụ 2

a) Tính giá trị trung bình f_{ave} *của hàm* $f(x) = 1 + x^2$ *trên* $[-1; 2]$

b) Tìm các giá trị của $c \in [-1; 2]$ *để cho* $f(c) = f_{ave}$.

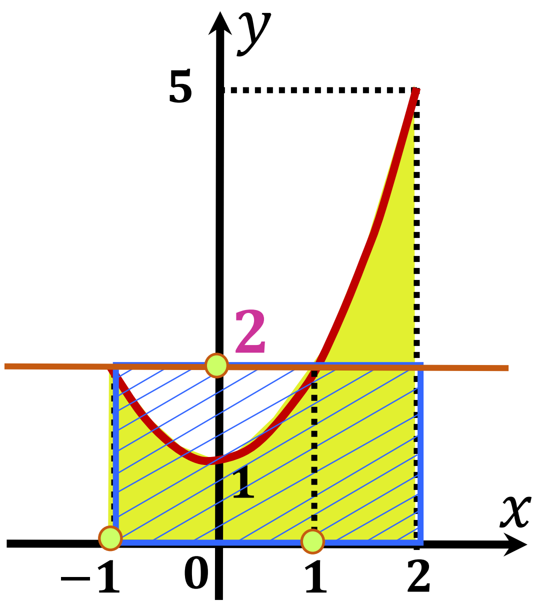
Giải

a) AD: $f_{ave} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)$ *ta có:*

$$f_{ave} = \frac{1}{2-(-1)}\int_{-1}^{2}(1+x^2)dx$$

$$= \frac{1}{3}\left[x + \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} = 2.$$

b) $f(c) = f_{ave} \Leftrightarrow 1 + c^2 = 2 \Leftrightarrow c = \pm 1.$



5. Các phương pháp tích phân xác định

Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$, ta có:

- *Tích phân bất định:* $\int f(x)dx = F(x) + C$.
- *Tích phân xác định:* $\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$.

(theo công thức Newton – Leibnitz)

Hai loại tích phân này chỉ khác nhau ở kết quả cuối cùng, cho nên các kết quả và phương pháp tính tích phân bất định được áp dụng lại đối với tích phân xác định.

Đây là phần tự học dành cho các bạn sinh viên chăm chỉ.

6. Ứng dụng của tích phân xác định

a) Bài toán quãng đường và độ dịch chuyển

Một chất điểm dao động trên một đường thẳng có vận tốc tức thời $v(t)$*, khi đó:*

- *Quãng đường đi được của chất điểm trong khoảng thời gian* $a \leq t \leq b$ *là:*

$$S = \int_a^b |v(t)|dt.$$

- *Độ dịch chuyển của chất điểm trong khoảng thời gian* $a \leq t \leq b$ *là:*

$$d = \left|\int_a^b v(t)dt\right|.$$

❖ ***Ví dụ***

Một hạt di chuyển qua lại trên một đường thẳng với vận tốc

$$v(t) = 3t^2 - 8t + 4 \ (\mathrm{m/s})$$

a)Tìm độ dịch chuyển của hạt trong khoảng thời gian $0 \le t \le 5$.

b)Tìm quãng đường đi được của hạt trong khoảng $0 \le t \le 5$.

Giải

a) Tìm độ dịch chuyển của hạt trong khoảng thời gian $0 \le t \le 5$.

$$|\boldsymbol{s}(\mathbf{5}) - s(0)| = \left|\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{5}} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{dt}\right| = \left|\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{5}} \left(3t^2 - 8t + 4\right)\boldsymbol{dt}\right| = \mathbf{45}\ (\boldsymbol{m})$$

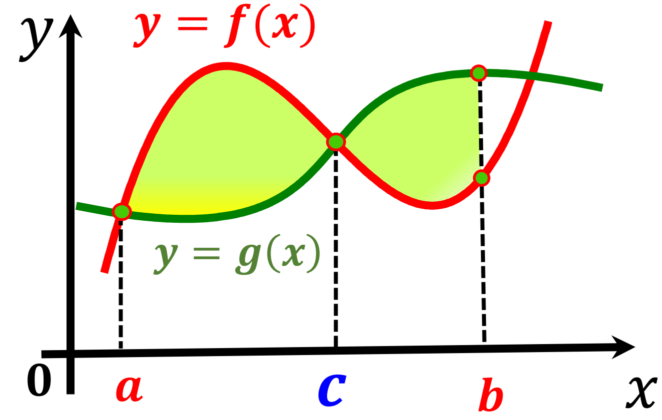
b) Tìm quãng đường đi được của hạt trong khoảng $0 \le t \le 5$.

$$\boldsymbol{d} = \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{5}} |\boldsymbol{v}(\boldsymbol{t})|\boldsymbol{dt} = \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{5}} \left|\mathbf{3}\boldsymbol{t}^{\mathbf{2}} - \mathbf{8}\boldsymbol{t} + \mathbf{4}\right|\boldsymbol{dt} \approx \mathbf{47,37}\ (\boldsymbol{m}).$$

(Tham khảo cách tính tích phân chứa dấu giá trị tuyệt đối trang 152 – Giáo trình Giải tích 1)

b) Diện tích hình thang cong

Tính diện tích hình phẳng S được giới hạn bởi đường cong liên tục $y = f(x)$, $y = g(x)$ và các đường thẳng $x = a, x = b, y = 0$ với $a < b$.



$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$$

Chú ý: Nếu $f(x) \geq g(x), \forall x \in [a; c]$ (f nằm trên g)

và $f(x) \leq g(x), \forall x \in [c; b]$ (f nằm dưới g)

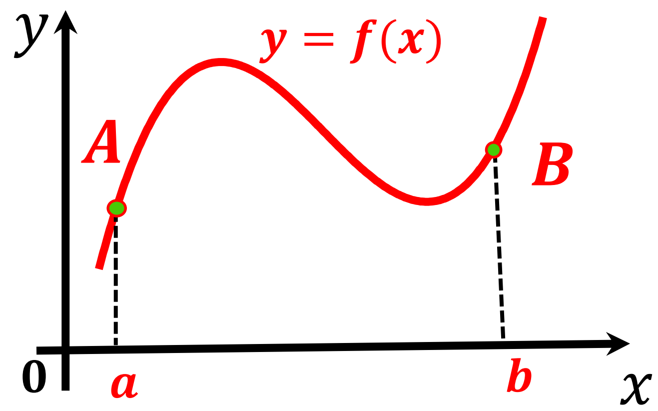
thì ta có:

$$S = \int_a^c \big(f(x) - g(x)\big)dx + \int_c^b \big(g(x) - f(x)\big)dx$$

c) Chiều dài đường cong

Chiều dài đường cong AB của đồ thị liên tục $y = f(x)$ nối hai điểm $A(a, f(a))$ và $B(b, f(b))$ với $a < b$ được tính bởi công thức:

$$\overset{\frown}{AB} = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$$

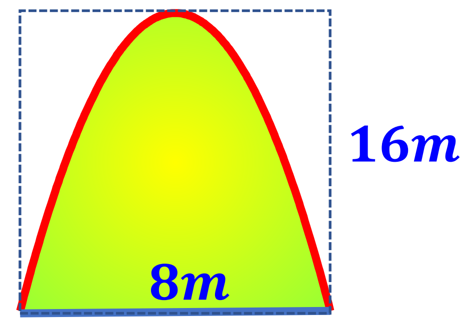


Chú ý: Nếu $(L): \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in [a, b]$ thì cung (L) có chiều dài là:

$$l = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,.dt$$

❖ Ví dụ 1

Một kỹ sư thiết kế sân bay trực thăng thoát hiểm của một toà nhà có dạng parabol với các kích thước như hình vẽ. Tính diện tích và chu vi sân bay.



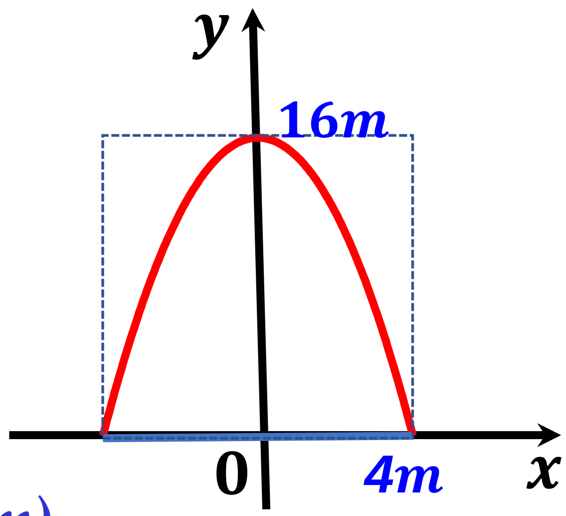
Giải

❖ Chọn hệ tọa độ như hình vẽ. Suy ra phương trình parabol có dạng: $f(x) = 16 - x^2$.

Diện tích: $S = 2\int_0^4 (16 - x^2)dx = \frac{256}{3} \approx 85{,}33\ m^2$

❖ Chu vi sàn: $C = 8 + 2.\int_0^4 \sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx$

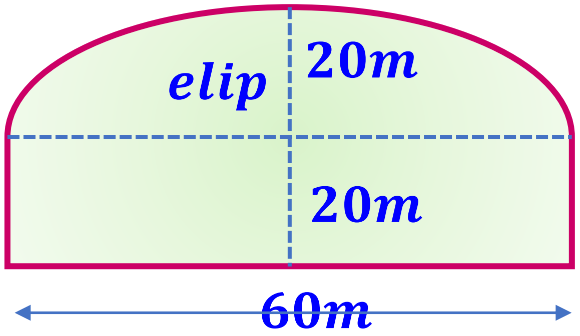
$\Rightarrow C = 8 + 2.\int_0^4 \sqrt{1 + 4x^2}dx \approx 41{,}637(m)$.



Chú ý: Tính tích phân trên bằng cách đặt $2x = \tan t, t \in \left(\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

❖ Ví dụ 2

Kỹ sư thiết kế một điểm dừng đường tàu sắt có hình dạng và kích thước sàn như hình bên. Em hãy giúp kỹ sư ấy tính diện tích sàn với sai số $\frac{1}{1000}$.

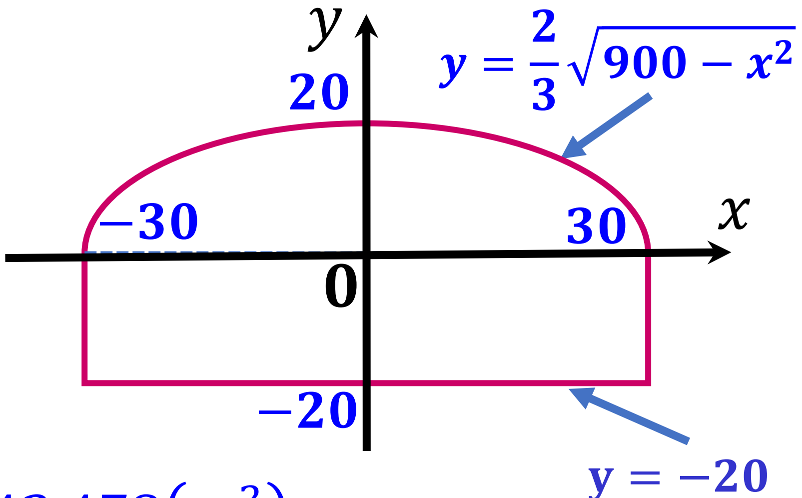


Giải

- *Chọn hệ tọa độ như hình vẽ. Ta suy ra phương trình elip có dạng:*

$$\frac{x^2}{30^2} + \frac{y^2}{20^2} = 1 \text{ với } y \geq 0$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{2}{3}\sqrt{900 - x^2}$$



- *Diện tích sàn:*

$$S = 2\int_0^{30} \left|\frac{2}{3}\sqrt{900 - x^2} + 20\right| dx \approx 2142{,}478\,(m^2).$$

- *Chú ý: Cách tính chi tiết như sau*

$S = 2\int_0^{30} (\frac{2}{3}\sqrt{900 - x^2} + 20)dx$

Đặt $x = 30\sin t, t \in \left[\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. *Đổi cận:*

x	0	30
t	0	$\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow dx = 30costdt.$

Ta có: $\sqrt{900 - x^2} = \sqrt{900 - 900\sin^2 t} = 30\sqrt{\cos^2 t} = 30|cost| = 30\cos t$

$S = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{2}{3}.30cost + 20)30costdt = 1200\int_0^{\frac{\pi}{2}} (cos^2 t + cost)dt$

$= 1200\int_0^{\frac{\pi}{2}} [\frac{1}{2}(1 + \cos 2t) + cost]dt$

$= 600\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right) + 1200sint\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 600.\frac{\pi}{2} + 1200 = 300\pi + 1200$

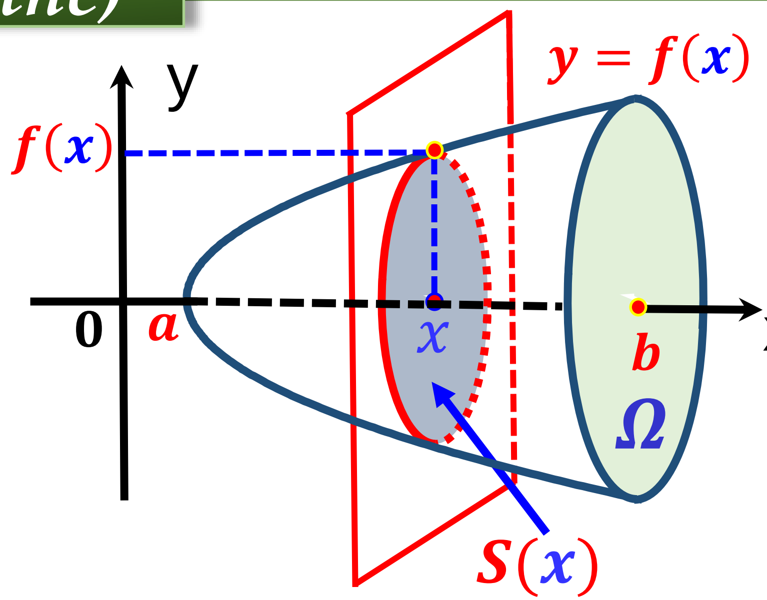
$\approx 2142{,}478(m^2).$

d) Định lý: (Công thức thể tích vật thể)

Thể tích của vật thể Ω trên đoạn $[a, b]$ được tính theo công thức:

$$V = \int_a^b S(x)dx$$

Với $S(x)$ là diện tích thiết diện khi cắt Ω bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm x thuộc (a;b).



❖ Hệ quả: (Thể tích khối tròn xoay)

Thể tích khối tròn xoay sinh bởi đồ thị $y = f(x)$ trên đoạn $[a, b]$ khi nó quay quanh trục Ox là: $V = \pi\int_a^b f^2(x)dx$

Thể tích khối tròn xoay sinh bởi đồ thị $x = f(y)$ trên đoạn $[a, b]$ khi nó quay quanh trục Oy là: $V = \pi\int_a^b f^2(y)dy$.

❖ *Ví dụ 1*

*Tính thể tích khối tròn xoay **Ω** sinh bởi đồ thị* $y = \sqrt{x}$ *khi nó quay quanh trục Ox trên đoạn* $[0, 4]$.

Giải

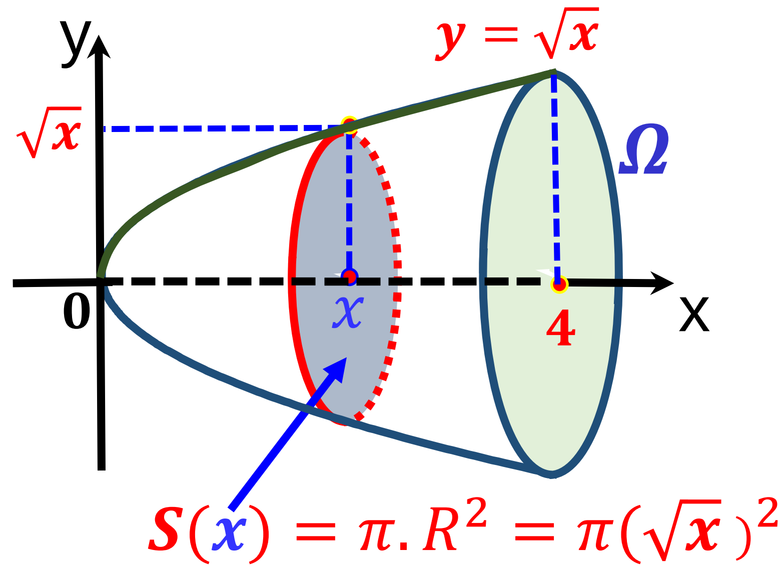
*Tính thể tích khối tròn xoay **Ω**:*

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)dx$$

$$= \pi\int_0^4 (\sqrt{x})^2 dx$$

$$= \pi\int_0^4 x dx$$

$$= 8\pi \text{ (đvtt).}$$

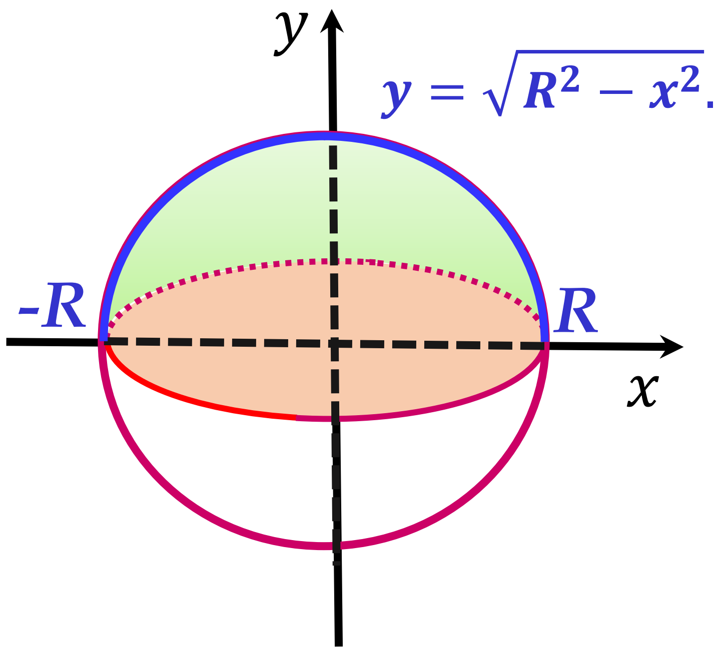


❖ *Chú ý: **Ω** trong Ví dụ trên còn gọi là khối tròn xoay khi quay quanh trục Ox hình phẳng **S**:* $\{y = \sqrt{x}, y = 0; x = 0; x = 4\}$

❖ Ví dụ 2

Tìm công thức tính thể tích khối cầu bán kính R.

Giải



- *Chọn hệ trục tọa Oxy với điểm O là tâm khối cầu.*
- *Khối cầu chính là khối tròn xoay sinh ra khi qua quanh trục Ox nửa hình tròn* $y = \sqrt{R^2 - x^2}$.
- *Thể tích khối cầu là:*

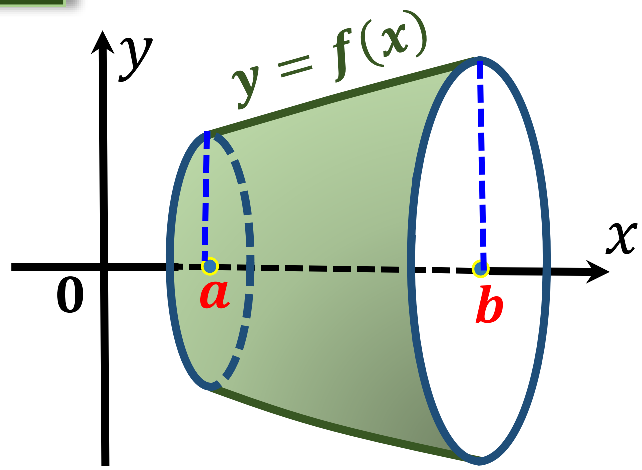
$$V = \pi \int_{-R}^{R} \left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)^2 dx$$

$$= \pi \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)\,dx = \pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-R}^{R} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

e) Định lý: (Diện tích mặt tròn xoay)

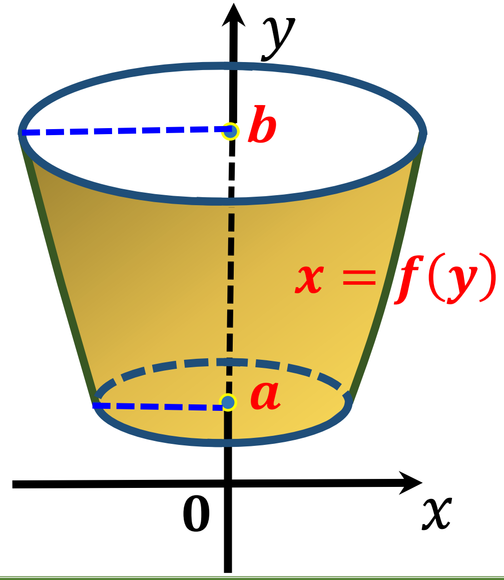
Diện tích mặt tròn xoay sinh bởi đồ thị $y = f(x)$ khi nó quay quanh trục Ox trên đoạn $[a, b]$ được tính bởi:

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$$



Diện tích mặt tròn xoay sinh bởi đồ thị $x = f(y)$ khi nó quay quanh trục Oy trên đoạn $[a, b]$ được tính bởi:

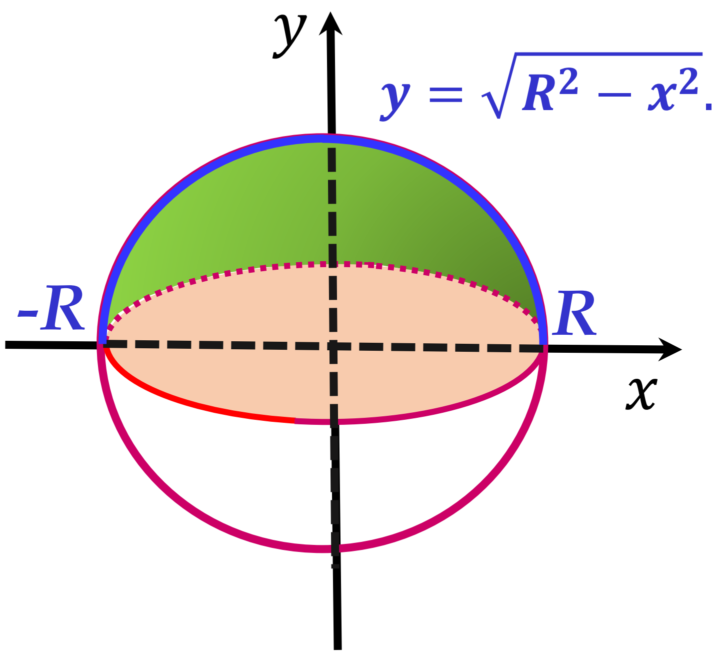
$$S = 2\pi \int_a^b f(y)\sqrt{1 + [f'(y)]^2}\,dy$$



❖ Ví dụ 1

Tìm công thức tính diện tích mặt cầu bán kính R.

Giải



- *Chọn hệ trục tọa Oxy với điểm O là tâm mặt cầu.*
- *Mặt cầu chính là mặt tròn xoay sinh ra khi qua quanh trục Ox nửa hình tròn* $y = \sqrt{R^2 - x^2}$.
- *Ta có:* $y = \sqrt{R^2 - x^2} \Rightarrow y' = \dfrac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$
- *Diện tích mặt cầu là:*

$$S = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx = 2\pi\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2 - x^2}\sqrt{1 + \left[\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}\right]^2}dx$$

$$= 4\pi\int_0^R\sqrt{R^2 - x^2}\sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2-x^2}}dx = 4\pi\int_0^R Rdx = 4\pi R\int_0^R dx = 4\pi R^2.$$

❖ *Ví dụ 2*

Tính diện tích mặt tròn xoay khi quay quanh trục Oy parabol $y = x^2$ với $1 \le x \le 2$.

Giải

Ta có: $\begin{cases} y = x^2 \\ 1 \le x \le 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{y} \\ 1 \le y \le 4 \end{cases}.$

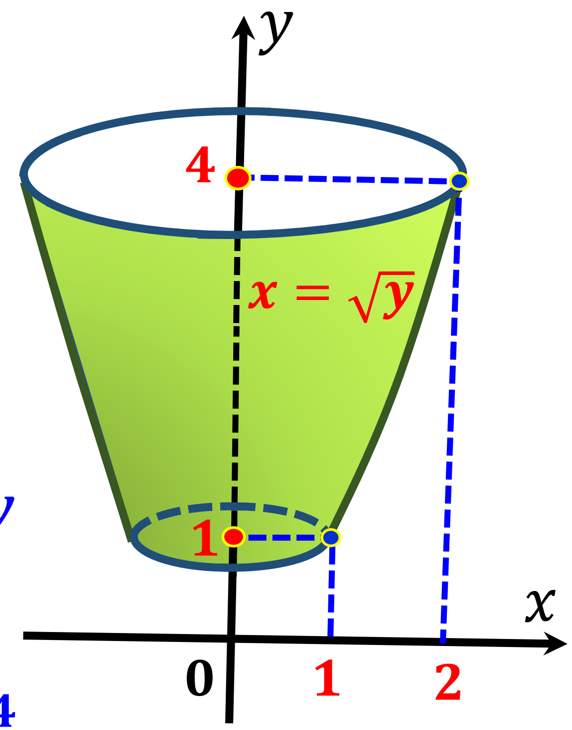
$$1 + [f'(y)]^2 = 1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{y}}\right)^2 = 1 + \frac{1}{4y} = \frac{4y+1}{4y}$$

Diện tích cần tìm: $S = 2\pi \int_1^4 f(y)\sqrt{1 + [f'(y)]^2}\,dy$

$$\Rightarrow S = 2\pi \int_1^4 \sqrt{y}\sqrt{\frac{4y+1}{4y}}\,dy$$

$$= \pi \int_1^4 (4y+1)^{1/2}dy = \frac{2\pi}{3}\frac{1}{4}(4y+1)^{3/2}\Big|_1^4$$

$$= \frac{\pi}{6}(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}).$$



BÀI TẬP VỀ NHÀ

<u>Bài 1</u>: Tính các tích phân sau:

$$A = \int_1^e \frac{1+\ln x}{x.\sqrt{1+2.\ln x}}dx; \qquad B = \int_0^1 (x^4+x)e^{2x}dx; \qquad C = \int_1^e \frac{\ln x - 1}{x}dx$$

$$D = \int_0^{\pi} x^2.\sin 2x\, dx; \qquad E = \int_0^{\pi/2} e^{2x}\cos 3x dx\,; \qquad F = \int_0^1 x^4 e^x dx\,.$$

<u>Bài 2</u>: Tính diện tích miền phẳng D nằm dưới đường cong $y = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$, phía trên trục hoành và nằm giữa hai đường thẳng $x = 2, x = 5$.

<u>Bài 3</u>: Cho đường cong phẳng L có phương trình $y = x^2 - \frac{1}{8}\ln x$, và hai điểm thuộc L là $A(1;1), B\left(e, e^2 - \frac{1}{8}\right)$. Tính độ dài cung phẳng AB.

<u>Bài 4</u>: Một vật chuyển động trên một đường thẳng với hàm vận tốc theo biến thời gian t là: $v(t) = (t-1)cost$ (đơn vị m/s).

a) Tính quãng đường vật đi được d trong khoảng thời gian $t \in [0;\pi/2]$.

b) Tìm độ dịch chuyển của vật ấy trong khoảng thời gian $t \in [0;\pi/2]$.

c) Tìm hàm quãng đường $s = s(t)$, biết $s(0) = -3$.

ĐÁP ÁN

Bài 1: $B = \int_0^1 (x^4 + x)e^{2x}dx$

u		dv
$x^4 + x$	(+)	e^{2x}
$4x^3 + 1$	(-)	$2e^{2x}$
$12x^2$	(+)	$4e^{2x}$
$24x$	(-)	$8e^{2x}$
24	(+)	$16e^{2x}$
0		$32e^{2x}$
	(-) $\int$	

$$F(x) = (x^4+x).\,2e^{2x} - (4x^3 + 1).\,4e^{2x}$$
$$+12x^2.\,8e^{2x} - 24x.16e^{2x} + 24.32e^{2x} - C$$
$$= (2x^4 - 16x^3 + 96x^2 - 382x + 764).\,e^{2x} + C$$

$$= (2x^4 - 16x^3 + 96x^2 - 382x + 764).\,e^{2x} + C$$

$$A = (2x^4 - 16x^3 + 96x^2 - 382x + 764).\,e^{2x}\Big|_0^1$$

ĐÁP ÁN

Bài 1: $D = \int_0^{\pi} x^2 . sin2x \, dx.$

u		dv
x^2	(+)	$sin2x$
2x	(-)	$-\frac{1}{2}cos2x$
2	(+)	$-\frac{1}{4}sin2x$
0	(+) $\int$	$-\frac{1}{8}cos2x$

$$D = \left(\frac{-x^2}{2}cos2x + \frac{x}{2}sin2x - \frac{1}{4}cos2x\right)\Big|_0^{\pi}$$

$$= -\frac{\pi^2}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{\pi^2}{2}.$$