TRƯỜNG ĐẠI HỌC GIAO THÔNG VẬN TẢI THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
KHOA CƠ BẢN – BỘ MÔN TOÁN

BÀI GIẢNG GIẢI TÍCH 1

CHƯƠNG II. PHÉP TÍNH VI PHÂN HÀM MỘT BIẾN

§1. Đạo hàm và vi phân

GV: Đinh Tiến Dũng

NỘI DUNG CHÍNH

- *Định nghĩa, ý nghĩa của đạo hàm.*
- *Đạo hàm của hàm hợp.*
- *Định nghĩa vi phân, mối liên hệ giữa đạo hàm và vi phân.*
- *Đạo hàm cấp cao, quy tắc Leibnitz.*
- *Quy tắc L'Hospital.*
- *Công thức Taylor, Maclaurin.*

BÀI 1. ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN

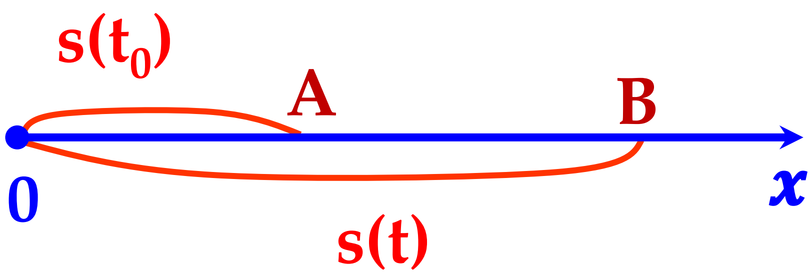
- *Định nghĩa, ý nghĩa của đạo hàm, đạo hàm cấp cao.*
- *Công thức, quy tắc đạo hàm và đạo hàm cấp cao.*
- *Định nghĩa vi phân, mối liên hệ giữa đạo hàm và vi phân.*

BÀI 1. ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN

1. Hai bài toán thực tế dẫn đến khái niệm đạo hàm

❖ Bài toán vận tốc tức thời

Một chất điểm chuyển động trên quỹ đạo thẳng $0x$ *với phương trình đường đi là* $s = s(t)$. *Giả sử tại thời điểm* t_0 *chất điểm ở vị trí A và tại thời điểm t chất điểm chuyển động đến vị trí điểm B.*



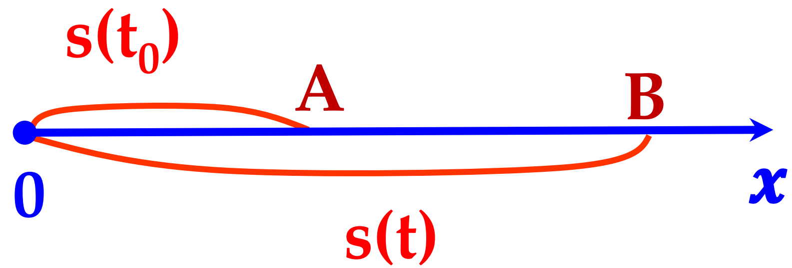
a) Tìm vận tốc trung bình của chất điểm khi chất điểm chuyển động trên đoạn đường AB.

b) Khi $t \to t_0$, *hãy nhận xét về vận tốc trung bình so với vận tốc tức thời tại* t_0. *Từ đó đưa ra công thức tính vận tốc tức thời tại* t_0.

Giải

a) Quãng đường chất điểm đi được:

$$\Delta s = AB = OB - OA$$
$$= s(t) - s(t_0).$$



Thời gian chất điểm đi trên đoạn AB:

$$\Delta t = t - t_0.$$

Vận tốc trung bình của chất điểm khi nó chuyển động trên AB:

$$v_{tb} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

b) Cho Δt rất nhỏ tức là $\Delta t \to 0$ hay $t \to t_0$ thì vận tốc trung bình v_{tb} tiến dần đến vận tốc tức thời tại t_0, ký hiệu là $v(t_0)$. Vậy:

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} v_{tb} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

Người ta kí hiệu $s'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$ và gọi đó là đạo hàm của hàm $s(t)$ tại điểm t_0.

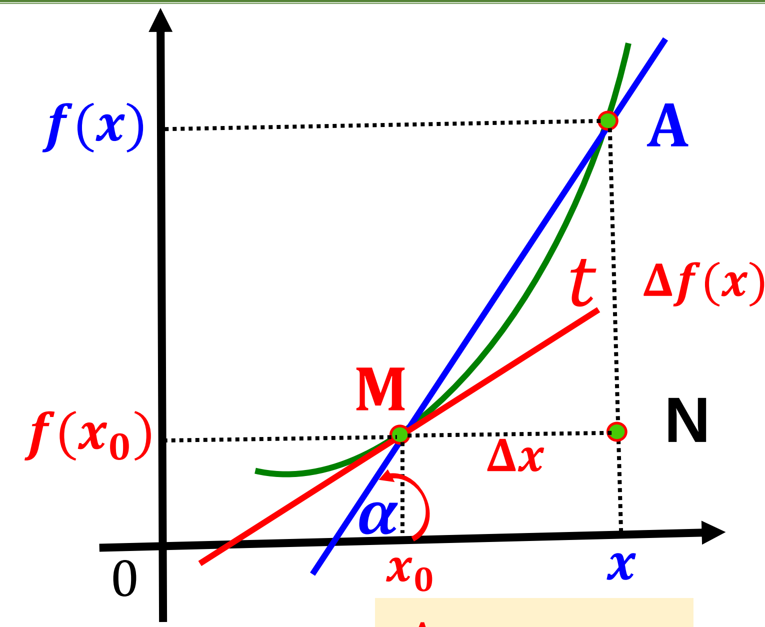
❖ Bài toán tiếp tuyến

Trên đồ thị (C): $y = f(x)$ lấy hai điểm $M(x_0; f(x_0))$ và $A(x; f(x))$.

a) Gọi α là góc định hướng tạo bởi tia $O\boldsymbol{x}$ và cát tuyến MA. Tính $\tan\alpha$.

($\tan\alpha$ gọi là hệ số góc của cát tuyến MA)

b) Gọi Mt là tiếp tuyến với (C) tại M. Tìm hệ số góc của tiếp tuyến Mt.



$\Delta x = x - x_0$

$\Delta f(x) = f(x) - f(x_0)$

Giải

a) Gọi $\mathbf{N}(x; f(x_0))$ ta có hệ số góc cát tuyến là:

$$\tan\alpha = \tan(\widehat{MN, MA}) = \frac{AN}{MN} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

b) Khi $A \to$ M hay $x \to x_0$ thì cát tuyến MA tiến về vị trí tiếp tuyến Mt.

Do đó hệ số góc của tiếp tuyến với (C) tại M là: $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

2. Đạo hàm tại một điểm và trên một khoảng, đoạn

❖ Các định nghĩa:

- *Cho hàm số f(x) xác định trong lân cận của điểm* $\boldsymbol{x_0}$. *Đạo hàm của f tại* $\boldsymbol{x_0}$ *, ký hiệu là* $f'(x_0)$ *và được tính theo công thức sau:*

$$f'(\boldsymbol{x_0}) = \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x_0}} \frac{f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x_0})}{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}}$$

Ta gọi: $\Delta f(x) = f(x) - f(x_0)$ *là số gia của hàm số f(x);*

$\Delta x = x - x_0$ *là số gia của đối số.*

Khi $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x_0}$ *thì* $\Delta x \to 0$ *và* $x = x_0 + \Delta x$ *nên có thể viết:*

$$f'(\boldsymbol{x_0}) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(\boldsymbol{x_0})}{\Delta x}.$$

- *Nếu giới hạn* $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x_0}} \frac{f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x_0})}{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x_0}}$ *không tồn tại thì ta nói hàm số f(x) không có đạo hàm tại* $\boldsymbol{x_0}$.

- $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \begin{cases} k \text{ (hữu hạn) ta nói } f \text{ có đạo hàm tại } x_0. \\ \pm\infty \text{ ta nói } f \text{ có đạo hàm vô cùng tại } x_0. \end{cases}$
- *Ta ký hiệu:* $f'(x_0^-) = \lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, $f'(x_0^+) = \lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ *và lần lượt gọi đó là đạo hàm trái và đạo hàm phải của f tại* x_0.
- *Nếu f có đạo hàm tại mọi x∈(a;b) ta nói f có đạo hàm trên (a;b).*
- *Nếu f có đạo hàm trên (a;b) đồng thời f có đạo hàm phải tại a và đạo hàm trái tại b thì ta nói f có đạo hàm trên [a;b].*

❖ **Chú ý 1:** Từ đn: $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$, thay x_0 bởi x được:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Cứ mỗi x, nếu giới hạn trên tồn tại, ta có $f'(x)$. Do đó $f'(x)$ cũng là một hàm số và gọi là đạo hàm của hàm số $f(x)$.

❖ **Chú ý 2:**

- Các cách ký hiệu đạo hàm của hàm số $y = f(x)$:

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx}$$

- Cách ký hiệu đạo hàm của $y = f(x)$ tại điểm cụ thể $x = a$:

$$y'(a) = f'(a) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} = \left.\frac{d}{dx}\big(f(x)\big)\right|_{x=a}.$$

❖ **Các định lý:**

Định lý 1: *Hàm số f có đạo hàm tại* $\boldsymbol{x_0}$ *khi và chỉ khi đạo hàm trái* $f'(\boldsymbol{x_0^-})$ *và đạo hàm phải* $f'(\boldsymbol{x_0^+})$ *cùng tồn tại hữu hạn và bằng nhau.*

Định lý 2: *Nếu f có đạo hàm tại* $\boldsymbol{x_0}$ *thì f liên tục tại* $\boldsymbol{x_0}$.

(Lưu ý rằng điều ngược lại không đúng).

Ví dụ: **Hãy dùng định nghĩa tính đạo hàm của:**

a) $f(x) = x^2$ **tại điểm** $x_0 = 3$;

b) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ **tại điểm** $x_0 = 0$.

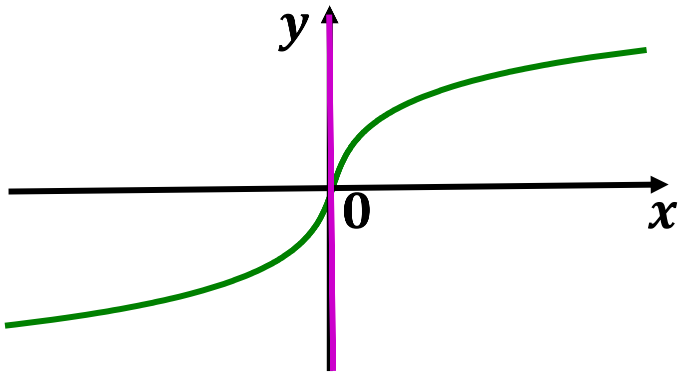
Giải ADĐN: $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

a) $f'(3) = \lim\limits_{x \to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2 - 3^2}{x - 3} = \lim\limits_{x \to 3}(x + 3) = 6$

b) $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$

$= \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{0}}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x}$

$= \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{(\sqrt[3]{x})^2} = +\infty$



❖ **Chú ý:** Tiếp tuyến tại $x_0 = 0$ có hệ số góc $+\infty$ nên nó vuông góc Ox. Đó chính là trục Oy.

3. Ý nghĩa của đạo hàm

❖ Ý nghĩa vật lý:

Một chất điểm có phương trình chuyển động $s = s(t)$ *thì ở thời điểm t, chất điểm đó có:*

- *Vận tốc (tức thời):* $v(t) = s'(t)$.
- *Tốc độ (tức thời):* $|v(t)| = |s'(t)|$.

Do đó, đạo hàm giúp ta đánh giá tốc độ biến thiên của hàm quãng đường $s(t)$ *tại thời điểm t.*

Mặt khác, gia tốc $a(t)$ *là sự biến thiên của vận tốc* $v(t)$ *tại thời điểm t nên:* $a(t) = v'(t) = s''(t)$.

❖ Ý nghĩa hình học:

Tiếp tuyến tại điểm $M(x_0; f(x_0))$ *thuộc đồ thị* $(C): y = f(x)$ *có hệ số góc là:*

$$\tan\alpha = f'(x_0) \text{ với } \alpha = (0x, Mt).$$

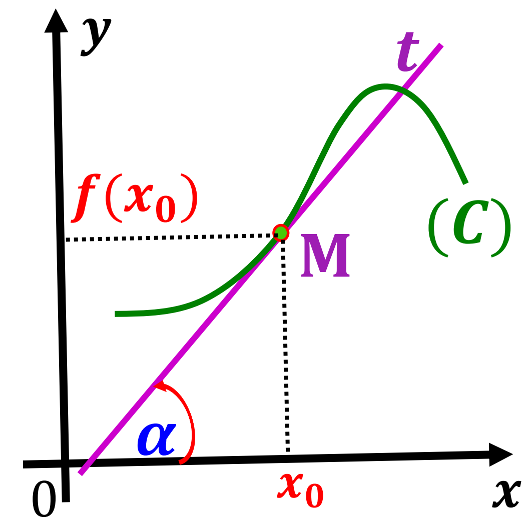
Suy ra phương trình tiếp tuyến Mt *là:*

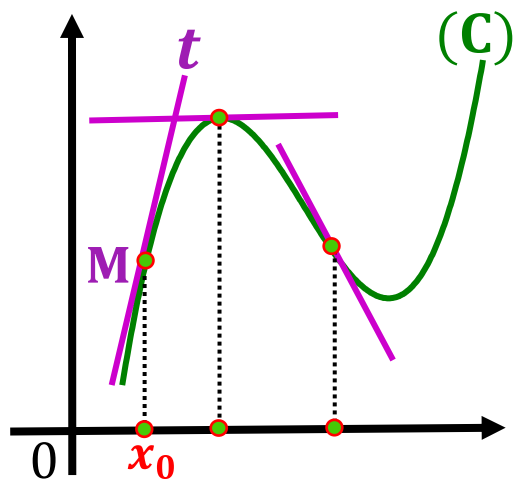
$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Ngoài ra:

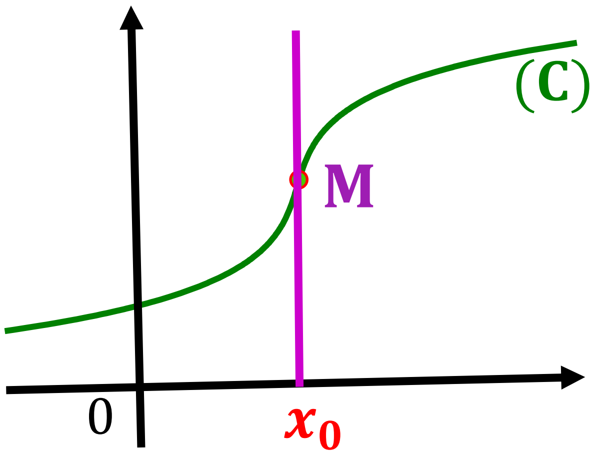
- $f'(x_0) > 0$ *thì đường thẳng* Mt *đi lên.*
- M *là điểm cực trị thì* Mt *nằm ngang khi đó* $f'(x_0) = 0$.
- $f'(x_0) < 0$ *thì* Mt *đi xuống.*
- $f'(x_0)$ *càng lớn thì tại điểm* x_0 *đồ thị* (C) *càng dốc (tăng nhanh).*

Do đó đạo hàm còn gọi là hàm độ dốc.

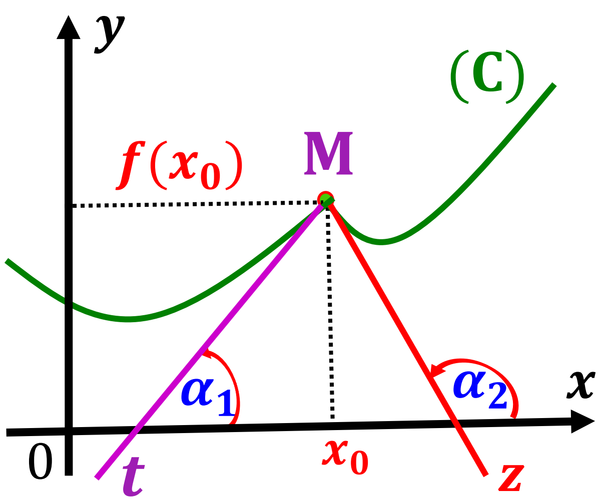




- *Nếu* $f'(x_0) = \pm\infty$ *thì tiếp tuyến vuông góc với trục hoành.*



- $f'(x_0^-)$ *chính là hệ số góc tiếp tuyến trái.*
- $f'(x_0^+)$ *chính là hệ số góc tiếp tuyến phải.*



Nhận xét: *Nếu f có đạo hàm tại* x_0 *thì đồ thị hàm số y=f(x) liên tục và trơn tại điểm* x_0.

❖ Ý nghĩa khoa học và triết học:

Chúng ta đang sống trong một thế giới không ngừng vận động, biến đổi trong những mối quan hệ biện chứng. Bất kỳ sự biến đổi nào có thể biểu diễn như một hàm phụ thuộc biến số nào đó thì đạo hàm là công cụ giúp ta đánh giá tốc độ biến thiên của nó. Đồng thời, lý thuyết về đạo hàm giúp con người mở ra cánh cửa xử lý hầu hết các bài toán để đánh giá tìm tòi sự tối ưu của những quá trình vận động biến đổi.

Ví dụ: *Cho đồ thị* (C): $f(x)=x|x-2|$.

a) Tính đạo hàm trái và phải của f(x) tại điểm $x_0=2$*. Kết luận gì về đạo hàm tại* $x_0=2$*.*

b) Viết phương trình tiếp tuyến trái, phải của (C) *tại M(2,0). Vẽ đồ thị* (C) *và các tiếp tuyến trên cùng một hệ trục tọa độ.*

Giải:

Txđ: D=R. Viết lại công thức $f(x)=\begin{cases} x(x-2), & \text{nếu } x\geq 2 \\ x(2-x), & \text{nếu } x<2 \end{cases}$.

a) $f'(2^+)=\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{x(x-2)-0}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}x=2.$

$f'(2^-)=\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{x(2-x)-0}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}(-x)=-2.$

Ta thấy $f'(2^+)\neq f'(2^-)$ nên không tồn tại $f'(2)$.

b) Phương trình tiếp tuyến trái, tiếp tuyến phải tại M(2,0).

ADCT: $y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

- Tiếp tuyến trái tại M(2,0):

$$y - 0 = f'(2^-).(x - 2)$$

$$\Leftrightarrow y = -2.(x - 2) \Leftrightarrow y = -2x + 4.$$

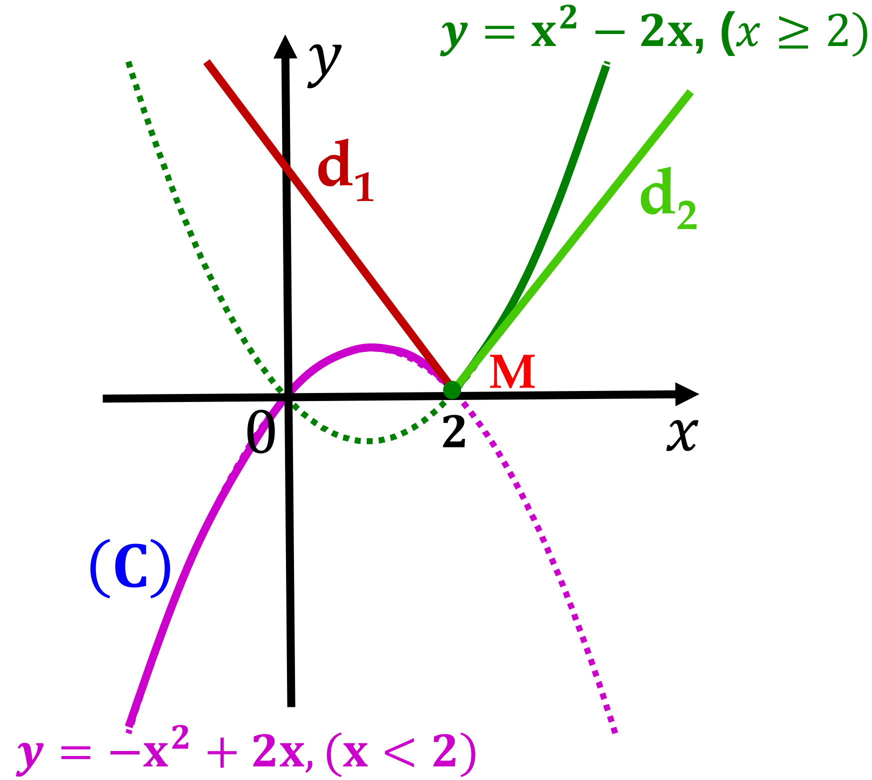
- Tiếp tuyến phải tại M(2,0):

$$y - 0 = f'(2^+).(x - 2)$$

$$\Leftrightarrow y = 2.(x - 2) \Leftrightarrow y = 2x - 4.$$

Vẽ các đồ thị:

$$(\mathbf{C}) : y = \begin{cases} x^2 - 2x, & \text{nếu } x \geq 2 \\ -x^2 + 2x, & \text{nếu } x < 2 \end{cases}.$$



Đồ thị (C) không trơn tại M(2,0) nên f(x) không có đạo hàm tại x=2

Tiếp tuyến trái $\mathbf{d_1}$: $y = -2x + 4$; Tiếp tuyến phải $\mathbf{d_2}$: $y = 2x - 4$.

4. Quy tắc tính đạo hàm

Cho $u = u(x), v = v(x)$ *là các hàm số và k là hằng số. Ta có*

1) $(u+v)' = u' + v'$

2) $(u-v)' = u' - v'$

3) $(u.v)' = u'v + uv'$

4) $(ku)' = ku'$

5) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

6) $\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}$

7) $(u^v)' = u^v.(v.\ln u)'$

8) $z = f[u(x)] \Rightarrow z'_x = z'_u.u'_x$

CM: 7) Đặt $y = u^v \Rightarrow y = e^{\ln(u^v)}$

$\Rightarrow y' = [e^{\ln(u^v)}]' = [(\ln(u^v)]'.e^{\ln(u^v)} = (v.\ln u)'.u^v.$

5. Bảng đạo hàm các hàm số sơ cấp cơ bản:

TT	ĐẠO HÀM	TT	ĐẠO HÀM HÀM HỢP (Với $u = u(x)$)
0	$(C)' = 0 \quad x' = 1$		
1	$(x^{\alpha})' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$	1	$(u^{\alpha})' = \alpha \cdot u^{\alpha-1}.u'$
2	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	2	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$
3	$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	3	$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
4	$(e^x)' = e^x$	4	$(e^u)' = e^u.u'$
5	$(a^x)' = a^x.\ln a$	5	$(a^u)' = a^u.\ln a.u'$
6	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	6	$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$
7	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	7	$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$

TT	ĐẠO HÀM
8	$(\sin x)' = \cos x$
9	$(\cos x)' = -\sin x$
10	$(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
11	$(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
12	$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13	$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
14	$(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
15	$(\text{arccot}\,x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

TT	ĐẠO HÀM HÀM HỢP
8	$(\sin u)' = u'.\cos u$
9	$(\cos u)' = -u'.\sin u$
10	$(\tan u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$
11	$(\cot u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$
12	$(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u'}}$
13	$(\arccos u)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
14	$(\arctan u)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$
15	$(\text{arccot}\,u)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$

BÀI TẬP TẠI LỚP

Tính đạo hàm các hàm số sau

a) $f(x) = \ln(\cos x)$

b) $f(x) = \log_3\left(1 + x^{10}\right)$

c) $f(x) = \sqrt{\ln x}$

d) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{2x-3}\right)$

e) $f(x) = (x+1)^{x^2}$

f) $f(x) = \left(3x^2 - 1\right)^{2x+1}$

6. Vi phân

❖ **Định nghĩa 1:** ***(Khái niệm hàm khả vi)***

- *Cho hàm f(x) xác định trong* (a, b) *và* $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$ *là số gia của hàm số. Hàm* f *gọi là* ***khả vi*** *tại điểm* $x \epsilon (a, b)$ *nếu có thể biểu diễn* $\Delta f(x)$ *dưới dạng:*

$$\Delta f(x) = A.\Delta x + O(\Delta x)$$

Với: $\begin{cases} A \text{ là biểu thức chỉ phụ thuộc } x \text{ và } f. \\ O(\Delta x) \text{ là VCB bậc cao hơn } \Delta x \text{ khi } \Delta x \to 0. \end{cases}$

- *Hàm* f *khả vi trên* (a, b) *nếu* f *khả vi tại mọi* $x \in (a, b)$.

❖ **Định lý:** ***(Tương đương định nghĩa)***

Hàm f *khả vi tại điểm* x *khi và chỉ khi* f *có đạo hàm tại* x *và* $f'(x) = A$.

VD. Xét sự khả vi của hàm số $f(x) = |x|$ trên toàn tập xác định.

Giải:

- Txđ: $D = \mathbb{R}$.
- Với $x < 0$ thì $f(x) = -x \Rightarrow f'(x) = -1, \forall x \in (-\infty, 0)$

  $\Rightarrow f$ có đạo hàm trên $(-\infty, 0) \Rightarrow f(x)$ khả vi trên $(-\infty, 0)$.
- Với $x > 0$ thì $f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1, \forall x \in (0; \infty)$

  $\Rightarrow f$ có đạo hàm trên $(0; \infty) \Rightarrow f(x)$ khả vi trên $(0; \infty)$.
- Xét sự khả vi tại $x = 0$:

  $$f'(0^-) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1.$$

  $$f'(0^+) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

  $f'(0^-) \neq f'(0^+)$, suy ra hàm f không có đạo hàm tại $x = 0$.

KL: Hàm f khả vi trên $(-\infty, 0)$ và $(0, +\infty)$, không khả vi tại $x = 0$.

❖ **Định nghĩa 1:** ***(Khái niệm vi phân)***

Cho $y = f(x)$ là hàm khả vi tại x thuộc (a, b). Biểu thức $f'(x).\Delta x$ gọi là vi phân của hàm $f(x)$ tại điểm x. Ký hiệu: dy ; $df(x)$ hoặc df.

$$df(x) = f'(x).\Delta x$$

❑ Chú ý: Xét hàm số $f(x)=x$, lấy vi phân hai vế:

$$\mathrm{d}f(x) = \mathrm{d}x \Rightarrow f'(x).\Delta x = \mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow 1.\Delta x = \mathrm{d}x \Rightarrow \Delta x = \mathrm{d}x.$$

Từ đó ta viết lại công thức vi phân:

$$\mathrm{d}f(x) = f'(x).dx$$

❖ ***Vi phân của hàm số***

❖ ***Đạo hàm của hàm số***

❖ ***Vi phân của biến số***

Ví dụ:

a) Tính vi phân của hàm số $y = \sin x + \cos x$ **;**

b) Cho $f(x) = x^2 - 3x + 1$, **tính** $df(5)$.

Giải:

ADCT $df(x) = f'(x).dx$

a) $y = \sin x + \cos x \quad \Rightarrow dy = (\sin x + \cos x\ )'.\mathrm{d}x$

$\Rightarrow dy = (\cos x - sinx)\mathrm{d}x.$

b) $f(x) = x^2 - 3x + 1 \Rightarrow df(x) = (x^2 - 3x + 1)'.\mathrm{d}x$

$\Rightarrow df(x) = (2x - 3)\mathrm{d}x.$

$\Rightarrow df(5) = (2.5 - 3)\mathrm{d}x.$

$\Rightarrow df(5) = 7\mathrm{d}x.$

7. Đạo hàm cấp cao:

a. Định nghĩa:

Cho $y = f(x)$ là hàm khả vi. Đạo hàm của số $f'(x)$ (nếu có) được gọi là đạo hàm cấp 2 của hàm f, các ký hiệu:

$$y'' = f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

Đạo hàm cấp n là đạo hàm của đạo hàm cấp $n-1$:

$$y^{(n)} = [f^{(n-1)}(x)]' = \frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right).$$

Quy ước các ký hiệu thông dụng:

$$f^{(0)}(x) = f(x); \qquad f^{(1)}(x) = f'(x);$$

$$f^{(2)}(x) = f''(x); \qquad f^{(3)}(x) = f'''(x).$$

Ví dụ 1: **Cho** $f(x) = x^5$. **Tìm** $f^{(n)}(x), n = 0,1,2,\ldots$

Giải

$$f(x) = x^5 \Rightarrow \mathrm{f}^{(0)}(\boldsymbol{x}) = x^5 \Rightarrow \mathrm{f}'(\boldsymbol{x}) = 5x^4 \Rightarrow \mathrm{f}''(\boldsymbol{x}) = 5.4x^3$$

$$\Rightarrow \mathrm{f}'''(\boldsymbol{x}) = 5.4.3x^2$$

$$\Rightarrow \mathrm{f}^{(4)}(\boldsymbol{x}) = 5.4.3.2.\,x$$

$$\Rightarrow \mathrm{f}^{(5)}(\boldsymbol{x}) = 5.4.3.2.1 = 5!$$

$$\Rightarrow \mathrm{f}^{(6)}(\boldsymbol{x}) = 0;\ \ \mathrm{f}^{(7)}(\boldsymbol{x}) = 0; \ldots$$

❑ Tổng quát:

- $$(x^k)^{(n)} = \left[\begin{array}{ll} k(k-1)\ldots.(k-n+1).\ x^{\mathrm{k-n}} & \text{khi n<k.} \\ \qquad 0 & khi\ n > k \\ \qquad n! & khi\ n = k \end{array}\right.$$

Ví dụ 2: **Tìm đạo hàm cấp n các hàm $y = e^x$ và $y=e^{ax+b}$.**

Giải

a) $y = e^x \Rightarrow y' = e^x \Rightarrow y'' = e^x \Rightarrow y''' = e^x$.

❑ *Tổng quát:* $(e^x)^{(n)} = e^x, \forall n \geq 0$.

b) $y = e^{ax+b} \Rightarrow y' = a\, e^{ax+b}$

$\Rightarrow y'' = a^2 e^{ax+b}$

$\Rightarrow y''' = a^3 e^{ax+b}$

❑ *Tổng quát:* $[e^{ax+b}]^{(n)} = a^n e^{ax+b}, \forall n \geq 0$.

Ví dụ 3: Tìm đạo hàm cấp n các hàm $y = \sin x$ và $y=\sin(ax + b)$.

Giải

a) $y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$

$$y'' = \cos(x + \frac{\pi}{2}) = \sin(x + 2.\frac{\pi}{2})$$

$$y''' = \cos(x + 2.\frac{\pi}{2}) = \sin(x + 3.\frac{\pi}{2})$$

❑ ***Tổng quát:*** $(\sin x)^{(n)} = \sin(x + n.\frac{\pi}{2}), \forall n \geq 0.$

b) $y = \sin(ax + b)$

$$\Rightarrow y' = a\cos(ax + b) = a\sin(ax + b + \frac{\pi}{2})$$

$$y'' = a^2\cos(ax + b + \frac{\pi}{2}) = a^2\sin(ax + b + 2.\frac{\pi}{2})$$

$$y''' = a^3\cos(ax + b + 2.\frac{\pi}{2}) = a^3\sin(ax + b + 3.\frac{\pi}{2})$$

❑ ***Tổng quát:*** $[\sin(ax + b)]^{(n)} = a^n\sin(ax + b + n.\frac{\pi}{2}), \forall n \geq 0.$

b. Bảng đạo hàm cấp n các hàm số sơ cấp cơ bản:

TT	ĐẠO HÀM CẤP n	ĐẠO HÀM CẤP n SUY RỘNG
1	$(e^x)^{(n)} = e^x$	$\left(e^{ax+b}\right)^{(n)} = a^n e^{ax+b}$
2	$\sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n.\frac{\pi}{2}\right)$	$[\sin(ax+b)]^{(n)} = a^n \sin\left(ax + b + \frac{n\pi}{2}\right)$
3	$\cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n.\frac{\pi}{2}\right)$	$[\cos(ax+b)]^{(n)} = a^n \cos\left(ax + b + \frac{n\pi}{2}\right)$
4	$(x^k)^{(n)} = k(k-1)\ldots(k-n+1).\ x^{k-n}$	$\left[(ax+b)^\alpha\right]^{(n)} = a^n \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1).\ (ax+b)^{\alpha-n}$
5	$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n \cdot n!}{x^{n+1}}$	$\left(\frac{1}{ax+b}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n \cdot a^n \cdot n!}{(ax+b)^{n+1}}$
6	$\ln^{(n)} x = \frac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!}{x^n}$	$[\ln(ax+b)]^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} \cdot a^n \cdot (n-1)!}{(ax+b)^n}$

c. Quy tắc tính đạo hàm cấp cao

Cho $u = u(x), v = v(x)$ *là các hàm số và* C *là hằng số. Ta có*

1) $(u+v)^{(n)} = u^{(n)} + v^{(n)}$

2) $(u-v)^{(n)} = u^{(n)} - v^{(n)}$

3) $(C.u)^{(n)} = C.u^{(n)}$

4) $(u.v)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k.u^{(n-k)}.v^{(k)}$ *(Công thức Leibnitz)*

(Trong đó $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ *là số tổ hợp chập k của* n *phần tử).*

❑ **Đặc biệt:**

$(u.\mathrm{v})' = u'v + uv'$

$(u.\mathrm{v})'' = u''v + 2u'v' + u.v''$

$(u.\mathrm{v})''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''.$

Ví dụ 1: **Cho hàm** f(x)=$2x^3 + 3x^5 - x^7 + e^{2x}$. **Tính** $f^{(5)}(0)$.

Giải

$$f^{(5)}(x) = 2.(x^3)^{(5)} + 3(x^5)^{(5)} - (x^7)^{(5)} + (e^{2x})^{(5)}$$

$$= \quad 0 \quad + 3.5! \quad - 7.6.5.4.3.x^2 + 2^5.e^{2x}$$

$$\Rightarrow f^{(5)}(0) = \quad 3.5! \quad - 0 \quad + 2^5.e^0 = 392.$$

Ví dụ 2: Cho hàm $y = x^2.\sin x$. Tính $y^{(8)}$.

Giải

ADCT: $(U.V)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k.U^{(n-k)}.V^{(k)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k.V^{(n-k)}.U^{(k)}$

$$y^{(8)} = \sum_{k=0}^{8} C_8^k\left(x^2\right)^{(k)}(\sin x)^{(8-k)}$$

$$= C_8^0\left(x^2\right)^{(0)}(\sin x)^{(8)} + C_8^1\left(x^2\right)'(\sin x)^{(7)} + C_8^2\left(x^2\right)''(\sin x)^{(6)} + 0 + \ldots + 0$$

$$= x^2.\sin(x + 8.\frac{\pi}{2}) + 8.2x.\sin(x + 7.\frac{\pi}{2}) + 28.2.\sin(x + 6.\frac{\pi}{2})$$

$$= x^2.\sin x + 16x.\sin(x - \frac{\pi}{2}) - 56.\sin x.$$

BÀI TẬP TẠI LỚP

Tính $f^{(10)}(1)$ biết rằng $f(x) = x^3 . \ln x$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 3:

a) Tính $f^{(4)}(1)$ của hàm số $f(x) = \frac{3}{2x-1}$.

b) Tính đạo hàm cấp n của hàm số $g(x) = \frac{1-x}{(x+1)(x+2)}$.

Giải ADCT: $\left(\frac{1}{\mathrm{a}x+\mathrm{b}}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n.\mathrm{a}^n.n!}{(\mathrm{a}x+\mathrm{b})^{n+1}}$

$a)\ f^{(4)}(x) = 3\left(\frac{1}{2x-1}\right)^{(4)} = \frac{3.(-1)^4.2^4.4!}{(2x-1)^{4+1}} = \frac{1152}{(2.x-1)^5}$

$\Rightarrow f^{(4)}(1) = 1152.$

b) Phân tích hàm $g(x)$ thành tổng các phân thức cơ bản dạng $\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{a}x+\mathrm{b}}$. Ta cần tìm các hằng số A, B sao cho:

$$g(x) = \frac{1-x}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} \qquad (1)$$

$$g(x) = \frac{1-x}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} \qquad (1)$$

- Nhân hai vế của (1) cho $x+1$, ta được: $\dfrac{1-x}{x+2} = A + (x+1)\dfrac{B}{x+2} \qquad (*)$

  Chọn $x = -1$, thu được: $A = 2$

  Người ta thường viết: $A = \left.\frac{1-x}{x+2}\right|_{x=-1} = 2.$

- Tương tự: $B = \left.\frac{1-x}{x+1}\right|_{x=-2} = -3$

  Vậy $g(x) = \dfrac{2}{x+1} - \dfrac{3}{x+2}$.

  $$\Rightarrow g^{(n)}(x) = 2\left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)} - 3\left(\frac{1}{x+2}\right)^{(n)} = \frac{2(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}} - \frac{3(-1)^n n!}{(x+2)^{n+1}}.$$

Ví dụ 4:

a) Tính $f^{(4)}(0)$ của hàm số $f(x) = \ln(2x + 1)$.

b) Tính đạo hàm cấp n của hàm số $g(x) = \ln\left(x^2 - 5x + 6\right), x < 2$

Giải

ADCT: $[\ln(ax + b)]^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}.a^n.(n-1)!}{(ax+b)^n}$

a) $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}.2^n.(n-1)!}{(2x+1)^n} \Rightarrow f^{(4)}(0) = (-1)^3 \cdot 2^4 \cdot 3! = -64.$

b) Phân tích hàm $g(x)$ thành tổng các logarit đơn giản:

$$g(x) = \ln\left(x^2 - 5x + 6\right) = \ln[(x - 2)(x - 3)]$$

Với $x < 2 \Rightarrow \begin{cases} 2 - x > 0 \\ 3 - x > 0 \end{cases}$. Viết lại $g(x) = \ln[(2 - x).(3 - x)]$

$$\Rightarrow \mathrm{g(x)} = \ln(2-x) + \ln(3-x)$$

ADCT: $[\ln(\mathrm{a}x+\mathrm{b})]^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}\cdot \mathrm{a}^{n}\cdot (n-1)!}{(\mathrm{a}x+\mathrm{b})^{n}}$

$$g^{(n)}(x) = [\ln(2-x)]^{(n)} + [\ln(3-x)]^{(n)} = ?$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}\cdot(-1)^{n}\cdot(n-1)!}{(2-x)^{n}} + \frac{(-1)^{n-1}\cdot(-1)^{n}\cdot(n-1)!}{(3-x)^{n}}$$

$$= -(n-1)!\left[\frac{1}{(2-x)^{n}} + \frac{1}{(3-x)^{n}}\right].$$

BÀI TẬP TẠI LỚP

1) Tính $f^{(n)}(0)$ biết rằng $f(x)=\frac{2x-1}{x^2-4x+3}$.
2) Tính $g^{(n)}(x)$ biết $g(x)=\ln\left(x^2-3x+2\right), x>2$.

BÀI TẬP VỀ NHÀ

<u>Câu 1</u>: Một chất điểm chuyển động thẳng trên một trục tọa độ có hàm vị trí được xác định như sau: $s(t) = t^3 - 3t^2 + 8t - 1$. Trong đó s tính theo mét và t tính theo giây. Hãy tìm thời điểm mà gia tốc chuyển động của vật bằng không và tính vận tốc của vật tại thời điểm đó.

<u>Câu 2</u>: Một xe bồn chở xăng cung cấp cho các đại lí. Lượng xăng được bơm ra khỏi xe sau thời gian t (phút) là $Q(t) = 3t^2 (m^3)$.

Tính tốc độ bơm xăng trung bình trong 8 phút đầu tiên.

Tính tốc độ bơm xăng tại thời điểm 8 phút sau khi bắt đầu bơm.

BÀI TẬP VỀ NHÀ

Câu 3: Một vật chuyển động thẳng trên một trục tọa độ có hàm vị trí được xác định như sau: $s(t) = -\frac{1}{2}t^3 + 9t^2$. Trong đó s tính theo mét và t tính theo giây. Hãy tìm thời điểm mà tại đó vật có vận tốc lớn nhất và tính vận tốc lớn nhất đó.

Câu 4:

a) Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{x-3} + 6e^{x-2}$. Tính $f^{(15)}(2)$.

b) Cho hàm số $f(x) = x\,ln(x-2)$. Tính $f^{(100)}(3)$.

c) Cho hàm số $f(x) = x^2 \sin x$. Tính $f^{(25)}(0)$.

Câu 5: Chứng minh rằng hàm số $f(x) = \frac{\cos x}{x+2}$ thỏa phương trình:

$$(x+2)f^{(6)}(x) + 6f^{(5)}(x) + (x+2)f(x) = 0.$$

<u>Câu 1</u>: Một chất điểm chuyển động thẳng trên một trục tọa độ có hàm vị trí được xác định như sau: $s(t) = t^3 - 3t^2 + 8t - 1$. Trong đó s tính theo mét và t tính theo giây. Hãy tìm thời điểm mà gia tốc chuyển động của vật bằng không và tính vận tốc của vật tại thời điểm đó.

Giải:

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

<u>Câu 2</u>: Một xe bồn chở xăng cung cấp cho các đại lí. Lượng xăng được bơm ra khỏi xe sau thời gian t (phút) là $Q(t) = 3t^2 (m^3)$.
Tính tốc độ bơm xăng trung bình trong 8 phút đầu tiên.
Tính tốc độ bơm xăng tại thời điểm 8 phút sau khi bắt đầu bơm.

Giải:

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

<u>Câu 3</u>: Một vật chuyển động thẳng trên một trục tọa độ có hàm vị trí được xác định như sau: $s(t) = -\frac{1}{2}t^3 + 9t^2$. Trong đó s tính theo mét và t tính theo giây. Hãy tìm thời điểm mà tại đó vật có vận tốc lớn nhất và tính vận tốc lớn nhất đó.

Giải:

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

<u>Câu 4</u>: **a)** Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{x-3} + 6e^{x-2}$. Tính $f^{(15)}(2)$.

Giải:

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

<u>Câu 4</u>: b) Cho hàm số $f(x) = x\,ln(x-2)$. Tính $f^{(100)}(3)$.

Giải:

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

<u>Câu 4</u>: c) Cho hàm số $f(x) = x^2 \sin x$. Tính $f^{(25)}(0)$.

Giải:

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Câu 5: Chứng minh rằng hàm số $f(x) = \frac{\cos x}{x+2}$ thỏa phương trình: $(x+2)f^{(6)}(x) + 6f^{(5)}(x) + (x+2)f(x) = 0$.

Giải:

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....