Chương 3: QUAN HỆ
(Relations)

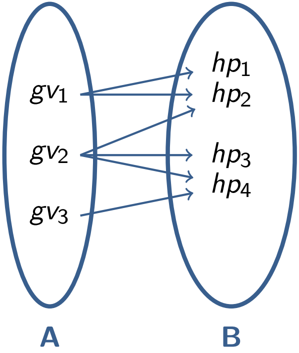
Khoa CNTT

ĐH GTVT TP.HCM

Nội dung

1. Khái niệm và tính chất của quan hệ
2. Quan hệ tương đương
3. Quan hệ thứ tự
4. Dàn
5. Bài tập

- Khái niệm (1/2):
  Giả sử A là tập các giảng viên, $A = \{gv_1, gv_2, gv_3\}$,
  B là tập các học phần, $B = \{hp_1, hp_2, hp_3, hp_4\}$.
  Khi đó, *mối quan hệ* biểu diễn sự phân công giảng dạy có thể được mô tả như sau:



Khái niệm và tính chất của quan hệ (2/7)

- Khái niệm (2/2):
  Hoặc biểu diễn dưới dạng tập hợp:
  $R = \{(gv_1, hp_1), (gv_1, hp_2), (gv_2, hp_2), (gv_2, hp_3), (gv_2, hp_4), (gv_3, hp_4)\}$
- Nhận xét:
  R chính là tập con của tích Descartes của A và B, tức: $R \subseteq A \times B$
  Tổng quát hóa ví dụ trên ta đi đến định nghĩa sau:

Định nghĩa:

- Giả sử A và B là 2 tập khác rỗng cho trước. Khi đó, mỗi quan hệ giữa A và B là một tập $R \subseteq A \times B$
- Nếu $(a, b) \in R$ ta nói *a có quan hệ R với b*, và viết *aRb*
- Vì quan hệ R là tập con của tích Descartes 2 tập hợp, nên nó được gọi là quan hệ 2 *ngôi*
- Nếu $R \subseteq A_1 \times A_2 \times A_3 ... \times A_n$ thì R được gọi là quan hệ n ngôi.

Ví dụ:

- VD_1: lấy $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ khi đó: $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 4), (3, 5)\}$ là một quan hệ 2 ngôi trên A
- VD_2: $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x + y = 5\}$ là một quan hệ 2 ngôi trên $\mathbb{Z}$

Khái niệm và tính chất của quan hệ (4/7)

Chú ý:

- Trong phạm vi chương này, chúng ta chỉ xét các quan hệ 2 ngôi trên một tập.
- Tức là: $R \subseteq A \times A$ với A là tập cho trước.

Tính chất của quan hệ

Giả sử R là quan hệ 2 ngôi trên tập A. Khi đó R có thể có các tính chất sau:

- Phản xạ
- Đối xứng
- Bắc cầu
- Phản xứng (phản đối xứng)

Khái niệm và tính chất của quan hệ (5/7)

Tính phản xạ:

- Định nghĩa: $\forall x \in A, xRx$
- Ví dụ: $A = \{1, 2, 3, 4\}, R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 2), (2, 4)\}$ là quan hệ có tính phản xạ.

Tính đối xứng:

- Định nghĩa: $\forall x, y \in A$ nếu xRy thì yRx
- Ví dụ: $A = \{1, 2, 3, 4\}, R = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (1, 1), (4, 4)\}$ là quan hệ có tính đối xứng

Khái niệm và tính chất của quan hệ (6/7)

Tính bắc cầu:

- Định nghĩa: $\forall x, y, z \in A$ nếu xRy và yRz thì xRz
- Ví dụ: $A = \{1, 2, 3, 4\}, R = \{(1, 2), (2, 4), (1, 4), (4, 4)\}$ là quan hệ có tính bắc cầu

Tính phản xứng:

- Định nghĩa: $\forall x, y \in A$ nếu xRy và yRx thì $x = y$
- Ví dụ: Xét R là quan hệ chia hết trên tập số nguyên dương $\mathbb{Z}^+$.
  Khi đó: $\forall x, y \in \mathbb{Z}^+, (x|y) \wedge (y|x) \rightarrow x = y \Leftrightarrow (xRy) \wedge (yRx) \rightarrow x = y$
  Vậy R có tính phản xứng.

Khái niệm và tính chất của quan hệ (7/7)

Hãy cho biết các quan hệ sau có tính phản xạ, đối xứng, bắc cầu hay phản xứng không? Vì sao?

a. $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : xRy \Leftrightarrow x + y \text{ chẵn}\}$

b. Quan hệ R trên $\mathbb{Z}$: $xRy \Leftrightarrow x - y$ lẻ

c. $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : xRy \Leftrightarrow sin^2 x + cos^2 y = 1\}$

Cho $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Hãy lấy một quan hệ trên A thỏa mãn:

a, Phản xạ, đối xứng nhưng không bắc cầu

b, Bắc cầu nhưng không phản xạ

c, Bắc cầu, phản xạ nhưng không đối xứng

Quan hệ tương đương (1/3)

Định nghĩa:

Quan hệ 2 ngôi R trên tập A là một quan hệ tương đương khi và chỉ khi nó đồng thời thỏa mãn các tính chất:

1. Phản xạ
2. Đối xứng
3. Bắc cầu

Ví dụ:

Xét quan hệ $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : xRy \Leftrightarrow x + y \text{ chẵn}\}$. Khi đó R là quan hệ tương đương. Thật vậy:

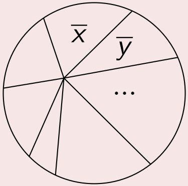
- $\forall x \in \mathbb{Z}, x + x$ là số chẵn, tức là xRx (tính phản xạ).
- $\forall x, y \in \mathbb{Z}$ nếu $x + y$ chẵn thì $y + x$ chẵn, suy ra tính đối xứng.
- $\forall x, y, z \in \mathbb{Z}$ nếu $x + y$ chẵn và $y + z$ chẵn thì $x + z$ chẵn, suy ra tính bắc cầu.

Quan hệ tương đương (2/3)

Khái niệm lớp tương đương:

- Quan hệ tương đương R phân hoạch tập A thành các lớp tương đương
- Lớp tương đương có phần tử x làm đại diện là: $\overline{x} = \{y \in A : yRx\}$
- Định lý: 2 lớp tương đương hoặc trùng nhau hoặc không giao nhau
  - $+$ $(x, y) \in R \Leftrightarrow \overline{x} = \overline{y}$
  - $+$ $(x, y) \notin R \Leftrightarrow \overline{x} \cap \overline{y} = \emptyset$

Ý nghĩa của lớp tương đương



Quan hệ tương đương (3/3)

Hãy chứng tỏ các quan hệ sau đây là tương đương, tìm lớp tương đương và cho biết ý nghĩa của chúng

a, Quan hệ song song giữa các đường thẳng trong mặt phẳng.

b, Quan hệ cùng Khoa giữa các sinh viên trường ĐH GTVT TP. HCM.

c, Quan hệ $\Leftrightarrow$ giữa các biểu thức logic trong tập tất cả các biểu thức logic M

Tìm quan hệ tương đương R trên tập A sao cho nó phân hoạch A thành các lớp tương đương có dạng:

$$A = \{1, 2\} \cup \{3, 4\} \cup \{5\}$$

Quan hệ thứ tự (1/8)

Khái niệm:

Quan hệ 2 ngôi R trên tập A được gọi là quan hệ thứ tự (hay gọi tắt là thứ tự) khi và chỉ khi đồng thời thỏa mãn:

+ R phản xạ
+ R phản xứng
+ R bắc cầu

Kí hiệu thứ tự A là $(A, \prec)$, và $(x, y) \in \mathcal{R}$ kí hiệu là $x \prec y$

Ví dụ:

Xét R là quan hệ chia hết trên tập số nguyên dương $\mathbb{Z}^+$.
Khi đó R là một quan hệ thứ tự. Thật vậy:

- $\forall x \in \mathbb{Z}^+, xRx \Leftrightarrow x|x \Rightarrow R$ có tính phản xạ
- $\forall x, y, (x|y) \wedge (y|x) \rightarrow x = y$, tính phản xứng
- $\forall x, y, z, (x|y) \wedge (y|z) \rightarrow x|y$, tính bắc cầu

Ví dụ:

Xét tập $A = \{x, y\}$ khi đó tập các tập con của A kí hiệu là $\mathcal{P}(A)$. Trên $\mathcal{P}(A)$ xét quan hệ bao hàm $\subset$. Khi đó, $(\mathcal{P}(A), \subset)$ là một thứ tự. Thật vậy:

1. $\forall A \in \mathcal{P}(A), A \subset A \Rightarrow$ phản xạ.
2. $\forall A, B \in \mathcal{P}(A), (A \subset B) \wedge (B \subset A) \Rightarrow$ phản xứng.
3. $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(A), (A \subset B) \wedge (B \subset C) \rightarrow (A \subset C) \Rightarrow$ bắc cầu.

Khái niệm trội & trội trực tiếp:

* Nếu $x \prec y$ thì y được gọi là trội của x (và x bị trội bởi y).
* Nếu $x \prec z$ và $\nexists y : x \precneqq y \precneqq z$ thì z được gọi là trội trực tiếp của x

Biểu đồ Hasse:

Cho thứ tự $(A, \prec)$, biểu đồ Hasse của A gồm:

* Mỗi đỉnh là 1 phần tử của A
* Mỗi cung nối 1 phần tử của A với trội trực tiếp của nó

Ví dụ biểu đồ Hasse:

Giả sử $A = \{1, 2, 3\}$ khi đó $(\mathcal{P}(A), \subset)$ là 1 thứ tự có biểu đồ Hasse như sau:

$$
\begin{tikzcd}
 & \{1,2,3\} & \\
\{2,3\} \arrow[ur] & \{1,3\} \arrow[u] & \{1,2\} \arrow[ul] \\
\{3\} \arrow[u] \arrow[ur] & \{2\} \arrow[ul] \arrow[ur] & \{1\} \arrow[ul] \arrow[u] \\
 & \emptyset \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

Quan hệ thứ tự (5/8)

Thứ tự toàn phần:

Định nghĩa:

Thứ tự $(A, \prec)$ được gọi là một thứ tự toàn phần khi và chỉ khi:

$$\forall x, y \in A : (x \prec y) \vee (y \prec x)$$

Tức là 2 phần tử bất kỳ của A luôn so sánh được với nhau.

Định lý:

- Biểu đồ Hasse của một thứ tự toàn phần là một dây chuyền
- Ví dụ: xét tập $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Khi đó: $(A, \leqslant)$ có biểu đồ:

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$$

Giả sử $(A, \prec)$ là một thứ tự. Khi đó:

Max - min:

- $Max(A) = M \in A : \forall x \in A, x \prec M$
- $Min(A) = m \in A : \forall x \in A, m \prec x$
- Ví dụ:
  Xét thứ tự $(\mathcal{P}(A), \subset)$ với $A = \{1, 2, 3\}$ thì: $Max(A) = A$ và $Min(A) = \emptyset$

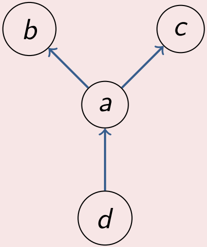
Tối đại - tối thiểu:

- M được gọi là tối đại của A nếu: $\forall x \in A, (M \prec x) \Rightarrow x = M$
- m được gọi là tối thiểu của A nếu: $\forall x \in A, (x \prec m) \Rightarrow x = m$

Quan hệ thứ tự (7/8)

Tối thiểu - tối đại:

- Ví dụ: Cho thứ tự có biểu đồ sau:



thì tối thiểu là d và các tối đại là b và c.

Quan hệ thứ tự (8/8)

Định lý:

Giả sử $(A, \prec)$ là một thứ tự hữu hạn. Khi đó:

- Mọi phần tử luôn được trội (tương ứng bị trội) bởi một phần tử tối đại (tương ứng tối thiểu)
- Nếu tối đại (tương ứng tối thiểu) là duy nhất thì nó là *max* (tương ứng *min*)

Ví dụ:

* Gọi U_n là tập các ước của số nguyên dương n.
Trên U_n ta xét thứ tự chia hết $a \prec b \Leftrightarrow a|b$.

* Hãy tìm tối thiểu, tối đại, *max* và *min* của U_6 ?

+ **Chặn trên, chặn dưới:**

Khái niệm:

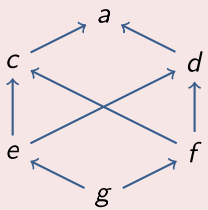
Giả sử có thứ tự $(A, \prec)$. Xét $B \subset A$. Khi đó:

- Phần tử s gọi là chặn trên (chung) của B nếu: $\forall x \in B : x \prec s$
- Phần tử i gọi là chặn dưới (chung) của B nếu: $\forall x \in B : i \prec x$
- Gọi S và I là tập các chặn trên và chặn dưới của B.
  - * Nếu $Min(S)$ tồn tại, được gọi là chặn trên đúng (supremum) của B, kí hiệu: $SupB$ hoặc $\vee$
  - * Nếu $Max(I)$ tồn tại, được gọi là chặn dưới đúng (infimum) của B, kí hiệu: $InfB$hoặc $\wedge$

+ **Chặn trên, chặn dưới:**

Ví dụ 1:

Xét thứ tự có biểu đồ sau:



Khi đó:

$$\nexists Sup\{e, f\}, \quad Sup\{c, f\} = a$$
$$\nexists Inf\{c, d\}, \quad Inf\{e, f\} = g$$

Dàn (3/6)

+ **Chặn trên, chặn dưới:**

Ví dụ 2:

Xét thứ tự $(\mathcal{P}(A), \subset)$. Khi đó $\forall A, B \in \mathcal{P}(A)$ ta có:

* $Sup\{A, B\} = A \cup B$
* $Inf\{A, B\} = A \cap B$

Ví dụ 3:

Xét thứ tự $(U_n, |)$. Khi đó $\forall a, b \in U_n$ ta có:

* $Sup\{a, b\} = BCNN(a, b)$ (Bội chung nhỏ nhất)
* $Inf\{a, b\} = UCLN(a, b)$ (Ước chung lớn nhất)

Định nghĩa - Dàn (Lattice):

* Thứ tự $(A, \prec)$ được gọi là một dàn nếu với $\forall x, y \in A$ thì $sup\{x, y\}$ và $inf\{x, y\}$ đều tồn tại.
* $(\mathcal{P}(A), \subset)$ và $(U_n, |)$ trong ví dụ 2 và 3 chính là các dàn.
* Một cách trực quan có thể thấy mối quan hệ "Thứ tự" - "Dàn" - "Thứ tự toàn phần" như sau:

Thứ tự thông thường → Dàn → Thứ tự toàn phần

Dàn (5/6)

Phần tử bù & Dàn bù:

* Giả sử $(A, \prec)$ là một dàn, lấy $x \in A$. Khi đó nếu $\exists \overline{x} \in A$:
$\begin{cases} Sup\{x, \overline{x}\} = max \\ Inf\{x, \overline{x}\} = min \end{cases}$ thì phần tử $\overline{x}$ được gọi là bù của x.
* $(A, \prec)$ được gọi là dàn bù nếu: $\forall x \in A, \exists \overline{x}$.

Dàn phân phối:

Khi và chỉ khi các phép *Sup* (hay $\vee$) và *Inf*$(\wedge)$ (hay $\wedge$) của nó có tính phân phối. Tức là: $\begin{cases} x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \\ x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \end{cases}$

* Chú ý: Các phép $\wedge$ và $\vee$ đã có sẵn tính kết hợp (*tự chứng minh*).

Dàn (6/6)

Ví dụ:

Các dàn $(\mathcal{P}(A), \subset)$ và $(U_n, |)$ đều là các dàn phân phối (bởi tính phân phối của các phép toán: $(\cup, \cap)$ và $(BCNN, UCLN)$)

Thảo luận

* Xét tập các giá trị logic $B = \{0, 1\}$ cùng với các phép toán $\wedge$, $\vee$ và $\neg$. Khi đó:
  + B có phải là dàn không?
  + B có tính chất bù và phân phối không?
* Có sự liên hệ nào giữa những võ sĩ vô địch quyền anh (*theo các hạng: nặng, trung, nhẹ, ruồi, ...*) với các khái niệm *cực đại (max), cực tiểu (min), tối đại, hay tối thiểu* không?

Các bài tập chương 3 trong tài liệu
Toán rời rạc - GS. Nguyễn Hữu Anh