

ĐÁP ÁN

Câu 1: Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$.

Giải

$$\det(A) = -10 \neq 0 \rightarrow \exists A^{-1}.$$

SV trình bày các bước tìm ma trận nghịch đảo.

$$\text{Kết quả: } A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{10} & \frac{1}{2} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{10} \end{bmatrix}.$$

Câu 2: Tìm hạng của ma trận : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & -3 \\ 3 & 6 & 5 & -8 & 13 \\ 4 & 8 & 5 & 1 & -1 \\ -2 & -4 & -3 & 3 & -5 \end{bmatrix}$.

Giải

$$A \xrightarrow{\substack{-3d_1+d_2 \rightarrow d_2 \\ -4d_1+d_3 \rightarrow d_3 \\ 2d_1+d_4 \rightarrow d_4}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -14 & 22 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 11 \\ 0 & 0 & -1 & 7 & -11 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{d_4+d_3 \rightarrow d_3 \\ 2d_4+d_2 \rightarrow d_2}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 7 & -11 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{d_2 \leftrightarrow d_4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 7 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \text{ Vậy } r(A) = 2.$$

Câu 3: Biện luận hạng của ma trận sau theo m : $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & m & 1 \\ -1 & 1 & -1 & m \end{bmatrix}$.

Giải

$$B \xrightarrow{\substack{d_2 - 2d_1 \rightarrow d_2 \\ d_3 - d_1 \rightarrow d_3 \\ d_4 + d_1 \rightarrow d_4}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & m-2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & m-1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{d_3 + d_2 \rightarrow d_3 \\ d_4 + d_2 \rightarrow d_4}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & m-3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m-3 \end{bmatrix}.$$

Biện luận:

- Nếu $m = 3$, $r(B) = 2$.
- Nếu $m \neq 3$, $r(B) = 4$.

Câu 4: Cho ma trận: $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 9 & -1 & m \\ 0 & 15 & -5 & 16 - m \end{bmatrix}$. Tìm m để $\text{rank}(A) = 4$.

Giải

$$\det A = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 9 & -1 & m \\ 15 & -5 & 16 - m \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & m - 6 \\ 0 & 0 & 10 - m \end{vmatrix} = 12(10 - m).$$

Biện luận: $\text{rank}(A) = 4 \Leftrightarrow \det(A) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 10$.

không có tín hiệu

Câu 1.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{Xoắn Hưc}} = -10 \neq 0$$

$\Rightarrow A$ khả nghịch

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3, A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -5, A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -5, A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -5, A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5, A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} 3 & -5 & -1 \\ -5 & -5 & 5 \\ -1 & 5 & -3 \end{bmatrix} = \frac{-1}{10} \begin{bmatrix} 3 & -5 & -1 \\ -5 & -5 & 5 \\ -1 & 5 & -3 \end{bmatrix} = ?$$

Câu 5: $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 9 & -1 & m \\ 0 & 5 & -5 & 16-m \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{3d_2 - d_3 \rightarrow d_3 \\ 5d_2 - d_4 \rightarrow d_4}} \begin{bmatrix} 2 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 6-m \\ 0 & 0 & 0 & m-6 \end{bmatrix}$

Để $n(A) = 4 \Leftrightarrow m-6 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 6$
 Vậy $m \neq 6$ thì $n(A) = 4$.

Câu 3. Tính

$$\det(A) = -3 \neq 0 \Rightarrow A \text{ khả nghịch}$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -7, A_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2, A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6$$

$$A_{21} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2, A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, A_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1, A_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1, A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} -7 & -2 & 6 \\ -2 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = ?$$

Câu 4: $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & m & 1 \\ -1 & 1 & -1 & m \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{d_1 + d_4 \rightarrow d_4 \\ -2d_1 + d_2 \rightarrow d_2 \\ -d_1 + d_3 \rightarrow d_3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & m-2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & m-1 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow{\substack{d_2 + d_3 \rightarrow d_3 \\ d_2 + d_4 \rightarrow d_4}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & m-3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m-3 \end{bmatrix}$

Vậy $m = 3$ thì $n(B) = 2$ và $m \neq 3$ thì $n(B) = 4$.