TRƯỜNG ĐẠI HỌC GIAO THÔNG VẬN TẢI THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

KHOA CƠ BẢN – BỘ MÔN TOÁN

BÀI GIẢNG GIẢI TÍCH 1

CHƯƠNG III. PHÉP TÍNH TÍCH PHÂN HÀM MỘT BIẾN

§1. Nguyên hàm và tích phân bất định

GV: Đinh Tiến Dũng

NỘI DUNG CHÍNH

- *Bài 1. Định nghĩa nguyên hàm, tích phân bất định và các phương pháp tính tích phân bất định.*
- *Bài 2. Định nghĩa tích phân xác định, các tính chất, các định lý cơ bản của giải tích toán học. Ứng dụng tính diện tích hình phẳng, độ dài đường cong phẳng, thể tích vật thể.*
- *Bài 3. Định nghĩa, các tính chất và điều kiện hội tụ của tích phân suy rộng.*

CHƯƠNG III. PHÉP TÍNH TÍCH PHÂN HÀM MỘT BIẾN

§1. Nguyên hàm và tích phân bất định

1. Nguyên hàm

❖ *Định nghĩa*

Hàm số $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm $f(x)$ trên $(a;b)$ nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi x thuộc $(a;b)$.

❖ **Ví dụ:**

- $F(x) = lnx$ ***là một nguyên hàm*** *của* $f(x) = \frac{1}{x}$ *trên* $(0;+\infty)$ vì $(lnx)' = \frac{1}{x}$ *với mọi* x *thuộc* $(0;+\infty)$.
- *Trên* R, hàm $f(x) = 3x^2$ ***có một nguyên hàm*** *là* $F(x) = x^3$ vì $\left(x^3\right)' = 3x^2$ *với mọi* x *thuộc* R.

❖ Định lý

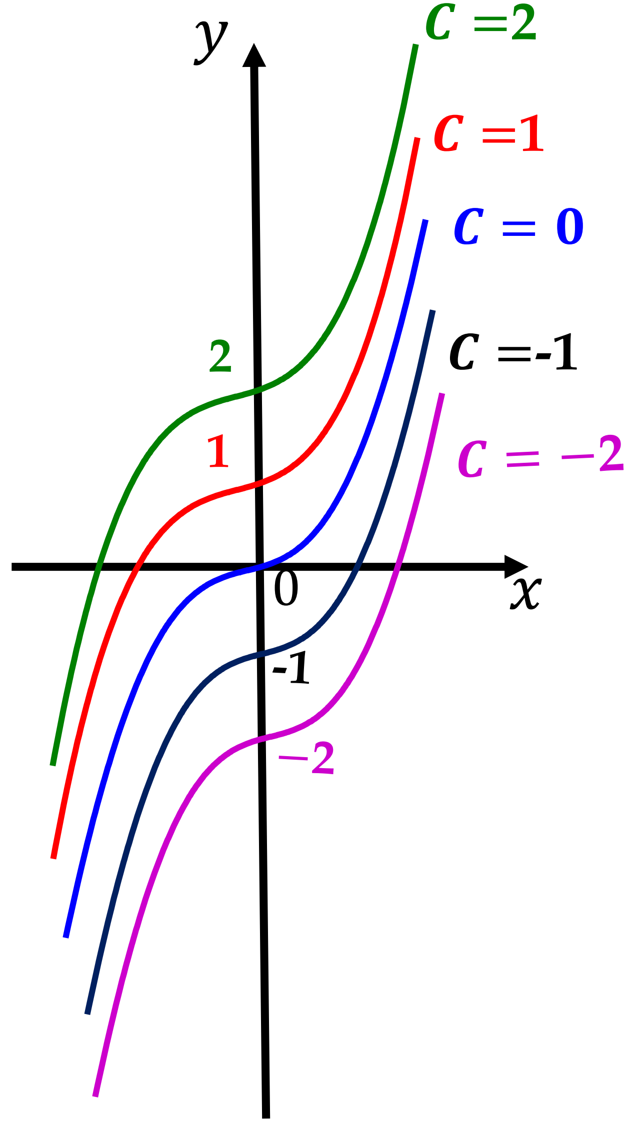
Trên $(a;b)$, nếu hàm $f(x)$ có một nguyên hàm là $F(x)$ thì mọi nguyên hàm của $f(x)$ đều có dạng: $F(x)+C$ với C là hằng số bất kỳ.

❖ **Ví dụ:**

Trên **R,** hàm $f(x) = 3x^2$ **có một nguyên hàm** là x^3 nên mọi nguyên hàm của nó có dạng:

$$F(x) = x^3 + C$$

Đó là họ tất cả các nguyên hàm của hàm $f(x) = 3x^2$.



2. Tích phân bất định

❖ *Định nghĩa*

Họ tất cả các nguyên hàm của hàm của $\boldsymbol{f(x)}$ trên $(\boldsymbol{a};\boldsymbol{b})$ gọi là tích phân bất định của $\boldsymbol{f(x)}$ trên $(\boldsymbol{a};\boldsymbol{b})$. Ký hiệu: $\int \boldsymbol{f(x)dx}$.

❑ ***Nhận xét:***

Nếu F(x) là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $(a;b)$ tích phân bất định của $f(x)$ trên $(a;b)$ là: $\int f(x)dx = F(x) + C$. Tóm lại:

$$\int f(x)dx = F(x) + C \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$$

❖ **Ví dụ:**

- $\int k.dx = kx + C$ bởi vì $(kx)' = k$.
- $\int 3x^2 dx = x^3 + C$ bởi vì $\left(x^3\right)' = 3x^2$.
- $\int e^{-x}dx = -e^{-x} + C$ bởi vì $(-e^{-x})' = e^{-x}$.

❖ Tính chất và quy tắc tích phân bất định

i. $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$

ii. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$ *(với k là hằng số khác 0).*

iii. $d\left[\int f(x)dx\right] = f(x)dx.$

iv. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$

v. $\int f'(x)dx = f(x) + C$ *(nếu f có đạo hàm).*

❑ **Hệ quả:** $\int (\alpha f(x) \pm \beta g(x))dx = \alpha \int f(x)dx \pm \beta \int g(x)dx \; (\alpha, \beta \neq 0)$

❑ ***Chú ý:*** *Các tính chất trên lần lượt chỉ ra mối quan hệ và qui tắc phối hợp phép tính tích phân với: phép cộng, phép trừ, phép nhân vô hướng, phép tính vi phân, phép tính đạo hàm. Tính chất iii. đã chỉ ra tích phân và vi phân là hai phép toán nghịch đảo của nhau. Đây là hai phép tính cơ bản và chủ chốt trong lĩnh vực giải tích.*

❖ Bảng tích phân bất định cơ bản

1. $\int dx = x + C$
2. $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, (\alpha \neq -1)$
3. $\int \frac{1}{x^2} dx = \frac{-1}{x} + C$
4. $\int \frac{1}{x} dx = ln|x| + C$
5. $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C$
6. $\int e^x dx = e^x + C$
7. $\int a^x dx = \frac{a^x}{ln\, a} + C$
8. $\int sin x\, d\, x = -\cos x + C$
9. $\int \cos x\, dx = sinx + C$
10. $\int \tan x\, dx = -ln|\cos x| + C$
11. $\int \cot x\, dx = ln|\sin x| + C$
12. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int (1 + \tan^2 x) dx = tanx + C$
13. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int (1 + \cot^2 x) dx = -cotx + C$
14. $\int \frac{1}{x^2+1} dx = arctanx + C$
15. $\int \frac{1}{x^2+m^2} dx = \frac{1}{m} arctan \frac{x}{m} + C$
16. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = arcsinx + C$
17. $\int \frac{1}{\sqrt{m^2-x^2}} dx = arcsin \frac{x}{m} + C$
18. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm m}} dx = ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm m} \right| + C$

3. Các phương pháp tính tích phân bất định

a) Biến đổi thành tổng – hiệu các tích phân cơ bản

$$\int(\alpha f(x) \pm \beta g(x))dx = \alpha \int f(x)dx \pm \beta \int g(x)dx$$

❖ **Ví dụ:** $I = \int 2^x(3^x + 5^x)dx = \int(6^x + 10^x)dx = \frac{6^x}{\ln 6} + \frac{10^x}{\ln 10} + C$

$$J = \int \frac{5x^5 - 3x^3 - x + 1}{x^2}dx = \int \left(5x^3 - 3x - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)dx$$

$$= \frac{5x^4}{4} - 3\frac{x^2}{2} - \ln|x| - \frac{1}{x} + C$$

$$K = \int \sqrt{x\sqrt{x}}dx = \int\left(x.x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}dx = \int x^{\frac{3}{4}}dx = \frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}} + C.$$

$$F = \int \frac{\cos 2x}{\cos x + \sin x}dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x + \sin x}dx$$

$$= \int(\cos x - \sin x)\,dx = \sin x + \cos x + C$$

b) Phương pháp thế *(Phương pháp đổi biến số)*

❖ Phương pháp đổi biến thuận *(Đổi biến loại 1)*

Giả sử cần tính tích phân: $I = \int f(x).dx$

B1. *Chọn* $u(t)$ *là hàm một–một có miền giá trị trùng với miền xác định của hàm f(x) và đặt:*

$$x = u(t) \Rightarrow dx = u'(t)dt$$

B2. *Đưa tích phân về biến mới:* $I = \int f[u(t)].u'(t).dt$.

B3. *Tính tích phân theo biến t sau đó trả kết quả về biến x.*

❑ ***Chú ý:*** *Sau khi đổi biến, tích phân theo biến mới có thể dễ hoặc khó giải hơn, thậm chí không giải được, điều đó phụ thuộc cách chọn hàm u(t).*

Ví dụ: Tính $A = \int \sqrt{1-x^2}.dx$

Giải

Đặt $x = \sin t, t \in \left[\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow dx = \text{costdt}.$

Ta có $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 \mathrm{t}} = \sqrt{\cos^2 t} = |\text{cost}| = \cos t$

$$A = \int \cos^2 t\,.dt = \int \frac{1}{2}(1+\cos 2t).dt$$

$$= \frac{1}{2}\left(\mathrm{t} + \frac{\sin 2t}{2}\right) + \mathrm{C} = \frac{t}{2} + \frac{1}{2} sint.cost$$

Vì $\begin{cases} t = \text{arcsinx} \\ \cos t = \sqrt{1-x^2} \end{cases} \Rightarrow A = \frac{1}{2}\text{arcsinx} + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \mathrm{C}.$

❑ **Nhận xét:** TQ bài toán $I = \int \sqrt{a^2 - x^2}.dx$ đặt $x = a\sin t, t \in \left[\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$

❖ **Phương pháp đổi biến nghịch** *(Đổi biến loại 2)*

Khi gặp tích phân có dạng: $I = \int \boldsymbol{f}[\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})].\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x}).\boldsymbol{dx}$ *ta đổi biến bằng cách đặt:* $t = u(x) \Rightarrow dt = u'(x)dx$ *đưa tích phân về biến mới:*

$$\boldsymbol{I = \int f(t).dt}.$$

Tính tích phân theo biến t sau đó trả kết quả về biến x.

❑ **Hệ quả:** $\int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow \int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$

Chứng minh

Đặt $\mathrm{t} = ax + b \Rightarrow dt = (\mathrm{ax}+\mathrm{b})'.\mathrm{dx} \Rightarrow dt = \mathrm{a}.\mathrm{dx} \Rightarrow dx = \frac{1}{a}dt$

Do đó $\int f(ax+b)dx = \int f(t)\frac{1}{a}dt = \frac{1}{a}F(t) + C = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$

Từ hệ quả trên và Bảng tích phân bất định cơ bản ta có thể lập Bảng công thức tích phân mở rộng, chẳng hạn:

$$1.\int x^{\alpha}dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$$

$$2.\int \frac{1}{x^2}dx=\frac{-1}{x}+C$$

$$3.\int \frac{1}{x}dx=ln|x|+C$$

$$4.\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx=2\sqrt{x}+C$$

$$5.\int e^{x}dx=e^{x}+C$$

x → ax+b

dx → dx

Nhân $\frac{1}{a}$

$$1.\int (ax+b)^{\alpha}dx=\frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{a(\alpha+1)}+C$$

$$2.\int \frac{1}{(ax+b)^2}dx=\frac{-1}{a(ax+b)}+C$$

$$3.\int \frac{1}{ax+b}dx=\frac{1}{a}ln|ax+b|+C$$

$$4.\int \frac{1}{\sqrt{ax+b}}dx=\frac{2}{a}\sqrt{ax+b}+C$$

$$5.\int e^{ax+b}dx=\frac{1}{a}e^{ax+b}+C$$

Ví dụ 1. Dùng phương pháp thế, tính các tích phân

a) $\int e^{5x}dx$ b) $\int \frac{dx}{2x-3}$ c) $\int \frac{dx}{(3x+1)^4}$

d) $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$ e) $\int \sqrt[5]{3-5x}dx$ f) $\int \cos^2 x dx$

Giải

a)AD: $\int e^{ax+b}dx = \frac{1}{a}e^{ax+b} + C$

$$\int e^{5x}dx = \frac{1}{5}e^{5x} + C$$

b)AD: $\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}ln|ax+b| + C$

$$\int \frac{dx}{2x-3} = \frac{1}{2}\ln|2x-3| + C$$

c) AD: $\int (ax+b)^\alpha dx = \frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{a(\alpha+1)} + C$

$$\int \frac{dx}{(3x+1)^4} = \int (3x+1)^{-4}dx$$

$$= \frac{1}{3}\frac{(3x+1)^{-3}}{-3} + C$$

$$= -\frac{1}{9(3x+1)^3} + C$$

d) AD: $\int \frac{1}{x^2+m^2}dx = \frac{1}{m}\arctan\frac{x}{m} + C$

Mở rộng công thức $\int \frac{1}{(ax+b)^2+m^2}dx = \frac{1}{am}\arctan\frac{ax+b}{m} + C$

Ta có: $\int \frac{dx}{x^2+2x+5} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+4} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+2^2} = \frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{2} + C.$

e) AD: $\int (ax+b)^{\alpha}dx = \frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{a(\alpha+1)} + C$

$\int \sqrt[5]{3-5x}dx = \int (3-5x)^{\frac{1}{5}}dx = \frac{(3-5x)^{6/5}}{-5.(6/5)} + C = -\frac{1}{6}(3-5x)^{\frac{6}{5}} + C.$

f) AD: $\int \cos x\, dx = \sin x + C.$ $\Rightarrow \int \cos(a\,x+b)dx = \frac{\sin(ax+b)}{a} + C$

$\int \cos^2 x\, dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2x)dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 2x}{2}\right) + C.$

Ví dụ 2. Dùng phương pháp thế, tính các tích phân bất định:

a) I= $\int e^{\sin x}.\cos x.\,d\,x$ **b) J=** $\int \frac{\ln x}{x} dx$

Giải

a) I= $\int e^{\sin x}.\cos x.\,d\,x$

Đặt t = sinx $\Rightarrow dt = \cos x\,.\,dx$

$$I = \int e^t dt = e^t + c$$

$$= e^{\sin x} + C.$$

Có thể giải vắn tắt như sau:

I= $\int e^{\sin x}.\cos x.\,d\,x$

$$= \int e^{\sin x} d(\sin x)$$

$$= e^{\sin x} + C.$$

b) J= $\int \frac{lnx}{x} dx$

Đặt t = lnx $\Rightarrow dt = \frac{dx}{x}$

J= $\int t.dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{\ln^2 x}{2} + C.$

Cách rút gọn: J= $\int \frac{\ln x}{x} dx = \int \ln x \,.\, d(\ln x) = \frac{\ln^2 x}{2} + C.$

Ví dụ 3. **Dùng phương pháp thế, tính các tích phân bất định:**

a) $I=\int x\left(3x^2-7\right)^9 dx$ **b)** $J=\int \sqrt{1+x^2}x^5 dx$

Giải

a) Đặt $t=3x^2-7 \Rightarrow dt=6xdx \Rightarrow xdx=\frac{1}{6}dt$

$$I=\int \left(3x^2-7\right)^9(xdx)=\frac{1}{6}\int t^9 dt=\frac{t^{10}}{60}+C=\frac{\left(3x^2-7\right)^{10}}{60}+C.$$

b) Đặt $t=\sqrt{1+x^2} \Rightarrow x^2=t^2-1 \Rightarrow 2xdx=2tdt \Rightarrow xdx=tdt$

$$I=\int \sqrt{1+x^2}x^5dx=\int \sqrt{1+x^2}x^4\cdot xdx=\int t\left(t^2-1\right)^2tdt$$

$$=\int \left(t^6-2t^4+t^2\right)dt=\frac{1}{7}t^7-\frac{2}{5}t^5+\frac{1}{3}t^3+C$$

$$=\frac{1}{7}\left(\sqrt{1+x^2}\right)^7-\frac{2}{5}\left(\sqrt{1+x^2}\right)^5+\frac{1}{3}\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3+C$$

Ví dụ 3. Dùng phương pháp thế, tính các tích phân bất định:

a) $A = \int \frac{\sin 4x}{4+\cos^2 2x} dx$; **b)** $B = \int \frac{x^4+1}{x^6+1} dx$

Giải

a) Đặt $t = 4 + \cos^2 2x \Rightarrow dt = 2\cos 2x \cdot (-2\sin 2x)dx = -2\sin 4x. dx$.

$$A = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{2}\ln|t| + C = -\frac{1}{2}\ln\left(4+\cos^2 2x\right) + C$$

b) Ta có: $\frac{x^4+1}{x^6+1} = \frac{x^4+1}{(x^2)^3+1} = \frac{(x^4-x^2+1)+x^2}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)} = \frac{1}{x^2+1} + \frac{x^2}{(x^3)^2+1}$.

$$B = \int \frac{dx}{x^2+1} + \frac{1}{3}\int \frac{d\left(x^3\right)}{(x^3)^2+1} = \arctan x + \frac{1}{3}\arctan\left(x^3\right) + C$$

c) Phương pháp tích phân từng phần

❖ *Định lý: (Suy từ qui tắc đạo hàm của tích hai hàm)*

Nếu các hàm $u = u(x)$, $v = v(x)$ là các hàm khả vi và $u'v$ có nguyên hàm thì:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

❖ **Chú ý:** *Cách đặt u, dv đối với các dạng thường gặp*

$$\int P_n(x).\begin{bmatrix}\ln(ax)\\ \arcsin(ax)\\ \arccos(ax)\\ \arctan(ax)\end{bmatrix}.dx \xrightarrow{\text{Đặt}} u = \begin{bmatrix}\ln(ax)\\ \arcsin(ax)\\ \arccos(ax)\\ \arctan(ax)\end{bmatrix} \text{ và } dv = \text{"Phần còn lại.}$$

$$\int P_n(x).\begin{bmatrix}e^{ax}\\ \sin(ax)\\ \cos(ax)\end{bmatrix}.dx \xrightarrow{\text{Đặt}} \begin{cases}u = P_n(x)\\ dv = \text{"Phần còn lại".}\end{cases}$$

$$\int e^{ax}.\begin{bmatrix}\sin bx\\ \cos bx\end{bmatrix}.dx \xrightarrow{\text{Đặt}} \begin{cases}u = e^{ax}\\ dv = \text{"Phần còn lại".}\end{cases}$$ (Có thể đặt ngược lại)

❖ Sơ đồ tính nhanh tích phân từng phần

$$I = \int u\,dv = \int u.v'\,dx = ?$$

Tính đạo hàm liên tiếp

u	dv
u(x)	v′(x)
u’(x)	v(x)

(+)

(-) $\int$

Tính nguyên hàm liên tiếp

$$I = u.v - \int v.u'\,dx$$

Chú ý: *Nhân chéo không có dấu tích phân, nhân ngang đặt trong dấu tích phân.*

Ví dụ 1. Tính tích phân bất định $\mathbf{I = \int x^2 . \ln x \, dx}$.

Giải

Đặt: $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x^2 dx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{x}.dx \\ v = \dfrac{x^3}{3} \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \int u.dv = \boldsymbol{uv - \int vdu} = (\ln x).\frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3}.\frac{1}{x}dx$$

$$= \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}.\frac{x^3}{3} + \mathrm{C} = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + \mathrm{C}.$$

❖ Nhận xét:

Cách giải TQ: $I = \int x^k . \ln x \, dx$, k ∈ Z $\xrightarrow{\text{Đặt}} \begin{cases} u = \ln x \\ dv = x^k dx \end{cases}$.

❖ **Dùng sơ đồ tính nhanh:** $I = \int x^2 . \ln x \, dx$

Tính đạo hàm

u		dv
$\ln x$	(+)	x^2
$\frac{1}{x}$	(-) $\int$	$\frac{x^3}{3}$

Tính nguyên hàm

$$I = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + C.$$

Ví dụ 2. **Tính nhanh tích phân bất định $I = \int x^3.\mathrm{e}^x\,dx$.**

Giải

u		dv
x^3	(+)	e^x
$3x^2$	(-)	e^x
$6x$	(+)	e^x
6	(-)	e^x
0	(+) $\int$	e^x

$$I = x^3e^x - 3\mathrm{x}^2e^x + 6\mathrm{x}e^x - 6e^x + \int 0.dx$$

$$= e^x(x^3 - 3\mathrm{x}^2 + 6\mathrm{x} - 6) + C$$

Ví dụ 3. Tính tích phân bất định $A = \int e^{-2x} \cos x \,.\, dx$.

Giải

- Đặt $\begin{cases} u = e^{-2x} \\ dv = \cos x \, dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{du} = -2\mathrm{e}^{-2\mathrm{x}}\mathrm{dx} \\ \mathrm{v} = \sin \mathrm{x} \end{cases}$

$$\mathrm{A} = \mathrm{e}^{-2\mathrm{x}} \sin \mathrm{x} + 2 \int \mathrm{e}^{-2\mathrm{x}} \sin \mathrm{x} \,.\, \mathrm{dx} \; = \mathrm{e}^{-2\mathrm{x}} \sin \mathrm{x} + 2.\mathrm{B} \qquad (1)$$

- Tính riêng $\mathrm{B} = \int \mathrm{e}^{-2\mathrm{x}}\mathrm{sinxdx}$: Đặt $\begin{cases} \mathrm{U} = \mathrm{e}^{-2\mathrm{x}} \\ \mathrm{dV} = \sin \mathrm{x} \, \mathrm{dx} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \mathrm{dU} = -2\mathrm{e}^{-2\mathrm{x}}\mathrm{dx} \\ \mathrm{V} = -\cos \mathrm{x} \end{cases}$

$$\mathrm{B} = -\mathrm{e}^{-2\mathrm{x}} \cos \mathrm{x} - 2 \int \mathrm{e}^{-2\mathrm{x}} \cos \mathrm{x} \,.\, \mathrm{dx} \; = -\mathrm{e}^{-2\mathrm{x}} \cos \mathrm{x} - 2.\mathrm{A} \qquad (2)$$

- Thế (2) vào (1) được:

$$\mathrm{A} = \mathrm{e}^{-2\mathrm{x}} \sin \mathrm{x} + 2(-\mathrm{e}^{-2\mathrm{x}} \cos \mathrm{x} - 2.\mathrm{A}) = \mathrm{e}^{-2\mathrm{x}} \sin \mathrm{x} - 2\mathrm{e}^{-2\mathrm{x}} \cos \mathrm{x} - 4.\mathrm{A}$$

$$\Rightarrow 5.\mathrm{A} = \mathrm{e}^{-2\mathrm{x}}(\sin \mathrm{x} - 2 \cos \mathrm{x}) \; \Rightarrow \mathrm{A} = \frac{1}{5}\mathrm{e}^{-2\mathrm{x}}(\sin \mathrm{x} - 2 \cos \mathrm{x}).$$

❖ Dùng sơ đồ tính nhanh: $A = \int e^{-2x} \cos x \, . dx$

Giải

u		dv
e^{-2x}	(+)	$\cos x$
$-2e^{-2x}$	(-)	sinx
$4e^{-2x}$		$-\cos x$

(+) $\int$

$$A = e^{-2x}.\text{sinx} - 2e^{-2x}\text{cosx} - 4\int e^{-2x}\text{cosx}dx$$

$$= e^{-2x}(\text{sinx} - 2\text{cosx}) - 4.\text{A}$$

$$\Rightarrow 5.A = e^{-2x}(\text{sinx} - 2\text{cosx})$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{5}e^{-2x}(\text{sinx} - 2\text{cosx})$$

BÀI TẬP TẠI LỚP

(Chia lớp học thành 4 loại nhóm, thảo luận giải trong 5 phút)

Dùng sơ đồ tính nhanh tích phân từng phần:

$$N_1 = \int e^{2x} cos3xdx \quad N_2 = \int x^3 sin2xdx$$

$$N_3 = \int \frac{\ln x}{x^2} dx \quad N_4 = \int (2x - 1) \ln x \, dx$$

4. Kỹ thuật tính tích phân các lớp hàm đặc biệt:

a) Tích phân hàm phân thức hữu tỷ:

❑ *DẠNG:* $I = \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ *với P, Q là đa thức có degP ≥ degQ.*

❑ *CÁCH GIẢI:*

B1. *Chia đa thức* $P(x)$ *cho* $Q(x)$ *ta được:* $\frac{P(x)}{Q(x)} = M(x) + \frac{N(x)}{Q(x)}$, $M(x), N(x)$ *là đa thức và degN<degQ.*

B2. *Tách đa thức* $Q(x)$ *thành tích của các đa thức bất khả quy (đa thúc bất khả quy là đa thức bậc nhất* $ax + b$ *hoặc đa thức bậc hai* $ax^2 + bx + c$ *vô nghiệm).*

B3. *Tách* $\frac{N(x)}{Q(x)}$ *thành tổng các phân thức đơn giản. Sau đó tính tích phân từng phân thức đơn giản.*

❖ **Chú ý 1: Tách phân thức $\frac{N(x)}{Q(x)}$ với deg$N$<degQ và Q(x) là tích các đa thức bất khả quy ta tuân theo quy luật sau:**

$$\frac{N(x)}{(ax+b)(cx+d)} = \frac{A}{ax+b} + \frac{B}{cx+d}$$

$$\frac{N(x)}{(ax+b)(cx+d)(mx+n)} = \frac{A}{ax+b} + \frac{B}{cx+d} + \frac{C}{mx+n}$$

$$\frac{N(x)}{(ax+b)^2(cx+d)} = \frac{A}{ax+b} + \frac{B}{(ax+b)^2} + \frac{C}{cx+d}$$

$$\frac{N(x)}{(ax+b)(x^2+px+q)} = \frac{A}{ax+b} + \frac{Bx+C}{x^2+px+q}$$

$$\frac{N(x)}{(cx+d)^2(x^2+px+q)^2} = \frac{A}{cx+d} + \frac{B}{(cx+d)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+px+q} + \frac{Ex+F}{(x^2+px+q)^2}$$

❖ **Chú ý 2:** *Cách tích phân 4 loại hàm phân thức đơn giản*

❑ *Dạng 1:* $A = \int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} ln|ax+b| + C$

❑ *Dạng 2:* $B = \int \frac{dx}{(ax+b)^m} = \int (ax+b)^{-m} dx = \frac{(ax+b)^{-m+1}}{a(-m+1)} + C, (m \neq 1)$

❑ *Dạng 3:* $F = \int \frac{mx+k}{x^2+px+q} dx \left(\Delta = p^2 - 4q < 0\right)$

Biến đổi $x^2 + px + q = (x + \frac{p}{2})^2 - \frac{\Delta}{4} = (x + \frac{p}{2})^2 - \frac{\Delta}{4}$

$= (x + \frac{p}{2})^2 + A^2$ *với* $A^2 = -\frac{\Delta}{4}$.

Đổi biến bằng cách đặt $x + \frac{p}{2} = A tant$ *với* $t \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$.

❑ *Dạng 4:* $I = \int \frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}dx, p^2 - 4q < 0$

- *Đặt* $t = x + \frac{p}{2}$ *đưa về dạng:* $I = A.\int \frac{d(t^2+m^2)}{(t^2+m^2)^n} + B.\int \frac{1}{(t^2+m^2)^n}dt$
- *Ta chỉ cần tính:* $I_n = \int \frac{1}{(t^2+m^2)^n}dt$

  Khi $n = 1$: $I_1 = \int \frac{1}{t^2+m^2}dt = \frac{1}{m}\arctan\frac{t}{m} + C$

  Khi $n > 1$: $I_n = \frac{1}{m^2}\left[\int \frac{t^2+m^2}{(t^2+m^2)^n}dt - \int \frac{t^2}{(t^2+m^2)^n}dt\right]$

  $$= \frac{1}{m^2}\left[I_{n-1} - \frac{1}{2}\int \frac{t}{(t^2+m^2)^n}d(t^2+m^2)\right]$$

  Tính riêng $\int \frac{t}{(t^2+m^2)^n}d(t^2+m^2)$ *bằng tp từng phần với:*

  $$\begin{cases} u = t \\ dv = \text{"phần còn lại"} \end{cases}$$

- *Ta sẽ tìm được công thức truy hồi cho* I_n.

VD1. Tính tích phân bất định $I = \int \frac{x^3-x^2-x+4}{x^2-x-2}dx$

Giải

Chia đa thức sẽ phân tách được

$$\begin{array}{r|l} x^3 - x^2 - x + 4 & x^2 - x - 2 \\ -\quad x^3 - x^2 - 2x & \hline \mathbf{x} \\ \hline x + 4 & \end{array}$$

$$I = \int (x + \frac{x+4}{x^2-x-2})dx$$

$$= \int \left(x + \frac{x+4}{(x-2)(x+1)}\right)dx.$$ Phân tích: $\frac{x+4}{(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1}$

Ta có: $A = \left.\frac{x+4}{x+1}\right|_{x=2} = 2;\quad B = \left.\frac{x+4}{x-2}\right|_{x=-1} = -1$

Ta được $I = \int (x + \frac{2}{x-2} - \frac{1}{x+1})dx = \frac{x^2}{2} + 2\ln|x-2| - \ln|x+1| + C$

$$= \frac{x^2}{2} + \ln|x-2|^2 - \ln|x+1| + C = \frac{x^2}{2} + \ln\left|\frac{(x-2)^2}{x+1}\right| + C.$$

VD2. Tính tích phân bất định $I = \int \frac{x^3 - x + 3}{x^3 - 3x + 2} dx$

Giải

Chia đa thức sẽ phân tách được:

$$I = \int \left(1 + \frac{2x+1}{x^3 - 3x + 2}\right) dx$$

$$\begin{array}{r|l} x^3 \quad - x + 3 & x^3 - 3x + 2 \\ - \; x^3 - 3x + 2 & \overline{\mathbf{1}} \\ \hline 2x + 1 & \end{array}$$

Nhẩm nghiệm của mẫu là các ước nguyên của 2 ta thấy $x = 1$, x=-2 là nghiệm. Ta chia đa thức $x^3 - 3x + 2$ cho x-1 và x+2:

	1	0	-3	2
$x = 1$	1	1	-2	0
$x = -2$	1	-1	0	

$$I = \int \left(1 + \frac{2x+1}{(x-1)^2(x+2)}\right) dx$$

Phân tích: $\dfrac{2x+1}{(x-1)^2(x+2)} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{(x-1)^2} + \dfrac{C}{x+2}$

$$B = \frac{2x+1}{x+2}\bigg|_{x=1} = 1; \quad C = \frac{2x+1}{(x-1)^2}\bigg|_{x=-2} = -\frac{1}{3}.$$

$$\Rightarrow \frac{2x+1}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{-1/3}{x+2} \qquad (*)$$

Cho x=0 thế vào (*) được $\dfrac{1}{2} = -A + 1 - \dfrac{1}{6} \Rightarrow A = \dfrac{1}{3}.$

Ta được $I = \int \left(1 + \frac{1/3}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{-1/3}{x+2}\right) dx$

$$= x + \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{3}\ln|x+2| + C$$

$$= x + \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right| - \frac{1}{x-1} + C.$$

VD3. Tính tích phân bất định $A = \int \frac{3x+1}{x^2+2x+5}dx$

Giải

$$A = \int \frac{3x+1}{(x+1)^2+4}dx = \int \frac{3x+1}{(x+1)^2+2^2}dx$$

Đặt $x+1=2tant$ *với* $t \in (-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$

$$\Rightarrow x = 2\tan t - 1 \Rightarrow dx = 2(1+tan^2 t)dt$$

$$A = \int \frac{3(2\tan t-1)+1}{(2tant)^2+4}.2(1+tan^2 t)dt = \int \frac{6\tan t-2}{4tan^2 t+4}.2(1+tan^2 t)dt$$

$$= \int \frac{2(3\tan t-1)}{4(tan^2 t+1)}.2(1+tan^2 t)dt = \int (3\tan t - 1)dt$$

$$= 3\int tant\, d\,t - \int dt = -3\,ln|cos\,t| - t + C$$

Vì $x+1=2tant \Rightarrow tant = \frac{x+1}{2} \Rightarrow t = arctan(\frac{x+1}{2})$

$$A = -\,ln\left|cos[arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)]\right| - arctan(\frac{x+1}{2}) + C.$$

VD4. Tính tích phân bất định $A=\int \frac{x}{(x^2+2x+2)^2}dx$.

Giải

$A=\int \frac{x}{[(x+1)^2+1]^2}dx$ Đặt: $t=x+1 \Rightarrow x=t-1 \Rightarrow dx=dt$. Khi đó

$$A=\int \frac{t-1}{(t^2+1)^2}dt=\int \frac{t}{(t^2+1)^2}dt-\int \frac{1}{(t^2+1)^2}dt$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{2t}{(t^2+1)^2}dt-\int \frac{1}{(t^2+1)^2}dt=\frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+1)}{(t^2+1)^2}-\int \frac{1}{(t^2+1)^2}dt$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+1)}{(t^2+1)^2}-\int \frac{1}{(t^2+1)^2}dt=-\frac{1}{2(t^2+1)}-\mathbf{I_2} \qquad \mathbf{(1)}$$

Ta tính $\mathbf{I_2}=\int \frac{1}{(t^2+1)^2}dt=\int \frac{t^2+1-t^2}{(t^2+1)^2}dt=\int \frac{t^2+1}{(t^2+1)^2}dt-\int \frac{t^2}{(t^2+1)^2}dt$

$$\mathbf{I_2} = \int \frac{1}{t^2+1}dt - \frac{1}{2}\int \frac{2t.t}{(t^2+1)^2}dt = \int \frac{1}{t^2+1}dt - \frac{1}{2}\int \frac{t.d(t^2+1)}{(t^2+1)^2}.$$

Đặt: $\begin{cases} \mathbf{I_1} = \int \frac{1}{t^2+1}dt \\ \mathbf{B} = \int \frac{t.d(t^2+1)}{(t^2+1)^2} \end{cases}$ ta được $\mathbf{I_2} = \boldsymbol{I_1} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}.\boldsymbol{B}$ **(2)**

Thế **(2)** vào (1) $\Rightarrow A = -\frac{1}{2(t^2+1)} - (I_1 - \frac{1}{2}B)$ **(3)**

Tính: $\mathbf{B} = \int \frac{t.d(t^2+1)}{(t^2+1)^2}$ Đặt: $\begin{cases} u = t \\ dv = \frac{d(t^2+1)}{(t^2+1)^2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} du = dt \\ v = \int \frac{d(t^2+1)}{(t^2+1)^2} = -\frac{1}{t^2+1} \end{cases}$

$$\mathbf{B} = -\frac{t}{t^2+1} + \int \frac{dt}{t^2+1} = -\frac{t}{t^2+1} + I_1 \qquad (4)$$

Từ **(4)** và (3) $\Rightarrow A = -\frac{1}{2(t^2+1)} - (I_1 - \frac{1}{2}B) = -\frac{1}{2(t^2+1)} - I_1 + \frac{1}{2}(-\frac{t}{t^2+1} + I_1)$

$$= -\frac{1+t}{2(t^2+1)} - \frac{1}{2}I_1 = -\frac{1+t}{2(t^2+1)} - \frac{1}{2}\arctan t + C \text{ (thay t=x+1....)}$$

b) Tích phân hàm lượng giác:

❑ **DẠNG:** $I = \int f(sinx, cosx)\, dx$

(với f(u,v) là hàm phân thức hữu tỷ hai biến u,v).

❑ **CÁCH GIẢI TỔNG QUÁT:**

- Đặt $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \; (-\pi < x < \pi) \Rightarrow dt = \frac{1}{2}\left(1 + t^2\right)dx, dx = \frac{2}{1+t^2}dt$
- *ADCT* $sinx = \frac{2t}{1+t^2}, cosx = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ *chuyển về tích phân hàm hữu tỷ:*

$$I = \int f\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt.$$

❑ **Chú ý:** Cách tổng quát sẽ luôn giúp ta chuyển tích phân lượng giác về tích phân hàm phân thức hữu tỷ. Tuy nhiên, gặp hàm phân thức hữu tỷ có bậc tử và bậc mẫu cao thì việc giải sẽ mất rất nhiều thời gian. Do đó có cách giải riêng, ngắn gọn cho một vài trường hợp đặc biệt sau đây.

❖ Cách giải các tích phân lượng giác dạng đặc biệt:

❑ **DẠNG 1:** f là hàm lẻ theo sin:

$$f(-\sin x, \cos x) = -f(\sin x, \cos x) \text{ đặt } t = \cos x.$$

❑ **DẠNG 2:** f là hàm lẻ theo cos:

$$f(\sin x, -\cos x) = -f(\sin x, \cos x) \text{ đặt } t = sinx.$$

❑ **DẠNG 3:** f chẵn theo sin-cos:

$$f(-\sin x, -\cos x) = f(\sin x, \cos x) \text{ đặt } t = tanx.$$

❑ **DẠNG 4:** $\boldsymbol{I} = \int \frac{\boldsymbol{asin\,x+bcosx}}{\boldsymbol{msinx+ncosx}} dx$. Tìm các hằng số A, B sao cho:

$$\frac{asin\,x+bcosx}{msinx+ncosx} = A + B\,\frac{(msin\,x+ncosx)'}{msinx+ncosx}$$

Khi đó: $\boldsymbol{I} = \int \left(A + B\,\frac{(msin\,x+ncosx)'}{msinx+ncosx}\right) dx = \mathrm{Ax} + \mathrm{B}\int \frac{\mathrm{d}((msin\,x+ncosx)}{\mathrm{msinx+ncosx}}$

$$= \mathrm{Ax} + \mathrm{B.\,ln}|\mathrm{msinx} + \mathrm{ncosx}|$$

❑ DẠNG 5: Biến tích thành tổng

$$a)\int \cos(mx).\cos(nx)\,dx = \frac{1}{2}\int [co\, s(mx - nx) + \cos(mx + nx)]dx$$

$$b)\int \sin(mx).cos(nx)\,dx = \frac{1}{2}\int [\sin(\mathrm{mx} - \mathrm{nx}) + \sin(mx + nx)]dx$$

$$c)\int \sin(mx).\sin(nx)\,dx = \frac{1}{2}\int [co\, s(mx - nx) - \cos(mx + nx)]dx$$

VD1. Tính tích phân bất định $I = \int \frac{dx}{3\sin x + 4\cos x + 5}$

Giải

Đặt $t = \tan(\frac{x}{2}),\ x \in (-\pi, \pi) \Rightarrow x = 2.\arctan t \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

ADCT $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, ta có:

$$I = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3\frac{2t}{1+t^2} + 4\frac{1-t^2}{1+t^2} + 5} = 2\int \frac{dt}{6t + 4(1-t^2) + 5(1+t^2)}$$

$$= 2\int \frac{dt}{t^2 + 6t + 9} = 2\int \frac{d(t+3)}{(t+3)^2} = \frac{-2}{t+3} + C = \frac{-2}{\tan(\frac{x}{2}) + 3} + C.$$

VD2. Tính tích phân bất định $I = \int \sin^3 x \cos^8 x\, dx$.

NX: *Xét hàm* $f(\sin x, \cos x) = \sin^3 x \cos^8 x$, *ta thấy:*

$$f(-\sin x, \cos x) = (-\sin x)^3 \cos^8 x = -\sin^3 x \cos^8 x$$

$$= -f(\sin x, \cos x)$$ *nên* f *là hàm lẻ theo* $\sin x$.

Giải

Đặt $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx \Rightarrow \sin x dx = -dt.$

$$I = \int \sin^2 x \cos^8 x . \sin x dx = \int \left(1 - \cos^2 x\right) \cos^8 x . \sin x dx$$

$$= -\int (1 - t^2) t^8 dt = -\int (t^8 - t^{10})\, dt$$

$$= -\left(\frac{t^9}{9} - \frac{t^{11}}{11}\right) + C = -\frac{\cos^9 x}{9} + \frac{\cos^{11} x}{11} + C.$$

VD3. Tính tích phân bất định $I = \int \frac{dx}{\cos x}$.

Giải

Hàm $\frac{1}{\cos x}$ lẻ theo cosx nên ta đặt $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x.\, dx$

$$I = \int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\cos x .\, dx}{1 - \sin^2 x}$$

$$= \int \frac{dt}{1 - t^2} = \int \frac{dt}{(1+t)(1-t)} = \frac{1}{2} \int \frac{1 - t + 1 + t}{(1+t)(1-t)} dt$$

$$= \frac{1}{2} \int \left[\frac{1 - t}{(1+t)(1-t)} + \frac{1 + t}{(1+t)(1-t)}\right] dt = \frac{1}{2} \left(\int \frac{dt}{1+t} + \int \frac{dt}{1-t} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} \right| + C = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C.$$

VD4. Tính tích phân bất định $I = \int \frac{2\sin x+3\cos x}{\sin^2 x.\cos x+9\cos^3 x} dx$

NX: *Xét hàm* $f(\sin x, \cos x) = \frac{2\sin x+3\cos x}{\sin^2 x\cos x+9\cos^3 x}$ *ta thấy:*

$$f(-\sin x, -\cos x) = \frac{2(-\sin x)+3(-\cos x)}{(-\sin x)^2(-\cos x)+9(-\cos x)^3} = \frac{2\sin x+3\cos x}{\sin^2 x.\cos x+9\cos^3 x}$$

$$= f(\sin x, \cos x) \text{ nên } f \text{ chẵn theo } \sin x, \cos x.$$

Giải

Đặt $t = \tan x \Rightarrow dt = \frac{dx}{\cos^2 x}$

Ta có: $\frac{2\sin x + 3\cos x}{\sin^2 x.\cos x + 9\cos^3 x} dx = \frac{2\frac{\sin x}{\cos^3 x} + 3\frac{\cos x}{\cos^3 x}}{\frac{\sin^2 x.\cos x}{\cos^3 x} + 9\frac{\cos^3 x}{\cos^3 x}} dx$

$$= \frac{2\frac{\sin x}{\cos x}.\frac{1}{\cos^2 x} + 3\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 9} dx = \frac{2\tan x + 3}{\tan^2 x + 9}.\frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{2t+3}{t^2+9} dt$$

$$I = \int \frac{2t+3}{t^2+9}\,dt \;\; = \int \frac{2t}{t^2+9}\,dt + \int \frac{3}{t^2+3^2}\,dt$$

$$= \int \frac{d(t^2+9)}{t^2+9} + 3\int \frac{1}{t^2+3^2}\,dt$$

$$= \ln(t^2+9) + \arctan\frac{t}{3} + C$$

$$= \ln(\tan^2 x + 9) + \arctan\frac{\tan x}{3} + C$$

VD4. Tính tích phân bất định $I = \int \tan^4 x\, dx$.

NX: *Dễ thấy hàm* $\tan^4 x = \dfrac{\sin^4 x}{\cos^4 x}$ *là hàm chẵn theo sinx và cosx.*

Giải

Đặt $t = \tan x \Rightarrow dt = \left(1 + \tan^2 x\right)dx$

$$I = \int \tan^4 x\, dx = \int \frac{\tan^4 x}{1 + \tan^2 x}\left(1 + \tan^2 x\right)dx$$

$$= \int \frac{t^4}{1 + t^2}dt = \int \frac{(t^4 - 1) + 1}{1 + t^2}dt = \int \left(t^2 - 1 + \frac{1}{1 + t^2}\right)dt$$

$$= \frac{1}{3}t^3 - t + \arctan t + C$$

VD5. Tính tích phân bất định $I = \int \frac{7\sin x + \cos x}{3\sin x - \cos x}dx$.

Giải

Ta tìm các hằng số A, B sao cho:

$$\frac{7\sin x + 1\cos x}{3\sin x - \cos x} = A + \frac{B(3\sin x - \cos x)'}{3\sin x - \cos x}$$

$$= A + \frac{B(3\cos x + \sin x)}{3\sin x - \cos x}$$

$$= \frac{A(3\sin x - \cos x) + B(3\cos x + \sin x)}{3\sin x - \cos x}$$

$$= \frac{(3A + B)\sin x + (3B - A)\cos x}{3\sin x - \cos x}$$

Đồng nhất hệ số theo sinx và cosx được: $\begin{cases} 3A + B = 7 \\ 3B - A = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = 1 \end{cases}.$

$$I = \int \frac{7\sin x + \cos x}{3\sin x - \cos x}dx = \int \left[2 + \frac{(3\text{sinx} - \cos x)'}{3\text{sinx} - \cos x}\right]dx$$

$$= \int 2dx + \int \frac{d(3\text{sinx} - \cos x)}{3\text{sinx} - \cos x}$$

$$= 2x + \ln|3\sin x - \cos x| + C$$

VD6. Tính tích phân bất định $I = \int \sin 3\boldsymbol{x} \cos \boldsymbol{x}\, \mathrm{d}\boldsymbol{x}$

Giải

$$\text{I}= \frac{1}{2}\int(\sin(3\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}) + \sin(3\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}))\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \frac{1}{2}\int(sin2x + sin4x)\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{-cos2\boldsymbol{x}}{2} - \frac{cos4\boldsymbol{x}}{4}\right) + \text{C}.$$

b) Tích phân hàm vô tỷ:

❑ **DẠNG 1:** $\boldsymbol{I} = \int f\left[x, \sqrt[n]{ax+b}\right] dx$. *Đặt* $t=\sqrt[n]{ax+b}$

Ví dụ: Tính $I = \int (\boldsymbol{x}-\mathbf{1}).\sqrt[3]{\mathbf{3}\boldsymbol{x}+\mathbf{1}}\,.dx$

Giải

Đặt $t=\sqrt[3]{\mathbf{3}\boldsymbol{x}+\mathbf{1}} \Rightarrow t^3 = 3x+1 \Rightarrow x = \dfrac{t^3-1}{3} \Rightarrow dx = t^2.dt$

Ta được $I = \int (\frac{t^3-1}{3} - 1).t.t^2dt = \frac{1}{3}\int (t^3-4)t^3\,.dt$

$$= \frac{1}{3}\int (t^6-4t^3)\,.dt = \frac{t^7}{21} - \frac{t^4}{3} + C$$

$$= \frac{\left(\sqrt[3]{3x+1}\right)^7}{21} - \frac{\left(\sqrt[3]{3x+1}\right)^4}{3} + C.$$

❑ **DẠNG 2:** $\boldsymbol{I = \int f\left[x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right] dx}$**, với** $\boldsymbol{a \neq 0, \Delta \neq 0.}$

❑ **CÁCH GIẢI:**

Biến đổi: $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$ đưa về một trong 3 TH:

- **TH1:** $\int f\left[x, \sqrt{A^2 - u^2(x)}\right] dx \xrightarrow{\text{Đặt}} u(x) = A\sin t,\ t \in \left[\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
- **TH2:** $\int f\left[x, \sqrt{A^2 + u^2(x)}\right] dx \xrightarrow{\text{Đặt}} u(x) = A\tan t,\ t \in \left(\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$
- **TH3:** $\int f\left[x, \sqrt{u^2(x) - A^2}\right] dx \xrightarrow{\text{Đặt}} u(x) = \frac{A}{\sin t}$

với $t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ *nếu* $u(x) > A$ *và* $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ *nếu* $u(x) < -A$.

❖ ***Chú ý:*** *SV tham khảo thêm Phương pháp đổi biến Euler.*

Ví dụ 1: Tính $I = \int \sqrt{-2x^2 + 4x + 6}\,.dx$

Giải

Ta có $I = \int \sqrt{-2(x-1)^2 + 8}\,.dx = \sqrt{2}.\int \sqrt{4 - (x-1)^2}\,.dx$

Đặt $x - 1 = 2\sin t$, $t \in \left[\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow x = 1 + 2\sin t \Rightarrow dx = 2\cos t\,.dt$

Ta có: $\sqrt{4 - (x-1)^2} = \sqrt{4 - (2\sin t)^2} = \sqrt{4(1 - \sin^2 t)} = 2\sqrt{\cos^2 t}$

$= 2|\cos t| = 2\cos t$ $\left(Do\ t \in \left[\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]\right)$

Ta được $I = 4\sqrt{2}.\int \cos^2 t\, dt = 2\sqrt{2}.\int (1 + \cos 2t)\, dt$

$= 2\sqrt{2}.\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) + C = 2\sqrt{2}.(t + \sin t\cos t) + c$

$= 2\sqrt{2}.\left(\arcsin\frac{x-1}{2} + \frac{x-1}{2}.\frac{\sqrt{4-(x-1)^2}}{2}\right) + C.$

Ví dụ 2: Tính $I = \int \frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{x^2+2x+2}}$

Giải

$$I = \int \frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{(x+1)^2+1}}$$

Đặt $x + 1 = \tan t\,, t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ (1) $\Rightarrow dx = \frac{1}{\cos^2 t}dt$

Ta có $\sqrt{(x+1)^2+1} = \sqrt{\tan^2 t + 1} = \frac{1}{|\cos t|} = \frac{1}{\cos t}$ (2)

$$I = \int \frac{1}{\tan^2 t.\frac{1}{\cos t}} \cdot \frac{1}{\cos^2 t}dt = \int \frac{\cos t}{\sin^2 t}dt = \int \frac{d(\sin t)}{\sin^2 t} = -\frac{1}{\sin t} + C$$

Từ (1) và (2): $\begin{cases} \tan t = x + 1 \\ \cos t = \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}} \end{cases} \Rightarrow \sin t = \tan t\,.\cos t = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$

Do đó $I = -\frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x+1} + C.$

Ví dụ 3: Tính $I = \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$.

Giải

Đặt $x = \sin t, t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ (1) $\Rightarrow dx = \cos t\, dt$

Ta có: $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = |\cos t| = \cos t$ (2)

Do đó $I = \int \frac{\cos t}{\cos^3 t} dt = \int \frac{1}{\cos^2 t} dt = \tan t + C$

Từ (1) và (2) ta có: $\tan t = \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. Vậy $I = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C$.

❑ **DẠNG 3:** $\boldsymbol{I} = \int f\left[x, \sqrt[n]{x}, (\sqrt[n]{x})^2, (\sqrt[n]{x})^3, \ldots, (\sqrt[n]{x})^m\right] dx$. *Đặt* $t=\sqrt[n]{x}$.

Ví dụ: Tính $I = \int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}} dx$

Giải

Đặt $t=\sqrt[4]{x} \Rightarrow x = \mathrm{t}^4 \Rightarrow dx = 4\mathrm{t}^3\mathrm{dt}$.

Ta được $I = \int \frac{1+t}{t^4+t^2}\left(4t^3dt\right) = 4\int \frac{t^2+t}{t^2+1}dt = 4\int \frac{(t^2+1)+t-1}{t^2+1}dt$

$$= 4\int \left(1 + \frac{1}{2}\frac{2t}{t^2+1} - \frac{1}{t^2+1}\right)dt = \int\left(4 + 2.\frac{2t}{t^2+1} - 4.\frac{1}{t^2+1}\right)dt$$

$$= 4t + 2\ln\left(1+t^2\right) - 4\mathrm{arctan}t + C$$

$$= 4\sqrt[4]{x} + 2\ln\left(1+\sqrt{x}\right) - 4\arctan\left(\sqrt[4]{x}\right) + C.$$

❑ **DẠNG 4:** $\boldsymbol{I} = \int f\left[u(x), \sqrt[n]{u(x)}\right] u'(x)\,dx$. *Đặt* $t=\sqrt[n]{u(x)}$

Ví dụ 1: Tính $I = \int x^4.\sqrt[3]{x^5+1}\,.dx$

Giải

Đặt $t=\sqrt[3]{x^5+1} \Rightarrow t^3 = x^5 + 1 \Rightarrow 3t^2.dt=5x^4.dx \Rightarrow x^4.dx = \frac{3}{5}t^2.dt$

Ta được $I = \int \frac{3}{5}t^2.t\,.dt = \frac{3}{5}\int t^3.dt = \frac{3}{5}.\frac{t^4}{4} + C$

$$= \frac{3t^4}{20} + C = \frac{3\left(\sqrt[3]{x^5+1}\right)^4}{20} + C.$$

Ví dụ 2: Tính $I = \int x^4.\sqrt[3]{x^5+1}.dx$

Giải

Biến đổi: $I = \int \dfrac{x^2}{x^3\sqrt{x^3+1}}dx$. Đặt $t=\sqrt{x^3+1} \Rightarrow t^2 = x^3+1$

$$\Rightarrow x^3 = t^2-1 \quad \Rightarrow 3x^2.dx = 2t.dt \quad \Rightarrow x^2.dx = \frac{2}{3}t.dt$$

Ta được: $I = \dfrac{2}{3}\displaystyle\int \dfrac{t}{(t^2-1).t}.dt = \dfrac{2}{3}\int \dfrac{1}{(t^2-1)}.dt = \dfrac{2}{3}\int \dfrac{1}{(t-1)(t+1)}.dt$

$$= \frac{2}{3}\int \frac{1}{2}.\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right).dt = \frac{1}{3}(\ln|t-1| - \ln|t+1|) + c$$

$$= \frac{1}{3}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{x^3+1}-1}{\sqrt{x^3+1}+1}\right| + C.$$

BÀI TẬP VỀ NHÀ

Tính các tích phân bất định sau:

$$A = \int \frac{1+\ln x}{x.\sqrt{1+2.\ln x}} dx$$

$$B = \int (x^3 - x)e^{2x-1} dx$$

$$I = \int x^2.\cos(2x).dx$$

$$D = \int e^{2x}\cos 3x dx$$

$$E = \int \frac{\ln x}{x^3} dx$$

$$F = \int (1 - 2x)\ln 3x \, dx$$