TRƯỜNG ĐẠI HỌC GIAO THÔNG VẬN TẢI THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
KHOA CƠ BẢN – BỘ MÔN TOÁN

BÀI GIẢNG
ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

CHƯƠNG I. MA TRẬN, ĐỊNH THỨC, HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

§2. Định thức

ThS. Đinh Tiến Dũng

NỘI DUNG

1. *Ma trận con ứng với một phần tử.*
2. *Định thức và cách tính.*
3. *Các tính chất của định thức.*

§2. Định thức

I. MA TRẬN CON ỨNG VỚI MỘT PHẦN TỬ:

1. Định nghĩa

Cho ma trận vuông $A=[a_{ij}]_n$ cấp n. Ma trận con ứng với phần tử a_{ij} là ma trận vuông cấp n-1 thu được từ A bằng cách bỏ đi dòng i và cột j. Ký hiệu: M_{ij}.

2. Ví dụ. *Tìm ma trận con ứng với mỗi phần tử của* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$.

$$M_{11} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \quad M_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \quad M_{13} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$M_{21} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \quad M_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \quad M_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$M_{31} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \quad M_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad M_{33} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

II. ĐỊNH THỨC

1. Định nghĩa

Định thức của ma trận vuông A = $[a_{ij}]_n$ cấp n là một số, ký hiệu det(A) hay |A|, được xác định (qui nạp theo n) như sau:

a) Nếu n=1: $A = [a_{11}]$ *thì* $\det(A) = a_{11}$.

b) Nếu n=2: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ *thì* $det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

c) Nếu n=3: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ *thì*

$$det(A) = a_{11}|M_{11}| - a_{12}|M_{12}| + a_{13}|M_{13}|$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{23}a_{32}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12})$$

d) Với n tùy ý: Cho ma trận A=$[a_{ij}]_n$ ta có công thức tổng quát

$$\boxed{det(A) = a_{11}|M_{11}| - a_{12}|M_{12}| + \cdots + (-1)^{1+n}.a_{1n}|M_{1n}|}$$

❖ *Chú ý: Có thể tính định thức theo các cách sau*

- *Tính theo cột 1:*

$$det(A) = a_{11}|M_{11}| - a_{21}|M_{21}| + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n1}|M_{n1}|$$

-Tính theo dòng i:

$$det(A) = (-1)^{i+1}a_{i1}|M_{i1}| + (-1)^{i+2}a_{i2}|M_{i2}| + \cdots + (-1)^{i+n}a_{in}|M_{in}|$$

-Tính theo cột j:

$$det(A) = (-1)^{1+j}a_{1j}|M_{1j}| + (-1)^{2+j}a_{2j}|M_{2j}| + \ldots + (-1)^{n+j}a_{nj}|M_{nj}|$$

❖ ***Chú ý: Cách tính nhanh định thức cấp ba***

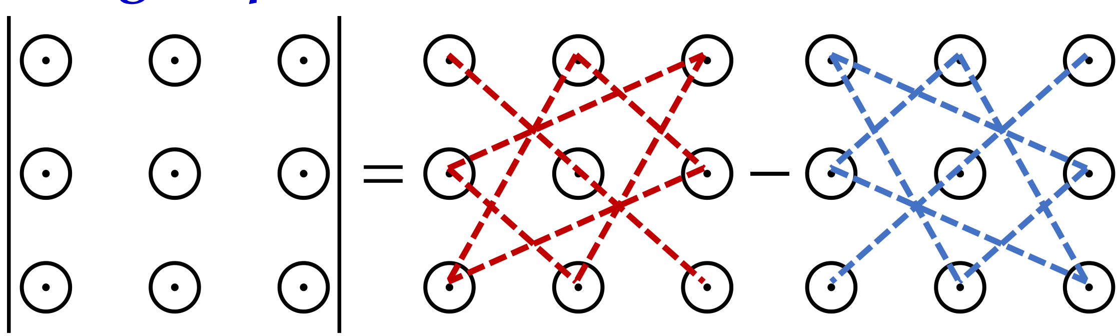
❑ ***Qui tắc Tam giác***

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21})$$

$$-(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{23}a_{32}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12}).$$

Cách nhớ: *(Đường chéo chính + các tam giác chính) – (Đường chéo phụ cộng các tam giác phụ)*



2. Các ví dụ:

❖ *Ví dụ 1:* *Cho ma trận* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. *Tính det(A).*

Giải

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 1.(-3).4 + 2.1.2 + 3.1.0 \; - [3.(-3).2 + 1.1.1 + 4.0.2]$$

$$= (-12 + 4 + 0) - (-18 + 1 + 0) = -8 + 17 = 9$$

❑ *Qui tắc tổng các đường chéo chính trừ tổng các đường chéo phụ*

❖ *Ví dụ 2:* *Cho ma trận* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. *Tính* $det(A)$.

Giải

$$det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{matrix}$$

Ghép thêm 2 cột đầu vào phía sau ma trận

$$= 1.(-3).4 + 2.1.2 + 3.1.0 - [3.(-3).2 + 1.1.1 + 4.0.2]$$

$$= (-12 + 4 + 0) - (-18 + 1 + 0) = -8 + 17 = 9$$

❖ *Ví dụ 3: Tính định thức* $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

Giải

Cách 1: Khai triển theo dòng 1:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} - 0.\begin{vmatrix} 0 & 4 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 0.\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 2((-2+40+0)-(10+0-4)) - 3((0+0-20)-(0+0+0))$$

$$= 2(38-6) - 3(-20) = 64+60 = 124$$

Cách 2: Khai triển theo cột 1:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} - 0 + (-1)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} - 0$$

$$= 2((-2+40+0)-(10+0-4)) - 1((0+0+0)-(60+0+0))$$

$$= 2(38-6) - 1(-60) = 64 + 60 = 124$$

Cách 3: Khai triển theo dòng 4:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 + (-1)^{4+2} 5 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{vmatrix} + 0 + (-1)^{4+4} 1 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 5((16+0+0) - (-12+4+0)) + ((-4+0+0) - (0-8+0))$$

$$= 5.24 + 4 = 124$$

Cách 4: Khai triển theo cột 3:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 + (-1)^{2+3}4\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3}(-2)\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} + 0$$

$$= -4((-2+0-15)-(0+20+0)) - 2((2+0+0)-(0-10+0))$$

$$= -4.(-37) - 24 = 124$$

BÀI TẬP NHÓM

$$\textit{Tính định thức của ma trận } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

ĐÁP ÁN

III. CÁC TÍNH CHẤT CỦA ĐỊNH THỨC

❖ *Tính chất 1:* ***det A = det(A^t).***

❖ *Ví dụ:* *Cho* $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ *suy ra* $A^t=\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$.

$$\textit{Ta có } \det A = ad - bc = \det(A^t).$$

❖ *Tính chất 2*:* ***Nếu đổi chỗ hai dòng (cột) bất kỳ của ma trận vuông thì định thức đổi dấu.***

❖ *Ví dụ:*

$$\left.\begin{array}{l} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \\ \\ \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = bc - ad \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}.$$

❖ ***Tính chất 3*:*** ***Nếu nhân một dòng (cột) nào đó của ma trận vuông A với một số k thì ta thu được ma trận mới mà định thức của nó bằng định thức của ma trận A nhân với k.***

❖ **Ví dụ:** $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

$$\begin{vmatrix} ka & kb \\ c & d \end{vmatrix} = kad - kbc = k(ad - bc) = k\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{vmatrix} = k^2ad - k^2bc = k^2(ad - bc) = k^2\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

❖ **Nhận xét:**

- *Do đó det(kA)= k^n. det (A) (với A là ma trận vuông cấp n).*
- *Khi các phần tử của một hàng (cột) có thừa số chung thì có thể đưa thừa số chung đó ra ngoài.*

❖ **Ví dụ:** $\begin{vmatrix} ka & kb \\ c & d \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

❖*Tính chất 4:*

Định thức có một dòng (cột) gồm toàn số 0 thì bằng 0.

❖**Ví dụ:** $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0,$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

❖*Tính chất 5: Định thức có hai dòng (cột) giống nhau hoặc tỉ lệ thì bằng 0.*

❖**Ví dụ:** $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0,\quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0,$

❖*Tính chất 6*: *Nếu các phần tử của một hàng (cột) thứ i có dạng tổng của hai số hạng thì định thức phân tích được thành tổng của hai định thức trong đó hàng (cột) thứ i của mỗi định thức được lấy từ các số hạng tương ứng còn các hàng (cột) khác thì giữ nguyên.*

❖**Ví dụ:** $\begin{vmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c & d \end{vmatrix} = (a_1 + a_2)d - c(b_1 + b_2)$

$$= a_1 d + a_2 d - b_1 c - b_2 c$$

$$= (a_1 d - b_1 c) + (a_2 d - b_2 c)$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ c & d \end{vmatrix}.$$

❖*Tính chất 7:* *Nếu định thức có một hàng (cột) là tổ hợp tuyến tính của các hàng (cột) khác thì định thức bằng 0.*

❖*Ví dụ:*

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -6 & 7 \\ 2k+5l & 3k-6l & 4k+7l \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -6 & 7 \\ 2k & 3k & 4k \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -6 & 7 \\ 5l & -6l & 7l \end{vmatrix} \quad \text{(Theo Tính chất 6)}$$

$$= k\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} + l\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -6 & 7 \\ 5 & -6 & 7 \end{vmatrix} \quad \text{(Theo Tính chất 3)}$$

$$= k.0 + l.0 = 0 \quad \text{(Theo Tính chất 5)}$$

❖*Tính chất 8*: Nếu ta nhân một hàng (cột) với một số thực k bất kỳ rồi cộng vào một hàng (cột) khác thì giá trị của định thức không thay đổi.*

❖*Ví dụ:*

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c+ka & d+kb \end{vmatrix} = a(d+kb) - b(c+ka)$$

$$= ad + kab - bc - kab$$

$$= ad - bc = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Do đó $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c+ka & d+kb \end{vmatrix}$.

❖ *Tính chất 9:* $$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}.$$

❖ ***Tính chất 10:*** *Cho A, B là các ma trận vuông cùng cấp. Khi đó:*

$$\det(A.B) = \det(A).\det(B) \text{ và } \det(A^n) = (\det A)^n .$$

❖ *Chú ý: Các tính chất: 2, 3, 8 gọi là các phép biến đổi sơ cấp và có thể dùng để tính định thức:*

- *Đổi chỗ hai dòng (cột) cho nhau → Định thức đổi dấu.*
- *Nhân một dòng (cột) với một số k khác 0 → Định thức tăng lên k lần.*
- *Nhân một dòng (cột) với một số k rồi cộng ngay vào dòng (cột) khác → Định thức không đổi.*

❖ *Ví dụ:* *Tính định thức của ma trận:* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Giải:

$$det(A) \xrightarrow[\substack{2d_1+d_3 \to d_3 \\ -4d_1+d_4 \to d_4}]{-3d_1+d_2 \to d_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 4 & -11 \\ 0 & 6 & -1 & 7 \\ 0 & -9 & 6 & -11 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} -5 & 4 & -11 \\ 6 & -1 & 7 \\ -9 & 6 & -11 \end{vmatrix}$$

$$= (-55 - 252 - 396) - (-99 - 210 - 264)$$

$$= -130.$$

❖ *Ví dụ: Tính định thức:* $B = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$.

Giải:

$$B = \begin{vmatrix} x+3 & x+3 & x+3 & x+3 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$$ *(cộng d_2, d_3, d_4 vào d_1)*

$$= (x+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix} \overset{\substack{-d1+d4\to d4 \\ -d1+d2\to d2 \\ -d1+d3\to d3}}{=} (x+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix}$$

$$= (x+3).1.(x-1).(x-1).(x-1) = (x+3)(x-1)^3.$$

BÀI TẬP NHÓM

Vận dụng định nghĩa và tính chất để tính định thức của ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

ĐÁP ÁN

BÀI TẬP VỀ NHÀ

Câu 1: Cho các ma trận: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$. Tính det(A), det($A^t$), det($A^{10}$).

Câu 2: Tính định thức: $\begin{vmatrix} m & 1 & 0 & 0 \\ 1 & m & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \mathrm{m} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & m \end{vmatrix}$. *ĐS:* $m^4 + m^2 + 1$.

Câu 3: Giải phương trình: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & x \\ 4 & 9 & 16 & x^2 \\ 8 & 27 & 64 & x^3 \end{vmatrix} = 0$

Câu 4: Cho ma trận: $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$. Tìm det($A^2$).