TRƯỜNG ĐẠI HỌC GIAO THÔNG VẬN TẢI THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

KHOA CƠ BẢN – BỘ MÔN TOÁN

BÀI GIẢNG
ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

CHƯƠNG II. KHÔNG GIAN VECTƠ

§2. Cơ sở, số chiều và tọa độ trong không gian vectơ

ThS. Đinh Tiến Dũng

NỘI DUNG

1. *Sự độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính.*
2. *Hạng của một hệ vectơ.*
3. *Cơ sở và số chiều của không gian.*
4. *Cách tìm cơ sở và số chiều của một không gian vectơ.*
5. *Tọa độ trong không gian vectơ*

§2. Cơ sở, số chiều và tọa độ trong không gian vectơ

I. SỰ ĐỘC LẬP TUYẾN TÍNH (đltt), PHỤ THUỘC TUYẾN TÍNH (pttt)

1) Định nghĩa

Trong không gian vectơ V, cho hệ vectơ $S = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$.

- *Hệ vectơ S gọi là đltt nếu với bộ số thực bất kỳ* $x_1, x_2, \dots, x_n$ *làm thỏa mãn đẳng thức* $x_1u_1 + x_2u_2 + \cdots + x_nu_n = 0$ *thì* $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$.
- *Hệ vectơ S gọi là pttt nếu nó không đltt.*

❖ **Chú ý:**

- *Trong* R^2, *hai vectơ cùng phương là 2 vetor pptt; hai vetor không cùng phương là 2 vectơ đltt.*
- *Trong* R^3, *ba vectơ đồng phẳng là 3 vetor pptt; ba vetor không đồng phẳng là 3 vectơ đltt.*

2) Định lý 1

Nếu trong hệ vecto $S = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ có một vecto biểu thị tuyến tính được qua $n-1$ vecto còn lại của hệ thì S phụ thuộc tuyến tính.

Chứng minh: Không mất tính tổng quát, giả sử u_n biểu thị tuyến tính được qua $n-1$ vecto còn lại, tức là tồn tại bộ số thực $x_1,\ x_2, \dots, x_{n-1}$:

$$u_n = x_1u_1 + x_2u_2 + \cdots + x_{n-1}u_{n-1}$$

$$\Rightarrow x_1u_1 + x_2u_2 + \cdots + x_{n-1}u_{n-1} - 1.u_n = 0 \quad (*)$$

Khi đó đẳng thức (*) thỏa mãn với $x_n = -1 \neq 0$ nên hệ S pttt.

2) Định lý 2 (tương đương định nghĩa)

Trong không gian vecto V, cho hệ vecto $S = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$.

- *Hệ S đltt nếu hệ phương trình $x_1u_1 + x_2u_2 + \cdots + x_nu_n = 0$ có nghiệm duy nhất nghiệm tầm thường $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$.*
- *Hệ S pttt nếu hệ phương trình $x_1u_1 + x_2u_2 + \cdots + x_nu_n = 0$ có nghiệm không tầm thường $(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq (0,0,\dots,0)$.*

❖ **VD1: Trong R^2, xét sự độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính của hệ các hệ vectơ:**

a) $S = \{u_1 = (2;3);\ u_2 = (5,-4)\}$; b) $U = \{u_1 = (2;3);\ u_2 = (4,6)\}$

Giải

a) Xét hệ $x_1 u_1 + x_2 u_2 = 0$

$\Leftrightarrow x_1(2;3) + x_2(5;-4) = (0;0)$

$\Leftrightarrow (2x_1 + 5x_2; 3x_1 - 4x_2) = (0;0)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 0 \\ 3x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases}$

$\det\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = -23 \neq 0$ nên hệ phương trình có duy nhất nghiệm tầm thường $x_1 = x_2 = 0$. Vậy S đltt.

b) xét hệ $x_1 u_1 + x_2 u_2 = 0$

$\Leftrightarrow x_1(2;3) + x_2(4;6) = (0;0)$

$\Leftrightarrow (2x_1 + 4x_2; 3x_1 + 6x_2) = (0;0)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 = 0 \end{cases}$

$\det\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = 0$ nên hệ phương trình có nghiệm không tầm thường $(x_1, x_2) \neq (0{,}0)$. Vậy U pttt.

3) Định lý 3

Trong kgvt R^n *cho hệ vectơ S có* $\mathbf{n}$ *vectơ* $\begin{cases} u_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}) \\ u_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ u_n = (a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn}) \end{cases}.$

Gọi $A = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \cdots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ *là ma trận dòng toạ độ của hệ S.*

Khi đó:

- *S độc lập tuyến tính* $\Leftrightarrow \mathbf{det}(A) \neq \mathbf{0}$.
- *S phụ thuộc tuyến tính* $\Leftrightarrow \mathbf{det}(A) = \mathbf{0}$.

❖**Ví dụ: Xét sự đltt và pttt của các họ vectơ sau:**

a) $U=\{u_1=(2;-3;5);\ u_2=(-4,1,7);\ u_3=(1,-4,11)\}$;

b) $S=\{v_1=(1,2,-4,3); v_2=(2,-1,5,6); v_3=(-3,7,6,9); v_4=(8,1,3,0)\}$.

Giải

a) Đặt $A=\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -4 & 1 & 7 \\ 1 & -4 & 11 \end{bmatrix}$.

Ta thấy $\det(A)=0$ nên U pptt.

b) Đặt $B=\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 \\ 2 & -1 & 5 & 6 \\ -3 & 7 & 6 & 9 \\ 8 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

Ta thấy $\det(B)=2976\neq 0$ nên S độc lập tuyến tính.

❖ *Hệ quả*

- ***Nếu trong hệ S có chứa vectơ-không thì hệ S pttt.***
- ***Nếu trong hệ S có một bộ phận của hệ pttt thì hệ S pttt.***
- ***Nếu hệ S chỉ chứa một vectơ khác vectơ-không thì S đltt.***

❖ **VD: Trong R^3:**

- S= $\{u_1 = (1;2;3);\ u_2 = (4,5;6); u_3 = (0;0;0)\}$ là hệ pptt vì: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$
- Xét hệ U= $\{u_1 = (1;2;3);\ u_2 = (2,4;6); u_3 = (1;0;-1\}$, ta thấy: $u_2 = 2u_1$ nên bộ phận 2 vectơ $\{u_1 = (1;2;3);\ u_2 = (2,4;6)\}$ pptt. Khi đó u_2 biểu thị tuyến tính được qua các vectơ còn lại: $u_2 = 2.u_1 + 0.u_3$ nên theo Định lý 1 ta kết luận U pttt.
- T= $\{u_1 = (1;2;3)\}$ chỉ chứa một vectơ khác vectơ-không nên nó đltt.

II. HẠNG CỦA MỘT HỆ VECTƠ

1) Định nghĩa

Cho S là một họ vectơ trong không gian vectơ V. Khi đó, hạng của S là số tối đa vectơ độc lập tuyến tính có thể lấy ra từ họ S.

Ký hiệu: rank(S) hoặc r(S).

❖ ***Nhận xét:***

Nếu rank(S)=r thì trong S có họ gồm r vectơ độc lập tuyến tính và bất kỳ họ vectơ nào có nhiều hơn r vectơ trong S đều phụ thuộc tuyến tính.

2) Định lý

Cho S là một họ vecto trên không gian vecto V. Khi đó:

a) S độc lập tuyến tính $\Leftrightarrow \boldsymbol{rank}(\boldsymbol{S}) = |\boldsymbol{S}|$.

b) S phụ thuộc tuyến tính $\Leftrightarrow \boldsymbol{rank}(\boldsymbol{S}) < |\boldsymbol{S}|$.

(trong đó, ký hiệu |S| để chỉ số vecto của hệ S)

c) Nếu S là hệ có m vecto đã cho toạ độ

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}_1 = (\boldsymbol{a}_{11}, \boldsymbol{a}_{12}, \dots, \boldsymbol{a}_{1n}) \\ \boldsymbol{u}_2 = (\boldsymbol{a}_{21}, \boldsymbol{a}_{22}, \dots, \boldsymbol{a}_{2n}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ \boldsymbol{u}_m = (\boldsymbol{a}_{m1}, \boldsymbol{a}_{m2}, \dots, \boldsymbol{a}_{mn}) \end{cases} \text{ thì rank(S)=rank} \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_{11} & \boldsymbol{a}_{12} & \cdots & \boldsymbol{a}_{1n} \\ \boldsymbol{a}_{21} & \boldsymbol{a}_{22} & \cdots & \boldsymbol{a}_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \boldsymbol{a}_{m1} & \boldsymbol{a}_{m2} & \cdots & \boldsymbol{a}_{mn} \end{bmatrix}.$$

❖*Nhận xét: Trong* R^n *hệ nào chứa nhiều hơn n vecto đều pttt.*

❖**VD1: Trong $\mathbb{R}^4$, xét sự đltt hay pttt của hệ vectơ**
$S = \{(-1; -2; 3; -3), (2; -1; 0; -2), (2; 4; -1; 3)\}$.

Giải. Xét ma trận dòng toạ độ:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \\ 2 & 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[2d1+d3\to d3]{2d1+d2\to d2} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & -5 & 6 & -8 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

Ta có rank(S)=rank(A)=3=|S|. Vậy S là hệ đltt.

❖ **VD2: Trong $\mathbb{R}^4$, xét sự đltt hay pttt của hệ vectơ**
U= $\{(1;2;-1;1),(2;-1;3;0),(3;1;2;1)\}$.

Giải. Xét ma trận dòng toạ độ:

$$B=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 3 & 0\\ 3 & 1 & 2 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow[-3d1+d3\to d3]{-2d1+d2\to d2}\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 1\\ 0 & -5 & 5 & -2\\ 0 & -5 & 5 & -2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-d2+d3\to d3}\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 1\\ 0 & -5 & 5 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Ta có rank(U)=rank(B)=2<|U|. Vậy U là hệ pttt.

III. CƠ SỞ VÀ SỐ CHIỀU CỦA KHÔNG GIAN

1) Định nghĩa

Cho V là một không gian vectơ trên R. Khi đó:

- *V gọi là không gian vectơ* **n** *chiều nếu trong V tồn tại ít nhất một họ gồm n vectơ độc lập tuyến tính và mọi họ có nhiều hơn* **n** *vectơ đều phụ thuộc tuyến tính. Ký hiệu: dim(V).*
- *Nếu* $\dim(\boldsymbol{V}) = \boldsymbol{n}$ *thì mỗi họ gồm* **n** *vectơ đltt trong V được gọi là một cơ sở của không gian vectơ V.*

2) Định lý 1

Cho V là một không gian vectơ trên R. Hệ vectơ S là một cơ sở của V khi và chỉ khi S là hệ sinh của V (tức là V=span(S)) và S độc lập tuyến tính.

3) Định lý 2

Hệ vectơ $\boldsymbol{E} = \{\boldsymbol{e_1} = (1, 0, \dots, 0); \boldsymbol{e_2} = (0, 1, 0, \dots, 0); \dots; \boldsymbol{e_n} = (0, \dots, 0, 1)\}$ là một cơ sở của $\boldsymbol{R^n}$ do đó $\boldsymbol{dimR^n = n}$. Ngoài ra, E gọi là cơ sở chính tắc của $\boldsymbol{R^n}$.

Chứng minh:

Lấy bất kỳ $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{R^n}$ *thì* $\boldsymbol{u}$ *có dạng:* $\boldsymbol{u = (x_1, x_2, \dots, x_n)}$ *với* $\boldsymbol{x_1, x_2, \dots, x_n} \in \boldsymbol{R}$.

$$\Rightarrow \boldsymbol{u} = (x_1, 0, \dots, 0) + (0, x_2, 0, \dots, 0) + \dots + (0, 0, \dots, 0, x_n)$$
$$= x_1(1, 0, \dots, 0) + x_2(0, 1, 0, \dots, 0) + \dots + x_n(0, 0, \dots, 0, 1)$$
$$= x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_ne_n .$$

Vậy mọi vectơ trong $\boldsymbol{R^n}$ *đều biểu thị tuyến tính được qua hệ vectơ E nên E là một hệ sinh của* $\boldsymbol{R^n}$. *(1)*

Xét ma trận: $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \dots \dots 0 \\ 0 & 1 & 0 \dots \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots \dots \dots \dots .\, . \\ 0 & 0 & 0 \dots \dots 1 \end{bmatrix}$. *Ta thấy* $\det(A) = 1 \neq \boldsymbol{0} \Rightarrow$ *E đltt.* *(2)*

Từ (1) và (2) suy ra E là một sơ sở của $\boldsymbol{R^n}$. *Suy ra* $\boldsymbol{dimR^n = n}$.

❖ Nhận xét:

- *Không gian đa thức* $P_n[x] = \{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \colon a_0, a_1, \dots, a_n \in R\}$ *là không gian n+1 chiều vì với cơ sở chính tắc là*

$$F = \{f_0 = 1;\ f_1 = x;\ f_2 = x^2;\ \dots;\ f_n = x^n\}.$$

- *Không gian các ma trận vuông* $M_2[R]$ *cấp 2 hệ số thực là không gian 4 chiều với cơ sở chính tắc là:*

$$E = \left\{E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}.$$

❖ CÁCH TÌM CƠ SỞ VÀ SỐ CHIỀU CỦA KHÔNG GIAN

- *Bước 1: Tìm một hệ sinh S của V. Tức là* $\boldsymbol{V = span(S)}$.
- *Bước 2: Tính* $\boldsymbol{rank(S) = k}$ *và suy ra k vectơ đltt của span(S) là* $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$. *Do đó* $\boldsymbol{V = span}(\{u_1, u_2, \dots, u_k\})$
- *Bước 3: Kết luận* $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ *là cơ sở của V và* $\dim(\boldsymbol{V}) = \boldsymbol{k}$.

❖ *Chú ý:*

- *Nếu W={0} thì ta quy ước dim(W)=0.*
- *Nếu W=span({a}) mà a≠ 0 thì {a} là một cơ sở của W và dim(W)=1.*
- *Mỗi không gian con cũng là một không gian vectơ nên thuật toán trên cũng áp dụng để tìm cơ sở và số chiều của không gian vectơ con.*

❖VD2: Trong kgvt R³ cho tập hợp vectơ:

$$W = \{(\alpha + 3\beta + 2\gamma; \beta; -2\alpha - 3\beta - 4\gamma) / \alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{R}\}$$

CMR: W là không gian vectơ con của R^3. Tìm cơ sở của W và dim(W).

Giải:

$$\mathbf{W} = \{(\boldsymbol{\alpha}; 0; -2\boldsymbol{\alpha}) + (3\boldsymbol{\beta}; \boldsymbol{\beta}; -3\boldsymbol{\beta}) + (2\boldsymbol{\gamma}; 0; -4\boldsymbol{\gamma}) / \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} \in \mathrm{R}\}$$

$$= \{\boldsymbol{\alpha}(1; 0; -2) + \boldsymbol{\beta}(3; 1; -3) + \boldsymbol{\gamma}(2; 0; -4) / \alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{R}\}$$

$$\Longrightarrow \mathbf{W} = \mathrm{span}(\{(1; 0; -2), (3; 1; -3), (2; 0; -4)\})$$

$\Longrightarrow$ **W là kgvt con sinh bởi hệ** $\boldsymbol{S} = \{(1; 0; -2), (3; 1; -3), (2; 0; -4)\}$.

Xét ma trận dòng tọa độ của S: $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[-2d1+d3 \to d3]{-3d1+d2 \to d2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$\Longrightarrow$ **r(S) = r(A) = 2 và bộ phận đltt tối đại** $\{\mathbf{u}_1 = (1; 0; -2), \mathbf{u}_2 = (3; 1; -3)\}$ **là một cơ sở của W $\Longrightarrow$ dim(W)=2.**

❖ ***Chú ý: Hệ vectơ đltt*** $\{\boldsymbol{v}_1 = (1; 0; -2), \boldsymbol{v}_2 = (0; 1; 3)\} \subset \boldsymbol{W}$ ***nên nó cũng là một cơ sở của W.***

❖ **VD2:** **Tìm tập nghiệm T của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất**

$$\begin{cases} x+y+z-t=0 \\ -x-y+z+t=0 \end{cases}$$

Chứng tỏ rằng T là không gian vevtơ con của $\mathbb{R}^4$ (không gian nghiệm). Tìm cơ sở và số chiều của T.

Giải

Giải hệ: $\begin{cases} \boldsymbol{x+y+z-t=0} \quad (1) \\ \boldsymbol{-x-y+z+t=0} \quad (2) \end{cases} \xLeftrightarrow{(1)+(2)\to(2)} \begin{cases} \boldsymbol{x+y+z-t=0} \\ \boldsymbol{2z=0} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x+y+z-t=0} \\ \boldsymbol{z=0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x+y+0-t=0} \\ \boldsymbol{z=0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x=-\alpha+\beta} \\ \boldsymbol{y=\alpha} \\ \boldsymbol{z=0} \\ \boldsymbol{t=\beta} \end{cases} \quad (\boldsymbol{\alpha,\beta \in R})$$

Suy ra tập nghiệm của hệ: $\boldsymbol{T=\{(-\alpha+\beta;\alpha;0;\beta)/\alpha,\beta \in R\}}$.

- Ta thấy: $T = \{(-\alpha + \beta; \alpha; 0; \beta)/\alpha, \beta \in R\}$

$$= \{(-\alpha; \alpha; 0; 0) + (\beta; 0; 0; \beta)/\alpha, \beta \in R\}$$

$$= \{\alpha(-1; 1; 0; 0) + \beta(1; 0; 0; 1)/\alpha, \beta \in R\}$$

Đặt $\mathrm{u} = (-1; 1; 0; 0)$, $\mathrm{v} = (1; 0; 0; 1)$ thì:

$$\mathrm{T} = \{\alpha.u + \beta.\mathrm{v}/\alpha, \beta \in R\} \Rightarrow \mathrm{T} = \mathrm{span}(\{u, \mathrm{v}\})$$

Vậy T là một k.gian vectơ con của R^4 và S=$\{u, v\}$ là hệ sinh của T. (1)

- **Xét ma trận:** $A = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{d1+d2\rightarrow d2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \mathrm{r(S)} = \mathrm{r(A)} = 2 = |\mathrm{S}| \Rightarrow$ **S là hệ vectơ độc lập tuyến tính. (2)**

- **Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ S là một cơ sở của T. Do đó $\dim(T) = 2$.**

Lưu ý: Cơ sở của không gian nghiệm hệ phương trình tuyến tính thuần nhất ta còn gọi là hệ nghiệm cơ bản.

BÀI TẬP

Tìm số chiều không gian nghiệm của hệ: $\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ 4x - 2y + 2z = 0 \\ 6x - 3y + 3z = 0 \end{cases}$.

ĐÁP ÁN

IV. TỌA ĐỘ CỦA VECTƠ ĐỐI VỚI CƠ SỞ

1) Định nghĩa

*Giả sử S= $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ là một cơ sở có thứ tự của không gian vectơ V. Khi đó, mỗi vectơ **u** thuộc V đều có thể biểu thị tuyến tính một cách duy nhất qua cơ sở S dạng:*

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{x}_1.\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{x}_2.\boldsymbol{u}_2 + \cdots + \boldsymbol{x}_n.\boldsymbol{u}_n$$

*Bộ n số thực có thứ tự $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$ được gọi là toạ độ của vectơ **u** đối với cơ sở S.*

Ký hiệu: $(\boldsymbol{u})_S = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$ *hoặc ở dạng cột* $[\boldsymbol{u}]_S = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \\ \ldots \\ \boldsymbol{x}_n \end{bmatrix}$.

2. Các ví dụ:

a) *Trong không gian $\boldsymbol{R^n}$ với cơ sở chính tắc:*

$$E = \{e_1 = (1, 0, \dots, 0); e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0); \dots; e_n = (0, \dots, 0, 1)\},$$

nếu $u = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n$ *thì* $(u)_E = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

b) *Trong k.gian đa thức:*

$$P_n[x] = \{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n:\ a_0, a_1, \dots, a_n \in R\}$$

với cơ sở chính tắc: $F = \{f_0 = 1;\ f_1 = x;\ f_2 = x^2;\ \dots;\ f_n = x^n\}$, *nếu*

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in P_n[x]$$

thì $f(x) = a_0.f_0 + a_1.f_1 + \cdots + a_n.f_n$ *nên* $(f)_F = (a_0, a_1, \dots, a_n)$.

c) Trong không gian các ma trận vuông $M_2[R]$ cấp 2 hệ số thực với cơ sở chính tắc:

$$E = \left\{E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\},$$

nếu $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2[R]$ *thì* $A = a.E_1 + b.E_2 + c.E_3 + d.E_4$

nên toạ độ của ma trận A *đối với cơ sở chính tắc là*

$$(A)_E = (a; b; c; d).$$

❖*Chú ý:*

- *Mỗi không gian vectơ V≠ {0} đều có vô số cơ sở khác nhau vì vậy toạ độ của một vectơ đối với mỗi cơ sở là khác nhau.*
- *Khi người ta viết* $u = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$ *thì ta hiểu đó là tọa độ của* **u** *đối với cơ sở chính tắc của* R^3.

❖**VD2: Trong không gian vectơ R^3 cho họ vectơ**

$$S = \{u_1 = (1,0,0); u_2 = (1,1,0); u_3 = (1,1,1)\}$$

và vectơ $u = (1; -2; 3) \in R^3$.

a) **CMR: S là một cơ sở của** R^3.

b) **Tìm toạ độ của** $u = (1; -2; 3)$ **đối với cơ sở** S.

Giải

a) **Xét ma trận** $A = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Ta thấy $\det(A) = 1 \neq 0$ **suy ra hệ S độc lập tuyến tính.**

Mặt khác $\dim(R^3) = 3 = |S|$ **nên S là một cơ sở của** R^3.

b) Tìm toạ độ của $\mathbf{u} = (1;-2;3) \in \mathbf{R}^3$ đối với cơ sở

$$\mathbf{S} = \{\mathbf{u}_1 = (1,0,0);\mathbf{u}_2 = (1,1,0);\mathbf{u}_3 = (1,1,1)\}$$

Giải

b) Giả sử $u = x.u_1 + y.u_2 + z.u_3$ với x,y,z là các số thực.

$$\Rightarrow (1;-2;3) = x.(1,0,0) + y.(1,1,0) + z.(1,1,1)$$

$$\Leftrightarrow (1;-2;3) = (x,0,0)+(y,y,0)+(z,z,z)$$

$$\Leftrightarrow (1;-2;3) = (x+y+z;y+z;z) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=1 \\ y+z=-2 \\ z=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -5 \\ z = 3 \end{cases}$$

Vậy toạ độ của u đối với cơ sở S là $(u)_S = (3;-5;3)$.

BÀI TẬP NHÓM

Trong không gian vectơ R^3 cho họ vectơ:

$S = \{u_1 = (1,0,0); u_2 = (1,-1,0); u_3 = (1,2,3)\}$ *và* $u = (2;-1;1)$.

a) *CMR:* S *là một cơ sở của* R^3.

b) *Tìm toạ độ của* u *đối với cơ sở* S.

BÀI TẬP VỀ NHÀ

<u>Câu 1</u>: Xét sự *đltt, pttt* của hệ vectơ:

a) $S = \{(1,2,3,-1), (2,0,-1,0),\ (-2,1,0,3)\};$

b) $T = \{(1,2,0), (0,2,3), (3,0,1)\};$

c) $U = \{p_1 = 2x^2 - 3x + 1; p_2 = x^2 + 2x\}.$

<u>Câu 2</u>: Tìm hạng của họ vectơ sau đây trong $\mathbb{R}^4$

$$S = \{u_1 = (4,-5,2,6); u_2 = (2,-3,1,3); u_3 = (2,-1,1,3); u_4 = (4,-1,5,6)\}$$

<u>Câu 3</u>: Trong $\mathbb{R}^3$ cho tập hợp: $W = \{u = (a,b,c): a + b - c = 0\}.$

Chứng minh tập hợp W là không gian con của $\mathbb{R}^3$. Tìm số chiều và một cơ sở của W.

BÀI TẬP VỀ NHÀ

<u>Câu 4</u>: Tìm số chiều và một cơ sở của không gian con sinh bởi họ vectơ sau:
$S = \{(1,2,0,2); (-2,1,3,0); (3,1,4,-2); (6,7,18,-4)\}$.

<u>Câu 5</u>: Trong không gian $\mathbb{R}^3$ cho họ véc tơ

$$S = \{v_1 = (2;1;m), v_2 = (0;-m;1); v_3 = (m;1;0)\}$$

a) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để họ S phụ thuộc tuyến tính.

b) Chứng tỏ rằng với $m = 2$ thì S là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

<u>Câu 6</u>: Cho $W = \{u = (a - 3b + 2c, -a + 2b + 13c, 2a - 4b - 26c): a, b, c \in \mathbb{R}\}$ là không gian vectơ con của $\mathbb{R}^3$. Tìm số chiều và một cơ sở của W.

<u>Câu 7</u>: Gọi W là không gian nghiệm của hệ: $\begin{cases} x + 2y + z - 6t = 0 \\ 3x + 5y + 4z + 7t = 0 \\ x + y + 2z + 19t = 0 \end{cases}$

Tìm cơ sở và số chiều của W.

<u>Câu 8</u>: Trong không gian vectơ $\mathbb{R}^3$, cho họ vectơ

$$S = \{u_1 = (-1; 1; -2), u_2 = (0; 3; 1), u_3 = (4; -3; 0)\}$$

a) Chứng minh rằng S là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

b) Tìm $[v]_S$ biết $v = (17; -5; -2) \in \mathbb{R}^3$.

<u>Câu 9</u>: Dùng công thức đổi toạ độ tìm toạ độ của vectơ $\mathrm{u} = (1; 2; 3)$ đối với cơ sở $\mathrm{S} = \{\mathrm{u}_1 = (1, -1,0); \mathrm{u}_2 = (1,0,3); \mathrm{u}_3 = (0,1,2)\}$ trong kgvt R^3.