NỘI DUNG ÔN TẬP HP GIẢI TÍCH 1

Chương 1:

1. Tính giới hạn của hàm số dạng $\frac{0}{0}$, $0.\infty$
2. Tìm điều kiện của tham số để hàm số liên tục tại một điểm/ trên TXĐ.

BÀI TẬP:

1. Tính giới hạn của các hàm số

$a)\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{e^x-1}$ $\qquad b)\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(x^2+2\right)^3-8}{\ln\left(1+3x^2\right)}$

$c)\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{e^x-1-x}$ $\qquad d)\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(x^2+2\right)^3-8}{\ln\left(1+3x^2\right)}$

$e)\ \lim\limits_{x\to\infty}x^2e^{1-x}$ $\qquad f)\ \lim\limits_{x\to 0^+}\sin x\ln x$

$g)\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}+e^{-2x}-2}{2\sin^2 x}$ $\qquad h)\ \lim\limits_{x\to 1/2}\frac{2x^3-x^2+2x-1}{\ln\left(2x\right)}$

$i)\ \lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1+2\ln x}{e^{x^2}-e}$ $\qquad k)\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}$

2. Tìm a để hàm số liên tục trên R

$$a)\quad f\left(x\right)=\begin{cases}\frac{3^x-5^x}{2x+x^3}, & x\neq 0\\ a+x+1, & x=0\end{cases}$$

$$b)\,f\left(x\right)=\begin{cases}\frac{3^x-(4x+1)}{x-2}, & x\neq 2\\ ax\ x\quad, & x=2\end{cases}$$

$$b)\ f\left(x\right)=\begin{cases}x^2-3x+2a, & x>2\\ 2x+1, & x\le 2\end{cases}$$

$$b)\,f\left(x\right)=\begin{cases}x^2\\ =x^2+3x+2, & x>1\\ ax+1, & x\le 1\end{cases}$$

Chương 2:

1. Ứng dụng của đạo hàm: tính vận tốc tức thời, vận tốc trung bình, gia tốc, giá trị lớn nhất.
2. Tính đạo hàm cấp cao.

3. Chứng minh hàm số thỏa phương trình chứa đạo hàm cấp cao.
4. Khai triển Taylor, Maclaurin (trong đề cho sẵn công thức Maclaurin của một số hàm số).

BÀI TẬP:

1. Cho hàm vị trí $s = -t^3 + 3t^2 - 3t$ của một vật thể chuyển động thẳng theo trục tọa độ (s: theo met, t: theo giây)

a) Tìm quãng đường đi được của vật và vận tốc trung bình trong khoảng thời gian $0 \le t \le 3$
b) Tìm tốc độ (giá trị tuyệt đối của vận tốc) chuyển động của vật và gia tốc của vật tại thời điểm $t = 2$
c) Tìm gia tốc của vật tại thời điểm mà vận tốc bằng 0.
d) Tìm tốc độ của vật tại thời điểm mà gi a tốc bằng 0.

Tương tự cho các hàm sau:

1) $s = \frac{25}{t^2} - \frac{5}{t}$, $1 \le 1 \le 5$

2) $s = \frac{1}{4}t^4 - t^3 + t^2$, $0 \le t \le 3$

2.Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của các hàm số $f(x)$ sau

$a)\ f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1,\ x \in [-2\,;3]$

$b)\ f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4},\ x \in [-4,4]$

$c)\ f(x) = x + \ln(x^2 + 1) - 4\arctan x,\ x \in [0;3]$

3.Một thùng đựng hàng hình hộp chữ nhật không nắp có thể tích $10\,m^3$. Chiều dài đáy gấp đôi chiều rộng. Chi phí cho vật liệu làm nặt đáy là 10 đô la một m^2. Chi phí cho vật liệu làm mặt bên là 6 đô la một m^2 . Tìm chi phí rẻ nhất để sản xuất thùng đựng hàng.

4.Một dây kim loại 10m được cắt làm hai. Một miếng bẻ cong thành một hình vuông và miếng còn lại được bẻ cong thành tam giác đều. Ta nên cắt dây kim loại này như thế nào để tổng diện tích bị chắn là lớn nhất.

5.Tính đạo hàm cấp n của các hàm số:

$a)\ y = \frac{x}{e^x}$

$b)\ y = x^2 \ln(x+3)$

$c)\ y = x^2 + x^3 \sin 2x$

$d)\ y = \frac{x+1}{x^2 - 4x + 3}$

5. Cho hàm số $y=\dfrac{x^3+\sin x}{x^2+1}$

   Chứng minh: $(x+2)y^{(4)}+4y^{(3)}+12y''=\sin x$

6. Cho hàm số $y=\dfrac{\cos 2x}{x+1}$

   Chứng minh: $(x+2)y^{(4)}+4y^{(3)}=16\cos 2x$

7. Tìm công thức Taylor đến số hạng $(x-x_o)^2$ với phần dư Peano với các hàm số sau:

$a.\, f(x)=\sqrt{x^2+5}$, $x_o=2$

$b.\ f(x)=\dfrac{e^{-x^2+2x+3}}{x-2}$, $x_o=3$

8. Tìm công thức Maclaurin đến số hạng chứa x^n đến phần dư Peano

   $a)\ f(x)=\dfrac{x-10}{x^2-7x+10}$

   $b)\ f(x)=(x^2+2x-1)e^{2x}$

9.T ìm công thức Maclaurin đến số hạng chứa x^{10} đến phần dư Peano

$a) f(x)=(2-x)e^{2x^2}$

$b) f(x)=(2x+1)\ln(x^2+1)2$

$c) f(x)=(1-x)\sin(x^2)$

Chương 3:

1. Tính tp xác định bằng pp đổi biến:

   $I=\int_a^b f(g(x))g'(x)dx$

   $u=g(x)\Rightarrow I=\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$

2. Tính độ dài cung phẳng:

   $L=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}dx$ hoặc $L=\int_a^b\sqrt{1+x'^2}dy$

3. Bài toán chuyển động: biết vận tốc tìm quãng đường, độ dịch chuyển.
   - Phương trình quãng đường: $s(t)=\int v(t)dt=F(t)+C$
   - Độ dịch chuyển: $d=|s(t_2)-s(t_1)|$

- Quãng đường đi được: $s=\int_{t_1}^{t_2}\left|v(t)\right|dt$

4. Áp dụng công thức tính nhanh để tính tp dạng: $\int P_n(x)e^{ax}dx$, $\int P_n(x)\cos(ax)dx$, $\int P_n(x)\sin(ax)dx$.
5. Tính tích phân suy rộng với cận vô hạn/ tìm diện tích miền phẳng vô hạn đưa về tính TPSP dạng hàm $P_n(x).e^{ax}$.

   $$S=\int_{x_o}^{\infty}P_n(x)e^{ax}dx$$
6. Tính TPSR với hàm dưới dấu tp không bị chặn / tìm diện tích miền phẳng vô hạn đưa về TPSR với dạng chứa $\sqrt{ax+b}$.
7. Xét sự hội tụ của TPSR với cận vô hạn cho dạng phân thức, TPSR với hàm dưới dấu tp không bị chặn cho hàm sử dụng được được các VCB tương đương trong quá trình x dần về 0.

   BÀI TẬP

1.Tính các tích phân sau:

$a)\int_0^1\frac{e^x+1}{e^x+x}dx$ $\qquad$ $b)\int_{1/12}^{1/4}\frac{2dt}{\sqrt{t}(1+4t)}$

$c)\int_0^1 xe^{-x^2}dx$ $\qquad$ $d)\int_1^e\frac{\ln xdx}{x\sqrt[5]{1+\ln x}}$

$e)\int_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{\sin^2 x}{1-\sqrt{\cos x}}dx$ $\qquad$ $f)\int_4^8\frac{xdx}{(x^2-9)^5}$

2.Tính chiều dài các cung cho bởi các phương trình sau:

$a)\, x=\frac{y^4}{4}+\frac{1}{8y^2}$ $\qquad$ $,1\le y\le 2$

$b)\; y=\frac{1}{3}x^{3/2}-x^{1/2}$ $\qquad$ $,1\le x\le 9$

3. Bài toán chuyển động:

   Vận tốc của một hạt di chuyển qua lại trên một đường thẳng là $v(t)=6\sin 2t\ (m/s)\ (0)\le t\le\pi)$.

   a. Tìm phương trình chuyển động của vật biết $v(t)=\frac{ds}{dt}$ và $s(0)=2$
   b. Tìm độ dịch chuyển của hạt trong khoảng thời gian $0\le t\le\pi$
   c. Tìm quãng đường đi được của hạt trong khoảng thời gian $0\le t\le\pi$

4.Tính các tích phân sau:

$a)\int\left(3x^2+2\right)e^{2x}dx \qquad b)\int\left(x^2+3x\right)\cos 3x dx \qquad c)\int\left(3x^2+2x-1\right)\sin\left(2x+1\right)dx$

5.Tìm diện tích miền phẳng giới hạn bởi trục Ox, đường thẳng $x=1$và đường còn có phương trình $y=\left(x+1\right)e^{-x}$

6.Tìm diện tích miền phẳng giới hạn bởi trục Ox, đường thẳng $x=2$, $x=4$ và đường cong có phương trình $y=\dfrac{x}{\sqrt{x-2}}$

7.Xét sự hội tụ của các TPSR sau:

$$a)\int_1^{\infty}\frac{x^3dx}{\sqrt[3]{x^{11}+x^5+1}}dx \qquad b)\int_{-\infty}^{1}\frac{x^2+x+1}{x^4+x+1}dx$$

$$c)\int_2^{\infty}\frac{2x^2dx}{\sqrt[5]{3x^8+2x^5+1}}dx \qquad c)\int_{-\infty}^{1}\frac{\sqrt{2x^3+x+1}}{4x^2-3x+1}dx$$

$$e)\int_0^1\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x^2}dx \qquad f)\int_0^1\frac{\sqrt{x}}{e^{\sin x}-1}dx$$

$$g)\int_1^2\frac{\ln\left(1+e^{\frac{1}{x-2}}\right)}{(x-2)^2}dx \qquad h)\int_0^1\frac{\ln\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}{e^{\sin x}-1}dx$$

Chương 4

1. Tìm vi phần toàn phần (tổng quát và tại một điểm) của hàm hai, ba biến.
   $df=f'_x dx+f'_y dy$
   $df=f'_x dx+f'_y dy+f'_z dz$
2. Tính giá trị của biểu thức, chứng minh đẳng thức chứa đạo hàm riêng.
3. Tính đạo hàm theo hướng, vectơ Gradient.

$$\frac{\partial f}{\partial\vec{l}}(M)=\frac{1}{\sqrt{l_1^2+l_2^2}}(f'_x(M).l_1+f'_y(M).l_2) \qquad ,\vec{l}=(l_1,l_2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial\vec{l}}(M)=\frac{1}{\sqrt{l_1^2+l_2^2+l_3^2}}(f'_x(M).l_1+f'_y(M).l_2+f'_z(M).l_3,\ \vec{l}=(l_1,l_2,l_3)$$

$$\nabla f(M)=(f'_x(M).f'_y(M))$$

$$\nabla f(M)=(f'_x(M).f'_y(M),f'_z(M))$$

Bài tập:

1. Tìm vi phân toàn phần của các hàm sau:

$a)\ f(x,y)=x^2y+2xye^y$

$b) f(x,y)=\dfrac{x-y}{x^2+y}$

$c) f(x,y)=\dfrac{e^{xy}}{x-y}$

$d) f(x,y)=\dfrac{y^2}{x+1}\cos\left(\dfrac{x}{y}\right)$

$e) f(x,y)=\dfrac{2^{x-y}}{x^2-y}$

$f) f(x,y)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$

$g) f(x,y)=(x+y)\cos(2x-y)$

$i) f(x,y,z)=x^2y(z+1)-2\sin x.\cos y+3z^2$

$k) f(x,y,z)=\dfrac{x^2z-xy}{1+xyz}$

2. Chứng minh các dẳng thức sau:

$a)\dfrac{z'_x}{x}+\dfrac{z'_y}{y}+\dfrac{z'_z}{z}=0\ ,\quad z=y\ln\left(x^2-y^2\right)$

$b) f''_{xx}+f''_{yy}=0\qquad , f(x,y)=e^{-2y}\cos 2x$

$c\ f''_{xx}+f''_{yy}=0\qquad , f(x,y)=x^4+6xy(1-xy)+y^4$

$d) f''_{xx}+f''_{yy}+f''_{zz}=0\ ,\ f(x,y,z)=x^2+y^2-2z^2$

3.Tìm đạo hàm của hàm số tại M theo hướng vectơ $\vec{l}$

$a)\ f(x,y)=\dfrac{x-y}{xy+2}\ ,\ M(1,-1)\ ,\ \vec{l}=(12,5)=12\vec{i}+5\vec{j}$

$b) f(x,y,z)=3e^x\cos yz\ ,\ M(0,0,0)\ ,\ \vec{l}=(2,1,-2)=2\vec{i}+\vec{j}-2\vec{z}$

$c) f(x,y,z)=\cos xy+e^{yz}+\ln zx\ \ ,\ M\left(1,0,\dfrac{1}{2}\right);\ \vec{l}=\left(1,0,\dfrac{1}{2}\right)$

$d) f(x,y)=\arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)+\dfrac{1}{x^2+y^2}\ \ ,\ M(1,1);\ \vec{l}=(3,-2)$

4.Tìm vectơ gradien của các hàm số (∇f) sau tại điểm chỉ ra.

$a)\ f(x,y) = \dfrac{x-y}{xy+2}$, $M(1,-1)$,

$b) f(x,y,z) = 3e^x \cos yz$, $M(0,0,0)$

$c) f(x,y,z) = \cos xy + e^{yz} + \ln zx$, $M\left(1,0,\dfrac{1}{2}\right)$

$d) f(x,y) = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) + \dfrac{1}{x^2+y^2}$, $M(1,1)$

Chương 5.

1. Tìm cực trị của hàm 2 biến dạng hàm đa thức.

- Tìm M thỏa

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_x = 0 \end{cases}$$

- $A = f''_{xx}(M)$, $B = f''_{xy}(M)$, $C = f''_{yy}(M)$, $\Delta = B^2 - AC$
- Kết luận:

$\Delta > 0$: M là điểm yên ngựa

$\Delta < 0,\ A > 0$: M là điểm cực tiểu

$\Delta < 0,\ A < 0$: M là điểm cực đại

2. Tìm đạo hàm của hàm ẩn 2 biến

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} \ ; \ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}$$

3. Tìm hàm 2 biến khi biết các đạo hàm riêng.

Bài tập:

1.Tìm tất cả các cực trị địa phương của các hàm số sau:

$a)\ z = 2x^3 + 2y^3 - 9x^2 + 3y^2 - 12y$

$b) z = 6x^2 - 2x^3 + 3y^2 + 6xy$

$c) z = x^3 + 3xy^2 - 15x + y^3 - 15y$

$d) z = x^4 + y^4 + 4xy$

2.Tìm z'_x, z'_y tại điểm M biết $z = z(x,y)$ là hàm ẩn xác định bởi các phương trình:

$a)\ z^3 - xy + xy + y^3 - 2 = 0$, $M(1,1,1)$

$b)\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - 1 = 0$, $M(2,3,6)$

$c)\ \sin(x+y) + \sin(y+z) + \sin(x+z) = 0$, $M(\pi,\pi,\pi)$

3.Tìm hàm $f(x,y)$ thỏa:

$$a)\begin{cases} f'_x = 3x^2 - 3y^2 - 6 \\ f'_y = 6y^2 - 6xy + 5 \end{cases}$$

$$b)\begin{cases} f'_x = 2xy^3 + 3 + 2(3y+1)e^{2x-2} \\ f'_y = 3x^2y^2 - 2y + 3e^{2x-2} \end{cases} ,\ f(1;1) = 8$$

$$c)\begin{cases} f'_x = (2x-3)e^{2x} + ye^{y-1} + 2xy - 2y \\ f'_y = x(y+1)e^{y-1} + x^2 - 2x + 3y^2 \end{cases} ,\ f(0,1) = -2$$