BÀI TOÁN QUY HOẠCH ĐỘNG (DYNAMIC PROGRAMMING)

Phạm Thế Bảo
Khoa Toán – Tin học
Trường Đại học Khoa học Tự nhiên Tp.HCM

Nội dung

- Kỹ thuật chia để trị thường dẫn tới giải thuật đệ quy → có giải thuật có thời gian mũ và giải bài toán con nhiều lần.
- Để tránh giải bài toán con nhiều lần → tạo một bảng lưu trữ kết quả các bài toán con để khi cần sẽ sử dụng lại kết quả.
- Lấp đầy kết quả các bài toán con theo quy luật nào đó để có kết quả của bài toán ban đầu → quy hoạch động

Thuật giải

1. Tạo bảng bằng cách:
   a. Gán giá trị một số ô nào đó.
   b. Gán giá trị cho các ô khác nhờ vào giá trị của các ô trước.
2. Tra bảng và xác định kết quả của bài toán ban đầu

Đánh giá

- Ưu điểm
  – Chương trình thực thi nhanh do không tốn thời gian giải lại bài toán con.
  – Vận dụng để giải các bài toán tối ưu, có công thức truy hồi
- Nhược điểm
  – Không tìm được công thức truy hồi.
  – Số lượng bài toán con cần giải và lưu trữ kết quả rất lớn.
  – Việc kết hợp lời giải của các bài toán con chưa chắc cho lời giải của bài toán ban đầu.

Bài toán tính số tổ hợp

- Tính C_n^k bằng công thức truy hồi.

$$C_n^k = \begin{cases} 0 & \text{nếu } k=0 \text{ hay } k=n \\ C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k} & \text{nếu } 0<k<n \end{cases}$$

Thuật giải:

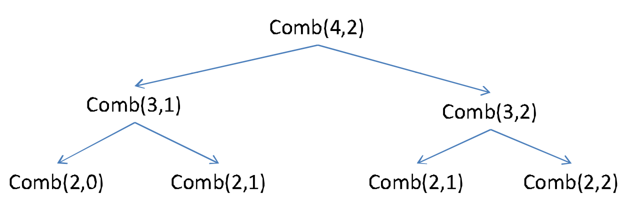
```
long Comb(int n, int k){



}
```


Đánh giá

- Gọi T(n) là thời gian tính C_n^k,
  ta có $T(1)=C_1$ và T(n)=
  giải ta có T(n)=O( )
  → bài toán con được giải nhiều lần



Dùng quy hoạch động

- Xây dựng một bảng có (n+1) dòng từ 0 đến n và (n+1) cột từ 0 đến n. Điền các giá trị ô(i,j) theo nguyên tắc sau:
  - ô(0,0)=1   ô(i,i)=1 với 0<i≤n
  - ô(i,0)=1   ô(i,j)=ô(i-1,j-1)+ô(i-1,j) với 0<j<i≤n
- Ví dụ n=4

Tam giác Pascal

	0	1	2	3	4
0	1				
1	1	1			
2	1		1		
3	1			1	
4	1				1

- Thuật giải mới:

```
int ** Comb(int n, int k){
    C[0,0]=1;
    for i=1 to n do
        C[i,0]=1;
        C[i,i]=1;
        for j=1 to i-1 do
            C[i,j]=C[i-1,j-1]+C[i-1,j];
    endfor
    return C;
}
```

- Vòng lặp for j thực hiện i-1 lần. Vòng lặp i lặp n lần →

Bài toán cái ba lô

- Giả sử X[k,V] là số lượng đồ vật k được chọn, F[k,V] tổng giá trị k đồ vật được chọn và V là trọng lượng còn lại của ba lô, k=1..n và V=1..W.
- Trường hợp đơn giản nhất: chỉ có một đồ vật, ta tính X[1,V] và F[1,V] với V=1..W như sau:
  - X[1,V]=V div g_1 và F[1,V]=X[1,V]*v_1
  - Với g_1 là trọng lượng đồ vật 1 và v_1 là giá trị đồ vật 1

- Giả sử tính được F[k-1,V], khi có thêm đồ vật thứ k, ta sẽ tính được F[k,V] như sau: nếu chọn x_k đồ vật loại k, thì trọng lượng còn lại của ba lô dành cho k-1 đồ vật từ 1 đến k-1 là U=V-x_k*g_k và tổng giá trị k loại đồ vật đã được chọn là F[k,V]=F[k-1,U]+x_k*v_k với x_k từ 0 đến y_k=V div g_k và ta sẽ chọn x_k sao cho F[k,V] lớn nhất.
- Công thức truy hồi:
  - X[1,V]=V div g_1 và F[1,V]=X[1,V]*v_1
  - F[k,V]=max{F[k-1, V-x_k*g_k]+x_k*v_k} với x_k chạy từ 0 đến (V div g_k)
  - Sau khi xác định được F[k,V] thì X[k,V] là x_k

- Để lưu các giá trị trung gian trong quá trình tính F[k,V], ta dùng một bảng có n dòng (từ 1 đến n) – dòng thứ k ứng với loại đồ vật k, và W+1 cột (từ 0 đến W), cột thứ V ứng với trọng lượng V, mỗi cột Vv gồm 02 cột nhỏ: cột bên trái lưu F[k,V], cột bên phải lưu X[k,V].
- Ví dụ: có 05 loại đồ vật như bảng, ba lô có trọng lượng W=9.

Đồ vật	Trọng lượng(g_i)	Giá trị(v_i)
1	3	3
2	4	5
3	5	6
4	2	3
5	1	1

k \ V	0		1		2		3		4		5		6		7		8		9	
1	0	0	0	0	0	0		1	4	1	4	1	8	2		2	8	2	12	3
2	0	0	0	0	0	0	4	0	5	1	5	1	8	0	9	1	10	2	12	0
3	0	0	0	0	0	0	4	0	5	0	6	1	8	0	9	0	10	0	12	0
4	0	0	0	0	3	1	4	0	6	2	7	1	9	3	10	2	12	4	13	3
5	0	0	1	1	3	0	4	0	6	0	7	0	9	0	10	0	12	0	13	0

- Cách tính:
  - Dòng thứ nhất, dùng công thức X[1,V]=V div g_1 và F[1,V]=X[1,V]*v_1
  - Từ dòng 2 đến dòng 5 dùng công thức truy hồi F[k,V]=max{F[k-1, V-x_k*g_k]+x_k*v_k} với x_k chạy từ 0 đến (V div g_k).
  - Ví dụ: tính F[2,7] ,

    có x_k={0 div 4, 1 div 4, 2 div 4, 3 div 4, 4 div 4, 5 div 4, 6 div 4, 7 div 4}= {0,1}.

    F[2,7] =Max{F[2-1,7-0*4]+0*5, F[2-1,7-1*4]+1*5}

    =Max{F[1,7], F[1,3]+5} = Max{8,4+5}

    =

  Vậy X[2,7]=1

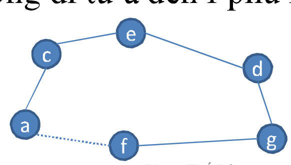
Đồ vật	g_i	v_i
1	3	3
2	4	5
3	5	6
4	2	3
5	1	1

- Vấn đề tra bảng như thế nào để có kết quả?
  - Khởi đầu trọng lượng ba lô V=W.
  - Xét các đồ vật từ n đến 1, mỗi đồ vật k ứng với trọng lượng còn lại V của ba lô, nếu X[k,V]>0 thì chọn X[k,V] đồ vật loại k, tính lại V=V-X[k,V]*g_k.
- Ví dụ: V=W=9
  - Xét k=5, có X[5,9]=0 → không chọn
  - Xét k=4, có X[4,9]=3 → chọn 3 đồ vật loại 4, tính lại V=9-3*2=3.
  - Xét k=3, có X[3,3]=0 → không chọn
  - Xét k=2, có X[2,3]=0 → không chọn
  - Xét k=1, có X[1,3]=1 → chọn 1 đồ vật loại 1, tính lại V=3-1*3=0
  - Tổng trọng lượng các vật trong ba lô=
  - Tổng giá trị các vật trong ba lô =

Bài tập: cài đặt chương trình

Bài toán người giao hàng

- Chúng ta cũng có thể dùng quy hoạch động để giải quyết:
  - Đặt S={x_1, x_2, …, x_k} là tập con các cạnh của đồ thị G=(V,E). Ta nói một đường đi từ v đến w **phủ lên** S nếu P={v, x_1, x_2, …, x_k, w}, trong đó x_i xuất hiện ở vị trí bất kỳ, chỉ một lần.
  - Ví dụ: đường đi từ a đến f phủ lên {c,d,e,g}



- Ta định nghĩa d(v,w,S) là tổng độ dài đường đi từ v đến w phủ lên S. Nếu không có đường đi như vậy thì đặt d(v,w,S)=∞.
- Một chu trình Hamilton nhỏ nhất H_{min} của G phải có tổng độ dài là $d(H_{min})$=d(o,o,V-{o}), với o là một đỉnh nào đó trong V.
- Ta tìm H_{min} như sau:
  - Nếu |V |=1 (G chỉ có 1 đỉnh) thì $d(H_{min})=0$
  - Ngược lại:
    - d(v,w,{})=d(v,w)
    - d(v,w,S)=min {d(v,x)+d(x,w,S-{x})}, với mọi $x \in S$
    - d(v,w) là độ dài cạnh nối hai đỉnh v và w, nếu không tồn tại thì d(v,w)= ∞
  - Bằng cách lưu trữ các đỉnh x theo công thức đệ quy trên, chúng ta sẽ có một chu trình Hamilton tối thiểu.