TRƯỜNG ĐẠI HỌC GIAO THÔNG VẬN TẢI THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

KHOA CƠ BẢN – BỘ MÔN TOÁN

BÀI GIẢNG GIẢI TÍCH 1

CHƯƠNG IV. PHÉP TÍNH VI PHÂN HÀM NHIỀU BIẾN

§3. Cực trị hàm nhiều biến

Giáo sư Đưa Đò

NỘI DUNG CHÍNH

- *Khái niệm cực trị địa phương, các định lý về điều kiện cần, đủ để có cực trị.*
- *Bài toán tìm cực trị tự do của hàm hai biến.*
- *Bài toán GTLN,GTNN trên miền compact.*

CHƯƠNG IV. PHÉP TÍNH VI PHÂN HÀM NHIỀU BIẾN

§3. Cực trị hàm nhiều biến

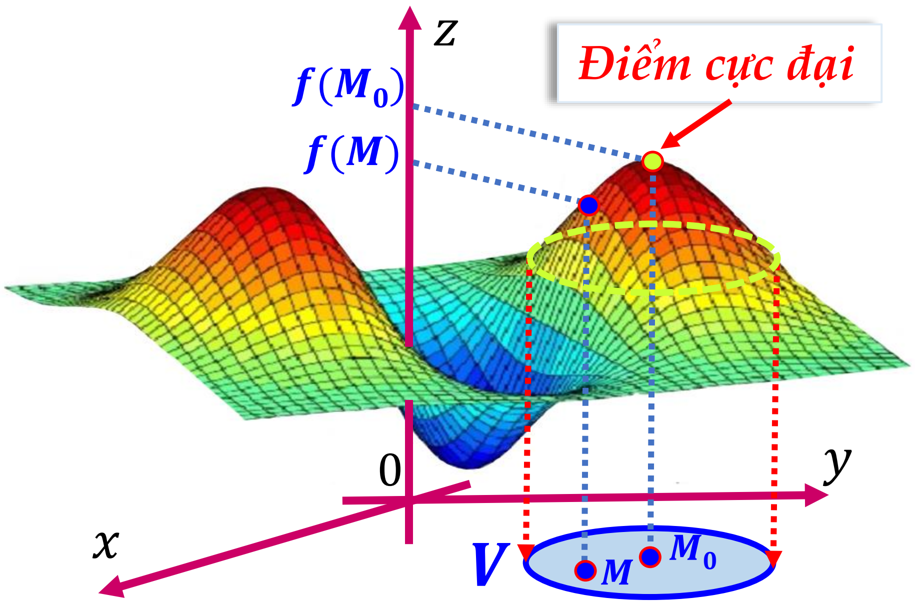
I. CỰC TRỊ ĐỊA PHƯƠNG

1. Định nghĩa cực trị

- ***Hàm số $z = f(x, y)$ gọi là đạt cực đại địa phương tại điểm $M_0(x_0, y_0)$ nếu tồn tại một lân cận V của M_0 sao cho:***

$$f(M) \le f(M_0), \forall M \in V.$$

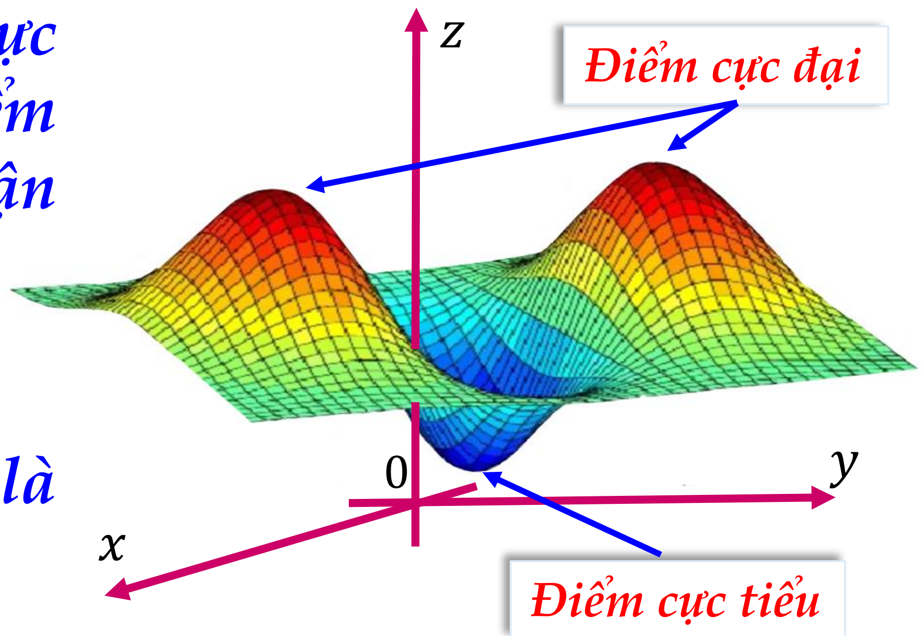
Khi đó $f(M_0) = f(x_0, y_0)$ gọi là giá trị cực đại.



- *Hàm số $z = f(x, y)$ gọi là đạt cực tiểu địa phương tại điểm $M_0(x_0, y_0)$ nếu tồn tại một lân cận V của M_0 sao cho:*

$$f(M) \geq f(M_0), \forall M \in V.$$

Khi đó $f(M_0) = f(x_0, y_0)$ gọi là giá trị cực tiểu.



- *Cực đại và cực tiểu địa phương được gọi chung là cực trị địa phương, nó cũng được gọi là cực trị tương đối hay cực trị tự do.*
- *Cực trị địa phương ta thường gọi vắn tắt là cực trị.*
- *Điểm $M'(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ gọi là điểm cực trị.*
- *Khái niệm cực trị hàm n biến được định nghĩa tương tự.*

2. Định lý: *(Điều kiện cần để có cực trị)*

Nếu hàm số $f(x,y)$ đạt cực trị địa phương tại (x_0,y_0) và tồn tại các đạo hàm riêng của f tại (x_0,y_0) thì:

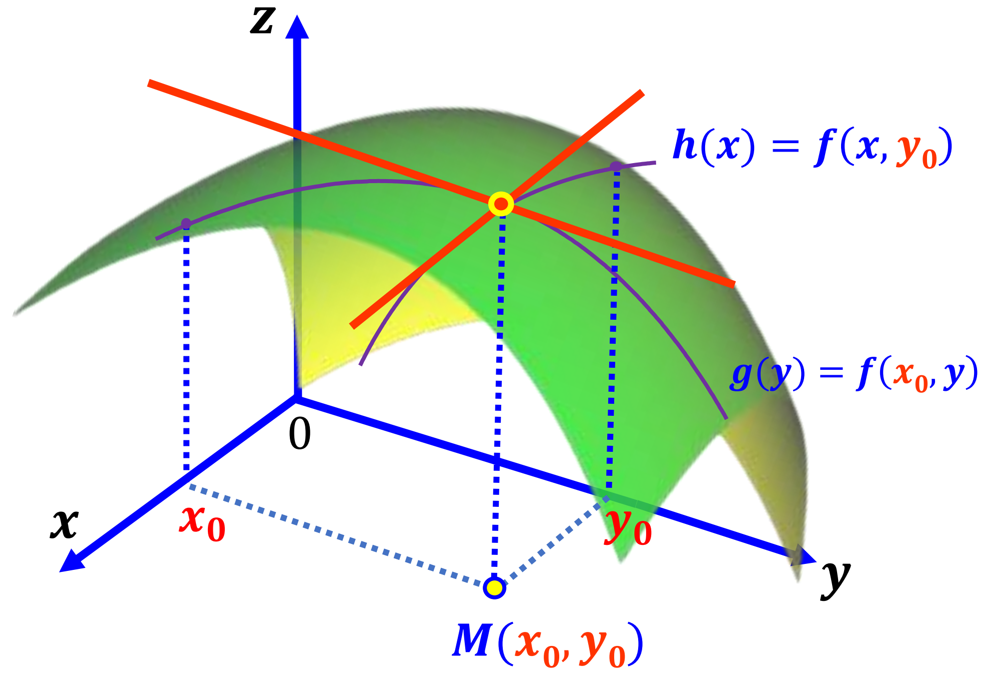
$$f'_x(x_0,y_0)=0 \text{ và } f'_y(x_0,y_0)=0$$

Chứng minh:

Theo giả thiết $f(x,y)$ đạt cực trị tại $M(x_0,y_0)$ nên các hàm một biến:

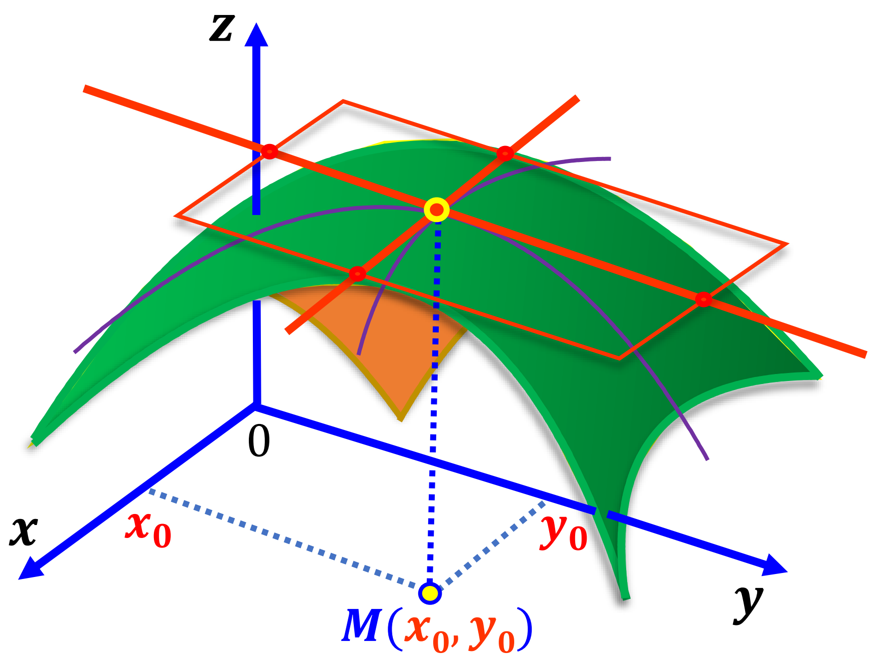
$$\Rightarrow \begin{cases} h(x)=f(x,y_0) \text{ đạt cực trị tại } x_0 \\ g(y)=f(x_0,y) \text{ đạt cực trị tại } y_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} h'(x_0)=f'_x(x_0,y_0)=0 \\ g'(y_0)=f'_y(x_0,y_0)=0 \end{cases}$$



❖ *Chú ý:*

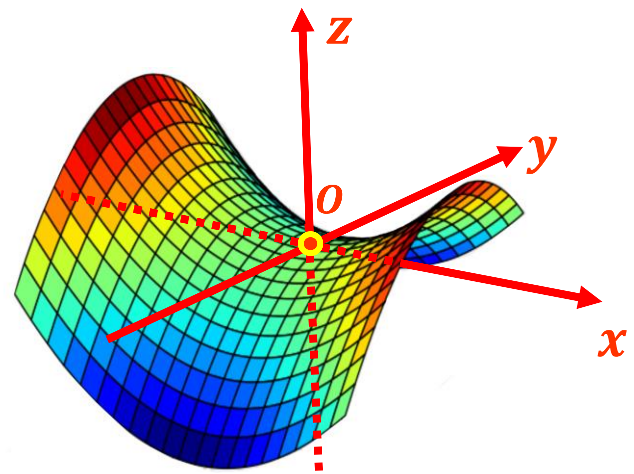
- **Mặt phẳng tiếp xúc với đồ thị hàm số $z = f(x, y)$ tại điểm cực trị có phương song song với mặt phẳng Oxy.**



- **Chiều ngược lại của định lý không đúng. Chẳng hạn, xét hàm số: $f(x, y) = x^2 - y^2$ tại điểm $O(0; 0)$. Ta có:**

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 2x \\ f'_y(x, y) = -2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_x(0, 0) = 0 \\ f'_y(0, 0) = 0 \end{cases}$$

Tuy nhiên, hàm số không đạt cực trị tại điểm $O(0; 0)$.



3. Định nghĩa điểm dừng, điểm tới hạn và điểm yên ngựa

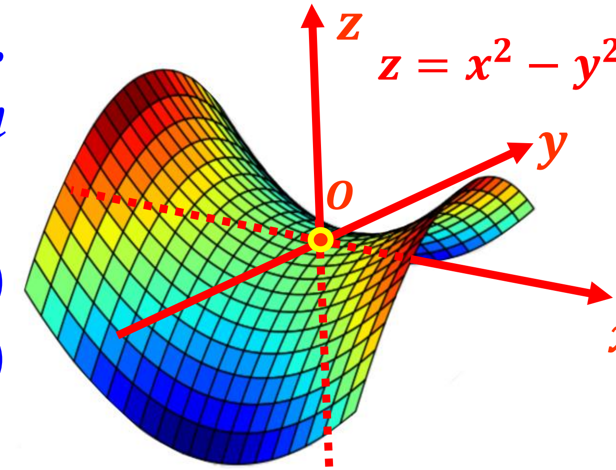
i. Điểm $M(x_0, y_0)$ thuộc tập xác định của hàm số và thỏa điều kiện $\begin{cases} f'_x(x_0, y_0) = 0 \\ f'_y(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$ được gọi là điểm dừng của hàm $f(x, y)$.

ii. Nếu $M(x_0, y_0)$ là điểm dừng của hàm f hoặc $M(x_0, y_0)$ là điểm trong của miền xác định D_f mà tại đó, ít nhất một trong các đạo hàm riêng cấp một f'_x, f'_y không tồn tại được gọi là điểm tới hạn của hàm f.

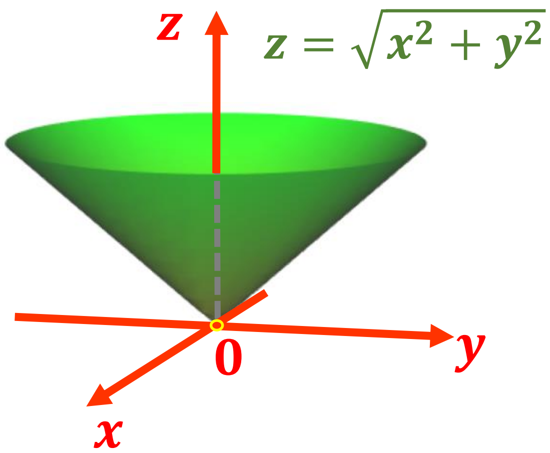
iii. Điểm $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ trên mặt cong $z = f(x, y)$ được gọi là điểm yên ngựa của mặt nếu (x_0, y_0) là điểm tới hạn của f và f không đạt cực trị tại đó, nghĩa là trong mỗi hình tròn mở tâm tại (x_0, y_0) luôn có miền chứa các điểm (x, y) thỏa $f(x, y) > f(x_0, y_0)$ và có miền chứa các điểm (x, y) thỏa $f(x, y) < f(x_0, y_0)$.

❖ Ví dụ

- *Hàm số* $f(x,y) = x^2 - y^2$, *có txđ* $D = \mathbb{R}^2$.
  $O(0;0) \in D$ *và* $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$ *nên* $O(0;0)$ *là điểm dừng.*
  Mặt khác, lấy một hình tròn $B(O,2r)$ *chứa trong* D *và chọn* $M(r;0)$, $N(0,r)$ *thuộc* $B(O,2r)$, *ta thấy:*
  $$f(M) > f(O) > f(N)$$
  Vậy $O(0,0)$ *là điểm yên ngựa của hàm số.*



- *Hàm* $g(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ *có txđ* $D = \mathbb{R}^2$.
  Điểm $O(0;0) \in D$ *nhưng* $g'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ *không xác định tại* $O(0;0)$. *Tuy vậy, hàm số vẫn đạt cực tiểu tại O vì* $g(x;y) \geq 0, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$



4. Định lý 2: (Điều kiện đủ của cực trị hàm hai biến)

Giả sử hàm $f(x,y)$ có các đạo hàm riêng cấp hai liên tục trong một hình tròn mở tâm tại điểm dừng $M(x_0,y_0)$. Ta đặt:

$$A = f''_{xx}(x_0,y_0);\ B = f''_{xy}(x_0,y_0);\ C = f''_{yy}(x_0,y_0);\ \Delta = B^2 - AC$$

Khi đó:

1. *Nếu $\Delta > 0$ thì $M(x_0,y_0)$ là điểm yên ngựa của hàm f.*
2. *Nếu $\Delta < 0$ và $A > 0$ thì f đạt cực tiểu tại điểm $M(x_0,y_0)$.*
3. *Nếu $\Delta < 0$ và $A < 0$ thì f đạt cực đại tại điểm $M(x_0,y_0)$.*
4. *Nếu $\Delta = 0$ thì ta chưa có kết luận về cực trị của f tại $M(x_0,y_0)$.*

(Khi đó chúng ta dùng định nghĩa để kiểm tra xem điểm M có phải là điểm cực trị hay không)

❖ *Cách tìm cực trị địa phương (cực trị tự do) hàm hai biến f(x,y)*

B1. *Tìm txđ, tính* f'_x ; f'_y . *Đặt:* $A = f''_{x^2}$; $B = f''_{xy}$; $C = f''_{y^2}$.

B2. *Tìm các điểm tới hạn* $M_i(x_i, y_i)$, *đó là các ng₀ của hệ* $\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases}$

và các điểm thuộc txđ nhưng f'_x *hoặc* f'_y *không tồn tại.*

B3. *Tính các đạo hàm riêng cấp 2 (nếu có) của* f *tại mỗi điểm* M_i

$$A = f''_{x^2}(M_i), B = f''_{xy}(M_i), C = f''_{y^2}(M_i) \text{ và } \Delta = B^2 - AC$$

B4. *Kết luận tại mỗi điểm* $M_i(x_i, y_i)$:

- *Nếu* $\Delta > 0$ *thì* $M_i(x_i, y_i)$ *là điểm yên ngựa của hàm* f.
- *Nếu* $\Delta < 0$ *và* $A > 0$ *thì* f *đạt cực tiểu tại điểm* $M_i(x_i, y_i)$.
- *Nếu* $\Delta < 0$ *và* $A < 0$ *thì* f *đạt cực đại tại điểm* $M_i(x_i, y_i)$.
- *Nếu* $\Delta = 0$ *hoặc không tồn tại* Δ *thì ta dùng định nghĩa cực trị để xác định xem hàm* f *có đạt cực trị tại* M_i *hay không.*

❖ Ví dụ 1

Tìm cực trị của hàm số $f(x,y) = 3y^2 - 2y^3 - 3x^2 + 6xy$.

Giải

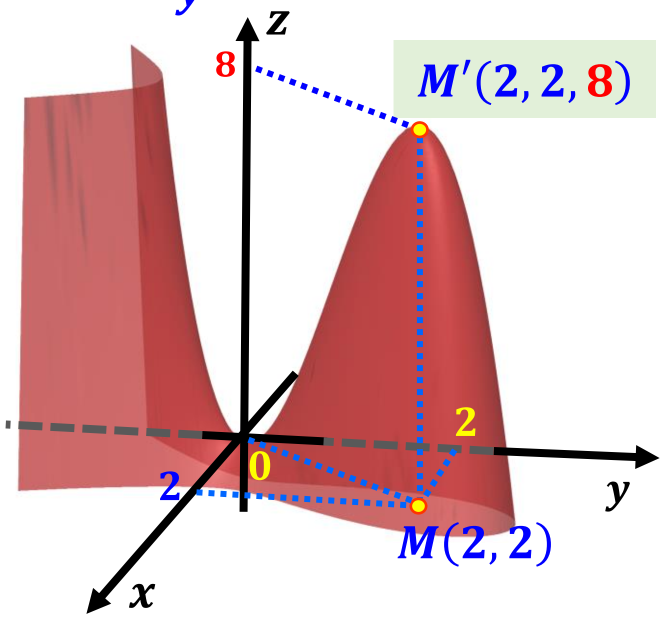
- *Txđ: D=R²*. *Ta có:* $f'_x(x;y) = -6x + 6y$, $f'_y(x;y) = 6y - 6y^2 + 6x$,

  Đặt: $A = f''_{x^2}(x;y) = -6, B = f''_{xy}(x;y) = 6$, $C = f''_{y^2}(x;y) = 6 - 12y$.

- *Giải hệ:* $\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6x + 6y = 0 \\ 6y - 6y^2 + 6x = 0 \end{cases}$

  $\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ -6y^2 + 12y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y = 2 \\ x = y = 0 \end{array}\right.$

  $\Rightarrow M(2,2), O(0,0)$ *là các điểm dừng.*



- *Tại* $M(2,2)$: $A = -6, B = 6, C = -18$,

  $\Delta = B^2 - AC = -72 < 0$

  Vậy f đạt cực đại tại $M(2,2)$ *và* $f_{CĐ} = f(2,2) = 8$.

- *Tại* $O(0,0)$: $A = -6, B = 6, C = 6, \Delta > 0 \Rightarrow O(0,0)$ *là điểm yên ngựa.*

❖ *Ví dụ 2*

Tìm cực trị của hàm số $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$.

Giải

- *Txđ:* $D = R^2$. *Ta có:* $f'_x(x,y) = 3x^2 - 3$, $\quad f'_y(x,y) = 3y^2 - 12$,
- *Đặt:* $A = f''_{x^2}(x,y) = 6x$,

  $B = f''_{xy}(x,y) = 0$,

  $C = f''_{y^2}(x,y) = 6y$,

  $\Delta = B^2 - AC$.
- *Giải hệ:* $\begin{cases} f'_x(x,y) = 0 \\ f'_y(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 3 = 0 \\ 3y^2 - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \pm 2 \end{cases}$.

  $\Rightarrow M(1,2), N(1,-2), P(-1,2), Q(-1,-2)$ *là các điểm dừng.*

- *Bảng kết luận*

Điểm dừng	$A = 6x$	$B = 0$	$C = 6y$	$\Delta = B^2 - AC$	Và cái kết
M(1,2)	6>0	0	12	$-$	f đạt cực tiểu và $f_{CT} = f(M) = 2$
N(1,-2)	6>0	0	-12	$+$	Điểm yên ngựa
P(-1,2)	-6<0	0	12	$+$	Điểm yên ngựa
Q(-1,-2)	-6<0	0	-12	$-$	f đạt cực đại và $f_{CĐ} = f(Q) = 38$

❖ Ví dụ 3

Tìm cực trị địa phương của hàm số

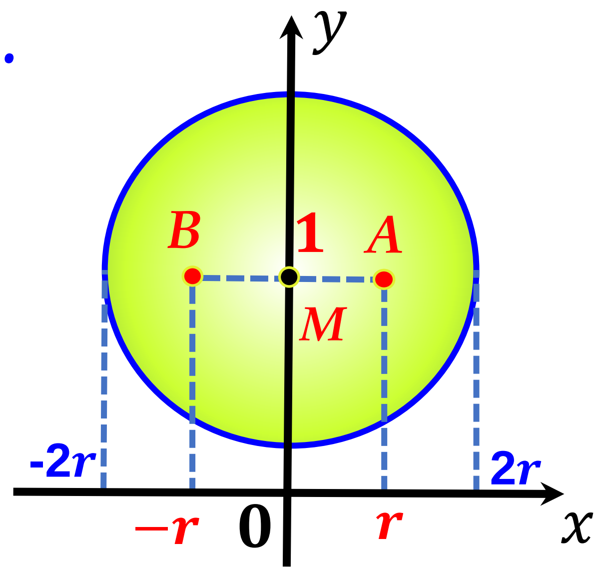
$$z(x,y)=\frac{2}{3}x^3-\frac{x^2y}{2}+\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}-y+1.$$

Giải

- Txđ: D=R^2. Ta có: $z'_x=2x^2-\mathrm{xy}+x,\ z'_y=-\frac{x^2}{2}+y-1.$
- Đặt: $A=z''_{xx}=4x-y+1$; $B=z''_{xy}=-x$; $C=z''_{yy}=1$;
- $\begin{cases}z'_x=0\\ z'_y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ y=1\end{cases}V\begin{cases}x=4\\ y=9\end{cases}.\Rightarrow N(4,9),M(0,1)$ là điểm dừng.
- Tại N(4,9): $A=8,B=-4,C=1,\Delta=B^2-AC=8>0.$

  $\Rightarrow N(4,9)$ là điểm yên ngựa.
- Tại M(0,1): $A=0,B=0,C=1,\Delta=0.$ (chưa thể kết luận gì).

Xét hàm: $z(x,y) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{x^2y}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - y + 1.$



- *Tại điểm M(0;1):* $z(M) = z(0;1) = \frac{1}{2}$.
- *Lấy hình tròn mở $B(M,2r)$ với $r > 0$ tùy ý.*

  Chọn hai điểm $A(r;1)$ và $B(-r;1)$ đối xứng nhau qua M và nằm trong $B(M,2r)$.

$$z(A) = z(r,1) = \frac{2}{3}r^3 - \frac{r^2}{2} + \frac{r^2}{2} + \frac{1}{2} - 1 + 1 = \frac{2}{3}r^3 + \frac{1}{2} > \frac{1}{2} = z(M).$$

$$z(B) = z(-r,1) = -\frac{2}{3}r^3 - \frac{r^2}{2} + \frac{r^2}{2} + \frac{1}{2} - 1 + 1 = -\frac{2}{3}r^3 + \frac{1}{2} < \frac{1}{2} = z(M).$$

- *Do r lấy bất kỳ nên suy ra z(M) không phải là giá trị lớn nhất hay nhỏ nhất của z(x,y) trong mọi lân cận của điểm M. Vậy tại điểm M hàm số không đạt cực trị.*

HOẠT ĐỘNG NHÓM

Tìm cực trị địa phương của hàm số

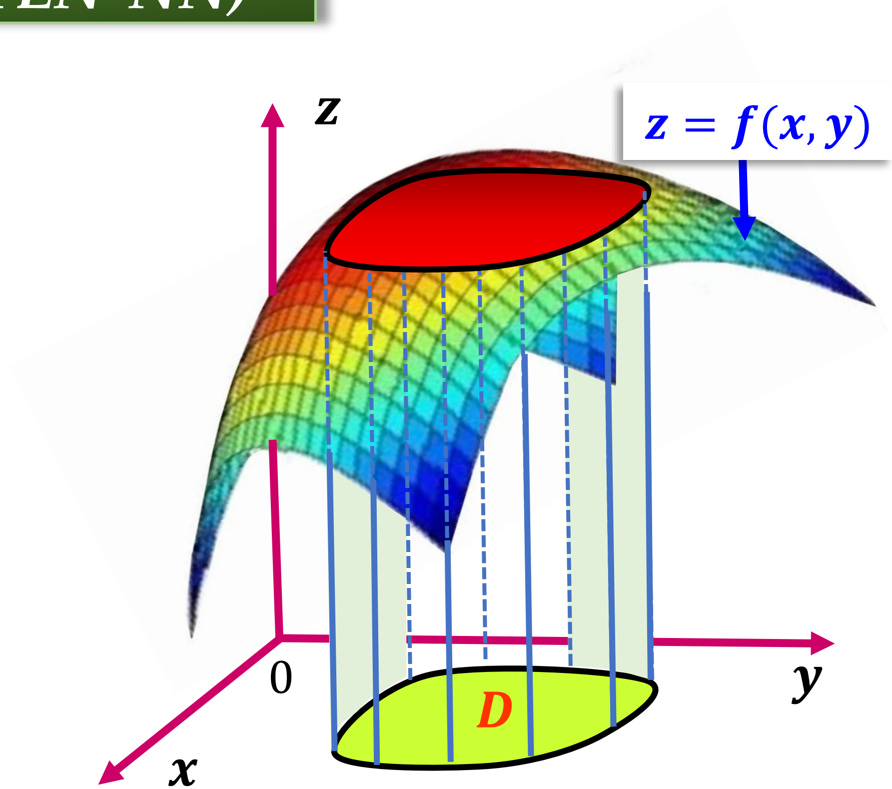
$$f(x, y) = -3y^2 + 2y^3 + 3x^2 - 6xy.$$

ĐÁP ÁN

II. GTLN VÀ GTNN CỦA HÀM 2 BIẾN TRÊN MIỀN COMPACT

1. Định lý (Cơ sở của Bài toán GTLN-NN)

Nếu hàm nhiều biến f liên tục trên miền compact D (đóng và bị chặn) thì f đạt được GTLN và GTNN trên D. Các giá trị đó đạt được tại điểm tới hạn của f thuộc phần trong của D hoặc đạt được tại điểm biên của D.



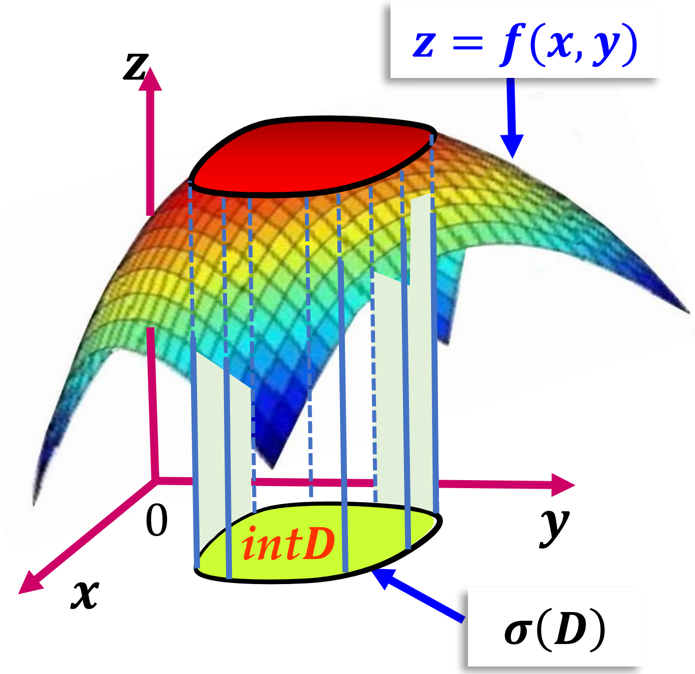
❖ Cách tìm GTLN-NN hàm f(x;y) liên tục trên tập compact D

Giả sử D có biên là tập $\sigma(D) = \{M(x;y) \in R^2 / \varphi(x,y) = 0\}$ và phần trong được ký hiệu là inD. Khi đó:

B1. *Tìm trên $intD$ các điểm tới hạn M_1; M_2; ...của f. Tính $f(M_1), f(M_2), \dots$*

B2. *Tìm $\max\limits_{\sigma(D)} f$ của $\min\limits_{\sigma(D)} f$.*

B3. *Kết luận GTLN, GTNN trong các giá trị hàm tìm được ở B1 và B2 chính là $\max\limits_{D} f$ và $\min\limits_{D} f$.*



❑ ***Chú ý:*** *B2 chính là tìm cực trị có đk của hàm f với đk biên $\varphi(x,y) = 0$.*

Nếu $\sigma(D)$ hợp thành từ nhiều đoạn biên với phương trình mỗi đoạn khác nhau thì ta phải tìm GTLN-NN của f trên từng đoạn biên ấy.

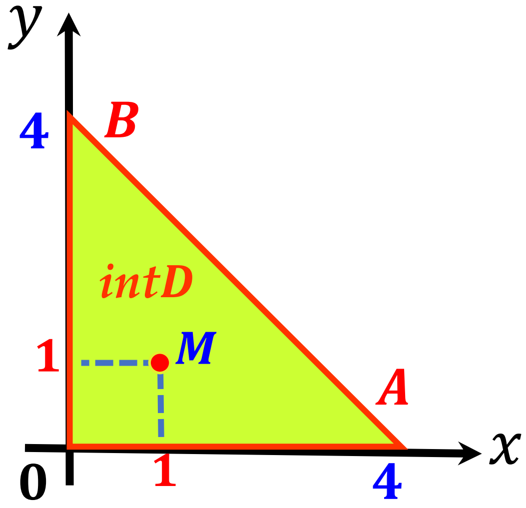
❖ Ví dụ

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$f(x,y) = 2x^3 - 6xy + 9y^2 - 12y$$

trên miền tam giác AOB, *với các tọa độ* $A(4;0), O(0;0), B(0;4)$.

Giải



- *Miền khảo sát:* $D = \Delta ABC$.
- *Ta có:* $f'_x = 6x^2 - 6y = 0;$

  $$f'_y = -6x + 18y - 12 = 0$$

- $\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ 3x^2 - x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, y = 1 \\ x = -2/3, y = \frac{4}{9} \end{array} \right.$

$\Rightarrow \begin{cases} M(1,1) \text{ là điểm dừng (nhận vì } M \in intD) \\ N\left(\frac{-2}{3}, \frac{4}{9}\right) \text{ là điểm dừng (loại vì } N \notin intD) \end{cases}$

$\Rightarrow f(M) = f(1,1) = -7.$

(1)

- *Xét trên biên* $AB: y = 4 - x, 0 \le x \le 4$

$$f(x,y) = 2x^3 - 6xy + 9y^2 - 12y$$

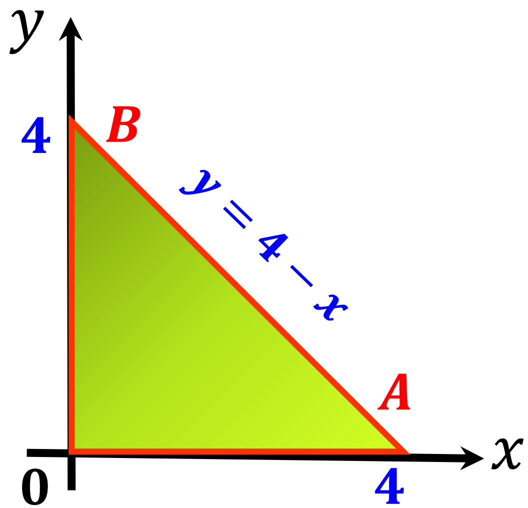
$$\Rightarrow f\Big|_{AB} = 2x^3 - 6x(4-x) + 9(4-x)^2 - 12(4-x).$$

$$= 2x^3 + 15x^2 - 84x + 96 := h(x)$$

$$\Rightarrow h'(x) = 6x^2 + 30x - 84$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \in (0,4) \\ x = -7 \notin (0,4) \end{array}\right.$$

Tính được: $\begin{cases} h(0) = 96 \\ h(4) = 128 \\ h(2) = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \min\limits_{AB} f = 4 \\ \max\limits_{AB} f = 128 \end{cases}$



(2)

- *Xét trên biên OB*: $x = 0, 0 \le y \le 4$

$$f(x,y) = 2x^3 - 6xy + 9y^2 - 12y$$

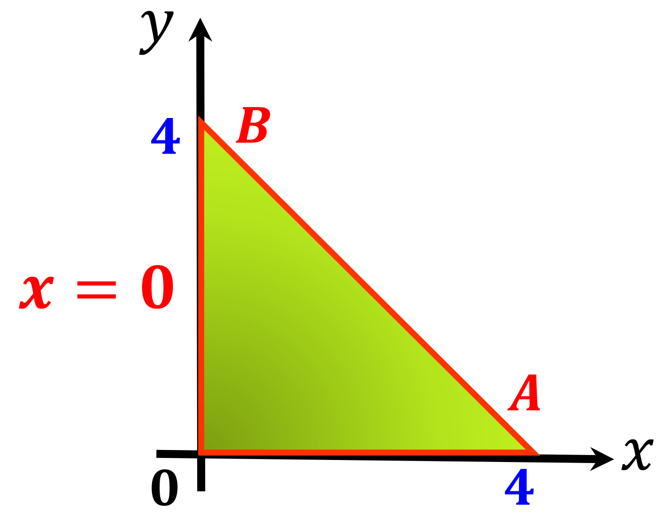
$$\Rightarrow f\Big|_{OB} = 2.0^3 - 6.0.y + 9y^2 - 12y$$

$$= 9y^2 - 12y := g(y)$$

$$\Rightarrow g'(y) = 18y - 12$$

$$g'(y) = 0 \Leftrightarrow y = 2/3 \in (0;4)$$

Tính được: $\begin{cases} g(0) = 0 \\ g(4) = 96 \\ g(2/3) = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \min\limits_{OB} f = -4 \\ \max\limits_{OB} f = 96 \end{cases}$ (3)



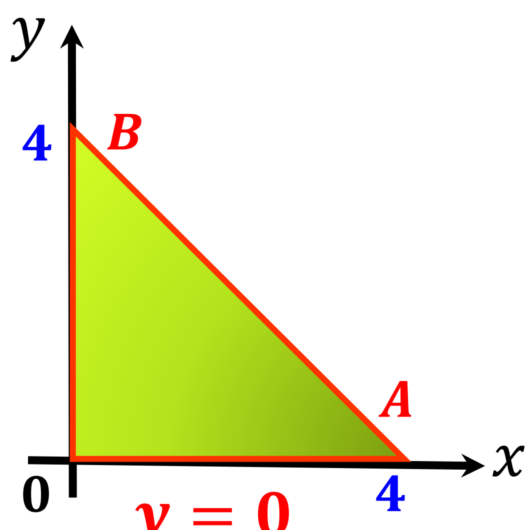
- *Xét trên biên OA: $y = 0, 0 \le x \le 4$*

$$f(x,y) = 2x^3 - 6xy + 9y^2 - 12y$$

$$\Rightarrow f\Big|_{OB} = 2x^3 - 6x.0 + 9.0^2 - 12.0$$
$$= 2x^3 := k(x)$$

$$\Rightarrow k'(x) = 6x^2; \; k'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \notin (0;4)$$

Tính được: $\begin{cases} k(0) = 0 \\ k(4) = 128 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \min\limits_{OA} f = -4 \\ \max\limits_{OA} f = 96 \end{cases}.$ **(4)**



❖ *Kết luận: Từ (1), (2), (3) và (4) ta suy ra:*

- $\max\limits_{D} f = 128$ *đạt được tại điểm* $A(4;0)$.
- $\min\limits_{D} f = -7$, *đạt được tại đểm* $M(1;1)$.

HOẠT ĐỘNG NHÓM

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$f(x,y) = 8x^3 - 9x\left(4y - y^2\right) + 12x$$

trên hình tròn $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4y\right\}$.

BÀI TẬP VỀ NHÀ

<u>Câu 1:</u> Tìm cực trị địa phương của mỗi hàm số sau:

1) $z(x,y) = x^2 + 2y^2 - 3(x+y)(y+1) - 5$

2) $z(x,y) = 2x^2 - y^2 + 2y(3x - y + 5)$

3) $z(x,y) = 2x^3 + 2y^3 - 6x - 6y - 7$

4) $z(x,y) = 2x^3 - 3x^2 + y^2 - 2y - 2020$

5) $z(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$

6) $f(x,y) = -x^2 - y^2 + xy + 2x - y + 1$.

7) $f(x,y) = -2x^3 - 2y^3 + 8x + 8y$.

8) $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy - 2x + y$.

9) $z = x^2 + y^2 + xy$.

<u>Câu 2</u>: Giả sử một doanh nghiệp sản xuất hai loại sản phẩm thương mại trong điều kiện cạnh tranh hoàn hảo với giá bán của thị trường lần lượt là p_1= 60 USD, p_2 = 75USD trên mỗi đơn vị sản phẩm và hàm chi phí là: $C = x^2 + y^2 + xy$. Trong đó x, y lần lượt là số lượng sản phẩm. Tìm các mức sản lượng x, y doanh nghiệp cần sản xuất để có lợi nhuận tối đa.