TRAINING CUỐI KÌ 2 - K17

Cấu trúc rời rạc

Trainer

Trần Nguyễn Bảo Hoàng

Châu Thế Vĩ

Nguyễn Thị Nguyệt Ánh

CHƯƠNG 4:
ĐẠI SỐ BOOLE

Nội dung

I. ĐẠI SỐ BOOLE

II. HÀM BOOLE

III. BÌA KARNAUGH

IV. MẠCH LOGIC

V. BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG

I. ĐẠI SỐ BOOLE

1. Định nghĩa
2. Tính chất

I. ĐẠI SỐ BOOLE

1. Định nghĩa:

- Là một tập A có ít nhất 2 phần tử, trong đó có 2 phần tử đặc biệt được kí hiệu là 0 và 1.
- Trên A xét các phép toán hai ngôi $\wedge$, $\vee$ và phép toán một ngôi $-$ (bù)

I. ĐẠI SỐ BOOLE

2. Tính chất:

Với $\forall$ x, y, z $\in$ A, ta có:

- ***Tính giao hoán:*** $\begin{cases} x \wedge y = y \wedge x \\ x \vee y = y \vee x \end{cases}$

- ***Tính kết hợp:*** $\begin{cases} (x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z) \\ (x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z) \end{cases}$

- ***Tính phân phối:*** $\begin{cases} x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \vee z) \\ x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \end{cases}$

- ***Tính hấp thụ:*** $\begin{cases} x \wedge (x \vee y) = x \\ x \vee (x \wedge y) = x \end{cases}$

- ***Tính trung hòa:*** $\begin{cases} x \wedge 1 = x \\ x \vee 0 = x \end{cases}$

- ***Tính bù:*** $\begin{cases} x \wedge \bar{x} = 0 \\ x \vee \bar{x} = 1 \end{cases}$

II. HÀM BOOLE

1. Biến Boole
2. Hàm Boole
3. Dạng nối rời chính tắc

II. HÀM BOOLE

1. Biến Boole:

- Biến x được gọi là biến Boole nếu nó chỉ nhận các giá trị trong tập {0, 1}.

2. Hàm Boole:

- Một hàm từ tập $\{(x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_i \in \{0, 1\}, 1 \leq i \leq n\}$ tới tập {0, 1} được gọi là một hàm Boole bậc n.
- Ví dụ: $F(x, y, z) = xz + y + z$

II. HÀM BOOLE

3. Dạng nối rời chính tắc

- Xét tập hợp các hàm Boole n biến F_n theo biến $x_1, x_2, \ldots, x_n$

- Mỗi hàm Boole x, hay $\bar{x}$ được gọi là một **từ đơn**.
- **Đơn thức** là tích khác 0 của một số hữu hạn từ đơn.
- **Từ tối tiểu** (đơn thức tối tiểu) là tích khác 0 của đúng n từ đơn.
- **Công thức đa thức** là công thức biểu diễn hàm Boole thành tổng của các đơn thức.
- **Dạng nối rời chính tắc** là công thức biểu diễn hàm Boole thành tổng của các đơn thức tối tiểu.

- ***Ví dụ:***

Xét hàm Boole, với 3 biến x, y, z

- $x, y, z, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ là các từ đơn.
- xy, yz, xz là các đơn thức.
- $xyz, xy\bar{z}$ là các từ tối tiểu.

- $G = xyz + yz + x$ là một công thức đa thức.
- $F = xy\bar{z} + \bar{x}y\bar{z}$ là một dạng nối rời chính tắc.

II. HÀM BOOLE

3. Dạng nối rời chính tắc

Với $\mathbb{B}^n = \{ u = (x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_i \in \mathbb{B}\}$

- Xét hàm Boole F theo n biến $x_1, x_2, ..., x_n$. Đặt

- $F^{-1}(1) = \{u \in \mathbb{B}^n \mid F(u) = 1\}$
- $F^{-1}(0) = \{u \in \mathbb{B}^n \mid F(u) = 0\}$

- **Ví dụ:**

Nếu F là hàm Boole theo 3 biến x, y, z sao cho:

$$F^{-1}(1) = \{101, 001, 100, 011\}$$

→ Dạng nối rời chính tắc của F là:

$$F = x\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz$$

Tương tự có $F^{-1}(0) = \{000, 010, 110, 111\}$

x	y	z	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	1	0	0
1	0	1	1
1	1	1	0

II. HÀM BOOLE

❖ Tìm dạng nối rời chính tắc

- **Cách 1:** Bổ sung từ đơn còn thiếu vào các đơn thức.

- *Bước 1:* Khai triển hàm Boole thành tổng của các đơn thức.

- *Bước 2:* Với mỗi đơn thức thu được ở bước 1, ta nhân đơn thức đó với tổng của những từ đơn bị thiếu và phần bù của nó trong đơn thức đó.

- *Bước 3:* Tiếp tục khai triển hàm thu được ở bước 2 và loại bỏ những đơn thức bị trùng. Công thức đa thức thu được chính là dạng nối rời chính tắc của hàm Boole ban đầu.

- ***Ví dụ:***

Tìm dạng nối rời chính tắc của hàm Boole F sau:

$$F(x, y, z) = \bar{x} + \bar{y}z + xy\bar{z}$$

Giải:

$$F(x, y, z) = \bar{x}(y + \bar{y})(z + \bar{z}) + \bar{y}z(x + \bar{x}) + xy\bar{z}$$
$$= \bar{x}yz + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}\bar{z} + x\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}z$$
$$+ xy\bar{z}$$
$$= \bar{x}yz + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}\bar{z} + x\bar{y}z + xy\bar{z}$$

II. HÀM BOOLE

❖ Tìm dạng nối rời chính tắc

- **<u>Cách 2:</u>** Dùng bảng chân trị. Để ý đến các vector boole trong bảng chân trị mà tại đó F = 1.

$F(x, y, z) = \bar{x} + \bar{y}z + xy\bar{z}$

x	y	z	F
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	0	1
1	0	1	1
1	1	1	0

$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$

$\bar{x}\bar{y}z$

$\bar{x}y\bar{z}$

$\bar{x}yz$

$xy\bar{z}$

$x\bar{y}z$

Tìm dạng nối rời chính tắc của hàm Boole F sau:

$$F(x, y, z) = \bar{x} + \bar{y}z + xy\bar{z}$$

$$F(x, y, z) = \bar{x}yz + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}\bar{z} + x\bar{y}z + xy\bar{z}$$

III. BÌA KARNAUGH

1. Cách biểu diễn bìa Karnaugh
2. Tế bào
3. Đơn giản như nhau
4. Công thức đa thức tối tiểu
5. Phủ tối tiểu

III. BÌA KARNAUGH

- Bìa Karnaugh là một công cụ vô cùng thuận tiện cho việc đơn giản các biểu thức trong đại số Boole.
- Dùng bìa Kar để tìm dạng nối rời chính tắc:

    + Dạng nối rời chính tắc bản chất chính là tổng các tế bào gồm 1 ô duy nhất

1. Cách biểu diễn bìa Kar

Biểu diễn theo từ đơn

	x	x	$\bar{x}$	$\bar{x}$	
z					$\bar{t}$
z					t
$\bar{z}$					t
$\bar{z}$					$\bar{t}$
	$\bar{y}$	y	y	$\bar{y}$	

Biểu diễn theo dạng kí số

zt \ xy	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

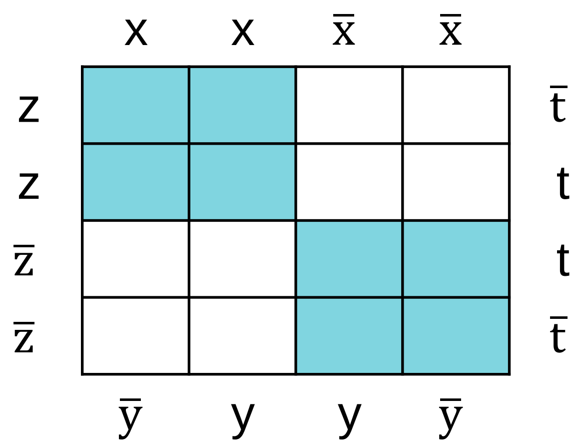
III. BÌA KARNAUGH

2. Tế bào

- **Tế bào** là hình chữ nhật gồm 2^{n-k} $(0 \le k \le n)$ ô kề nhau
- **Tế bào lớn** là một tế bào không bị chứa trong tế bào nào khác

❖ Quy tắc tìm Tế bào lớn:

- Vòng gom phải là hình chữ nhật chứa 2^n ô kề nhau.
- Các vòng phải được gom sao cho số ô có thể vào trong vòng là lớn nhất.
- Có thể gom cả những ô đã gom vào trong vòng.



- Tế bào gồm 1 ô: $xyzt$, $xyz\bar{t}$, $xy\bar{z}t$, $x\bar{y}zt$, $\bar{x}y\bar{z}t$, $x\bar{y}z\bar{t}$, ...
- Tế bào gồm 2 ô: xyz, xyt,...
- Tế bào 4 ô: xz, $\bar{x}\bar{z}$, ...
- Tế bào lớn: xy, xz, $\bar{x}\bar{z}$., ..

- ***Ví dụ:*** Tìm dạng nối rời chính tắc của hàm Boole F sau:

$$F(x, y, z) = \bar{x} + \bar{y}z + xy\bar{z}$$

- **Cách 3:** Dùng bìa Karnaugh

	$\bar{x}$	$\bar{x}$	x	x
$\bar{z}$	1	1	1	
z	1	1		1
	$\bar{y}$	y	y	$\bar{y}$

$$F(x, y, z) = \bar{x}yz + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}\bar{z} + x\bar{y}z + xy\bar{z}$$

III. BÌA KARNAUGH

3. Đơn giản như nhau

- Cho $f \in F_4$ có 3 dạng đa thức:
  - $f = \bar{x}y + \bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz + x\bar{y}\bar{z}t$ (1)
  - $f = \bar{x}z + \bar{x}\bar{z}t + yzt + xy\bar{z}t$ (2)
  - $f = z\bar{t} + y\bar{z}t + \bar{x}yz + x\bar{z}t$ (3)

(1) và (2) đơn giản như nhau, vì $\begin{cases} p = q = 4 \\ \deg(u_i) = \deg(v_i), 1 \leq i \leq 4 \end{cases}$

(2) phức tạp hơn (3) hay (3) đơn giản hơn (2), vì $\begin{cases} p = q = 4 \\ \deg(u_4) > \deg(v_4) \end{cases}$

III. BÌA KARNAUGH

4. Công thức đa thức tối tiểu

- Công thức đa thức F được gọi là tối tiểu nếu với bất kì công thức đa thức G nào của hàm Boole đã cho mà đơn giản hơn F thì G và F đơn giản như nhau.
- Cách tìm: Sử dụng bìa Karnaugh

❖ Dùng bìa Kar để tìm công thức đa thức tối tiểu :

- ***Bước 1***: Vẽ bìa Kar của F
- ***Bước 2***: Xác định tế bào lớn của F
- ***Bước 3***: Xác định tế bào lớn nhất thiết phải chọn
- ***Bước 4***: Xác định họ phủ
- ***Bước 5***: Xác định công thức đa thức tối tiểu

III. BÌA KARNAUGH

5. Phủ tối tiểu

- Cho S = {x_1, x_2, ..., x_n} là họ các tập con của X

Phủ của tập X: S gọi là phủ của X nếu X = ∪ x_i

Phủ tối tiểu của X:

Giả sử S là một phủ của X. Khi đó S gọi là phủ tối tiểu của X nếu với mọi i, S\x_i không phủ X.

- **Ví dụ**:

Cho X = {a, b, c, d}, A = {a, b}, B = {c, d}, C = {a, c}, D = {b, d}

S = {A, B} là phủ tối tiểu của X.

S = {A, C} không phủ.

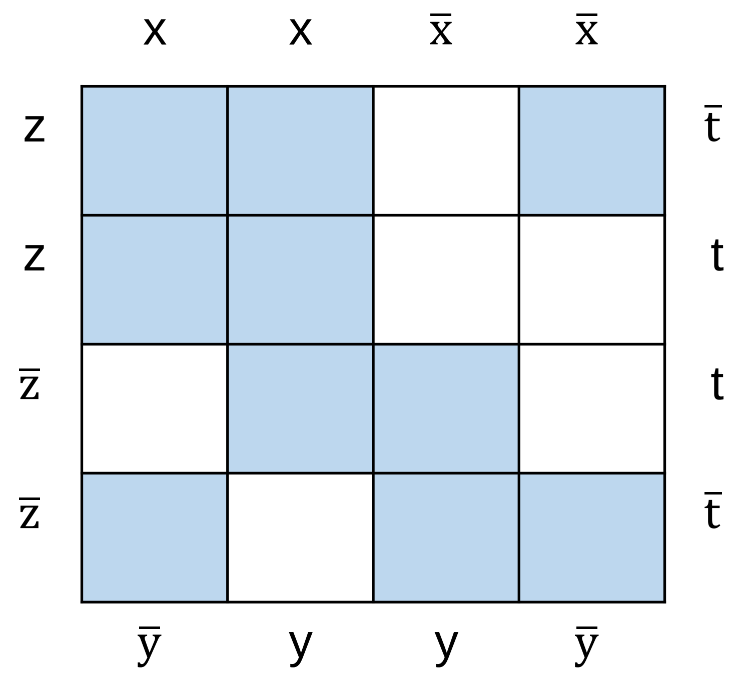
S = {A, B, C} là phủ không tối tiểu của X.

III. BÌA KARNAUGH

- **Ví dụ:**

Tìm các công thức đa thức tối tiểu của hàm F:

$$F(x, y, z, t) = \bar{y}\bar{z}\bar{t} + xyz + y\bar{z}t + \bar{y}z\bar{t} + \bar{x}\bar{z}\bar{t} + x\bar{y}zt$$



$T_1 = \bar{y}\bar{t}$ $\quad T_2 = xz$

$T_3 = y\bar{z}t$ $\quad T_4 = \bar{x}\bar{z}\bar{t}$

$T_5 = \bar{x}y\bar{z}$ $\quad T_6 = xyt$

→ Các tế bào lớn nhất thiết phải chọn: T1, T2

- Sơ đồ phủ cho Kar(F):

$T_1 \rightarrow T_2 \rightarrow T_3 \rightarrow T_4$

$T_3 \rightarrow T_5$

$T_2 \rightarrow T_5 \rightarrow T_3$

$T_5 \rightarrow T_6$

→ Xác định họ phủ: có 4 phủ

(1) $T_1 \vee T_2 \vee T_3 \vee T_4$

$\Leftrightarrow \bar{y}\bar{t} \vee xz \vee y\bar{z}t \vee \bar{x}\bar{z}\bar{t}$

(2) $T_1 \vee T_2 \vee T_3 \vee T_5$

$\Leftrightarrow \bar{y}\bar{t} \vee xz \vee y\bar{z}t \vee \bar{x}y\bar{z}$

(3) $T_1 \vee T_2 \vee T_5 \vee T_3$

$\Leftrightarrow \bar{y}\bar{t} \vee xz \vee \bar{x}y\bar{z} \vee y\bar{z}t$

(4) $T_1 \vee T_2 \vee T_5 \vee T_6$

$\Leftrightarrow \bar{y}\bar{t} \vee xz \vee \bar{x}y\bar{z} \vee xyt$

	x	x	$\bar{x}$	$\bar{x}$	
z	1 2	2		1	$\bar{t}$
z	2	6 2			t
$\bar{z}$		6 3	5 3		t
$\bar{z}$	1		4 5	1 4	$\bar{t}$
	$\bar{y}$	y	y	$\bar{y}$	

Ta thấy 3 phủ đơn giản như nhau nên ta có 3 công thức đa thức tối tiểu:

- (1) $= \bar{y}\bar{t} \vee xz \vee y\bar{z}t \vee \bar{x}\bar{z}\bar{t}$
- (2) $= \bar{y}\bar{t} \vee xz \vee y\bar{z}t \vee \bar{x}y\bar{z}$
- (3) $= \bar{y}\bar{t} \vee xz \vee \bar{x}y\bar{z} \vee xyt$

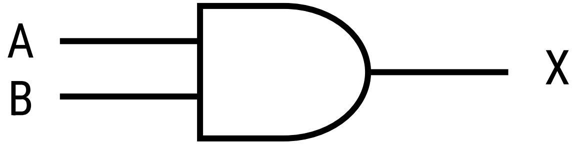
IV. MẠCH LOGIC

1. Các cổng logic
2. Vẽ sơ đồ mạch

IV. MẠCH LOGIC

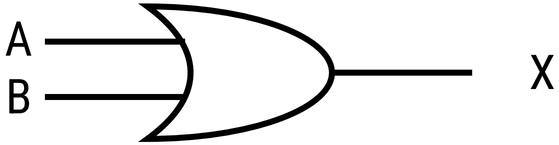
CÁC CỔNG LOGIC

Cổng AND



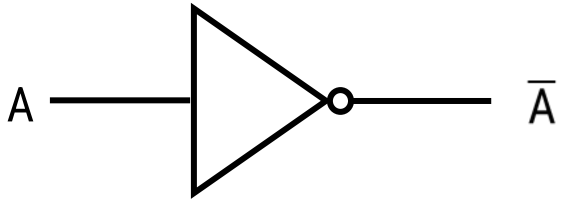
$X = A.B$

Cổng OR



$X = A + B$

Cổng NOT

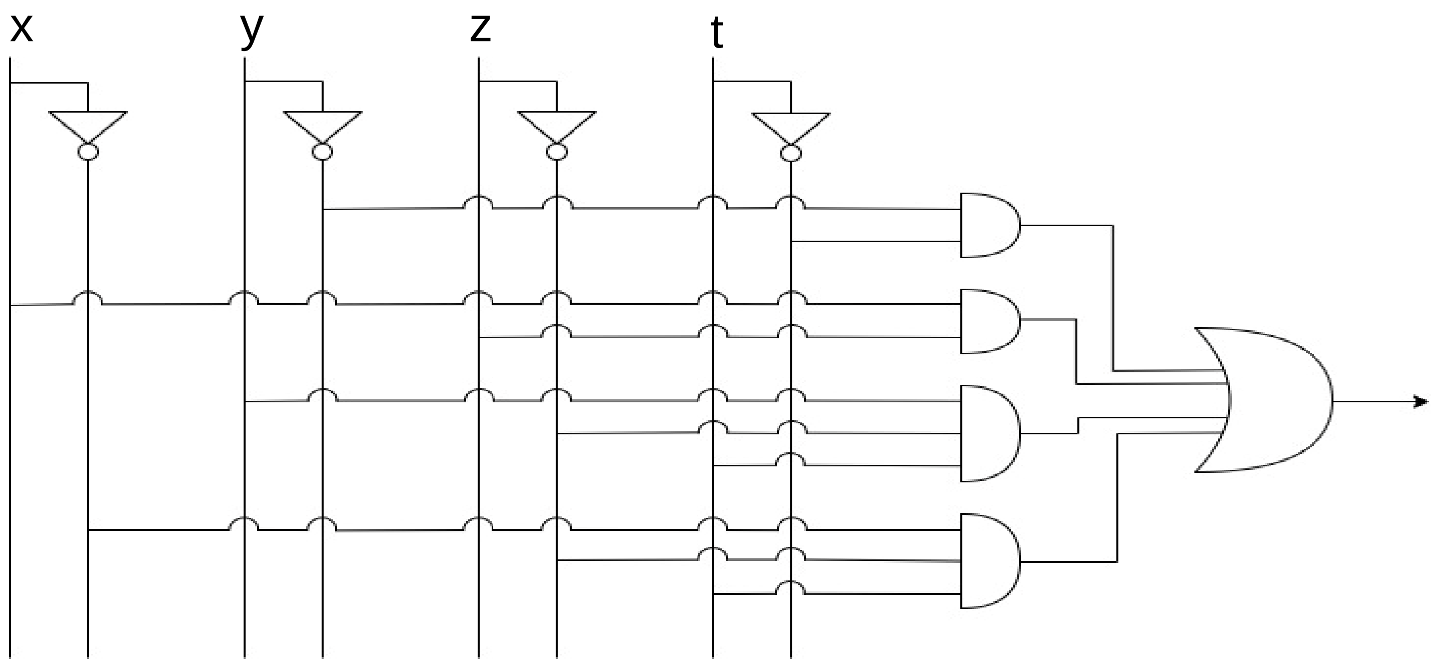


IV. MẠCH LOGIC

2. Vẽ sơ đồ mạch

− **<u>Ví dụ</u>:** Vẽ sơ đồ mạch cho công thức đa thức tối tiểu của hàm F sau:

$$\mathbf{F} = \bar{y}\bar{t} \lor \mathbf{xz} \lor y\bar{z}t \lor \bar{x}\bar{z}\bar{t}$$



V. BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG

V. BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG

Bài tập:

Cho hàm Boole F(x, y, z, t), biết:

$$F^{-1}(0) = \{0110, 0111, 0011, 0001\}$$

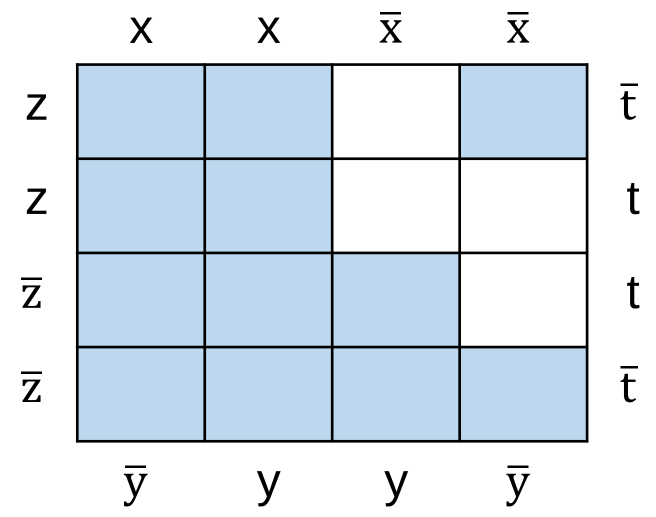
a) Tìm dạng nối rời chính tắc của hàm F.
b) Tìm các công thức đa thức tối tiểu của hàm F.
c) Hãy vẽ sơ đồ mạch cho một công đa thức tối tiểu của hàm F vừa tìm được.

V. BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG

Giải:

$F^{-1}(0) = \{0110, 0111, 0011, 0001\}$

a)



→ **Dạng nối rời chính tắc:**

F(x, y, z, t) = $x\bar{y}z\bar{t} + x\bar{y}zt + x\bar{y}\bar{z}t + x\bar{y}\bar{z}\bar{t} + xyz\bar{t} + xyzt + xy\bar{z}t + xy\bar{z}\bar{t} + \bar{x}y\bar{z}t + \bar{x}y\bar{z}\bar{t} + \bar{x}\bar{y}z\bar{t} + \bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{t}$

$F^{-1}(0) = \{0110, 0111, 0011, 0001\}$

b) Tìm các công thức đa thức tối tiểu

→ Các tế bào lớn:

$T_1 = x$ $\qquad$ $T_2 = y\bar{z}$

$T_3 = \bar{y}\bar{t}$ $\qquad$ $T_4 = \bar{z}\bar{t}$

→ Có 1 phủ: $T_1 \cup T_2 \cup T_3$

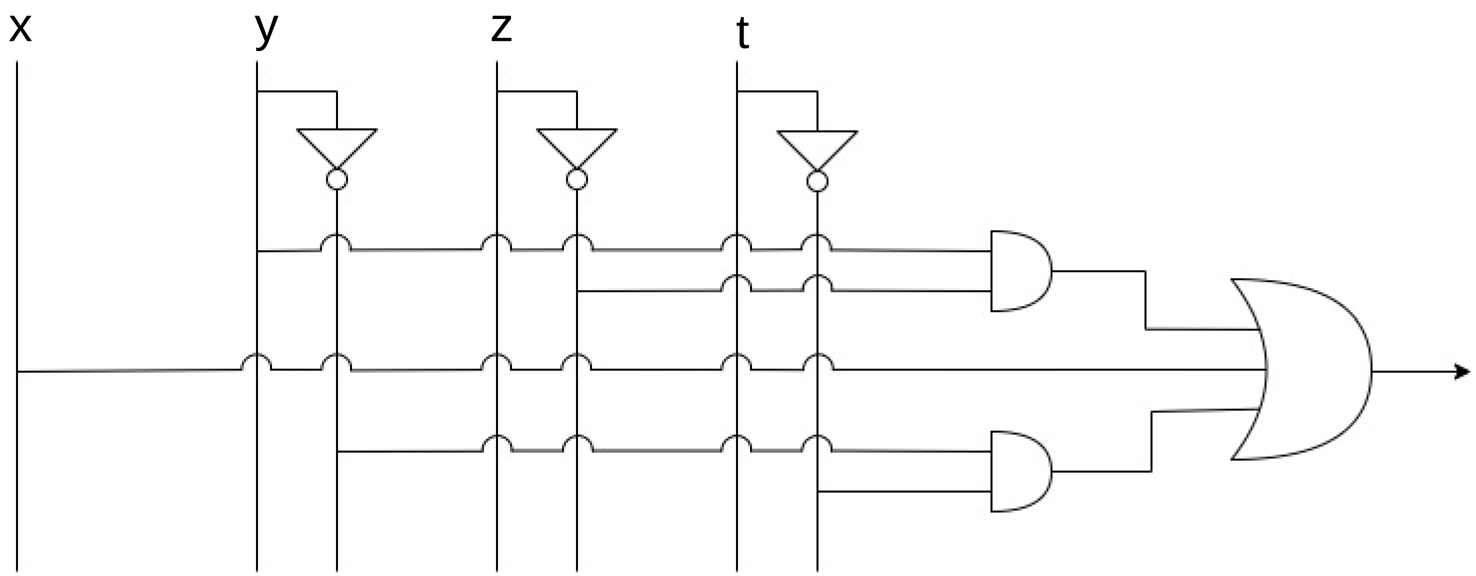
- Công thức đa thức tối tiểu:

$F = x \vee y\bar{z} \vee \bar{y}\bar{t}$

	x	x	$\bar{x}$	$\bar{x}$	
z	1 3	1		3	$\bar{t}$
z	1	1			t
$\bar{z}$	1	1 2	2		t
$\bar{z}$	1 4 3	1 2 4	2 4	4 3	$\bar{t}$
	$\bar{y}$	y	y	$\bar{y}$	

c) Vẽ sơ đồ mạch

$$F = x \lor y\bar{z} \lor \bar{y}\bar{t}$$



CHƯƠNG 5:
ĐỒ THỊ

Nội dung

I. Khái niệm đồ thị

II. Đường đi Euler

III. Đường đi Hamilton

IV. Bài tập

V. Thuật toán Dijkstra

I. KHÁI NIỆM ĐỒ THỊ

1. Đồ thị

G = (V, E) với V $\neq \emptyset$

- V: tập các đỉnh
- E: tập các cạnh

*** Cạnh bội (song song)**

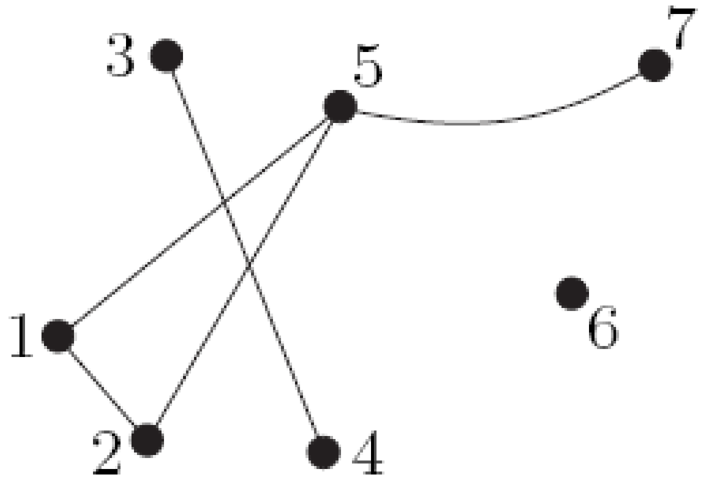
- Hai cạnh phân biệt cùng tương ứng với một cặp đỉnh

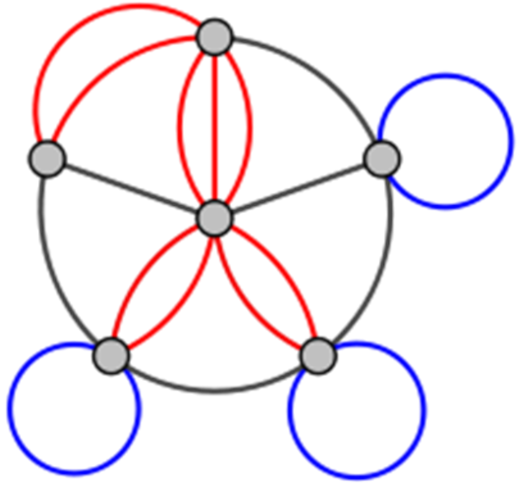
*** Đơn đồ thị**

- Đồ thị không có vòng và cạnh song song

*** Đa đồ thị**

- Các đồ thị không phải là đơn đồ thị

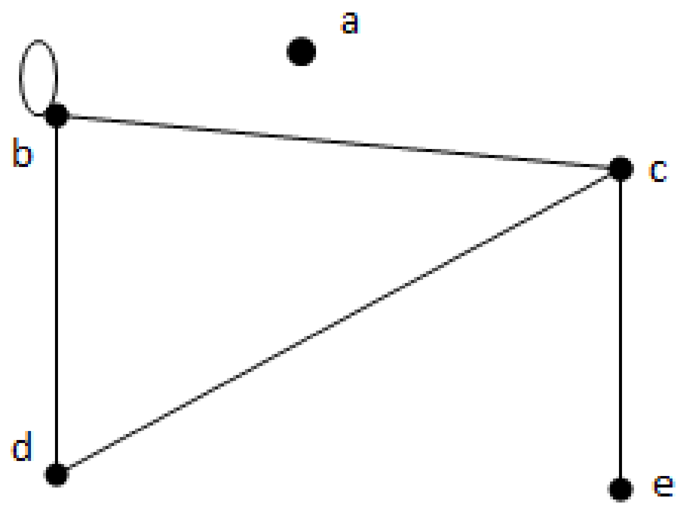




1. Đồ thị

*** Bậc của đỉnh**

- Đỉnh của đồ thị G có bậc là *n* nếu nó kề với *n* đỉnh khác.
- Ký hiệu: *deg*(*v*) hay *d*(*v*)
- Mỗi vòng (loop) được tính là 2 cạnh tới một đỉnh. → *deg*(*v*) = 2
- Đỉnh cô lập: *deg*(*v*) = 0
- Đỉnh treo: *deg*(*v*) = 1



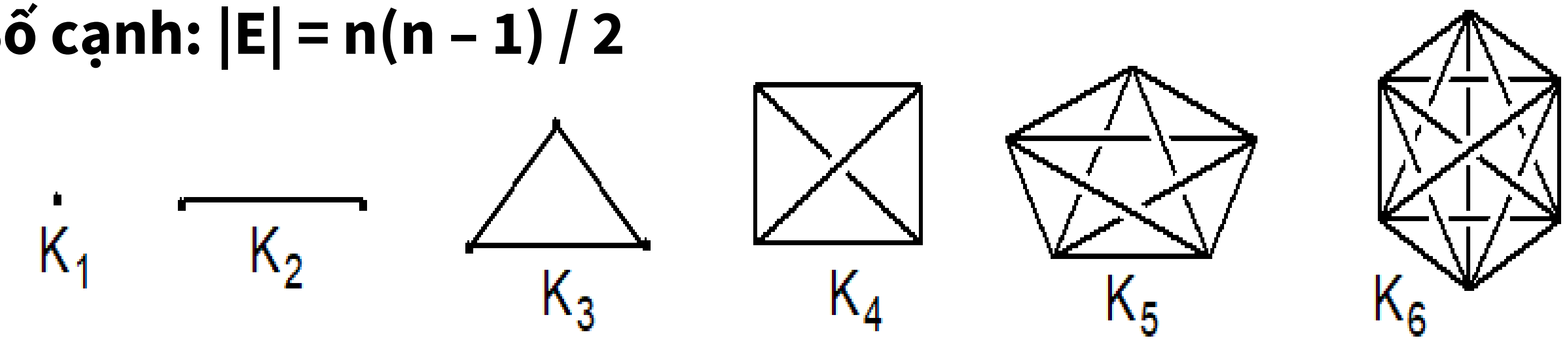
Lưu ý: mỗi loop (nếu có) tại 1 đỉnh thì khi đếm số cạnh ta tính bằng 1.

1. Đồ thị

Đồ thị đầy đủ: Đồ thị mà mọi cặp đỉnh đều kề nhau.

K_n: đơn đồ thị đầy đủ

- **Số đỉnh : |V| = n**
- **Bậc: deg(v) = n – 1**
- **Số cạnh: |E| = n(n – 1) / 2**

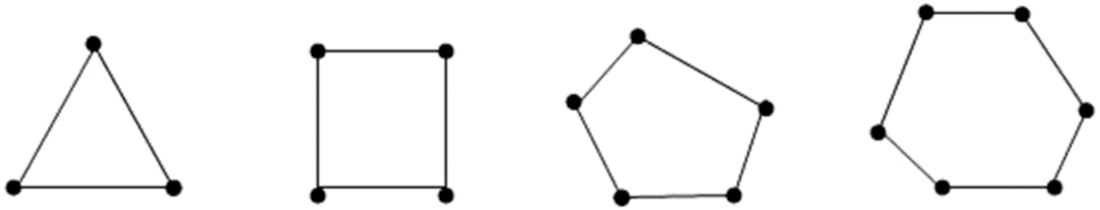


* Đồ thị đều bậc k (Đồ thị k-đều)

- Số đỉnh: $|V| = n$
- Bậc: $deg(v) = k$
- Số cạnh: $|E| = n.k/2$

* Đồ thị vòng Cn

- Đơn đồ thị
- Số đỉnh: $|V| = n \geq 3$
- Bậc: $deg(v) = 2$
- Số cạnh: $|E| = n$



C_3 C_4 C_5 C_6

1. Đồ thị

Tính chất đồ thị vô hướng:

1. G là đơn đồ thị, vô hướng, có n đỉnh ($n > 1$) thì trong G luôn có ít nhất 2 đỉnh cùng bậc.
2. Với mọi đồ thị vô hướng, $G = (V, E)$ ta có tổng số bậc của mọi đỉnh trong G luôn gấp đôi số cạnh của G.
3. Tổng số bậc của các đỉnh bậc lẻ và số đỉnh bậc lẻ trong đồ thị G luôn là số chẵn.
4. Trong mọi đơn đồ thị $G = (V, E)$, nếu số đỉnh nhiều hơn 2 và có đúng hai đỉnh cùng bậc thì hai đỉnh này không đồng thời có bậc bằng 0 hoặc $n - 1$.

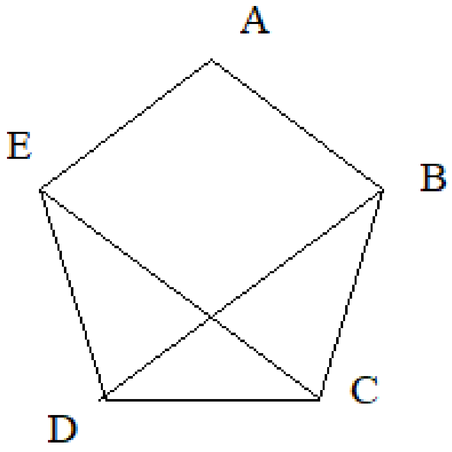
1. Đồ thị

Ví dụ: Có tồn tại đồ thị vô hướng có 5 đỉnh với các bậc sau đây không? Nếu có hãy vẽ phác họa.

a) 3, 3, 3, 3, 2

b) 3, 3, 3, 4, 4

a)



Giải:

b) Không vẽ được vì số đỉnh bậc lẻ không phải là số chẵn.

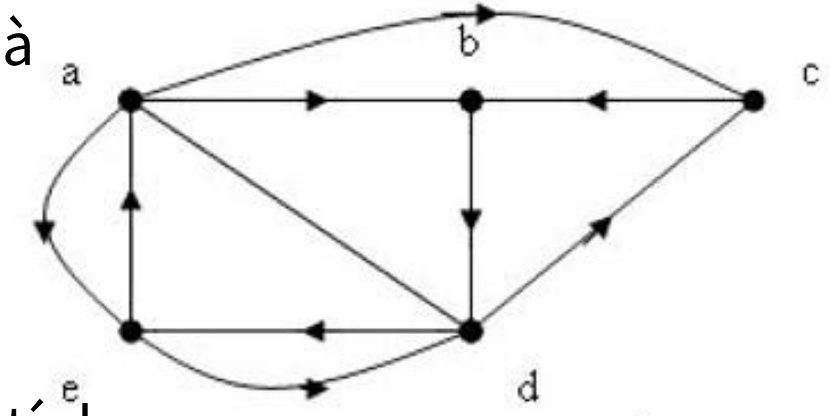
1. Đồ thị

Tính chất đồ thị có hướng:

- G được gọi là đầy đủ nếu đồ thị vô hướng của nó là đầy đủ.
- Bậc của đỉnh:

- $d_{out}(u)$ hay $deg_{out}(u)$: Bậc ra của u.
- $d_{in}(v)$ hay $deg_{in}(v)$: Bậc vào của v.

- Mỗi loop (nếu có) tại 1 đỉnh của G có hướng thì ta tính $d_{out} = d_{in}=1$.
- Một đỉnh u gọi là đỉnh cân bằng nếu ta có
  $d_{out}(u) = d_{in}(u)$.
- Tổng bậc vào của các đỉnh bằng tổng bậc ra và bằng số cạnh của đồ thị.

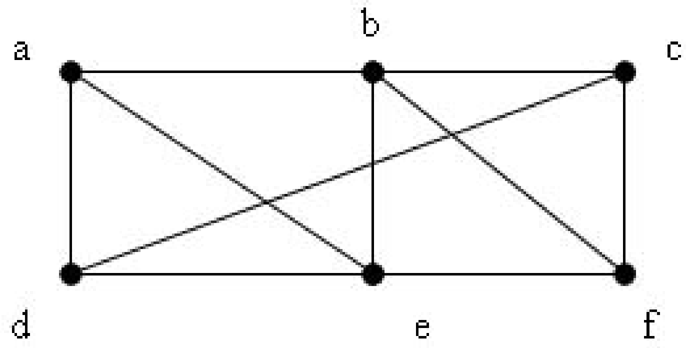


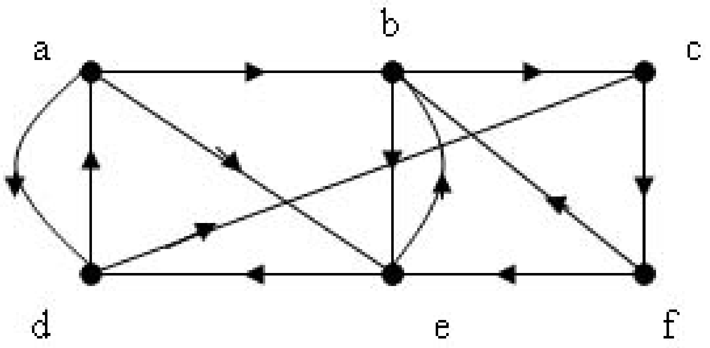
2. Chu trình, đường đi

**** Đường đi đơn:***

Đường đi không qua **cạnh** nào quá một lần (chu trình đơn là đường đi đơn với điểm đầu và điểm cuối trùng nhau)

**** Đường đi sơ cấp:*** Đường đi không qua **đỉnh** nào quá một lần.

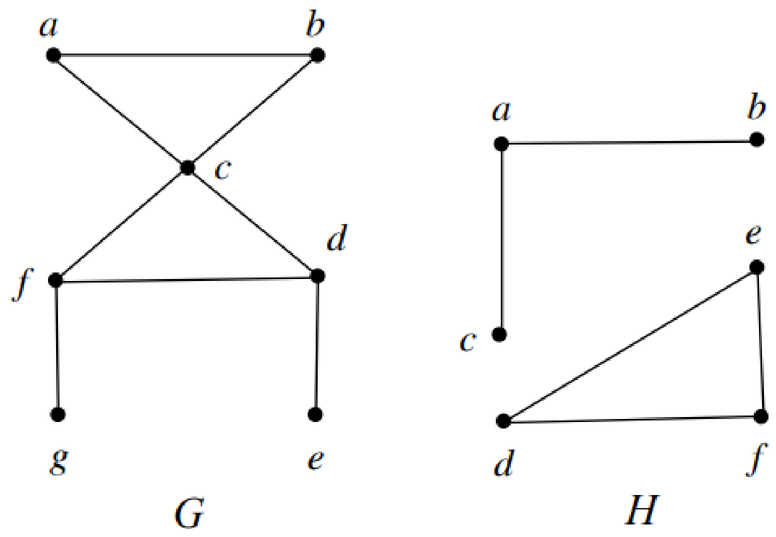




3. Liên thông

a) Đồ thị vô hướng

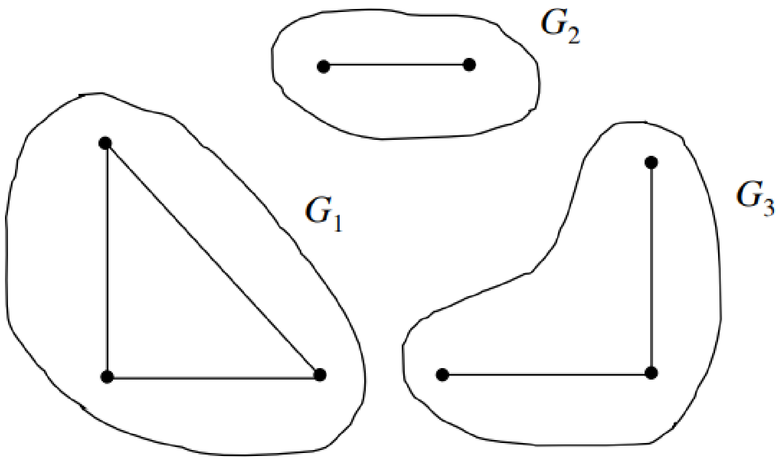
- Đồ thị vô hướng G được gọi là liên thông nếu luôn tìm được đường đi giữa 2 đỉnh bất kì trong đồ thị.



3. Liên thông

a) Đồ thị vô hướng

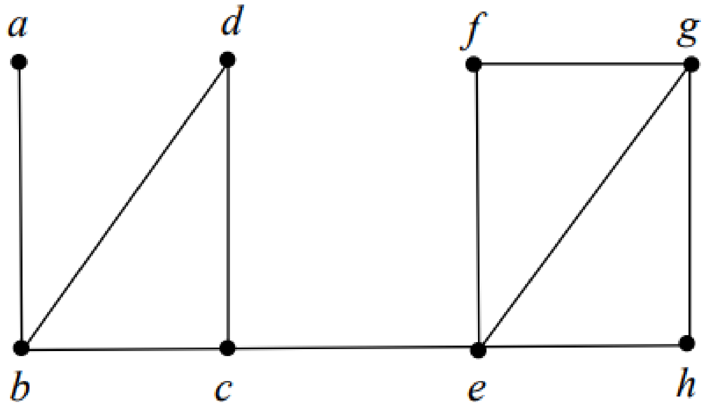
- Đồ thị không liên thông là hợp của 2 hay nhiều đồ thị liên thông, giữa các đồ thị này không có đỉnh chung. Các đồ thị liên thông rời nhau như vậy gọi là thành phần liên thông của đồ thị đang xét.



3. Liên thông

a) Đồ thị vô hướng

- Cạnh cắt (cầu) là cạnh khi xóa sẽ tạo ra đồ thị con với nhiều thành phần liên thông hơn đồ thị ban đầu.
- Đỉnh cắt (đỉnh khớp): là một đỉnh mà nếu loại bỏ nó và các cạnh liên thuộc thì đồ thị tăng số thành phần liên thông



G

3. Liên thông

b) Đồ thị có hướng

- **Liên thông mạnh:** đồ thị có hướng G được gọi là liên thông mạnh nếu luôn tìm được đường đi giữa hai đỉnh bất kì của nó.
- **Liên thông yếu:** đồ thị có hướng G được gọi là liên thông yếu nếu đồ thị vô hướng tương ứng của nó là vô hướng liên thông.

II. ĐƯỜNG ĐI EULER

1. Đường đi Euler

Cho đồ thị G = (V, E) liên thông

- **Chu trình Euler:** Đường đi qua mỗi **cạnh** của đồ thị G **đúng một lần** sao cho đỉnh bắt đầu và đỉnh kết thúc phải **trùng nhau**.
- **Đồ thị Euler:** Đồ thị có chứa một chu trình Euler
- **Đường đi Euler:** Đường đi qua mỗi **cạnh** của đồ thị G **đúng một lần** sao cho đỉnh bắt đầu và đỉnh kết thúc **không trùng nhau.**
- **Đồ thị nửa Euler:** là đồ thị có đường đi Euler.

2. Điều kiện cần và đủ

Cho đồ thị vô hướng liên thông G = (V, E).

G là đồ thị Euler ⇔ mọi đỉnh của G đều có bậc chẵn.

- G liên thông có hai đỉnh bậc lẻ còn mọi đỉnh khác đều bậc chẵn ⇔ **G có đường đi Euler, không có chu trình Euler.**
- Đồ thị có hướng liên thông mạnh là đồ thị Euler khi và chỉ khi:

$$d^+(v) = d^-(v), \forall v \in V$$

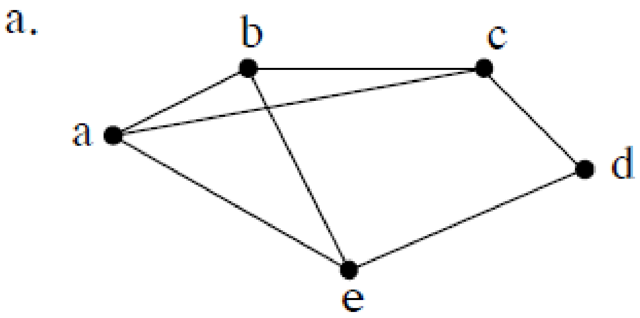
- Cho G là một đồ thị có hướng, liên thông và có nhiều hơn 1 đỉnh.
- Ta nói G có đường đi Euler ⇔ có đúng 2 đỉnh u, v thỏa

$$\begin{cases} d_{out}(u) = d_{in}(u) + 1 \\ d_{in}(v) = d_{out}(v) + 1 \end{cases}$$

và mọi đỉnh còn lại đều cân bằng (trong đó u là đỉnh xuất phát và v là đỉnh kết thúc của đường đi Euler).

2. Điều kiện cần và đủ

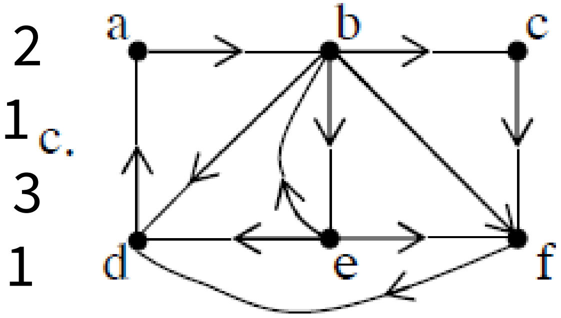
a/ Đồ thị liên thông:



deg(a) = deg(b) = deg(c) = deg(e) = 3
deg(d) = 2
=> Đồ thị không có chu trình và đường đường đi Euler (do đồ thị liên thông nhưng có tới 4 đỉnh bậc lẻ)

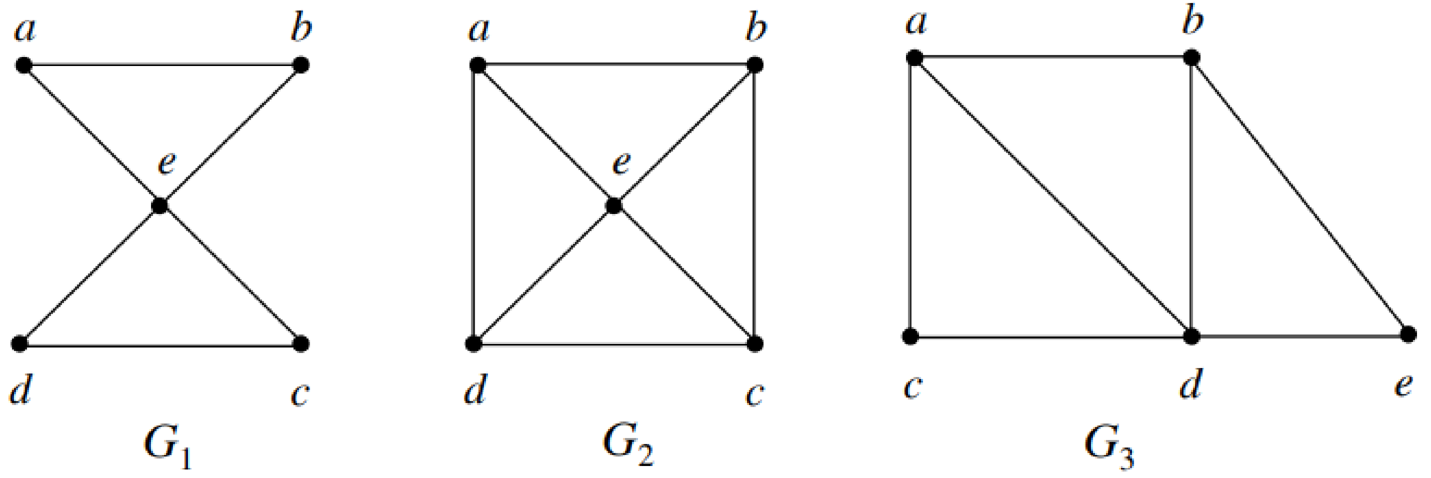
b/ Đồ thị liên thông mạnh:

Deg$^+$(a) = 1, deg$^-$(a) = 1
Deg$^+$(b) = 4, deg$^-$(b) = 2
Deg$^+$(c) = 1, deg$^-$(c) = 1
Deg$^+$(d) = 1, deg$^-$(d) = 3
Deg$^+$(e) = 3, deg$^-$(e) = 1
Deg$^+$(f) = 1, deg$^-$(f) = 3



→ đồ thị không có chu trình Euler do đồ thị không cân bằng. Đồ thị không có đường đi Euler do có tới 4 đỉnh không cân bằng.

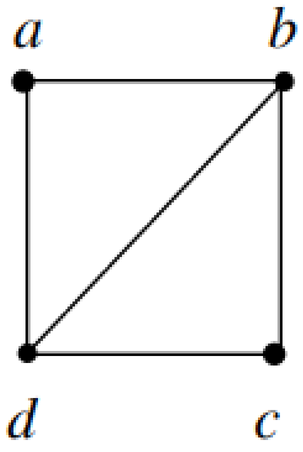
2. Điều kiện cần và đủ



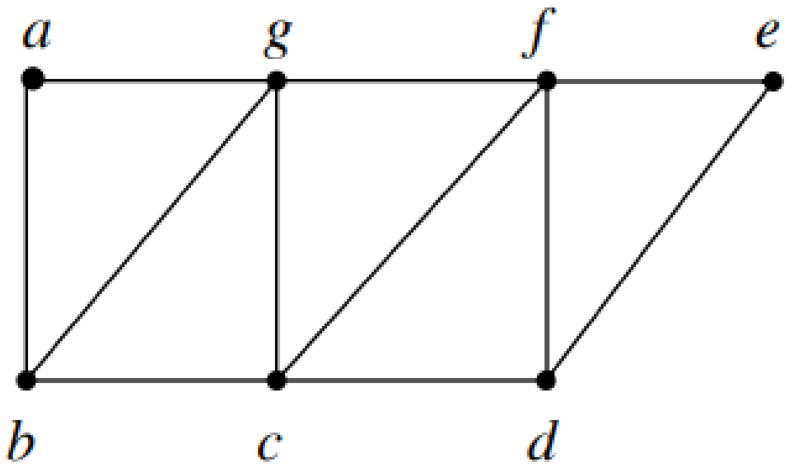
- G_1 có chu trình Euler, ví dụ: a, b, e, d, c, e, a.
- G_2, G_3 không có chu trình Euler.
- G_3 có đường đi Euler, ví dụ: a, c, d, e, b, d, a, b
- G_2 không có đường đi Euler.

3. Thuật toán Fleury

- Mỗi khi đi qua một cạnh nào đó thì xóa nó đi. Sau đó xóa đỉnh cô lập nếu có.
- Không bao giờ đi qua một cầu trừ khi không còn cách đi nào khác.

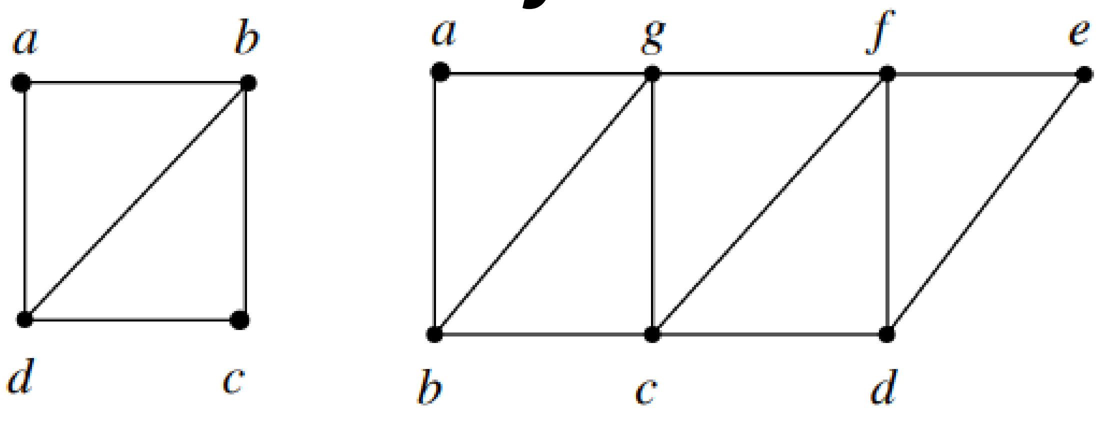


G_1



G_2

3. Thuật toán Fleury



G_1 G_2

- G_1 có đúng 2 đỉnh bậc lẻ b và d nên có đường đi Euler, ví dụ: d, a, b, c, d, b.
- G_2 có đúng 2 đỉnh bậc lẻ b và d nên có đường đi Euler, ví dụ: b, a, g, b, c, g, f, c, d, f, e, d.

III. ĐƯỜNG ĐI HAMILTON

1. Định nghĩa

- **Chu trình Hamilton** là đường đi qua tất cả các **đỉnh** của đồ thị G **đúng một lần** sao cho đỉnh bắt đầu và đỉnh kết thúc phải **trùng nhau.**
- **Đường đi Hamilton:** là đường đi qua tất cả các đỉnh của đồ thị G đúng một lần.
- **Đồ thị Hamilton** là đồ thị có chu trình Hamilton.

* Cho G là một đồ thị vô hướng, liên thông và có nhiều hơn 1 đỉnh:

- Nếu G là một đồ thị đầy đủ thì G có chu trình Hamilton.
- Nếu mọi đỉnh của G đều có bậc $\geq \frac{n}{2}$ thì G có chu trình Hamilton (với n ≥ 3 là số đỉnh của đồ thị).

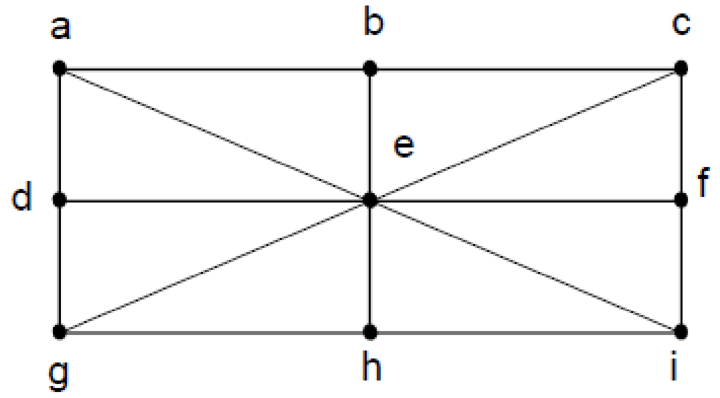
2. Quy tắc tìm chu trình Hamilton

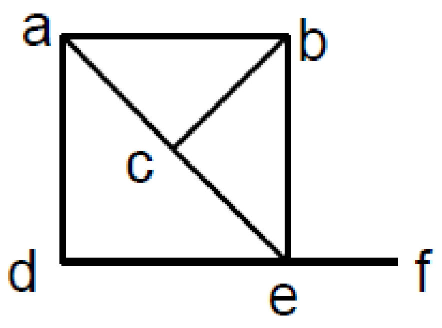
Quy tắc 1: Cạnh của đỉnh bậc 2 sẽ thuộc chu trình Hamilton

Quy tắc 2: Nếu một đỉnh đã có 2 cạnh thuộc chu trình thì ta xóa các cạnh còn lại

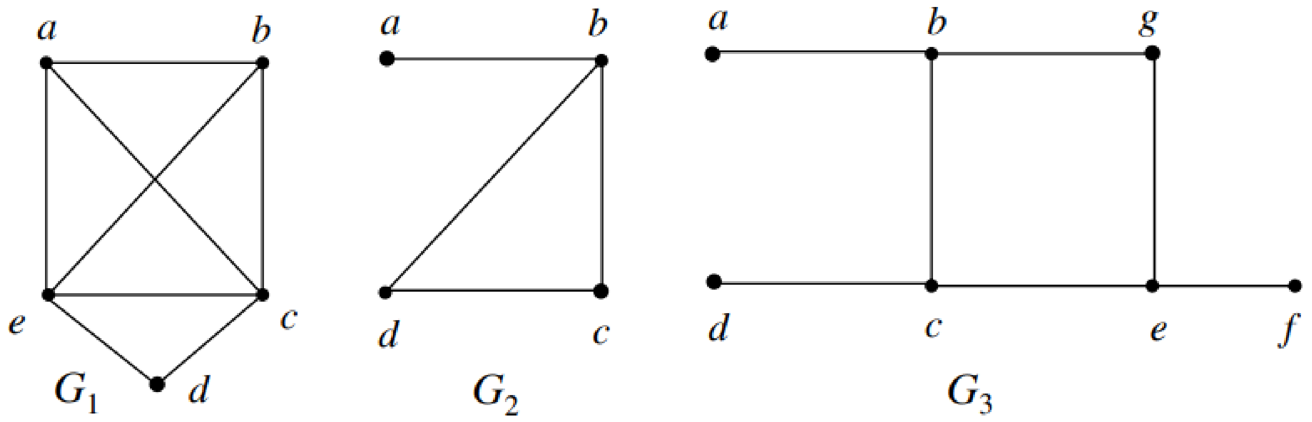
Quy tắc 3: Chu trình Hamilton không chứa chu trình con thực sự nào.

Qui tắc 4: Đồ thị có đỉnh treo hoặc đỉnh cô lập thì không có chu trình Hamilton





2. Quy tắc tìm chu trình Hamilton



- G_1 có chu trình Hamilton, ví dụ: a, b, c, d, e, a.
- G_2 không có chu trình Hamilton nhưng có đường đi Hamilton
  ví dụ: a, b, c, d.
- G_3 không có chu trình/đường đi Hamilton.

IV. BÀI TẬP

Bài 1:

a) Có 14 game thủ thi đấu vòng tròn với nhau 1 lượt cùng một trò chơi. 2 game thủ thi đấu với nhau thì không có kết quả hòa. Hỏi có trường hợp bất kì game thủ nào cũng thắng đúng 7 game thủ khác không? Tại sao?

b) Tìm số đỉnh của đồ thị vô hướng, biết đồ thị có 25 cạnh, 4 đỉnh bậc 3, 2 đỉnh bậc 5, còn lại là các đỉnh bậc 2, bậc 7.

Giải:

a) – Ta có: $\sum d^+(v) = \sum d^-(v) = 14.7 = 98$

- Vì thi đấu vòng tròn nên đây là đồ thị đầy đủ → |E| = 14.13/2=92 (cạnh)

→ $\sum d^+(v) = \sum d^-(v) \neq |E|$

Vậy không thể có trường hợp bất kì game thủ nào cũng thắng đúng 7 game thủ khác.

b) Gọi số đỉnh bậc 2 là a, số đỉnh bậc 7 là b, ta có:

4.3 + 2.5 + 2a + 7b = 25.2 = 50

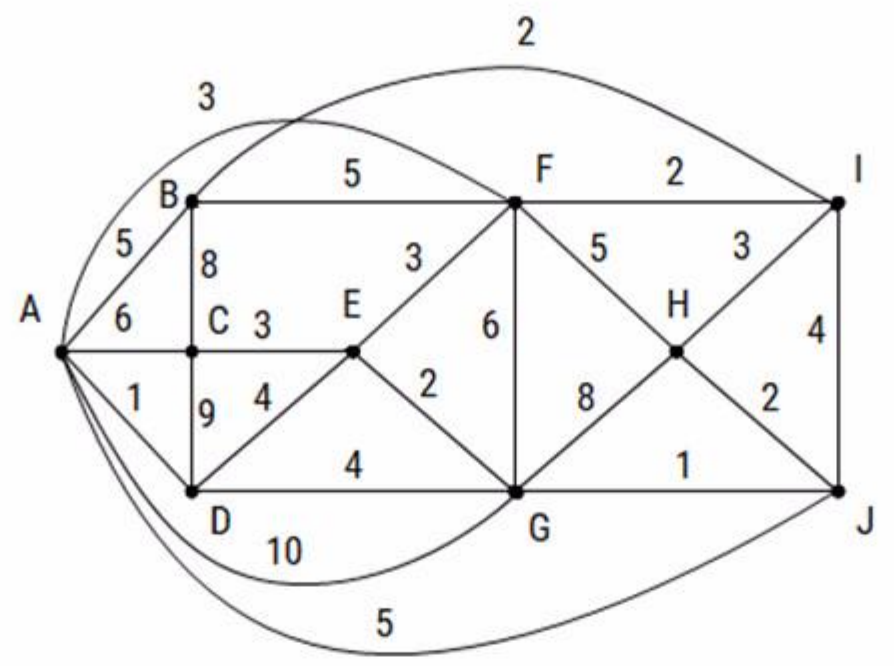
Ta có a = (28 – 7b)/2 > 0 ⇔ 4>b>0 và b chẵn (đỉnh bậc lẻ) → b = 2, a = 7

Vậy số đỉnh của đồ thị này là 4 + 2 + 2 + 7 = 15 đỉnh.

Bài 2: Cho đồ thị vô hướng, có trọng số như sau:

a) Đồ thị có chu trình (đường đi) Euler không? Tại sao? Nếu có hãy chỉ ra một chu trình (đường đi) Euler của đồ thị.

b) Hãy chỉ ra một chu trình (đường đi) Hamilton của đồ thị nếu có.

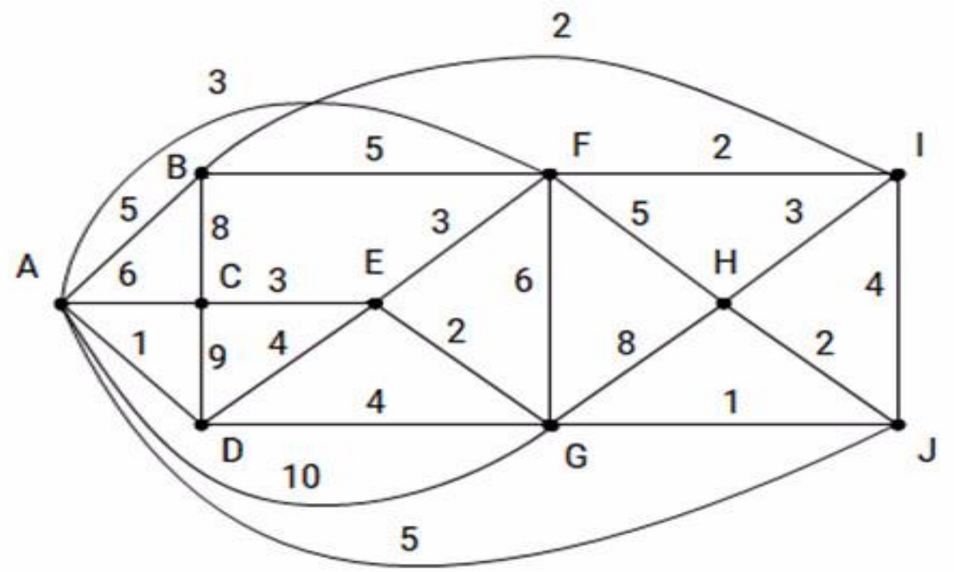


Giải:

a) Đồ thị có chu trình Euler vì các đỉnh đều có bậc chẵn.

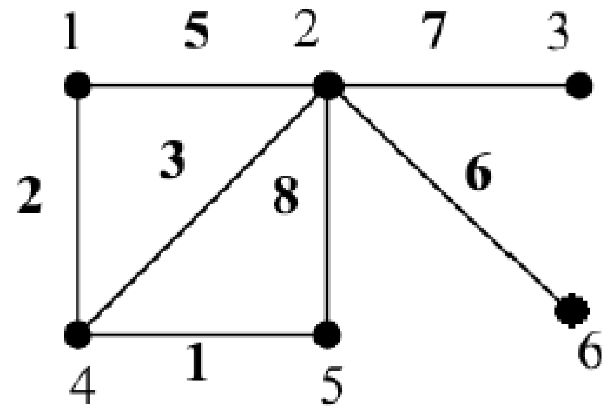
Chu trình Euler: J -> G -> H -> J -> I -> F -> H -> I -> B -> F -> E -> C -> B -> A -> C -> D -> E -> G -> D -> A -> F -> G -> A -> J

b) *Chu trình Hamilton:* A -> B -> C -> D -> E -> F -> G -> H -> I -> J -> A



THUẬT TOÁN DIJKSTRA

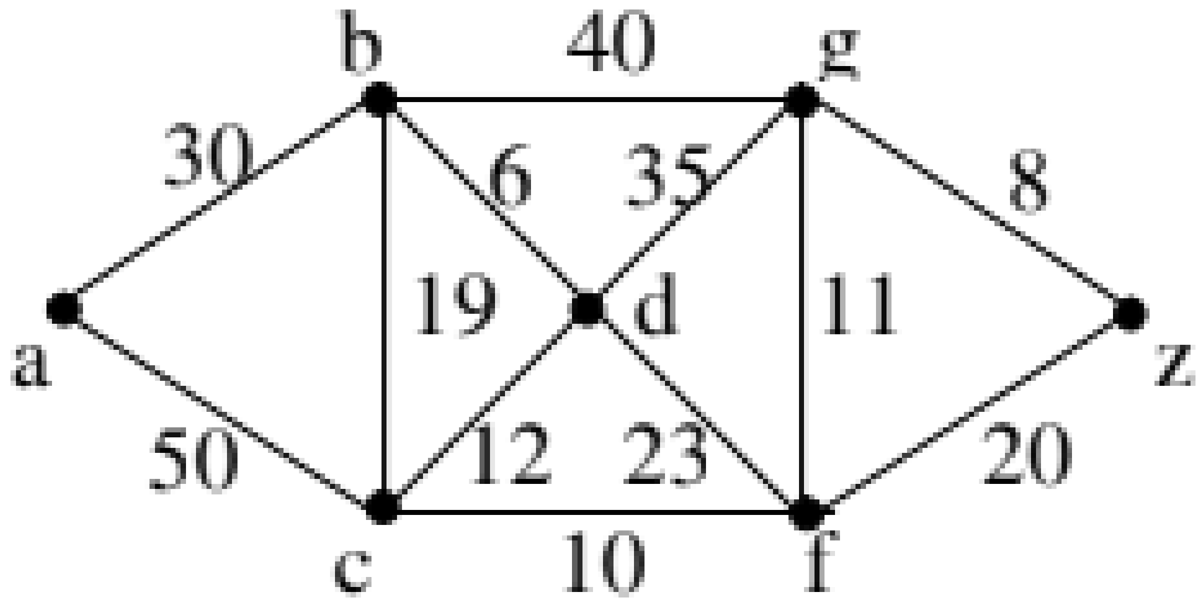
1. BÀI TOÁN TÌM ĐỘ DÀI ĐƯỜNG ĐI NGẮN NHẤT



- Các số ở giữa các cạnh được gọi là trọng số
- Độ dài đường đi (P1) 1 2 5 4 2 3 là: 5 + 8 + 1 + 3 + 7 = 24
- Độ dài đường đi (P2) 1 4 2 6 là: 2 + 3 + 6 = 11

2.THUẬT TOÁN DIJKSTRA

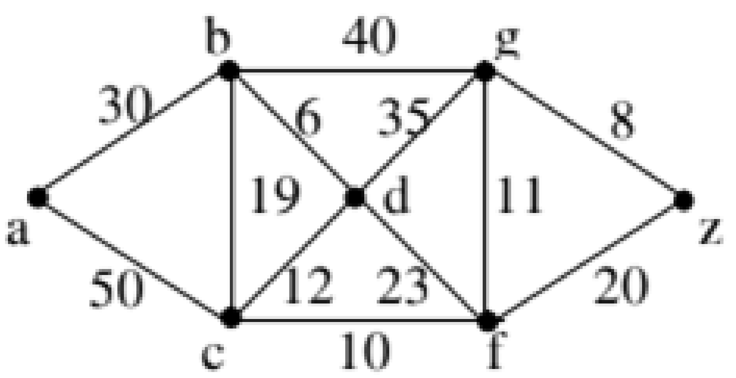
Ví dụ: Tìm độ dài ngắn nhất từ đỉnh a đến các đỉnh còn lại



2.THUẬT TOÁN DIJKSTRA

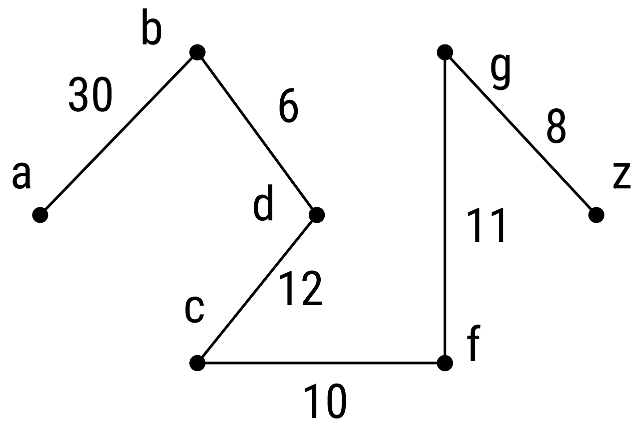
Ví dụ: Tìm độ dài ngắn nhất từ đỉnh a đến các đỉnh còn lại

Đỉnh	b	c	d	g	f	z	Cạnh
a	a,30	a,50					
b	*	b,49	b,36	b,70			ba
d	-	d,48	*	b,70	d,59		db
c	-	*	-	b,70	c,58		cd
f	-	-	-	f,69	*	f,78	fc
g	-	-	-	*	-	g,77	gf
z	-	-	-	-	-	*	gz



2.THUẬT TOÁN DIJKSTRA

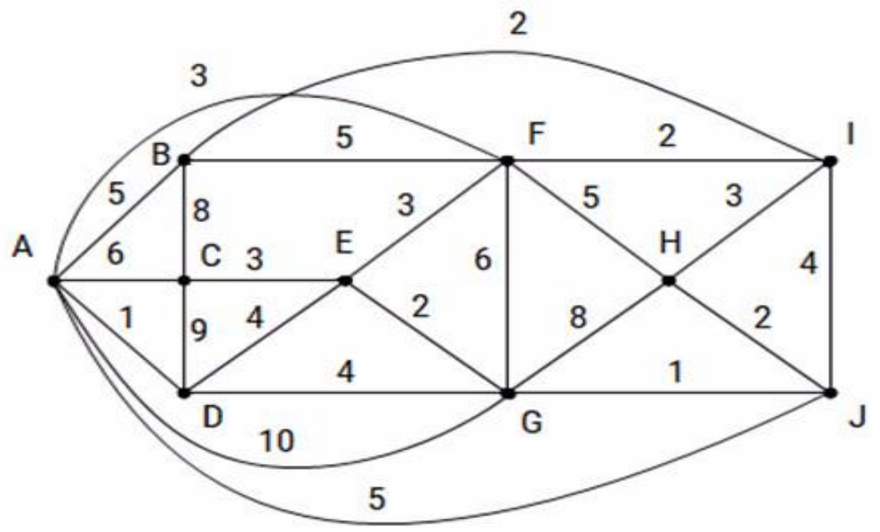
Ví dụ: Tìm độ dài ngắn nhất từ đỉnh a đến các đỉnh còn lại



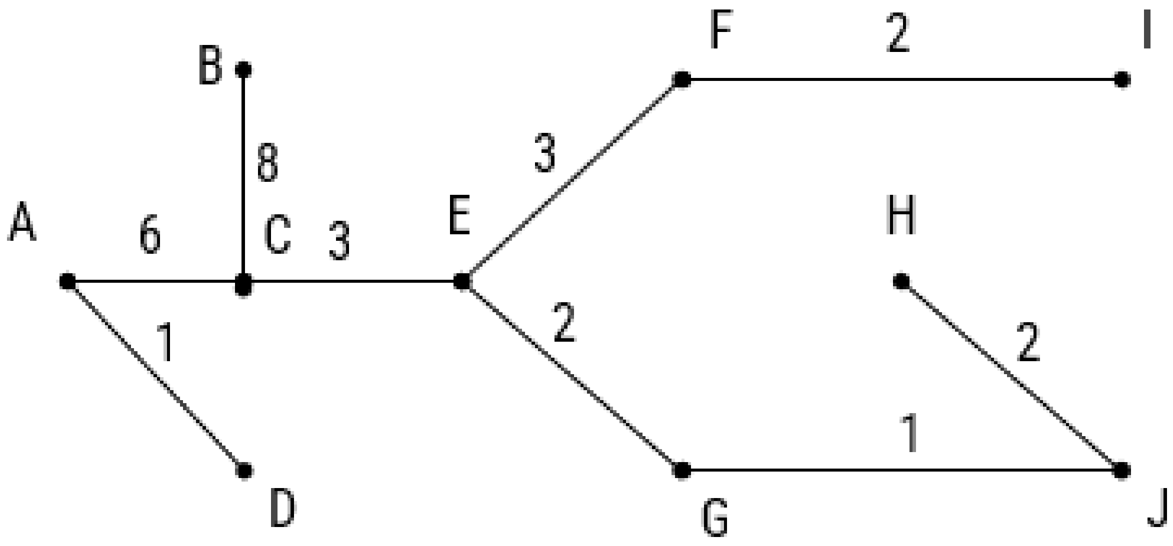
Đường đi ngắn nhất từ đỉnh a đến các đỉnh:

b: ab	trọng số: 30
d: abd	trọng số: 36
c: abdc	trọng số: 48
f: abdcf	trọng số: 58
g: abdcfg	trọng số: 69
z: abdcfgz	trọng số: 77

Cho đồ thị vô hướng có trọng số như sau. Hãy tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh C đến các đỉnh còn lại của đồ thị (chỉ rõ thuật toán).



Đỉnh	A	B	D	E	F	G	H	I	J	Cạnh
C	C, 6	C, 8	C, 9	C, 3						
E	C, 6	C, 8	E, 7	*	E, 6	E, 5				EC
G	C, 6	C, 8	E, 7	-	E, 6	*	G, 13		G, 6	GE
A	*	C, 8	A, 7	-	E, 6	-	G, 13		G, 6	AC
F	-	C, 8	A, 7	-	*	-	F, 11	F, 8	G, 6	FE
J	-	C, 8	A, 7	-	-	-	J, 8	F, 8	*	JG
D	-	C, 8	*	-	-	-	J, 8	F, 8	-	DA
B	-	*	-	-	-	-	J, 8	F, 8	-	BC
H	-	-	-	-	-	-	*	F, 8	-	HJ
I	-	-	-	-	-	-	-	*	-	IF



Đường đi từ C đến các đỉnh:

A: CA	trọng số: 6
B: CB	trọng số: 8
D: CAD	trọng số: 7
E: CE	trọng số: 3
F: CEF	trọng số: 6
G: CEG	trọng số: 5
H: CEGJH	trọng số: 8
I: CEFI	trọng số: 8
J: CEGJ	trọng số: 6

CHƯƠNG 6: CÂY

Nội dung

I. Các khái niệm cơ bản

II. Tìm cây khung nhỏ nhất – lớn nhất

III. Bài tập cuối chương

I. Các khái niệm cơ bản

1. Cây
2. Cây m-phân và các tính chất
3. Phép duyệt cây
4. Ký pháp nghịch đảo Balan
5. Cây khung

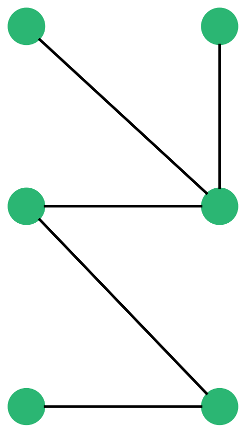
1. Cây

- Cây là một đồ thị vô hướng, liên thông và không có chu trình sơ cấp

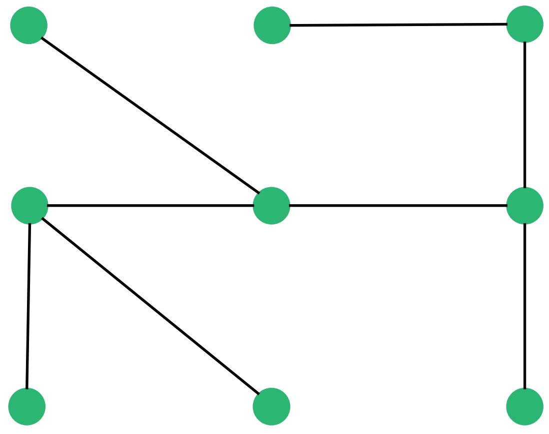
  + Cây là một đơn đồ thị

  + Cây không có cạnh bội và khuyên

- **<u>Ví dụ:</u>**



G_1



G_2

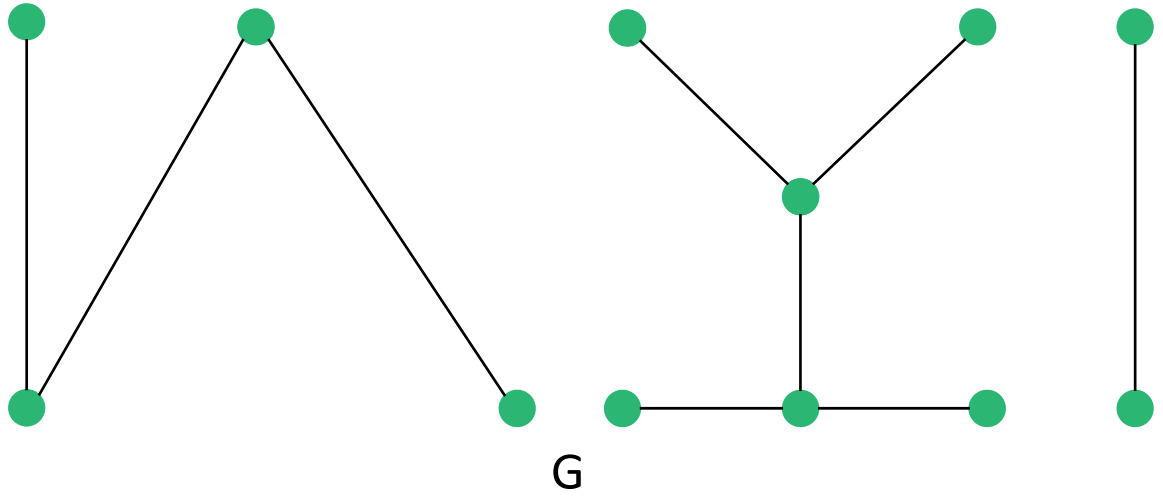
1. Cây

- Rừng là một đồ thị vô hướng và không có chu trình

  + Rừng có thể có nhiều thành phần liên thông

  + Mỗi thành phần liên thông là một cây

- **<u>Ví dụ:</u>**



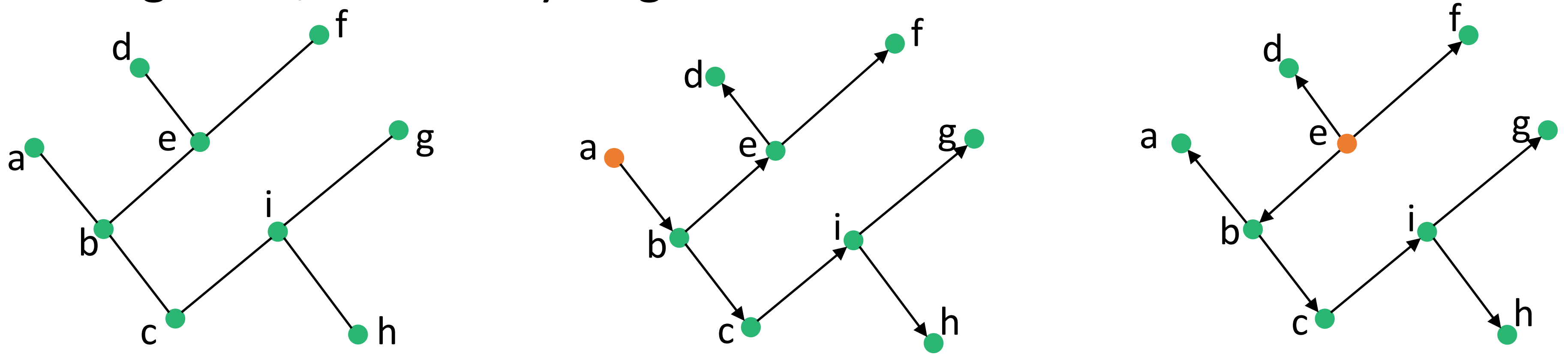
1. Cây

- Cây có gốc:

  + Một cây với một đỉnh được chọn làm gốc

  + Định hướng các cạnh trên cây từ gốc đi ra

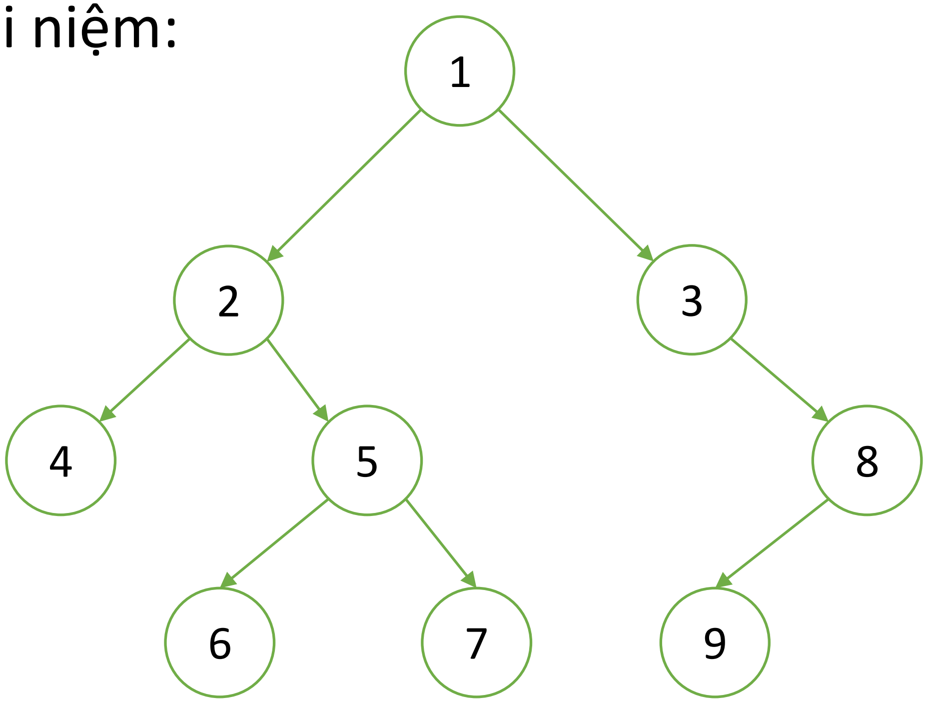
- **<u>Ví dụ:</u>**



- Cùng một cây, nếu chọn gốc khác nhau thì cây có gốc thu được sẽ khác nhau.

1. Cây

- Một số khái niệm:



- Cha
- Anh em
- Tổ tiên
- Con cháu

- Lá
- Đỉnh trong
- Cây con
- Mức
- Chiều cao

- ***<u>Định lý Daisy Chain</u>***
- T là đồ thi có n đỉnh. Các mệnh đề tương đương:

1. T là một cây
2. T không có chu trình và có n-1 cạnh
3. T liên thông, mọi cạnh đều là cầu
4. Giữa 2 đỉnh bất kỳ của T luôn tồn tại một đường đi sơ cấp duy nhất
5. T không có chu trình và nếu thêm một cạnh mới nối 2 đỉnh bất kỳ của T thì sẽ tạo ra 1 chu trình
6. T liên thông và có n-1 cạnh

2. Cây m-phân và các tính chất

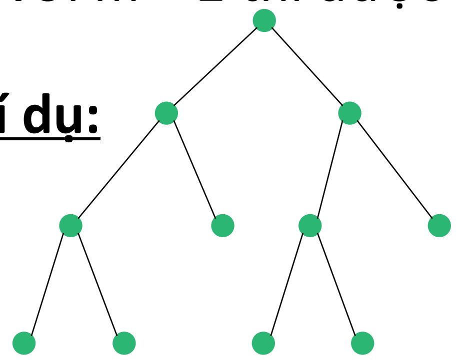
- Định nghĩa:

  + Cây m-phân là cây có gốc, trong đó tất cả các đỉnh trong có không quá m con

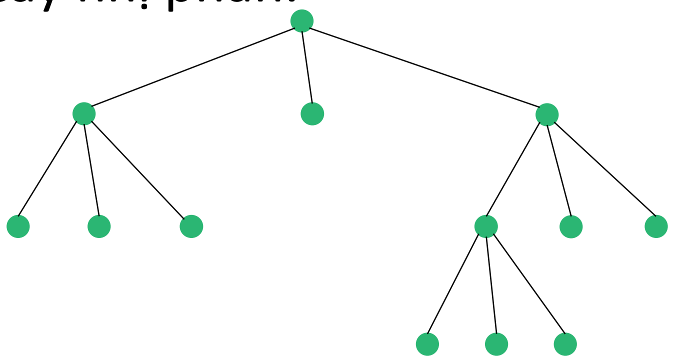
  + Cây m-phân đầy đủ là cây có gốc, trong đó tất cả các đỉnh trong có đúng m con

  + Với m = 2 thì được gọi là cây nhị phân.

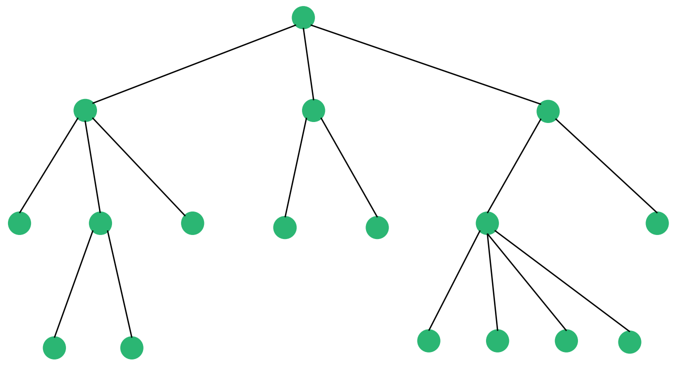
- **Ví dụ:**



Cây nhị phân đầy đủ



Cây tam phân đầy đủ



Cây tứ phân

2. Cây m-phân và các tính chất

- **Tính chất 1**: cây n đỉnh ($n \geq 2$) có ít nhất 2 đỉnh treo
- **Tính chất 2**: cây m-phân đầy đủ với i đỉnh trong có $n = m.i + 1$ đỉnh
- **Tính chất 3:** cho cây m-phân đầy đủ có n đỉnh, có i đỉnh trong và k lá. Khi đó:

  + $i = (n - 1)/m$

  + $k = [(m - 1)n + 1]/m$

  + $k = (m – 1)i + 1$

  + $n = k + i$

3. Phép duyệt cây

- Duyệt cây: liệt kê tất cả các đỉnh của cây theo 1 thứ tự xác định, mỗi đỉnh 1 lần.

- Có 2 phương pháp duyệt cây chính:

  + Duyệt cây theo chiều rộng (BFS)

  + Duyệt cây theo chiều sâu (DFS)

    - Duyệt tiền tự (Pre-order)

    - Duyệt trung tự (In-order)

    - Duyệt hậu tự (Post-order)

4. Ký pháp nghịch đảo Ba Lan

- Cây biểu thức số học: là cây nhị phân

  + Mỗi nút trong biểu diễn cho 1 toán tử 2 ngôi θ

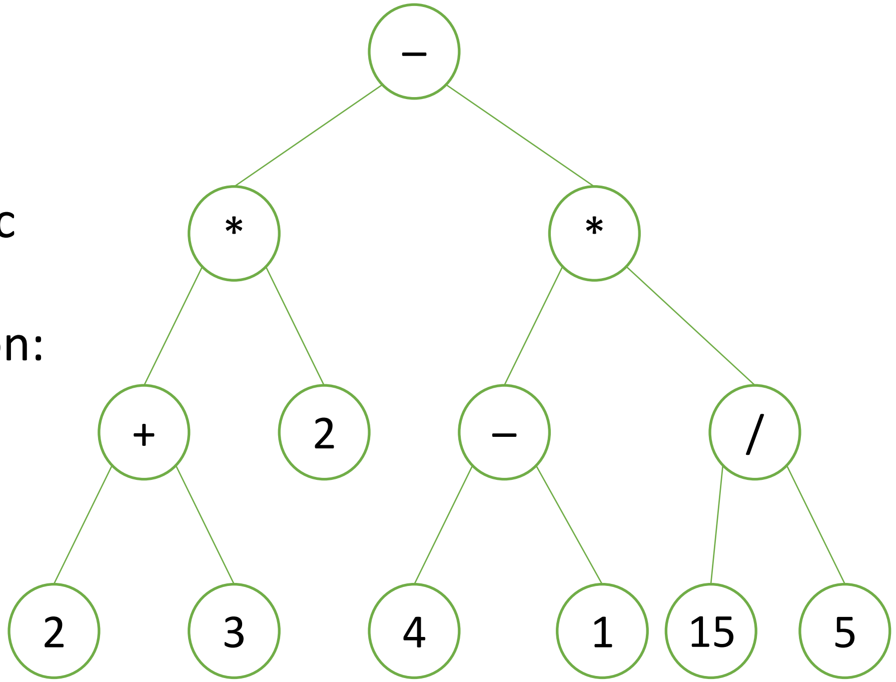
  + Mỗi nút lá biểu diễn cho một toán hạng của biểu thức

- Nếu nút trong biểu diễn cho toán tử 2 ngôi θ và có 2 con:

  + Con trái biểu diễn cho biểu thức E_1

  + Con phải biểu diễn cho biểu thức E_2

Khi đó, nút trong này biểu diễn cho biểu thức $E_1 \theta E_2$.



- **<u>Ví dụ:</u>** E = (2 + 3)*2 – (4 – 1)*(15/5)

4. Ký pháp nghịch đảo Ba Lan

- Ký pháp nghịch đảo Ba Lan (**R**everse **P**olish **N**otation – RPN)

  + Biểu thức ở dạng hậu tố

  + Sử dụng để tính giá trị biểu thức trên máy tính

    - Tính từ trái qua phải

    - Không sử dụng dấu ngoặc

    - Sử dụng Stack (ngăn xếp)

+ Thuật toán tính giá trị biểu thức RPN:

  - Đọc một ký hiệu

  - Ký hiệu là số: đẩy vào Stack

  - Ký hiệu là một toán tử:

  + Lấy ra 2 toán hạng từ Stack

  + Tính giá trị toán tử với 2 toán hạng

  + Đẩy kết quả vào Stack

4. Ký pháp nghịch đảo Ba Lan

- **<u>Ví dụ:</u>** tính giá trị biểu thức

  E = (2 + 3)*2 – (4 – 1)*(15/5)

- Biểu thức nhập dưới dạng ký Pháp

  RPN E = 2 3 + 2 * 4 1 – 15 5 / * -

- Quá trình lưu trữ của cấu trúc Stack

  như sau:

- Kết quả thu được của biểu thức là 1.

1
–
9
*
3
/
5
15
3
–
1
4
10
*
2
5
+
3
2

5. Cây khung

- Cây khung của đơn đồ thị G

  + Đồ thị con của G

  + Chứa tất cả các đỉnh của G

  + Không chứa chu trình con

- *Cây khung nhỏ nhất*: Trong một đồ thị liên thông, có trọng số, cây khung nhỏ nhất là một cây khung có tổng trọng số trên các cạnh của nó là nhỏ nhất.

- **Một đồ thị có thể có nhiều cây khung.**

II. Tìm cây khung nhỏ nhất – lớn nhất

1. Thuật toán Prim
2. Thuật toán Kruskal

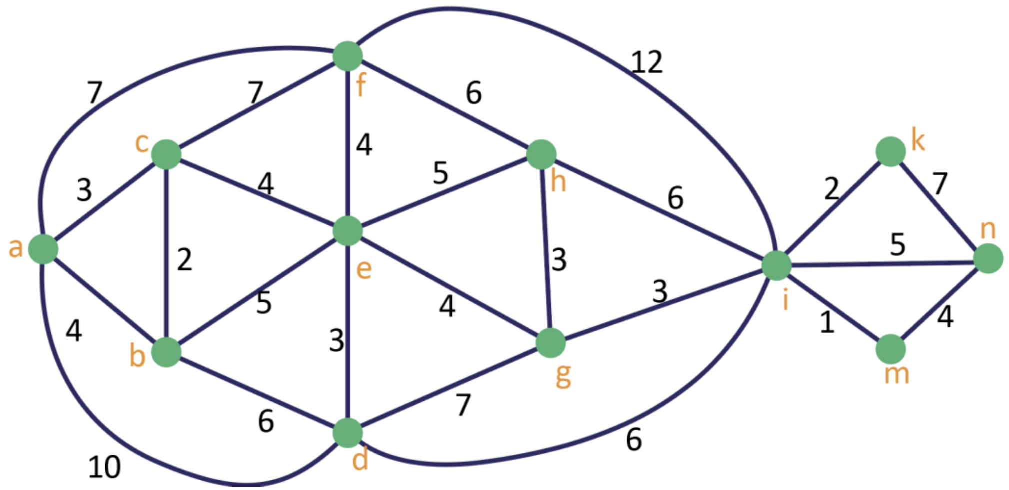
Thuật toán Prim

Bước 1: Chọn bất kì 1 đỉnh của G đưa vào T.

Bước 2: Chọn 1 đỉnh ngoài T có cạnh nối trực tiếp với 1 trong các đỉnh hiện thành trong T và có độ dài nhỏ nhất/lớn nhất, đưa đỉnh và cạnh tương ứng vào T (không tạo thành chu trình con).

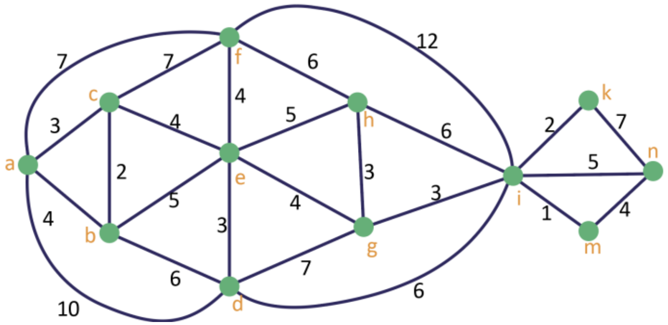
Bước 3: Lặp lại bước 2 đến khi tất cả các đỉnh của G thuộc T.

Ví dụ: Tìm cây khung (cây bao trùm) có tổng trọng số lớn nhất cho biểu đồ:



THUẬT TOÁN PRIM

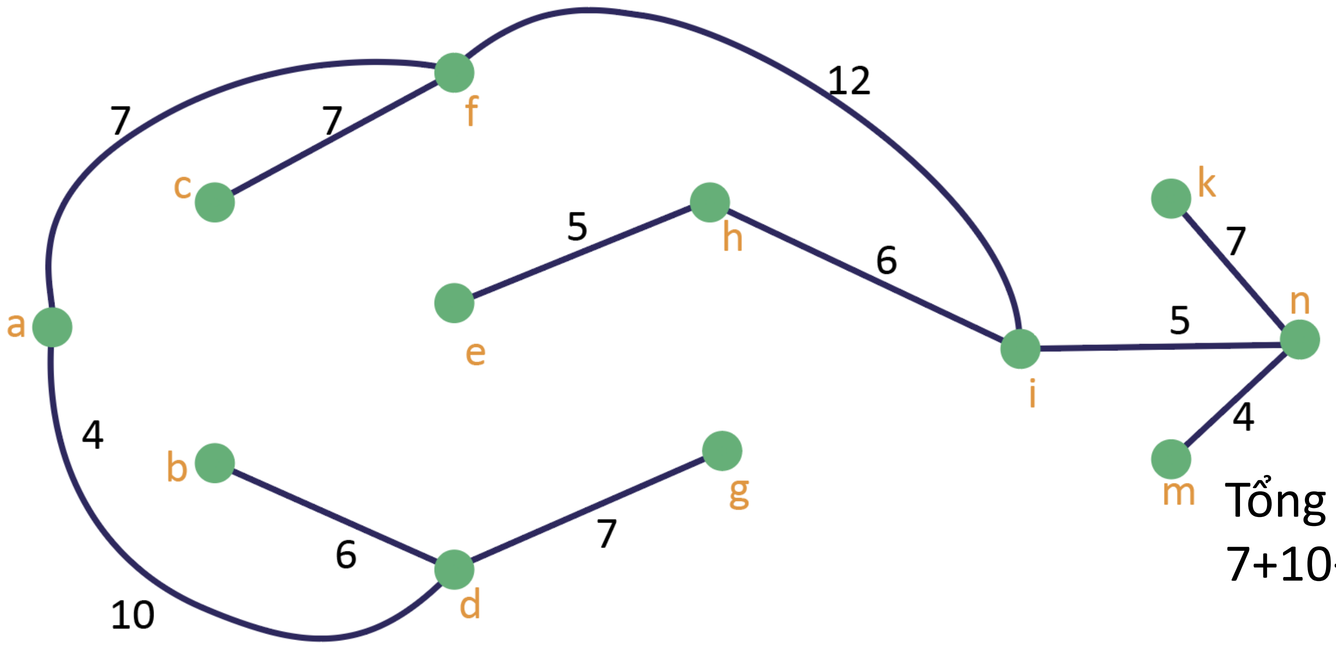
Cây khung lớn nhất



	a	b	c	d	e	f	g	h	i	k	m	n	Đỉnh	Cạnh
Khởi tạo	*	4,a	3,a	10,a	∞	7,a	∞	∞	∞	∞	∞	∞	a	
1	-	6,d	3,a	*	3,d	7,a	7,d	∞	6,d	∞	∞	∞	d	ad
2	-	6,d	7,f	-	4,f	*	7,d	6,f	12,f	∞	∞	∞	f	af
3	-	6,d	7,f	-	4,f	-	7,d	6,f	*	2,i	1,i	5,i	i	fi
4	-	6,d	*	-	4,f	-	7,d	6,f	-	2,i	1,i	5,i	c	fc
5	-	6,d	-	-	4,f	-	*	6,f	-	2,i	1,i	5,i	g	dg
6	-	*	-	-	5,b	-	-	6,f	-	2,i	1,i	5,i	b	db
7	-	-	-	-	5,b	-	-	*	-	2,i	1,i	5,i	h	fh
8	-	-	-	-	*	-	-	-	-	2,i	1,i	5,i	e	be
9	-	-	-	-	-	-	-	-	-	7,n	4,n	*	n	in
10	-	-	-	-	-	-	-	-	-	*	4,n	-	k	nk
11	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	*	-	m	km

THUẬT TOÁN PRIM

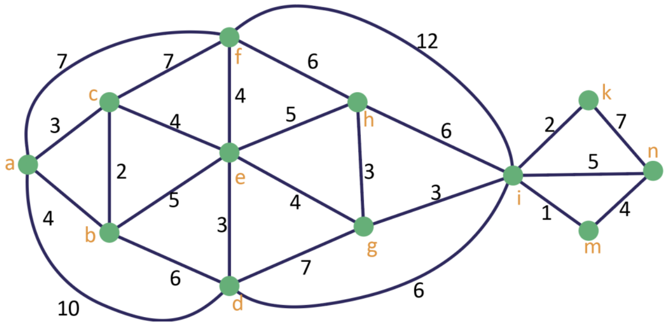
Cây khung lớn nhất



Tổng trọng số trên cây là:
7+10+12+7+7+6+6+5+5+7+4=76

THUẬT TOÁN PRIM

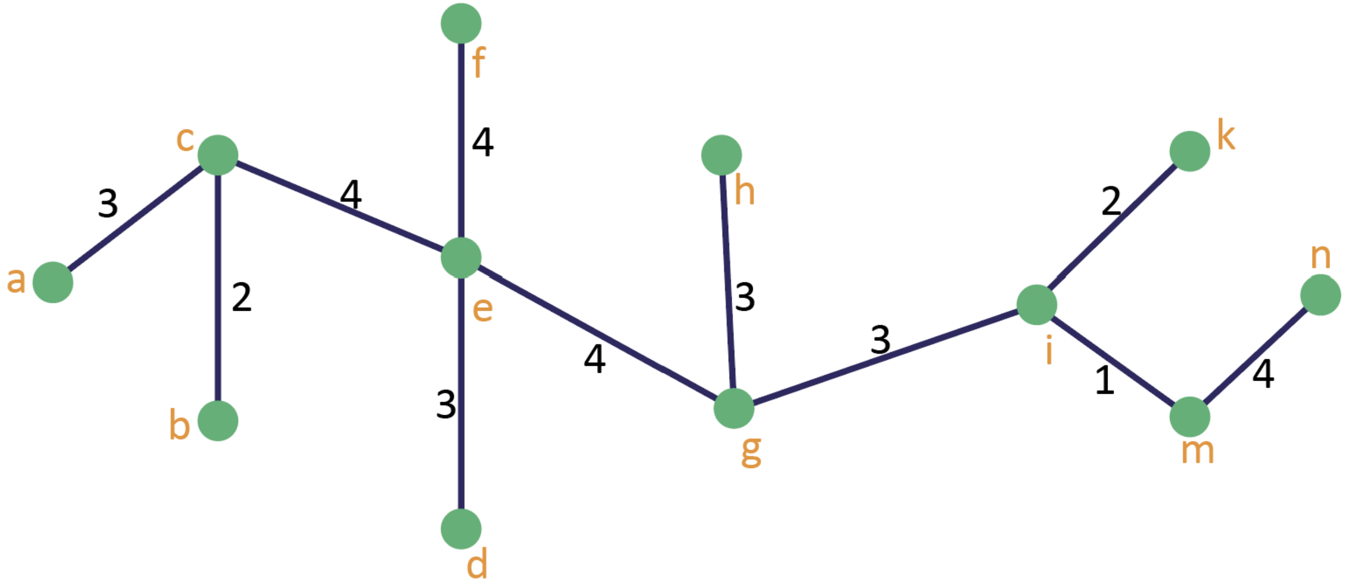
Cây khung nhỏ nhất



	a	b	c	d	e	f	g	h	i	k	m	n	Đỉnh	Cạnh
Khởi tạo	*	4,a	3,a	10,a	∞	7,a	∞	∞	∞	∞	∞	∞	a	
1	-	2,c	*	10,a	4,c	7,a	∞	∞	∞	∞	∞	∞	c	ac
2	-	*	-	6,b	4,c	7,a	∞	∞	∞	∞	∞	∞	b	cb
3	-	-	-	3,e	*	4,e	4,e	5,e	∞	∞	∞	∞	e	ce
4	-	-	-	*	-	4,e	4,e	5,e	6,d	∞	∞	∞	d	ed
5	-	-	-	-	-	*	4,e	5,e	6,d	∞	∞	∞	f	ef
6	-	-	-	-	-	-	*	3,g	3,g	∞	∞	∞	g	eg
7	-	-	-	-	-	-	-	*	3,g	∞	∞	∞	h	gh
8	-	-	-	-	-	-	-	-	*	2,i	1,i	5,i	i	gi
9	-	-	-	-	-	-	-	-	-	2,i	*	4,m	m	im
10	-	-	-	-	-	-	-	-	-	*	-	4,m	k	ik
11	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	*	n	mn

THUẬT TOÁN PRIM

Cây khung nhỏ nhất



Tổng trọng số trên cây là:
3+2+4+3+4+4+3+3+1+2+4=33

Thuật toán Kruskal

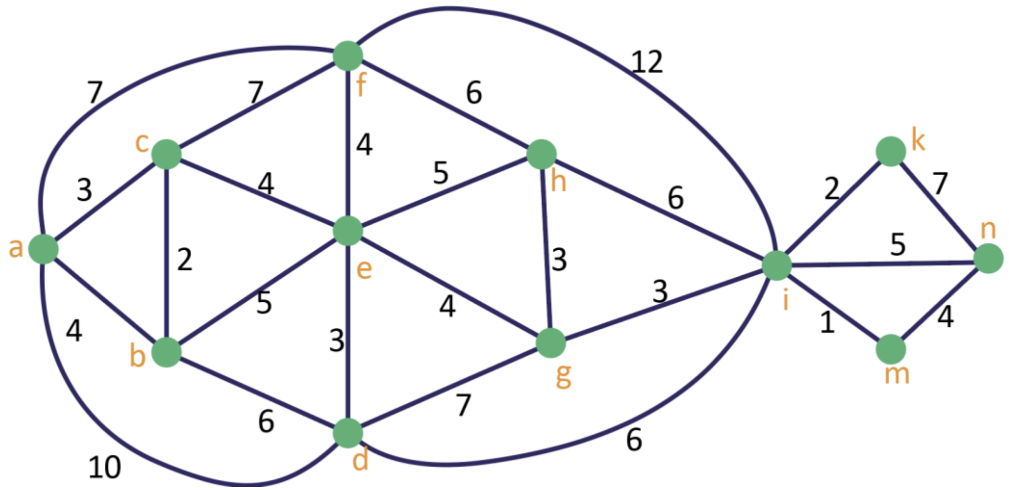
Bước 1: Chọn cây bao trùm cần tìm là T và ta đặt T = (V,Ø) (với V là tập các đỉnh của G)

Bước 2: Chọn các cạnh có trọng số nhỏ nhất/lớn nhất sao cho khi gắn cạnh vào cây T thì không tạo thành chu trình con

→ đưa cạnh vào T.

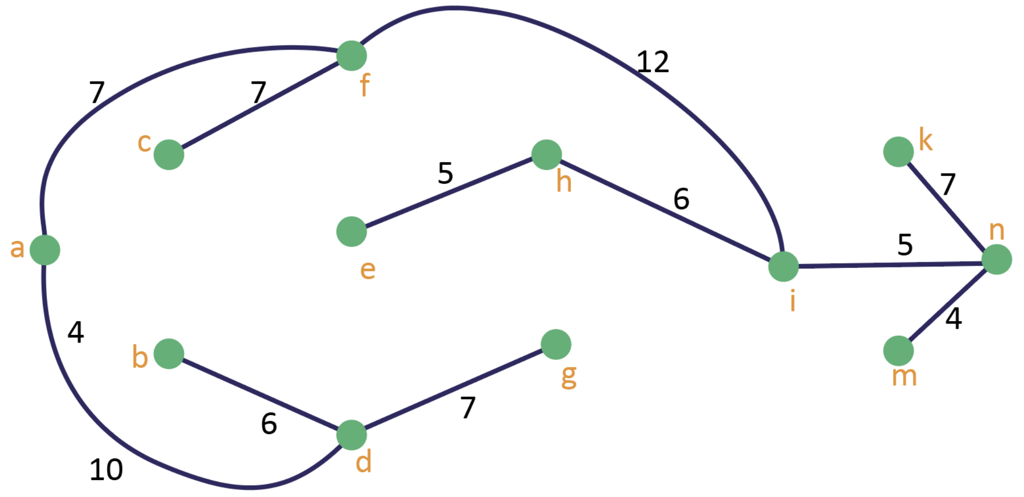
Bước 3: Lặp lại bước 2 đến khi T liên thông.

Ví dụ: Tìm cây khung (cây bao trùm) có tổng trọng số lớn nhất cho biểu đồ:



THUẬT TOÁN KRUSKAL

Cây khung lớn nhất

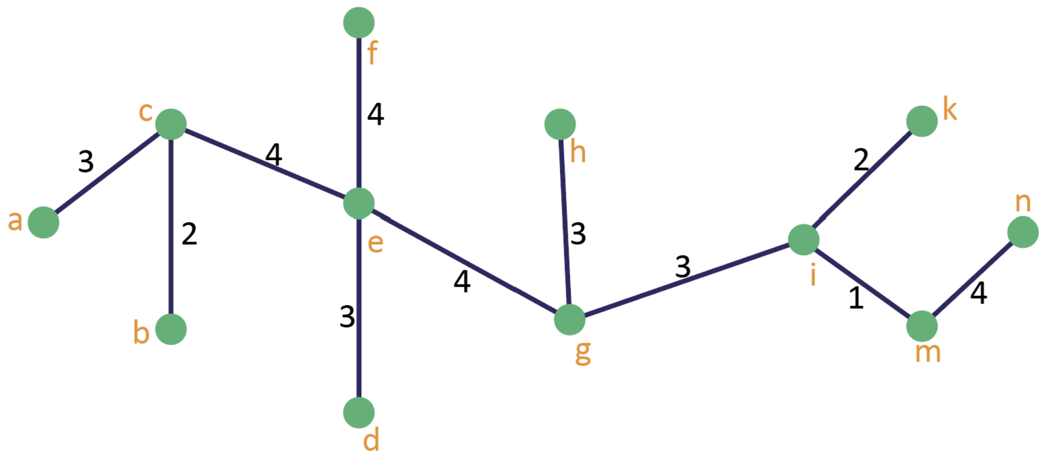


Tổng trọng số trên cây là:
12+10+7+7+7+7+6+6+5+5+4=76

Bước chọn	Trọng số	Cạnh
1	12	fi
2	10	ad
3	7	af
4	7	fc
5	7	dg
6	7	kn
7	6	bd
8	6	hi
9	5	he
10	5	in
11	4	mn

THUẬT TOÁN KRUSKAL

Cây khung nhỏ nhất



Tổng trọng số trên cây là:
3+2+4+3+4+4+3+3+1+2+4=33

Bước chọn	Trọng số	Cạnh
1	1	im
2	2	ik
3	2	bc
4	3	ac
5	3	ed
6	3	gh
7	3	gi
8	4	ce
9	4	fe
10	4	eg
11	4	mn

- *Khi thực hiện tìm cây khung nhỏ nhất/lớn nhất:*

- Prim chọn cạnh có trọng số nhỏ nhất/lớn nhất liên thuộc với một đỉnh đã chọn thuộc cây và không tạo ra chu trình.
- Kruskal chọn cạnh có trọng số nhỏ nhất/lớn nhất miễn là không tạo ra chu trình.
- Thuật toán Prim hiệu quả hơn đối với các đồ thị dày (số cạnh nhiều).

- ***Lưu ý:***

- Có nhiều hơn một cây khung nhỏ nhất/lớn nhất ứng với một đồ thị liên thông có trọng số.
- Khi thực hiện thuật toán Prim, thuật toán dừng khi T có đủ n đỉnh hoặc (n – 1) cạnh.
- Với thuật toán Kruskal:

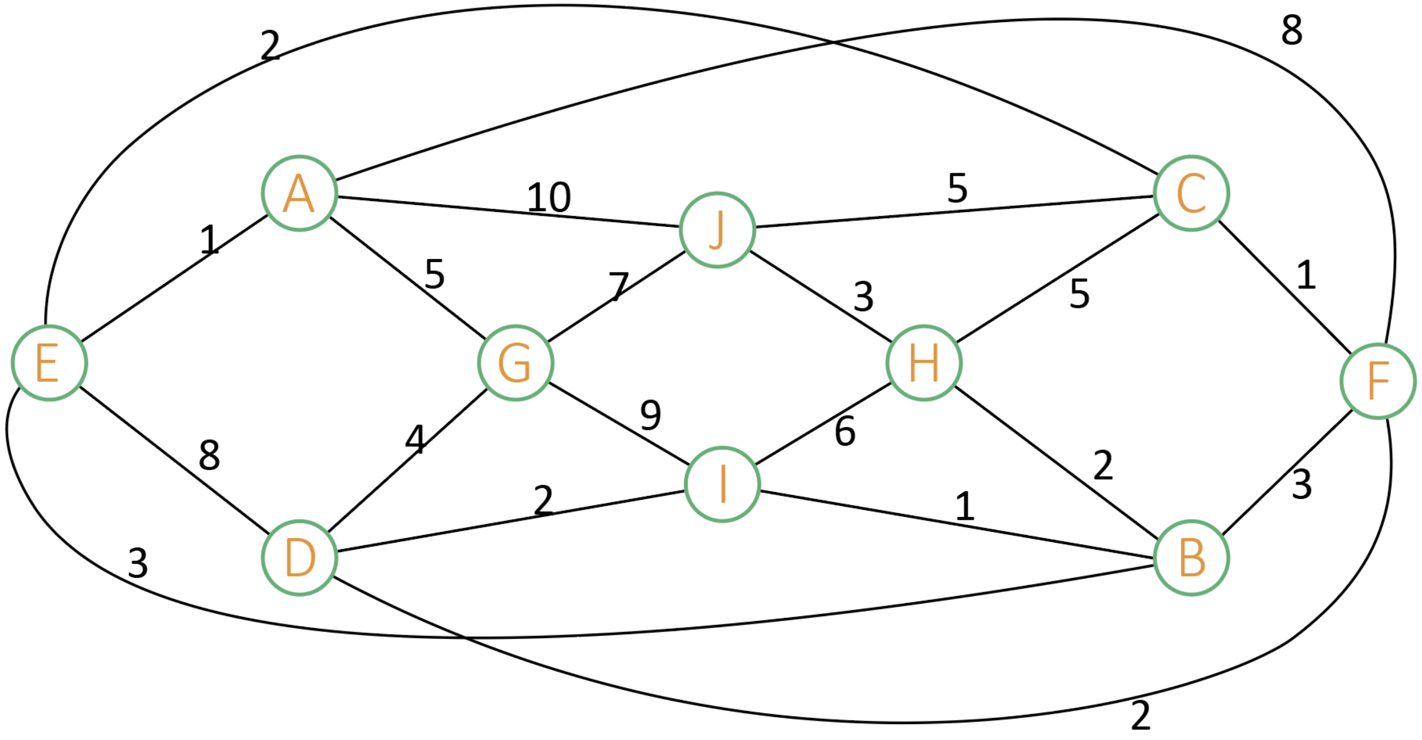
  + các cạnh được chọn phải bằng n – 1 (n là đỉnh)

  + liên thông

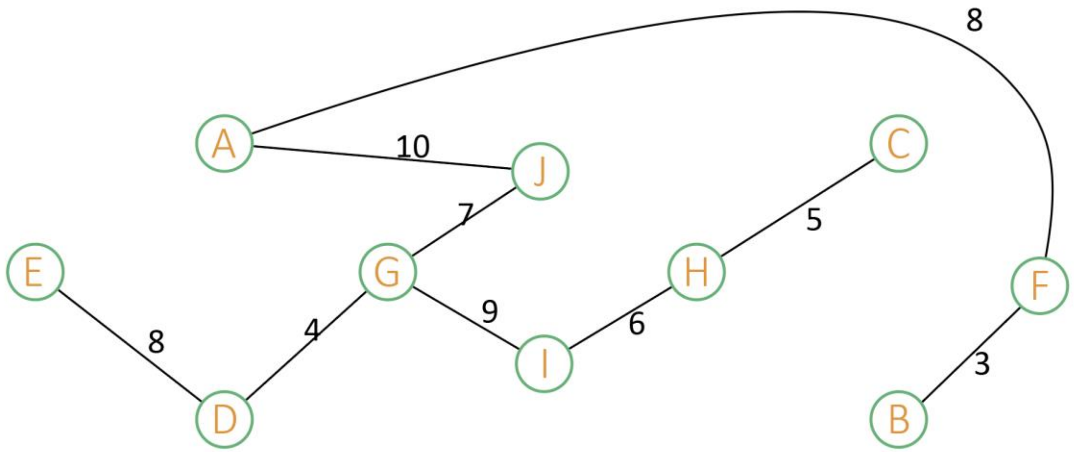
  + không được tạo thành chu trình con

III. BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG

<u>Bài tập</u>: Dùng thuật toán Kruskal tìm cây khung có tổng trọng số lớn nhất và cây khung có tổng trọng số nhỏ nhất cho đồ thị có biểu đồ:



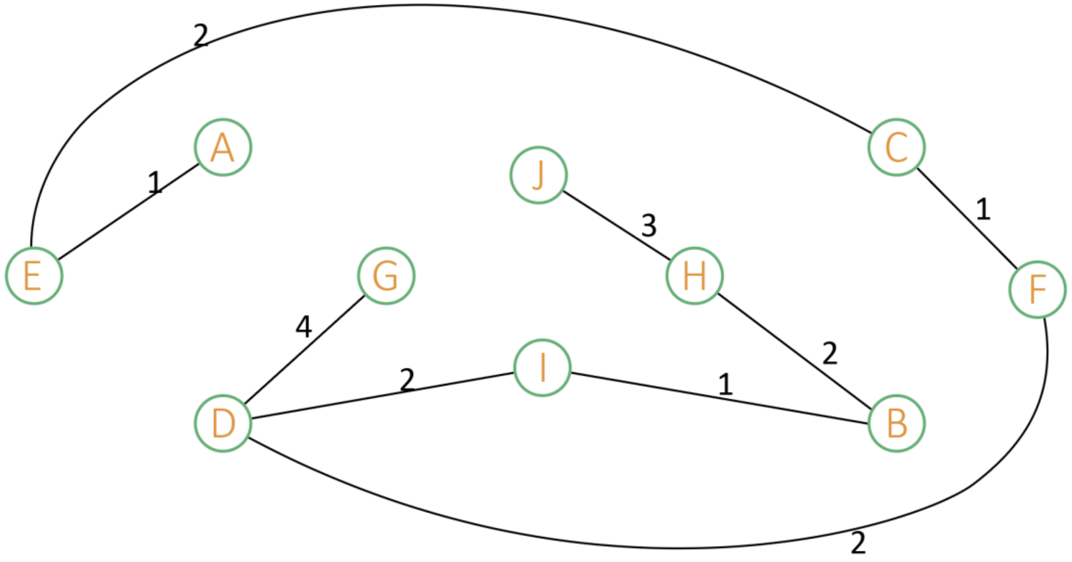
Cây khung lớn nhất



Tổng trọng số trên cây là:

10+9+8+8+7+6+5+4+3=60

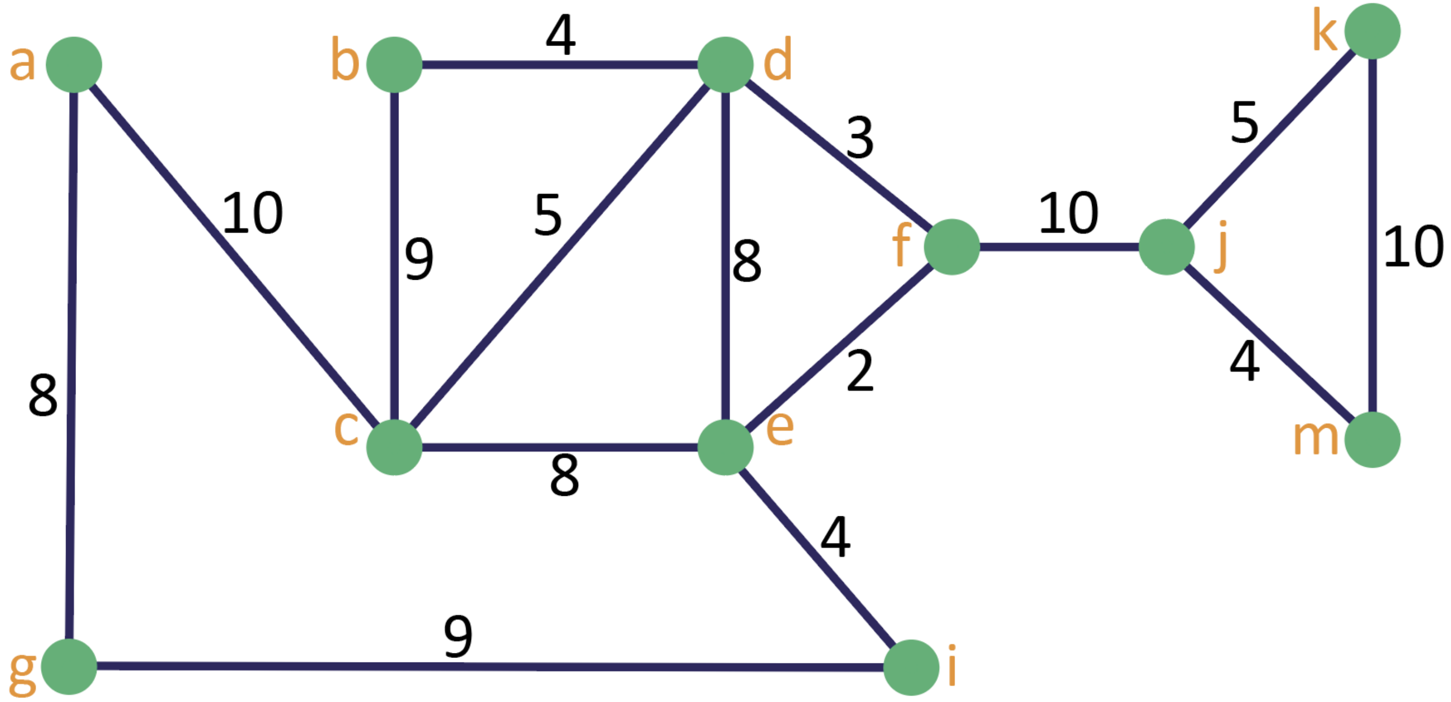
Cây khung nhỏ nhất



Tổng trọng số trên cây là:

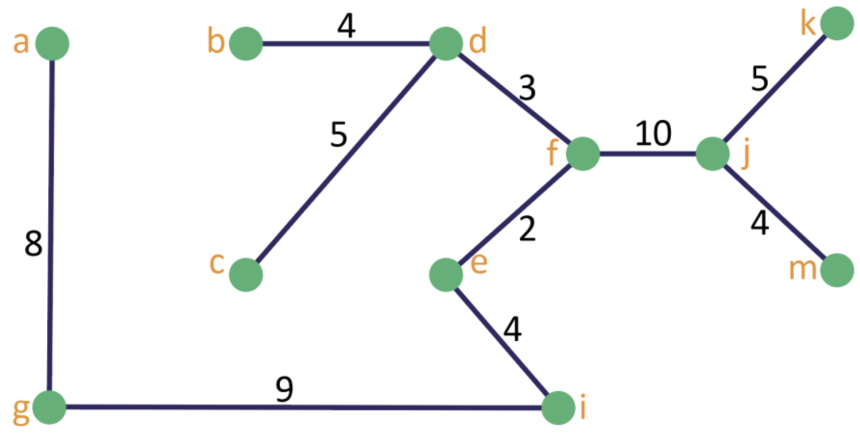
1+1+1+2+2+2+2+3+4=18

<u>Bài tập 2:</u> **Dùng thuật toán Prim tìm cây khung có tổng trọng số nhỏ nhất và dùng thuật toán Kruskal tìm cây khung có tổng trọng số lớn nhất cho đồ thị có biểu đồ sau:**



THUẬT TOÁN PRIM

Cây khung nhỏ nhất

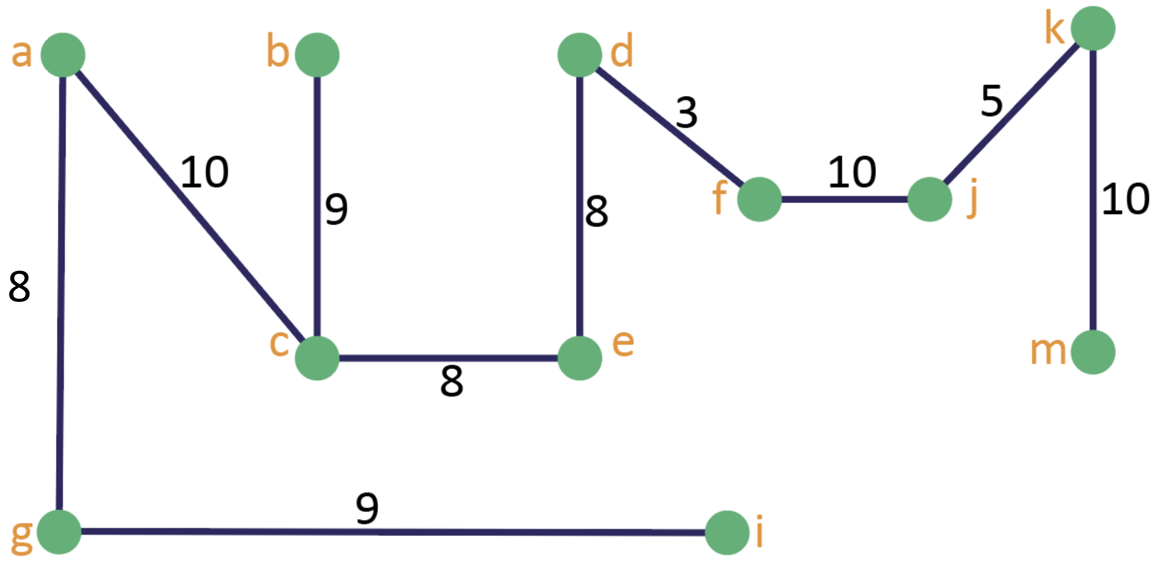


	a	b	c	d	e	f	g	i	j	k	m	Đỉnh	Cạnh
Khởi tạo	*	∞	10,a	∞	∞	∞	8,a	∞	∞	∞	∞	a	
1	-	∞	10,a	∞	∞	∞	*	9,g	∞	∞	∞	g	ag
2	-	∞	10,a	∞	4,i	∞	-	*	∞	∞	∞	i	gi
3	-	∞	8,e	8,e	*	2,e	-	-	∞	∞	∞	e	ie
4	-	∞	8,e	3,f	-	*	-	-	10,f	∞	∞	f	ef
5	-	4,d	5,d	*	-	-	-	-	10,f	∞	∞	d	fd
6	-	*	5,d	-	-	-	-	-	10,f	∞	∞	b	db
7	-	-	*	-	-	-	-	-	10,f	∞	∞	c	dc
8	-	-	-	-	-	-	-	-	*	5,j	4,j	j	fj
9	-	-	-	-	-	-	-	-	-	5,j	*	m	jm
10	-	-	-	-	-	-	-	-	-	*	-	k	jk

Tổng trọng số trên cây là:
8+9+4+2+3+5+4+10+4+5=54

THUẬT TOÁN KRUSKAL

Cây khung lớn nhất



Tổng trọng số trên cây là:
10+10+10+9+9+8+8+8+5+3=80

Bước chọn	Trọng số	Cạnh
1	10	ac
2	10	fj
3	10	km
4	9	ig
5	9	bc
6	8	ce
7	8	de
8	8	ag
9	5	jk
10	3	df

QUÉT MÃ QR ĐIỂM DANH

Khảo sát về buổi training Cấu trúc rời rạc