CHƯƠNG 1:
GIỚI HẠN VÀ SỰ LIÊN TỤC CỦA HÀM MỘT BIẾN

Nội dung trọng tâm: *Hàm 1 biến, Giới hạn, Liên tục, Gián đoạn.*

Bài 1: HÀM MỘT BIẾN SỐ THỰC

1. Định nghĩa hàm số:

- Hàm f đi từ tập D vào tập Y là một quy tắc cho ra một **phần tử duy nhất** $f(x) \in Y$ tương ứng với mỗi phần tử $x \in D$.
- Khi $D \subset \mathbb{R}$ thì ta nói f là hàm số một biến số thực.

$$f: \quad D \to Y \\ \quad x \mapsto y = f(x)$$

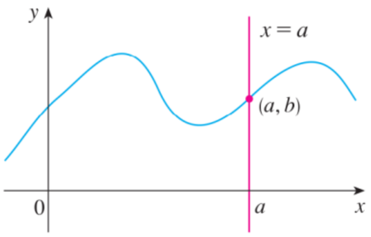
Trong đó: **D (Domain)** là tập xác định; **x** là biến độc lập; **y** là biến phụ thuộc hay hàm số của x.

- **Tập giá trị (R = Range):**
  + [min y; max y]
  + Tập hợp tất cả các giá trị y thu được từ những giá trị x khác nhau của tập D.
  + Có thể không bao gồm tất cả mọi phần tử của tập hợp Y.

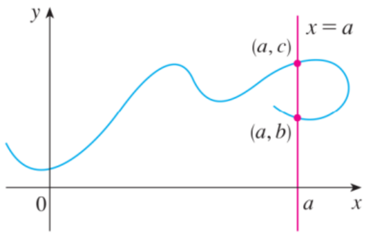
1 x	*→ 1 y tương ứng*	*(Con → 1 bố, 1 mẹ)*
1 y	*→ nhiều x*	*(1 bố, 1 mẹ → nhiều con)*

2. Tiêu chuẩn đường thẳng đứng (the vertical line test):

- Không phải bất kì đường cong nào trong mặt phẳng tọa độ cũng là đồ thị của một hàm số.
- Một hàm f chỉ có thể có một giá trị y ứng với mỗi x trong tập xác định của nó, nên **không có đường thẳng đứng nào có thể giao với đồ thị hàm số nhiều hơn một lần.**



Hình 1.4
Đồ thị của một hàm số $y = f(x)$



Hình 1.5. Không tồn tại hàm số $y = f(x)$ để có đồ thị này

3. Một số dạng hàm thường gặp:

a) Hàm xác định từng khúc (Hàm ghép): Hàm mô tả bằng nhiều công thức khác nhau trên những phần khác nhau của TXĐ. (TXĐ là **hợp** của tất cả các TXĐ thuộc các hàm số).

Ví dụ 1.6

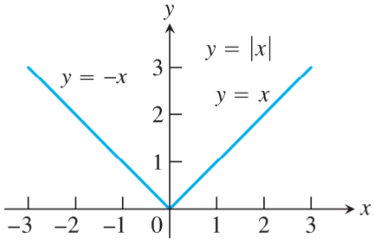
1) Hàm giá trị tuyệt đối (absolute value function)

$$y = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Tập giá trị: $R = [0, \infty)$

Đồ thị : Hình 1.7



Hình 1.7. Đồ thị hàm số $y = |x|$

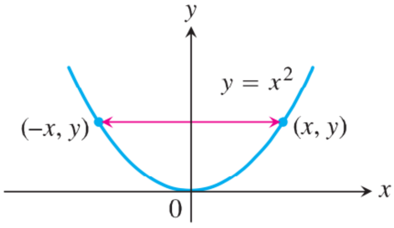
Các kí hiệu:	$\nearrow$, $\circ$: Không lấy điểm đó.
	$\bullet$: Lấy điểm đó.

b) Hàm chẵn và hàm lẻ:

Hàm y = f(x) xác định trên **tập đối xứng D** ($\forall x \in D$ thì $-x \in D$) được gọi là:

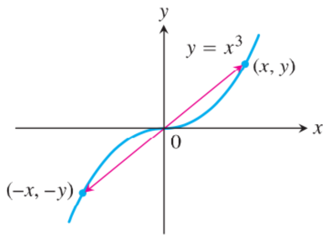
- Hàm chẵn x nếu $f(x) = f(-x)\ \forall x \in D$
- Hàm lẻ theo x nếu $f(-x) = -f(x)\ \forall x \in D$.

Tính đối xứng: Đồ thị của hàm số chẵn đối xứng qua trục Oy.
Đồ thị của hàm số lẻ đối xứng qua gốc tọa độ.



(a)

Hình 1.9. Đồ thị hàm số $y = x^2$



(b)

Hình 1.10. Đồ thị hàm số $y = x^3$

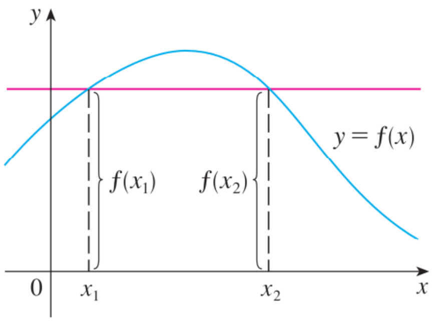
c) Hàm hợp: $\boxed{(f \circ g)(x) = f[g(x)]}$

TXĐ của $(f \circ g)$ là những giá trị x làm cho f, g và $(f \circ g)$ cùng xác định.

d) Hàm ngược:

+ Hàm 1-1 (one to one function): x không nhận cùng một giá trị y hai lần. $\boxed{\forall x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)}$

Tiêu chuẩn đường nằm ngang: không có đường thẳng nằm ngang (song song với Ox) nào cắt đồ thị của nó tại nhiều hơn một điểm.



Hình 1.15. Hàm số $y = f(x)$ không 1-1

+ Hàm ngược: Cho f là hàm 1-1. Hàm ngược của f ký hiệu là f^{-1} có TXĐ và TGT đảo lại cho nhau.

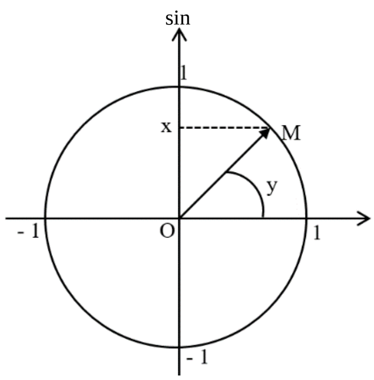
Cách tìm hàm ngược:

1. y = f(x)
2. Giải phương trình tìm x = g(y)
3. Hoán đổi x và y, ta có: y = $f^{-1}(x) = g(x)$

+ Hàm lượng giác ngược:

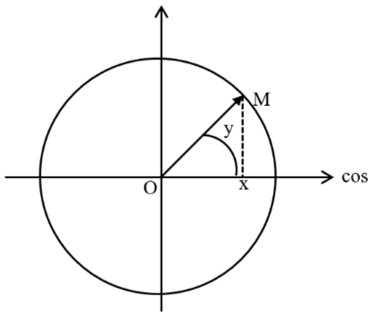
Xét hàm số y = sin x, hàm này không phải là hàm 1-1 trên $\mathbb{R}$ nhưng nó là hàm 1-1 trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Do đó nó có hàm ngược trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, ký hiệu là $y = \arcsin x$ hoặc $y = \sin^{-1} x$.

$$y = \arcsin x \begin{cases} D = [-1;1] \\ R = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \\ y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{cases}$$

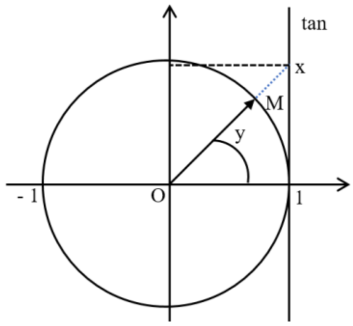


Giải thích tương tự: y = cos x là hàm 1-1 trên $\left[0;\pi\right]$

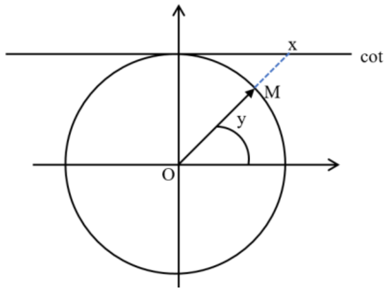
$$y=\arccos x\begin{cases} D=\left[-1;1\right] \\ R=\left[0;\pi\right] \\ y'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{cases}$$



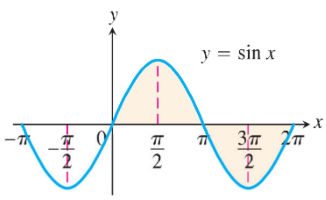
$$y=\arctan x\begin{cases} D=\mathbb{R} \\ R=\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right) \\ y'=\dfrac{1}{x^2+1} \end{cases}$$



$$y=\operatorname{arccot} x\begin{cases} D=\mathbb{R} \\ R=\left(0;\pi\right) \\ y'=-\dfrac{1}{x^2+1} \end{cases}$$

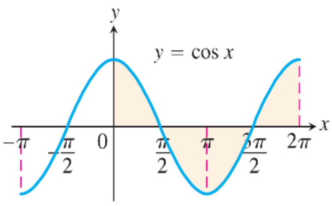


4. <u>Các hàm số sơ cấp:</u>

Tuyến tính (linear function)	$f\left(x\right)=mx+b$ (hằng số m và b)
Lũy thừa (Power functions)	$f\left(x\right)=x^{\alpha},\alpha\in\mathbb{R}$ + α nguyên dương: $D=\mathbb{R}$, α lẻ: $R=\mathbb{R}$; α chẵn: $R=[0;+\infty)$ $+\alpha=-1$: $f\left(x\right)=x^{-1}=\dfrac{1}{x}$ (hàm nghịch đảo - reciprocal function)
Đa thức (polynomial)	$P\left(x\right)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ $\qquad D=\mathbb{R}$ **Đa thức bậc 1:** $P\left(x\right)=mx+b$ (hàm tuyến tính). **Đa thức bậc 2:** $P\left(x\right)=ax^2+bx+c$ (hàm bậc hai – quadratic function) **Đa thức bậc 3:** $P\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d$ (hàm bậc 3 – cubic function)
Hữu tỷ (rational function)	$f\left(x\right)=\dfrac{p\left(x\right)}{q\left(x\right)}$, q(x) ≠ 0
Đại số (Algebraic Functions)	Tạo thành từ những đa thức và sử dụng các phép toán đại số (cộng, trừ, nhân, chia và phép lấy căn). VD: $f\left(x\right)=x^3.\sqrt{x^2+1}$
Lượng giác (Trigonometric Functions)	**<u>1. Hàm số y = sin x</u>** • Tập xác định: $D=\mathbb{R}$ • Tập giá trị: $[-1;1]$, tức là $-1\le\sin x\le1\quad\forall x\in\mathbb{R}$ • Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi;\dfrac{\pi}{2}+k2\pi)$, nghịch biến trên mỗi khoảng $(\dfrac{\pi}{2}+k2\pi;\dfrac{3\pi}{2}+k2\pi)$.  • Hàm số $y=\sin x$ là hàm số lẻ nên đồ thị hàm số nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng.

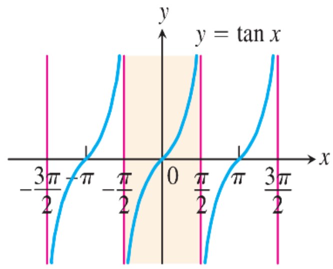
- Hàm số $y=\sin x$ là hàm số tuần hoàn với chu kì $T=2\pi$.

2. Hàm số y = cos x



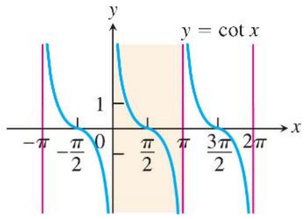
- Tập xác định: $D=\mathbb{R}$
- Tập giá trị: $[-1;1]$, tức là $-1\le \cancel{\sin x} \le 1 \quad \forall x\in\mathbb{R}$ cos x
- Nghịch biến trên mỗi khoảng $(k2\pi;\pi+k2\pi)$, đồng biến trên mỗi khoảng $(-\pi+k2\pi;k2\pi)$
- Hàm số chẵn nên đồ thị hàm số nhận trục Oy làm trục đối xứng.
- Hàm số tuần hoàn với chu kì $T=2\pi$.
- Đồ thị hàm số $y=\cos x$ vẽ bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $y=\sin x$ theo véc tơ $\vec{v}=\left(-\dfrac{\pi}{2};0\right)$.

3. Hàm số y = tan x



- Tập xác định : $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$
- Tập giá trị: $\mathbb{R}$
- Là hàm số lẻ
- Là hàm số tuần hoàn với chu kì $T=\pi$
- Hàm đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2}+k\pi;\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right)$
- Đồ thị nhận mỗi đường thẳng $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ làm một đường tiệm cận.

4. Hàm số y = cot x

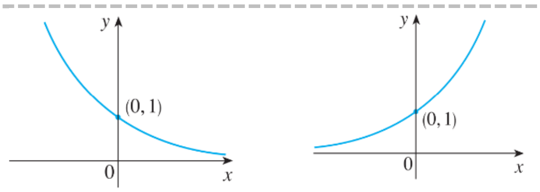


- Tập xác định : $D=\mathbb{R}\setminus\{k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$
- Tập giá trị: $\mathbb{R}$
- Là hàm số lẻ
- Là hàm số tuần hoàn với chu kì $T=\pi$
- Hàm nghịch biến trên mỗi khoảng $(k\pi;\pi+k\pi)$
- Đồ thị nhận mỗi đường thẳng $x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ làm một đường tiệm cận.

Hàm mũ (Exponential Functions)

$f(x)=a^x$, $0<a\neq 1$, $D=\mathbb{R}$, $R=(0;+\infty)$

Tăng khi a > 1, giảm khi 0 < a < 1.



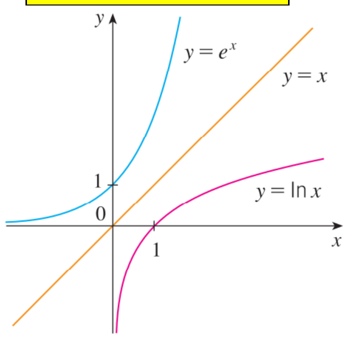
(a) $y=a^x$, $(0<a<1)$ (b) $y=a^x$, $(a>1)$

Hàm logarit (Logarithmic Functions)

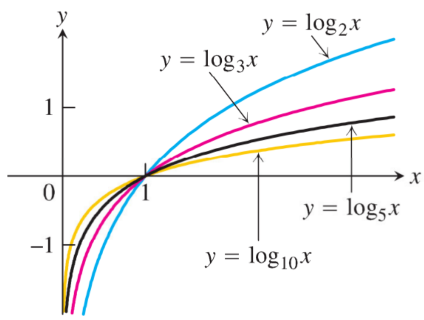
+ Nếu $0<a\neq 1$, hàm mũ $f(x)=a^x$ là hàm 1-1, nên có hàm ngược là $f^{-1}=y=\log_a x$, $D=(0;+\infty)$, $R=\mathbb{R}$.

+ Logarit tự nhiên (log Nepe): $\log_e x=\ln x$.

+ Ta có: $\boxed{\log_a x=y\Leftrightarrow x=a^y}$



Hình 1.35. Hàm mũ và logarit



Hình 1.36. Một số hàm logarit

Hàm Hyperbolic (Hyperbolic Functions), Hàm Hyperbolic ngược (inverse Hyperbolic functions), Hàm siêu việt (Transcendental Functions)