TRƯỜNG ĐẠI HỌC GIAO THÔNG VẬN TẢI THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
KHOA CƠ BẢN – BỘ MÔN TOÁN

BÀI GIẢNG GIẢI TÍCH 1

CHƯƠNG I. GIỚI HẠN VÀ SỰ LIÊN TỤC CỦA HÀM MỘT BIẾN

§0. Ôn tập về hàm số một biến số thực

ThS. Đinh Tiến Dũng

Giới thiệu giảng viên

- *ThS: **Đinh Tiến Dũng***
- *SĐT: 0793112122 (Zalo)*
- *Mail: dung.dinh@ut.edu.vn*

Giới thiệu học phần

Học phần này cung cấp các kiến thức cơ bản về giới hạn và sự liên tục của hàm một biến, phép tính vi phân hàm một biến (đạo hàm, vi phân, ứng dụng), phép tính tích phân hàm một biến (tích phân bất định, tích phân xác định, ứng dụng tích phân xác định, tích phân suy rộng), phép tính vi phân hàm nhiều biến (đạo hàm, vi phân hàm nhiều biến, cực trị hàm nhiều biến).

Đây là phần kiến thức cần thiết để sinh viên tiếp thu các học phần khác trong tất cả các chuyên ngành kinh tế, kỹ thuật.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- **[1] Bộ môn Toán, Bài giảng giải tích 1 (lưu hành nội bộ), Trường đại Học GTVT TP.HCM, 2019**
- **[2] Đỗ Công Khanh (chủ biên), Toán cao cấp – Giải tích hàm nhiều biến và phương trình vi phân, NXB. ĐHQG. TPHCM, 2010.**
- **[3] Nguyễn Đình trí (chủ biên), Giáo trình Toán cao cấp, tập 1, tập 2. NXB Giáo dục, Hà nội, 2005.**
- **[4] Jean – Marie Monier, Giáo trình Toán, Tập 1, 2, 5. NXB Giáo dục, Hà nội, 2006 (dịch từ tiếng Pháp, DUNOD, Paris, 1996).**
- **[5] George B. Thomas, Jr. Thomas' Calculus,twelfth edition, Pearson, 2010.**

NỘI DUNG CHÍNH

- *Bài 1. Hàm số một biến số thực (hàm số và đồ thị hàm số, các phép toán đối với hàm số, hàm hợp, hàm ngược, hàm số sơ cấp).*
- *Bài 2. Giới hạn của hàm một biến (định nghĩa giới hạn hàm số, các quy tắc, giới hạn một phía, tính chất của giới hạn.*
- *Bài 3. Vô cùng bé và vô cùng lớn.*
- *Bài 4. Tính liên tục của hàm một biến (các định nghĩa về hàm liên tục; sự gián đoạn).*

CHƯƠNG I. GIỚI HẠN VÀ SỰ LIÊN TỤC CỦA HÀM MỘT BIẾN

§1. Hàm số một biến số thực

1.1 Hàm số và đồ thị của hàm số

❖ *Định nghĩa và cách xác định hàm số*

- *Cho tập hợp khác rỗng $D \subset R$. Hàm số f đi từ D vào R là một quy tắc biến mỗi $x \in D$ thành một phần tử duy nhất $y \in R$.*
- *Cách xác định và ký hiệu hàm số:*

  Cách 1: *Xác định hàm số bởi công thức $y = f(x)$.*

  Cách 2: *Xác định hàm số kiểu ánh xạ (chỉ rõ tập xác định D)*

$$\begin{aligned} f : D &\longrightarrow R \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}.$$

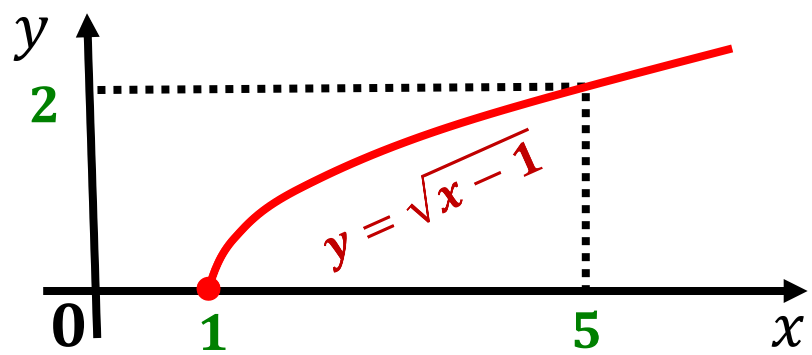
  Cách 3: *Xác định hàm số bằng cách cho bảng giá trị.*

- *Tập hợp* $D = \{x \in R: f(x) \text{ xác định}\}$ *gọi là tập xác định hàm số.*
- *Tập hợp* $f(D) = \{y \in R / y = f(x), x \in D\}$ *gọi là tập giá trị hàm số.*
- *Tập hợp* $G_f = \{M(x, f(x)) \in Oxy / x \in D\}$ *gọi là đồ thị hàm số.*

❖ *Ví dụ*

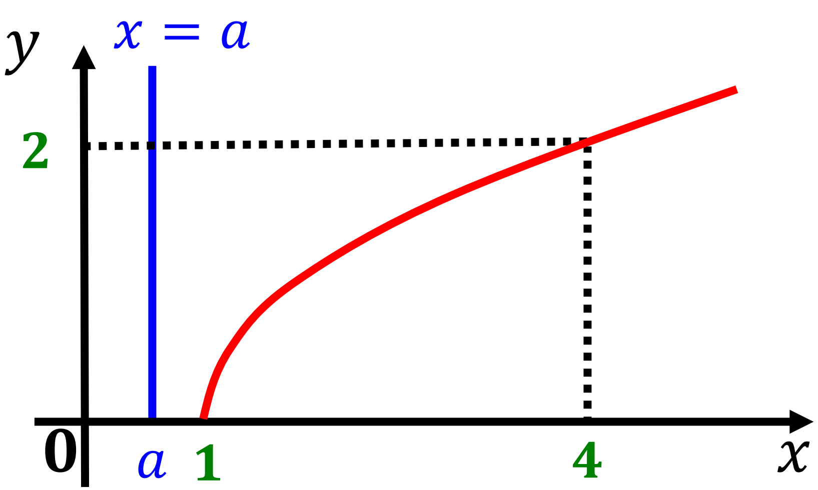
Cho hàm số $y = \sqrt{x-1}$. Ta có:

- Tập xđ: $D = \{x \in R / x \geq 1\} = [1; +\infty)$.
- Tập giá trị $f(D) = \{y \in R / y = \sqrt{x-1}, x \in D\} = [0; +\infty)$.
- Đồ thị $G_f = \{M(x, \sqrt{x-1}) \in Oxy / x \in [1; +\infty)\}$.

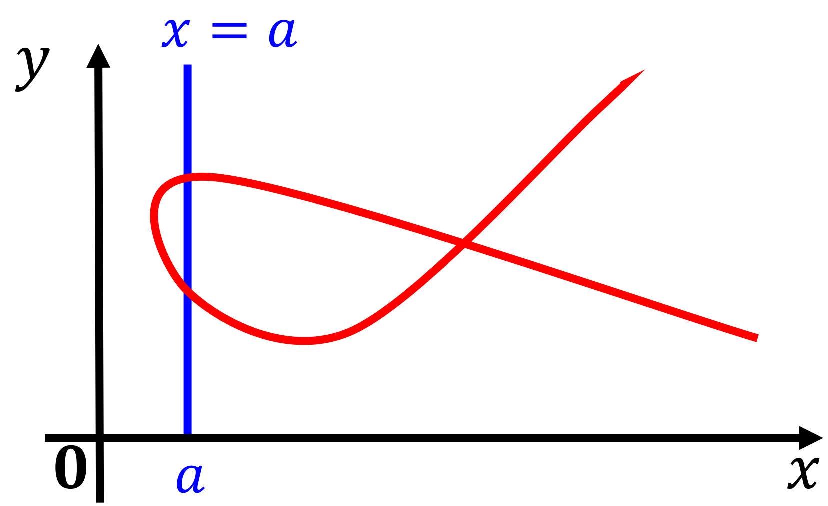


❖ b) Tiêu chuẩn đường thẳng đứng

- *Với mỗi giá trị $x = a$ thuộc tập xác định D ta chỉ xác định được duy nhất một giá trị $y = f(a)$, nên mỗi đường thẳng đứng $x = a$ chỉ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ một điểm duy nhất.*
- *Đây là tiêu chuẩn để nhận biết một đường cong có phải là đồ thị của một hàm số hay không.*



Đường cong này là đồ thị hàm số



Đường cong này không phải là đồ thị hàm số nào

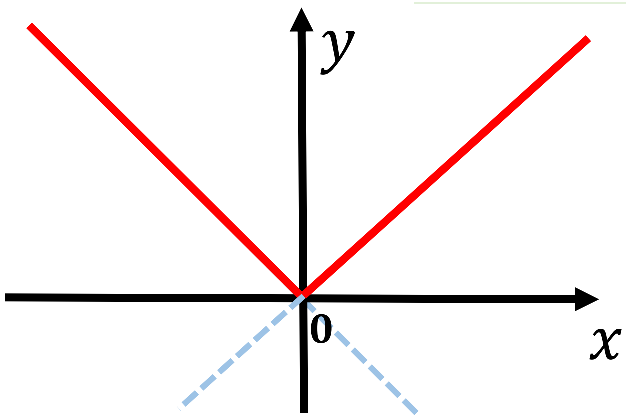
c) Hàm xác định từng khúc (Hàm nhiều công thức)

Đó là những hàm số được mô tả bằng nhiều công thức khác nhau trên những miền khác nhau của đối số.

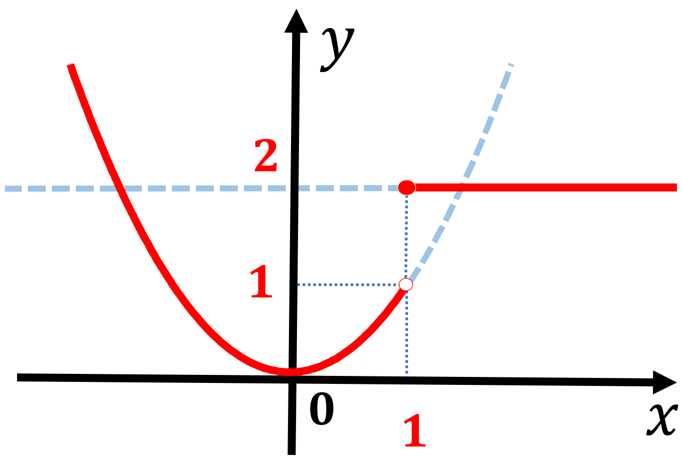
Ví dụ:

a) $f(x) = |x| = \begin{cases} x\,, \text{nếu } x \geq 0 \\ -x\,, \text{nếu } x < 0 \end{cases}$; b) $g(x) = \begin{cases} x^2, \text{nếu } x < 1 \\ 2, \ \text{nếu } x \geq 1 \end{cases}$.

Đồ thị hàm số $y = |x|$



Đồ thị hàm số $y = g(x)$



d) Hàm số chẵn, hàm số lẻ

*Hàm $y = f(x)$ gọi là **hàm chẵn** theo x nếu thoả 2 điều kiện:*

- *f có txđ D là tập đối xứng, tức là: $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$;*
- *$f(-x) = f(x), \forall x \in D$.*

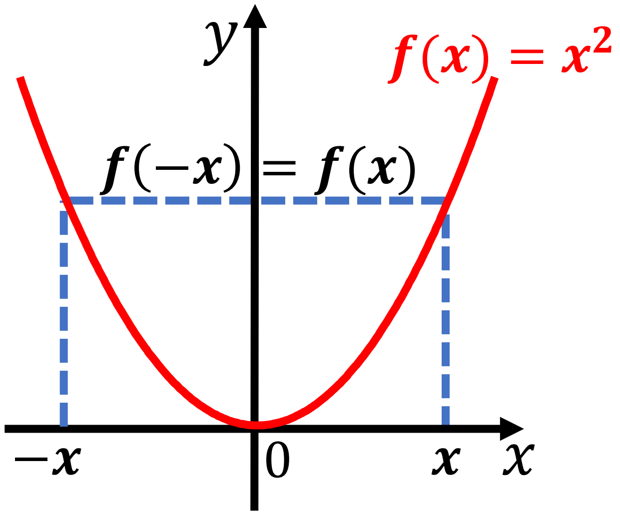
*Hàm $y = f(x)$ gọi là **hàm lẻ** theo x nếu thoả 2 điều kiện:*

- *f có txđ D là tập đối xứng, tức là: $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$;*
- *$f(-x) = -f(x), \forall x \in D$.*

❖ Ví dụ

a) Hàm f(x) $= x^2$ là hàm chẵn vì:

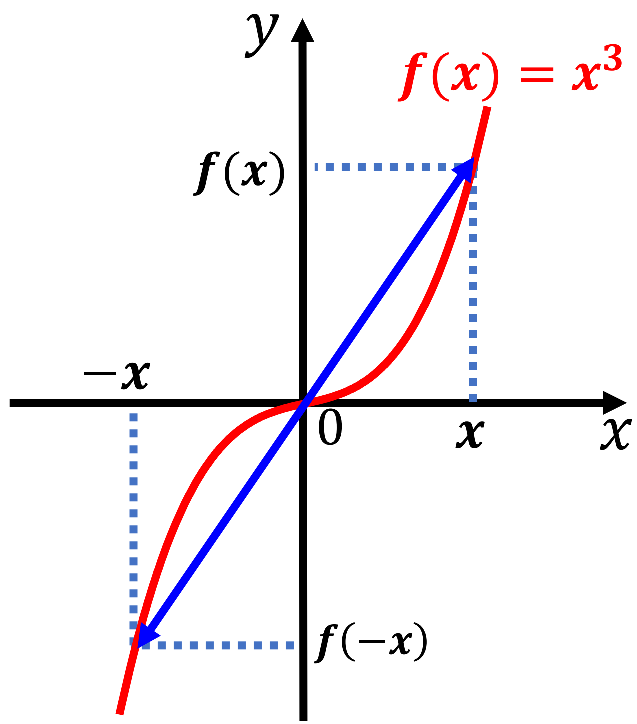
- f có txđ $D = R$ và $\forall x \in \mathrm{R} \Rightarrow -x \in R$;
- $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x), \forall x \in D$.



❖ Ví dụ

b) Hàm f(x) $= x^3$ là hàm lẻ vì:

- f có txđ R và $\forall x \in \mathrm{R} \Rightarrow -x \in R$.
- $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x), \forall x \in \mathrm{R}$.



c) Hàm f(x) $= \sqrt{x}$ không chẵn, không lẻ vì:
f có TXĐ $D = [0; +\infty)$ không đối xứng bởi tồn tại $4 \in [0; +\infty)$ nhưng $-4 \notin [0; +\infty)$.

d) Hàm f(x) $= 2x + 4$ không chẵn, không lẻ vì:

$f(-1) = 2 \neq f(1) = 6 \neq -f(1) = -6$

1.2 Hàm hợp (Composite functions)

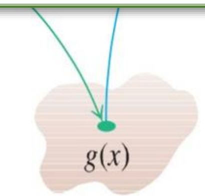
❖ Định nghĩa

Nếu f và g là những hàm số, hàm số hợp f_0g được định nghĩa là: $f_0g(x) = f[g(x)]$.

❖ Ví dụ

Cho $f(x) = \sqrt{x}$ *và* $g(x) = x + 1$, *tìm các hàm hợp sau:*

a) f_0g *b)* g_0f *c)* f_0f *d)* g_0g



Giải

a) $f_0g(x) = f[g(x)] = \sqrt{g(x)} = \sqrt{x+1}$.

b) $g_0f(x) = g[f(x)] = f(x) + 1 = \sqrt{x} + 1$.

c) $f_0f(x) = f[f(x)] = \sqrt{f(x)} = \sqrt{\sqrt{x}}$.

d) $g_0g(x) = g[g(x)] = g(x) + 1 = x + 1 + 1 = x + 2$.

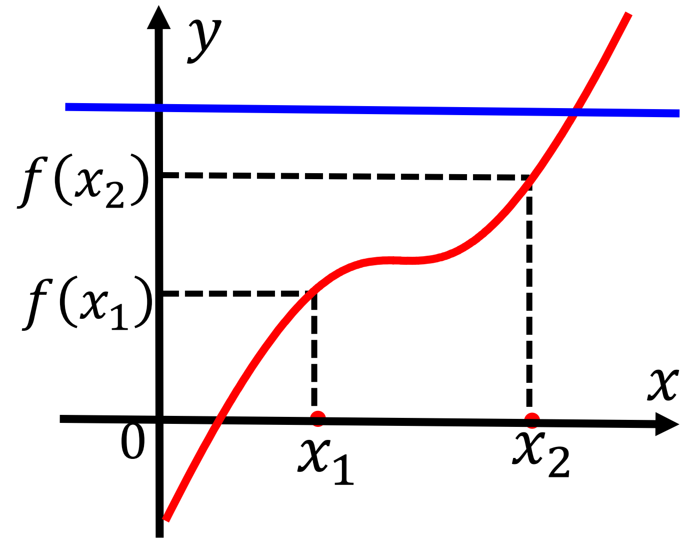
1.3 Hàm số ngược

❖ *Định nghĩa*

Hàm f được gọi là hàm 1-1 (one to one function), nếu nó không nhận cùng một giá trị hai lần, có nghĩa:

$$\forall x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

hay $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$



Tiêu chuẩn đường nằm ngang: *Hàm f là 1-1 nếu và chỉ nếu không có đường thẳng nằm ngang (song song với 0x) nào cắt đồ thị của nó tại nhiều hơn một điểm.*

❖ Ví dụ

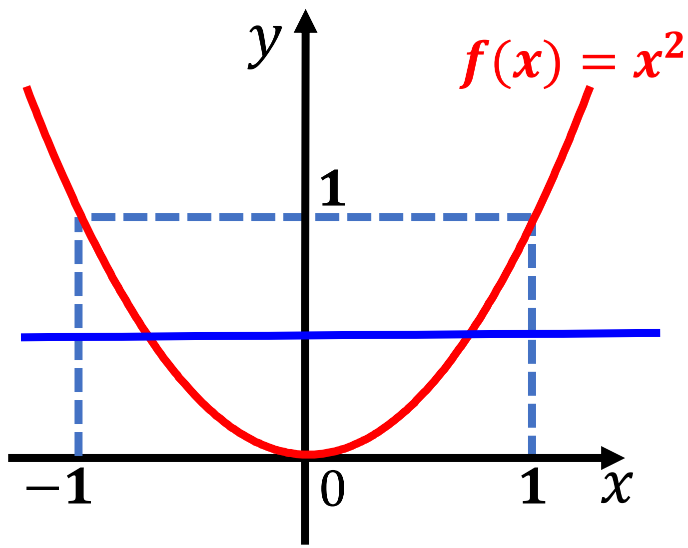
a) Hàm số $f(x) = x^3$ là hàm 1-1 vì với mọi x_1, x_2 mà

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1^3 \neq x_2^3 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

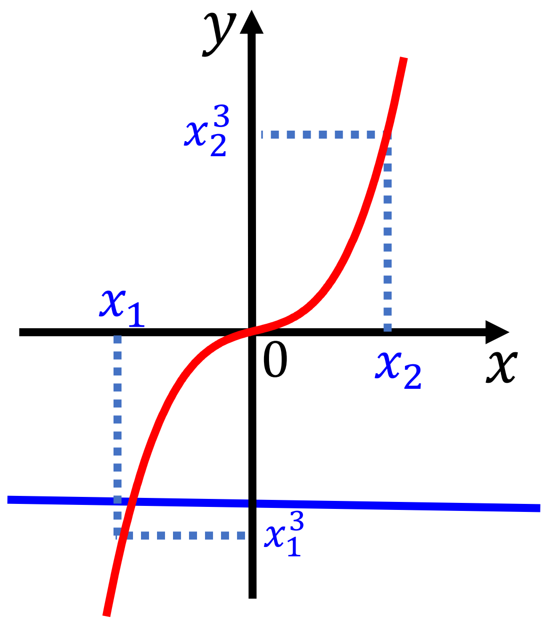
b) Hàm số $f(x) = x^2$ không phải là hàm 1-1.

Vì tồn tại $x_1 = 1, x_2 = -1$ là hai đối số khác nhau nhưng:

$$f(1) = 1 = f(-1) \cdot$$



Vi phạm Tiêu chuẩn đường nằm ngang



Thoả mãn Tiêu chuẩn đường nằm ngang

❖ *Định nghĩa 2*

Cho f là hàm 1-1, có tập xác định A và tập giá trị B.

$$f: \boldsymbol{A} \longrightarrow \boldsymbol{B}$$
$$x \longmapsto y = f(x)$$

Hàm ngược của f ký hiệu là f^{-1} được xác định như sau:

$$f^{-1}: \boldsymbol{B} \longrightarrow \boldsymbol{A}$$
$$y \longmapsto x \ \ sao\ cho\ y = f(x)$$

❖ ***Cách tìm hàm ngược của hàm 1-1:***

B1. Giải phương trình $y = f(x)$, thu được $x = g(y)$.
B2. Hoán đổi ký hiệu đối số với hàm số ta được $y = g(x)$.

❖ Ví dụ 1

CMR $y = f(x) = \sqrt{-1-x}$ là hàm 1-1 trên TXĐ của nó, tìm hàm ngược và vẽ đồ thị của các hàm này trên cùng một hệ trục tọa độ.

Giải

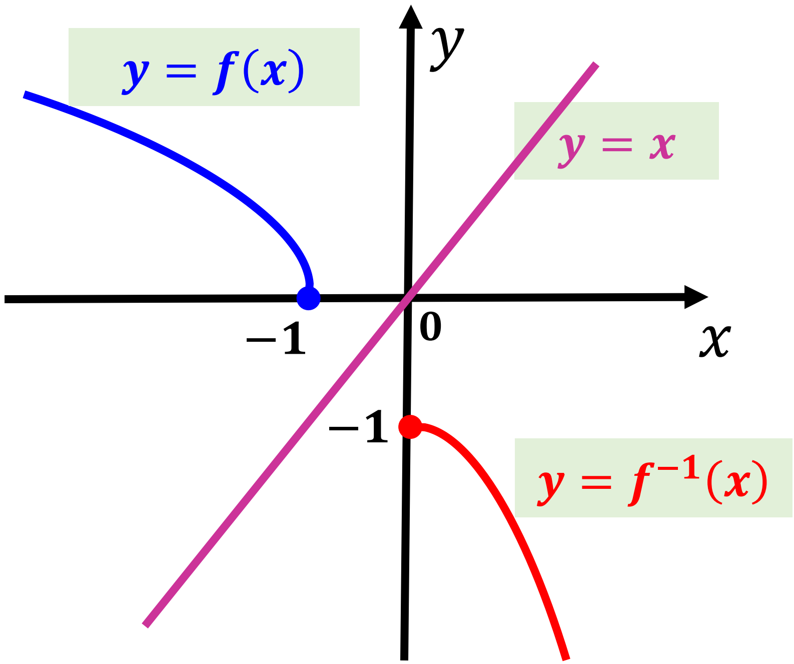
TXĐ: $D = (-\infty; -1]$, TGT: $T = [0, \infty)$.

Giả sử $f(x_1) = f(x_2)$

$\Rightarrow \sqrt{-1-x_1} = \sqrt{-1-x_2}$

$\Rightarrow -1-x_1 = -1-x_2$

$\Rightarrow x_1 = x_2$. Vậy f là hàm 1-1.



Tìm x theo y: $y = \sqrt{-1-x}$

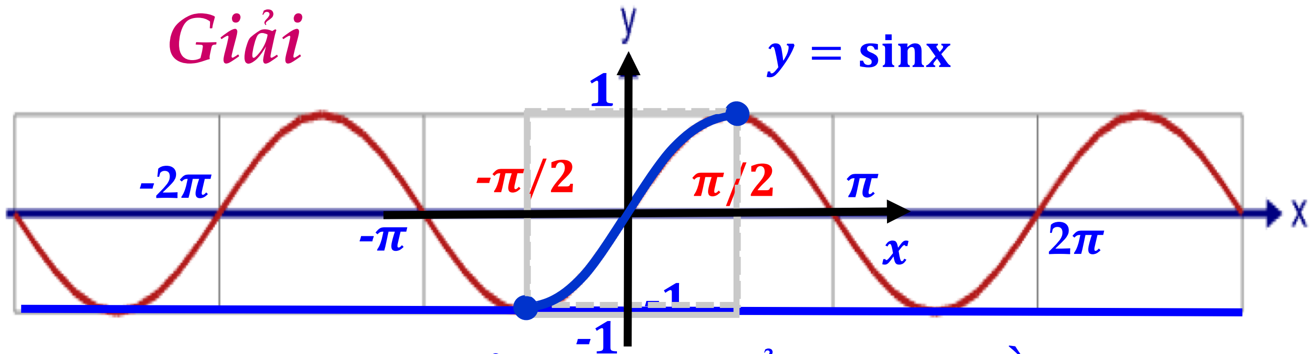
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \ge 0 \\ y^2 = -1-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \ge 0 \\ x = -1-y^2 \end{cases}$$

Hoán đổi ký hiệu x với y được: $y = -1-x^2$ (với $x \ge 0$) là hàm số ngược của hàm số đã cho. Tức là $y = f^{-1}(x) = -1-x^2$.

❖ *Ví dụ 2*

Xây dựng hàm ngược của hàm y = sinx.

Giải



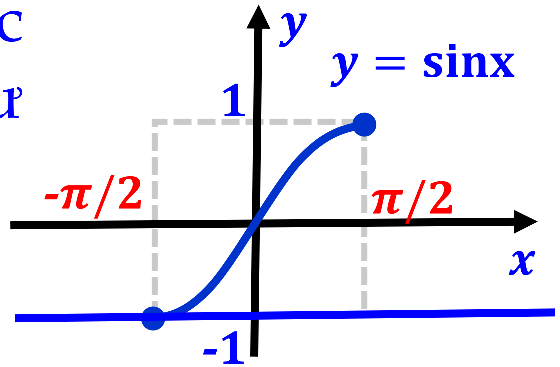
Hàm sin không thỏa tiêu chuẩn đường nằm ngang.

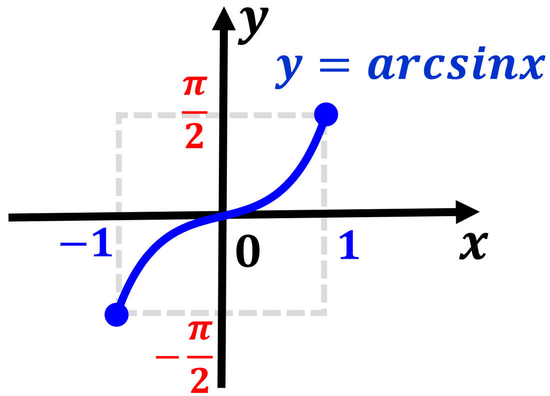
Xét hàm sin:

$$sin: R \longrightarrow [-1;1]$$
$$x \mapsto y = sinx$$

B1. Hạn chế miền xác định của hàm sin như sau:

$$sin: \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1;1]$$
$$x \mapsto y = sinx$$





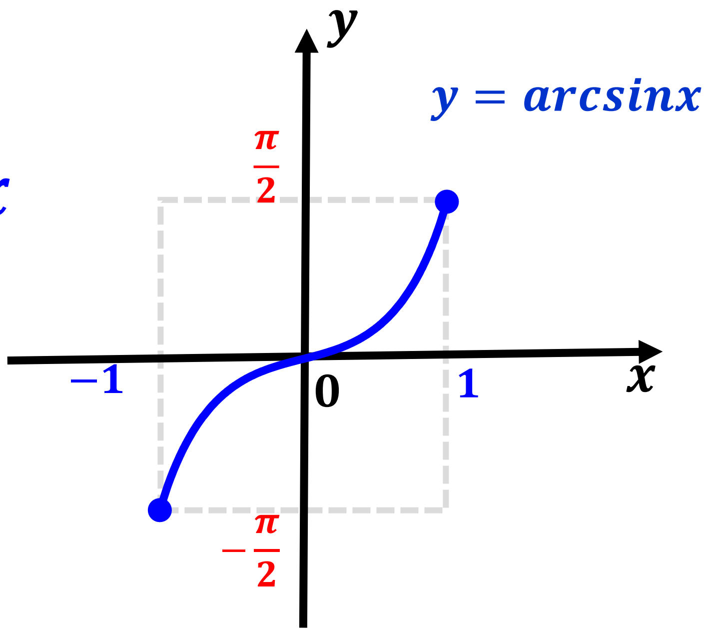
B2. Với mỗi $y \in [-1,1]$ giả sử x $\in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ là nghiệm p.trình y = sinx.

Và ký hiệu: x=arcsiny.

Đổi ký hiệu ta được y=arcsinx là hàm ngược của y=sinx:

$$\boldsymbol{arcsin}:[-1;1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$$

$$x \longmapsto y = arcsinx$$



❖ **Chú ý:**

Hàm y=arcsinx còn ký hiệu là $y = \sin^{-1}(x)$

1.4 Các hàm số sơ cấp

❖ *Định nghĩa 1 (Hàm sơ cấp cơ bản)*

*Các hàm số đơn giản nhất khi kết hợp với các phép toán giải tích ta có thể xây dựng nên mọi hàm sơ cấp, ta gọi chúng là **các hàm sơ cấp cơ bản**. Hiện nay các hàm sơ cấp cơ bản đã được tạo lập trên hầu hết các thế hệ máy tính bỏ túi, phần mềm tính toán và được giảng dạy kỹ trong chương trình phổ thông. Đó là:*

1) *Hàm số hằng* $f(x) = C$ *(với mọi* $x \in R$*).*
2) *Hàm số luỹ thừa* $f(x) = x^{\alpha}$ $(\alpha \in R)$.
3) *Hàm số mũ* $y = a^{x}; (0 < a \neq 1)$.
4) *Hàm số logarit* $y = \log_a x, (0 < a \neq 1)$.
5) *Hàm lượng giác cơ bản:* $f(x)=\sin x$, $f(x)=\cos x$, $f(x)=\tan x$, $f(x)=\cot x$.
6) *Các hàm lượng giác ngược:* $f(x)=\arcsin x$, $f(x)=\arccos x$, $f(x)=\arctan x$, $f(x)=\text{arccot}\, x$.
7) *Hàm hyperbolic, hàm hyperbolic ngược (Xem GT)*

❖ *Định nghĩa 2 (Hàm sơ cấp)*

Hàm số sơ cấp làm số số được cho bằng một biểu thức giải tích và được xây dựng từ các hàm số sơ cấp cơ bản bằng một số phép toán số học cộng, trừ, nhân, chia, phép lấy hàm hợp.

❖ *Ví dụ*

- Hàm đa thức $y = x^3 + x - 3$ là tổng-hiệu các hàm lũy thừa và hàm hằng nên nó một hàm số sơ cấp.
- Hàm số $y = \sin(e^x)$ là hợp của hàm y= sinx với hàm $y = e^x$ nên nó cũng là hàm sơ cấp.
- Hàm số $y = \frac{2x-3}{\sqrt{x-1}} + 2x.\tan(2^x)$ là hàm sơ cấp.
- Hàm số $f(x) = |x| = \begin{cases} x\text{ , nếu } x \geq 0 \\ -x\text{ , nếu } x < 0 \end{cases}$ nhiều hơn một công thức nên không phải là hàm số sơ cấp.

❖ **Chú ý:**

Trong số các hàm sơ cấp, các loại thông dụng có tên gọi riêng là:

1) *Hàm số đa thức* $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$

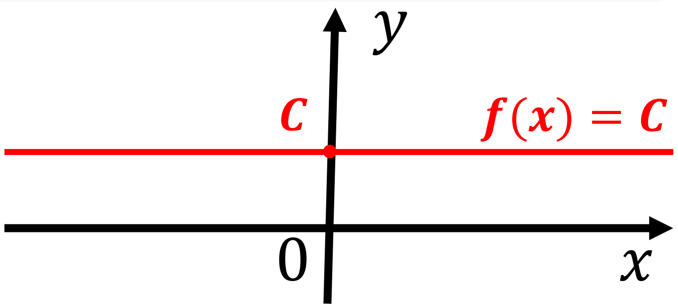
2) *Hàm hữu tỷ:* $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ *với* $P_n(x)$, $Q_n(x)$ *là những đa thức.*

3) *Hàm đại số (còn gọi là hàm vô tỷ) tạo nên từ các phép toán đại số như cộng, trừ, nhân, chia kết hợp với phép khai căn của các đa thức.*

4) *Hàm siêu việt là các loại: hàm lượng giác; hàm lượng giác ngược; hàm mũ; hàm logarit; hàm hyperbolic; hàm hyperbolic ngược,...*

Phần tự học

Nhắc lại tính chất các hàm số sơ cấp cơ bản



❖ ***Hàm hằng:*** f: R⟶R

$x \longmapsto f(x) = C$

❖ ***Hàm lũy thừa*** $y = x^{\alpha}$

Hàm lũy thừa có tập xác định và tập giá trị tùy thuộc vào số mũ.

❑ ***Ví dụ:*** a) $y = x^3$ có tập xác định $D = R$.

b) $y = x^{-3} = \frac{1}{x^3}$ có tập xác định D = R\{0}.

c) $y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ có tập xác định D = [0;+∞).

d) $y = x^{\frac{-2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ có tập xác định D = R\{0}.

e) $y = x^{\sqrt{3}}$ có tập xác định D = (0;+∞).

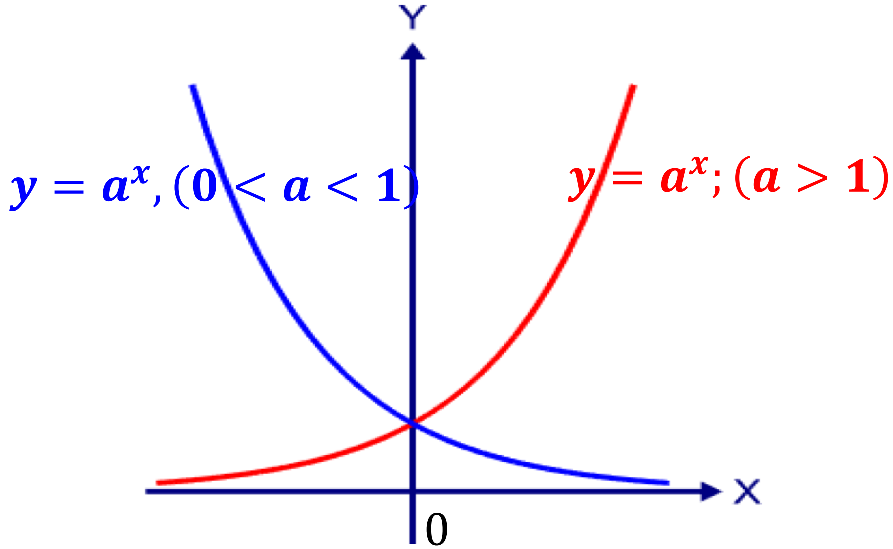
Phần tự học

❖ *Hàm mũ* $y = a^x; (0 < a \neq 1)$

TXĐ: D=R và TGT T=(0;+∞).

Hàm số đồng biến khi $\boldsymbol{a > 1}$.

Hàm số nghịch biến khi $\boldsymbol{0 < a < 1}$.

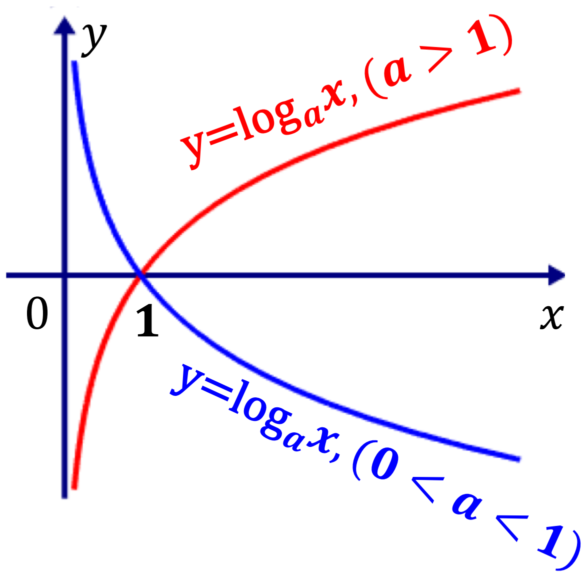


❖ *Hàm số logarit* $y = \log_a x, (0 < a \neq 1)$

TXĐ: D=(0;+∞)và TGT T=R.

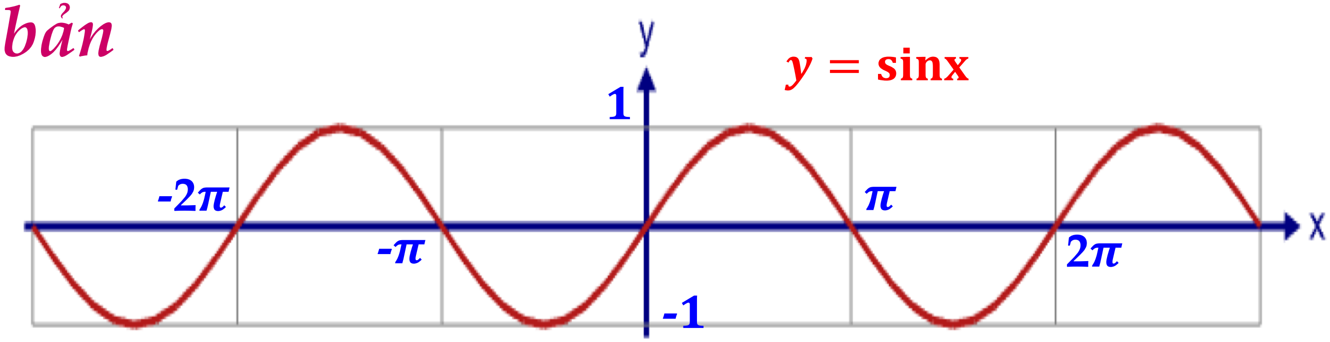
Hàm số đồng biến khi $\boldsymbol{a > 1}$.

Hàm số nghịch biến khi $\boldsymbol{0 < a < 1}$.



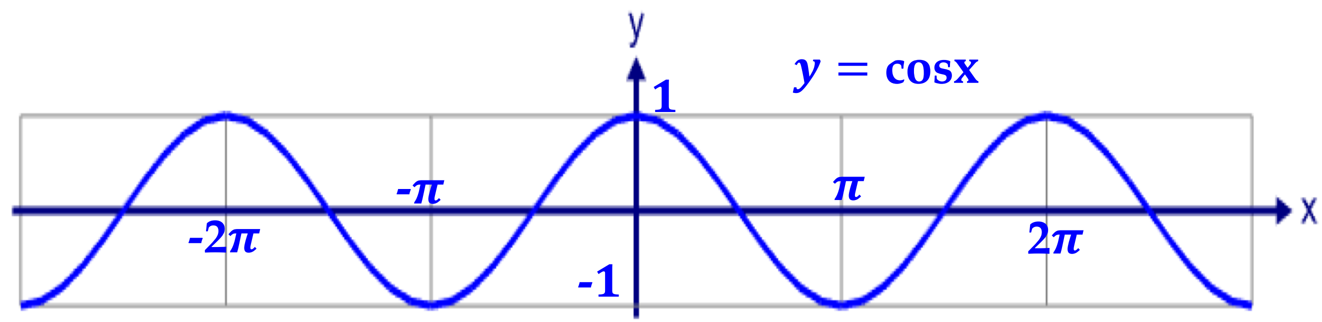
Phần tự học

❖ Hàm lượng giác cơ bản



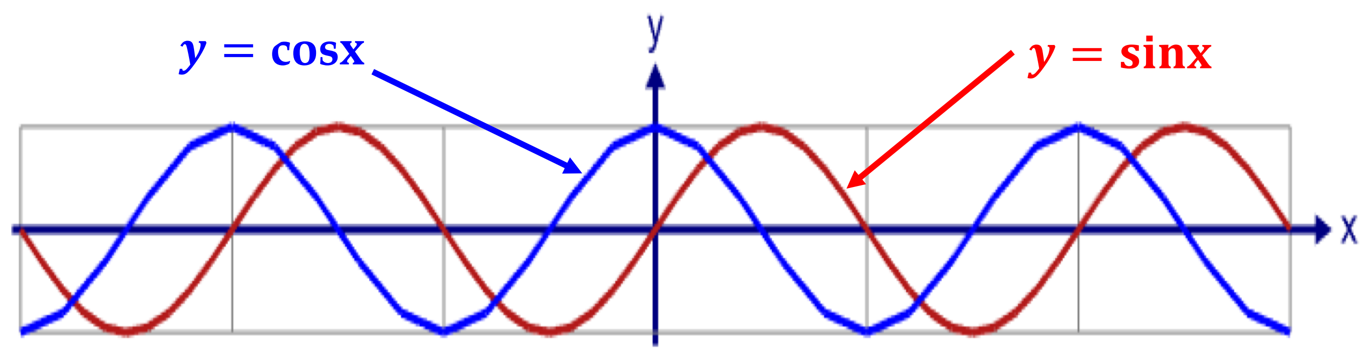
❖ Hàm sin:

$$sin: R \longrightarrow [-1;1]$$
$$x \longmapsto y = sinx$$



❖ Hàm cosin:

$$cos: R \longrightarrow [-1;1]$$
$$x \longmapsto y = cosx$$

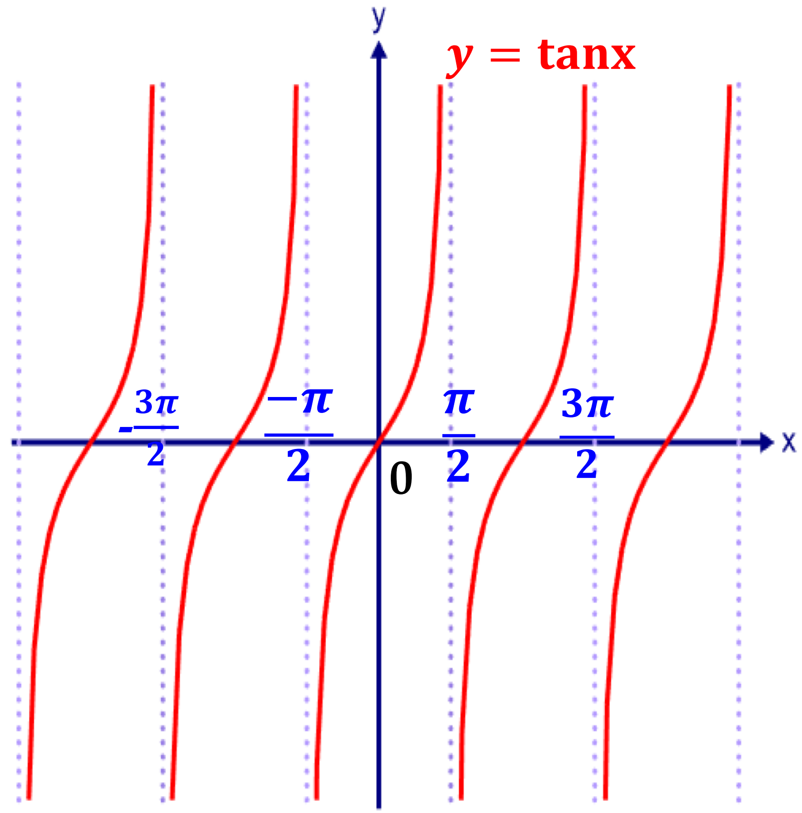


Phần tự học

❖ *Hàm tan:*

$$\tan: R \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\} \longrightarrow R$$

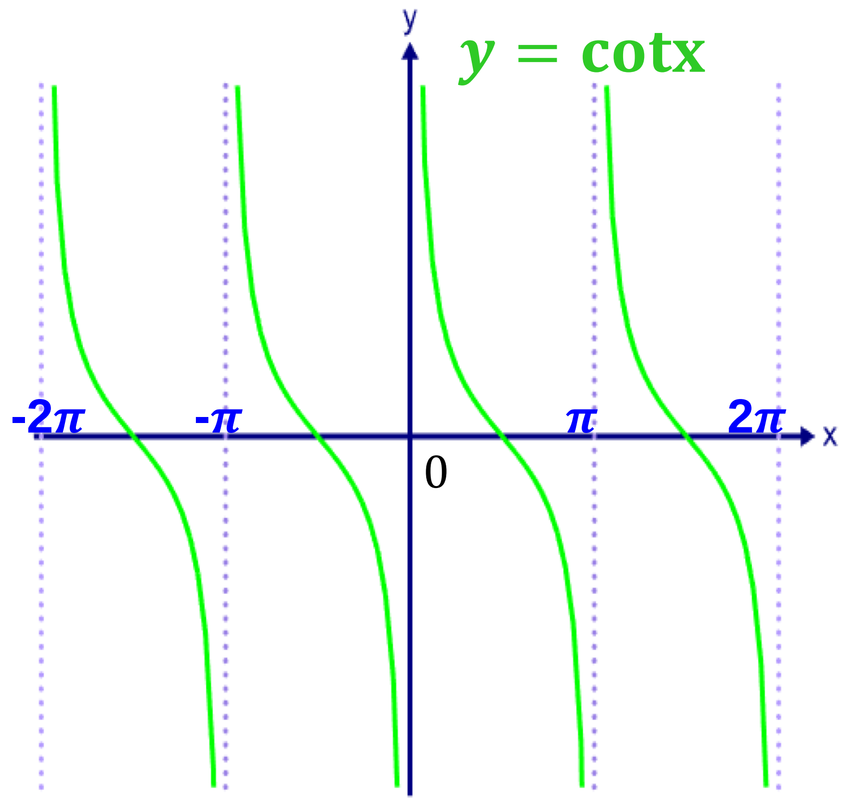
$$x \mapsto y = \tan x$$



❖ *Hàm cot:*

$$\cot: R \setminus \{k\pi\} \longrightarrow R$$

$$x \mapsto y = \cot x$$

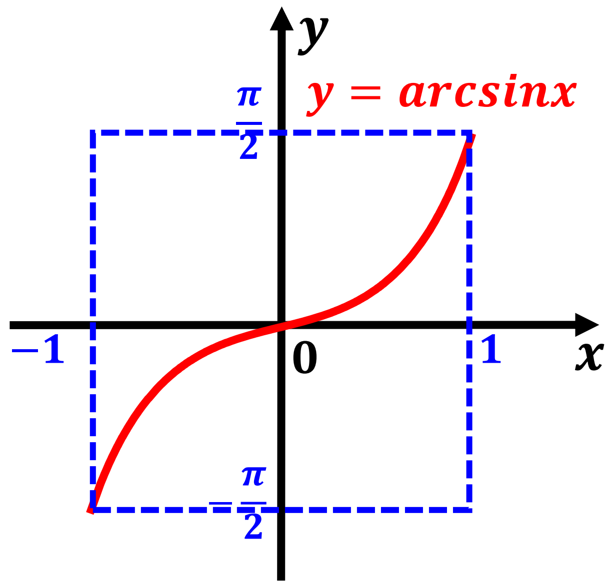


Phần tự học

Hàm lượng giác ngược:

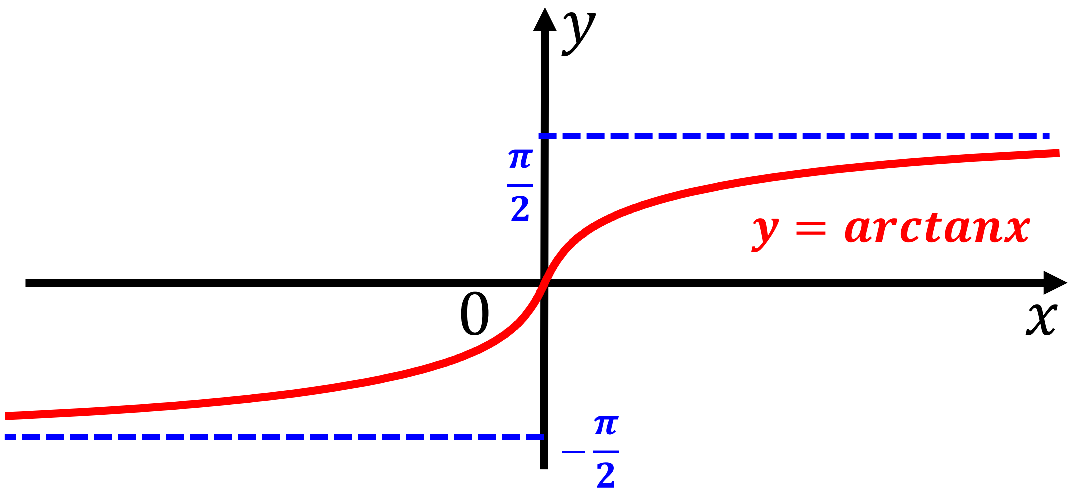
❖ ***Hàm arcsin:***

$$arcsin: [-1;1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$$
$$x \mapsto y = arcsinx$$



❖ ***Hàm arctan:***

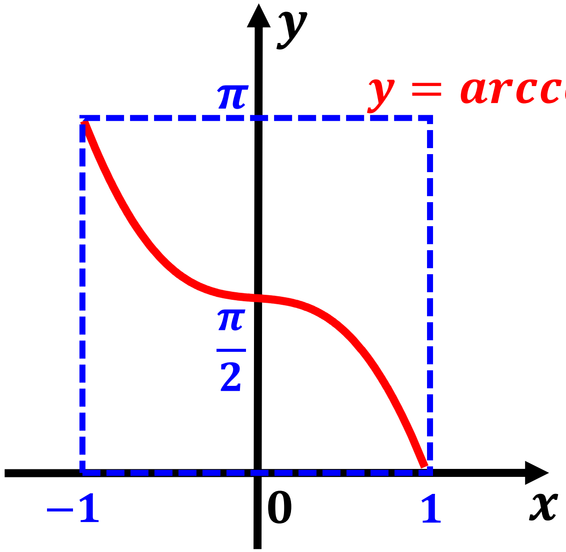
$$arctan: R \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$$
$$x \mapsto y = arctanx$$



Phần tự học

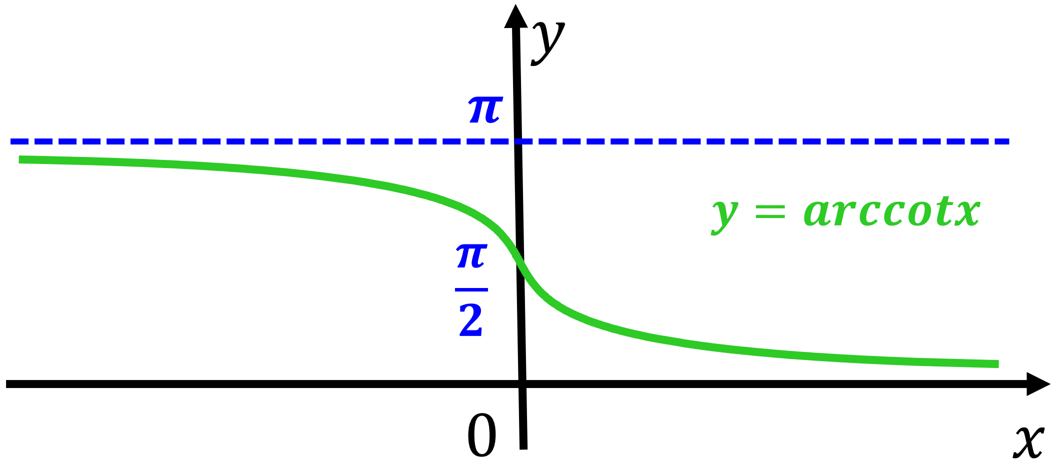
❖ Hàm arccos:

$$\text{arccos}: [-1; 1] \longrightarrow [0; \pi]$$
$$x \longmapsto y = \text{arccos}x$$



❖ Hàm arccot:

$$\text{arccot}: \mathrm{R} \longrightarrow (0; \pi)$$
$$x \longmapsto y = \text{arccot}x$$



BÀI THU HOẠCH

Xây dựng hàm số ngược của các hàm:

$y = \cos x$; $y = \tan x$; $y = \cot x$.