ĐÁP ÁN

Rõ ràng W là tập hợp con khác rỗng của $M_2(R)$. (1)

Lấy bất kỳ $\alpha \in R$ *và* $u, v \in W$ *thì* u, v *có dạng:*

$$u = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \text{ và } v = \begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & b' \end{pmatrix} \text{ với } a, b, a', b' \in R.$$

Ta thấy:

$$i)\ u + v = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + a' & 0 \\ 0 & b + b' \end{pmatrix}.$$

Suy ra $u + v \in W$. *Vậy W đóng kín với phép cộng.* (2)

$$ii)\ \alpha u = \alpha \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a & 0 \\ 0 & \alpha b \end{pmatrix}.$$

Suy ra $\alpha u \in W$. *Vậy W đóng kín với phép nhân ngoài.* (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra W *là một không gian vectơ con của* $M_2(R)$.

❖ VD:

Tìm tập nghiệm S của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

Chứng tỏ rằng S là không gian vectơ con của $\mathbb{R}^3$ (không gian nghiệm).

Giải

Giải hệ: $\begin{cases} x + y + z = 0 & (1) \\ x + 2y + z = 0 & (2) \end{cases} \xLeftrightarrow{(2)-(1)\to(2)} \begin{cases} x + y + z = 0 \\ \quad\; y \quad\;\; = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 0 + z = 0 \\ \quad\; y \quad\;\; = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + a = 0 \\ y = 0 \\ z = a \end{cases} (a \in R) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -a \\ y = 0 \\ z = a \end{cases} (a \in R)$$

Suy ra tập nghiệm của hệ là: $S = \{(-a; 0; a) / a \in R\}$.

Ta c/m: $S = \{(-a; 0; a)/a \in R\}$ là kgvt con của R^3. Thật vậy:

Rõ ràng S là tập hợp con khác rỗng của R^3.

Giả sử: $u, v \in S$ và $k \in R$ thì u, v có dạng:

$$u = (-a; 0; a),\ v = (-b; 0; b) \text{ với } a, b \in R.$$

Ta thấy:

- $u + v = (-a; 0; a) + (-b; 0; b)$
  $= (-a - b; 0; a + b)$. Suy ra $x + y \in S$.
- $ku = (-ka; 0; ka)$. Suy ra $ku \in S$.

Vậy S là một kgvt con của R^3.

BÀI TẬP TẠI LỚP

Tìm tập nghiệm S của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 3x - 3y + 2z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}.$$

CMR: S là không gian vectơ con của R^3.

ĐÁP ÁN

$$\begin{cases} x-2y+z=0 \\ 3x-3y+2z=0 \\ 2x-y+z=0 \end{cases} \xLeftrightarrow[d_3-2d_1\to d_3]{d_2-3d_1\to d_2} \begin{cases} x-2y+z=0 \\ 3y-z=0 \\ 3y-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+z=0 \\ 3y-z=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+z=0 \\ 3y-3a=0 \\ z=3a \end{cases}, (a \in R) \Leftrightarrow \begin{cases} x-2a+3a=0 \\ y=a \\ z=3a \end{cases} (a \in R) \Leftrightarrow \begin{cases} x=-a \\ y=a \\ z=3a \end{cases} (a \in R)$$

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình là $S=\{(-a;a;3a)/a \in R\}$.

Ta c/m: $S = \{(-a; a; 3a)/a \in R\}$ *là kgvt con của* R^3*. Thật vậy:*

Rõ ràng S là tập hợp con khác rỗng của R^3 .

Giả sử: $u, v \in S$ *và* $k \in R$ *thì* u, v *có dạng:*

$$u = (-a; a; 3a)\ ,\ v = (-b; b; 3b) \text{ với } a, b \in R.$$

Ta thấy:

- $u + v = (-a; a; 3a) + (-b; b; 3b)$
  $= (-(a + b); a + b; 3(a + b))$. *Suy ra* $u + v \in S$.
- $ku = (-ka; ka; 3ka)$. *Suy ra* $ku \in S$.