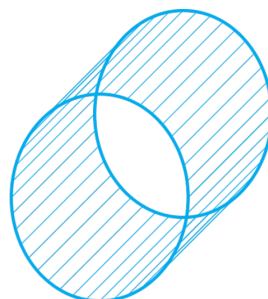


TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
KHOA TOÁN–TIN HỌC



Khoa Toán - Tin học
Fac. of Math. & Computer Science

Cơ học môi trường liên tục

Họ và tên	MSSV	Công việc
Nguyễn Phi Khoa	22110086	Gõ \LaTeX các phần lý thuyết của section 6.5, 6.6, 6.7, phần code mô phỏng.
Trần Thị Mỹ Kim	22110098	Cách giải bài tập về nguyên lý chồng chất nghiệm chứng minh công thức (6.58), (6.86)
Nguyễn Thanh Phong	22110154	Gõ \LaTeX các phần lý thuyết của section còn lại, phần xây dựng thuật toán, thiết kế báo cáo. Chứng minh các công thức còn lại, đưa ra các ví dụ về phương trình Beltrami-Michell, nguyên lý St.Venant, ứng suất phẳng, biến dạng phẳng., TLTK.

Mã nguồn của báo cáo

Ngày 13 tháng 4 năm 2025

Mục lục

6	Đàn hồi tuyến tính	2
6.1	Định luật Hooke tổng quát. Hàm năng lượng biến dạng	2
6.2	Đẳng hướng. Dị hướng. Đối xứng đàn hồi	4
6.3	Môi trường đẳng hướng. Hằng số đàn hồi	6
6.4	Bài toán đàn hồi tĩnh. Bài toán đàn hồi động	9
6.5	Định lý chồng chất. Tính duy nhất của nghiệm. Nguyên lý St. Venant	12
6.5.1	Nguyên lý chồng chất nghiệm	12
6.5.2	Sự duy nhất của nghiệm. Nguyên lý St. Venant	17
6.6	Đàn hồi hai chiều. Ứng suất phẳng và biến dạng phẳng	19
6.7	Hàm ứng suất Airy	28
6.8	Các bài toán đàn hồi hai chiều trong tọa độ cực (Polar)	30
6.9	Sự siêu đàn hồi. Sự đàn hồi kém	31
6.10	Đàn hồi nhiệt tuyến tính	32
	Xây dựng thuật toán	37
6.11	Rời rạc hóa miền bài toán	37
6.12	Xấp xỉ nghiệm trên từng phần tử	37
6.13	Ma trận độ cứng và điều kiện biên	39
	Phần code	43
6.14	Code 2D cho chia nút bất kì	43

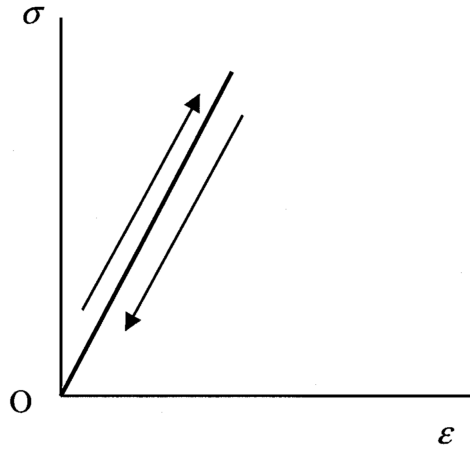
Chương 6

Đàn hồi tuyến tính

6.1 Định luật Hooke tổng quát. Hàm năng lượng biến dạng

Trong lý thuyết đàn hồi tuyến tính cổ điển, người ta cho rằng các dịch chuyển và độ dốc dịch chuyển đủ nhỏ để không cần phân biệt giữa các mô tả Lagrangian và Euler. Theo đó, xét về vectơ dịch chuyển u_i , tensor biến dạng tuyến tính được đưa ra bởi các biểu thức tương đương hoặc

$$\begin{aligned} l_{ij} = \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \\ \mathbf{L} = \mathbf{E} &= \frac{1}{2} (\mathbf{u} \nabla_{\mathbf{x}} + \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\mathbf{u} \nabla_{\mathbf{x}} + \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\mathbf{u} \nabla + \nabla \mathbf{u}) \end{aligned} \quad (6.1)$$



Đồ thị biểu diễn mối liên hệ tuyến tính giữa ứng suất và biến dạng.

Sau đây, người ta giả định thêm rằng các quá trình biến dạng là đoạn nhiệt (không mất hoặc thu nhiệt) và đẳng nhiệt (nhiệt độ không đổi) trừ khi có quy định cụ thể khác.

Các phương trình cấu thành cho một vật rắn đàn hồi tuyến tính liên hệ các tensor ứng suất và biến dạng thông qua biểu thức

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad \text{hoặc} \quad \Sigma = \tilde{\mathbf{C}} : \mathbf{E} \quad (6.2)$$

được gọi là định luật Hooke tổng quát. Trong (6.2), tensor của hằng số đàn hồi C_{ijkl} có 81 thành phần. Tuy nhiên, do tính đối xứng của cả tensor ứng suất và biến dạng, có nhiều nhất

36 hằng số đàn hồi độc lập. Với mục đích viết định luật Hooke theo 36 thành phần này, hệ thống thành phần ứng suất và biến dạng có chỉ số kép thường được thay thế bằng hệ thống có chỉ số đơn có phạm vi là 6. Do đó, trong ký hiệu

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \sigma_1 & \sigma_{23} &= \sigma_{32} = \sigma_4 \\ \sigma_{22} &= \sigma_2 & \sigma_{13} &= \sigma_{31} = \sigma_5 \\ \sigma_{33} &= \sigma_3 & \sigma_{12} &= \sigma_{21} = \sigma_6\end{aligned}\quad (6.3)$$

và

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \varepsilon_1 & 2\varepsilon_{23} &= 2\varepsilon_{32} = \varepsilon_4 \\ \varepsilon_{22} &= \varepsilon_2 & 2\varepsilon_{13} &= 2\varepsilon_{31} = \varepsilon_5 \\ \varepsilon_{33} &= \varepsilon_3 & 2\varepsilon_{12} &= 2\varepsilon_{21} = \varepsilon_6\end{aligned}\quad (6.4)$$

Định luật Hooke được viết dưới dạng

$$\sigma_K = C_{KM} \varepsilon_M \quad (K, M = 1, 2, 3, 4, 5, 6) \quad (6.5)$$

trong đó C_{KM} biểu thị 36 hằng số đàn hồi.

Khi các hiệu ứng nhiệt bị bỏ qua, phương trình cân bằng năng lượng (5.32) có thể được viết

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} D_{ij} = \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} \quad (6.6)$$

Năng lượng bên trong trong trường hợp này hoàn toàn là năng lượng cơ học và được gọi là năng lượng biến dạng (trên một đơn vị khối lượng). Từ (6.6),

$$du = \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad (6.7)$$

và nếu u được coi là một hàm của 9 thành phần biến dạng, $u = u(\varepsilon_{ij})$, thì vi phân của nó được biểu diễn bằng công thức sau:

$$du = \frac{\partial u}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij} \quad (6.8)$$

So sánh (6.7) và (6.8), có thể thấy rằng

$$\frac{1}{\rho} \sigma_{ij} = \frac{\partial u}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (6.9)$$

Tỷ trọng năng lượng biến dạng u^* (đơn vị thể tích) được định nghĩa là

$$u^* = \rho u \quad (6.10)$$

và vì ρ có thể được coi là hằng số trong lý thuyết biến dạng nhỏ, u^* có tính chất là

$$\sigma_{ij} = \rho \frac{\partial u}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial u^*}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (6.11)$$

Hơn nữa, trạng thái không của năng lượng biến dạng có thể được chọn một cách tùy ý; và vì ứng suất phải triệt tiêu khi biến dạng triệt tiêu, dạng đơn giản nhất của hàm năng lượng biến dạng dẫn đến mối quan hệ ứng suất-biến dạng tuyến tính là dạng bậc hai.

$$u^* = \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} \quad (6.12)$$

Từ (6.2), phương trình này được viết

$$u^* = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \quad \text{hoặc} \quad u^* = \frac{1}{2} \Sigma : \mathbf{E} \quad (6.13)$$

Viết (6.12) lại dưới dạng chỉ số K, M như sau:

$$u^* = \frac{1}{2} C_{KM} \varepsilon_K \varepsilon_M \quad (6.14)$$

trong đó $C_{KM} = C_{MK}$. Do tính đối xứng của C_{KM} , số lượng hằng số đàn hồi độc lập nhiều nhất là 21 nếu tồn tại một hàm năng lượng biến dạng.

6.2 Đẳng hướng. Dị hướng. Đối xứng đàn hồi

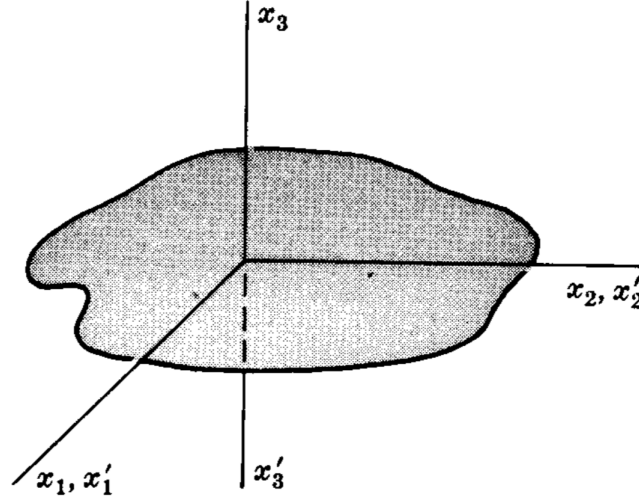
Nếu các tính chất đàn hồi không phụ thuộc vào hệ quy chiếu được sử dụng để mô tả chúng, một vật liệu được gọi là đẳng hướng đàn hồi. Một vật liệu không có tính đẳng hướng được gọi là dị hướng. Vì các tính chất đàn hồi của một chất rắn Hooke được biểu diễn thông qua các hệ số C_{KM} , một vật thể dị hướng tổng quát sẽ có ma trận hằng số đàn hồi với dạng

$$[C_{KM}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \quad (6.15)$$

Khi một hàm năng lượng biến dạng tồn tại cho vật thể, ta có $C_{KM} = C_{MK}$, và 36 hằng số trong (6.15) được giảm xuống còn 21.

Một mặt phẳng đối xứng đàn hồi tồn tại tại một điểm mà các hằng số đàn hồi có giá trị như nhau cho mọi cặp hệ tọa độ là ảnh phản chiếu của nhau qua mặt phẳng đó. Các trục của những hệ tọa độ như vậy được gọi là "các hướng đàn hồi tương đương." Nếu mặt phẳng x_1x_2 là một mặt phẳng đối xứng đàn hồi, các hằng số C_{KM} sẽ bất biến dưới phép biến đổi tọa độ

$$x'_1 = x_1, \quad x'_2 = x_2, \quad x'_3 = -x_3 \quad (6.16)$$



Hình 6.1

như trong Hình 6.1. Ma trận biến đổi của (6.16) như sau

$$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

Thay các giá trị của (6.17) vào các quy tắc biến đổi cho tensor ứng suất và biến dạng tuyến tính, lần lượt là (2.27) và (3.78).

Ta nhắc lại công thức (2.27): $\Sigma' = A \cdot \Sigma \cdot A_c$.

Từ công thức (2.27), ta có:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \sigma'_1 & \sigma'_6 & \sigma'_5 \\ \sigma'_6 & \sigma'_2 & \sigma'_4 \\ \sigma'_5 & \sigma'_4 & \sigma'_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_6 & \sigma_5 \\ \sigma_6 & \sigma_2 & \sigma_4 \\ \sigma_5 & \sigma_4 & \sigma_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_6 & -\sigma_5 \\ \sigma_6 & \sigma_2 & -\sigma_4 \\ -\sigma_5 & -\sigma_4 & \sigma_3 \end{bmatrix} (*) \end{aligned}$$

Tương tự, ta nhắc lại công thức (3.78): $E' = A \cdot E \cdot A_c$.

Từ công thức (3.78), ta có:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \varepsilon'_1 & \varepsilon'_6 & \varepsilon'_5 \\ \varepsilon'_6 & \varepsilon'_2 & \varepsilon'_4 \\ \varepsilon'_5 & \varepsilon'_4 & \varepsilon'_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_6 & \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 & \varepsilon_2 & \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 & \varepsilon_4 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_6 & -\varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 & \varepsilon_2 & -\varepsilon_4 \\ -\varepsilon_5 & -\varepsilon_4 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} (**) \end{aligned}$$

Từ (6.5) ta có: $\sigma_K = C_{KM}\varepsilon_M$, ($K, M = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) thì với $K = 1$ ta được:

$$\sigma_1 = C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2 + C_{13}\varepsilon_3 + C_{14}\varepsilon_4 + C_{15}\varepsilon_5 + C_{16}\varepsilon_6 \quad (I)$$

tương tự, ta cũng có:

$$\sigma'_1 = C_{11}\epsilon'_1 + C_{12}\epsilon'_2 + C_{13}\epsilon'_3 + C_{14}\epsilon'_4 + C_{15}\epsilon'_5 + C_{16}\epsilon'_6 \quad (II)$$

Từ (*) ta có: $\sigma'_K = \sigma_K$ ($K = 1, 2, 3, 6$) và $\sigma'_K = -\sigma_K$ ($K = 4, 5$). Tương tự, $\epsilon'_K = \epsilon_K$ ($K = 1, 2, 3, 6$) và $\epsilon'_K = -\epsilon_K$ ($K = 4, 5$) khi đó (II) trở thành:

$$\sigma'_1 = \sigma_1 = C_{11}\epsilon_1 + C_{12}\epsilon_2 + C_{13}\epsilon_3 - C_{14}\epsilon_4 - C_{15}\epsilon_5 + C_{16}\epsilon_6 \quad (III)$$

So sánh (I) và (III) ra rút ra được $C_{14} = C_{15} = 0$. Tiếp tục quá trình trên ta cũng được: $C_{24}, C_{25}, C_{34}, C_{35}, C_{41}, C_{42}, C_{43}, C_{46}, C_{51}, C_{52}, C_{53}, C_{56}, C_{64}, C_{66}$ sẽ bằng 0. Vì vậy, ta được ma trận đàn hồi cho một vật liệu có x_1x_2 là mặt phẳng đối xứng là

$$[C_{KM}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{54} & C_{55} & 0 \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (6.18)$$

20 hằng số trong (6.18) sẽ được giảm xuống còn 13 khi tồn tại một hàm năng lượng biến dạng.

Nếu một vật liệu có ba mặt phẳng đối xứng đàn hồi vuông góc với nhau, vật liệu đó được gọi là vật liệu trục giao và ma trận đàn hồi của nó có dạng

$$[C_{KM}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (6.19)$$

có 12 hằng số độc lập, hoặc 9 nếu $C_{KM} = C_{MK}$.

Một trục đối xứng đàn hồi bậc N tồn tại tại một điểm khi có các tập hợp các hướng đàn hồi tương đương có thể chồng khít lên nhau bằng cách quay một góc $2\pi/N$ quanh trục đó. Một số trường hợp đối xứng đàn hồi theo trục và theo mặt phẳng là tương đương.

6.3 Môi trường đẳng hướng. Hằng số đàn hồi

Các vật thể có tính chất đàn hồi tương đương theo mọi hướng đều có đối xứng hoàn toàn và được gọi là đẳng hướng (isotropic). Trong trường hợp này, mọi mặt phẳng và mọi trục đều là trục đối xứng đàn hồi.

Đối với tính đẳng hướng, số lượng hằng số đàn hồi độc lập giảm xuống còn 2, và ma trận đàn hồi là đối xứng bất kể có hay không có hàm năng lượng biến dạng. Khi chọn hai hằng

số độc lập là các hằng số Lamé quen thuộc, λ và μ thì ma trận (6.19) trở thành dạng đàn hồi đẳng hướng.

$$[C_{KM}] = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (6.20)$$

Theo λ và μ , định luật Hooke (6.2) cho một vật đẳng hướng được viết

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad \text{hoặc} \quad \Sigma = \lambda I_\varepsilon + 2\mu \mathbf{E} \quad (6.21)$$

trong đó $\varepsilon = \varepsilon_{kk} = I_\varepsilon$. Phương trình này có thể dễ dàng nghịch đảo để thể hiện các biến dạng theo ứng suất như sau

$$\varepsilon_{ij} = \frac{-\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \delta_{ij} \sigma_{kk} + \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij} \quad \text{hoặc} \quad \mathbf{E} = \frac{-\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \mathbf{I} \Theta + \frac{1}{2\mu} \Sigma \quad (6.22)$$

trong đó $\Theta = \sigma_{kk} = I_\Sigma$, ký hiệu thường được sử dụng trong độ đàn hồi cho ứng suất bất biến đầu tiên.

Đối với trạng thái ứng suất đơn trục đơn giản theo hướng x_1 , hằng số kỹ thuật E và ν có thể được đưa vào thông qua các mối quan hệ $\sigma_{11} = E \varepsilon_{11}$ và $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\nu \varepsilon_{11}$. Hằng số E được gọi là mô đun Young, và ν được gọi là tỷ số Poisson. Theo các hằng số đàn hồi này, định luật Hooke đối với các vật thể đẳng hướng trở thành

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1 + \nu} \left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \delta_{ij} \varepsilon_{kk} \right) \quad \text{hoặc} \quad \Sigma = \frac{E}{1 + \nu} \left(\mathbf{E} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \mathbf{I}_\varepsilon \right) \quad (6.23)$$

hoặc khi nghịch đảo

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \delta_{ij} \sigma_{kk} \quad \text{hoặc} \quad \mathbf{E} = \frac{1 + \nu}{E} \Sigma - \frac{\nu}{E} \mathbf{I}_\Theta \quad (6.24)$$

Từ trạng thái ứng suất thủy tĩnh đồng nhất, có thể định nghĩa mô đun nén

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \quad \text{hoặc} \quad K = \frac{3\lambda + 2\mu}{3} \quad (6.25)$$

liên quan đến áp suất với sự giãn nở khối của một vật thể được tải như vậy. Đối với cái gọi là trạng thái cắt thuần túy, mô đun cắt G liên quan đến các thành phần cắt của ứng suất và biến dạng. G thực tế bằng μ và biểu thức

$$\mu = G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (6.26)$$

có thể dễ dàng chứng minh.

Trích bài tập 4.16 sách Nhập môn cơ học: Để xác định ma trận các hệ số đàn hồi của vật thể đàn hồi đồng chất đẳng hướng người ta dùng thí nghiệm kéo mẫu vật liệu. Khi chịu kéo theo hướng trục x , tensor ứng suất tại mỗi điểm của vật thể chỉ có thành phần σ_{xx} khác không. Bằng phép đo, người ta xác định được mô đun đàn hồi Young E và hệ số Poisson ν từ các hệ thức:

$$\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{xx} = -\nu\varepsilon_{xx}.$$

Hãy tìm hệ thức liên hệ giữa E và ν với các hệ số Lamé.

Lời giải. Từ công thức (6.21), ta có:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \lambda\varepsilon_{kk} + 2\mu\varepsilon_{xx}, \\ 0 &= \lambda\varepsilon_{kk} + 2\mu\varepsilon_{yy}, \\ 0 &= \lambda\varepsilon_{kk} + 2\mu\varepsilon_{zz}.\end{aligned}\tag{a}$$

Cộng vế với vế các phương trình trên, ta được:

$$\varepsilon_{kk} = \frac{1}{3\lambda + 2\mu}\varepsilon.\tag{b}$$

Thay ε_{kk} vào phương trình thứ nhất của (a), ta được:

$$\sigma_{xx} = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}\varepsilon_{xx}\tag{c}$$

(do $\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx}$) nên ta suy ra:

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}.$$

Hai phương trình còn lại của (a) và (b) cho ta

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{xx} = -\frac{\lambda}{2\mu}\varepsilon_{kk} = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}\sigma_{xx};$$

thay σ_{xx} tính theo công thức (c) vào, ta được

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{xx} = -\frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}\varepsilon_{xx}.$$

Do $\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{xx} = -\nu\varepsilon_{xx}$ nên

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}.$$

Ngược lại, các hệ số Lamé có thể tính theo E và ν :

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}; \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}.$$

□

Vật liệu	Môđun Young $10^6 N/cm^2$	Tỉ số Poisson
Nhôm	7,0	0,34
Sắt	21,0	0,28
Vàng	8,0	0,42
Đồng	11,0	0,34
Thiếc	5,3	0,33
Chì	1,6	0,44
Bạc	7,7	0,37
Gang	11,0	0,27

Bảng hằng số đàn hồi của một vài vật liệu

6.4 Bài toán đàn hồi tĩnh. Bài toán đàn hồi động

Trong bài toán đàn hồi của vật thể đẳng hướng đồng nhất, một số phương trình trường nhất định, cụ thể là:

(a) Phương trình cân bằng,

$$\sigma_{ji,j} + \rho b_i = 0 \quad \text{hoặc} \quad \nabla \cdot \Sigma + \rho \mathbf{b} = 0 \quad (6.27)$$

(b) Định luật Hooke

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad \text{hoặc} \quad \Sigma = \lambda I_{\varepsilon} + 2\mu \mathbf{E} \quad (6.28)$$

(c) Mối quan hệ biến dạng-chuyển vị

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \text{hoặc} \quad \mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{u} \nabla + \nabla \mathbf{u}) \quad (6.29)$$

phải được thỏa mãn tại tất cả các điểm bên trong của vật thể. Ngoài ra, các điều kiện quy định về ứng suất và/hoặc dịch chuyển phải được thỏa mãn trên bề mặt giới hạn của vật thể. Các vấn đề về giá trị biên của độ đàn hồi thường được phân loại theo các điều kiện biên thành các vấn đề mà

1. các dịch chuyển được quy định ở mọi nơi trên biên giới,
2. ứng suất (lực kéo bề mặt) được quy định ở mọi nơi trên ranh giới,
3. chuyển vị được quy định trên một phần của ranh giới, ứng suất được quy định trên phần còn lại.

Đối với cả ba loại, lực khối (lực thể tích) được cho là được đưa ra trong toàn bộ môi trường liên tục. Đối với những bài toán mà các thành phần dịch chuyển biên được đưa ra ở mọi nơi bằng một phương trình có dạng

$$u_i = g_i(\mathbf{X}) \quad \text{hoặc} \quad \mathbf{u} = \mathbf{g}(\mathbf{X}) \quad (6.30)$$

Các mối quan hệ giữa biến dạng và dịch chuyển (6.29) có thể được thay thế vào định luật Hooke (6.28) và kết quả thu được sẽ được thay thế vào (6.27) để tạo ra các phương trình điều khiển.

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} + \rho b_i = 0 \quad \text{hoặc} \quad \mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \rho \mathbf{b} = 0 \quad (6.31)$$

Các phương trình này được gọi là phương trình Navier-Cauchy. Do đó, nghiệm của loại bài toán này được đưa ra dưới dạng vectơ chuyển vị u_i , thỏa mãn phương trình (6.31) trên toàn bộ môi trường liên tục và đáp ứng điều kiện (6.30) trên biên.

Giải thích phương trình (6.31)

Bằng cách thay thế các thành phần biến dạng trong (6.28) bằng các biểu thức tương đương theo các chuyển vị, ta được:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} u_{k,k} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i})$$

Do đó:

$$\sigma_{ij,j} = \lambda u_{k,ki} + \mu (u_{i,jj} + u_{j,ij})$$

Thay vào phương trình cân bằng (6.27) ta được:

$$\begin{aligned} \mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} + \rho b_i &= 0 \\ \iff \mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \rho \mathbf{b} &= 0 \end{aligned}$$

Đối với các bài toán mà lực tác dụng bề mặt được cho trên toàn bộ biên theo các phương trình có dạng

$$t_i^{(\hat{\mathbf{n}})} = \sigma_{ij} n_j \quad \text{hoặc} \quad \mathbf{t}^{(\hat{\mathbf{n}})} = \Sigma \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (6.32)$$

các phương trình tương thích (3.104) có thể được kết hợp với định luật Hooke (6.24) và phương trình cân bằng (6.27) để tạo ra các phương trình chủ đạo,

$$\sigma_{ij,kk} + \frac{1}{1+\nu} \sigma_{kk,ij} + \rho (b_{i,j} + b_{j,i}) + \frac{\nu}{1-\nu} \delta_{ij} \rho b_{k,k} = 0$$

hoặc

$$\nabla^2 \Sigma + \frac{1}{1+\nu} \nabla \nabla \Theta + \rho (\nabla \mathbf{b} + \mathbf{b} \nabla) + \frac{\nu}{1-\nu} \mathbf{I}_\rho \nabla \cdot \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (6.33)$$

Giải thích phương trình (6.33)

Nhắc lại: Ta có phương trình (3.103) như sau

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{ij}}{\partial x_k \partial x_m} + \frac{\partial^2 \epsilon_{km}}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 \epsilon_{ik}}{\partial x_j \partial x_m} - \frac{\partial^2 \epsilon_{jm}}{\partial x_i \partial x_k} = 0$$

thay (6.24) vào (3.103) ta được:

$$(1 + \nu) (\sigma_{ij,km} + \sigma_{km,ij} - \sigma_{ik,jm} - \sigma_{jm,ik}) = \nu (\delta_{ij} \Theta_{,km} + \delta_{km} \Theta_{,ij} - \delta_{ik} \Theta_{,jm} - \delta_{jm} \Theta_{,ik})$$

trong đó $\Theta = \mathbf{I}_\Sigma = \sigma_{ii}$.

Chỉ có 6 phương trình trong số 81 phương trình ở đây là độc lập. Do đó, đặt $m = k$ và sử dụng (6.27), ta có:

$$\sigma_{ij,kk} + \Theta_{,ij} + \rho(b_{i,j} + b_{j,i}) = \nu(\delta_{ij}\Theta_{,kk} + \Theta_{,ij})/(1 + \nu)$$

Từ đó:

$$\Theta_{,kk} = -(1 + \nu)\rho b_{k,k}/(1 - \nu)$$

Thay $\Theta_{,kk}$ vào phương trình trước đó thì ta được (6.33).

Nếu $\rho b_i = \phi_{,i}$ thì

$$\rho(b_{i,j} + b_{j,i}) = 2\phi_{,ij}$$

và $\rho b_{k,k} = \phi_{,kk} = \nabla^2 \phi$. Khi đó (6.33) trở thành:

$$\nabla^2 \sigma_{ij} + \Theta_{,ij}/(1 + \nu) + 2\phi_{,ij} + \nu \delta_{ij} \nabla^2 \phi/(1 - \nu) = 0$$

được gọi là phương trình tương thích Beltrami-Michell. Nghiệm cho loại bài toán này được đưa ra bằng cách chỉ định tensor ứng suất, tensor này thỏa mãn phương trình (6.33) trên toàn bộ môi trường liên tục và thỏa mãn phương trình (6.32) trên biên.

Bài toán 1. Chứng tỏ rằng các thành phần ứng suất sau không là nghiệm của bài toán đàn hồi, mặc dù chúng thỏa mãn phương trình cân bằng với lực khối bằng không

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= c[y^2 + \nu(x^2 - y^2)], c \neq 0, \\ \sigma_{yy} &= c[x^2 + \nu(y^2 - x^2)] \\ \sigma_{xx} &= c\nu(x^2 + y^2), \\ \sigma_{xy} &= -2c\nu xy, \\ \sigma_{yx} &= \sigma_{xx} = 0.\end{aligned}$$

Lời giải. Dùng các phương trình tương thích Beltrami-Michell. Vì

$$\begin{aligned}\Delta \sigma_{xx} &= 4c\nu \neq 0, \\ \theta_\sigma &= c(1 + \nu)(x^2 + y^2) \Rightarrow \theta_{\sigma,zz} = 0,\end{aligned}$$

nên các thành phần ứng suất này không thỏa phương trình tương thích Beltrami-Michell thứ ba; do đó, chúng không thể là nghiệm của bài toán đàn hồi. \square

Đối với các bài toán có điều kiện biên "hỗn hợp", hệ phương trình (6.27), (6.28) và (6.29) phải được giải. Nghiệm sẽ cung cấp các trường ứng suất và chuyển vị trong toàn bộ môi trường liên tục. Các thành phần ứng suất phải thỏa mãn phương trình (6.32) trên một phần biên, trong khi các chuyển vị phải thỏa mãn phương trình (6.30) trên phần còn lại của biên. Trong quá trình thiết lập bài toán động lực học đàn hồi, các phương trình cân bằng (6.27) cần được thay thế bởi các phương trình chuyển động (5.16).

$$\sigma_{ij,j} + \rho b_i = \rho \dot{v}_i \quad \text{hoặc} \quad \nabla \cdot \Sigma + \rho \mathbf{b} = \rho \dot{\mathbf{v}} \quad (6.34)$$

các điều kiện ban đầu cũng như các điều kiện biên cần được xác định. Xét về trường chuyển vị u_i , phương trình chủ đạo trong trường hợp này, tương tự với phương trình (6.31) trong bài toán tĩnh đàn hồi, là

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} + \rho b_i = \rho \ddot{u}_i \quad \text{hoặc} \quad \mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \rho \mathbf{b} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad (6.35)$$

Nghiệm của phương trình (6.35) có dạng $u_i = u_i(\mathbf{x}, t)$ và phải thỏa mãn không chỉ các điều kiện ban đầu về chuyển động, thường được biểu diễn bằng các phương trình như

$$u_i = u_i(\mathbf{x}, 0) \quad \text{và} \quad \dot{u}_i = \dot{u}_i(\mathbf{x}, 0) \quad (6.36)$$

mà còn các điều kiện biên, có thể là về các chuyển vị,

$$u_i = g_i(\mathbf{x}, t) \quad \text{hoặc} \quad \mathbf{u} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \quad (6.37)$$

hoặc trên bề mặt lực kéo,

$$t_i^{(\hat{\mathbf{n}})} = t_i^{(\hat{\mathbf{n}})}(\mathbf{x}, t) \quad \text{hoặc} \quad \mathbf{t}^{(\hat{\mathbf{n}})} = \mathbf{t}^{(\hat{\mathbf{n}})}(\mathbf{x}, t) \quad (6.38)$$

6.5 Định lý chồng chất. Tính duy nhất của nghiệm. Nguyên lý St. Venant

6.5.1 Nguyên lý chồng chất nghiệm

- Vì các phương trình đàn hồi tuyến tính là các phương trình tuyến tính, do đó, ta có thể sử dụng **Nguyên lý chồng chất nghiệm** để tìm nghiệm cho các phương trình đàn hồi.
- Ví dụ: Giả sử ta tìm được $\sigma_{ij}^{(1)}, u_i^{(1)}$ nghiệm của lực mặt $b_i^{(1)}$ và $\sigma_{ij}^{(2)}, u_i^{(2)}$ nghiệm của lực mặt $b_i^{(2)}$ từ các phương trình trường (field equations). Khi đó, theo nguyên lý chồng chất nghiệm thì

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)} \\ u_i &= u_i^{(1)} + u_i^{(2)} \end{aligned}$$

là nghiệm của lực mặt $b_i = b_i^{(1)} + b_i^{(2)}$.

Bài toán 2 (Nguyên lý chồng chất nghiệm). Một thanh đàn hồi chịu tác dụng của:

1. Lực thể tích $\mathbf{b}^{(1)} = (2, 0, 0), \text{N/m}^3$.
2. Lực thể tích $\mathbf{b}^{(2)} = (0, 3, 0), \text{N/m}^3$.

Vật liệu của thanh có các đặc tính:

- Mô đun đàn hồi $E = 210, \text{GPa}$,
- Hệ số Poisson $\nu = 0.3$.

Yêu cầu:

1. Xác định trường ứng suất σ và trường chuyển vị \mathbf{u} của thanh khi chịu tác dụng của lực thể tích tổng hợp $\mathbf{b} = \mathbf{b}^{(1)} + \mathbf{b}^{(2)}$.
2. Sử dụng nguyên lý chồng chất nghiệm để giải bài toán.

Hướng dẫn. Trước hết, ta sẽ trình bày hướng giải của bài toán này:

Bước 1: Phương trình cơ bản của cơ học môi trường liên tục

Phương trình cân bằng trong không gian 3D (giả thiết trạng thái tĩnh):

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + b_i = 0, \quad (i = 1, 2, 3),$$

với b_i là lực thể tích theo phương i .

Liên hệ ứng suất-biến dạng: $\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij}$,

với:

- $\lambda = \frac{Eu}{(1+\nu)(1-2\nu)},$
- $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}.$

Biến dạng-chuyển vị:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

Bước 2: Ta áp dụng nguyên lý chồng chất nghiệm:

Tổng lực thể tích: $b_i = b_i^{(1)} + b_i^{(2)} = (2, 3, 0)$.

Vì bài toán là tuyến tính, ta giải riêng cho từng thành phần $\mathbf{b}^{(1)}$ và $\mathbf{b}^{(2)}$, sau đó cộng các kết quả lại với nhau.

- **Bước 3:** Giải riêng cho $\mathbf{b}^{(1)} = (2, 0, 0)$

Phương trình cân bằng:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial z} + 2 = 0,$$

$$\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial z} + 0 = 0,$$

$$\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial z} + 0 = 0.$$

Do lực thể tích chỉ theo phương x , giả sử nghiệm có dạng:

$$u_1^{(1)} = a_1 x^2, \quad u_2^{(1)} = 0, \quad u_3^{(1)} = 0.$$

Tính biến dạng:

$$\epsilon_{11}^{(1)} = \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x} = 2a_1 x, \quad \epsilon_{22}^{(1)} = \epsilon_{33}^{(1)} = 0.$$

Ứng suất:

$$\sigma_{11}^{(1)} = (\lambda + 2\mu)\epsilon_{11}^{(1)} = (2\lambda + 4\mu)a_1 x.$$

Từ phương trình cân bằng, tìm được $a_1 = \frac{1}{E}$.

- **Bước 4:** Giải riêng cho $\mathbf{b}^{(2)} = (0, 3, 0)$ Tương tự, giả sử nghiệm: $u_2^{(2)} = a_2 y^2, \quad u_1^{(2)} = u_3^{(2)} = 0.$

Tính biến dạng và ứng suất, giải hệ phương trình để tìm hằng số a_2 .

Bước 5: Tổng hợp nghiệm: Sử dụng nguyên lý chồng chất nghiệm: $u_i = u_i^{(1)} + u_i^{(2)}, \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)}.$

Thay các kết quả vào để tìm trường chuyển vị và ứng suất tổng hợp. Bây giờ, ta sẽ giải bài toán cụ thể.

Thông số của bài toán:

- Mô đun đàn hồi: $E = 210 \text{ GPa} = 210 \times 10^9 \text{ Pa},$
- Hệ số Poisson: $\nu = 0.3,$
- Lực thể tích: $\mathbf{b} = \mathbf{b}^{(1)} + \mathbf{b}^{(2)} = (2, 3, 0) \text{ N/m}^3.$

Lời giải. Sử dụng nguyên lý chồng chất nghiệm, ta sẽ lần lượt giải riêng cho $\mathbf{b}^{(1)} = (2, 0, 0)$ và $\mathbf{b}^{(2)} = (0, 3, 0),$ sau đó tổng hợp nghiệm.

Bước 1: Xác định các hằng số vật liệu:

Hằng số λ và μ được tính theo công thức:

$$\lambda = \frac{Eu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

Thay $E = 210 \times 10^9, \text{Pa}$, $\nu = 0.3$:

$$\lambda = \frac{210 \times 10^9 \cdot 0.3}{(1 + 0.3)(1 - 2 \cdot 0.3)} = \frac{63 \times 10^9}{1.3 \cdot 0.4} = 121.15 \times 10^9, \text{Pa}.$$

$$\mu = \frac{210 \times 10^9}{2(1 + 0.3)} = \frac{210 \times 10^9}{2.6} = 80.77 \times 10^9 \text{Pa}.$$

Phương trình cân bằng theo phương x :

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial z} + 2 = 0.$$

Phương trình cân bằng theo phương y và z :

$$\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial z} = 0.$$

Giả sử nghiệm chuyển vị có dạng:

$$u_1^{(1)} = a_1 x^2, \quad u_2^{(1)} = u_3^{(1)} = 0.$$

Tính biến dạng. Ta có công thức biến dạng:

$$\varepsilon_{11}^{(1)} = \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x}, \quad \varepsilon_{22}^{(1)} = \varepsilon_{33}^{(1)} = 0, \quad \varepsilon_{12}^{(1)} = \varepsilon_{13}^{(1)} = \varepsilon_{23}^{(1)} = 0.$$

Do $u_1^{(1)} = a_1 x^2$, ta có:

$$\varepsilon_{11}^{(1)} = \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x} = 2a_1 x.$$

Tính ứng suất. Ta có công thức liên hệ giữa ứng suất và biến dạng:

$$\sigma_{11}^{(1)} = \lambda(\varepsilon_{11}^{(1)} + \varepsilon_{22}^{(1)} + \varepsilon_{33}^{(1)}) + 2\mu\varepsilon_{11}^{(1)}.$$

Do $\varepsilon_{22}^{(1)} = \varepsilon_{33}^{(1)} = 0$, ta có:

$$\sigma_{11}^{(1)} = \lambda\varepsilon_{11}^{(1)} + 2\mu\varepsilon_{11}^{(1)} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{11}^{(1)}.$$

Thay $\varepsilon_{11}^{(1)} = 2a_1 x$:

$$\sigma_{11}^{(1)} = (\lambda + 2\mu)(2a_1 x).$$

Thay giá trị $\lambda = 121.15 \times 10^9, \text{Pa}, \mu = 80.77 \times 10^9, \text{Pa}$:

$$\lambda + 2\mu = 121.15 \times 10^9 + 2 \cdot 80.77 \times 10^9 = 282.69 \times 10^9, \text{Pa}.$$

$$\sigma_{11}^{(1)} = 282.69 \times 10^9 \cdot 2a_1x.$$

Xác định hằng số a_1 :

Từ phương trình cân bằng:

$$\frac{\partial \sigma_{11}^{(1)}}{\partial x} + 2 = 0.$$

Ta tính $\frac{\partial \sigma_{11}^{(1)}}{\partial x}$:

$$\frac{\partial \sigma_{11}^{(1)}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (282.69 \times 10^9 \cdot 2a_1x) = 282.69 \times 10^9 \cdot 2a_1.$$

Thay vào phương trình, ta được:

$$282.69 \times 10^9 \cdot 2a_1 + 2 = 0 \Rightarrow a_1 = -\frac{1}{282.69 \times 10^9}.$$

Bước 3: Giải riêng cho $\mathbf{b}^{(2)} = (0, 3, 0)$ Tương tự như bước 2, giả sử nghiệm:

$$u_2^{(2)} = a_2y^2, \quad u_1^{(2)} = u_3^{(2)} = 0.$$

Tính toán tương tự, ta tìm được:

$$a_2 = -\frac{1}{282.69 \times 10^9}.$$

Bước 4: Tổng hợp nghiệm

Tổng hợp chuyển vị:

$$u_1 = u_1^{(1)} + u_1^{(2)} = -\frac{1}{282.69 \times 10^9}x^2,$$

$$u_2 = u_2^{(1)} + u_2^{(2)} = -\frac{1}{282.69 \times 10^9}y^2.$$

Tổng hợp ứng suất:

$$\sigma_{11} = \sigma_{11}^{(1)} + \sigma_{11}^{(2)}, \quad \sigma_{22} = \sigma_{22}^{(1)} + \sigma_{22}^{(2)}.$$

Do đó:

$$\sigma_{11} = 282.69 \times 10^9 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{282.69 \times 10^9} \right) x = -2x,$$

$$\sigma_{22} = -3y.$$

□

6.5.2 Sự duy nhất của nghiệm. Nguyên lý St. Venant

- **Sự duy nhất của nghiệm** cho các bài toán đàn hồi thường được thiết lập từ nguyên lý chồng chất nghiệm kết hợp với định luật bảo toàn năng lượng.
- **Nguyên lý St. Venant** nói rằng ứng suất và biến dạng tại một số vị trí bên trong khối đàn hồi, tại hai điểm khác nhau nhưng tương đương về hệ thống lực mặt (statically equivalent of surface tractions), có thể được áp dụng lên một số phần tại biên.
- Nói cách khác, sự khác biệt giữa hai điểm khác nhau nhưng tương đương về hệ thống lực mặt trở nên không đáng kể khi khoảng cách đủ lớn từ tải (loadings). Nguyên lý này là một công cụ tốt giúp giải quyết các bài toán trong thực tiễn.

Bài toán 3 (Xoắn thanh). Xét vật thể đàn hồi dạng thanh trụ đặt dọc theo trục z có tiết diện bất kỳ, giới hạn bởi hai đáy phẳng, một trong chúng nằm trong mặt phẳng Oxy . Ở đây ta giới hạn chỉ xét thanh có tiết diện ngang là miền đơn liên. Giả sử ứng suất bằng không trên các mặt bên (có vectơ pháp tuyến ngoài $\vec{n} = (l, m, 0)$)

$$\sigma_{xx}n_x + \sigma_{xy}n_y = 0, \sigma_{xy}n_x + \sigma_{yy}n_y = 0, \sigma_{xz}n_x + \sigma_{yz}n_y = 0 \quad (6.39)$$

còn trên hai đáy ($z = 0$ và $z = L$) chịu tác dụng của lực ngoài, tương đương tĩnh học với mômen M song song với trục z . Ta có thể đơn giản hóa phát biểu toán học của bài toán này bằng cách không đòi hỏi các điều kiện biên phải thỏa mãn trên hai đáy mà thay vào đó chỉ yêu cầu các điều kiện này được thỏa theo nghĩa của nguyên lý Saint - Venant (nghĩa là ràng buộc chỉ đặt trên các vectơ chính và mômen chính).

Lời giải. Giả định các thành phần chuyển dịch có dạng

$$u = -\tau zy, v = \tau zx, w = \tau \varphi(x, y) \quad (6.40)$$

trong đó τ là hằng số. Các hệ thức (6.40) rõ ràng mang ý nghĩa hình học. Tiết diện bất kỳ của thanh xoay trong mặt phẳng của nó một góc tỉ lệ với khoảng cách từ nó tới đáy, trong khi dịch chuyển theo phương z (độ vênh) không phụ thuộc z . Để ý rằng theo quan điểm vật lý hàm $\varphi(x, y)$ là đơn trị. Hàm φ được gọi là hàm xoắn.

Từ các hệ thức (6.40) và định luật Hooke, ta có

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{xy} = 0, \quad (6.41)$$

trong khi các thành phần σ_{xz}, σ_{yz} liên hệ với hàm φ như sau

$$\sigma_{xz} = \mu \tau \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right), \sigma_{yz} = \mu \tau \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right). \quad (6.42)$$

Với các thành phần ứng suất có dạng như trên hai phương trình đầu của phương trình cân bằng thỏa mãn đồng nhất. Phương trình còn lại là phương trình Laplace đối với hàm φ (φ là hàm điều hòa)

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (6.43)$$

Tính đến các phương trình (6.41) và (6.42), ta thấy hai điều kiện biên đầu (6.39) được thỏa mãn đồng nhất, trong khi đó điều kiện thứ ba

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y\right)l + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x\right)m = 0 \text{ trên } \mathcal{L} \quad (6.44)$$

trong đó \mathcal{L} là chu tuyến của tiết diện ngang. Để ý rằng

$$l = \frac{dy}{ds}, m = -\frac{dx}{ds}$$

nên (6.44) có thể viết lại

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = yl - xm \quad (6.45)$$

Như vậy, nghiệm của bài toán xoắn đưa về việc giải bài toán Neumann (6.43) với điều kiện biên (6.44).

Gọi ψ là hàm điều hòa liên hợp với φ . Từ điều kiện Cauchy-Riemann

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \end{aligned}$$

và biến đổi điều kiện biên (6.44) ta được

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = x dx + y dy \quad (6.46)$$

Từ đây suy ra

$$\psi = \frac{x^2 + y^2}{2} + \text{const trên } \mathcal{L} \quad (6.47)$$

Tóm lại, để giải bài toán xoắn thành, thay vì giải bài toán Neumann (tìm hàm điều hòa φ) ta có thể giải bài toán Dirichlet: tìm hàm điều hòa ψ với điều kiện biên (6.47).

Bây giờ ta sẽ chỉ ra rằng với giả định (6.40) cho phép ta nhận được nghiệm của bài toán xoắn theo nghĩa Saint - Venant, nghĩa là vectơ chính của lực triệt tiêu trên mọi tiết diện ngang cũng như hai đáy. Trên tiết diện ngang bất kỳ S có chu tuyến \mathcal{L} , hiển nhiên chiều của lực trên phương z bằng không. Chiều của lực trên phương x bằng

$$\int_S \sigma_{xz} dx dy = \int_S \left[\sigma_{xz} + x \left(\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} \right) \right] \quad (6.48)$$

$$= \int_S \left[\frac{\partial (x \sigma_{xz})}{\partial x} + \frac{\partial (x \sigma_{yz})}{\partial y} \right] dx dy \quad (6.49)$$

$$= \int_{\mathcal{L}} x(\sigma_{xz}l + \sigma_{yz}m) ds = 0 \quad (6.50)$$

Tương tự cho thành phần còn lại trên trục y .

Biểu thức của mômen chính M là

$$\begin{aligned} M &= \int_S (x\sigma_{yz} - y\sigma_{xz}) dxdy \\ &= \mu\tau \int_S \left(x^2 + y^2 + x\frac{\partial\varphi}{\partial y} - y\frac{\partial\varphi}{\partial x} \right) dxdy = \tau D \end{aligned} \quad (6.51)$$

trong đó

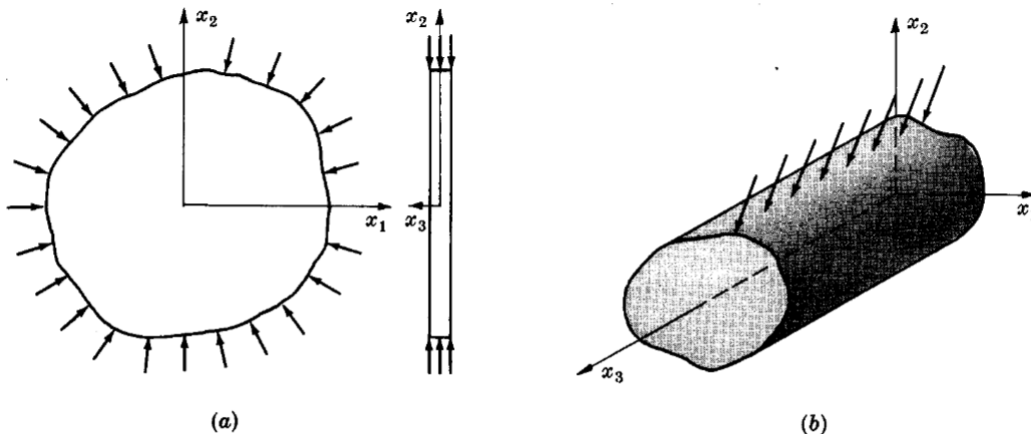
$$D = \mu \int_S \left(x^2 + y^2 + x\frac{\partial\varphi}{\partial y} - y\frac{\partial\varphi}{\partial x} \right) dxdy$$

được gọi là độ cứng xoắn. Nếu biết hệ số này ta dễ dàng tìm được τ , nghĩa là xác định được góc xoắn. \square

6.6 Đàn hồi hai chiều. Ứng suất phẳng và biến dạng phẳng

Nhiều bài toán trong lý thuyết đàn hồi có thể được giải thích thỏa đáng bằng lý thuyết đàn hồi hai chiều, hoặc lý thuyết phẳng. Có hai loại bài toán chính trong phân tích phẳng này. Mặc dù hai loại này có thể được định nghĩa bằng cách đưa ra các hạn chế và giả định nhất định về các trường ứng suất và chuyển vị, chúng thường được giới thiệu mô tả theo các mô hình vật lý của chúng.

Trong các bài toán ứng suất phẳng, hình dạng của vật thể về cơ bản là một tấm với một chiều nhỏ hơn nhiều so với các chiều còn lại. Tải trọng được phân bố đều trên chiều dày của tấm và tác dụng trong mặt phẳng của tấm, như minh họa trong Hình 6.2(a) bên dưới. Trong các bài toán biến dạng phẳng, hình dạng của vật thể về cơ bản là một hình trụ lăng trụ với một chiều lớn hơn nhiều so với các chiều còn lại. Tải trọng được phân bố đều theo chiều lớn và tác dụng vuông góc với nó, như minh họa trong Hình 6.2(b) bên dưới.



Hình 6.2

Đối với bài toán ứng suất phẳng trong Hình 6.2(a), các thành phần ứng suất $\sigma_{33}, \sigma_{13}, \sigma_{23}$ được xem là bằng không ở mọi điểm, và các thành phần còn lại được coi là các hàm chỉ phụ thuộc vào x_1 và x_2 .

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta}(x_1, x_2) \quad (\alpha, \beta = 1, 2) \quad (6.52)$$

Theo đó, các phương trình trường cho ứng suất phẳng là
(a)

$$\sigma_{\alpha\beta,\beta} + \rho b_\alpha = 0 \quad \text{hoặc} \quad \nabla \cdot \Sigma + \rho \mathbf{b} = 0 \quad (6.53)$$

(b)

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{\alpha\beta} - \frac{\nu}{E} \delta_{\alpha\beta} \sigma_{\gamma\gamma} \quad \text{hoặc} \quad \mathbf{E} = \frac{1+\nu}{E} \Sigma - \frac{\nu}{E} \varepsilon_c \quad (6.54)$$

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{\alpha\alpha}.$$

(c)

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}) \quad \text{hoặc} \quad \mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{u} \nabla + \nabla \mathbf{u}) \quad (6.55)$$

trong đó $\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x_1} \hat{\mathbf{e}}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \hat{\mathbf{e}}_2$ và

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \quad (6.56)$$

Do dạng đặc biệt của tensor biến dạng trong trường hợp ứng suất phẳng, sáu phương trình tương thích (3.104) có thể được rút gọn một cách hợp lý cho các tấm rất mỏng thành một phương trình duy nhất.

$$\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} = 2\varepsilon_{12,12} \quad (6.57)$$

Theo các thành phần chuyển vị u_α , các phương trình trường có thể được kết hợp để đưa ra phương trình chủ đạo

$$\frac{E}{2(1+\nu)} \nabla^2 u_\alpha + \frac{E}{2(1-\nu)} u_{\beta,\beta\alpha} + \rho b_\alpha = 0 \quad \text{hoặc} \quad \frac{E}{2(1+\nu)} \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{E}{2(1-\nu)} \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \rho \mathbf{b} = 0 \quad (6.58)$$

với $\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$.

Chứng minh phương trình (6.58):

Lời giải. Từ phương trình cân bằng của bài toán (phương trình trường), ta có:

$$\sigma_{\alpha\beta,\beta} + \rho b_\alpha = 0 \quad (6.40).$$

Với:

- $\sigma_{\alpha\beta}$: là các thành phần của tensor ứng suất.
- b_α : lực thể tích (per unit mass).

- ρ : khối lượng riêng.

Trong bài toán ứng suất phẳng, thành phần ứng suất chỉ phụ thuộc x_1, x_2 , do đó:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta}(x_1, x_2), \quad \alpha, \beta = 1, 2.$$

Liên hệ giữa biến dạng $\varepsilon_{\alpha\beta}$ và ứng suất $\sigma_{\alpha\beta}$.

Dựa vào định luật Hooke (6.54):

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1+u}{E} \sigma_{\alpha\beta} - \frac{u}{E} \delta_{\alpha\beta} \sigma_{\gamma\gamma},$$

với:

- $\varepsilon_{\alpha\beta}$: tensor biến dạng.
- $\sigma_{\gamma\gamma} = \sigma_{11} + \sigma_{22}$: tổng ứng suất chính.
- E : mô-đun đàn hồi.
- u : hệ số Poisson.

Biểu thức này cho thấy mối quan hệ giữa các thành phần ứng suất và biến dạng.

Liên hệ giữa biến dạng $\varepsilon_{\alpha\beta}$ và chuyển vị u_α .

Biến dạng được tính thông qua chuyển vị u_α như sau:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}).$$

Kết hợp với định luật Hooke, ta có:

$$\frac{1}{2} (u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}) = \frac{1+u}{E} \sigma_{\alpha\beta} - \frac{u}{E} \delta_{\alpha\beta} \sigma_{\gamma\gamma}.$$

Tách các thành phần đạo hàm:

Từ phương trình cân bằng ứng suất (6.53):

$$\sigma_{\alpha\beta,\beta} + \rho b_\alpha = 0.$$

Sử dụng liên hệ giữa $\sigma_{\alpha\beta}$ và $\varepsilon_{\alpha\beta}$ trong định luật Hooke:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{E}{1+u} \varepsilon_{\alpha\beta} + \frac{uE}{(1+u)(1-2u)} \delta_{\alpha\beta} \varepsilon_{\gamma\gamma}.$$

Trong đó:

$\varepsilon_{\gamma\gamma} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}$: tổng biến dạng chính.

Lấy đạo hàm từng thành phần:

$$\sigma_{\alpha\beta,\beta} = \frac{E}{1+u} \varepsilon_{\alpha\beta,\beta} + \frac{uE}{(1+u)(1-2u)} \delta_{\alpha\beta} \varepsilon_{\gamma\gamma,\beta}.$$

Thay vào phương trình cân bằng:

$$\frac{E}{1+u} \varepsilon_{\alpha\beta,\beta} + \frac{uE}{(1+u)(1-2u)} \delta_{\alpha\beta} \varepsilon_{\gamma\gamma,\beta} + \rho b_{\alpha} = 0. \quad (1)$$

Thay biến dạng $\varepsilon_{\alpha\beta}$ theo chuyển vị u_{α} .

Từ công thức:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}),$$

ta có:

$$\varepsilon_{\alpha\beta,\beta} = \frac{1}{2} (u_{\alpha,\beta\beta} + u_{\beta,\alpha\beta}).$$

Tổng biến dạng chính:

$$\varepsilon_{\gamma\gamma} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} = u_{1,1} + u_{2,2}.$$

Lấy đạo hàm theo x_{β} :

$$\varepsilon_{\gamma\gamma,\beta} = u_{1,1\beta} + u_{2,2\beta}.$$

Thay các giá trị trên vào phương trình (1):

$$\frac{E}{1+u} \cdot \frac{1}{2} (u_{\alpha,\beta\beta} + u_{\beta,\alpha\beta}) + \frac{uE}{(1+u)(1-2u)} \cdot (u_{1,1\beta} + u_{2,2\beta}) + \rho b_{\alpha} = 0. \quad (2)$$

Sử dụng ký hiệu toán tử Laplace ∇^2

Ký hiệu toán tử Laplace:

$$\nabla^2 u_{\alpha} = \frac{\partial^2 u_{\alpha}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_{\alpha}}{\partial x_2^2}.$$

Từ đó, nhận thấy:

- $u_{\alpha,\beta\beta} = \nabla^2 u_{\alpha},$
- $u_{\beta,\alpha\beta} = \nabla^2 u_{\beta}.$

Thay vào phương trình (2):

$$\frac{E}{1+u} \cdot \frac{1}{2} (\nabla^2 u_{\alpha} + \nabla^2 u_{\beta}) + \frac{uE}{(1+u)(1-2u)} \cdot (u_{1,1\beta} + u_{2,2\beta}) + \rho b_{\alpha} = 0. \quad (3)$$

Rút gọn thành phần tổng quát:

Chú ý rằng $u_{1,1\beta} + u_{2,2\beta}$ thuộc về toán tử gradient. Phương trình cuối cùng trở thành:

$$\frac{E}{2(1+u)} \nabla^2 u_{\alpha} + \frac{E}{2(1-u)} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \rho b_{\alpha} = 0. \quad (4)$$

Ở đây:

- $\nabla \cdot \mathbf{u} = u_{1,1} + u_{2,2}$ là độ biến dạng thể tích (divergence).
- Thành phần $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})$ mô tả gradient của biến dạng thể tích.

Cuối cùng, ta đạt được:

$$\frac{E}{2(1+u)} \nabla^2 u_\alpha + \frac{E}{2(1-u)} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \rho b_\alpha = 0,$$

đồng nhất với công thức (6.58).

Giải thích từng thành phần trong công thức (6.58).

- Thành phần đầu: $\frac{E}{2(1+u)} \nabla^2 u_\alpha$ biểu diễn hiệu ứng phân tán (Laplacian) trên chuyển vị.
- Thành phần thứ hai: $\frac{E}{2(1-u)} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})$ liên quan đến độ biến dạng thể tích.
- Thành phần cuối: ρb_α mô tả tác động của lực thể tích.

□

Đối với bài toán biến dạng phẳng trong Hình 6.2(b), thành phần chuyển vị u_3 được coi là bằng không, và các thành phần còn lại được xem là các hàm chỉ phụ thuộc vào x_1 và x_2 .

$$u_x = u_\alpha(x_1, x_2) \quad (6.59)$$

Trong trường hợp này, các phương trình trường có thể được viết như sau: (a)

$$\sigma_{\alpha\beta,\beta} + \rho b_\alpha = 0 \quad \text{hoặc} \quad \nabla \cdot \Sigma + \rho \mathbf{b} = 0 \quad (6.60)$$

(b)

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta} &= \lambda \delta_{\alpha\beta} \varepsilon_{\gamma\gamma} + 2\mu \varepsilon_{\alpha\beta} \quad \text{hoặc} \quad \Sigma = \lambda \mathbf{E} + 2\mu \mathbf{E} \mathbf{b} \\ \sigma_{33} &= \nu \sigma_{\alpha\alpha} = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \sigma_{\alpha\alpha} \end{aligned} \quad (6.61)$$

(c)

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}) \quad \text{hoặc} \quad \mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{u} \nabla + \nabla \mathbf{u}) \quad (6.62)$$

trong đó

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad \text{hoặc} \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.63)$$

Từ (6.47), (6.48), (6.49), phương trình Navier thích hợp cho biến dạng phẳng là

$$\mu \nabla^2 u_\alpha + (\lambda + \mu) u_{\beta,\beta\alpha} + \rho b_\alpha = 0 \quad \text{hoặc} \quad \mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \rho \mathbf{b} = 0 \quad (6.64)$$

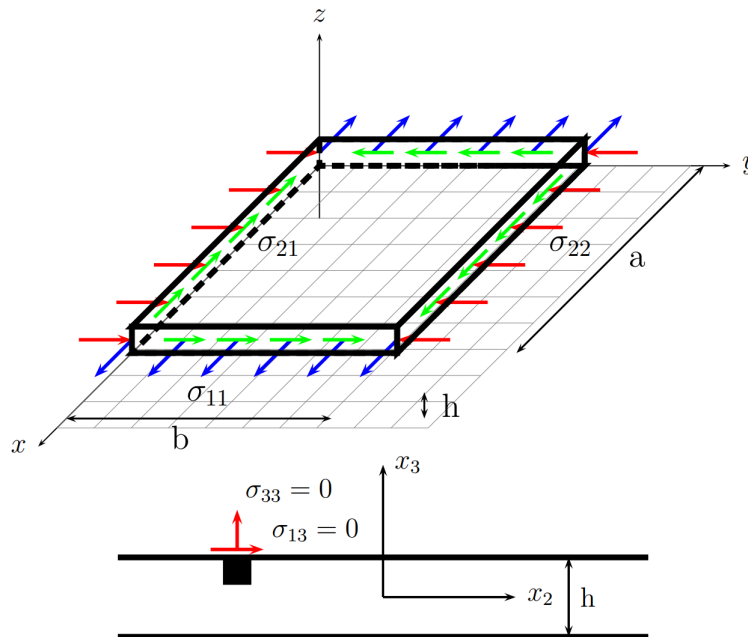
Như trong trường hợp ứng suất phẳng, các phương trình tương thích cho biến dạng phẳng rút gọn thành phương trình duy nhất (6.44).

Nếu các lực tác dụng lên mép của tấm trong Hình 6.2(a) không đồng đều trên chiều dày, nhưng đối xứng với mặt phẳng giữa của tấm, thì một trạng thái ứng suất phẳng tổng quát được coi là tồn tại. Trong việc thiết lập các bài toán cho trường hợp này, các biến trường $\sigma_{\alpha\beta}, \epsilon_{\alpha\beta}$ và u_α phải được thay thế bằng các biến ứng suất, biến dạng và chuyển vị trung bình trên chiều dày của tấm. Về mặt các biến trường trung bình như vậy, cách thiết lập ứng suất phẳng tổng quát về cơ bản giống như trường hợp biến dạng phẳng nếu λ được thay thế bằng

$$\lambda' = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} = \frac{\nu E}{1 - \nu^2} \quad (6.65)$$

Một trường hợp của biến dạng phẳng tổng quát đôi khi được đề cập trong các sách về đàn hồi khi ϵ_{33} được coi là một hằng số khác không trong (6.50).

Bài toán 4. Như tên gọi, chỉ tồn tại các thành phần ứng suất trong một mặt phẳng, nghĩa là không có thành phần ứng suất theo hướng ngoài mặt phẳng. Điều này áp dụng cho các trường hợp kéo giãn và trượt trong mặt phẳng của các tấm mỏng: khi $h \ll a, b$, các tải trọng tác dụng nằm trong mặt phẳng của tấm và không thay đổi theo chiều pháp tuyến, như mô tả như hình:



Hình BT3: Sơ đồ bài toán ứng suất phẳng: Các thành phần σ_{i3} trên các bề mặt tự do bằng không (không có lực tác dụng trên bề mặt tự do)

- $\sigma_{33} = \sigma_{32} = \sigma_{31} = 0$,
- chỉ tồn tại các thành phần ứng suất σ_{11}, σ_{22} và σ_{12} , và

- ứng suất không đổi theo chiều dày, tức là $\frac{\partial}{\partial x_3} = 0$, dẫn đến $\sigma_{11} = \sigma_{11}(x_1, x_2)$, $\sigma_{22} = \sigma_{22}(x_1, x_2)$ và $\sigma_{12} = \sigma_{12}(x_1, x_2)$.

Bài toán được rút gọn thành hệ 8 phương trình đạo hàm riêng liên kết với 8 ẩn số là hàm theo tọa độ x_1, x_2 . Các ẩn số còn lại $\varepsilon_{33}(x_1, x_2)$ và $w(x_1, x_2, x_3)$ có thể được xác định từ các phương trình vật liệu và quan hệ biến dạng-chuyển vị.

Phương trình điều khiển trong bài toán ứng suất phẳng.

Hướng giải: Thiết lập tập hợp đầy đủ các phương trình điều khiển cho bài toán ứng suất phẳng bằng cách rút gọn từ bài toán đàn hồi 3D tổng quát với các giả định ứng suất phẳng. Thực hiện tương tự với phương trình Navier và Beltrami-Michell.

Lời giải. Giả sử:

$$\sigma_{i3} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0$$

Phương trình cân bằng rút gọn thành:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + f_1(x_1, x_2) &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + f_2(x_1, x_2) &= 0. \end{aligned}$$

Phương trình vật liệu (quan hệ ứng suất-biến dạng) rút gọn thành:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{E}(\sigma_{11} - \nu \sigma_{22}), \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1}{E}(\sigma_{22} - \nu \sigma_{11}), \\ \varepsilon_{33} &= -\frac{\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = -\frac{\nu}{1 - \nu}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}), \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2G}\sigma_{12} = \frac{(1 + \nu)}{E}\sigma_{12}, \\ \varepsilon_{23} &= 0, \quad \varepsilon_{13} = 0. \end{aligned}$$

Quan hệ biến dạng-chuyển vị rút gọn thành:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad \varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3}, \\ 2\varepsilon_{12} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}. \end{aligned}$$

Phương trình Navier (bắt đầu từ phương trình cân bằng $\sigma_{ij,j} + f_i = 0$ và áp dụng quan hệ biến dạng-ứng suất):

$$\begin{aligned} \frac{E}{2(1 + \nu)}\nabla^2 u_1 + \frac{E}{2(1 - \nu)}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) + f_1 &= 0, \\ \frac{E}{2(1 + \nu)}\nabla^2 u_2 + \frac{E}{2(1 - \nu)}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) + f_2 &= 0. \end{aligned}$$

Phương trình Beltrami-Michell (bắt đầu từ điều kiện tương thích Saint-Venant cho bài toán 2D $\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} = 2\varepsilon_{12,12}$ và áp dụng quan hệ biến dạng-ứng suất):

$$\nabla^2 (\sigma_{11} + \sigma_{22}) = -(1 + \nu) \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right).$$

□

Bài toán 5 (Biến dạng phẳng). Xét các bài toán đàn hồi như trong hình trên. Trong trường hợp này, L lớn hơn nhiều so với các kích thước ngang của kết cấu, các tải trọng được áp dụng song song với mặt phẳng x_1x_2 và không thay đổi theo x_3 . Rõ ràng là nghiệm của bài toán không thể thay đổi theo x_3 , nghĩa là bất kỳ mặt cắt nào dọc theo trục x_3 cũng phải chịu cùng ứng suất và biến dạng. Do đó, ta chỉ cần phân tích nghiệm 2-D trên một mặt cắt tổng quát, như được minh họa trong hình. Bằng tính đối xứng với trục x_3 , không thể có chuyển vị hoặc lực thể tích theo hướng đó.

Khi đó, ta có thể giả thiết rằng:

$$u_3 = 0, \frac{\partial}{\partial x_3} = 0$$

Từ đó suy ra: $\varepsilon_{33} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0$, và các thành phần biến dạng duy nhất trong mặt phẳng là: $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}$, chỉ phụ thuộc vào x_1 và x_2 .

Các phương trình cơ bản cho trạng thái biến dạng phẳng.

Hướng giải: Thiết lập đầy đủ hệ phương trình cơ bản cho trạng thái biến dạng phẳng bằng cách chuyên biệt hóa bài toán đàn hồi 3-D tổng quát dựa trên các giả thiết biến dạng phẳng. Làm tương tự cho các phương trình Navier và Beltrami-Michell.

Lời giải. Giả thiết:

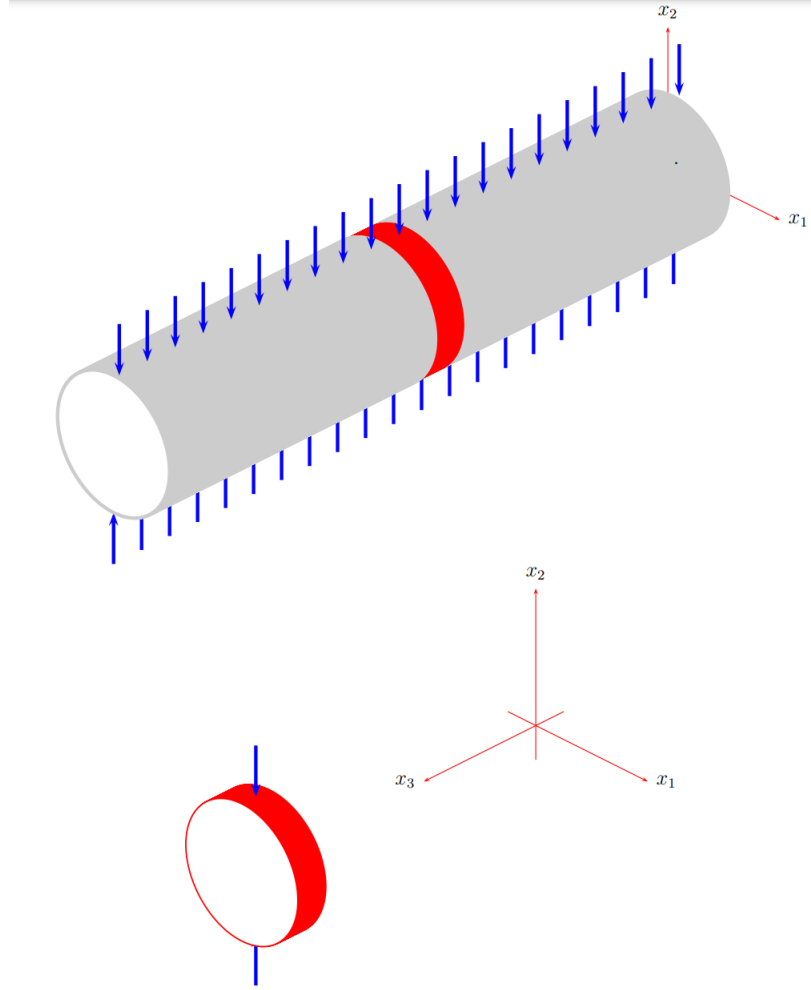
$$\varepsilon_{i3} = 0 \Rightarrow \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{33} = 0$$

Các phương trình cân bằng trở thành:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + f_1(x_1, x_2) &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + f_2(x_1, x_2) &= 0 \end{aligned}$$

Các phương trình vật liệu (quan hệ ứng suất - biến dạng) trở thành:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1 + \nu}{E} [(1 - \nu)\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}] \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1 + \nu}{E} [(1 - \nu)\sigma_{22} - \nu\sigma_{11}] \\ \varepsilon_{33} = 0 &\Rightarrow \sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2G}\sigma_{12} = \frac{(1 + \nu)}{E}\sigma_{12} \\ \varepsilon_{23} &= 0 \\ \varepsilon_{13} &= 0. \end{aligned}$$



Hình BT4: Sơ đồ minh họa một tình huống điển hình mà điều kiện biến dạng phẳng được áp dụng, trong đó chỉ cần phân tích nghiệm trên một mặt cắt tổng quát với các chuyển vị bị ràng buộc theo phương vuông góc với mặt cắt.

Các quan hệ giữa biến dạng và chuyển vị trở thành:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad \varepsilon_{33} = 0,$$

$$2\varepsilon_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}.$$

Phương trình Navier (xuất phát từ phương trình cân bằng $\sigma_{ij,j} + f_i = 0$ và sử dụng quan hệ ứng suất - biến dạng):

$$\frac{E}{2(1+\nu)} \nabla^2 u_1 + \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) + f_1 = 0,$$

$$\frac{E}{2(1+\nu)} \nabla^2 u_2 + \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) + f_2 = 0.$$

Phương trình Beltrami-Michell (xuất phát từ điều kiện tương thích Saint-Venant cho bài

toán 2D $\epsilon_{11,22} + \epsilon_{22,11} = 2\epsilon_{12,12}$ và sử dụng quan hệ ứng suất - biến dạng):

$$\nabla^2 (\sigma_{11} + \sigma_{22}) = -\frac{1}{1-\nu} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right).$$

□

6.7 Hàm ứng suất Airy

Nếu không có lực thể tích hoặc lực thể tích là hằng số, nghiệm của các bài toán đàn hồi phẳng (các bài toán biến dạng phẳng hoặc ứng suất phẳng tổng quát) thường được tìm bằng cách sử dụng hàm ứng suất Airy. Ngay cả khi phải xem xét các lực thể tích, nguyên lý chồng chất cho phép sự đóng góp của chúng vào nghiệm được giới thiệu như một tích phân đặc biệt của các phương trình vi phân trường tuyến tính.

Đối với các bài toán đàn hồi phẳng trong điều kiện không có lực thể tích, các phương trình cân bằng rút gọn thành

$$\sigma_{\alpha\beta,\beta} = 0 \quad \text{hoặc} \quad \nabla \cdot \Sigma = 0 \quad (6.66)$$

và phương trình tương thích (6.44) có thể được biểu diễn dưới dạng các thành phần ứng suất như sau:

$$\nabla^2 (\sigma_{11} + \sigma_{22}) = 0, \quad \nabla^2 \Theta_1 = 0 \quad (6.67)$$

Các thành phần ứng suất bây giờ được cho dưới dạng các đạo hàm riêng của hàm ứng suất Airy $\phi = \phi(x_1, x_2)$ theo các phương trình:

$$\sigma_{11} = \phi_{,22}, \quad \sigma_{12} = -\phi_{,12}, \quad \sigma_{22} = \phi_{,11} \quad (6.68)$$

Các phương trình cân bằng (6.53) được thỏa mãn đồng nhất, và điều kiện tương thích (6.54) trở thành phương trình biharmonic:

$$\nabla^2 (\nabla^2 \phi) = \nabla^4 \phi = \phi_{,1111} + 2\phi_{,1122} + \phi_{,2222} = 0 \quad (6.69)$$

Các hàm thỏa mãn (6.56) được gọi là các hàm biharmonic. Bằng cách xem xét các hàm biharmonic có đạo hàm riêng bậc hai xác định, có thể xây dựng nhiều nghiệm cho các bài toán đàn hồi phẳng, mà tự động thỏa mãn cả điều kiện cân bằng và điều kiện tương thích. Tất nhiên, những nghiệm này phải được điều chỉnh để phù hợp với bất kỳ điều kiện biên nào được quy định.

Bài toán 6. Một kỹ thuật rất hữu ích trong việc giải các bài toán ứng suất phẳng và biến dạng phẳng là giới thiệu một hàm ứng suất vô hướng $\phi(x_1, x_2)$ sao cho tất cả các thành phần ứng suất chưa biết liên quan đều được xác định hoàn toàn từ hàm vô hướng này. Dạng

phụ thuộc cụ thể được xét như sau:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} \\ \sigma_{22} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} \\ \sigma_{12} &= -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_2}\end{aligned}$$

Lựa chọn này, mặc dù có vẻ tùy ý, dẫn đến hai sự đơn giản hóa quan trọng trong các phương trình điều chỉnh của chúng ta:

Hàm ứng suất Airy và điều kiện cân bằng.

Hướng giải. Đối với một hệ thống không có lực khối, các phương trình cân bằng giảm về:

Lời giải.

$$\sigma_{ij,j} = 0$$

Bằng cách đưa vào

$$\sigma_{11} = \phi_{,22}, \quad \sigma_{22} = \phi_{,11}, \quad \sigma_{12} = -\phi_{,12}$$

có thể dễ dàng kiểm tra rằng

$$\begin{aligned}\sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} &= \phi_{,221} - \phi_{,122} = 0 \\ \sigma_{21,1} + \sigma_{22,2} &= -\phi_{,121} + \phi_{,112} = 0\end{aligned}$$

□

Bài toán 7 (Phương trình đạo hàm riêng bậc hai trong 2D.). Xây dựng phương trình vi phân đạo hàm bậc hai cho các bài toán đàn hồi 2D không có lực khối với biên số duy nhất là hàm ứng suất không có lực khối bằng hàm ứng suất Airy. Kết quả cuối cùng là:

$$\phi_{,1111} + 2\phi_{,1122} + \phi_{,2222} = 0$$

Điều này cũng có thể được viết bằng cách sử dụng toán tử ∇ như sau:

$$\nabla^4 \phi = \underbrace{\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right)^2}_{\nabla^2} \phi$$

Hướng dẫn. Thay thế các ứng suất trong phương trình Beltrami-Michell cho 2D (ứng suất phẳng hoặc biến dạng phẳng).

Lời giải. Bắt đầu từ điều kiện tương thích cho các bài toán 2D:

$$\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} = 2\varepsilon_{12,12}$$

và đưa vào dạng tuân thủ của phương pháp ứng suất phẳng

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \frac{1}{E} (\sigma_{11} - \nu \sigma_{22}) \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1}{E} (\sigma_{22} - \nu \sigma_{11}) \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{12},\end{aligned}$$

ta thu được

$$\sigma_{11,22} - \nu \sigma_{22,22} + \sigma_{22,11} - \nu \sigma_{11,11} = 2(1+\nu) \sigma_{12,12} \quad (1)$$

Xét rằng

$$\sigma_{11} = \phi_{,22}, \quad \sigma_{22} = \phi_{,11}, \quad \sigma_{12} = -\phi_{,12}$$

ta có thể viết lại phương trình (1) như sau:

$$\phi_{,2222} - \nu \phi_{,1122} + \phi_{,1111} - \nu \phi_{,2211} = -2(1+\nu) \phi_{,1212}$$

và điều này giảm về:

$$\phi_{,1111} + 2\phi_{,1212} + \phi_{,2222} = 0.$$

Phương trình vi phân đạo hàm bậc hai này được gọi là **phương trình song điều hòa**, và cũng được biểu diễn như sau:

$$\nabla^4 \phi = \nabla^2 \nabla^2 \phi = 0$$

□

6.8 Các bài toán đàn hồi hai chiều trong tọa độ cực (Polar)

Hình dạng của vật thể thường khiến việc thiết lập các bài toán đàn hồi hai chiều trở nên thuận tiện hơn khi sử dụng tọa độ cực r và θ . Do đó, các phương trình biến đổi có thể được viết như sau:

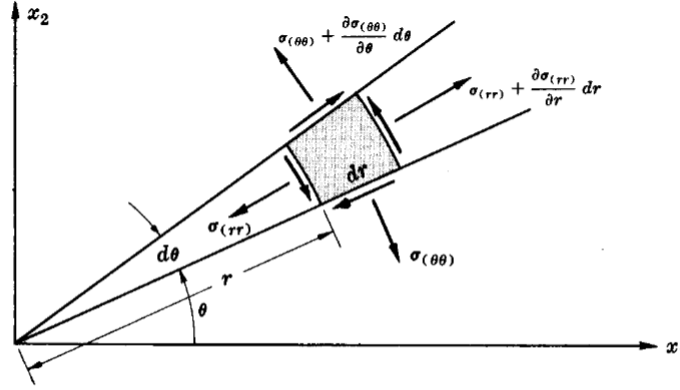
$$x_1 = r \cos \theta, \quad x_2 = r \sin \theta \quad (6.70)$$

các thành phần ứng suất được biểu diễn trong Hình 6.3 dẫn đến các phương trình cân bằng dưới dạng:

$$\frac{\partial \sigma_{(rr)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{(r\theta)}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{(rr)} - \sigma_{(\theta\theta)}}{r} + R = 0 \quad (6.71)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{(\theta\theta)}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{(r\theta)}}{\partial r} + \frac{2\sigma_{(r\theta)}}{r} + Q = 0 \quad (6.72)$$

trong đó R và Q biểu diễn lực thể tích trên một đơn vị thể tích theo các hướng đã được chỉ ra.



Hình 6.3

Khi coi hàm ứng suất Airy là $\Phi = \Phi(r, \theta)$, các thành phần ứng suất được cho bởi

$$\sigma_{(rr)} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \quad (6.73)$$

$$\sigma_{(\theta\theta)} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \quad (6.74)$$

$$\sigma_{(r)} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) \quad (6.75)$$

Điều kiện tương thích lại dẫn đến phương trình biharmonic:

$$\nabla^2 (\nabla^2 \Phi) = \nabla^4 \Phi = 0 \quad (6.76)$$

nhưng ở dạng toạ độ cực, $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$.

6.9 Sự siêu đàn hồi. Sự đàn hồi kém

Các nghiên cứu hiện đại về môi trường liên tục đã dẫn đến các phương trình vật liệu (constitutive equations) mô tả các vật liệu có tính đàn hồi theo một nghĩa đặc biệt. Trong ngữ cảnh này, một vật liệu được gọi là siêu đàn hồi (hyperelastic) nếu nó có một hàm năng lượng biến dạng U sao cho đạo hàm vật liệu của hàm này bằng công suất ứng suất trên một đơn vị thể tích. Do đó, phương trình vật liệu có dạng:

$$\frac{d}{dt}(U) = \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} D_{ij} = \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \quad (6.77)$$

trong đó D_{ij} là tensor tốc độ biến dạng (rate of deformation tensor). Theo một cách phân loại khác, một vật liệu được gọi là đàn hồi kém (hypoelastic) nếu tốc độ ứng suất là một hàm tuyến tính thuần nhất của tốc độ biến dạng. Trong trường hợp này, phương trình vật liệu được viết dưới dạng:

$$\dot{\sigma}_{ij} = K_{ijk m} D_{km} \quad (6.78)$$

trong đó tốc độ ứng suất σ_{ij}^∇ được định nghĩa là

$$\sigma_{ij}^\nabla = \frac{d}{dt}(\sigma_{ij}) - \sigma_{iq}V_{qj} - \sigma_{jq}V_{qi} \quad (6.79)$$

với V_{ij} là tensor xoay.

6.10 Đàn hồi nhiệt tuyến tính

Nếu xét đến các hiệu ứng nhiệt, các thành phần của tensor biến dạng tuyến tính ε_{ij} có thể được xem là tổng của:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(S)} + \varepsilon_{ij}^{(T)} \quad (6.80)$$

trong đó $\varepsilon_{ij}^{(S)}$ là thành phần biến dạng do trường ứng suất (stress field contribution) và $\varepsilon_{ij}^{(T)}$ là thành phần biến dạng do trường nhiệt độ (temperature field contribution).

$$\varepsilon_{ij}^{(T)} = \alpha(T - T_0)\delta_{ij} \quad (6.81)$$

khí đó α biểu thị hệ số giãn nở nhiệt độ tuyến tính. Chèn (6.81), cùng với định luật Hooke (6.21), vào (6.80) sẽ cho ra:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \delta_{ij} \sigma_{kk} \right) + \alpha(T - T_0)\delta_{ij} \quad (6.82)$$

được gọi là các quan hệ Duhamel-Neumann. Phương trình (6.82) có thể được đảo ngược để cho ra các phương trình quy định nhiệt đàn hồi:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij} - (3\lambda + 2\mu)\alpha \delta_{ij} (T - T_0) \quad (6.83)$$

Sự dẫn nhiệt trong một vật rắn đàn hồi đồng nhất được điều khiển bởi định luật Fourier về dẫn nhiệt,

$$c_i = -kT_{,i} \quad (6.84)$$

nơi k là độ dẫn nhiệt của vật liệu, phải dương để đảm bảo tỷ lệ sản xuất entropy dương. Nếu bây giờ nhiệt dung riêng ở áp suất không đổi $c^{(v)}$ được định nghĩa thông qua phương trình

$$-c_{i,i} = \rho c^{(v)} \dot{T} \quad (6.85)$$

và nội năng được coi là một hàm của các thành phần biến dạng ε_{ij} và nhiệt độ T , phương trình năng lượng (5.45) có thể được biểu diễn dưới dạng:

$$kT_{,ii} = \rho c^{(v)} \dot{T} + (3\lambda + 2\mu)\alpha T_0 \dot{\varepsilon}_{ii} \quad (6.86)$$

được gọi là phương trình cặp nhiệt. Hệ phương trình định hình bài toán nhiệt đàn hồi tổng quát cho một vật thể đồng nhất bao gồm:

(a) Các phương trình chuyển động

$$\sigma_{ij,j} + \rho b_i = \ddot{u}_i \quad \text{hoặc} \quad \nabla \cdot \Sigma + \rho \mathbf{b} = \ddot{\mathbf{u}} \quad (6.87)$$

(b) Phương trình hiến định nhiệt đàn hồi (thermoelastic constitutive equations)

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij} - (3\lambda + 2\mu) \alpha \delta_{ij} (T - T_0) \\ \text{hoặc} \quad \Sigma &= \lambda \mathbf{k} + 2\mu \mathbf{E} - (3\lambda + 2\mu) \alpha \mathbf{l} (T - T_0) \end{aligned} \quad (6.88)$$

(c) Mối quan hệ giữa tensor biến dạng (strain tensor) và vector chuyển vị (displacement vector).

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \text{hoặc} \quad \mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{u} \nabla + \nabla \mathbf{u}) \quad (6.89)$$

(d) Phương trình cặp nhiệt (Coupled Heat Equation)

$$k T_{,ii} = \rho c^{(v)} \dot{T} + (3\lambda + 2\mu) \alpha T_0 \dot{\varepsilon}_{kk} \quad \text{hoặc} \quad k \nabla^2 T = \rho c^{(v)} \dot{T} + (3\lambda + 2\mu) \alpha T_0 \dot{\varepsilon} \quad (6.90)$$

Hệ thống này phải được giải cho các trường ứng suất, chuyển vị và nhiệt độ, tuân theo các điều kiện ban đầu và biên thích hợp. Ngoài ra, các phương trình tương thích cũng phải được thỏa mãn.

Có một số lượng lớn các bài toán mà cả hiệu ứng quán tính và hiệu ứng kết hợp có thể bị bỏ qua. Đối với những trường hợp này, bài toán nhiệt đàn hồi tổng quát phân rã thành hai bài toán riêng biệt phải được giải liên tiếp, nhưng độc lập. Do đó, đối với bài toán nhiệt đàn hồi tĩnh không kết hợp, các phương trình cơ bản là:

(a) Phương trình dẫn nhiệt

$$k T_{,ii} = \rho c^{(v)} \dot{T} \quad \text{hoặc} \quad k \nabla^2 T = \rho c^{(v)} \dot{T} \quad (6.91)$$

(b) Các phương trình cân bằng

$$\sigma_{ij,j} + \rho b_i = 0 \quad \text{hoặc} \quad \nabla \cdot \Sigma + \rho \mathbf{b} = 0 \quad (6.92)$$

(c) Các phương trình ứng suất-biến dạng nhiệt đàn hồi

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij} - (3\lambda + 2\mu) \alpha \delta_{ij} (T - T_0) \\ \text{hoặc} \quad \Sigma &= \lambda \mathbf{l} \varepsilon + 2\mu \mathbf{E} - (3\lambda + 2\mu) \alpha \mathbf{l} (T - T_0) \end{aligned} \quad (6.93)$$

(d) Các mối quan hệ giữa biến dạng và chuyển vị

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \text{hoặc} \quad \mathbf{E} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla) \quad (6.94)$$

Giải bài tập 6.24 chứng minh công thức (6.86)

Lời giải. Phương trình năng lượng tự do Helmholtz:

$$f = u - Ts$$

Giả sử năng lượng tự do f là hàm của biến dạng ε_{ij} và nhiệt độ T :

$$f = f(\varepsilon_{ij}, T)$$

Vi phân phương trình năng lượng tự do

Vi phân tổng quát của f :

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_T d\varepsilon_{ij} + \left(\frac{\partial f}{\partial T} \right)_{\varepsilon_{ij}} dT$$

Mặt khác, từ định nghĩa $f = u - Ts$, vi phân: $df = du - Tds - sdT$

Từ định luật bảo toàn năng lượng: $du = Tds + \sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}$

Thay vào phương trình df :

$$df = Tds + \sigma_{ij}d\varepsilon_{ij} - Tds - sdT$$

$$df = \sigma_{ij}d\varepsilon_{ij} - sdT$$

So sánh hai phương trình df :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_T = \sigma_{ij}, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial T} \right)_{\varepsilon_{ij}} = -s$$

Định luật bảo toàn năng lượng trong môi trường đàn hồi Công thức bảo toàn năng lượng cho vật liệu đàn hồi:

$$\rho \dot{u} = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} + \rho T \dot{s}$$

Ở đây:

- $\rho \dot{u}$: tốc độ thay đổi năng lượng nội tại.
- $\sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}$: công thực hiện bởi ứng suất.
- $\rho T \dot{s}$: tốc độ thay đổi nhiệt năng.

Từ $s = -\frac{\partial f}{\partial T}$, vi phân s :

$$\dot{s} = \frac{\partial s}{\partial \varepsilon_{ij}} \dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{\partial s}{\partial T} \dot{T}$$

Thay vào phương trình bảo toàn năng lượng:

$$\rho \dot{u} = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} - \rho T \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \varepsilon_{ij} \partial T} \dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{\partial^2 f}{\partial T^2} \dot{T} \right)$$

Nhóm các thành phần:

$$\rho \dot{u} = \left(\sigma_{ij} - \rho T \frac{\partial^2 f}{\partial \varepsilon_{ij} \partial T} \right) \dot{\varepsilon}_{ij} - \rho T \frac{\partial^2 f}{\partial T^2} \dot{T}$$

Ở trạng thái không biến dạng ($\dot{\epsilon}_{ij} = 0$), phương trình rút gọn thành:

$$\rho \dot{u} = -\rho T \frac{\partial^2 f}{\partial T^2} \dot{T}$$

Khi đó, nhiệt dung riêng $c^{(v)}$:

$$c^{(v)} = -\frac{\partial^2 f}{\partial T^2}$$

Vi phân ứng suất theo nhiệt độ

Từ mối liên hệ giữa ứng suất và năng lượng tự do Helmholtz:

$$\sigma_{ij} = \rho \frac{\partial f}{\partial \epsilon_{ij}}$$

Vi phân ứng suất theo nhiệt độ T :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial T} = \rho \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial f}{\partial \epsilon_{ij}} \right)$$

Do $f = f(\epsilon_{ij}, T)$, theo quy tắc vi phân bậc hai:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial T} = \rho \frac{\partial^2 f}{\partial \epsilon_{ij} \partial T}$$

Phương trình dẫn nhiệt (heat conduction)

Theo định luật Fourier:

$$c_{i,i} = \rho T \dot{s}$$

Thay $\dot{s} = \frac{\partial s}{\partial \epsilon_{ij}} \dot{\epsilon}_{ij} + \frac{\partial s}{\partial T} \dot{T}$ và $s = -\frac{\partial f}{\partial T}$, ta có:

$$c_{i,i} = \rho T \left(\frac{\partial s}{\partial \epsilon_{ij}} \dot{\epsilon}_{ij} + \frac{\partial s}{\partial T} \dot{T} \right)$$

Tại trạng thái không biến dạng ($\dot{\epsilon}_{ij} = 0$):

$$c_{i,i} = \rho T \frac{\partial^2 f}{\partial T^2} \dot{T}$$

Do $-c_{i,i} = kT_{,ii}$ và $c^{(v)} = -\frac{\partial^2 f}{\partial T^2}$, ta được:

$$kT_{,ii} = \rho c^{(v)} T$$

Ảnh hưởng của ứng suất nhiệt đàn hồi

Trong môi trường nhiệt đàn hồi, biến dạng nhiệt gây ra ứng suất. Biến dạng tổng ϵ_{ij} bao gồm hai phần:

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^{\text{elastic}} + \epsilon_{ij}^{\text{thermal}}$$

Biến dạng nhiệt:

$$\epsilon_{ij}^{\text{thermal}} = \alpha T \delta_{ij}$$

Ứng suất liên quan đến biến dạng đàn hồi:

$$\sigma_{ij} = (3\lambda + 2\mu)\alpha T \delta_{ij}$$

Vì phân ứng suất theo T :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial T} = (3\lambda + 2\mu)\alpha \delta_{ij}$$

Kết hợp vào phương trình nhiệt:

$$kT_{,ii} = \rho c^{(v)}T + (3\lambda + 2\mu)\alpha T_0 \delta_{ij} \epsilon_{ij}$$

Vậy, phương trình năng lượng nhiệt đàn hồi cuối cùng là:

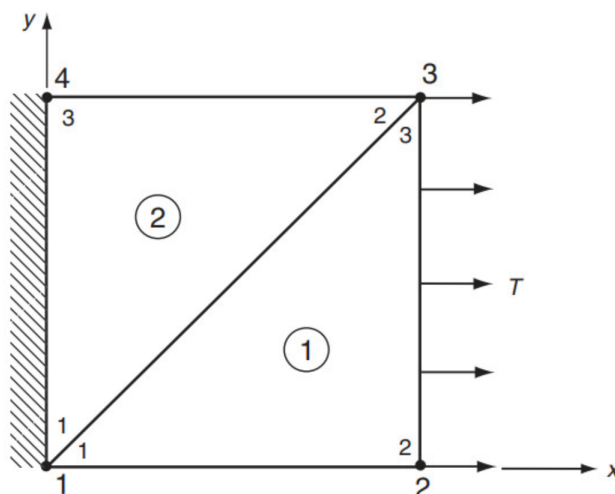
$$kT_{,ii} = \rho c^{(v)}T + (3\lambda + 2\mu)\alpha T_0 \epsilon_{ii}$$

□

Xây dựng thuật toán

6.11 Rời rạc hóa miền bài toán

Ta xét một tấm mỏng đẳng hướng dưới tác dụng của lực kéo đều với không có lực thể tích tác dụng lên tấm. Sẽ có dạng như hình



Khi này ta chỉ phân tử thành hai phần tử tam giác. Vậy khi này phần tử một sẽ gồm các nút 1, 2, 3, và phần tử hai sẽ gồm các nút 1, 3, 4.

6.12 Xấp xỉ nghiệm trên từng phần tử

Như phần trước ta có 4 nút là 1, 2, 3, 4, tương ứng ta sẽ có hệ tọa độ toàn cục là (x_i, y_i) lần lượt là tọa độ trong hệ tọa độ toàn cục của nút thứ i .

Với phần tử thứ j ($j = 1, 2$) ta lần lượt có các nút là 1, 2, 3 và khi này ta xét tọa độ địa phương là bộ (x_i^j, y_i^j) , $i = 1, 2, 3$ tương ứng với nút thứ i của phần tử thứ j . Vậy ta có bảng chuyển đổi

	Nút 1	Nút 2	Nút 3
Phần tử 1	1	2	3
Phần tử 2	1	3	4

Bảng 1.1: Bảng biến đổi nút địa phương và nút toàn cục

Khi này ta có một chuyển vị $u(x, y)$ là chuyển vị toàn cục khi này ta có u_i là các chuyển vị tại các nút thứ $i, i = 1, 2, 3, 4$.

Vậy trường hợp phần tử thứ j ta có, chuyển vị trên phần tử thứ nhất là

$$u^j(x, y) = c_1 + c_2x + c_3y$$

thì chuyển vị của phần tử thứ j trùng với chuyển vị tại các nút.

Lưu ý: (x, y) trong hàm chuyển vị của phần tử thứ j là tọa độ địa phương tại phần tử thứ j . Trong trường hợp $j = 1$, ta có:

$$\begin{aligned} u_1 &= u^1(x_1, y_1) = c_1 + c_2x_1 + c_3y_1 \\ u_2 &= u^1(x_2, y_2) = c_1 + c_2x_2 + c_3y_2 \\ u_3 &= u^1(x_3, y_3) = c_1 + c_2x_3 + c_3y_3 \end{aligned} \quad (6.1)$$

Hay phương trình trên là

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

Vậy c_i có thể biểu diễn bởi các u_i là

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(A_1)} \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

trong đó $\alpha_i = x_jy_k - x_ky_j$, $\beta_i = y_j - y_k$, $\gamma_i = x_k - x_j$, trong đó $i \neq j \neq k$, và i, j, k chuyển vị chẵn. Ta thay c_i vào u_1 thì ta nhận được:

$$\begin{aligned} u^1(x, y) &= \sum_{i=1}^3 u_i \psi_i(x, y) \\ \psi_i(x, y) &= \frac{1}{\det(A_1)} (\alpha_i + \beta_i x + \gamma_i y) \end{aligned} \quad (6.4)$$

trong đó ta có $\det(A_1) = 2 \text{Area}(A_1)$.

Tương ứng $j = 2$.

Để tiện ta đặt $\sigma : (1, 2, 3) \rightarrow (1, 3, 4)$ sao cho $\sigma(1) = 1, \sigma(2) = 3, \sigma(3) = 4$. Và $w_i = u_{\sigma(i)}$ nên ta có:

$$\begin{aligned} w_1 &= u^2(x_1, y_1) = c_1 + c_2x_1 + c_3y_1 \\ w_2 &= u^2(x_2, y_2) = c_1 + c_2x_2 + c_3y_2 \\ w_3 &= u^2(x_3, y_3) = c_1 + c_2x_3 + c_3y_3 \end{aligned} \quad (6.5)$$

tương tự ta có

$$\begin{aligned} u^2(x, y) &= \sum_{i=1}^3 w_i \psi_i(x, y) \\ \psi_i(x, y) &= \frac{1}{\det(A_2)} (\alpha_i + \beta_i x + \gamma_i y) \end{aligned} \quad (6.6)$$

Mà ta có $\psi_i(x_j, y_j) = \delta_{ij}$.

6.13 Ma trận độ cứng và điều kiện biên

Ta bắt đầu với nguyên lý công ảo trên một thể tích hữu hạn là V với biên S là

$$\int_V \sigma_{ij} \delta e_{ij} dV = \int_S T_i^n \delta u_i dS + \int_V F_i \delta u_i dV \quad (6.7)$$

Vậy ta áp dụng lên phần tử thứ j với độ dày là h_j , thì nguyên lý giảm thành 2-chiều và khi đó thể tích hữu hạn của phần tử thứ j là $h_j \Omega_j$ và $S_j = h_j \Gamma_j$.

$$\begin{aligned} & h_j \int_{\Omega_j} (\sigma_x \delta e_x + \sigma_y \delta e_y + 2\tau_{xy} \delta e_{xy}) dxdy \\ & - h_j \int_{\Gamma_j} (T_x^n \delta u + T_y^n \delta v) ds - h_j \int_{\Omega_j} (F_x \delta u + F_y \delta v) dxdy = 0 \end{aligned} \quad (6.8)$$

Vậy khai triển dưới dạng ma trận là

$$h_j \int_{\Omega_j} \begin{bmatrix} \delta e_x \\ \delta e_y \\ 2\delta e_{xy} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} dxdy - h_j \int_{\Gamma_j} \begin{bmatrix} \delta u \\ \delta v \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} T_x^n \\ T_y^n \end{bmatrix} ds - h_j \int_{\Omega_j} \begin{bmatrix} \delta u \\ \delta v \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} dxdy = 0 \quad (6.9)$$

Khi này với chuyển vị trên phần tử j là:

$$\begin{aligned} u^j(x, y) &= \sum_{i=1}^3 u_i \psi_i(x, y) \\ v^j(x, y) &= \sum_{i=1}^3 v_i \psi_i(x, y) \end{aligned} \quad (6.10)$$

Vậy khi này

$$\begin{bmatrix} u^j \\ v^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_1 & 0 & \psi_2 & 0 & \psi_3 & 0 \\ 0 & \psi_1 & 0 & \psi_2 & 0 & \psi_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = [\Psi] [\Delta^j] \quad (6.11)$$

Vậy khi này biến dạng sẽ được biểu diễn là

$$[e^j] = [B^j] [\Delta^j] \quad (6.12)$$

trong đó

$$[B^j] = \frac{1}{\det(A_j)} \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 & \beta_2 & 0 & \beta_3 & 0 \\ 0 & \gamma_1 & 0 & \gamma_2 & 0 & \gamma_3 \\ \gamma_1 & \beta_1 & \gamma_2 & \beta_2 & \gamma_3 & \beta_3 \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

theo định luật Hooke:

$$[\sigma^j] = [C] [e^j] = [C] [B^j] [\Delta^j] \quad (6.14)$$

trong đó $[C]$ được xét như trong trường hợp orthotropic,

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (6.15)$$

cho trường hợp đẳng hướng

$$\begin{aligned} C_{11} = C_{22} &= \begin{cases} \frac{E}{1-\nu^2}, & \text{ứng suất phẳng} \\ \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}, & \text{biến dạng phẳng} \end{cases} \\ C_{12} &= \begin{cases} \frac{E\nu}{1-\nu^2}, & \text{ứng suất phẳng} \\ \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, & \text{biến dạng phẳng} \end{cases} \\ C_{66} = \mu &= \frac{E}{2(1+\nu)}, \text{ biến dạng phẳng và ứng suất phẳng} \end{aligned} \quad (6.16)$$

Thay kết quả trên vào nguyên lý công ảo ta có:

$$\begin{aligned} & h_j \int_{\Omega_j} [\delta \Delta^j]^T \left([B^j]^T [C] [B^j] \right) [\Delta^j] dxdy \\ & - h_j \int_{\Omega_j} [\delta \Delta^j]^T [\Psi]^T \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} ds - h_j \int_{\Gamma_j} [\delta \Delta^j]^T [\Psi]^T \begin{bmatrix} T_x^n \\ T_y^n \end{bmatrix} dxdy = 0 \end{aligned} \quad (6.17)$$

Ta có thể viết được

$$[\delta \Delta^j]^T ([K^j] [\Delta^j] - [F^j] - [Q^j]) = 0 \quad (6.18)$$

mà điều trên đúng với biến phân bất kì, nên

$$[K^j] [\Delta^j] = [F^j] + [Q^j] \quad (6.19)$$

trong đó $[K]$ là ma trận độ cứng, $[F]$ là lực thể tích, $[Q]$ là vector tải. Trường hợp đặc biệt khi mà $[B]$ là hằng thì ta có:

$$[K^j] = \frac{h_j}{2 \det(A_j)} [K_*^j] \quad (6.20)$$

trong đó

$$[K_*^j] = \begin{cases} \beta_{(i+1)/2} \beta_{(j+1)/2} C_{11} + \gamma_{(i+1)/2} \gamma_{(j+1)/2} C_{66} & i, j \text{ chẵn} \\ \beta_{(i+1)/2} \gamma_{j/2} C_{12} + \gamma_{(i+1)/2} \beta_{j/2} C_{66} & i \text{ lẻ } j \text{ chẵn} \\ \gamma_{i/2} \beta_{(j+1)/2} C_{12} + \beta_{i/2} \gamma_{(j+1)/2} C_{66} & i \text{ chẵn, } j \text{ lẻ} \\ \gamma_{i/2} \gamma_{j/2} C_{22} + \beta_{i/2} \beta_{j/2} C_{66} & i, j \text{ lẻ} \end{cases} \quad (6.21)$$

Vì trong bài toán ta có điều kiện lực thể tích bằng không, nên $[F] = 0$.

Ta có $\Gamma = \Gamma_{12} + \Gamma_{23} + \Gamma_{31}$ vậy

$$[Q^j] = \frac{h_j L_{12}}{2} \begin{bmatrix} T_x^n \\ T_y^n \\ T_x^n \\ T_y^n \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{12} + \frac{h_j L_{23}}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ T_x^n \\ T_y^n \\ T_x^n \\ T_y^n \end{bmatrix}_{23} + \frac{h_j L_{31}}{2} \begin{bmatrix} T_x^n \\ T_y^n \\ 0 \\ 0 \\ T_x^n \\ T_y^n \end{bmatrix}_{31} \quad (6.22)$$

Trong bài toán của ta tọa độ toàn cục của các nút lần lượt là $(0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1)$.
Vậy khi đó

$$j = 1, \beta_1 = -1, \beta_2 = 1, \beta_3 = 0, \gamma_1 = 0, \gamma_2 = -1, \gamma_3 = 1$$

$$j = 2, \beta_1 = 0, \beta_2 = 1, \beta_3 = -1, \gamma_1 = -1, \gamma_2 = 0, \gamma_3 = 1$$

Và $\det(A_j) = 1$. Theo đó ta có

$$[K^1] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} C_{11} & 0 & -C_{11} & C_{12} & 0 & -C_{12} \\ 0 & C_{66} & C_{66} & -C_{66} & -C_{66} & 0 \\ -C_{11} & C_{66} & C_{11} + C_{66} & -C_{12} - C_{66} & -C_{66} & C_{12} \\ C_{12} & -C_{66} & -C_{12} - C_{66} & C_{22} + C_{66} & C_{66} & -C_{22} \\ 0 & -C_{66} & -C_{66} & C_{66} & C_{66} & 0 \\ -C_{12} & 0 & C_{12} & -C_{22} & 0 & C_{22} \end{bmatrix} \quad (6.23)$$

$$[K^2] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} C_{66} & 0 & 0 & -C_{66} & -C_{66} & C_{66} \\ 0 & C_{22} & -C_{12} & 0 & C_{12} & -C_{22} \\ 0 & -C_{12} & C_{11} & 0 & -C_{11} & C_{12} \\ -C_{66} & 0 & 0 & C_{66} & C_{66} & -C_{66} \\ -C_{66} & C_{12} & -C_{11} & C_{66} & C_{11} + C_{66} & -C_{12} - C_{66} \\ C_{66} & -C_{22} & C_{12} & -C_{66} & -C_{12} - C_{66} & C_{22} + C_{66} \end{bmatrix} \quad (6.24)$$

Ta có thể áp dụng bảng chuyển đổi sau.

Ta lắp ghép ma trận độ cứng toàn cục là

	Nút 1	Nút 2	Nút 3	Nút 4	Nút 5	Nút 6
Phần tử 1	1	2	3	4	5	6
Phần tử 2	1	2	5	6	7	8

Ví dụ: $K_{11} = K_{11}^1 + K_{11}^2, K_{57} = K_{35}^2$.

Bảng 1.2: Bảng biến đổi nút địa phương và nút toàn cục của phần tử

$$\begin{bmatrix} C_{11} + C_{66} & 0 & -C_{11} & C_{12} & 0 & -C_{12} - C_{66} & -C_{66} & C_{66} \\ & C_{66} + C_{22} & C_{66} & -C_{66} & -C_{66} - C_{12} & 0 & C_{12} & -C_{22} \\ & & C_{11} + C_{66} & -C_{12} - C_{66} & -C_{66} & C_{12} & 0 & 0 \\ & & & C_{22} + C_{66} & C_{66} & -C_{22} & 0 & 0 \\ & & & & C_{66} + C_{11} & 0 & C_{22} + C_{66} & C_{66} \\ & & & & & & C_{12} & C_{11} + C_{66} \\ & -C_{12} - C_{66} & & & & & C_{22} + C_{66} & \\ & & & & & & & \end{bmatrix} \quad (6.25)$$

$$[Q^1] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ T/2 \\ 0 \\ T/4 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.26)$$

$$[Q^2] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ T/4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.27)$$

Vậy $[Q]$ toàn cục là

$$[Q] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ T/2 \\ 0 \\ T/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.28)$$

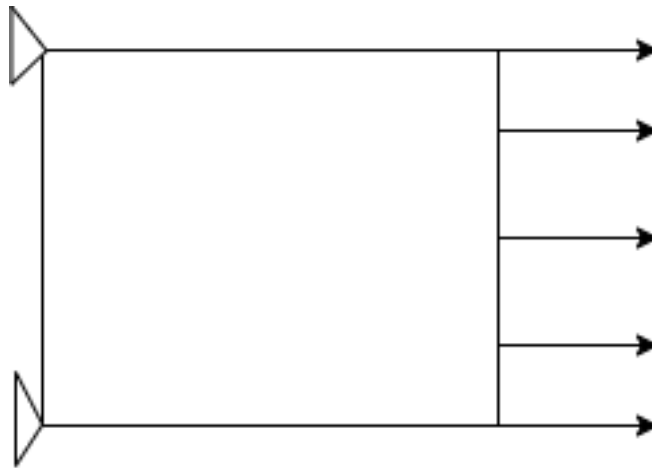
Vậy khi này ta chỉ cần giảm xuống tính ở nút toàn cục thứ 2 và thứ 3. Vậy bài toán

$$\begin{bmatrix} C_{11} + C_{66} & -C_{12} - C_{66} & -C_{66} & C_{12} \\ & C_{22} + C_{66} & C_{66} & -C_{22} \\ & & C_{66} + C_{11} & 0 \\ & & & C_{22} + C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T/2 \\ 0 \\ T/2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.29)$$

Phần code

6.14 Code 2D cho chia nút bất kì

Bài toán 2: Thanh dầm cố định 2 điểm và lực kéo là lực mặt tác dụng lên mặt còn lại.



Hình 6.1: Thanh dầm cố định tại hai đầu và lực kéo tác dụng lên mặt còn lại.

1. Khai báo các biến: $n1 = 10, n2 = 10$ lần lượt là các cạnh trên trục x, y . Mô đun Young $E = 207 \text{ GPa}$ ($207e9 \text{ Pa}$) hay $E = 300 \text{ GPa}$ ($300e9 \text{ Pa}$). Hệ số Poisson $\nu = 0.25$ hay $\nu = 0.5$. Chiều dài cạnh $L1 = 10, L2 = 10$. Lực kéo $F = 10^5 \text{ N}$ ($1e5 \text{ N}$). Bài toán: Ứng suất phẳng nên $BT = 1$.

```
1 % User inputs
2 n1 = input ('Nhap so luong canh x: ');
3 n2 = input ('Nhap so luong canh y: ');
4 E = input ('Nhap modules Young: ');
5 v = input ('He so Poisson: ');
6 L1 = input ('Chieu dai canh x: ');
7 L2 = input ('Chieu dai canh y: ');
8 F = input ('Luc keo: ');
9 BT = input ('0 la bien dang phang, 1 la ung suat phang: ');
```

2. Tính mô đun cắt:

```
1 % Derived constants
2 G12 = E / (2 * (1 + v)); % Shear modulus
3 t = 1; % Thickness of the element ( assumed to be 1 unit )
```

3. Chia nút: Ta tiến hành chia các nút trên cạnh x, y thành $n1, n2$ cạnh.

```
1 % Create nodes along edges
2 x = linspace (0, L1 , n1 +1)';
3 y = linspace (0, L2 , n2 +1)';
```

4. Chia nút: Tạo một ma trận chứa thông tin các nút.

```
1 % Create a matrix to hold all nodes
2 nodes = [];
3 for i = 1:length (x)
4     for j = 1:length (y)
5         nodes = [nodes; x(i), y(j)];
6     end
7 end
```

5. Chia thành các miền: Sử dụng hàm delaunay để chia các nút thành các miền tam giác.

```
1 % Create elements from nodes
2 elements = delaunay(nodes(:,1), nodes(:,2));
```

6. Tạo hàm tính ma trận độ cứng địa phương: Ta tính ma trận độ cứng địa phương thông qua hàm sau.

```
1 % Initialize local stiffness matrix
2 function local_stiffness_matrix = isotropic_local_stiffness(E, v, G12, t, A, B,
3     BT)
4     % Compute necessary constants
5     if (BT == 1)
6         Q11 = E / (1 - v * v);
7         Q22 = Q11;
8         Q12 = v * E / (1 - v * v);
9     else
10        Q11 = (E * (1 - v)) / ((1 + v) * (1 - 2 * v));
11        Q22 = Q11;
12        Q12 = (v * E) / ((1 + v) * (1 - 2 * v));
13    end
14    Q66 = G12;
15
16    % Constitutive matrix for isotropic material
17    D = [Q11 , Q12 , 0;
18        Q12 , Q22 , 0;
19        0, 0, Q66];
20
21    % Local stiffness matrix for 2D triangular element
22    local_stiffness_matrix = B' * D * B * A * t;
```

7. Tạo ma trận toàn cục: Ta tạo ma trận toàn cục có chiều dài $n \times n$ với n là chiều dài của một cột của ma trận chứa thông tin các node.

```
1 % Initialize global stiffness matrix
2 num_nodes = size(nodes, 1);
3 global_stiffness = zeros(2*num_nodes , 2*num_nodes);
```

Các bước tiếp theo dưới đây giúp ta tính ma trận độ cứng địa phương rồi hợp nhất các kết quả để tính ma trận độ cứng toàn cục.

8. Chuyển nút toàn cục thành nút địa phương: Ta tính ma trận độ cứng địa phương thông qua hàm sau.

```
1 % Get the indices of the nodes in the element
2 node_indices = elements(i, :);
3
4 % Coordinates of the nodes
5 x1 = nodes(node_indices(1), 1);
6 y1 = nodes(node_indices(1), 2);
7 x2 = nodes(node_indices(2), 1);
8 y2 = nodes(node_indices(2), 2);
9 x3 = nodes(node_indices(3), 1);
10 y3 = nodes(node_indices(3), 2);
```

9. Tính diện tích phần tử A:

```
1 % Compute the area of the triangular element
2 A = polyarea([x1 , x2 , x3], [y1 , y2 , y3 ]);
```

10. Tạo ma trận B phần tử:

```
1 % Compute coefficients for the shape functions
2 b1 = y2 - y3; b2 = y3 - y1; b3 = y1 - y2;
3 c1 = x3 - x2; c2 = x1 - x3; c3 = x2 - x1;
4
5 % Compute the B matrix
6 B = 1/(2*A) * [b1, 0, b2, 0, b3, 0;
7                0, c1, 0, c2, 0, c3;
8                c1, b1, c2, b2, c3, b3];
```

11. Tính ma trận độ cứng địa phương:

```
1 % Calculate local stiffness matrix for the element
2 local_stiffness_matrix = isotropic_local_stiffness(E, v, G12, t, A, B, BT);
```

12. Tính ma trận độ cứng toàn phần: Ta nhập các phần tử ma trận độ cứng địa phương vào ma trận toàn cục bằng hàm sau, với hàm numel đếm số phần tử trong mảng.

```
1 % Update global stiffness matrix by adding local stiffness matrix to
  appropriate positions
2 for j = 1:numel(node_indices)
3     for k = 1:numel(node_indices)
4         % Convert node indices to global matrix indices
5         row_index = 2 * (node_indices(j) - 1) + 1;
6         col_index = 2 * (node_indices(k) - 1) + 1;
7
8         % Update global stiffness matrix
9         global_stiffness (row_index:row_index+1, col_index:col_index+1) =
10         ...
11         global_stiffness(row_index: row_index+1, col_index:col_index+1)
12         + ...
13         local_stiffness_matrix(2*(j-1)+1:2*j, 2*(k-1)+1:2*k);
14     end
15 end
```

Ta kết hợp các kết quả từ (8) - (12) rồi sử dụng vòng lặp sau để bổ sung các phần tử cho ma trận độ cứng toàn cục.

```

1 % Loop through each element to calculate local stiffness and assemble into
  global stiffness matrix
2 for i = 1:size(elements, 1)
3   ...
4 end

```

13. Áp dụng điều kiện biên lên ma trận độ cứng: Trong bài toán 2, chỉ có các node ở hai đầu trục y dọc theo các $x = 0$. Do đó, ta sẽ đi tìm hai vị trí đó và gán giá trị 0.

```

1 fixed_nodes_1 = find(nodes(:,1) == 0); % Find nodes at x = 0
2 fixed_nodes = []; % Create fixed_nodes = null to find nodes at y = 0 or y = L2
3 length_1 = 1; % Create length of fixed_nodes
4 for j = 1:length(fixed_nodes_1)
5   index = fixed_nodes_1(j);
6   % Find (x,y) = (0,0); (x,y) = (0,L2)
7   if(nodes(index,2) == 0 || nodes(index,2) == L2)
8     fixed_nodes(length_1) = index; % Apply to fixed_nodes
9     length_1 = length_1 + 1; % Add 1 unit to length of fixed_nodes
10  end
11 end
12 for i = 1:length(fixed_nodes)
13   node = fixed_nodes(i);
14   global_stiffness(2*node-1, :) = 0;
15   global_stiffness(:, 2*node-1) = 0;
16   global_stiffness(2*node, :) = 0;
17   global_stiffness(:, 2*node) = 0;
18   global_stiffness(2*node-1, 2*node-1) = 1;
19   global_stiffness(2*node, 2*node) = 1;
20 end

```

14. Áp dụng điều kiện F dọc theo biên $x = L1$: Ta tìm chỉ số của các nút đó và áp dụng kéo chia đều cho các nút.

```

1 % Apply load F at nodes along x=L1
2 loaded_nodes = find(nodes(:,1) == L1);
3 force_vector = zeros(2*num_nodes, 1);
4 for i = 1:length(loaded_nodes)
5   node = loaded_nodes(i);
6   force_vector(2*node - 1) = F / length(loaded_nodes);
7 end

```

15. Tính chuyển vị của các node:

```

1 % Solve for displacements
2 displacements = global_stiffness \ force_vector;
3 disp('Displacements :');
4 disp(displacements);

```

16. Vẽ hình:

```

1 % Plot deformed shape
2 scale_factor = 1e5; % Adjust for visualization
3 deformed_nodes = nodes + scale_factor*reshape(displacements, 2, [])';
4 figure;
5 hold on;

```

```

6 plot(nodes(:, 1), nodes(:, 2), 'ro'); % Original nodes
7 plot(deformed_nodes(:, 1), deformed_nodes(:, 2), 'bx'); % Deformed nodes
8 for i = 1:size(elements, 1)
9     original_element = nodes(elements(i, :), :);
10    deformed_element = deformed_nodes(elements(i, :), :);
11    plot(original_element([1: end, 1], 1), original_element([1: end, 1], 2), '
    r-');
12    plot(deformed_element([1: end, 1], 1), deformed_element([1: end, 1], 2), '
    b-');
13 end
14 legend('Original Nodes', 'Deformed Nodes');
15 title('Deformed Shape of the Structure');
16 hold off;

```

Code của bài toán:

```

1 clc;
2 clear all;
3
4 % User inputs
5 n1 = input('Nhap so luong canh x: ');
6 n2 = input('Nhap so luong canh y: ');
7 E = input('Nhap modules Young: ');
8 v = input('He so Poisson: ');
9 L1 = input('Chieu dai canh x: ');
10 L2 = input('Chieu dai canh y: ');
11 F = input('Luc keo: ');
12 BT = input('0 la bien dang phang, 1 la ung suat phang: ');
13
14 % Derived constants
15 G12 = E / (2 * (1 + v)); % Shear modulus
16 t = 1; % Thickness of the element ( assumed to be 1 unit )
17
18 % Create nodes along edges
19 x = linspace(0, L1, n1 + 1)';
20 y = linspace(0, L2, n2 + 1)';
21
22 % Create a matrix to hold all nodes
23 nodes = [];
24 for i = 1:length(x)
25     for j = 1:length(y)
26         nodes = [nodes; x(i), y(j)];
27     end
28 end
29
30 % Create elements from nodes
31 elements = delaunay(nodes(:, 1), nodes(:, 2));
32
33 % Initialize local stiffness matrix
34 function local_stiffness_matrix = isotropic_local_stiffness(E, v, G12, t, A, B,
    BT)
35     % Compute necessary constants
36     if (BT == 1)
37         Q11 = E / (1 - v * v);
38         Q22 = Q11;
39         Q12 = v * E / (1 - v * v);

```



```

40     else
41         Q11 = (E * (1 - v)) / ((1 + v) * (1 - 2 * v));
42         Q22 = Q11;
43         Q12 = (v * E) / ((1 + v) * (1 - 2 * v));
44     end
45     Q66 = G12;
46
47     % Constitutive matrix for isotropic material
48     D = [Q11 , Q12 , 0;
49          Q12 , Q22 , 0;
50          0, 0, Q66];
51
52     % Local stiffness matrix for 2D triangular element
53     local_stiffness_matrix = B' * D * B * A * t;
54 end
55
56 % Initialize global stiffness matrix
57 num_nodes = size(nodes, 1);
58 global_stiffness = zeros(2*num_nodes, 2*num_nodes);
59
60 % Loop through each element to calculate local stiffness and assemble into
61 % global stiffness matrix
62 for i = 1:size(elements, 1)
63     % Get the indices of the nodes in the element
64     node_indices = elements(i, :);
65
66     % Coordinates of the nodes
67     x1 = nodes(node_indices(1), 1);
68     y1 = nodes(node_indices(1), 2);
69     x2 = nodes(node_indices(2), 1);
70     y2 = nodes(node_indices(2), 2);
71     x3 = nodes(node_indices(3), 1);
72     y3 = nodes(node_indices(3), 2);
73
74     % Compute the area of the triangular element
75     A = polyarea([x1 , x2 , x3], [y1 , y2 , y3 ]);
76
77     % Compute coefficients for the shape functions
78     b1 = y2 - y3; b2 = y3 - y1; b3 = y1 - y2;
79     c1 = x3 - x2; c2 = x1 - x3; c3 = x2 - x1;
80
81     % Compute the B matrix
82     B = 1/(2*A) * [b1, 0, b2, 0, b3, 0;
83                   0, c1, 0, c2, 0, c3;
84                   c1, b1, c2, b2, c3, b3];
85
86     % Calculate local stiffness matrix for the element
87     local_stiffness_matrix = isotropic_local_stiffness(E, v, G12, t, A, B, BT);
88
89     % Update global stiffness matrix by adding local stiffness matrix to
90     % appropriate positions
91     for j = 1:numel(node_indices)
92         for k = 1:numel(node_indices)
93             % Convert node indices to global matrix indices
94             row_index = 2 * (node_indices(j) - 1) + 1;

```

```

93         col_index = 2 * (node_indices(k) - 1) + 1;
94
95         % Update global stiffness matrix
96         global_stiffness (row_index:row_index+1, col_index:col_index+1) =
97         ...
98             global_stiffness(row_index: row_index+1, col_index:col_index+1)
99         + ...
100             local_stiffness_matrix(2*(j-1)+1:2*j, 2*(k-1)+1:2*k);
101     end
102 end
103 % Apply fixed boundary condition at (x,y) = (0,0); (x,y) = (0,L2)
104 fixed_nodes_1 = find(nodes(:,1) == 0); % Find nodes at x = 0
105 fixed_nodes = []; % Create fixed_nodes = null to find nodes at y = 0 or y = L2
106 length_1 = 1; % Create length of fixed_nodes
107 for j = 1:length(fixed_nodes_1)
108     index = fixed_nodes_1(j);
109     % Find (x,y) = (0,0); (x,y) = (0,L2)
110     if(nodes(index,2) == 0 || nodes(index,2) == L2)
111         fixed_nodes(length_1) = index; % Apply to fixed_nodes
112         length_1 = length_1 + 1; % Add 1 unit to length of fixed_nodes
113     end
114 end
115 for i = 1:length(fixed_nodes)
116     node = fixed_nodes(i);
117     global_stiffness(2*node-1, :) = 0;
118     global_stiffness(:, 2*node-1) = 0;
119     global_stiffness(2*node, :) = 0;
120     global_stiffness(:, 2*node) = 0;
121     global_stiffness(2*node-1, 2*node-1) = 1;
122     global_stiffness(2*node, 2*node) = 1;
123 end
124
125 % Apply load F at nodes along x=L1
126 loaded_nodes = find(nodes(:,1) == L1);
127 force_vector = zeros(2*num_nodes, 1);
128 for i = 1:length(loaded_nodes)
129     node = loaded_nodes(i);
130     force_vector(2*node - 1) = F / length(loaded_nodes);
131 end
132
133 % Solve for displacements
134 displacements = global_stiffness \ force_vector;
135 disp('Displacements :');
136 disp(displacements);
137
138 % Plot deformed shape
139 scale_factor = 1e5; % Adjust for visualization
140 deformed_nodes = nodes + scale_factor*reshape(displacements, 2, []);
141 figure;
142 hold on;
143 plot(nodes(:, 1), nodes(:, 2), 'ro'); % Original nodes
144 plot(deformed_nodes(:, 1), deformed_nodes(:, 2), 'bx'); % Deformed nodes
145 for i = 1:size(elements, 1)

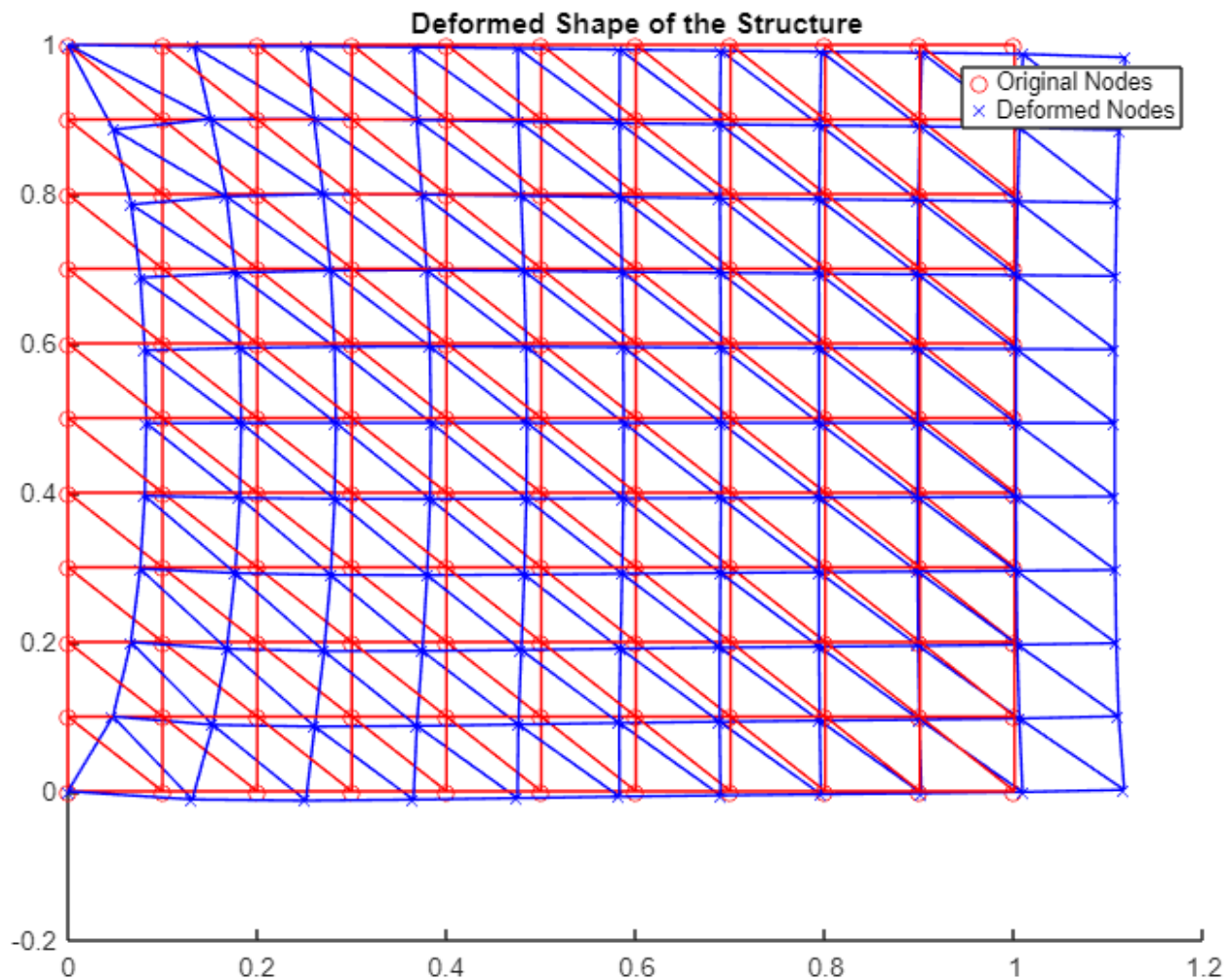
```

```

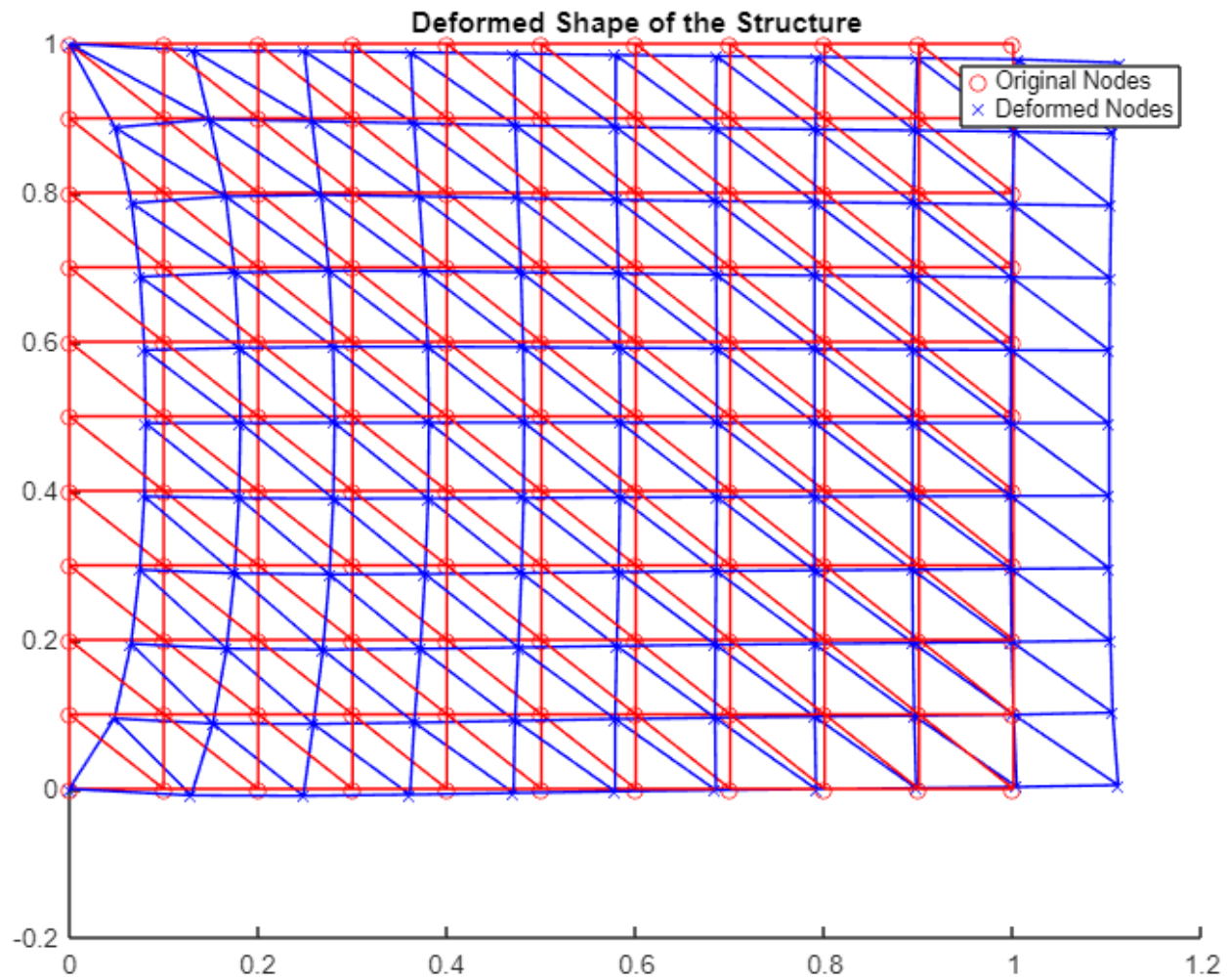
146 original_element = nodes(elements(i, :), :);
147 deformed_element = deformed_nodes(elements(i, :), :);
148 plot(original_element([1: end , 1], 1), original_element([1: end , 1], 2) , '
r-');
149 plot(deformed_element([1: end , 1], 1), deformed_element([1: end , 1], 2) , '
b-');
150 end
151 legend('Original Nodes', 'Deformed Nodes');
152 title('Deformed Shape of the Structure');
153 hold off;

```

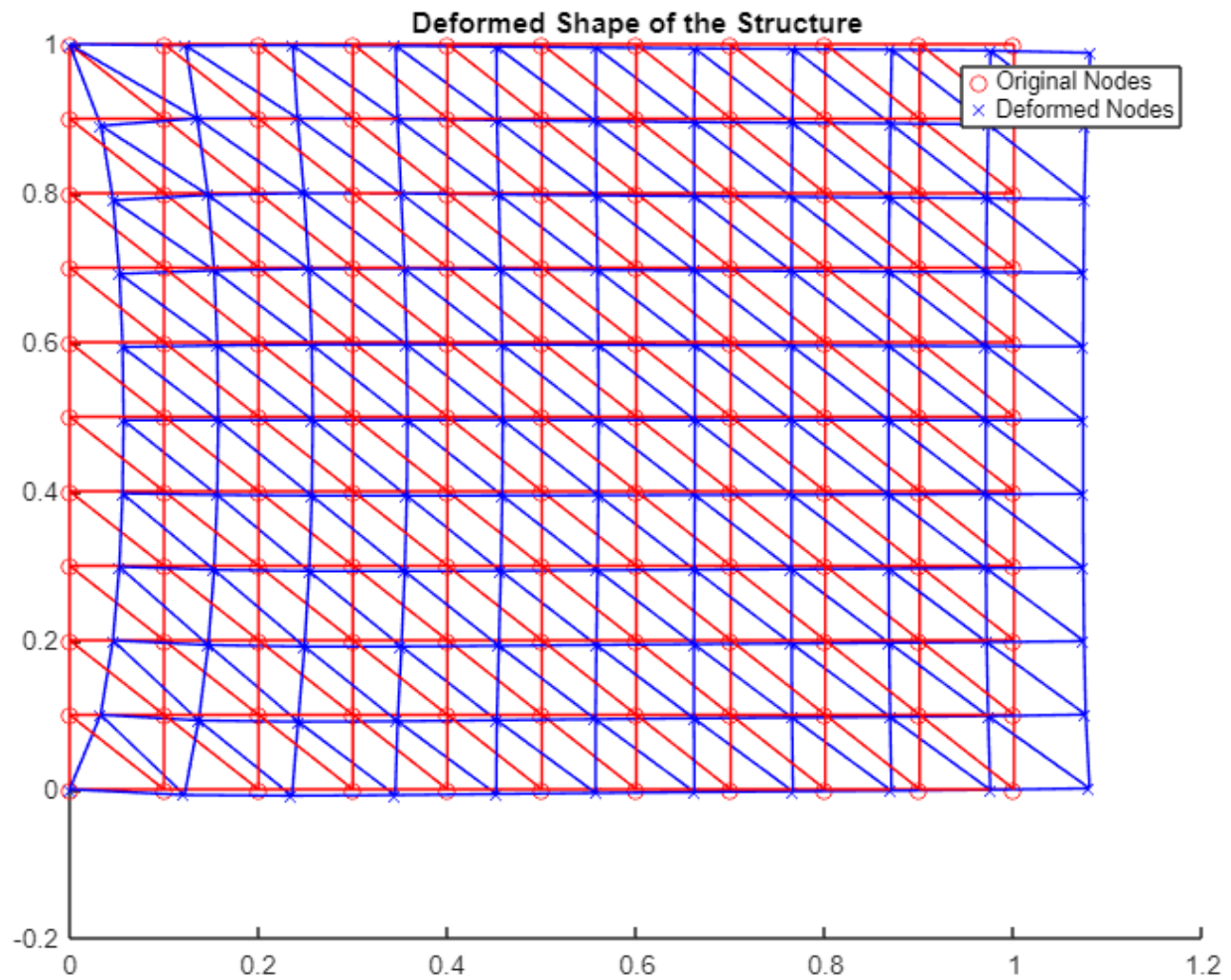
Kết quả:



Hình 6.2: Mô đun Young = 207 GPa, hệ số Poisson = 0.25.



Hình 6.3: Mô đun Young = 207 GPa, hệ số Poisson = 0.5.



Hình 6.4: Mô đun Young = 300 GPa, hệ số Poisson = 0.25.

Tài liệu tham khảo

- [1] Continuum Mechanics-Mase (1970)
- [2] Elasticity Theory, Applications and Numerics (2005, Sadd M H)
- [3] Continuum Mechanics for Engineers (1999)
- [4] Nhập môn cơ học-Đặng Đình Áng, Trịnh Anh Ngọc, Ngô Thành Phong