TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
ĐẠI HỌC QUỐC GIA THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

KHOA TOÁN - TIN HỌC

TIỂU LUẬN
SỐ HỌC VÀ LOGIC TOÁN HỌC

ĐỀ TÀI

PHÂN LOẠI MỘT SỐ KIỂU QUY NẠP TOÁN HỌC VÀ ỨNG DỤNG TRONG GIẢI TOÁN

GV hướng dẫn: TS Trần Nam Dũng

Danh sách thành viên:

Họ và tên	MSSV
Trần Phạm Quốc Anh	22110018
Ngô Khải	22110077
Trần Ngọc Vy Khanh	22110079
Hoàng Yến Nhi	22110144
Nguyễn Thanh Phong	22110154

Hồ Chí Minh, 2024

Mục lục

Lời cảm ơn

Trước tiên, chúng em xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc và chân thành nhất đến thầy TS. Trần Nam Dũng. Thầy không chỉ tận tâm giảng dạy và truyền đạt cho chúng em những kiến thức vô cùng quý báu về lĩnh vực Số học và Logic Toán học mà còn luôn sẵn sàng chia sẻ kinh nghiệm, định hướng và tạo điều kiện thuận lợi để chúng em có thể lựa chọn, nghiên cứu và phát triển đề tài này. Chính sự chỉ bảo tận tình và nguồn cảm hứng mà thầy mang lại đã góp phần to lớn vào sự hoàn thành bài tiểu luận này của chúng em.

Bên cạnh đó, với tinh thần đoàn kết, trách nhiệm, sự nỗ lực không ngừng và đã cùng nhau vượt qua những khó khăn, thách thức trong quá trình thực hiện. Cùng với sự đóng góp, ý tưởng và sự phối hợp hiệu quả giữa các thành viên đã đóng vai trò quan trọng trong việc hoàn thiện bài tiểu luận.

Tuy nhiên, vì giới hạn về thời gian, kiến thức cũng như kinh nghiệm của bản thân, chúng em nhận thức rõ rằng bài tiểu luận này vẫn còn tồn tại những thiếu sót và hạn chế nhất định. Vì vậy, chúng em rất mong nhận được những ý kiến đóng góp, nhận xét quý báu từ thầy để có thể rút kinh nghiệm và hoàn thiện hơn.

Một lần nữa, chúng em xin chân thành cảm ơn và kính chúc thầy sức khỏe dồi dào, luôn thành công trên con đường giảng dạy và nghiên cứu khoa học.

Tp. Hồ Chí Minh, tháng 1 năm 2025

Nhóm Thợ Săn Số Nguyên Tố

Lời mở đầu

Trong lịch sử phát triển của toán học, việc chứng minh các mệnh đề và tính chất luôn đóng vai trò cốt lõi, không chỉ để khẳng định tính đúng đắn của các kết quả mà còn để khám phá những quy luật tiềm ẩn trong tự nhiên và tư duy con người. Trong số các phương pháp chứng minh, quy nạp toán học nổi bật như một công cụ mạnh mẽ, chặt chẽ và mang tính hệ thống, giúp chúng ta mở rộng từ một trường hợp cụ thể đến vô hạn.

Quy nạp toán học không chỉ đơn thuần là một kỹ thuật mà còn là biểu tượng của tư duy trừu tượng và khả năng khái quát hóa. Dựa trên hai bước cơ bản: bước cơ sở, nơi ta chứng minh mệnh đề đúng với một trường hợp ban đầu, và bước quy nạp, nơi ta sử dụng tính đúng đắn ở một trường hợp bất kỳ để suy ra trường hợp kế tiếp, phương pháp này đã trở thành nền tảng cho nhiều nhánh của toán học hiện đại, từ đại số, tổ hợp, lý thuyết số đến hình học và giải tích.

Không dừng lại ở lĩnh vực toán học, quy nạp toán học còn có ý nghĩa sâu rộng trong nhiều lĩnh vực khác như khoa học máy tính, lý thuyết logic, và khoa học tự nhiên. Trong tin học, phương pháp này là cơ sở để xây dựng và phân tích các thuật toán đệ quy, trong khi ở logic học, nó là công cụ quan trọng để chứng minh các định lý. Ngoài ra, tư duy quy nạp cũng được áp dụng để dự đoán và mô hình hóa các hiện tượng trong vật lý, hóa học, sinh học và thậm chí cả kinh tế học.

Trong bài tiểu luận này chúng em sẽ trình bày một cách hệ thống và chi tiết về phương pháp quy nạp toán học, từ khái niệm cơ bản, cấu trúc logic đến các ví dụ minh họa cụ thể. Đồng thời cũng sẽ khám phá vai trò quan trọng của phương pháp này trong toán học cũng như các ứng dụng thực tiễn. Hy vọng rằng qua tiểu luận này, người đọc sẽ không chỉ hiểu rõ hơn về bản chất và sức mạnh của phương pháp quy nạp mà còn nhận thấy tầm quan trọng của tư duy logic và hệ thống trong việc giải quyết các vấn đề phức tạp trong cuộc sống.

Lý do chọn đề tài

Trong toán học, việc chứng minh các mệnh đề, định lý và tính chất luôn là một nhiệm vụ quan trọng, không chỉ giúp khẳng định tính đúng đắn của các lý thuyết mà còn là cơ sở để xây dựng và phát triển các ngành học khác. Trong số các phương pháp chứng minh, quy nạp toán học nổi bật với tính logic chặt chẽ, dễ tiếp cận và khả năng mở rộng từ các trường hợp cụ thể đến các trường hợp tổng quát. Chính những đặc điểm này đã làm cho phương pháp quy nạp trở thành một công cụ không thể thiếu trong toán học và các lĩnh vực khoa học khác.

Chúng em lựa chọn đề tài "Phương pháp quy nạp toán học" xuất phát từ mong muốn tìm hiểu sâu hơn về một phương pháp chứng minh vừa cơ bản vừa phổ quát. Đề tài này không chỉ giúp chúng em củng cố kiến thức nền tảng, hiểu rõ cấu trúc và cách áp dụng quy nạp trong toán học, mà còn tạo cơ hội khám phá những ứng dụng phong phú của nó trong đời sống và khoa học kỹ thuật.

Bên cạnh đó, phương pháp quy nạp toán học có ý nghĩa quan trọng trong giáo dục. Việc giảng dạy và học tập phương pháp này không chỉ giúp học sinh, sinh viên nâng cao khả năng tư duy logic, mà còn trang bị cho họ một công cụ hiệu quả để tiếp cận và giải quyết các bài toán phức tạp. Đặc biệt, trong thời đại mà tư duy hệ thống và khả năng khái quát hóa trở thành những kỹ năng thiết yếu, việc hiểu rõ và vận dụng thành thạo quy nạp toán học là một lợi thế lớn.

Chúng em cũng nhận thấy rằng quy nạp toán học không chỉ tồn tại trong phạm vi lý thuyết mà còn có nhiều ứng dụng thực tiễn. Trong khoa học máy tính, lý thuyết số, và các ngành nghiên cứu tự nhiên, phương pháp này đóng vai trò quan trọng trong việc giải quyết các vấn đề, phát triển thuật toán, và khám phá các quy luật mới.

Với những lý do trên, chúng em mong muốn thông qua tiểu luận này không chỉ trình bày khái niệm và cách áp dụng quy nạp toán học mà còn làm nổi bật vai trò và giá trị của nó trong toán học và đời sống. Chúng em hy vọng rằng việc nghiên cứu đề tài sẽ giúp bản thân và người đọc có cái nhìn sâu sắc hơn về sức mạnh và tầm quan trọng của phương pháp quy nạp toán học.

Phần VI

Khái niệm và nguyên lý cơ bản của quy nạp toán học

1 Khái niệm

Quy nạp toán học là một phương pháp chứng minh hữu hiệu trong toán học, thường được sử dụng để chứng minh các mệnh đề về tập hợp các số tự nhiên. Phương pháp này bao gồm hai bước chính: **Bước cơ sở** và **Bước quy nạp**.

Bước cơ sở xác nhận rằng mệnh đề cần chứng minh đúng với số tự nhiên đầu tiên, thường là $n = 1$. Nếu mệnh đề đúng với $n = 1$, ta chuyển sang **bước quy nạp**, trong đó giả sử mệnh đề đúng với một số tự nhiên k bất kỳ. Dựa trên giả thiết này, bước quy nạp yêu cầu chứng minh rằng mệnh đề cũng đúng với số $k + 1$. Nếu cả hai bước trên đều chính xác, ta có thể kết luận rằng mệnh đề đúng cho mọi số tự nhiên $n \geq 1$.

Phương pháp quy nạp không chỉ áp dụng cho các mệnh đề liên quan đến số tự nhiên mà còn được mở rộng trong nhiều lĩnh vực khác của toán học như lý thuyết đồ thị và đại số. Lịch sử phát triển của quy nạp toán học đã chứng kiến sự đóng góp từ nhiều nhà toán học lớn như Euclid, Gauss, và Pascal, làm cho nó trở thành một công cụ quan trọng trong việc chứng minh và khám phá các tính chất toán học.

2 Quy nạp cổ điển

2.1 Nội dung phương pháp

- Phương pháp quy nạp mà các học sinh trung học thường chỉ là phương pháp có dạng cổ điển như sau:

  Để chứng minh một "mệnh đề chứa biến" $P(n)$ là đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta tiến hành hai bước:

  Bước 1: Chỉ ra mệnh đề $P(1)$ đúng.

Bước 2: Với mọi $k \in \mathbb{N}^*$, ta chứng minh rằng nếu mệnh đề $P(k)$ đúng thì mệnh đề $P(K+1)$ cũng đúng.
Trong trường hợp phải chứng minh rằng $P(n)$ là đúng với mọi số nguyên dương $n \geqslant m$ (m là số nguyên dương đã cho) thì ở bước 1, ta cần kiểm tra mệnh đề $P(m)$ đúng và giữ nguyên bước 2 (nhưng với $k \geqslant m$).

- Sau đây chúng ta sẽ cùng đến với một số bài tập về phương pháp quy nạp.

2.2 Bài tập minh họa

Bài toán 1. Chứng minh rằng:

$$1.2.3 + 2..4 + \cdots + n(n+1)(n+2) = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3) \quad \text{với mọi } n \in \mathbb{N}^*.$$

Lời giải. Gọi $P(n): 1.2.3 + 2..4 + \cdots + n(n+1)(n+2) = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$.

- Với $n = 1$, ta có:

$$1.2.3 = \frac{1}{4}1.(1+1)(1+2)(1+3) = \frac{1}{4}.1.2.3.4 \quad \text{(đúng)}$$

Vậy P(1) đúng.

- Giả sử $P(n)$ đúng với mọi $n = k, n \in \mathbb{N}^*$. Tức là:

$$1.2.3 + 2..4 + \cdots + k(k+1)(k+2) = \frac{1}{4}k(k+1)(k+2)(k+3).$$

- Thật vậy, áp dụng giả thiết quy nạp ta có:

$$\begin{aligned}
&1.2.3 + 2..4 + \cdots + k(k+1)(k+2) + (k+1)(k+2)(k+3) \\
&= \frac{1}{4}k(k+1)(k+2)(k+3) + (k+1)(k+2)(k+3) \\
&= (k+1)(k+2)(k+3)\left(\frac{1}{4}k+1\right) \\
&= (k+1)(k+2)(k+3) \cdot \frac{k+4}{4} \\
&= \frac{1}{4}(k+1)(k+2)(k+3)(k+4).
\end{aligned}$$

Do đó: $P(n)$ đúng với $n \in \mathbb{N}^*$.
Theo nguyên lý quy nạp ta có: $P(n)$ đúng với $n \in \mathbb{N}^*$.
Vậy

$$1.2.3 + 2..4 + \cdots + n(n+1)(n+2) = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3) \quad \text{với mọi } n \in \mathbb{N}^*.$$

□

Bài toán 2. a) Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1} \quad \text{với mọi } n\in\mathbb{N}^*.$$

b) Cho $n>1$ là số tự nhiên. Ta đặt $x_0=\frac{1}{n}, x_k=\frac{1}{n-k}(x_0+x_1+\cdots+x_{k-1})$ với $k=1,2,\ldots,n-1$. Hãy tính tổng $x_0+x_1+\cdots+x_{n-1}$.

Lời giải. Gọi $P(n): \frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$.

- Với $n=1$, ta có: $\frac{1}{1.2}=\frac{1}{2}$ (đúng). Vậy $P(1)$ đúng.
- Giả sử $P(n)$ đúng với $n=k$, tức là:

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}$$

- Ta sẽ chứng minh $P(n)$ đúng với $n=k+1$, tức là:

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}.$$

- Thật vậy, áp dụng giả thiết quy nạp, ta có:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}&=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}\\&=\frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}\\&=\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}\\&=\frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}\\&=\frac{k+1}{k+2}.\end{aligned}$$

Do đó, $P(n)$ đúng với $n=k+1$.
Theo nguyên lý quy nạp ta có $P(n)$ đúng với mọi $n\in\mathbb{N}^*$.
Vậy

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1} \quad \text{với mọi } n\in\mathbb{N}^*.$$

b) Ta có:

$$
\begin{aligned}
x_0 &= \frac{1}{n} \\
x_1 &= \frac{1}{n-1} \cdot x_0 = \frac{1}{(n-1)n} \\
x_2 &= \frac{1}{n-2} \cdot (x_0 + x_1) = \frac{1}{n-2}[(n-1)x_1 + x_1] = \frac{1}{n-2} \cdot n \cdot x_1 = \frac{1}{(n-2)(n-1)} \\
x_3 &= \frac{1}{n-3} \cdot (x_0 + x_1 + x_2) = \frac{1}{n-3}[(n-2)x_2 + x_2] = \frac{1}{n-3} \cdot (n-1) \cdot x_2 = \frac{1}{(n-3)(n-2)} \\
x_4 &= \frac{1}{n-4} \cdot (x_0 + x_1 + x_2 + x_4) = \frac{1}{n-4}[(n-3)x_3 + x_3] = \frac{1}{n-4} \cdot (n-2) \cdot x_3 = \frac{1}{(n-4)(n-} \\
&\vdots \\
x_{n-1} &= \frac{1}{[n-(n-1)] \cdot [n-(n-2)]} = \frac{1}{1.2}.
\end{aligned}
$$

Do đó:

$$x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} = \frac{1}{n} + \frac{1}{(n-1)n} + \frac{1}{(n-2)(n-1)} + \frac{1}{(n-3)(n-2)} + \cdots + \frac{1}{1.2}.$$

Áp dụng kết quả câu a, ta được:

$$
\begin{aligned}
x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} &= \left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \cdots + \frac{1}{(n-3)(n-2)} + \frac{1}{(n-2)(n-1)} + \frac{1}{(n-1)n}\right) + \\
&= \frac{n}{n+1} - \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{n} \\
&= \frac{n^2 - 1 + n + 1}{n(n+1)} \\
&= \frac{n(n+1)}{n(n+1)} = 1.
\end{aligned}
$$

Vậy $x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} = 1$. □

Bài toán 3. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương $n \geqslant 3$, ta có: $3^n > n^2 + 4n + 5$.

Lời giải. Gọi $P(n) : 3^n > n^2 + 4n + 5$.

- Với $n = 3$, ta có: $3^3 > 3^2 + 4.3 + 5$ (đúng). Vậy $P(n)$ đúng với $n = 3$.
- Giả sử $P(n)$ đúng với $n = k$, k nguyên dương, $k \geqslant 3$. Tức là:

$$3^k > k^2 + 4k + 5.$$

- Ta chứng minh $P(n)$ đúng với $n = k + 1$. Tức là:

$$3^{k+1} > (k+1)^2 + 4(k+1) + 5.$$

- Thật vậy, áp dụng giả thiết quy nạp ta có:

$$3.3^k > 3k^2 + 3.4k + 3.5 = 3k^2 + 12k + 15.$$

Hay

$$3^{k+1} > (k^2+2k+1) + 4(k+1) + 5 + 2k^2 + 6k + 5 = (k+1)^2 + 4(k+1) + 5 + (2k^2 + 6k + 5).$$

Vì $2k^2 + 6k + 5 > 0$ với mọi $k \geqslant 3$ nên $3^{k+1} > (k+1)^2 + 4(k+1) + 5$.
Do đó: $P(n)$ đúng với $n = k+1$.
Theo nguyên lý quy nạp ta có $P(n)$ đúng với mọi số nguyên dương $n \geqslant 3$.
Vậy

$$3^n > n^2 + 4n + 5 \quad \text{với mọi } n \in \mathbb{Z}^+, n \geqslant 3.$$

□

Bài toán 4. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương $n \geqslant 2$, ta có:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} > \frac{13}{24}.$$

Lời giải. Gọi

$$P(n) : \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} > \frac{13}{24}.$$

- Với $n = 2$, ta có:

$$\frac{1}{2+1} + \frac{1}{2+2} = \frac{7}{12} > \frac{13}{24} \quad \text{(đúng)}.$$

  Vậy $P(n)$ đúng với $n = 1$.

- Giả sử $P(n)$ đúng với $n = k$, $k \in \mathbb{Z}^+, k \geqslant 2$. Tức là:

$$\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{k+k} > \frac{13}{24}.$$

  Ta sẽ chứng minh $P(n)$ đúng với $n = k+1$, tức là:

$$\frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \cdots + \frac{1}{(k+1)+(k+1)} > \frac{13}{24}.$$

  Thật vậy, áp dụng đẳng thức quy nạp ta có:

$$\left[\frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \cdots + \frac{1}{(k+1)+(k+1)}\right] - \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{k+k}\right)$$
$$= \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2(k+1)} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} > 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}^+, k \geqslant 2.$$

Do đó:

$$\frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \cdots + \frac{1}{(k+1)+(k+1)} > \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{k+k} > \frac{13}{24}.$$

Do đó: $P(n)$ đúng với $n = k+1$.
Theo nguyên lý quy nạp, ta có $P(n)$ đúng với mọi số nguyên dương $n \geqslant 2$.
Vậy

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} > \frac{13}{24}.$$

□

Tóm tắt: Quy nạp cổ điển

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(n) \iff \begin{cases} P(1) \\ \forall k \in \mathbb{N}^*, P(k) \to P(k+1) \end{cases}.$$

Ngoài phương pháp quy nạp cổ điển trên, chúng ta hãy cùng tìm hiểu các biến thể khác của phương pháp quy nạp toán học được trình bày tiếp theo.

3 Quy nạp nhảy cách

3.1 Nội dung phương pháp

- Để chứng minh một "mệnh đề chứa biến" $P(n)$ là đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta tiến hành 2 bước:

  Bước 1: Chỉ ra mệnh đề $P(1), P(2), \ldots, P(a)$ đúng với $a \in \mathbb{N}^*$.

  Bước 2: Với mọi $k \in \mathbb{N}^*$, ta chứng minh rằng nếu mệnh đề $P(k)$ đúng thì mệnh đề $P(k+a)$ cũng đúng.

- Tương tự như phương pháp quy nạp cổ điển, ta cũng có thể dùnh phương pháp quy nạp nhảy cách để chứng minh rằng $P(n)$ là đúng với mọi số nguyên dương $n \geqslant m$ (m là số nguyên dương đã cho).

Sau đây, ta sẽ cùng đến với một số bài tập về phương pháp này.

3.2 Bài tập minh họa

Bài toán 5. Chứng minh rằng với $n \geqslant 2$, các số $1, 2, 3, ..., 3n$ có thể chia thành 3 nhóm, mỗi nhóm có n số có tổng bằng nhau.

Lời giải. Ta thử với một vài số hạng đầu như sau:
Với $n = 2$, ta có các số $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Khi đó ta có thể chia thành 3 cặp như sau: $\{1, 6\}; \{2, 5\}; \{3, 4\}$. Với $n = 3$, ta có các nhóm như sau: $\{1, 5, 9\}; \{2, 6, 7\}; \{3, 4, 8\}$. Tương tự với $n = 5$.
Giả sử mệnh đề đúng với $n = k$, nghĩa là với các số $1, 2, ..., 3k-1, 3k$ ta có thể chia thành 3 nhóm. Ta sẽ chứng minh với $n = k+2$, ta cũng có thể chia được thành 3 nhóm. Thật vậy, khi đã chia $3k$ số hạng đầu tiên thành 3 nhóm, ta tiếp tục chia cặp số $\{3n+1, 3n+6\}; \{3n+2, 3n+5\}; \{3n+3, 3n+4\}$ vào ba nhóm vừa rồi. Từ đó, ta có điều phải chứng minh. □

Bài toán 6. Chứng minh rằng với mọi số thực $x > 0$ và mọi số tự nhiên $n \geqslant 1$, bất đẳng thức sau đúng:

$$x^n + x^{n-2} + x^{n-4} + \cdots + \frac{1}{x^{n-4}} + \frac{1}{x^{n-2}} + \frac{1}{x^n} \geqslant n + 1.$$

Lời giải. Gọi

$$P(n): "x^n + x^{n-2} + x^{n-4} + \cdots + \frac{1}{x^{n-4}} + \frac{1}{x^{n-2}} + \frac{1}{x^n} \geqslant n + 1".$$

- Với $n = 1$, $P(n)$ có dạng:

  $$x + \frac{1}{x} \geqslant 2.$$

  Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho 2 số $x; \frac{1}{x} > 0$ ta được:

  $$x + \frac{1}{x} \geqslant 2 \cdot \sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2.$$

  Do đó: $P(n)$ đúng với $n = 1$.

- Với $n = 2$, $P(n)$ có dạng:

  $$x^2 + 1 + \frac{1}{x^2} \geqslant 3 \text{ hay } x^2 + \frac{1}{x^2} \geqslant 2.$$

  Tương tự, ta cũng áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho 2 số $x^2; \frac{1}{x^2} > 0$ ta được:

  $$x^2 + \frac{1}{x^2} \geqslant 2 \cdot \sqrt{x^2 \cdot \frac{1}{x^2}} = 2.$$

  Do đó: $P(n)$ đúng với $n = 2$.

- $P(n)$ đúng với $n = k$, $k \in \mathbb{N}^*$. Tức là :

  $$x^k + x^{k-2} + x^{k-4} + \cdots + \frac{1}{x^{k-4}} + \frac{1}{x^{k-2}} + \frac{1}{x^k} \geqslant k + 1.$$

- Ta chứng minh $P(n)$ đúng với $n = k + 2$. Nghĩa là:

  $$x^{k+2} + x^k + x^{k-2} + \cdots + \frac{1}{x^{k-2}} + \frac{1}{x^k} + \frac{1}{x^{k+2}} \geqslant k + 3.$$

  Thật vậy, áp dụng giả thiết quy nạp ta được:

  $$\begin{aligned} & x^{k+2} + x^k + x^{k-2} + \cdots + \frac{1}{x^{k-2}} + \frac{1}{x^k} + \frac{1}{x^{k+2}} \\ = & \left(x^{k+2} + \frac{1}{x^{k+2}}\right) + \left(x^k + x^{k-2} + x^{k-4} + \cdots + \frac{1}{x^{k-4}} + \frac{1}{x^{k-2}} + \frac{1}{x^k}\right) \\ \geqslant & x^{k+2} + \frac{1}{x^{k+2}} + k + 1. \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho 2 số $x^{k+2}; \dfrac{1}{x^{k+2}} > 0$ ta được: Do đó:

$$x^{k+2} + x^k + x^{k-2} + \cdots + \frac{1}{x^{k-2}} + \frac{1}{x^k} + \frac{1}{x^{k+2}} \geqslant 2 + k + 1 = k + 3.$$

Nên $P(n)$ đúng với $n = k + 2$. Theo nguyên lý quy nạp nhảy cách, $P(n)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.
Vậy với mọi số thực $x > 0$ và với mọi số tự nhiên n, ta có:

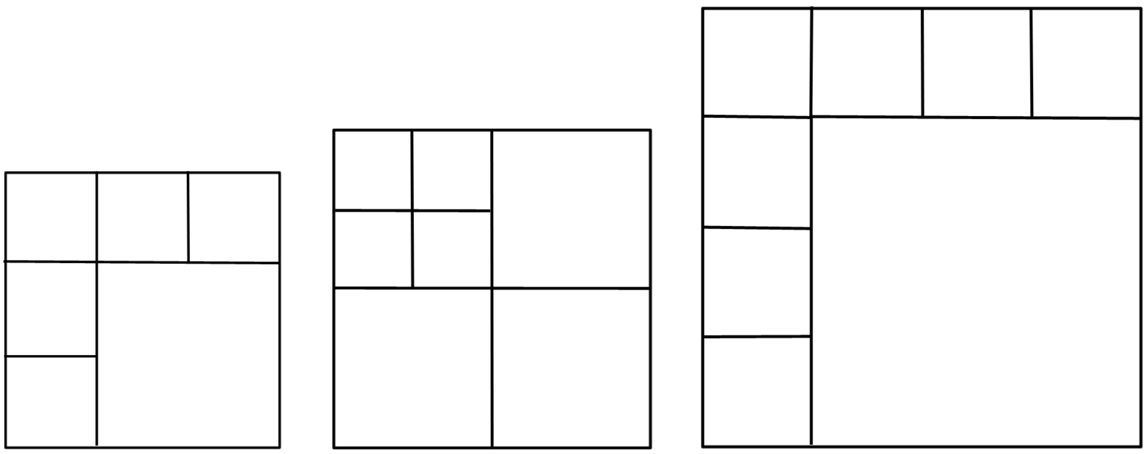
$$x^n + x^{n-2} + x^{n-4} + \cdots + \frac{1}{x^{n-4}} + \frac{1}{x^{n-2}} + \frac{1}{x^n} \geqslant n + 1.$$

□

Bài toán 7. Cho n là số tự nhiên lớn hơn hoặc bằng 6. Chứng minh rằng luôn chia được một hình vuông thành n hình vuông nhỏ (các hình vuông sau khi chia không nhất thiết phải bằng nhau).

Lời giải. Gọi $P(n)$: "Một hình vuông có thể chia được thành n hình vuông nhỏ".

- Với $n = 6; n = 7; n = 8$ ta có:



- Do đó: $P(n)$ đúng với $n = 6; n = 7; n = 8$.
- Giả sử: $P(n)$ đúng với $n = k$, k là số tự nhiên lớn hơn hoặc bằng 6. Tức là một hình vuông có thể chia được thành k hình vuông nhỏ.
- Ta chứng minh $P(n)$ đúng với $n = k + 3$. Nói cách khác, một hình vuông có thể chia thành $k + 3$ hình vuông nhỏ.
- Thật vậy, áp dụng giả thiết quy nạp, ta chia hình vuông đó thành k hình vuông nhỏ. Sau đó, ta chọn bất kì 1 trong k hình vuông nhỏ đó để chia thành 4 hình vuông nhỏ hơn.
- Khi đó, từ hình vuông ban đầu ta có thể chia được thành $k + 3$ hình vuông nhỏ.
- Do đó: $P(n)$ đúng với $n = k + 3$.

Theo nguyên lý quy nạp nhảy cách, ta có $P(n)$ đúng với mọi số tự nhiên n lớn hơn hoặc bằng 6.
Vậy Với số tự nhiên n lớn hơn hoặc bằng 6, ta luôn chia được một hình vuông thành n hình vuông nhỏ (các hình vuông sau khi chia không nhất thiết phải bằng nhau). □

Tóm tắt: Quy nạp nhảy cách

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(n) \iff \begin{cases} P(1), P(2) \\ \forall k \in \mathbb{N}^*, P(k) \to P(k+2) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} P(1), P(2), \ldots, P(a) \\ \forall k \in \mathbb{N}^*, a \in \mathbb{N}^*, P(k) \to P(k+a) \end{cases}.$$

4 Quy nạp mạnh

4.1 Nội dung phương pháp

- Để chứng minh "mệnh đề chứa biến" $P(n)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ trong phương pháp quy nạp cổ điển, ở bước 2 với mọi $k \in \mathbb{N}^*$, ta chứng minh rằng mệnh đề $P(k)$ đúng thì mệnh đề $P(k+1)$ cũng đúng. Nhưng ở một số bài toán, chỉ giả thiết $P(k)$ đúng thì không đủ để chứng minh $P(k+1)$ đúng, mà ta cần một giả thiết mạnh hơn, đó là $P(n)$ đúng với mọi $n \leqslant k, n \in \mathbb{N}^*$.
- Để chứng minh $P(n)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, theo nguyên lý quy nạp mạnh, ta tiến hành 2 bước:

  Bước 1: Chỉ ra mệnh đề $P(1)$ đúng.

  Bước 2: Với mọi $k \in \mathbb{N}^*$, ta chứng minh rằng nếu các mệnh đề $P(1), P(2), \ldots, P(k)$ đúng thì mệnh đề $P(k+1)$ cũng đúng.
- Tương tự với 2 phương pháp quy nạp cổ điển và quy nạp nhảy cách ta cũng có thể áp dụng phương pháp quy nạp mạnh để chứng minh mệnh đề $P(n)$ đúng với mọi số nguyên dương, $n \geqslant m$ (m là số nguyên dương đã cho).

4.2 Bài tập minh họa

Bài toán 8. Chứng minh rằng nếu $x + \dfrac{1}{x}$ là số nguyên thì $x^n + \dfrac{1}{x^n}$ cũng là số nguyên với mọi số nguyên dương n.

Lời giải. Gọi $P(n)$: "$x^n + \dfrac{1}{x^n}$ là số nguyên".

- Với $n = 1$ mệnh đề hiển nhiên đúng.

- Giả sử mệnh đề đúng với mọi số nguyên dương từ 1 đến k. Tức là:
$$x+\frac{1}{x};x^2+\frac{1}{x^2};\cdots;x^k+\frac{1}{x^k} \text{ là những số nguyên.}$$
- Ta chứng minh $P(n)$ đúng với $n=k+1$, hay $x^{k+1}+\frac{1}{x^{k+1}}$ là số nguyên.
- Thật vậy, ta có:
$$x^{k+1}+\frac{1}{x^{k+1}}=\left(x+1\frac{1}{x}\right)\cdot\left(x^k+\frac{1}{x^k}\right)-(x^{k-1}+\frac{1}{x^{k-1}}).$$

Áp dụng giả thiết quy nạp ta có: $x+\frac{1}{x};x^k+\frac{1}{x^k};x^{k-1}+\frac{1}{x^{k-1}}$ là các số nguyên.
Suy ra: $x^{k+1}+\frac{1}{x^{k+1}}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\cdot\left(x^k+\frac{1}{x^k}\right)-\left(x^{k-1}+\frac{1}{x^{k-1}}\right)$ cũng là số nguyên.
Theo nguyên lý quy nạp mạnh ta có mệnh đề $P(n)$ đúng với mọi $n\in\mathbb{N}^*$.
Vậy nếu $x+\frac{1}{x}$ là số nguyên thì $x^n+\frac{1}{x^n}$ cũng là số nguyên với mọi số nguyên dương n. □

Bài toán 9 (Định lý cơ bản của số học). Chứng minh rằng mọi số tự nhiên lớn hơn 1 đều biểu diễn được dưới dạng tích của các số nguyên tố.

Lời giải. Gọi $P(n)$: "Mọi số tự nhiên $n>1$ đều biểu diễn được dưới dạng tích của các số nguyên tố."

- Với $n=2;n=3$: $P(n)$ hiển nhiên đúng vì 2;3 là số nguyên tố.
- Giả sử $P(n)$ đúng với mọi số tự nhiên n từ 2 đến k, $k\in\mathbb{N},k\geqslant 4$. Tức là $2;3;\ldots;k$ đều biểu diễn được dưới dạng tích các số nguyên tố.
- Ta chứng minh $P(n)$ đúng với $n=k+1$, tức là số tự nhiên $k+1$ có thể biểu diễn được dưới dạng tích các số nguyên tố. Khi đó:
  - Nếu $k+1$ là số nguyên tố, hiển nhiên $P(k+1)$ đúng.
  - Nếu $k+1$ là hợp số tức là $k+1=a.b$ với $1<a,b<k+1$, $a,b\in\mathbb{N}$.

Áp dụng giả thiết quy nạp, ta có a,b có thể biểu diễn được dưới dạng tích các số nguyên tố. Nên $k+1=a.b$ cũng có thể biểu diễn được dưới dạng tích của các số nguyên tố.
Do đó: Mệnh đề $P(n)$ đúng với $n=k+1$.
Theo nguyên lý quy nạp mạnh, ta được mệnh đề $P(n)$ đúng với mọi số tự nhiên $n>1$.
Vậy mọi số tự nhiên lớn hơn 1 đều biểu diễn được dưới dạng tích của các số nguyên tố. □

Tóm tắt: Quy nạp mạnh

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,P(n) \iff \begin{cases} P(1) \\ \forall k\in\mathbb{N}^*,P(1),P(2),\ldots,P(k)\to P(k+1)\end{cases}.$$

5 Quy nạp lùi

5.1 Nội dung phương pháp

Phép quy nạp có nhiều biến thể rất hay. Một trong các biến thể đó ngày nay được biết đến với tên gọi "quy nạp lùi" (còn được gọi là "quy nạp kiểu Cauchy"), do chính Cauchy sử dụng lần đầu khi chứng minh bất đẳng thức trung bình cộng – trung bình nhân:

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$$

với mọi số nguyên dương $n \geq 2$ và với mọi bộ n số thực không âm $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Nguyên lý quy nạp lùi

Cho $(m_k)_{k=1}^{\infty}$ là 1 dãy vô hạn các số nguyên dương mà $\lim\limits_{k\to\infty} m_k = \infty$. Giả sử $P(n)$ là 1 hàm mệnh đề của biến n biến thiên trên tập hợp A * tất cả số nguyên dương sao cho $P(m_k)$ đúng với mọi k thuộc A^*; hơn nữa, với mọi số nguyên dương $n > 1$, nếu $P(n)$ đúng thì $P(n-1)$ cũng đúng. Khi đó, $P(n)$ đúng với mọi số nguyên dương n.

5.2 Bài tập minh họa

Bài toán 10. Hoàn tất chứng minh bất đẳng thức AM-GM bằng quy nạp lùi. Chứng minh rằng với mọi $n \geqslant 2$ và mọi n số thực không âm $a_1, \ldots, a_n$ ta có:

$$\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$$

Lời giải. Với $n = 2$ bất đẳng thức có dạng:

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geqslant \sqrt{a_1 a_2} \iff a_1 + a_2 \geqslant 2\sqrt{a_1 a_2} \iff \left(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}\right)^2 \geqslant 0 \quad \text{(đúng).}$$

Tương tự, với $n = 4$ ta cũng được:

$$\begin{aligned}\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} = \frac{\dfrac{a_1 + a_2}{2} + \dfrac{a_3 + a_4}{2}}{2} &\geqslant \frac{\sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{a_3 a_4}}{2} \\ &\geqslant \sqrt{\sqrt{a_1 a_2}\sqrt{a_3 a_4}} \\ &= \sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4}.\end{aligned}$$

Mặt khác, với $n = 3$ chọn hệ số $a_4 = \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}$ ta được:

$$\begin{aligned}\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}}{4} = \frac{\dfrac{a_1 + a_2}{2} + \dfrac{a_3 + \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}}{2}}{2} &\geqslant \frac{\sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{a_3 \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}}}{2} \\ &\geqslant \sqrt{\sqrt{a_1 a_2}\sqrt{a_3 \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}}} \\ &= \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}.\end{aligned}$$

Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = 2^k$, $k \in \mathbb{N}^*$ khi đó:

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_{2^k}}{2^k} \geqslant \sqrt[2^k]{a_1 a_2 ... a_{2^k}}$$

Ta chứng minh nó đúng với $n = 2^{k+1}$, tức là:

$$\begin{aligned}
\frac{a_1 + a_2 + ... + a_{2^{k+1}}}{2^{k+1}} &= \frac{\dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_{2^k}}{2^k} + \dfrac{a_{2^k+1} + a_{2^k+2} + ... + a_{2^{k+1}}}{2^k}}{2} \\
&\geqslant \frac{\sqrt[2^k]{a_1 a_2 ... a_{2^k}} \cdot \sqrt[2^k]{a_{2^k+1} a_{2^k+2} ... a_{2^{k+1}}}}{2} \\
&\geqslant \sqrt{\sqrt[2^k]{a_1 a_2 ... a_{2^k}} \cdot \sqrt[2^k]{a_{2^k+1} a_{2^k+2} ... a_{2^{k+1}}}} \\
&= \sqrt[2^{k+1}]{a_1 a_2 ... a_{2^{k+1}}}.
\end{aligned}$$

Khi đó, ta thấy bất đẳng thức đúng với một dãy tăng vô hạn các số nguyên dương $n = 2^k, k \in \mathbb{N}^*$.
Cuối cùng, ta chứng minh bất đẳng thức đúng với n số thì bất đẳng thức cũng đúng với $n-1$ số. Xét $n-1$ số $a_1, a_2, ..., a_{n-1}$. Xét n số $a_1, a_2, ..., a_{n-1}$, $\sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_{n-1}}$. Áp dụng bất đẳng thức cho n số, ta có:

$$\begin{aligned}
\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} = \frac{a_1 + a_2 + ... + \sqrt[n-1]{a_1 a_2 ... a_{n-1}}}{n} &\geqslant \sqrt{a_1 a_2 ... a_{n-1} \sqrt[n-1]{a_1 a_2 ... a_{n-1}}} \\
&= \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}
\end{aligned}$$

Từ đó ta đã chứng minh được bất đẳng thức đúng với $n \geqslant 2$. □

Bài toán 11. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên đoạn I. Nếu $\dfrac{f(x) + f(y)}{2} \leqslant f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)$, $\forall x, y \in I$ thì $\dfrac{f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n)}{n} \leqslant f\left(\dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}\right), \forall x \in I$.

Lời giải. Đầu tiên, ta sẽ chứng minh mệnh đề đúng với $n = 2^k$. Với $k = 1$, đó là điều giả sử. Với $k = 2$, ta có:

$$\begin{aligned}
\frac{f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4)}{4} &= \frac{\dfrac{f(x_1) + f(x_2)}{2} + \dfrac{f(x_3) + f(x_4)}{4}}{2} \\
&\leqslant \frac{f\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right) + f\left(\dfrac{x_3 + x_4}{2}\right)}{2} \\
&\leqslant f\left(\frac{\dfrac{x_1 + x_2}{2} + \dfrac{x_3 + x_4}{2}}{2}\right) = f\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}\right).
\end{aligned}$$

Giả sử mệnh đề đúng với $n = 2^k$, tức là:

$$\frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{2^k})}{2^k} \leqslant f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_{2^k}}{2^k}\right).$$

Ta chứng minh mệnh đề đúng với $n = 2^{k+1}$. Thật vậy,

$$\begin{aligned}\frac{f(x_1) + \cdots + f(x_{2^k})}{2^{k+1}} &= \frac{\dfrac{f(x_1) + \cdots + f(x_{2^k})}{2^k} + \dfrac{f(x_{2^k+1}) + \cdots + f(x_{2^{k+1}})}{2^k}}{2} \\ &\leqslant \frac{f\left(\dfrac{x_1 + \cdots + x_{2^k}}{2^k}\right) + f\left(\dfrac{x_{2^k+1} + \cdots + x_{2^{k+1}}}{2^k}\right)}{2} \\ &\leqslant f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_{2^k+1} + \cdots + x_{2^{k+1}}}{2^{k+1}}\right).\end{aligned}$$

Cuối cùng, ta chứng minh nếu mệnh đề đúng với n thì cũng đúng với $n-1$.
Xét $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1} \in I$. Suy ra: $\dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n-1} \in I$.

$$\frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1}) + f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}{n-1}\right)}{n} \leqslant f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + \frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}{n-1}}{n}\right)$$

Suy ra:

$$\frac{f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1})}{n-1} \leqslant f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}\right).$$

Vậy ta đã chứng minh xong mệnh đề bằng nguyên lý quy nạp. □

Tóm tắt: Quy nạp lùi

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, A(n) \iff \begin{cases} A(n) \text{ đúng với } n = n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots \\ \text{trong đó } (n_k) \text{ là dãy tăng ngặt các số nguyên dương.} \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, A(n) \to A(n-1) \end{cases}$$

6 Quy nạp cấu trúc

6.1 Nội dung phương pháp

- Quy nạp cấu trúc là một kỹ thuật chứng minh dựa trên định nghĩa đệ quy của một cấu trúc nào đó.
- Nếu một đối tượng được xây dựng bằng các bước đệ quy, thì ta sẽ chứng minh rằng một tính chất nào đó đúng với mọi đối tượng bằng cách làm theo từng bước đệ quy đó.

- Khác với quy nạp thông thường, quy nạp cấu trúc không chỉ dựa vào số lượng (n), mà còn dựa vào cách cấu trúc đó được xây dựng.

- Phương pháp này thường bao gồm hai bước chính:

  Bước 1: Cơ sở quy nạp:

  - Chứng minh rằng tính chất đúng với cấu trúc cơ bản nhất (được định nghĩa trực tiếp).

  Bước 2: Bước quy nạp

  - Giả sử mệnh đề đúng với một cấu trúc bất kỳ (gọi là giả thiết quy nạp), sau đó chứng minh rằng mệnh đề cũng đúng khi áp dụng quy tắc xây dựng để tạo ra cấu trúc phức tạp hơn.
  - Cách lập luận này đảm bảo rằng mệnh đề đúng với mọi đối tượng thuộc cấu trúc được định nghĩa.

6.2 Bài tập minh họa

Bài toán 12. Chứng minh rằng với mọi cây đồ thị đều có thể được tô bằng 2 màu ở đỉnh (vàng, đỏ) sao cho không có 2 đỉnh kề nhau có cùng màu.

Lời giải. Ta sẽ sử dụng **quy nạp cấu trúc** dựa trên cách xây dựng đệ quy của cây.
Xét cây chỉ có một đỉnh (cây nhỏ nhất có thể).

- Với cây này, không có cạnh nào, nên việc tô màu đỉnh duy nhất bằng bất kỳ màu nào (đỏ hoặc vàng) đều thỏa.

- Do đó, mệnh đề đúng với cây cơ bản này.

Giả sử rằng với một cây T có n đỉnh, ta có thể tô màu cây này bằng hai màu vàng, đỏ sao cho không có hai đỉnh kề nhau có cùng màu.
Xét một cây T' có $n+1$ đỉnh. Ta cần chứng minh rằng cây này cũng có thể được tô mùa bằng hai màu.

- Chọn một đỉnh (đỉnh có bậc bằng 1) bất kỳ trong cây T', gọi đỉnh này là v.

- Khi loại bỏ v và cạnh nối giữa v và đỉnh u kề với v, phần còn lại của T' là một cây T có n đỉnh.

- Theo giả thiết quy nạp, ta có thể tô màu cây T bằng hai màu sao cho không có hai đỉnh kề nhau có cùng màu.

- Ta tô màu đỉnh v bằng màu khác màu của đỉnh u.

- Vì v là một lá và chỉ kề với u, không có cạnh nào khác liên quan đến v.

- Do đó, việc tô màu này không vi phạm quy tắc tô màu hai màu.

Như vậy, bài toán đã được chứng minh. □

Bài toán 13. Ngôn ngữ L được tạo thành bởi bảng chữ cái $\{A, B\}$. Ta có các quy tắc sau:

a) Từ rỗng " " thuộc L;

b) Nếu X thuộc L thì AXB và BXA thuộc L;

c) Nếu X, Y thuộc L thì XY thuộc L.

Hãy tìm điều kiện cần và đủ để một từ của $\{A, B\}^*$ (tức là một xâu các chữ cái A hoặc B) thuộc L.

Lời giải. Bài toán tương đương với 2 mệnh đề sau:
Mệnh đề 1. Nếu w là một từ của L thì số kí tự A bằng số kí tự B.
Mệnh đề 2. Nếu $S_A(w) = S_B(w)$ thì $w \in L$.
Trước hết, ta chứng minh **Mệnh đề 1**:

Bước 1: Cơ sở quy nạp:
Mệnh đề đúng với các từ cơ sở trong trường hợp này là rỗng.

Bước 2: Bước quy nạp:

- Nếu trong X có số kí tự A va số kí tự B bằng nhau thì trong AXB và BXA cũng thế vì mỗi kí tự được thêm 1 vào.
- Nếu trong X và Y số kí tự A bằng số kí tự B thì trong XY cũng thế.

Vậy mệnh đề đúng với mọi từ $w \in L$.

Ta chứng minh **Mệnh đề 2**:

Bước 1: Khi độ dài của w bằng 0, tức là w là từ rỗng. Theo quy tắc a) của ngôn ngữ L, từ rỗng thuộc L. Mà số lượng chữ A và chữ B trong từ rỗng đều bằng 0, nên mệnh đề đúng với trường hợp cơ sở.

Bước 2: Bước quy nạp:

- Giả sử mệnh đề đúng với mọi từ có độ dài nhỏ hơn n $(n \geqslant 1)$. Tức là, nếu một từ có độ dài nhỏ hơn n và số lượng chữ A bằng số lượng chữ B thì từ đó thuộc L.
- Bước chứng minh: Xét một từ w có độ dài bằng n và $S_A(w) = S_B(w)$.

TH1: w được tạo thành từ hai từ con X và Y: Nếu $w = XY$, thì theo quy tắc c), cả X và Y đều thuộc L. Mà $S_A(w) = S_B(w)$ nên

$$S_A(X) + S_A(Y) = S_B(X) + S_B(Y).$$

Suy ra: $S_A(X) = S_B(X)$ và $S_A(Y) = S_B(Y)$ thì theo giả thiết quy nạp $X, Y \in L$.
Vậy theo quy tắc c) $W = XY \in L$. Ngược lại, nếu có sự chênh lệnh giữa số lượng chữ A và chữ B thì mẫu thuẫn theo giả thiết $S_A(w) = S_B(w)$.

TH2: w được tạo thành từ một từ con X: Nếu $w = AXB$ hoặc $w = BXA$, thì rõ ràng số lượng chữ A và chữ B trong w vẫn bằng nhau. Mà theo giả thiết quy nạp, X thuộc L. Vậy theo quy tắc b), w cũng thuộc L. Vậy theo quy tắc b), $w \in L$.

Vậy ta đã chứng minh được nếu $S_A(w) = S_B(w)$ thì $w \in L$ bằng nguyên lý quy nạp.

Vậy bài toán được chứng minh.

□

7 Quy nạp kép (Quy nạp 2 biến)

7.1 Nội dung phương pháp

- $P(m,n)$ với 2 biến m,n. Khi đó, chứng tỏ $P(m,1)$ và $P(1,n)$ đúng với mọi $m,n \in \mathbb{N}$.
- Giả sử $P(m+1,n)$ và $P(m,n+1)$ đúng với $n \in \mathbb{N}$.
- Ta chứng minh $P(m+1,n+1)$ cũng đúng.
- Vậy $P(m,n)$ đúng với với mọi $m,n \in \mathbb{N}$.

7.2 Bài tập minh họa

Bài toán 14. Chứng minh rằng với mọi $m \geq 1$ và $n \geq 1$, bất đẳng thức

$$(m+1)^n > mn$$

luôn đúng.

Lời giải. Với mỗi $m \geq 1$ và $n \geq 1$, đặt $P(m,n)$ là mệnh đề $(m+1)^n > mn$.

- Bước cơ sở: Xét $m = 1$ và $n = 1$. Khi đó, $P(1,1)$ trở thành bất đẳng thức

  $$(1+1)^1 > 1 \cdot 1,$$

  hay $2 > 1$, điều này đúng.

- Quy nạp theo m: Giả sử bất đẳng thức $P(m,1)$ đúng, tức là

  $$(m+1)^1 > m \cdot 1,$$

  hay $m+1 > m$.
  Xét $P(m+1,1)$:

  $$((m+1)+1)^1 = m+2 > m+1 = (m+1) \cdot 1.$$

  Do đó, $P(m+1,1)$ cũng đúng.
  Từ đây, bất đẳng thức $P(m,1)$ đúng với mọi $m \geq 1$.

- Quy nạp theo n. Giả sử $n \geq 1$ và bất đẳng thức $P(m,n)$ đúng với mọi $m \geq 1$, tức là:
$$(m+1)^n > mn.$$
Xét bất đẳng thức $P(m,n+1)$:
$$(m+1)^{n+1} = (m+1) \cdot (m+1)^n.$$
Theo giả thiết quy nạp, ta có $(m+1)^n > mn$, nên:
$$(m+1)^{n+1} > (m+1)(mn) = m^2n + mn.$$
Ta cần chứng minh rằng
$$m^2n + mn \geq mn + m(n+1).$$
Rút gọn:
$$m^2n + mn \geq mn + mn + m,$$
tức là:
$$m^2n \geq m,$$
điều này đúng vì $m \geq 1$ và $n \geq 1$.
Do đó, $P(m,n+1)$ đúng với mọi $m \geq 1$.
Từ quy nạp kép, ta suy ra rằng bất đẳng thức $(m+1)^n > mn$ đúng với mọi $m \geq 1$ và $n \geq 1$.

□

Bài toán 15. Chứng minh rằng số các nghiệm nguyên không âm của phương trình:
$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = n, \quad m,n \in \mathbb{N},$$
là:
$$f(m,n) = \frac{(n+m-1)!}{n!(m-1)!}.$$

Lời giải. Gọi $P(m,n)$ là mệnh đề đã cho.

- Với $P(1,n)$: Phương trình $x_1 = n$ chỉ có một nghiệm nguyên không âm duy nhất. Theo công thức,
$$f(1,n) = \frac{(n+1-1)!}{n!(1-1)!} = 1.$$
Do đó, $P(1,n)$ đúng.
- Với $P(m,1)$: Các nghiệm nguyên không âm của phương trình
$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = 1$$

là:

$$(1,0,0,\ldots,0), \quad (0,1,0,\ldots,0),\ldots,(0,0,\ldots,1),$$

tức là có m nghiệm.

Theo công thức,

$$f(m,1)=\frac{(1+m-1)!}{1!(m-1)!}=m.$$

Do đó, $P(m,1)$ đúng.

- Quy nạp với $P(m,n+1)$ và $P(m+1,n)$: Giả sử $P(m,n+1)$ và $P(m+1,n)$ đúng, tức là số các nghiệm nguyên không âm của các phương trình:

$$x_1+x_2+\ldots+x_m=n+1$$

và

$$x_1+x_2+\ldots+x_m+x_{m+1}=n$$

là:

$$f(m,n+1)=\frac{(n+m)!}{(n+1)!(m-1)!} \quad \text{và} \quad f(m+1,n)=\frac{(n+m)!}{n!m!}.$$

Xét $P(m+1,n+1)$: Phương trình:

$$x_1+x_2+\ldots+x_m+x_{m+1}=n+1$$

được chia thành hai trường hợp:

1. Khi $x_{m+1}=0$: Phương trình trở thành:

$$x_1+x_2+\ldots+x_m=n+1.$$

Số nghiệm nguyên không âm trong trường hợp này là:

$$f(m,n+1)=\frac{(n+m)!}{(n+1)!(m-1)!}.$$

2. Khi $x_{m+1}>0$: Đặt $x'_{m+1}=x_{m+1}-1$, phương trình trở thành:

$$x_1+x_2+\ldots+x_m+x'_{m+1}=n.$$

Số nghiệm nguyên không âm trong trường hợp này là:

$$f(m+1,n)=\frac{(n+m)!}{n!m!}.$$

Tổng số nghiệm là:

$$f(m,n+1)+f(m+1,n)=\frac{(n+m)!}{(n+1)!(m-1)!}+\frac{(n+m)!}{n!m!}.$$

Rút gọn mẫu số chung:

$$\frac{(n+m)!}{(n+1)!\cdot(m-1)!}+\frac{(n+m)!}{n!m!}==\frac{(n+m)!}{(n+1)!m!}[(n+1)+m]=\frac{(n+m+1)!}{(n+1)!m!}.$$

Khi đó, $f(m+1,n+1)=\dfrac{(n+m+1)!}{(n+1)!m!}$ cũng đúng.

Từ quy nạp kép, ta đã chứng minh được số nghiệm nguyên không âm của phương trình:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = n, \quad m, n \in \mathbb{N},$$

là:

$$f(m,n) = \frac{(n+m-1)!}{n!(m-1)!}.$$

□

8 Ưu điểm và hạn chế của phương pháp quy nạp

Phương pháp quy nạp là công cụ hữu ích để suy luận từ các quan sát cụ thể đến kết luận tổng quát. Tuy nhiên, phương pháp này có những ưu điểm và hạn chế đáng lưu ý:

8.1 Ưu điểm

1. Áp dụng linh hoạt vào thực tế:

- Phương pháp quy nạp có khả năng phân tích các tình huống đa dạng trong thực tế, từ đó giúp phát hiện ra quy luật tự nhiên hoặc xu hướng xã hội mà không cần dựa vào các giả định chặt chẽ ban đầu.
- Điều này đặc biệt hữu ích trong các ngành như khoa học thực nghiệm, kinh tế, và tâm lý học.

2. Khám phá và dự đoán:

- Quy nạp cho phép nhà nghiên cứu rút ra các kết luận mới và sử dụng chúng để dự đoán các hiện tượng chưa được quan sát. Ví dụ, dựa trên các quan sát hiện tại về xu hướng thời tiết, người ta có thể dự đoán khí hậu trong tương lai.

3. Nền tảng cho nghiên cứu khoa học:

- Phương pháp này là bước khởi đầu để xây dựng giả thuyết và lý thuyết khoa học, hỗ trợ tìm kiếm sự thật từ dữ liệu thực tế. Nó đặc biệt quan trọng trong các ngành như vật lý, hóa học và sinh học.
- Giúp các nhà toán học tổng quát hóa bài toán một cách dễ dàng.

4. Thích hợp cho dữ liệu thực nghiệm:

- Quy nạp giúp xử lý các dữ liệu thực nghiệm và không yêu cầu sẵn một hệ thống lý thuyết để bắt đầu nghiên cứu.

8.2 Hạn chế

1. Kết luận phụ thuộc vào dữ liệu:

- Nếu dữ liệu ban đầu không đầy đủ, không đại diện, hoặc bị sai lệch, thì kết luận quy nạp sẽ không chính xác. Ví dụ, nếu chỉ quan sát một số loài chim biết bay, ta có thể kết luận sai rằng "tất cả các loài chim đều biết bay," bỏ qua những trường hợp ngoại lệ như chim cánh cụt.

2. Không đảm bảo tính chắc chắn tuyệt đối:

- Kết luận của quy nạp chỉ mang tính chất tương đối và có thể bị bác bỏ nếu xuất hiện các trường hợp ngoại lệ. Điều này làm cho quy nạp thiếu độ tin cậy so với phương pháp diễn dịch, vốn đảm bảo tính chính xác logic.
- Không phải bài toán nào cũng có thể tổng quát hóa được.

3. Tính phiến diện trong quan sát:

- Khi các quan sát bị giới hạn bởi môi trường hoặc góc nhìn của người thực hiện, kết luận dễ trở nên phiến diện. Điều này thường xảy ra trong nghiên cứu xã hội hoặc các tình huống phức tạp.

4. Khó áp dụng cho các hiện tượng phức tạp:

- Với những hiện tượng đa chiều và phụ thuộc vào nhiều yếu tố khác nhau, phương pháp quy nạp có thể không đủ sức mạnh để giải thích toàn diện, cần phải kết hợp với các phương pháp khác như suy luận diễn dịch hoặc phân tích thống kê.

Phần VII

Ứng dụng của quy nạp toán học

1 Tìm công thức tổng quát

1.1 Cấp số nhân

Bài toán 16. Chứng minh đẳng thức sau:

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}(1^*)$$

với mọi $q \neq 1$ và với mọi $n = 0, 1, 2, \ldots$ (cấp số nhân).

Lời giải. Với $n = 0$, (1*) trở thành:

$$q^0 = \frac{1 - q}{1 - q}$$

Nên (1*) đúng với $n = 0$.
Giả sử (1*) đúng với $n = k \geqslant 0$, tức là:

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^k = \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q}$$

Ta sẽ chứng minh (1*) đúng với $n = k + 1$, tức là:

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^{k+1} = \frac{1 - q^{k+2}}{1 - q}$$

Thật vậy áp dụng giả thiết quy nạp toán học ta có:

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^{k+1} = \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q} + q^{k+1} = \frac{1 - q^{k+2}}{1 - q}.$$

Vậy theo nguyên lí quy nạp toán học đẳng thức

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

với mọi $q \neq 1$ và với mọi $n = 0,1,2,\ldots$ □

1.2 Phương trình truy hồi tuyến tính

Nội dung

Cho k số hạng đầu của dãy số

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots \tag{1}$$

là $x_1 = u_1, x_2 = u_2, \ldots, x_k = u_k$. Mỗi số hạng thứ $k+1$ của dãy (1) tồn tại mối liên hệ

$$x_{k+n} + a_1 x_{n+k-1} + a_2 x_{n+k-2} + \cdots + a_k x_n = b_n, \tag{2}$$

ở đây $a_1, a_2, \ldots, a_k$ là những số đã cho, còn $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ là dãy đã cho. Khi đó (2) cho phép ta tính được mọi phần tử liên tiếp của dãy (1) và sau đó ta cố gắng biểu diễn số hạng tổng quát của chúng.

Bài toán 17. Tìm công thức tổng quát của dãy xác định như sau:

$$x_1 = 5,\ x_2 = 19,\ x_n - 5x_{n-1} + 6x_{n-2} = 0.$$

Lời giải. Từ mối liên hệ hồi quy $x_n = 5x_{n-1} - 6x_{n-2}$, ta tìm được:

$$x_1 = 5 = 3^2 - 2^2,\ x_2 = 19 = 3^3 - 2^3,$$
$$x_3 = 5x_2 - 6x_1 = 65 = 3^4 - 2^4,\ x_4 = 5x_3 - 6x_2 = 211 = 3^5 - 2^5,$$
$$x_5 = 5x_4 - 6x_3 = 665 = 3^6 - 2^6,\ x_6 = 5x_5 - 6x_4 = 2059 = 3^7 - 2^7.$$

Ta giả thiết rằng số hạng tổng quát của dãy có dạng

$$x_n = 3^{n+1} - 2^{n+1}. \tag{3}$$

Giả thiết được chứng minh bằng phương pháp quy nạp.
1) Ta đã kiểm tra (3) đúng với $n = 1$ và $n = 2$.
2) Ta giả thiết (3) đúng với $n = k$ và $n = k+1$, nghĩa là

$$x_k = 3^{k+1} - 2^{k+1} \text{ và } x_{k+1} = 3^{k+2} - 2^{k+2}.$$

Khi đó ta tìm được

$$x_{k+2} = 5x_{k+1} - 6x_k = 5\left(3^{k+2} - 2^{k+2}\right) - 6\left(3^{k+1} - 2^{k+1}\right).$$
$$= (15-6)3^{k+1} - (10-6)2^{k+1} = 3^{k+3} - 2^{k+3}.$$

Như vậy (3) đúng với $n = k+2$. Theo nguyên lý quy nạp toán học, suy ra (3) đúng với mọi n.
Phương trình (2) gọi *phương trình hồi quy tuyến tính bậc k*. Những số $a_1, a_2, \ldots, a_k$ gọi là *những hệ số*, còn b_n gọi là *số hạng tự do*. Khi với mọi n, $b_n = 0$ phương trình gọi là *thuần nhất*. Bài toán đặt ra là tìm cách biểu diễn số hạng tổng quát x_n qua các dữ liệu ban đầu đã cho. Trong mục này ta chỉ xét trường hợp thuần nhất. □

2 Số học

2.1 Phép chia hết

Nội dung

Trong số học phép chia cho ta rất nhiều tính chất về những số nguyên. Nhiều bài toán phát biểu dưới dạng các phép chia những số nguyên và kể cả các thuật toán tính toán. Ta nhắc lại một số khái niệm. Nếu a và b là những số nguyên, ta nói rằng b chia hết cho a, ký hiệu là $b \vdots a$, khi tồn tại một số nguyên c sao cho $b = ca$. Số c gọi là thương của phép chia, a nhiều khi gọi là ước số của b, số b gọi là bội số của a. Trường hợp không tồn tại c theo định nghĩa trên ta nói rằng b không chia hết cho a, ký hiệu $b \not\vdots a$. Từ định nghĩa đơn giản trên ta suy ra hàng loạt các tính chất của phép chia, ở đây ta chỉ lấy một ví dụ đơn giản: Nếu $b \vdots a$ và $c \vdots a$, thì $(ub + vc) \vdots a$ với mọi số nguyên bất kỳ u và v.
Hai khái niệm sau đây rất hay được dùng.
Một số d gọi là ước số chung lớn nhất của hai số nguyên a và b, ký hiệu d = (a,b), khi

- a và b đều chia hết cho d.
- d chia hết cho mọi ước số chung khác của a và b.

Một số m gọi là bội số chung nhỏ nhất của hai số nguyên a và b, ký hiệu $m = [a, b]$, khi

- m chia hết cho cả a và b.
- Mọi bội số chung khác của a và b đều chia hết cho m
  Công thức liên quan giữa hai khái niệm trên là
  $$[a, b] = \frac{ab}{(a, b)}.$$

Bài toán 18. Chứng minh rằng với mọi số nguyên $n \geqslant 0$, số $3^{3n+3} - 26n - 27$ chia hết cho 169.

Lời giải. Ta đặt $A_n = 3^{3n+3} - 26n - 27$.
Khi đó $A_0 = 3^3 - 27 = 0$ suy ra A_0 chia hết cho 169.
Giả sử A_n chia hết cho 169 với n nào đó
Thật vậy theo giả thiết quy nạp toán học ta có:

$$\begin{aligned}A_{n+1} &= 3^{3(n+1)+3} - 26(n+1) - 27\\ &= A_n + 26.3^{3n+3} - 26 = A_n + 26\left[\left(3^3\right)^{n+1} - 1\right]\\ &= A_n + 26\left(3^3 - 1\right)\left(3^{3n} + \cdots + 1\right) = A_n + 4.169.\left(3^{3n} + \cdots + 1\right).\end{aligned}$$

Từ đó suy ra A_{n+1} chia hết cho 169 .
Vậy theo nguyên lí quy nạp toán học với mọi số nguyên $n \geqslant 0$, số $3^{3n+3} - 26n - 27$ chia hết cho 169. □

2.2 Thuật toán Euclid

Nội dung

Cho $a > 0$ và $b > 0$ là những số nguyên. Tìm ước số chung lớn nhất của hai số đã cho được tìm theo thuật toán của Euclide như sau:
Để cho tiện đặt $r_0 = a$ và $r_1 = b$. Chia số a cho số b được thương q_1 và số dư là r_2. Ta có thể viết

$$a = bq_1 + r_2, \quad (0 \leqslant r_2 < r_1).$$

Nếu $b > a$ ta có $q_1 = 0$ và $r_2 = a$. Nếu $r_2 = 0$, thì a chia hết cho b; trong trường hợp này ước số chung lớn nhất là b . Nếu $r_2 \neq 0$, ta tiến hành bước tiếp theo: Lấy b chia cho r_2, lần này ký hiệu thương và số dư là q_2 và r_3, ta có

$$b = r_2 q_2 + r_3 \quad (0 \leqslant r_3 < r_2).$$

Nếu $r_3 = 0$, thì thuật toán dừng. Trường hợp ngược lại ta lại lấy r_2 chia cho r_3 được thương q_3 và số dư r_4, hay là $r_2 = r_3 q_3 + r_4 \, (0 \leqslant r_3 < r_2)$. Cứ tiếp tuc như vậy, vì các số dư đều thuôc $[0, b)$ và $b > r_1 > r_2 > \ldots \geqslant 0$ dãy số giảm ngặt chứng tỏ sau một số bước (số bước không lớn hơn b) sẽ dẫn tới số dư bằng 0 và thuật toán sẽ dừng. Kết quả ta nhận được dãy

$$\begin{aligned}
r_0 &= r_1 q_1 + r_2 \\
r_1 &= r_2 q_2 + r_3 \\
r_2 &= r_3 q_3 + r_3 \\
&\ldots \\
r_{n-2} &= r_{n-1} q_{n-1} + r_n \\
r_{n-1} &= r_n q_n \quad (0 \leqslant r_i < r_{i-1}, i = 1, 2, \ldots, n).
\end{aligned}$$

Trong công thức trên r_n là số dư cuối cùng khác 0.

Bài toán 19. Chứng minh rằng tổng tất cả ước số của số tư nhiên $n > 2$ nhỏ hơn $n\sqrt{n}$.

Lời giải. Ta ký hiệu tổng của tất cả ước số của số n bằng $D(n)$. Ta phải chứng minh rằng $D(n) < n\sqrt{n}$ với $n \geqslant 3$. Ta chọn trường hợp $n = 2^\alpha$ (α là số nguyên, $\alpha \geqslant 2$). Khi đó

$$\begin{aligned}
D(n) &= 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^\alpha \\
&= 2^{\alpha+1} - 1 < 2^{\alpha + \frac{\alpha}{2}} = n\sqrt{n}
\end{aligned}$$

Giả thiết rằng $n \neq 2^\alpha$ và $D(k) < k\sqrt{k}$ với mọi $3 \leqslant k < n$
Ta sẽ chứng minh $D(n) < n\sqrt{n}$.Ta có thể xét $n = mp$, ở đây p là số nguyên tố lẻ. Chú ý rằng $p \geqslant 3, 1 + p < p\sqrt{p}$ (thật vậy, với $p \geqslant 4, 1 + \frac{1}{p} < 2 < \sqrt{p}$; với $p = 3, 1 + 3 < 3\sqrt{3}$).
Vì thế, nếu $m = 1$, thì $D(p) = 1 + p < p\sqrt{p}$.
Tương tự, nếu $m = 2$, thì $D(n) = 1 + 2 + p + 2p = 3 + 3p < 2p\sqrt{2p} = n\sqrt{n}$, nếu $m \geqslant 3$, thì theo giả thiết quy nạp $D(m) < m\sqrt{m}$. Như vậy mỗi ước số của n có dạng d hoặc dp, ở đây d là ước số của m, nên

$$\begin{aligned}
D(n) &= D(m) + pD(m) = D(m)(1 + p) \\
&< m\sqrt{m}.p\sqrt{p} = n\sqrt{n}.
\end{aligned}$$

□

3 Dãy số

3.1 Dãy số tự nhiên

Bài toán 20. Cho dãy số chia thành từng nhóm như sau: $(1),(2,3),(4,5,6),(7,8,9,10),(11,12,13,14,15),\dots$ Tính tổng $S_1 + S_3 + S_5 + \cdots + S_{2n-1}$, ở đây S_k là tổng những số của nhóm thứ k.

Lời giải. Số đầu tiên của nhóm thứ k bằng

$$(1+2+\cdots+(k-1))+1=\frac{k(k-1)}{2}+1.$$

Còn tổng của k số ở nhóm thứ k là

$$S_k=\frac{k\left(\frac{k(k-1)}{2}+1+\frac{(k+1)k}{2}\right)}{2}=\frac{k^3+k}{2}.$$

Bằng quy nạp toán học theo n, ta chứng minh rằng

$$S_1+S_3+\cdots+S_{2n-1}=n^4.(*)$$

Với $n=1$, ta có $S_1=1=1^4$.
Giả sử (*) đúng với $n=k\geqslant 1$ tức là:

$$S_1+S_3+\cdots+S_{2k-1}=k^4$$

Ta chứng minh (*) đúng với $n=k+1$.
Thật vậy theo giả thiết quy nạp toán học ta có:

$$\begin{aligned}
S_1+S_2+\cdots+S_{2(k+1)-1}&=\left(S_1+S_2+\cdots+S_{(2k-1)}\right)+S_{2k+1}\\
&=k^4+\frac{(2k+1)^3+(2k+1)}{2}\\
&=k^4+(2k+1)(2k^2+2k+1)\\
&=k^4+4k^3+6k^2+4k+1=(k+1)^4
\end{aligned}$$

□

3.2 Dãy trội hơn

Nội dung

Cho hai dãy

$$a_1,a_2,a_3,\dots$$
$$b_1,b_2,b_3,\dots$$

Ta gọi dãy $a_1, a_2, a_3, \ldots$ trội hơn dãy $b_1, b_2, b_3, \ldots$ nếu chúng thoả mãn bất đẳng thức:

$$b_n \leqslant a_n, \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

Trong toán học thường dùng loại bất đẳng thức này, đặc biệt các bài toán về đánh giá một quá trình, tìm giới hạn, ...

Bài toán 21. Chứng minh bất đẳng thức

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}, \quad (n = 2, 3, \ldots)(**)$$

Lời giải. Với $n = 2$ ta có bất đẳng thức (**) trở thành:
$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} > \sqrt{2}$ Vậy bất đẳng thức (**) đúng với $n = 2$
Giả sử (**) đúng với $n = k \geqslant 2$ tức là:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{k}, \quad (k = 2, 3, \ldots)$$

Ta cần chứng minh (**) đúng với $n = k + 1$ tức là:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k+1}$$

Thật vậy theo giả thiết quy nạp toán học ta có:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}}(1)$$

Mặt khác

$$\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} = \frac{\sqrt{k^2+k}+1}{\sqrt{k+1}} > \frac{\sqrt{k^2}+1}{\sqrt{k+1}} = \sqrt{k+1}(2)$$

Từ (1) (2) suy ra

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k+1}$$

Vậy theo nguyên lí quy nạp toán học ta chứng minh được bất đẳng thức

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}, \quad (n = 2, 3, \ldots)$$

□

3.3 Bất đẳng thức

Bài toán 22. (Bất đẳng thức Cauchy-Bunyakovski). Chứng minh rằng

$$\left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2\right)\left(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2\right) \geqslant (x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n)^2$$

với $x_1, x_2, \ldots, y_1, y_2, \ldots$ là những số thực và $n = 1, 2, 3, \ldots$ (***)

Lời giải. Với $n = 1$, (***) hiển nhiên.
Với $n = 2$, (***) trở thành:

$$\begin{aligned} & \left(x_1^2 + x_2^2\right)\left(y_1^2 + y_2^2\right) \geqslant (x_1y_1 + x_2y_2)^2 \\ \iff & x_1^2y_1^2 + x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2 + x_2^2y_2^2 \geqslant x_1^2y_1^2 + 2x_1y_1x_2y_2 + x_2^2y_2^2 \\ \iff & x_1^2y_2^2 - 2x_1y_1x_2y_2 + x_2^2y_1^2 \geqslant 0 \\ \iff & (x_1y_2 - x_2y_1)^2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

(luôn đúng với mọi x, y).
Từ đây suy ra bất đẳng thức (***) đúng với $n = 2$.
Giả sử bất dẳng thức đúng với $n = k$, tức là:

$$\left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_k^2\right)\left(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_k^2\right) \geqslant (x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ky_k)^2$$

Ta cần chứng minh cũng đúng với $n = k + 1$, tức là

$$\left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{k+1}^2\right)\left(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_{k+1}^2\right) \geqslant (x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ky_k + x_{k+1}y_{k+1})^2$$

Thật vậy áp dụng giả thiết quy nạp ta có:

$$\begin{aligned} & \left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{k+1}^2\right)\left(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_{k+1}^2\right) \\ & \geqslant \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_k^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_k^2} + x_{k+1}y_{k+1}\right)^2 \\ & \geqslant (x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ky_k + x_{k+1}y_{k+1})^2 \end{aligned}$$

Vậy theo nguyên lí quy nạp toán học ta đã chứng minh được bất đẳng thức

$$\left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2\right)\left(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2\right) \geqslant (x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n)^2$$

với $x_1, x_2, \ldots, y_1, y_2, \ldots$ là những số thực và $n = 1, 2, 3, \ldots$ □

Bài toán 23 (Định lý: Bất đẳng thức Jensen). Cho $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$. Lúc đó f là lồi nếu và chỉ nếu:

$$f\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f(x_i), m \in \mathbb{N}, x_i \in \mathbb{R}^n \quad (\lambda_i \geqslant 0, \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1)$$

Lời giải. ($\Rightarrow$) Rõ ràng định lý đúng với $m \leqslant 2$. Giả sử định lý đúng với $m = k \geqslant 2$. Với các điểm $x_1, .., x_{k+1} \in \mathbb{R}^n$ và $\lambda_1, ..., \lambda_{k+1} \geqslant 0$ sao cho $\sum\limits_{i=1}^{k+1} \lambda_i = 1$. Nếu $\lambda_{k+1} = 1$ thì $\lambda_i = 0, i = 1, .., k$. Do đó bất đẳng thức trên đúng một cách *tầm thường*. Nếu không thì

ta thấy rằng $\sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{k+1}} = 1$.
Khi đó, ta có:

$$\begin{aligned}
f\left(\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i x_i\right) &= f\left[(1-\lambda_{k+1}).\frac{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i}{1-\lambda_{k+1}} + \lambda_{k+1}x_{k+1}\right] \\
&\leqslant (1-\lambda_{k+1}).f\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{k+1}} x_i\right) + \lambda_{k+1} f(x_{k+1}) \\
&\leqslant (1-\lambda_{k+1}).\sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{k+1}} f(x_i) + \lambda_{k+1} f(x_{k+1}) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f(x_i)
\end{aligned}$$

Vậy khẳng định đúng với $m = k+1$
($\Leftarrow$) Lấy $n = 2, \lambda_1 = \lambda; \lambda_2 = 1-\lambda$. Theo định nghĩa hàm lồi, ta có điều phải chứng minh. □

Bài toán 24. Cho $X = (x_1, \ldots, x_n)$ là một dãy gồm $n \geqslant 4$ số thực không âm có tổng bằng 1.

a) Chứng minh rằng

$$x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_nx_1 \leqslant \frac{1}{4}.$$

b) Chứng minh rằng tồn tại một hoán vị $Y = (y_1, \ldots, y_n)$ của X sao cho

$$y_1y_2 + y_2y_3 + \cdots + y_ny_1 \leqslant \frac{1}{4}.$$

Lời giải. a) Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức sau

$$4(x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_nx_1) \leqslant (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 \quad (*)$$

đúng với mọi $x_i \geqslant 0$ và $n \geqslant 4$ bằng quy nạp theo n. Từ đó áp dụng vào trường hợp đặc biệt $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ ta thu được kết quả cần chứng minh. Nếu $n = 4$, bất đẳng thức (*) tương đương với bất đẳng thức hiển nhiên sau

$$(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)^2 \geqslant 0$$

Bây giờ giả sử rằng bất đẳng thức (*) đúng với $n \geqslant 4$. Ta cần chứng minh

$$4(x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{n+1}x_1) \leqslant (x_1 + x_2 + \cdots + x_{n+1})^2 \quad (**)$$

Vì các chỉ số xuất hiện trong cả hai vế bất đẳng thức (**) tuân theo quy luật xích $1 \to 2 \to \cdots \to n+1 \to 1$, nên không mất tính tổng quát ta có thể giả sử rằng x_{n+1} là số nhỏ nhất. Áp dụng giả thiết quy nạp cho n số $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n + x_{n+1}$ ta có

$$\begin{aligned}
&(x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + (x_n + x_{n+1}))^2 \\
&\geqslant 4\left(x_1x_2 + \cdots + x_{n-1}\left(x_n + x_{n+1}\right) + \left(x_n + x_{n+1}\right)x_1\right) \\
&\geqslant 4\left(x_1x_2 + \cdots + x_{n-1}x_n + x_nx_{n+1} + x_{n+1}x_1\right) + 4x_{n-1}x_{n+1} + 4x_n\left(x_1 - x_{n+1}\right) \\
&\geqslant 4\left(x_1x_2 + \cdots + x_{n-1}x_n + x_nx_{n+1} + x_{n+1}x_1\right).
\end{aligned}$$

Đây chính là bất đẳng thức (**) ta cần chứng minh.
b) Với mỗi hoán vị Y của X ta đặt

$$S_Y = y_1y_2 + y_2y_3 + \cdots + y_ny_1$$

Ta ký hiệu $S = \sum_Y S_Y$ trong đó Y chạy trên tập tất cả $n!$ hoán vị của X. Với mỗi i, j cố định, $i \neq j$ số lượng những hoán vị của X thoả mãn x_i là phần tử đứng ngay liền trước (theo vòng lặp) phần tử x_j là $n(n-2)$!. Do đó

$$\begin{aligned}
S &= n(n-2)! \sum_{i,j=1, i\neq j}^{n} x_ix_j = n(n-2)!\left(\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) \\
&\leqslant n(n-2)!\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = (n-1)!
\end{aligned}$$

Điều này kéo theo số nhỏ nhất trong các S_Y sẽ không vượt quá

$$\frac{S}{n!} \leqslant \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$$

□

3.4 Số e

Nội dung

Một hằng số toán học rất quan trọng sau số π là số e. Số e được định nghĩa như là giới hạn của dãy

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, n = 1, 2, \ldots$$

hoặc là

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Bài toán 25. Chứng minh rằng những số hạng của dãy $e_1 = 2, e_n = 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}$ với $(n = 2, 3, ...)$ thoả mãn

$$e_n < 3 - \frac{1}{2^{n-1}}, (n = 3, 4, \ldots)(4*)$$

Lời giải. Với $n = 3$ ta có $e_3 < 2{,}67 < 3 - \frac{1}{2^{3-1}} = 2{,}75$
Giả sử (4*) đúng với $n = k \geqslant 3$, tức là

$$e_k < 3 - \frac{1}{2^{k-1}}, (n = 3,4,\ldots)$$

Ta cần chứng minh (4*) đúng với $n = k + 1$, tức là:

$$e_{k+1} < 3 - \frac{1}{2^k}$$

Ta sử dụng bất đẳng thức hiển nhiên $(k+1)! > 2^k$ với $k > 1$ và giả thiết quy nạp ta nhận được

$$\begin{aligned} e_{k+1} &= e_k + \frac{1}{(k+1)!} < \left(3 - \frac{1}{2^{k-1}}\right) + \frac{1}{(k+1)!} \\ &< 3 - \frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{2^n} = 3 - \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

Vậy theo nguyên lí quy nạp toán học ta đã chứng minh được những số hạng của dãy $e_1 = 2, e_n = 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}$ với $(n = 2,3,...)$ thoả mãn

$$e_n < 3 - \frac{1}{2^{n-1}}, (n = 3,4,\ldots)$$

□

3.5 Dãy số Fibonacci

Nội dung

Một dãy số $u_1, u_2, \ldots$ được định nghĩa bằng công thức

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n, \quad (n = 1,2,\ldots) \quad (5^*)$$

và

$$u_1 = 1, u_2 = 1$$

Những số $u_1, u_2, u_3, \ldots$ gọi là số Fibonacci. Dãy số này có rất nhiều ứng dụng trong bài toán thực tế. Theo đẳng thức (5*) mọi số kể từ số thứ ba đều là tổng của hai số trước đó. Những số đầu tiên là 1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89, 144,233,377.

Bài toán 26. Tổng của n số đầu tiên bằng số thứ $n + 2$ trừ đi 1 , hoặc là

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n = u_{n+2} - 1 \quad (n > 1)(6*)$$

Lời giải. Với $n = 2$ đẳng thức (6*) đúng vì

$$u_1 + u_2 = 1 + 1 = 3 - 1 = u_4 - 1.$$

Giả sử (6*) đúng với $n = k > 1$, tức là:

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_k = u_{k+2} - 1 \quad (k > 1)$$

Ta cần chứng minh (6*) đúng với $n = k + 1$ tức là:

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_{k+1} = u_{k+3} - 1$$

Từ giả thiết quy nạp và công thức (5*) ta có:

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 + \cdots + u_{k+1} &= (u_1 + u_2 + \cdots + u_k) + u_{k+1} \\ &= (u_{k+2} - 1) + u_{k+1} \\ &= u_{k+1} + u_{k+2} - 1 = u_{k+3} - 1 \end{aligned}$$

Vậy theo nguyên lý quy nạp toán học đẳng thức đúng với mọi $n \geqslant 2$. □

4 Hình học

Nội dung

Quy nạp toán học là một phương pháp chứng minh hữu ích, đặc biệt trong các bài toán hình học có tính chất được phát biểu cho mọi số nguyên dương n. Phương pháp này bao gồm hai bước chính:

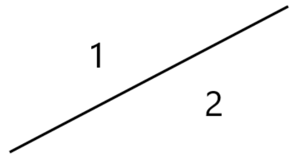
- **Bước cơ sở:** Chứng minh tính chất đúng với $n = 1$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử tính chất đúng với $n = k$ (giả thuyết quy nạp), sau đó chứng minh tính chất cũng đúng với $n = k + 1$.

Khi hai bước trên được hoàn thành, theo nguyên lý quy nạp toán học, ta kết luận tính chất đúng với mọi $n \geq 1$. Phương pháp này đặc biệt hữu ích khi xử lý các tính chất hình học như số cạnh, số đỉnh, hoặc diện tích của các hình đa giác được xây dựng qua các bước lặp.

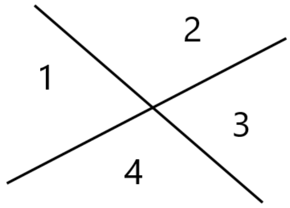
Bài toán 27. Dự đoán và quy nạp:
(i) n đường thẳng chia mặt phẳng thành nhiều nhất bao nhiêu miền.
(ii) n đường tròn chia mặt phẳng thành nhiều nhất bao nhiêu miền.

Lời giải. Nhận xét: Nếu số giao điểm của các đường thẳng càng nhiều thì số miền được chia ra càng nhiều. Do đó, để n đường thẳng chia mặt phẳng thành nhiều miền nhất thì trong n đường thẳng này không có bất kì cặp đường thẳng nào song song nhau và cũng không có 3 đường thẳng nào đồng quy với nhau.
Dự đoán:

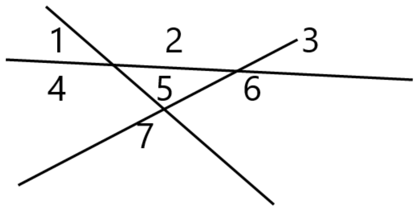
- $n = 1$: 1 đường thẳng chia mặt phẳng thành 2 miền.



- $n = 2$: 2 đường thẳng chia mặt phẳng thành 4 miền.



- $n = 3$: 3 đường thẳng chia mặt phẳng thành 7 miền.



$\vdots$

- $n = k$: k đường thẳng chia mặt phẳng thành S_k miền.
- $n = k+1$: $k+1$ đường thẳng chia mặt phẳng thành S_{k+1} miền.

Ta dự đoán: $S_{k+1} = S_k + k + 1$.

$$\begin{aligned} S_1 &= 2 \\ S_2 &= S_1 + 2 \\ S_3 &= S_2 + 3 \\ &\vdots \\ S_k &= S_{k-1} + k \end{aligned}$$

Cộng vế theo vế ta được:

$$\begin{aligned} & S_1 + S_2 + \cdots + S_k = 2 + S_1 + S_2 + \cdots + S_{k-1} + 2 + 3 + 4 + \cdots + k \\ \Longleftrightarrow \quad & S_k = 1 + (1 + 2 + 3 + \cdots + k) \\ \Longleftrightarrow \quad & S_k = 1 + \frac{k(k+1)}{2} = \frac{k^2 + k + 2}{2} \end{aligned}$$

Do đó: Dự đoán n đường thẳng chia mặt phẳng thành nhiều nhất: $S_n = \dfrac{n^2 + n + 2}{2}$ miền.

Chứng minh: n đường thẳng chia mặt phẳng thành nhiều nhất $\dfrac{n^2 + n + 2}{2}$ miền.

- Với $n=1$: 1 đường thẳng chia mặt phẳng thành nhiều nhất $\dfrac{1^2+1+2}{2}=2$ miền (đúng).
- Giả sử mệnh đề đúng với $n=k$, tức là: k đường thẳng chia mặt phẳng thành nhiều nhất: $\dfrac{k^2+k+2}{2}$ miền.
- Ta sẽ chứng minh mệnh đề đúng với $n=k+1$, tức $(k+1)$ đường thẳng chia mặt phẳng thành nhiều nhất $\dfrac{(k+1)^2+k+1+2}{2}$ miền.

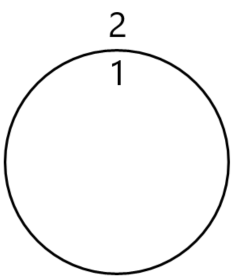
Để $k+1$ đường thẳng này chia mặt phẳng thành nhiều miền nhất thì trong $k+1$ đường thẳng này không có 2 đường thẳng nào song song nhau, không có 3 đường thẳng nào đồng quy.
Khi đó: k đường thẳng đầu chia mặt phẳng thành $\dfrac{k^2+k+2}{2}$ miền.
Đường thẳng thứ $k+1$ cắt k đường thẳng ban đầu tại k điểm, k điểm này sẽ chia đường thẳng thứ $k+1$ thành $k+1$ phần và sẽ làm tăng số miền trước đó thêm $k+1$ miền.
Do đó, $k+1$ đường thẳng sẽ chia mặt phẳng thành nhiều nhất

$$\frac{k^2+k+2}{2}+k+1=\frac{k(k+1)+2+2(k+1)}{2}=\frac{(k+1)(k+2)+2}{2}=\frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2}\ (\text{miền}$$

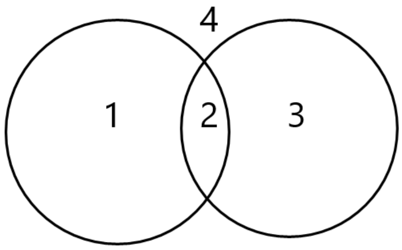
Suy ra mệnh đề đúng với $n=k+1$.
Vậy theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề đúng với n nguyên dương. Hay n đường thẳng chia mặt phẳng thành nhiều nhất $\dfrac{n^2+n+2}{2}$ miền.

(ii) Nhận xét: Nếu số giao điểm của các đường tròn càng nhiều thì số miền mà các đường tròn đó chia một mặt phẳng càng nhiều. Do đó, để n đường tròn chia mặt phẳng thành nhiều miền nhất thì trong n đường tròn đó, mỗi cặp đường tròn bất kì đều cắt nhau tại 2 điểm và không có 3 đường tròn nào có điểm chung.
Dự đoán:

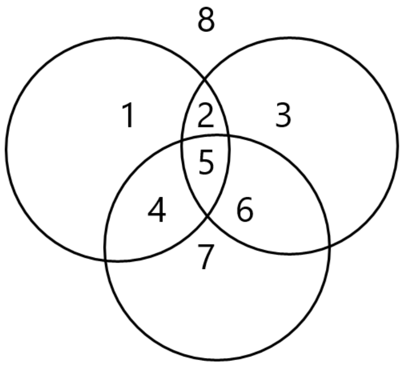
- $n=1$: 1 đường tròn chia mặt phẳng thành 2 miền.



- $n=2$: 2 đường tròn chia mặt phẳng thành 4 miền.



- $n = 3$: 3 đường tròn chia mặt phẳng thành 8 miền.



$\vdots$

- $n = k$: k đường tròn chia mặt phẳng thành S_k miền.
- $n = k+1$: $k+1$ đường tròn chia mặt phẳng thành S_{k+1} miền.

Dự đoán: $S_{k+1} = S_k + 2k$.

$$\begin{aligned} &S_1 = 2 \\ &S_2 = S_1 + 2.1 \\ &S_3 = S_2 + 2.2 \\ &\quad\vdots \\ &S_k = S_{k-1} + 2(k-1). \end{aligned}$$

Cộng vế theo vế, ta được:

$$\begin{aligned} S_1 + S_1 + \cdots + S_k &= 2 + S_1 + S_2 + S_3 + \cdots + S_{k-1} + 2(1 + 2 + \cdots + k - 1) \\ \Longleftrightarrow \qquad S_k &= 2 + 2(11 + 2 + \cdots + k - 1) \\ \Longleftrightarrow \qquad S_k &= 2 + 2\frac{(k-1+1)(k-1)}{2} \\ \Longleftrightarrow \qquad S_k &= 2 + k(k-1) \\ \Longleftrightarrow \qquad S_k &= k^2 - k + 2. \end{aligned}$$

Do đó, dự đoán: n đường tròn sẽ chia mặt phẳng thành nhiều nhất: $S_n = n^2 + n + 2$ miền.

Chứng minh: n đường tròn chia mặt phẳng thành nhiều nhất $(n^2 - n + 2)$ miền với n nguyên dương.

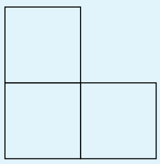
- Với $n = 1$: 1 đường tròn chia mặt phẳng thành nhiều nhất $1^2 - 1 + 2 = 2$ miền (đúng).
- Giả sự mệnh đề đúng với $n = k$, tức là k đường tròn chia mặt phẳng thành nhiều nhất $k^2 - k + 2$ miền.
- Ta chứng minh mệnh đề đúng với $n = k + 1$, tức $k + 1$ đường tròn chia mặt phẳng thành nhiều nhất $(k+1)^2 - (k+1) + 2$ miền.

Để $(k+1)$ đường tròn này chia mặt phẳng thành nhiều miền nhất thì bất kì 2 đường tròn nào trong $k + 1$ đường tròn này đều cắt nhau tại 2 điểm và không có 3 đường tròn nào có điểm chung.
Khi đó: k đường tròn đầu chia mặt phẳng thành $k^2 - k + 2$ miền.
Đường trong thứ $k + 1$ cắt k đường tròn đầu tại $2k$ điểm, $2k$ điểm này chia đường tròn thứ $k + 1$ thành $2k$ phần và sẽ làm tăng số miền trước đó thêm $2k$ miền.
Do đó, $k + 1$ đường tròn sẽ chia mặt phẳng thành nhiều nhất:

$$k^2 - k + 2 + 2k = k^2 + k + 2 = (k+1)^2 - (k+1) + 2 \text{ miền.}$$

Suy ra mệnh đề đúng với $n = k + 1$.
Vậy theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề đúng với n nguyên dương. Hay n đường tròn chia mặt phẳng thành nhiều nhất $n^2 - n + 2$ miền. □

Bài toán 28. a) Chứng minh rằng với mọi bàn cờ kích thước $2^n \times 2^n$ bỏ đi 1 ô bất kì luôn phủ được bằng các triminô có dạng



b) Tìm tất cả giá trị N sao cho bàn cờ $N \times N$ bỏ đi một ô bất kì có thể phủ được bằng các quân triminô hình chữ L.

Lời giải. a) Bàn cờ $2^n \times 2^n$ bị bỏ đi 1 ô bất kì có thể được phủ bằng các quân triminô hình chữ L.
Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp.

- Với $n = 1$: Bàn cờ 2×2 bỏ đi 1 ô bất kì có thể phủ được bằng 1 quân triminô hình chữ L nên mệnh đề đúng với $n = 1$.
- Giả sử mệnh đề đúng với $n = k, k \in \mathbb{N}^*$, tức là: Bàn cờ $2^k \times 2^k$ bỏ đi 1 ô bất kì có thể phủ được bằng các quân triminô hình chữ L.
- Ta sẽ chứng minh mệnh đề đúng với $n = k + 1$, nghĩa là:

  Bàn cờ $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ bỏ đi 1 ô bất kì có thể phủ được bằng các quân triminô hình chữ L. Thật vậy, ta chia bàn cờ $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ thành 4 bàn cờ nhỏ $2^k \times 2^k$, đánh số từ I, II, III, IV. Không mất tính tổng quát, giả sử ô bất kì bỏ đi nằm ở bàn cờ nhỏ

I, khi đó theo giả thiết quy nạp, phần còn lại của bàn cờ nhỏ I có thể được phủ bằng các quân triminô hình chữ L. Với 3 bàn cờ nhỏ II,III,IV còn lại, ở mỗi bàn, cắt đi 1 ô 1×1 ở vị trí tâm của bàn cờ lớn ban đầu. Khi đó, 3 ô cắt đi này được phủ bởi 1 quân triminô hình chữ L. Và ở các phần còn lại của mỗi bàn cờ nhỏ ta có thể phủ bằng các quân triminô hình chữ L theo giả thiết quy nạp.
Do đó, bàn cờ $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ bỏ đi 1 ô bất kì có thể phủ được bằng các quân triminô hình chữ L.
Vậy theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề đúng với mọi số nguyên dương n. Hay bàn cờ $2^n \times 2^n$ bị bỏ đi 1 ô bất kì có thể phủ được bằng các quân triminô hình chữ L.

b) Một quân triminô có 3 ô, nên nếu sau khi bỏ đi một ô thì các ô còn lại có thể phủ được bằng các triminô thì số ô còn lại phải chia hết cho 3. Do đó, tổng số ô bàn đầu của bàn cờ là N^2 chia 3 dư 1 nên N chia 3 dư 1 hoặc N chia 3 dư 2. Với $N = 2^n$, $n \in \mathbb{Z}^+$, do câu a, ta có thể phủ được bằng các quân triminô.
Ta chia bài toán thành các bài toán nhỏ.

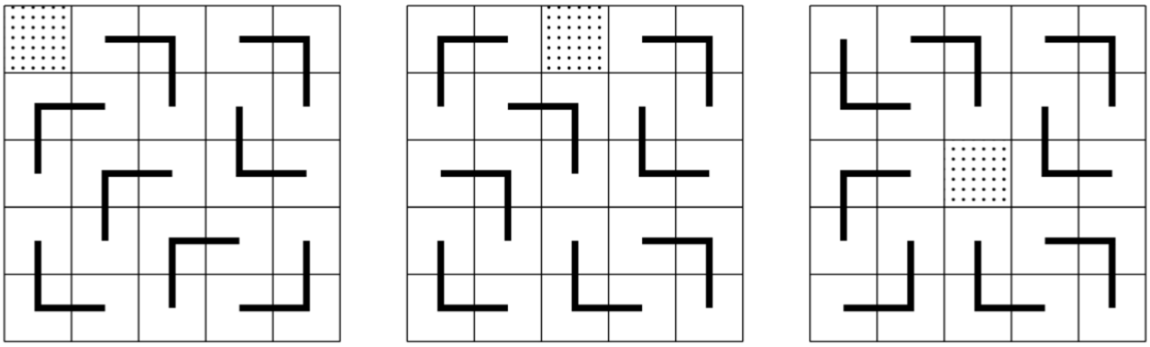
Bài toán 1. Với bàn cờ 5×5, bỏ 1 ô ở vị trí nào trên bàn cờ thì các ô còn lại của bàn cờ có thể phủ được bằng các quân triminô?
Trước tiên, ta đánh số các ô trên bàn cờ như sau:

7	-4	7	-4	7
-4	-4	-4	-4	-4
7	-4	7	-4	7
-4	-4	-4	-4	-4
7	-4	7	-4	7

Từ bảng trên, ta thấy khi phủ 1 quân triminô lên bất kì vị trí nào trên bàn cở thì tổng 3 ô trên quân triminô đó đều là 1 số âm. Do đó, nếu ta có thể phủ bàn cờ còn lại (sau khi bỏ 1 ô) bằng các quân triminô thì tổng các ô còn lại phải là 1 số âm. Nhưng, nếu vị trí ô bỏ đi được đánh số là -4 thì tổng các ô còn lại là:

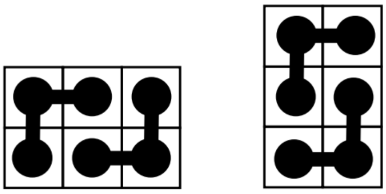
$$7.9 + (-4).15 = 3 > 0.$$

Do đó, không thể phủ được bằng các quân triminô.
Ta sẽ chứng minh: Nếu ô được bỏ đi ở bát kì vị trí nào mang số 7 thì phần bàn cờ còn lại có thể phủ kín bằng các quân triminô.
Do tính đối xứng của các vị trí, nên ta chỉ cần xét 3 trường hợp.
Do đó, nếu bỏ đi 1 ô bất kì 1 vị trí nào ở các ô mang số 7, thì phần bàn cờ còn lại có thể được phủ kín bằng các quân triminô hình chữ L.

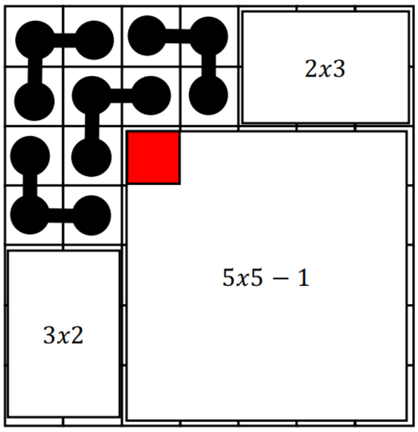


Bài toán 2. Nếu $N \equiv 1 \pmod 3$, $N > 1$ thì bàn cờ $N \times N$ bỏ đi 1 ô bất kì có thể phủ kín bằng các quân triminô.

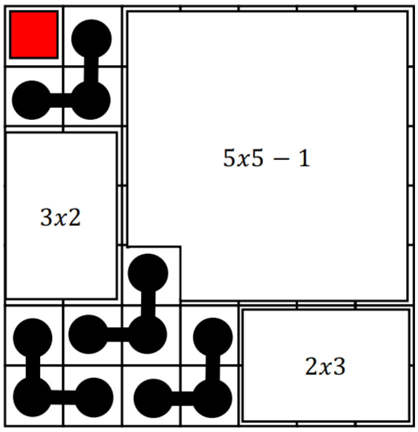
- Nhận xét: Với bạn cờ 2×3 hay 3×2 thì ta có thể phủ được bằng 2 quân triminô.



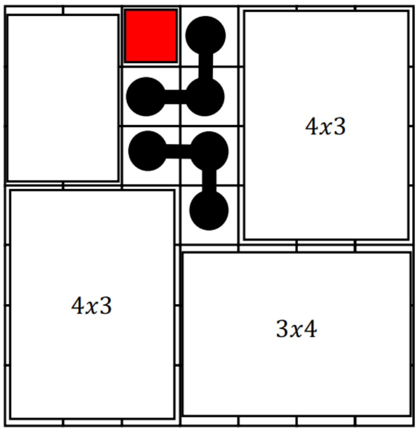
- Với $N = 4$: Mệnh đề đúng. Bàn cờ 4×4 có thể phủ được bằng các quân triminô theo câu 9a.
- Với $N = 7$: Một lần nữa ta sẽ chứng minh mệnh đề đúng với $N = 7$ qua tính chất đối xứng và qua kết quả của bài toán 1, nên ta chỉ xét các trường hợp sau. Đánh số thứ tự theo hàng $i = \overline{1,7}$; đánh số thứ tự theo cột $j = \overline{1,7}$. Ô bỏ đi ở vị trí (i, j).
- Trường hợp: Ô bỏ đi ở vị trí $(3, 3)$.



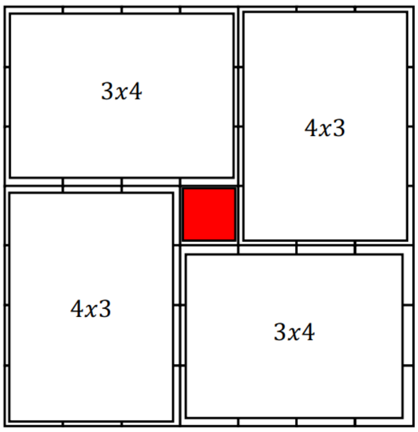
- Trường hợp: Ô bỏ đi ở vị trí $(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)$. Khi bỏ bất kì 1 ô ở 1 trong 4 vị trí trên thì 3 vị trí còn lại có thể được phủ bằng 1 quân triminô.

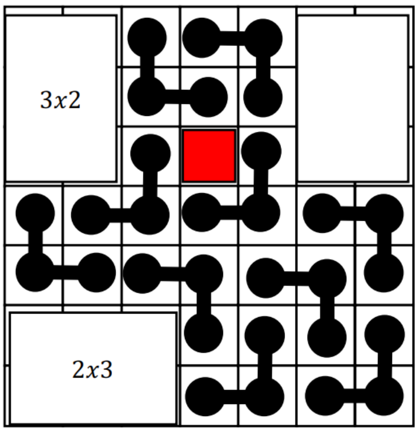


- Trường hợp: Các ô bỏ đi ở vị trí $(1,3),(1,4),(2,3),(2,4)$. Khi bỏ bất kì 1 ô ở 1 trong 4 vị trí trên thì 3 vị trí còn lại có thể được phủ bằng 1 quân triminô. Và các bảng 3×4 hay 4×3 là 2 bảng 2×3 hay 3×2 gộp lại nên ta có thể phủ bằng các quân triminô.

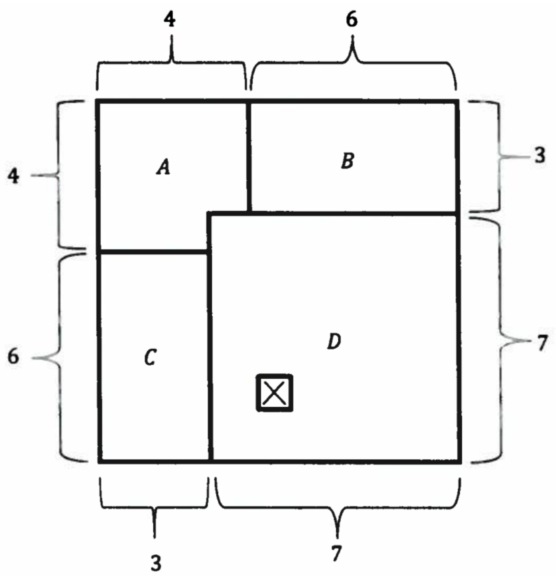


- Trường hợp: Ô bỏ đi ở vị trí $(4,4),(3,4)$.





Do đó: Bàn cờ 7×7 nếu bỏ bất kì 1 ô nào thì ta có thể phủ kín phần còn lại bằng các quân triminô. Nên mệnh đề đúng với $N = 7$.
Với $N = 10$:

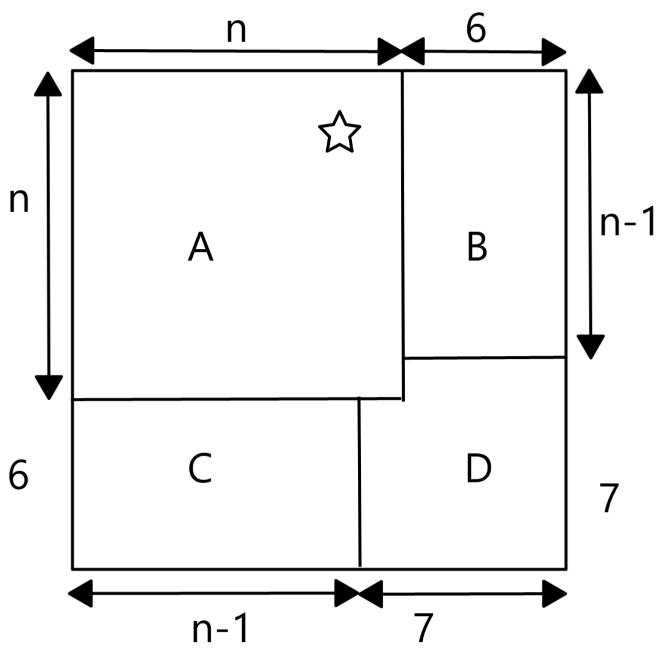


Ta chia bàn cờ thành 4 phần:

- A: Bảng 4×4 bỏ đi 1 ô (có thể phủ kín phần A bằng các quân triminô qua câu 9a).
- B: Bảng 3×6 là hợp của 3 bảng 3×2 nên cũng có thể phủ bằng các quân triminô.
- C: Bảng 7×7: khi bỏ 1 ô bất kì ở bảng này thì ta có thể phủ phần còn lại bằng các quân triminô.
- D: Bảng 6×3 là hợp của 3 bảng 2×3 nên có thể phủ bằng các quân triminô.

Do vị trí đối xứng nên ta có thể hoán đổi các vị trí bảng A, B, C, D sao cho khi bỏ 1 ô bất kì trong bàn cờ 10×10 thì ô bỏ đi thuộc vị trí phần C.
Do đó, ta có thể phủ phần còn lại bằng các quân triminô. Hay mệnh đề đúng với $N = 10$.

- Ta đã chứng minh được mệnh đề đúng với $N = 4; 7; 10$.
- Giả sử mệnh đề đúng với $N = k$, $k \geqslant 7$, hay với bàn cờ $k \times k$ bỏ đi 1 ô bất kì thì phần còn lại có thể phủ kín bằng các quân triminô.
- Ta sẽ chứng minh mệnh đề đúng với $N = k + 6$.

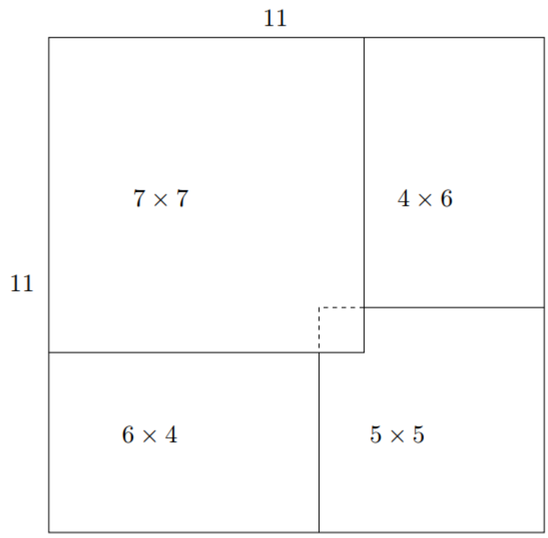


Ta chia bảng thành 4 phần.

- A: $k \times k$ khi bỏ 1 ô bất kì thì phần còn lại có thể phủ được bằng các quân triminô (theo giả thiết quy nạp).
- B: $(k-1) \times 6$ và D: $6 \times (k-1)$ ta thấy đây là bội của các bảng 2×3 hoặc 3×2 nên có thể phủ kín phần B và D bằng các quân triminô.
- C: Bảng 7×7 bỏ đi 1 ô có thể phỉ kín bảng D.
- Do tính chất đối xứng nên ta có thể thay đổi các vị trí bảng A, B, C, D sao cho khi bỏ 1 ô bất kì trong bàn cờ $(k+6) \times (k+6)$ ban đầu thì ô bỏ đi đó thuộc về phần A.

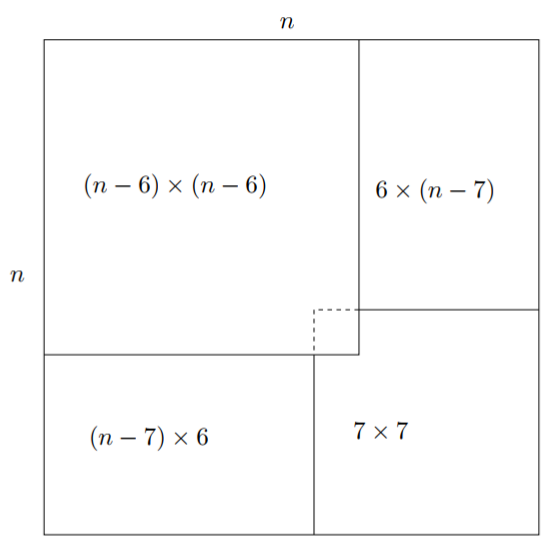
Do đó, ta có thể phủ phần còn lại bằng các quân triminô. Mệnh đề đúng với $N = k+6$. Vậy theo nguyên lý quy nạp, **Bài toán 2** được chứng minh xong.
Bài toán 3. Nếu N lẻ, $N > 5$ và $N \not\equiv 0 \pmod 3$ thì bàn cờ $N \times N$ bỏ đi 1 ô bất k2i có thể phủ kín được bằng các quân triminô.

- Với $N = 7$ thì mệnh đề đúng (đã chứng minh).
- Ta chứng minh với $N = 11$.



Ta cũng lý luận tương tự là chia thành 4 bảng A, B, C, D do tính chất đối xứng nên ta có thể thay đổi các vị trí A, B, C, D.

- Giả sử n là số lẻ, $n > 11$ và $n \not\equiv 0 \pmod 3$ và giả sử rằng mệnh đề đúng với mọi $N = k$ với k là số lẻ thỏa $5 < k < n$, $k \not\equiv 0 \pmod 3$, tức là mọi bàn cờ $k \times k$ bỏ đi 1 ô bất kì có thể phủ kín bằng các quân triminô hình L.
- Ta chứng minh mệnh đề đúng với $N = n$, tức là bàn cờ $n \times n$ bỏ 1 ô bất kì có thể phủ kín bằng các quân triminô. Ta chia bàn cờ $n \times n$ thành 4 phần nhỏ như hình.

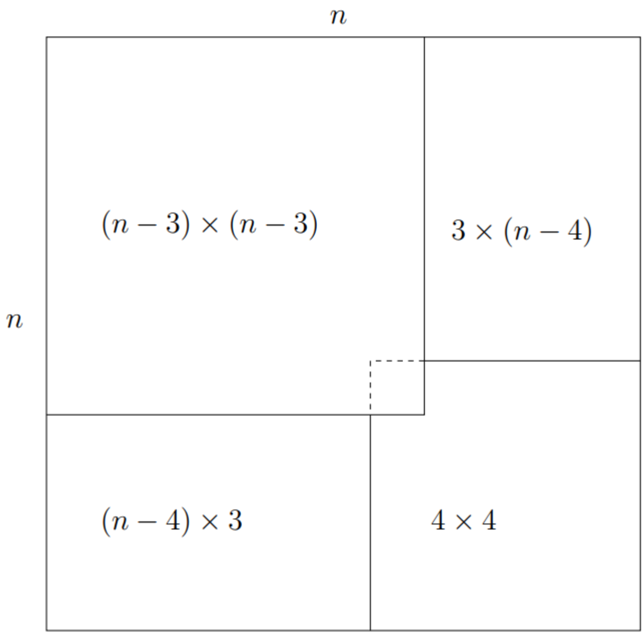


- A: Bàn cờ $(n-6) \times (n-6)$. Ta có: $n - 6 > 11 - 6 = 5; n - 6 < n$, n lẻ suy ra $n - 6$ cũng lẻ, $n \not\equiv 0 \pmod 3$ suy ra $(n-6) \not\equiv 0 \pmod 3$. Do đó, theo giả thiết quy nạp, bàn cờ nhỏ A khi bỏ 1 ô bất kì có thể phủ kín bằng các quân triminô.
- B,D: Bàn cờ $(n-7) \times 6$ và bàn cờ $6 \times (n-7)$. Đây là hợp của $(n-7)$ bàn cờ 2×3 hoặc 3×2 nên ta có thể phủ kín phần B, D bằng các quân triminô.
- C: Bàn cờ 7×7 bỏ đi 1 ô, bàn cờ C có thể phủ kín bằng các quân triminô (đã chứng minh).

Do tính chất đối xứng ta có thể thay đổi các vị trí A, B, C, D sao cho khi bỏ đi 1 ô bất kì trên bàn cờ lớn $n \times n$ ban đầu thì ô bỏ đi đó thuộc phần A.
Do đó, ta có thể phủ kín phần còn lại của bàn cờ $n \times n$ sau khi bỏ đi 1 ô bất kì bằng các quân triminô hình chữ L. Mệnh đề đúng với $N = n$.
Vậy theo nguyên lý quy nạp mạnh, mệnh đề đúng với mọi N lẻ, $N > 5$, $N \not\equiv 0 \pmod 3$.
Bài toán 3 được chứng minh xong.
Bài toán 4. Nếu N là số chẵn, $N > 1$ và $N \not\equiv 0 \pmod 3$ thì bàn cờ $N \times N$ bỏ đi 1 ô bất kì có thể được phủ kín bằng các quân triminô hình chữ L.

- Với $N = 2;4;8$: mệnh đề đúng (đã chứng minh ở câu 9a).
- Giả sử n là số chẵn, $n > 8$ và $n \not\equiv 0 \pmod 3$ và giả sử mọi bảng $k \times k$ bỏ đi 1 ô bất kì có thể phủ kín bằng các quân triminô hình chữ L với k là số chẵn, $k \not\equiv 0 \pmod 3$ và $8 < k < n$.
- Ta sẽ chứng minh mệnh đề đúng với $N = n$. Tức là bàn cờ $n \times n$ bỏ đi 1 ô bất kì có thể phủ kín bằng các quân triminô hình L.

Ta chia bàn cờ $n \times n$ thành các phần như hình vẽ:



- A: Bàn cờ $(n-3) \times (n-3)$. Ta có $n - 3 > 8 - 3 = 5$; $n \not\equiv 0 \pmod 3$ nên $n - 3 \not\equiv 0 \pmod 3$; n chẵn nên $(n-3)$ lẻ. Do đó, theo **Bài toán 3**, phần A khi bỏ 1 ô bất kì có thể phủ kín được bằng các quân triminô hình chữ L.
- B, D: là các bàn cờ nhỏ $(n-4) \times 3$ và $3 \times (n-4)$. Đây là $\dfrac{n-4}{2}$ khối 2×3 hoặc 3×2 nên ta có thể phủ phần B, D bằng các quân triminô hình chữ L.
- C: Bàn cờ 4×4 bỏ đi 1 ô. Theo câu 9a, phần C có thể phủ được bằng các quân triminô hình chữ L.

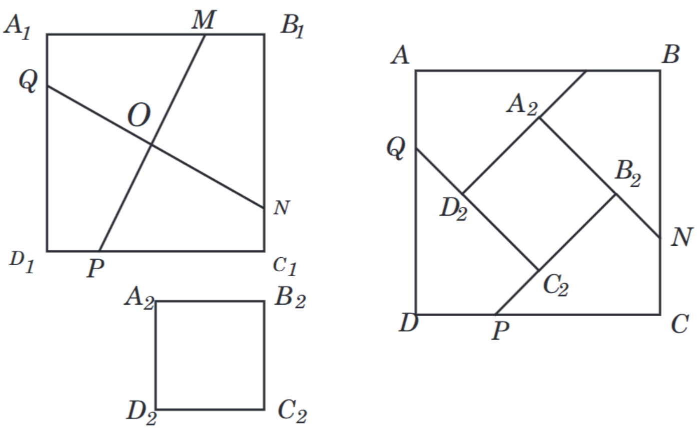
Do tính chất đối xứng nên ta có thể thay đổi các vị trí A, B, C, D sao cho khi bỏ 1 ô bất kì trong bàn cờ $n \times n$ ban đầu thì ô bỏ đi đó thuộc A.
Do đó, ta có thể phủ kín phần còn lại của bàn cờ $n \times n$ sau khi bỏ đi 1 ô bất kì bằng các quân triminô hình L. Mệnh đề đúng với $N = n$.
Theo nguyên lý quy nạp mạnh, mệnh đề đúng với N chẵn, $N > 1$ và $n \not\equiv 0 \pmod 3$.
Bài toán 4 được chứng minh xong. Tổng hợp các kết quả đã được chứng minh phía trên, để làm bàn cờ $N \times N$ bỏ đi 1 ô bất kì có thể phủ kín bằng các quân triminô hình chữ L thì N phải thỏa:

$$N \in \mathbb{Z}^+, N > 1, N \neq 5 \text{ và } N \not\equiv 0 \pmod 3.$$

□

Bài toán 29. Cho n hình vuông bất kì. Chứng minh rằng ta có thể cắt chúng ra thành một số phần để từ các phần đó ta có thể ghép lại thành một hình vuông mới.

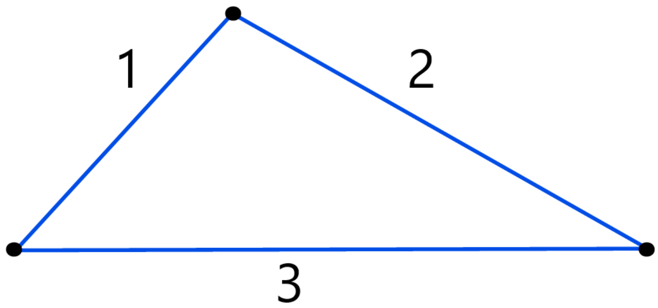
Lời giải. Khi $n = 1$, điều khẳng định là hiển nhiên.



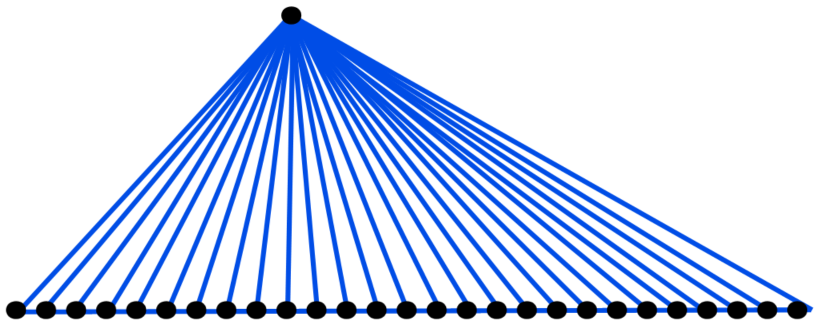
Ta chứng minh rằng khi $n = 2$, điều khẳng định đó cũng đúng. Gọi độ dài các cạnh của hai hình vuông $A_1B_1C_1D_1$ và $A_2B_2C_2D_2$ lần lượt là x_1, x_2. Giả sử $x_1 \geqslant x_2$. Trên các cạnh của hình $A_1B_1C_1D_1$ có độ dài x_1, ta đặt các đoạn $A_1M = B_1N = C_1P = D_1Q = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ và cắt hình vuông đó theo các đường MP và NQ. Gọi giao điểm của 2 đường thẳng này là O, ta dễ dàng chứng minh được chúng tạo với nhau 1 góc vuông. Khi đó, các đường này chia hình vuông thành 4 phần bằng nhau và những hình đó ghép vào với nhau tạo thành hình $A_2B_2C_2D_2$ như hình bên. Do đó, hình ta thu được sẽ là hình vuông vì các góc $\widehat{OMB_1}, \widehat{ONB_1}, \widehat{OQA_1}, \widehat{OPD_1}$ bù nhau, các góc A, B, C, D là vuông và $AB = BC = CD = DA$. Vì vậy hình ta thu được là hình vuông.
Giả sử mệnh đề đúng với n hình vuông. Ta chứng minh mệnh đề cũng đúng với $n+1$ hình. Thật vậy, giả sử ta có $n+1$ hình vuông $S_1, S_2, \ldots, S_n, S_{n+1}$. Khi đó, ta lấy ra hai hình vuông bất kì chẳng hạn như S_n, S_{n+1} như đã chứng minh ở trên ta có thể cắt 2 hình vuông và ghép lại thành hình vuông mới. Do đó, ta được hình vuông mới đặt là S'. Lúc này, ta có các hình vuông $S_1, S_2, \ldots, S_{n-1}, S'$ và theo giả thiết quy nạp thì n hình vuông này có thể được được cắt ra và ghép lại thành hình vuông mới. Vì vậy ta đã chứng minh mệnh đề đúng với $n+1$ hình vuông.
Vậy theo nguyên lý quy nạp với n hình vuông bất kì $(n \geqslant 1)$, ta có thể cắt chúng và ghép thành một hình vuông mới. □

Bài toán 30. Trong mặt phẳng cho $n \geqslant 3$ điểm, tất cả không nằm trên đường thẳng. Chứng minh rằng tất cả các đường thẳng nối hai điểm trong các điểm đã cho tạo ra số đường thẳng khác không nhỏ hơn n.

Lời giải. Với $n = 3$ điểm, mệnh đề hiển nhiên đúng: Ba điểm không nằm trên một đường thẳng nối từng đôi với nhau tạo ra ba đường thẳng khác nhau.



Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geqslant 3$ điểm. Ta chứng minh nó cũng đúng với $n = k + 1$ điểm. Ta có thể chứng minh rằng tồn tại ít nhất một đường thẳng chỉ chứa hai điểm. Ta kí hiệu đường thẳng đi qua hai điểm A_k và A_{k+1} là A_kA_{k+1}. Nếu các điểm $A_1, A_2, \ldots, A_k$ nằm trên một đường thẳng, thì số lượng các đường thẳng sẽ đúng là $k + 1$: Gồm n đường thẳng nối A_{k+1} với các điểm $A_1, A_2, \ldots, A_k$ và đường thẳng nối chung.



Nếu $A_1, A_2, \ldots, A_k$ không nằm trên một đường thẳng, thì theo giả thiết quy nạp có n đường thẳng khác nhau. Bây giờ ta thêm các đường thẳng nối A_{k+1} với các điểm $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Vì đường thẳng A_kA_{k+1} không chứa một điểm nào trong $A_1, A_2, \ldots A_{n-1}$, thì các đường thẳng này khác hoàn toàn với n đường thẳng tạo ra bởi $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Do đó, số đường thẳng tạo ra cũng không nhỏ hơn $k + 1$.
Vậy ta đã chứng minh hoàn tất bằng nguyên lý quy nạp. □

5 Tổ hợp, đẳng thức

5.1 Tổ hợp

Bài toán 31. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, số các tập con của tập $\{1, 2, \ldots, n\}$ là 2^n.

Lời giải. Với $n = 1$, ta thấy tập $\{1\}$ có hai tập con là $\varnothing$ và $\{1\}$. Giả sử khẳng định đúng với $n = k, (k \geqslant 1)$. Nghĩa là số các tập con của tập $\{1,2,\ldots,k\}$ là 2^k. Ta chứng minh số tập con của tập $\{1,2,\ldots,k+1\}$ là 2^{k+1}.
Ta chia số tập con của tập $\{1,2,\ldots,k+1\}$ ra thành hai nhóm. Nhóm một gồm các tập con chứa $k+1$ và nhóm hai gồm các tập con không chứa $k+1$. Số tập con của nhóm hai chính là số tập con của tập $\{1,2,\ldots,k\}$, bằng 2^k. Thêm $k+1$ vào mỗi tập con ở nhóm hai ta được các tập con ở nhóm một. Do đó, số tập con ở nhóm một bằng với số tập con ở nhóm hai. Vậy số tập con của tập $\{1,2,\ldots,k+1\}$ là $2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$. □

Đại số tổ hợp là một phần quan trọng trong chương trình Toán học trung học phổ thông (THPT), giúp học sinh hiểu và giải quyết các bài toán liên quan đến việc đếm, sắp xếp, và chọn lựa các đối tượng trong một tập hợp. Nội dung chủ yếu bao gồm:

- **Quy tắc đếm:** Học sinh được làm quen với các quy tắc cộng và nhân để tính số cách thực hiện các công việc độc lập hoặc liên tiếp.
- **Hoán vị, chỉnh hợp và tổ hợp:** Đây là các khái niệm cơ bản để giải các bài toán liên quan đến việc sắp xếp hoặc chọn các phần tử từ một tập hợp.
- **Nhị thức Newton:** Giới thiệu công thức khai triển nhị thức Newton và ứng dụng trong các bài toán tổ hợp.
- **Bài toán ứng dụng:** Kiến thức tổ hợp được áp dụng trong nhiều bài toán thực tế, như phân chia nhóm, xếp ghế, hoặc tính xác suất trong các tình huống cụ thể.

Phần kiến thức này không chỉ rèn luyện tư duy logic mà còn đặt nền tảng quan trọng cho các lĩnh vực liên quan như xác suất thống kê và lập trình thuật toán.
Sau đây tôi sẽ trình bày một số chứng minh về các công thức quen thuộc đó.
Ta quan tâm tới tập hợp gồm hữu hạn các phần tử, ví dụ như tập gồm n phần tử kí hiệu $X = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Khi xem xét các tập này ta quan tâm đến vị trí sắp xếp của các phần từ. Khi đó X là tập được sắp.
Một dãy n phần tử khác nhau của tập hợp X sắp xếp theo một thứ tự nhất định được gọi là *một hoán vị* của X.
Gọi P_n là số hoán vị của n phần tử. Ta có thể xem xét một số trượng hợp cụ thể sau

n	Tập X	Các hoán vị của X	Số hoán vị
0	$\varnothing$	$\varnothing$	$1 = 0!$
1	$\{a\}$	(a)	$1 = 1!$
2	$\{a_1, a_2\}$	$(a_1, a_2); (a_2, a_1)$	$2 = 2!$
3	$\{a_1, a_2, a_3\}$	$(a_1, a_2, a_3); (a_1, a_3, a_2);$ $(a_2, a_1, a_3); (a_2, a_3, a_1);$ $(a_3, a_1, a_2); (a_3, a_2, a_1);$	$6 = 3!$
...	...	...	...

Với phương pháp quy nạp toán học ta dự đoán và chứng minh.

Bài toán 32. Số lượng hoán vị của n phần tử có thể được tính bằng công thức

$$P_n = n!. \tag{VII .1}$$

Lời giải. Ta chứng minh công thức (VII .1) bằng phương pháp quy nạp toán học.

- Theo bảng trên công thức (VII .1) đúng với $n = 1$.
- Giả sử (VII .1) đúng với $n = k \geqslant 1$. Hoán vị của $k+1$ phần tử có thể lập như sau: cố định vị trí thứ nhất cho mỗi phần tử (nghĩa là có $k+1$ cách) rồi sắp k phần tử còn lại vào các vị trí tiếp theo (theo giả thiết có P_k cách). Do đó
$$P_{k+1} = (k+1)P_k = (k+1)k! = (k+1)!.$$

Như vậy công thức (VII .1) đúng với $n = k+1$. □

Một dãy m phần tử khác nhau ($m \leqslant n$) của tập hợp X sắp xếp theo một thứ tự xác định được gọi là **một chỉnh hợp chập** m **của** n phần tử trong X.
Kí hiệu A_n^m là số lượng các chỉnh hợp chập m của n phần tử. Ta xét một số ví dụ sau

m	Các chỉnh hợp của $X = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$	Số chỉnh hợp
1	$(a_1); (a_2); (a_3); (a_4);$	$4 = 4$
2	$(a_1, a_2); (a_2, a_1); (a_1, a_3); (a_3, a_1);$	$12 = 4.3$
	$(a_1, a_4); (a_4, a_1); (a_2, a_3); (a_3, a_2);$	
	$(a_2, a_4); (a_4, a_2); (a_3, a_4); (a_4, a_3);$	
3	$(a_1, a_2, a_3); (a_1, a_2, a_4); (a_2, a_1, a_4)$	$24 = 4.3.2$
	$(a_1, a_3, a_4); (a_2, a_3, a_4); (a_3, a_1, a_4)$	
...	...	...

Bài toán 33. Số lượng chỉnh hợp chập m của n phần tử được tính theo công thức sau:
$$A_n^m = n(n-1)\dots(n-m+1) \qquad \text{(VII .2)}$$

Lời giải. Ta sẽ chứng minh bằng nguyên lý quy nạp toán học.

- Với $m = 1$ ta có $A_n^1 = n$, suy ra công thức (VII .2) đúng với $m = 1$.
- Giả sử (VII .2) đúng với $m = k \geqslant 1$, nghĩa là
$$A_n^k = n(n-1)\dots(n-k+1)$$

Các chỉnh hợp chập $k+1$ nhận được từ những chỉnh hợp chập k bằng cách thêm vào cuối dãy một trong $n-k$ phần tử còn lại. Như vậy một chỉnh hợp chập k sẽ cho $n-k$ chỉnh hợp chập $k+1$. Do đó
$$A_n^{k+1} = (n-k)A_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)(n-k).$$

Suy ra (VII .2) đúng với $m = k+1$. □

Chú ý: Có thể viết công thức (VII .2) dưới dạng khác
$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Một tập con m phần tử khác nhau của tập $X(m \leqslant n)$ được gọi là tổ hợp chập m của n phần tử của X.
Gọi C_n^m (hoặc như các phần trước đã kí hiệu là C_n^m). Ta xét một số ví dụ sau

m	Các tổ hợp của $X = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$	Số tổ hợp
1	$(a_1); (a_2); (a_3); (a_4);$	4
2	$(a_1, a_2); (a_1, a_3); (a_1, a_4);$	6
	$(a_2, a_3); (a_2, a_4); (a_3, a_4);$	
3	$(a_1, a_2, a_3); (a_1, a_2, a_4);$	4
	$(a_1, a_3, a_4); (a_2, a_3, a_4);$	
4	$(a_1, a_2, a_3, a_4);$	1
...	...	...

Ta nhận thấy là chỉnh hợp chập m của n phần tử nhận được từ các tổ hợp chập m bằng cách hoán vị m phần tử này. Vì vậy ta có liên hệ sau

$$A_n^m = C_n^m \cdot P_m.$$

Từ đó suy ra

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Ta tiến hành chứng minh công thức này bằng quy nạp.

Bài toán 34. Số lượng tổ hợp chập m của n được tính theo công thức sau

$$C_n^m = \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{1.2\dots m}. \tag{VII .3}$$

Lời giải.

- Với $m = 1$ thì $C_n^1 = n$ ta thấy công thức đúng.
- Giả sử công thức đúng với $m = k$, tức là:

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1.2\dots k}.$$

- Ta chứng minh công thức đúng với $m = k+1$, nghĩa là:

$$C_n^{k+1} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)(n-k)}{1.2\dots k(k+!)}.$$

Để nhận tất cả tổ hợp $k+1$ phần tử trong n phần tử: đầu tiên người ta viết tất cả các tổ hợp chập k của n phần tử và thêm vào mỗi tổ hợp này một phần tử thứ $k+1$ bởi một trong $n-k$ phần tử còn lại. Như vậy ta nhận được tất cả tổ hợp chập $k+1$ của n phần tử, nhưng sẽ nhận được bội $k+1$ lần. Thật vậy, tổ hợp $a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}$ sẽ cùng nhận được theo cách; khi tổ hợp $a_2, a_3, \dots, a_k, a_{k+1}$ thêm vào phần tử a_1; cũng như khi tổ hợp $a_1, a_3, \dots, a_k, a_{k+1}$ thêm vào phần tử $a_2; \dots$; cuối cùng khi tổ hợp $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$ thêm vào a_{k+1}. Nghĩa là

$$C_n^{k+1} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)(n-k)}{1.2\dots k(k+1)}.$$

□

5.2 Đẳng thức

Đẳng thức là một trong những khái niệm cơ bản và quan trọng nhất trong toán học. Một đẳng thức khẳng định rằng hai biểu thức đại số hoặc số học có giá trị bằng nhau, đóng vai trò như một cầu nối giữa các mối quan hệ và quy luật toán học.

Bài toán 35. Chứng minh nhị thức Newton

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^i b^{n-i}, \tag{VII .4}$$

ở đây n là số nguyên dương.

Lời giải.

- Bước cơ sở: Dễ thấy (VII .4) đúng với $n=1$.
- Bước quy nạp: Giả sử đẳng thức (VII .4) đúng với n, ta sẽ chứng minh nó cũng đúng cho $n+1$. Thật vậy,

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= (a+b)^n(a+b) = \left[a^n + C_n^1 a^{n-1}b + \cdots + C_n^k a^{n-k}b^k + \cdots + b^n\right](a+b) \\ &= a^{n+1} + C_n^1 a^n b + \cdots + C_n^k a^{n+1-k} b^k + \cdots + ab^n + \\ &\quad + a^n b + C_n^1 a^{n-1} b^2 + \cdots + C_n^k a^{n-k} b^{k+1} + \cdots + b^{n+1}.\end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \left[1 + C_n^1\right] a^n b + \left[C_n^1 + C_n^2\right] a^{n-1} b^2 + \cdots \\ \cdots + \left[C_n^{k-1} + C_n^k\right] a^{n+1-k} b^k + \cdots + b^{n+1}\end{aligned}$$

Những hệ số trong công thức trên rút gọn theo công thức $n = c_s b^s + c_{s-1} b^{s-1} + \cdots + c_1 b + c_0$, $s \geqslant 0, n, b > 1, 0 < c_s \leqslant b-1$ và ta có

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} C_{n+1}^i a^{n+1-i} b^i.$$

Vậy đẳng thức (VII .4) đúng với $n+1$. □

Bài toán 36. Với $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là những số thực, chứng minh rằng

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 + 2\left(a_1a_2 + a_1a_3 + \cdots + a_{n-1}a_n\right) \tag{VII .5}$$

với mọi số tự nhiên $n \geqslant 2$.

Lời giải.

- Với $n=2$ công thức (VII .5) là hằng đẳng thức đáng nhớ.
- Giả sử công thức (VII .5) đúng với $n=k-1$, nghĩa là:

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1})^2 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{k-1}^2 + 2S$$

ở đây S là tổng tất cả các khả năng từng dôi của dãy $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$.

- Ta sẽ chứng minh

$$(a_1+a_2+\cdots+a_k)^2 = a_1^2+a_2^2+\cdots+a_k^2+2S_1$$

ta đặt $S_1 = S + (a_1+a_2+\ldots a_{k-1})a_k$. Thật vậy,

$$\begin{aligned}(a_1+a_2+\cdots+a_k)^2 &= [(a_1+a_2+\cdots+a_{k-1})+a_k]^2\\ &= (a_1+a_2+\cdots+a_{k-1})^2+2(a_1+\cdots+a_{k-1})a_k+a_k^2\\ &= \left(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{k-1}^2\right)+2S+2(a_1+\cdots+a_{k-1})a_k+a_k^2\\ &= \left(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{k-1}^2\right)+2S_1.\end{aligned}$$

□

Bài toán 37. Chứng minh đẳng thức với mọi số nguyên $n \geqslant 0$

$$\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha\ldots\cos 2^n\alpha = \frac{\sin 2^{n+1}\alpha}{2^{n+1}\sin\alpha}$$

Lời giải.

- Với $n=0$ đẳng thức đúng, vì $\cos\alpha = \dfrac{\sin 2\alpha}{2\sin\alpha}$.
- Giả sử đẳng thức đúng với $n=k$, tức là:

$$\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha\ldots\cos 2^k\alpha = \frac{\sin 2^{k+1}\alpha}{2^{k+1}\sin\alpha}$$

- Khi đó nó cũng đúng với $n=k+1$. Thật vậy,

$$\begin{aligned}\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha\ldots\cos 2^k\alpha\cos 2^{k+1}\alpha &= \frac{\sin 2^{k+1}\alpha\cos 2^{k+1}\alpha}{2^{k+1}\sin\alpha}\\ &= \frac{\sin 2^{k+2}\alpha}{2^{k+2}\sin\alpha}\end{aligned}$$

Vậy với mọi số nguyên $n \geqslant 0$ thì

$$\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha\ldots\cos 2^n\alpha = \frac{\sin 2^{n+1}\alpha}{2^{n+1}\sin\alpha}.$$

□

Bài toán 38. Cho n số $a_1, a_2, \ldots, a_n$ với $a_i \in \{\pm 1\}$. Chứng minh rằng

$$2\sin\left(a_1+\frac{a_1a_2}{2}+\cdots+\frac{a_1a_2\ldots a_n}{2^{n-1}}\right)\frac{\pi}{4} = a_1\cdot\sqrt{2+a_2\sqrt{2+\cdots+a_n\sqrt{2}}}.$$

Lời giải. Ta chứng minh bằng nguyên lý quy nạp. Với $n = 1$, do $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ và $\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ nên $2\sin a_1\frac{\pi}{4} = a_1\sqrt{2}$. Vậy bài toán đúng cho $n = 1$. Giả sử rằng đẳng thức đúng với $n \geqslant 1$, tức là:

$$2\sin\left(a_2 + \frac{a_2a_3}{2} + \cdots + \frac{a_2a_3\cdots a_{n+1}}{2^{n-1}}\right)\frac{\pi}{4} = a_2\sqrt{2 + a_3\sqrt{2 + \cdots + a_{n+1}\sqrt{2}}}$$

với $a_2, \ldots, a_{n+1} \in \{\pm 1\}$. Khi đó:

$$\begin{aligned}
2 + a_2\sqrt{2 + a_3\sqrt{2 + \cdots + a_{n+1}\sqrt{2}}} &= 2 + 2\sin\left(a_2 + \frac{a_2a_3}{2} + \cdots + \frac{a_2a_3\ldots a_{n+1}}{2^{n-1}}\right)\frac{\pi}{4}\\
&= 2 - 2\cos\left[\frac{\pi}{2} + \left(a_2 + \frac{a_2a_3}{2} + \cdots + \frac{a_2a_3\ldots a_{n+1}}{2^{n-1}}\right)\frac{\pi}{4}\right]\\
&= 2\left(1 - \cos 2\left(1 + \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_2a_3\ldots a_{n+1}}{2^n}\right)\frac{\pi}{4}\right)\\
&= 4\sin^2\left(1 + \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_2a_3\ldots a_{n+1}}{2^n}\right)\frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Lại có $0 < 1 + \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_2a_3\ldots a_{n+1}}{2^n} < 2$ (do $a_i \in \{\pm 1\}$) nên

$$\sin\left(1 + \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_2a_3\ldots a_{n+1}}{2^n}\right)\frac{\pi}{4} > 0.$$

Vì thế đẳng thức ở trên cho ta

$$\sqrt{2 + a_2\sqrt{2 + a_3\sqrt{2 + \cdots + a_{n+1}\sqrt{2}}}} = 2\sin\left(1 + \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_2a_3\ldots a_{n+1}}{2^n}\right)\frac{\pi}{4}.$$

Vì hàm sin là hàm số lẻ, ta nhân cả hai vế của đẳng thức vừa nhận được với $a_1 \in \{\pm 1\}$ rồi biến đổi thì được

$$\begin{aligned}
a_1\sqrt{2 + a_2\sqrt{2 + \cdots + a_{n+1}\sqrt{2}}} &= a_1 2\sin\left(1 + \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_2a_3\ldots a_{n+1}}{2^n}\right)\frac{\pi}{4}\\
&= 2\sin a_1\left(1 + \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_2a_3\ldots a_{n+1}}{2^n}\right)\frac{\pi}{4}\\
&= 2\sin\left(a_1 + \frac{a_1a_2}{2} + \cdots + \frac{a_1a_2a_3\ldots a_{n+1}}{2^n}\right)\frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

Điều này chỉ ra rằng công thức cũng đúng với $n + 1$. □

6 Một số bài toán khác

Bài toán 39. Chứng minh rằng mọi số nguyên $\geqslant 28$ đều có thể biểu diễn được dưới dạng: $5x + 8y$ với $x, y \in \mathbb{N}$.

Lời giải. Ta sẽ chứng minh bằng nguyên lý quy nạp:
Với $n = 28$, ta có thể viết như sau: $5.4 + 8.1 = 28$.
Với $n = 29$, ta có thể viết như sau: $5.1 + 8.3 = 29$.
Với $n = 30$, ta có thể viết như sau: $5.6 + 8.0 = 30$.
Với $n = 31$, ta có thể viết như sau: $5.3 + 8.2 = 31$.
Với $n = 32$, ta có thể viết như sau: $5.0 + 8.4 = 32$.
Giả sử có thể biểu diễn được với $n = k$, tức là $5x + 8y = k$, khi đó x, y phải có ít nhất 1 số $\geqslant 3$ vì nếu cả 2 đều < 3 thì $k \leqslant 5.2 + 8.2 = 26$. Ta sẽ chứng minh có thể biểu diễn được với $n = k + 1$. Thật vậy, với $x^* = x - 3$ và $y^* = y + 2$ thì $k + 1 = 5x^* + 8y^* = 5(x - 3) + 8(y + 2) = 5x + 8y + 1$ hay một cách biểu diễn khác là $x_* = x + 5$ và $y_* = y - 3$. Điều này để đảm bảo cho các cặp số (x^*, y^*) hay (x_*, y_*) luôn lớn hơn hay bằng 0. Vì vậy ta có điều phải chứng minh. □

Bài toán 40. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Tính A^m với $m \in \mathbb{N}$.

Lời giải. Thử trực tiếp với $m = 0, 1, 2, 3, 4$ và 5, ta có:

$$A^0 = I_3, A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A^5 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 10 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ta dự đoán $A^m = \begin{pmatrix} 1 & m & \frac{m(m-1)}{2} \\ 0 & 1 & m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, với $m \in \mathbb{N}$ (1).

Dễ thấy (1) đúng khi $m = 0$. Giả sử (1) đúng với $m = n, (n \geqslant 0)$. Nghĩa là

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ta chứng minh (1) cũng đúng khi $m = n + 1$. Thật vậy,

$$\begin{aligned} A^{n+1} = A \cdot A^n &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & n+1 & \frac{(n+1)((n+1)-1)}{2} \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ta thấy (1) cũng đúng với $m = n + 1$. Vậy (1) đúng với mọi $m \in \mathbb{N}$. □

Bài toán 41. Nhận xét rằng

$$\begin{aligned}6^2 &= 36\\ 66^2 &= 4356\\ 666^2 &= 443556\\ 6666^2 &= 44435556\end{aligned}$$

Hãy dự đoán kết quả tổng quát và chứng minh dự đoán đó bằng quy nạp toán học.

Lời giải. Dự đoán:

$$\begin{aligned}6^2 &= 36\\ 66^2 &= 4356\\ 666^2 &= 443556\\ 6666^2 &= 44435556\\ 66666^2 &= 4444355556\\ 666666^2 &= 444443555556\\ &\dots\\ \overline{\underbrace{66\dots6}_{k \text{ chữ số } 6}}^2 &= \overline{\underbrace{44\dots44}_{k-1 \text{ chữ số } 4}\ 3\ \underbrace{55\dots55}_{k-1 \text{ chữ số } 5}\ 6}\end{aligned}$$

Dự đoán:

$$\overline{\underbrace{66\dots6}_{k \text{ chữ số } 6}}^2 = 4.\sum_{i=k+1}^{2k-1} 10^i + 3.10^k + 5.\sum_{i=1}^{k-1} 10^i + 6$$

với k là số tự nhiên lớn hơn 1.
Hay

$$\overline{\underbrace{66\dots6}_{n \text{ chữ số } 6}}^2 = 4.\sum_{i=n+1}^{2n-1} 10^i + 3.10^n + 5.\sum_{i=1}^{n-1} 10^i + 6 \quad (*)$$

với n là số tự nhiên lớn hơn 1.
Ta sẽ chứng minh bằng nguyên lý quy nạp.

- Với $n = 2$ (*) có dạng $66^2 = 4.\sum_{i=3}^{3} 10^i + 3.10^2 + 5.\sum_{i=1}^{1} 10^i + 6 = 4356$ (đúng).
- Giả sử (*) đúng với $n = k$, k là số nguyên lớn hơn 1, tức là:

$$\overline{\underbrace{666\dots6}_{k \text{ chữ số } 6}}^2 = 4.\sum_{i=k+1}^{2k-1} 10^i + 3.10^k + 5.\sum_{i=1}^{k-1} 10^i + 6$$

- Ta sẽ chứng minh (*) đúng với $n = k+1$, tức là:

$$\overline{\underbrace{666\dots66}_{k+1 \text{ chữ số } 6}}^2 = 4.\sum_{i=k+2}^{2(k+1)-1} 10^i + 3.10^{k+1} + 5.\sum_{i=1}^{k} 10^i + 6.$$

Thật vậy, áp dụng giả thiết quy nạp, ta có:

$$
\begin{aligned}
VT &= \overline{\underbrace{666\ldots 66}_{k+1 \text{ chữ số } 6}}^2 = \left(10.\overline{\underbrace{66\ldots 6}_{k \text{ chữ số } 6}} + 6\right)^2 = \left(100.\overline{\underbrace{66\ldots 6}_{k \text{ chữ số } 6}}^2 + 120.\overline{\underbrace{66\ldots 6}_{k \text{ chữ số } 6}}^2 + 36\right)\\
&= 4.\sum_{i=k+3}^{2k+1} 10^i + 3.10^{k+2} + 5.\sum_{i=3}^{k+1} 10^i + 12.6.\sum_{i=1}^{k} 10^i + 36\\
&= 4.\sum_{i=k+3}^{2k+1} 10^i + 3.10^{k+2} + 5.\sum_{i=3}^{k+1} 10^i + 72.\sum_{i=1}^{k} 10^i + 636\\
&= 4.\sum_{i=k+2}^{2k+1} 10^i - 10^{k+2} + 5.10^{k+1} + \left(5.\sum_{i=3}^{k} 10^i + 550\right) + 72.\sum_{i=1}^{k} 10^i + 86\\
&= \left(4.\sum_{i=k+2}^{2k+1} 10^i + 3.10^{k+1} + 5.\sum_{i=1}^{k} 10^i + 6\right) + 2.10^{k+1} - 10^{k+2} + 72\sum_{i=1}^{k} 10^i + 80\\
&= VP + 2.10^{k+1} - 10.10^{k+1} + 80\sum_{i=1}^{k} 10^i - 8.\sum_{i=1}^{k} 10^i + 8.10\\
&= VP + \left(8.\sum_{i=2}^{k+1} 10^i - 8.\sum_{i=1}^{k} 10^i - 8.10^{k+1} + 8.10\right)\\
&= VP + 8.\left(10^{k+1} - 10 - 10^{k+1} + 10\right)\\
&= VP + 8.0 = VP.
\end{aligned}
$$

Vậy theo nguyên lý quy nạp, (*) đúng với mọi số nguyên n lớn hơn 1. Hay

$$\overline{\underbrace{66\ldots 6}_{k \text{ chữ số } 6}}^2 = 4.\sum_{i=k+1}^{2k-1} 10^i + 3.10^k + 5.\sum_{i=1}^{k-1} 10^i + 6 = \overline{\underbrace{44\ldots 44}_{k-1 \text{ chữ số } 4}\ 3\ \underbrace{55\ldots 55}_{k-1 \text{ chữ số } 5}\ 6}.$$

Kết hợp: $6^2 = 36$.
Ta có:

$$\overline{\underbrace{66\ldots 6}_{k \text{ chữ số } 6}}^2 = \overline{\underbrace{44\ldots 44}_{k-1 \text{ chữ số } 4}\ 3\ \underbrace{55\ldots 55}_{k-1 \text{ chữ số } 5}\ 6} \text{ với } n \text{ là số nguyên dương.}$$

□

7 Đa thức

Đa thức bậc n gọi là hàm số có dạng

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n, (a_0 \neq 0) \qquad \text{(VII .6)}$$

Ở đây $a_0, a_1, \ldots, a_n$ là các hệ số thực của đa thức, còn $n \geqslant 0$ là một số nguyên (bậc của đa thức). Đa thức là một lớp hàm đơn giản, nhưng có rất nhiều ứng dụng trong toán học. Với $n = 0$ đa thức (VII .6) là hằng số a_0, với $n = 1, P(x)$ trở thành hàm tuyến tính

$P(x) = a_0x + a_1$, còn với $n = 2, P$ là tam thức bậc hai $P(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2$. Để đa thức có bậc là n thì luôn có điều kiện $a_0 \neq 0$. Trong trường hợp ngược lại thì bậc cao nhất của đa thức P là n.
Nếu $P(x)$ và $Q(x)$ là những đa thức, thì $P(x) + Q(x)$, $P(x) - Q(x)$ và $P(x) \cdot Q(x)$ cũng là đa thức, nhưng phép chia hai đa thức cho nhau không luôn luôn là một đa thức.
Số α gọi là nghiệm của đa thức $P(x)$, nếu $P(\alpha) = 0$. Như vậy, Nếu tam thức bậc hai $P(x) = ax^2 + bx + c$, mà $b^2 - 4ac \geqslant 0$ thì hai nghiệm của tam thức này x_1, x_2 đưa ta đến phân tích $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$. Tổng quát hơn ta có
Bổ đề 1. Nếu $P(x)$ là một đa thức bậc $n \geqslant 1$ và α là một số thực thì α là nghiệm của $P(x)$ khi và chỉ khi tồn tại một đa thức $Q(x)$ bậc $n - 1$, mà nó thỏa mãn đẳng thức sau:

$$P(x) = (x - a)Q(x)$$

với mọi x.
Chứng minh. Chiều đảo của mệnh đề là hiển nhiên. Ta sẽ chứng minh chiều thuận, tức là nếu $P(x)$ là đa thức bậc n thì

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_{n-i} x^i \quad (*)$$

và $P(\alpha) = 0$, nghĩa là:

$$P(\alpha) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_{n-i} \alpha^i = 0 \quad (**)$$

Sử dụng đẳng thức $a^n - b^n = (a - b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1}\right)$ và lấy (*) trừ (**), ta được:

$$\begin{aligned} P(x) = P(x) - P(\alpha) &= \sum_{i=0}^{n} \alpha_{n-i}(x^i - \alpha^i) \\ &= (x - \alpha) \cdot \sum_{i=1}^{n} \alpha_{n-i} \left(x^{i-1} + x^{i-2}\alpha + \cdots + \alpha^{n-1}\right) \\ &= (x - \alpha)Q(x). \end{aligned}$$

ở đây $Q(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{n-i} \left(x^{i-1} + x^{i-2}\alpha + \cdots + \alpha^{n-1}\right)$ hiển nhiên là đa thức bậc $n = 1$ (vì $a_0 \neq 0$).
Vậy ta có điều phải chứng minh. □

Bài toán 42. Không có một đa thức bậc n có nhiều hơn n nghiệm số khác nhau.

Lời giải. Chứng minh bằng phương pháp quy nạp theo n. Ở đây n là số nguyên dương. Giả sử P là một đa thức bậc n và $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ là nghiệm của nó ($\alpha_i \neq \alpha_j$ với $i \neq j$).

- Với $n = 1, P(x) = a_0x + a_1$ ($a_0 \neq 0$) có một nghiệm duy nhất $\alpha_1 = -\dfrac{a_1}{a_0}$.
- Giả sử mệnh đề đúng với số n.

- Ta sẽ chứng minh nó cũng đúng với $n+1$.

Ta sẽ kết hợp với phương pháp phản chứng. Giả sử tồn tại một đa thức Q bậc $n+1$, mà nó có $n+2$ nghiệm khác nhau $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+2}$. Khi đó Q có thể biểu diễn dưới dạng

$$Q(x) = (x - \alpha_{n+2})\, Q_1(x) \quad \text{(do bổ đề trên).}$$

ở đây Q_1 là đa thức bậc n. Vì thừa số $x - \alpha_{n+2}$ không có nghiệm là một trong các số $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}$, thì chúng là nghiệm của Q_1. Nhưng điều này có nghĩa là một đa thức bậc n có $n+1$ nghiệm hoàn toàn khác nhau, trái với giả thiết quy nạp.
Vậy không có một đa thức bậc n có nhiều hơn n nghiệm số khác nhau. □

Bài toán 43. Chứng minh rằng mỗi đa thức

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n, (a_0 \neq 0)$$

có thể biểu diễn dưới dạng

$$P(x) = a_0 (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n),$$

ở đây $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ là nghiệm của đa thức.

Lời giải. Ta chứng minh bằng quy nạp theo n.

- Nếu $n = 1$, thì $P(x) = a_0 x + a_1$ có một nghiệm duy nhất $\alpha_1 = -\dfrac{a_1}{a_0}$ và hiển nhiên

$$P(x) = a_0 \left(x + \frac{a_1}{a_0} \right) = a_0 (x - \alpha_1).$$

- Giả sử mệnh đề đúng với đa thức bậc $n-1$ và cho $\deg P(x) = n$. Ta biết rằng $P(x)$ tồn tại nghiệm như các bài tập trên đã chứng minh, lấy α_1 là nghiệm của $P(x)$. Khi đó $P(x) = (x - \alpha_1)\, Q(x)$, dễ thấy $\deg Q(x) = n - 1$ và hệ số trước bậc cao nhất của đa thức này trùng với a_0 của $P(x)$. Từ đó suy ra những nghiệm của $P(x)$ là α_1 và những nghiệm của $Q(x)$. Theo giả thiết quy nạp:

$$Q(x) = a_0 (x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \ldots (x - \alpha_n),$$

ở đây $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ là tất cả nghiệm của $Q(x)$. Khi đó tất cả nghiệm của $P(x)$ là $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ và

$$P(x) = (x - \alpha_1)\, Q(x) = a_0 (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n).$$

□

Bài toán 44 (Phép chia Euclide). Giả sử K là một trường K và $f(x), g(x) \in K[x], g(x) \neq 0$. Khi đó tồn tại duy nhất các đa thức $q(x), r(x) \in K[x]$ sao cho

$$f(x) = g(x) q(x) + r(x), \text{ với } \deg r(x) < \deg g(x).$$

Các đa thức $q(x)$ và $r(x)$ được gọi tương ứng là thương và dư trong phép chia $f(x)$ cho $g(x)$.

Chứng minh. Trước hết, ta chứng minh sự duy nhất. Giả sử

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x) = g(x)q'(x) + r'(x)$$

với $\deg r(x) < \deg g(x)$ và $\deg r'(x) < \deg g(x)$. Khi đó ta có

$$g(x)[q(x) - q'(x)] = r'(x) - r(x).$$

Nếu $q(x) \neq q'(x)$ thì

$$\deg[r'(x) - r(x)] = \deg g(x) + \deg[q(x) - q'(x)] \geqslant \deg g(x).$$

Điều này mâu thuẫn với giả thiết $\deg r(x) < \deg g(x)$ và $\deg r'(x) < \deg g(x)$. Do đó $q(x) = q'(x)$. Vì vậy $r(x) = r'(x)$.
Tiếp đến, ta sẽ chứng minh sự tồn tại của $q(x)$ và $r(x)$ bằng phương pháp quy nạp theo bậc của $f(x)$. Giả sử

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0, a_n \neq 0;$$
$$g(x) = b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0, b_m \neq 0.$$

Nếu $n = 0, m = 0$ thì đặt $r(x) = 0, q(x) = a_0 b_0^{-1}$, còn nếu $n = 0$, $m > 0$ thì đặt $q(x) = 0, r(x) = f(x)$. Giả sử định lý được chứng minh cho mọi đa thức f có bậc $< n$ với $n > 0$. Nếu $m > n$ thì ta chọn $q(x) = 0, r(x) = f(x)$. Nếu $m \leqslant n$ thì đặt

$$\overline{f}(x) = f(x) - (a_n b_m^{-1}) x^{n-m} g(x).$$

Khi đó $\overline{f}(x)$ là đa thức có bậc $< n$. Theo giả thiết quy nạp, tồn tại các đa thức $\overline{q}(x)$ và $r(x)$ sao cho

$$\overline{f}(x) = \overline{q}(x) g(x) + r(x), \deg r(x) < m.$$

Do đó

$$f(x) = (a_n b_m^{-1} x^{n-m} + \overline{q}(x)) g(x) + r(x).$$

Đặt $q(x) = a_n b_m^{-1} x^{n-m} + \overline{q}(x)$, ta có các đa thức thương và dư cần tìm trong phép chia $f(x)$ cho $g(x)$. $\square$

Bài toán 45. Hàm số $\cos n\theta, (n \in \mathbb{N})$ với thể biểu diễn như đa thức bậc n của $\cos\theta$. Nghĩa là,

$$\cos n\theta = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i} \cos^i \theta, a_0 \neq 0. \tag{VII .7}$$

Lời giải. Với $n = 0$ mệnh đề hiển nhiên đúng.

- Với $n = 2$ và $n = 3$ ta nhận được đa thức tương ứng bậc hai, bậc ba theo công thức lượng giác.

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$
$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

- Giả sử mệnh đề đúng với $n-1$ và n, nghĩa là:

$$\cos(n-1)\theta = \sum_{i=0}^{n-1} b_{n-1-i}\cos^i\theta, b_0 \neq 0 \quad \text{(VII .8)}$$

$$\cos n\theta = \sum_{i=0}^{n} c_{n-i}\cos^i\theta, c_0 \neq 0$$

Ta sẽ chứng minh trong trường hợp đó $\cos(n+1)\theta$ cũng có thể biểu diễn như đa thức của $\cos\theta$ có bậc $n+1$.

$$\cos(n+1)\theta = \sum_{i=0}^{n+1} d_{n+1-i}\cos^i\theta, d_0 \neq 0 \quad \text{(VII .9)}$$

Ta áp dụng công thức

$$\cos n\theta = 2\cos\theta\cos(n-1)\theta - \cos(n-2)\theta$$

đúng với mọi n và θ. Từ (VII .9) và (VII .8) suy ra

$$\begin{aligned}\cos(n+1)\theta &= 2\cos\theta\cos n\theta - \cos(n-1)\theta\\ &= 2\cos\theta\sum_{i=0}^{n} c_{n-i}\cos^i\theta - \sum_{i=0}^{n-1} b_{n-1-i}\cos^i\theta\\ &= d_0\cos^{n+1}\theta + d_1\cos^n\theta + \cdots\end{aligned}$$

Ta nhận thấy ngay đây là đa thức bậc $n+1$ của $\cos\theta$, Vì $d_0 2c_0 \neq 0$ theo giả thiết quy nạp.
Trong đa thức (VII .7) của $\cos\theta$, ta có thể đưa về dạng một đa thức chuẩn tắc bằng cách đặt $x = \cos\theta$ và ta ký hiệu đa thức này là $T_n(x)$. Theo cách này

$$T_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i}x^i. \quad \text{(VII .10)}$$

Đa thức (VII .10) gọi là đa thức thứ n-của Chebychev. Như vậy do công thức (VII .7) thì đa thức thứ n của Chebychev T_n ta có:

$$\begin{aligned}&T_0(x) = 1, T_1(x)\\ &T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x), (n = 2, 3, \ldots).\end{aligned}$$

Từ đẳng thức trên ta tìm được lần lượt các đa thức của Chebychev với $n = 2, 3, \ldots$.

$$\begin{aligned}&T_0(x) = 1\\ &T_1(x) = x\\ &T_2(x) = 2x^2 - 1\\ &T_3(x) = 4x^3 - 3x\\ &T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1\\ &T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x\\ &\ldots\ldots\end{aligned}$$

□

Kết luận

Qua tiểu luận này, chúng em đã tìm hiểu và phân tích chi tiết về **phương pháp quy nạp toán học**, một công cụ chứng minh mang tính hệ thống và chặt chẽ trong toán học. Những nội dung chính mà chúng em đã trình bày bao gồm:

- **Khái niệm cơ bản:** Phương pháp quy nạp toán học dựa trên hai bước chính: bước cơ sở và bước quy nạp. Bước cơ sở giúp xác nhận mệnh đề đúng với giá trị ban đầu, thường là $n = 1$. Tiếp đó, bước quy nạp chứng minh rằng nếu mệnh đề đúng với $n = k$, thì nó cũng đúng với $n = k + 1$. Hai bước này tạo thành một chuỗi logic để khẳng định tính đúng đắn của mệnh đề với mọi $n \geq 1$.

- **Cách thức thực hiện:** Phương pháp được triển khai một cách khoa học và dễ hiểu, phù hợp cho việc chứng minh các mệnh đề liên quan đến tập hợp số tự nhiên. Điều này không chỉ giúp xây dựng các lý thuyết toán học mà còn hỗ trợ trong việc giải quyết các bài toán cụ thể, từ cơ bản đến phức tạp.

- **Ứng dụng thực tiễn:** Phương pháp quy nạp không chỉ giới hạn ở các bài toán số học mà còn được mở rộng trong các lĩnh vực toán học khác như lý thuyết đồ thị, đại số, tổ hợp, và cả khoa học máy tính. Đặc biệt, phương pháp này đóng vai trò quan trọng trong việc xây dựng và phân tích các thuật toán, cũng như khám phá các quy luật trong tự nhiên và xã hội.

Vai trò và tầm quan trọng của phương pháp quy nạp toán học: Phương pháp quy nạp không chỉ đơn thuần là một kỹ thuật chứng minh, mà còn là một công cụ tư duy quan trọng, giúp phát triển khả năng logic, khái quát hóa và suy luận của con người. Với tính chặt chẽ và tổng quát, quy nạp toán học đã trở thành nền tảng của nhiều ngành khoa học, đóng góp vào sự phát triển của lý thuyết và ứng dụng thực tiễn.
Chúng em tin rằng, qua việc trình bày về phương pháp quy nạp toán học, người đọc không chỉ hiểu rõ hơn về bản chất và cách áp dụng của phương pháp này mà còn nhận ra giá trị to lớn của nó trong việc chứng minh, giải quyết vấn đề và khám phá các quy luật toán học. Tiểu luận này cũng hy vọng sẽ gợi mở thêm những hướng nghiên cứu sâu hơn về vai trò của quy nạp toán học trong các lĩnh vực liên quan.

Tài liệu tham khảo

[1] PGS.TS Nguyễn Hữu Điển. Phương pháp quy nạp toán học

[2] Nguyễn Văn Kính. Sáng tạo toán học với phương pháp quy nạp

[3] Different kinds of Mathematical Induction

[4] A. V. Balakrishnan. Mathematical Induction: Proof Techniques and Problems

[5] Kenneth H. Rosen. Discrete Mathematics and Its Applications

[6] R. P. Grimaldi. Mathematical Induction: A Comprehensive Guide

[7] Mathematical Induction- A powerful and elegant method of proof. Titu Andreescu