TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
ĐẠI HỌC QUỐC GIA THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

KHOA TOÁN - TIN HỌC

TIỂU LUẬN
ĐẠI SỐ SƠ CẤP

<u>ĐỀ TÀI</u>

CÁC VẤN ĐỀ CƠ BẢN VỀ TỔ HỢP

GV hướng dẫn: TS Tạ Thị Nguyệt Nga

Nhóm thực hiện: Người đưa đò

Họ và tên	MSSV
Trần Phạm Quốc Anh	22110018
Ngô Khải	22110077
Trần Ngọc Vy Khanh	22110079
Hoàng Yến Nhi	22110144
Nguyễn Thanh Phong	22110154

Hồ Chí Minh, 2024

Mục lục

Trong môi trường phức tạp của thế giới hiện đại, từ việc xác định số lượng cách thức chọn ra bộ trang phục phù hợp cho một sự kiện đến việc tính toán khả năng của các biến thể gen trong sinh học phân tử, sự hiểu biết về tổ hợp không chỉ là một phần thiết yếu của toán học mà còn là một công cụ mạnh mẽ cho nhiều lĩnh vực ứng dụng khác nhau.

Trong lời mở đầu này, chúng ta sẽ khám phá những khía cạnh cơ bản của tổ hợp và những ứng dụng rộng lớn mà chúng mang lại.

Tổ hợp, trong bối cảnh toán học, đề cập đến việc xếp hạng, sắp xếp, và chọn lựa các phần tử từ một tập hợp cố định theo một số quy tắc nhất định. Từ những bài toán đơn giản như tìm số lượng cách xếp hạng các vật liệu trong một kho đến những vấn đề phức tạp như tối ưu hóa trong kỹ thuật và khoa học máy tính, tổ hợp đã trở thành một trong những chủ đề quan trọng nhất trong toán học hiện đại.

Quan trọng hơn, khả năng áp dụng kiến thức về tổ hợp vào thực tế là không giới hạn. Trong khoa học máy tính, tổ hợp được sử dụng để thiết kế thuật toán hiệu quả, từ các thuật toán tìm kiếm đến các thuật toán mã hóa. Trong kinh tế học, tổ hợp giúp xác định các kịch bản tối ưu cho quyết định đầu tư và phân phối tài nguyên. Trong sinh học và y học, tổ hợp giúp phân tích dữ liệu gen và dự đoán biến đổi trong cấu trúc protein.

Trong tiểu luận này, chúng em sẽ đi sâu vào các khái niệm cơ bản về tổ hợp, từ việc đếm, xác định tổ hợp và hoán vị, đến các ứng dụng thực tiễn của chúng trong nhiều lĩnh vực khác nhau. Bằng cách này, chúng em hy vọng sẽ đưa mọi người cái nhìn tổng quan về tầm quan trọng và đa dạng của tổ hợp, cũng như hiểu rõ hơn về cách mà nó có thể áp dụng vào thế giới thực.

Lý do chọn đề tài

Lý do mà chúng em đã chọn đề tài về tổ hợp không chỉ đơn giản là vì sự phổ biến và quan trọng của lĩnh vực này trong toán học và các lĩnh vực ứng dụng khác, mà còn vì sự tò mò và mong muốn hiểu biết sâu sắc hơn về cách mà toán học có thể được áp dụng vào thế giới thực.

Tổ hợp không chỉ là một phần của chương trình học mà còn là một khía cạnh quan trọng của cuộc sống hàng ngày. Từ việc quyết định cách xếp chỗ ngồi tại một buổi tiệc đám cưới cho đến việc tối ưu hóa công việc trong môi trường công nghiệp, kiến thức về tổ hợp thường xuyên xuất hiện trong các tình huống thực tiễn.

Ngoài ra, sự quan trọng của tổ hợp còn nằm ở khả năng giải quyết các vấn đề phức tạp và mở ra cánh cửa cho sự sáng tạo và khám phá. Việc áp dụng kiến thức về tổ hợp có thể giúp giải quyết các vấn đề từ quản lý tài nguyên đến thiết kế các thuật toán phức tạp trong khoa học máy tính và sinh học.

Cuối cùng, việc nghiên cứu về tổ hợp cũng đem lại cho chúng em cơ hội để phát triển kỹ năng phân tích, logic và tư duy sáng tạo. Thông qua việc giải quyết các bài toán và áp dụng các khái niệm phức tạp, tôi có thể mở rộng hiểu biết và kỹ năng của mình trong lĩnh vực này và áp dụng chúng vào các tình huống thực tiễn trong cuộc sống hàng ngày.

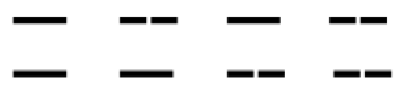
Tóm lại, việc chọn đề tài về tổ hợp không chỉ là sự lựa chọn dựa trên sự quan trọng và phổ biến của lĩnh vực này mà còn là cơ hội để chúng em khám phá, học hỏi và phát triển bản thân. Hy vọng rằng tiểu luận này sẽ không chỉ mang lại sự hiểu biết về tổ hợp mà còn là một hành trình khám phá và sự phát triển cá nhân.

1 Quá trình hình thành lịch sử

1.1 Từ thời Cổ đại (Antiquites) đến nửa đầu thế kỉ XVII: Bài toán đếm các cấu hình khác nhau của một tập hợp

1.1.1 Động cơ tôn giáo, bói toán, trò chơi cờ tướng ở Trung Quốc

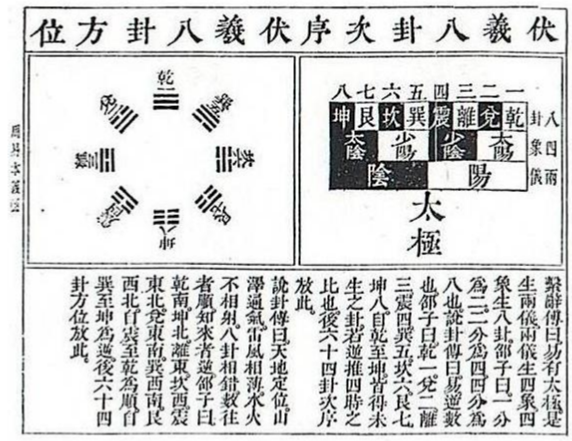
Nhóm các vật cùng loại theo nhóm 2, nhóm 3,...,18,24 cũng như 72, hay 100 để đếm chúng đã là một hoạt động có từ lâu đời ở Trung Quốc. Trong tác phẩm I-king (*Le lirve permutation*), được viết khoảng năm 1150 trước công nguyên, khoảng cuối thời nhà Chu (Thế kỉ III trước Công nguyên), người ta tìm thấy 4 biểu đồ nhị phân



4 biểu đồ nhị phân

Cũng như 8 trigrammes (các từ được tạo thành từ 3 chữ), và nhiều tổ hợp kết hợp hai nhóm, một âm Yang (âm) hoặc Yin (dương), những nhà toán học thần bí Trung Quốc tìm được 64 quẻ khác nhau hoàn toàn, mỗi quẻ có một ý nghĩa đặc biệt về mối quan hệ âm dương, con người và trời đất.

Có thể nói, những kinh nghiệm về tổ hợp đã có nguồn gốc ở Trung Quốc cổ đại, trong việc xây dựng các kĩ thuật bói toán dựa trên các cấu hình (configurations) tạo thành 3 hoặc 6 đường "nét đầy" (lignes pleines) hoặc "nét gãy" (lignes briées). Hình bên dưới được trích trong tác phẩm "Livre des Mutations", người ta tìm thấy các "trigrammes", một tổ hợp của 3 đường "nét đầy" hoặc "nét gãy"



Một tổ hợp của 3 đường "nét đầy" hoặc "nét gãy"

Nhận thấy, tác phẩm này đã đề cập đến chỉnh hợp của tập n phần tử với n $\leq$ 6.

Tuy nhiên, việc sử dụng các kiến thức về tổ hợp ở Trung Quốc không chỉ giới hạn trong việc bói toán hoặc việc tìm kiếm các hình vuông ma thuật. Một phần lớn các nguồn tài liệu trình bày trò chơi như cờ tướng, những trò chơi bài hoặc domino, biểu thị một sự quan tâm đến các câu hỏi của giải tích tổ hợp trên phương diện toán học hoặc gần toán học.

Về nghệ thuật chơi cờ, việc quan tâm đến các nước đi, đếm các nước đi có thể trên bàn cờ, cũng là một hoạt động liên quan đến tổ hợp. Một quan lại của thế kỉ XI, Shen Gua (Thẩm

Quất) quan tâm đến việc đếm các nước đi của cờ tướng. (đếm tất cả các cấu hình của một bàn cờ)

Ngoài ra, một số mô tả của trờ chơi dominos, khoảng chừng năm 1600 đã cho thấy việc ngầm tìm kiếm tất cả các hoán vị có thể từ sự kết hợp của 3 cờ domino.

Một cách hệ thống và theo phương diện lý thuyết, hoán vị và tổ hợp được bàn luận đến lần đầu trong các bản viết tay ở cuối thế kỉ XVII. Cũng giống như Châu Âu, một số nền tảng của lý thuyết tổ hợp đã được đưa ra ở Trung Quốc, dưới dạng viết tay, những khái niệm, những cách viết dưới dạng thuật toán truyền thống.

1.1.2 Nền văn hóa Ả Rập

Giữa cuối thế kỉ XII đến giữa thế kỉ XIV, một tập hợp những kinh nghiệm tổ hợp xuất hiện trong những bài viết của các nhà toán học Ả Rập. Từ thế kỉ thứ VIII, những kinh nghiệm này được tìm thấy trong phạm vi các lĩnh vực văn hóa đặc trưng, đặc biệt là các hoạt động cải thiện ngôn ngữ và văn hóa Ả Rập.

Trong khuôn khổ của nền văn hóa Ả Rập - hồi giáo, trước tiên Giải tích tổ hợp được sử dụng nhiều trong việc đếm và liệt kê các vật, trong các lĩnh vực ngoài toán học, đặc biệt là trong thiên văn học, trong từ điển học và luật về thơ. Sau đó, từ giữa thế kỉ thứ IX, với sự phát triển của các hoạt động nghiên cứu toán học và thiên văn, đã làm xuất hiện một số thao tác tổ hợp trong hình học, đại số, số học và âm nhạc. Những thao tác này thường là dựa vào kinh nghiệm, nên sẽ không tránh khỏi việc nó chỉ có thể giải quyết một số vấn đề mà những công bố cổ điển không cho phép giải quyết được, một cách chính xác, bản chất tổ hợp của các vấn đề này.

• **Thiên văn học**

Trong thiên văn học, người ta đã đếm được sự giao hội của các hành tinh với mục đích sử dụng chúng trong việc dự đoán các hiện tượng. Những sự chuẩn bị này đã được tìm thấy suốt trong thời kì này, đặc biệt là ở thế kỉ XIII, với nhà toán học Ibn Haydur (1413).

Những chuyên gia trong lĩnh vực này đã thao tác với những số nguyên và những cách thức khác nhau: xây dựng hay đơn giản sử dụng những hình vuông hay hình trong ma thuật càng lúc càng hoàn hảo, thao tác với chuỗi những chữ tượng trưng cho các yếu tố (principes) hay tên của thánh thần, thực hiện "máy tiên đoán" (machine à prédire), đếm dãy số nguyên chẵn và lẻ trong việc thực hiện các hoạt động bói toán.

• **Trong lĩnh vực từ điển học**

Nửa sau của thế kỉ XVIII, đặc biệt là với mục đích làm (chế tạo) các từ điển, liệt kê và đếm các gốc của ngôn ngữ Ả Rập, quan tâm đến những cấu trúc khác nhau. Al-Khalil Ibn Ahmad (791) là người đầu tiên đếm chính xác những thân từ có 2 chữ cái, 3 chữ cái, 4 chữ cái và 5 chữ cái. Sau ông, nhà ngữ pháp Sibawayh (795) đã xác định số từ thực sự được sử dụng, nghĩa là để ý đến những sự khác nhau về cách phát âm.

Với một cái nhìn bao quát những nguồn gốc đã đưa đến các vấn dề của ngôn ngữ Ả Rập, người ta có cảm tưởng rằng, cho đến thế kỉ XII, những chuyên gia trong lĩnh vực này vẫn chưa đưa đến các nghiệm số học của các bài toán đếm số từ đã tính được theo qui nạp trong tác phẩm của họ. Điều này được khẳng định trong tác phẩm của Ibn Durayd (934), với tựa đề "Anthologie de la langue", một phương pháp cơ học để trả lời một trong các câu hỏi đưa ra đó là việc đếm tất cả các từ có được của một nhóm chữ cái đã cho, bằng cách để ý đến các hoán vị và sự lặp lại của các chữ cái. Với mỗi tập hợp 3 phần tử, người ta sắp xếp với một thứ tự bất kì những từ được đưa ra. Sau đó họ xoay vòng cái này hoặc cái kia của hai anneaux, mỗi lần một góc tương ứng, để nhận được một trật tự mới của tất cả các từ. Để đếm số các từ có hơn 3 chữ cái, việc cần thiết là thêm vào số anneaux cần thiết để tính toán.

• Mô hình đếm của Ibn Mun^{c}im

Những kết quả trong phần này được dẫn ra từ bài báo "*Quelques éléments d'histoire de l'analyse combinatoire*" của Mahdi Abdeljaouad,

Ibn Mun^{c}im, nhà toán học Ả Rập ở thế kỉ XII, đã đưa ra mô hình để thực hiện phép đếm tất cả những từ mà người ta có thể nói bằng cách sử dụng một trong chúng. Trước ông, Al-Khalil chỉ xét trong trường hợp các từ gồm các chữ cái khác nhau. ông tiếp tục nghiên cứu đối với những từ có các chữ cái lặp lại hay được tạo thành từ 5 hay 6 chữ cái khác nhau mà một số hay tất cả các chữ cái này có thể lặp lại. Ông xem xét bài toán với bảng chữ cái alphabet gồm có 28 chữ và từ dài nhất được tạo thành từ 10 chữ cái có tính đến các phụ tố và sự lặp lại.

Ông đưa ra các bài toán cơ sở:

-Bài toán 1:

Ta sẽ sắp đặt mười miếng lụa màu. Ta muốn lập thành những nhóm mà một số chúng có cùng một màu, những nhóm khác thì có hai màu, ba màu, cho đến khi nhóm cuối cùng được lập nên từ 10 màu, và ta muốn biết số nhóm mỗi loại, bằng việc biết màu sắc của mỗi nhóm và tổng số nhóm nếu người ta thêm vào chúng nó tính đến các màu sắc khác nhau của chúng. Ta sắp xếp lần lượt các màu trong một bảng. Việc trả lời câu hỏi trên, là việc bạn tìm được các nhóm được tạo thành từ hai màu khác biệt có được từ việc tổ hợp nhóm thứ hai với nhóm thứ nhất, nhóm thứ ba với nhóm thứ nhất và thứ hai, nhóm thứ tư với nhóm thứ nhất, nhóm thứ hai và nhóm thứ ba, và tiếp tục tổ hợp nhóm màu thứ hai với mỗi nhóm màu như vậy. Ta xác định được theo cách này số nhóm được tạo thành từ các màu khác nhau.

-Bài toán 2: Xác định số cách sắp xếp các chữ của một từ khi biết số các chữ và không chữ nào lặp lại.

Ông xem xét trong trường hợp $n = 2, n = 3, n = 4$, sau đó ông suy luận bằng phương pháp qui nạp và đưa đến công thức: $P_n = n!$

-Bài toán 3: Đếm số cách sắp xếp các chữ của một từ, khi biết số chữ và một số chữ trong chúng lặp lại.

Ông đã tìm ra được công thức mà theo cách viết ngày nay là : $P_n(r_1, r_2, ..., r_k) = \dfrac{n!}{r_1.r_2...r_k}$

1.1.3 Nền văn minh phương Tây

Trước đó, đại số tổ hợp cũng là một mối quan tâm của người Hy Lạp cổ đại, ví dụ le Stomachion là một luận văn đầu tiên về Đại số tổ hợp, mà trong đó Archimede nghiên cứu số cách tổ hợp 14 miếng đa giác để thu được một hình vuông. Nên có thể nói đại số tổ hợp là một khoa học được khai phá bởi các nhà toán học Hy Lạp cổ đại.

• Về vấn đề ngôn ngữ học ở Hy Lạp (khoảng 330 trước công nguyên)

Nhà triết học Sokrates (470-399 TCN), học trò của Platon, đã quan tâm đặc biệt đến ngôn ngữ, ông tính số các âm tiết có thể được tạo thành từ bảng chữ cái alphabet, và số kết quả nhận được là 1002.10^9.

• Châu Âu thời Trung cổ

Những tiếp cận ban đầu về Giải tích tổ hợp là việc nghiên cứu chiêm tinh học, bói toán, và thần học. Một số nhà chiêm tinh học thời trung cổ đoán trước tương lai bằng cách gieo 3 con xúc xắc. Thực nghiệm này tương ứng với $216 = 6^3$ kết quả có thể, và họ đã tính được số tổ hợp thuận lợi trong số kết quả trên.

Raymond Lulle (khoảng 1232-1316) thỉnh thoảng được xem như là người sáng lập ra Giải tích tổ hợp. Ông vừa là nhà triết học, vừa là nhà thần học Catalan, Tây Ban Nha, sử dụng ngôn ngữ Ả Rập thông thạo, có chủ tâm kiên quyết biến đổi những tín đồ đạo Hồi. Để làm việc này, ông sử dụng những tổ hợp của tất cả những mệnh đề có thể, để có thể bác bỏ chắc chắn các lý lẽ không trung thành, cũng như thay đổi nó bằng sức mạnh của lí luận.

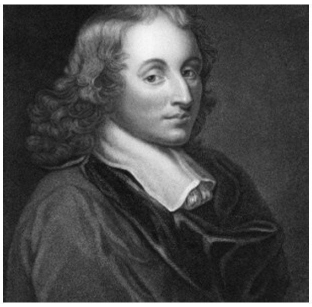
Levi Ben Gershom (1288-1344), đôi khi được gọi là Gersonide. Ông quan tâm đến toán học, trong một bảng viết tay của ông đề năm 1321, ông chú ý đến mối liên hệ giữa số các chỉnh hợp và tổ hợp. Ông biết rằng có sự bằng nhau giữa số tổ hợp p phần tử và n phần tử, và số tổ hợp $n - p$ phần tử của n phần tử.

• **Tam giác Pascal**

Thế kỉ 16, Michael Stifel (khoảng 1486-1567), một tu sĩ Đức trở thành nhà cải cách tôn giáo và có sự quan tâm đến số học. Ông nghiên cứu việc triển khai nhị thức, nghĩa là phép tính của $(a + b)^n$. Bằng cách sử dụng phương pháp qui nạp, ông tìm được quan hệ $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$, cho phép tính toán các hệ số của nhị thức bậc n bằng việc sử dụng hệ số của nhị thức bậc $n - 1$ và nhờ đó xây dựng tam giác Pascal.

Bài toán chia tiền cược đến từ Ả Rập, sau đó được trình bày bởi các nhà toán học Ý và được quan tâm bởi Chevarlier de Méré. Ông giới thiệu nó với Blaise Pascal. Ý kiến cho rằng mỗi người trong hai người chơi lấy một phần tỉ lệ với cơ hội thắng cuộc. Pascal đưa vấn đề này ra với Fermat. Hai nhà bác học Pháp trao đổi nhau qua thư từ. Ông đã dùng tam giác số học các hệ số khai triển của nhị thức $(a + b)^n$ để giải bài toán.

Năm 1654, Pascal công bố cuốn sách "Traité du triangle arithmétique". Từ đó về sau, tam giác này được mang tên ông. Ứng dụng của nó được mở rộng trong lý thuyết xác suất, khai triển nhị thức, đến việc tính các số tổ hợp.



Blaise Pascal

Pierre de Fermat

Archimedes

1.2 Nửa sau thế kỉ XVII đến đầu thế kỉ XVIII: lý thuyết tổ hợp được hình thành như một ngành toán học mới, phát triển mạnh mẽ cùng với lý thuyết xác suất.

Ở giai đoạn 1, khái niệm xác suất đã xuất hiện một cách ngầm ẩn trong các bài toán về tính toán cơ hội. Một số nhà toán học như Pascal và Fermat đã bước đầu khai thác các cộng cụ của Đại số tổ hợp trong phép tính xác suất. Đến giai đoạn này, lý thuyết xác suất dành được sự quan tâm nghiên cứu của nhiều nhà toán học, đạt được nhiều kết quả quan trọng, song song với sự phát triển của Đại số tổ hợp.

• **Newton, Leibniz, và Bernoulli**

Việc phát hiện phép tính vi phân vào cuối thế kỉ 17 kéo theo những ứng dụng khác của các hệ số nhị thức. Isaac Newton mở rộng khi khai triển $(a+b)^n$ đến số mũ không nguyên, có nhiều ứng dụng trong giải tích. Leibniz trình bày một cách tổng quát công thức nhị thức, bằng cách phát biểu khai triển của $(a_1 + a_2 + ... + a_m)^n$ trong một lá thư viết gửi cho Jacques Bernoulli năm 1695. Ông đề nghị một cách biểu diễn của đạo hàm bất kì của tích hai hàm số.

Jacques Bernoulli tiếp cận đại số tổ hợp trong Ars Conjectandi (công bố năm 1713, 8 năm sau khi ông mất).

Trong phần 2 của Ars Conjectandi, ông đưa vào khái niệm phép thử ngẫu nhiên (phép thử Bernoulli), lấy giá trị là 0 và 1 với xác suất theo thứ tự là $1-p$ và p.

Bernoulli cũng chứng minh được công thức tính số cấu hình tổ hợp

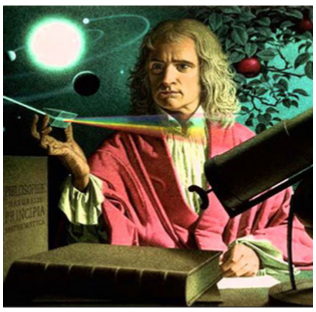
$$C_n^r = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-r+1)}{1.2.3...r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Ông củng cố hai qui tắc tính số hoán vị n vật khi chúng khác nhau hoàn toàn hoặc một số chúng sẽ giống nhau là $n!$ và $\frac{n!}{n_a!n_b!}$ với n_a là vật của loại a, n_b là vật của loại b,...

Thuật ngữ Tổ hợp (*Combinaison*) được sử dụng trong toán học từ cuối thế kỉ 17, Michel Rolle và Isaac Newton đề nghị, trong phương pháp giải hệ các phương trình, các phương pháp tổ hợp và phương pháp thế (*methode de substitution*). Việc đầu tiên là ở chỗ tìm kiếm một phương trình mới bằng cách thêm vào hoặc bớt đi giữa chúng. Leibniz cũng sử dụng từ conternaison để chỉ một combinaison của 3 phần tử. Về sau, nghĩa mở rộng được liên kết đôi đã bị làm mờ nhạt đi, và người ta chỉ định rằng tổ hợp là tập hợp một số phần tử không kể thứ tự của chúng. Người ta cũng phân biệt khái niệm tổ hợp, chọn p phần tử trong n phần tử, cũng như khái niệm chỉnh hợp, khi người ta sắp xếp các phần tử được chọn.

Từ Đại số tổ hợp (*combinatoire*), xuất hiện khoảng năm 1730, là tập hợp tất cả những vấn đề liên quan đến việc đếm.

Jacob Bernoulli



Sir Isaac Newton

Gottfried Wilhelm Leibniz

1.3 Đầu thế kỉ XVIII đến cuối thế kì XIX: bài toán tồn tại cấu hình và mối liên hệ với lý thuyết đồ thị.

Ở thế kỉ 18, nền tảng của giải tích tổ hợp được xây dựng, có thể thấy ứng dụng của nó trong nhiều lĩnh vực khác nhau.

Ý định giải phương trình bậc 5 dẫn đến các nhận xét mới. Joseph Larange nghiên cứu số các hoán vị của nghiệm của các phương trình. Niels Abel và Évariste Galois chứng minh được rằng không thể giải phương trình bậc 5. Galois bằng cách đưa vào nhóm các hoán vị, làm một cuộc cách mạng hóa đại số, và cho phép hình thức hóa lý thuyết các nhóm cuối thế kỉ 19. Từ đó, giải tích tổ hợp tiếp tục phát triển...

Trong nửa cuối thế kỉ 19, Authur Cayley ($1829-1895$) giải một số bài toán của Đại số tổ hợp bằng việc sử dụng graph, và ông gọi dưới tên là 'cây' (arbres).

★ **Các bài toán quan trọng.**

Ở giai đoạn này, xuất hiện một số bài toán có vai trò quan trọng trong sự phát triển của Đại số tổ hợp.

• **Euler và bài toán về 36 sĩ quan**

Bài toán này được Euler đề nghị, nội dung của nó như sau: có một lần người ta triệu tập từ 6 trung đoàn, mỗi trung đoàn 6 sĩ quan thuộc 6 cấp bậc khác nhau: thiếu úy, trung úy, thượng úy, đại úy, thiếu tá, trung tá về tham dự duyệt binh ở sư đoàn bộ. Hỏi rằng có thể xếp 36 sĩ quan này thành một đội ngũ hình vuông sao cho trong mỗi một hàng ngang cũng như mỗi một hàng dọc đều có đại diện của cả 6 trung đoàn của cả 6 cấp bậc.

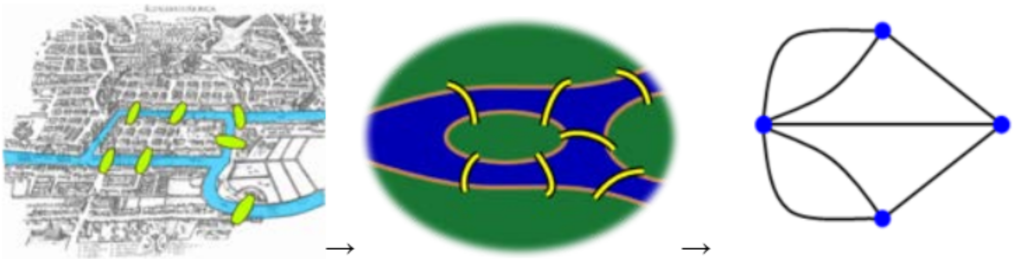
Euler đã mất rất nhiều công sức để tìm lời giải cho bài toán 36 sĩ quan thế nhưng ông đã không thành công. Vì vậy, ông đã đề ra giả thuyết là cách xếp như vậy không tồn tại. Giả thuyết này được nhà toán học Pháp chứng minh năm 1901 bằng cách duyệt tất cả mọi khả năng xếp. Euler căn cứ vào sự không tồn tại lời giải khi $n = 2$ và $n = 6$ còn đề ra một giả thuyết tổng quát hơn là: không tồn tại hình vuông la-tinh trực giao cấp $n = 4.k + 2$. Giả thuyết này đã tồn tại suốt hai thế kỷ, mãi đến năm 1960, ba nhà toán học Mỹ là Boce, Parker, Srikanda mới chỉ ra được một lời giải với $n = 10$ và sau đó chỉ ra phương pháp xây dựng hình vuông la tinh trực giao cho mọi $n = 4.k + 2$, với $k > 1$.

Trong các mục nêu trên, bằng việc điểm qua các giai đoạn lịch sử, ta thấy được bài toán đặc trưng của Đại số tổ hợp là bài toán đếm số cấu hình tổ hợp. Trong những bài toán đó có sự tồn tại của các cấu hình là hiển nhiên và công việc chính là đếm số phần tử thỏa mãn tính chất đặt ra. Tuy nhiên, ở đây, khó khăn mà Euler gặp phải là phải chỉ ra sự tồn tại hay không các cấu hình thỏa mãn bài toán. Như vậy, trong tổ hợp xuất hiện một vấn đề thứ hai rất quan trọng là: xét sự tồn tại của các cấu hình tổ hợp với các tính chất cho trước. Các bài toán dạng này được gọi là **bài toán tồn tại tổ hợp**.

• **Bài toán bảy cây cầu Euler**

Bài toán còn được gọi là **Bảy cầu ở Königsberg** xuất phát từ thành phố Königsberg, Đức (nay là Kaliningrad, Nga) nằm ở trên sống Pregel, bao gồm hai hòn đảo lớn nối với nhau và với đất liền bởi bảy cây cầu. Câu hỏi đặt ra là có thể đi theo một tuyến đường mà đi qua mỗi cây cầu đúng một lần rồi quay lại xuất phát điểm hay không. Năm 1736, Leonhard Euler đã chứng minh rằng điều đó là không thể được.

Để chứng minh kết quả, Euler đã phát biểu bài toán bằng các thuật ngữ của lý thuyết đồ thị. Ông loại bỏ tất cả các chi tiết ngoại trừ các vùng đất và cây cầu, sau đó thay thế mỗi vùng đất bằng một điểm, gọi là đỉnh hoặc nút, và thay mỗi cây cầu bằng một đoạn nối, gọi là cạnh hoặc liên kết. Cấu trúc toán học thu được gọi là **một đồ thị**.

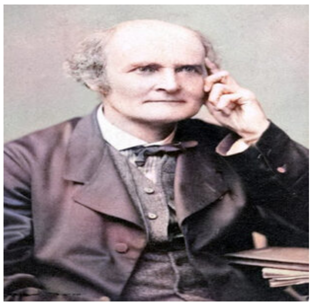


Hình ảnh minh họa Bài toán bảy cầu cầu Euler

Ngoài ra, nhận xét của Euler rằng thông tin quan trọng là số cây cầu và danh sách các vùng đất ở đầu cầu (chứ không phải vị trí chính xác của chúng) đã là dấu hiệu cho sự phát triển của ngành tôpô học. Sự khác biệt giữa sơ đồ thực và sơ đồ đồ thị là một ví dụ tốt rằng tôpô học không quan tâm đến hình thù cứng nhắc của các đối tượng.

Leonhard Euler

Joseph Louis Lagrange



Arthur Cayley

1.4 Thế kỉ XX: đối tượng của toán học rời rạc

Hiện nay, lý thuyết tổ hợp được áp dụng trong nhiều lĩnh vực khác nhau: lý thuyết số, hình học hữu hạn, biểu diễn nhóm, đại số không giao hoán, quá trình ngẫu nhiên, thống kê xác suất, quy hoạch thực nghiệm...

Đặc biệt, Toán học tổ hợp được dùng nhiều trong khoa học máy tính để ước lượng số phần tử của các tập hợp.

1.5 Một số kết luận

Việc tổng hợp, phân tích các kết quả nghiên cứu lịch sử của Đại số tổ hợp cho phép ta hình dung được quá trình nảy sinh, phát triển của nó, và đặc biệt là một số đặc trưng khoa học chủ yếu của tổ hợp.

1.5.1 Các giai đoạn nảy sinh và phát triển

- Giai đoạn 1: Từ thời Cổ đại đến nửa đầu thế kỉ XVII: Bài toán đếm các cấu hình khác nhau của một tập hợp. Đối tượng của các bài toán đếm là các nhóm mà phần tử của nó là rời rạc và hữu hạn. Ở thời kì này, các đối tượng cơ bản của tổ hợp chưa được chính thức định nghĩa.

- Giai đoạn 2: Nửa sau thế kỉ XVII: lý thuyết tổ hợp được hình thành như một ngành toán học mới, phát triển mạnh mẽ cùng với lý thuyết xác suất. Các khái niệm cơ bản của tổ hợp như hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp được gọi tên và định nghĩa. Các công thức tính số hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp được chứng minh bằng phương pháp qui nạp.

- Giai đoạn 3: Đầu thế kỉ XVIII đến cuối thế kỉ XIX: bài toán tồn tại cấu hình và mối liên hệ với lý thuyết đồ thị.

- Giai đoạn 4: Thế kỉ XX: đối tượng của toán học rời rạc.

1.5.2 Phạm vi tác động của khái niệm tổ hợp và các bài toán có liên quan

• Phạm vi tác động của khái niệm tổ hợp

- Phạm vi lý thuyết xác suất: Đại số tổ hợp là công cụ hiệu quả trong tính toán xác suất ở trường hợp đồng khả năng. Khái niệm xác suất và khái niệm tổ hợp có mối quan hệ tương hỗ trợ nhau trong tiến trình phát triển.

- Phạm vi lý thuyết tập hợp: Đối tượng của Đại số tổ hợp là các tập hợp mà số phần tử là hữu hạn và tính chất đặc trưng của các phần tử là rời rạc. Vì vậy, Đại số tổ hợp được xem như là một bộ phận của lý thuyết tập hợp hữu hạn. Mặt khác, ngôn ngữ tập hợp được sử dụng để trình bày các kết quả của lý thuyết tổ hợp, khiến cho việc thao tác trên các đối tượng tổ hợp trở nên dễ dàng hơn.

- Phạm vi lý thuyết đồ thị.

- Phạm vi lý thuyết số.

- Phạm vi lý thuyết nhóm.

- Phạm vi toán học hữu hạn.

• Các bài toán có liên quan

- Đếm tất cả các nước đi của trờ chơi cờ, domino.

- Đếm số các từ được tạo thành từ một số chữ cái.

- Bài toán tính toán các cơ hội thắng cuộc trong các trò chơi ngẫu nhiên.

- Bài toán sắp xếp và liệt kê các phần tử của một tập hợp.

- Bài toán chọn và phân phối các vật.

1.5.3 Các đối tượng có liên quan

Sự phát triển của lý thuyết tổ hợp gắn liền với các khái niệm phát triển đồng thời với nó.

- Khái niệm xác suất: Sự nảy sinh và phát triển khái niệm xác suất trong lịch sử có vai trò thúc đẩy sự phát triển mạnh mẽ của lý thuyết tổ hợp trong giai đoạn đầu. Đại số tổ hợp trở thành công cụ hiệu quả cho tính toán xác suất.

- Tập hợp, tập hợp hữu hạn: Việc xác định một tập hợp được đưa về việc biết tất cả các phần tử của nó. Các phần tử này được chỉ ra bằng các đặc trưng của chúng bởi dấu hiệu chung nào đó, hoặc bằng cách liệt kê chúng ra. Phương pháp liệt kê các phần tử của tập hợp chỉ thực hiện được, nếu tập hợp đã cho có một số hữu hạn phần tử. Những tập hợp như thế được gọi là tập hợp hữu hạn. Đặc trưng cơ bản của một tập hợp hữu hạn là số phần tử của nó.

- Lập luận quy nạp: các nhà toán học đã sử dụng phương pháp quy nạp trong việc tìm kiếm và chứng minh các công thức, kết quả quan trọng của Đại số tổ hợp như số hoán vị của n phần tử, số chỉnh hợp, ...

1.5.4 Các bài toán đặc trưng của Đại số tổ hợp

- Bài toán đếm: Đây là các bài toán nhằm trả lời câu hỏi "Có bao nhiêu cấu hình thỏa mãn điều kiện đã nêu ?". Phương pháp đếm thường dựa vào một số nguyên lý cơ bản và một số kết quả đếm các cấu hình đơn giản. Bài toán đếm được sử dụng trong việc tính toán xác suất và một số lĩnh vực khác.

- Bài toán liệt kê: Bài toán này quan tâm đến tất cả cấu hình có thể có được. Cụ thể là cần phải chỉ rõ những cấu hình tổ hợp đó là những cấu hình nào, cũng như việc sắp xếp và liệt kê các cấu hình theo thứ tự cần thiết. Vì vậy, để giải bài toán này, thuật toán "vét cạn" tất cả các cấu hình được sử dụng.

- Bài toán tồn tại: Với bài toán này, việc "có hay không có" cấu hình còn là điều nghi vấn. Đây là một bài toán khó ở Đại số tổ hợp, vì việc chỉ ra một cách xây dựng cấu hình hoặc chứng minh rằng chúng không có là điều không đơn giản.

- Bài toán tối ưu: Là bài toán lựa chọn trong số các cấu hình tổ hợp chấp nhận được cấu hình có giá trị sử dụng tốt nhất.

2 Quy tắc đếm:

Phần này chúng ta sẽ tìm hiểu về những kiến thức cơ bản về Đại số tổ hợp gồm hai quy tắc đếm thường dùng là quy tắc cộng và quy tắc nhân và sơ đồ hình cây

2.1 Quy tắc cộng và sơ đồ hình cây:

2.1.1 Quy tắc cộng:

Định nghĩa 2.1

Giả sử một công việc có thể được thực hiện theo phương án A hoặc B. Phương án A có **m** có cách thực hiện, phương án B có **n** cách thực hiện không trùng với bất kì cách nào của phương án A. Khi đó, công việc có thể thực hiện theo **m** + **n** cách.

Chú ý: Số phần tử của tập hợp hữu hạn X được kí hiệu là $|X|$ hoặc $n(X)$

Quy tắc cộng được phát biểu ở trên thực chất là quy tắc đếm số phần tử của hợp hai tập hợp hữu hạn không giao nhau.

Nếu A và B là các tập hợp hữu hạn không giao nhau thì $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

Tuy nhiên, trong nhiều bài toán tổ hợp; chúng ta phải tính số phần tử của hợp hai tập hợp hữu hạn A và B có giao khác rỗng. Trong trường hợp này, khi cộng số phần tử của A với số phần tử của B, thì số phần tử của $A \cap B$ được tính 2 lần. Từ có, ta có quy tắc cộng mở rộng :

- Cho hai tập hợp hữu hạn bất kì A và B. Khi đó, số phần tử của A∪B bằng số phần tử A cộng với số phân tử của B rồi trừ đi số phần tử của $A \cap B$, tức là:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

- Từ đó với ba tập hợp hữu hạn bất kì A, B và C bất kì, ta có:

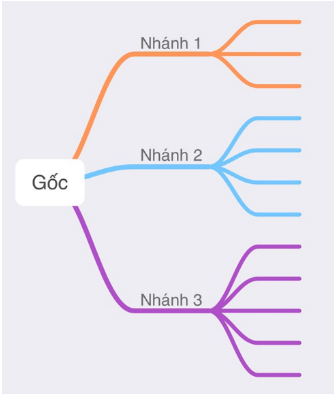
$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

Mở rộng: Một công việc được hoàn thành bởi K hành động $A_1, A_2, A_3, ..., A_k$. Nếu hành động A_1 có m_1 cách thực hiện, hành động A_2 có m_2 cách thực hiện,..., hành động A_k có m_k cách thực hiện và các cách thực hiện của các hành động trên không trùng nhau thì công việc đó có $m_1 + m_2 + m_3 + ... + m_k$ cách thực hiện.

2.1.2 Sơ đồ hình cây:

Định nghĩa 2.2

Sơ đồ hình cây (hay còn gọi là sơ đồ cây) là sơ đồ minh họa cách phân chia các trường hợp bắt đầu tại một nút duy nhất với các nhánh tỏa ra các nút bổ sung.



Một trong các sơ đồ hình cây

Sơ đồ cây được sử dụng trong toán học, cụ thể hơn là trong lý thuyết xác suất - như một công cụ để giúp tính toán và cung cấp một biểu diễn trực quan về xác suất. Kết quả của một sự kiện nhất định có thể được tìm thấy ở cuối mỗi nhánh trong sơ đồ hình cây.

Trong bài toán đếm, việc sử dụng sơ đồ hình cây để minh họa cho việc đếm thuận tiện và không bỏ sót các trường hợp. Bên cạnh đó ta có thể sử dụng sơ đồ hình cây để đếm số cách hoàn thành một công việc khi công việc nó đòi hỏi những hành động liên tiếp.

2.2 Quy tắc nhân:

Định nghĩa 2.3

Một công việc được hoàn thành bởi hai hành động liên tiếp. Nếu có **m** cách thực hiện hành động thứ nhất và ứng với mỗi cách đó có **n** cách thực hiện hành động thứ hai thì công việc đó có **m.n** cách thực hiện.

Mở rộng: Một công việc được hoàn thành bởi k hành động $A_1, A_2, A_3, ..., A_k$ liên tiếp. Nếu hành động A_1 có m_1 cách thực hiện, ứng với mỗi cách thực hiện hành động A_1 có m_2 cách thực hiện hành động A_2,..., có m_k cách thực hiện hành động A_k thì công việc đó có $m_1.m_2.m_3....m_k$ cách thực hiện.

2.3 Quy tắc bù trừ (Nguyên lý bù trừ)

Định nghĩa 2.4

Khi H là hành động được chia nhiều trường hợp thì ta sẽ đếm phần bù của bài toán theo cách sau:

• Đầu tiên, đếm số phương án thực hiện hành động H không xét đến yếu tố có thỏa mãn tính chất T hay không, từ đó ta sẽ suy ra được **a** phương án.

• Sau đó đếm số phương án làm thực thiện hành động H, không thõa mãn tính chất T, từ đó ta có **b** phương án.

Từ đó: ta có yêu cầu bài toán có những phương án thõa mãn $\mathbf{a} - \mathbf{b}$.

3 Hoán vị - Chỉnh hợp - Tổ hợp

3.1 Giai thừa

Định nghĩa 3.1

Cho n là một số tự nhiên dương ($n \geqslant 1$), ta định nghĩa n **giai thừa** là tích của n số tự nhiên dương đầu tiên. Ký hiệu: **n!**

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times ... \times (n-1) \times n$$

Hoặc ta có thể viết

$$n! = n \times (n-1) \times ... \times 3 \times 2 \times 1$$

Tính chất 3.1

- $(n+1)! = (n+1) \times n! = (n+1) \times n \times (n-1)!$ (với $n > 0$)
- $n! = n \times (n-1)!$ (với $n \geqslant 1, n \in \mathbb{N}$)
- $1! = 1$ và quy ước $0! = 1$

Chú ý: Với quy ước của **Tính chất 3.1** thì từ giờ chúng ta cần nhớ rằng:
Kí hiệu $n!$ chỉ có nghĩa khi và chỉ khi $n \in \mathbb{N}$ hay $n \geq 0$, $n \in \mathbb{Z}$.

3.2 Hoán vị

Khái niệm hoán vị diễn tả ý tưởng rằng những đối tượng phân biệt có thể được sắp xếp theo những thứ tự khác nhau và được **Định nghĩa 3.2** dưới đây:

Định nghĩa 3.2

Cho tập hợp A gồm n phần tử ($n \geqslant 1$)

Mỗi kết quả của sự sắp xếp thứ tự n phần tử của tập hợp A được gọi là một **hoán vị** của n phần tử đó.

Nếu tách riêng nghĩa của từng từ ra, chúng ta có thể hiểu đơn giản rằng "hoán" ở đây nghĩa là hoán đổi và "vị" ở đây nghĩa là vị trí.

Định nghĩa 3.3

Số các hoán vị của một tập hợp có n phần tử là P_n.

$$P_n = n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times 2 \times 1$$

3.3 Chỉnh hợp

Định nghĩa 3.4

-Cho tập A gồm **n** phần tử ($n \geqslant 1$) và số nguyên k với $1 \leqslant k \leqslant n$. Mỗi cách lấy **k** phần tử khác nhau từ **n** phần tử của tập A và **sắp xếp chúng theo một thứ tự** được gọi là một **chỉnh hợp chập k của n phần tử đã cho**.

Định nghĩa 3.5

Số chỉnh hợp chập k của n phần tử khác nhau đã cho được kí hiệu là: A_n^k.

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n \times (n-1) \times ... \times (n-k+1) \quad \text{(Với quy ước } 0! = 1)$$

Tính chất 3.2

- Công thức ở **Định nghĩa 3.7** cũng đúng cho trường hợp $\mathbf{k = 0}$ và $\mathbf{k = n}$.
- Khi $\mathbf{k = 0}$ thì $A_n^0 = 1$.
- Khi $\mathbf{k = n}$ thì $A_n^1 = P_n = n!$

3.4 Tổ hợp

Định nghĩa 3.6

Giả sử tập A có **n** phần tử ($n \geqslant 1$). Mỗi tập con gồm **k** phần tử ($1 \leqslant k \leqslant n$) của A được gọi là **một tổ hợp chập k của n phần tử** đã cho.

Định nghĩa 3.7

Số các tổ hợp chập k của n phần tử được kí hiệu là: C_n^k

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \times (n-k)!} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times (n-k+1)}{k!}$$

Tính chất 3.3

- $C_n^0 = C_n^n = 1$.
- $C_n^k = C_n^{n-k}$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$.
- $C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$.
- $C_n^k = \dfrac{n-k+1}{k} \times C_n^{k-1}$.
- $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = n^2$

3.5 Quy tắc đếm tổ hợp, chỉnh hợp và hoán vị

3.5.1 Quy tắc đếm tổ hợp

Định nghĩa 3.8

Cho một tập hợp A bao gồm có **n** phần từ (n > 0) và số tự nhiên **k**.

Một tổ hợp chập **k** ($0 \leqslant k \leqslant n$) bất kì của các phần tử thuộc tập hợp A là **một tập hợp con có k phần tử** của A.

Số tổ hợp được tính theo công thức:

$$n! \times (n-k)!$$

3.5.2 Quy tắc đếm chỉnh hợp

Định nghĩa 3.9

Cho một tập hợp A bao gồm **n** phần tử ($n \geqslant 1$) và số tự nhiên **k**.

Một chỉnh hợp chập **k** của các phần tử của tập hợp A là một cách sắp xếp **k** phần tử khác nhau của A.

Số chỉnh hợp được tính theo công thức:

$$n! \times k! \times (n-k)!$$

3.5.3 Quy tắc đếm hoán vị

Định nghĩa 3.10

Với tập hợp bao gồm **n** phần tử khác nhau, ta có thể thiết lập được một hoán vị của **r** phần tử từ tập hợp này như sau:

- Chọn phần tử đầu tiên, ta có tổng cộng **n** cách xếp.

- Chọn phần tử thứ hai, ta có **n - 1** cách xếp hoán vị.
...
Tương tự trong trường hợp ta chọn phần tử thứ **r**, ta sẽ có **r - 1** cách xếp hoán vị

• Trong trường hợp **r = n**, ta có được công thức tính số lượng các hoán vị khác nhau của **n** phần tử với công thức: $P(n) = n!$.

• Trong trường hợp **r < n** số hoán vị được tinh theo công thức sau: $P(n,r) = n! \times (n-r)!$

3.6 Phân phối nhị thức (Binomial Distribution)

Xét ví dụ sau: Tung 3 đồng xu đồng chất.

Gọi X là biến cố số lần xuất hiện mặt ngửa $\Longrightarrow X = \{0; 1; 2; 3\}$

Xét mỗi đồng xu, xác suất xuất hiện mặt ngửa cũng như mặt sấp đều bằng $\frac{1}{2}$

Do đó:

$\mathbb{P}(X = 0) = C_3^0.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$
$\mathbb{P}(X = 1) = C_3^1.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{3}{8}$ (C_3^1: Vị trí đồng xu xuất hiện mặt ngửa)
$\mathbb{P}(X = 2) = C_3^2.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{3}{8}$ (C_3^2: Vị trí 2 đồng xu xuất hiện mặt ngửa)
$\mathbb{P}(X = 3) = C_3^3.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ (C_3^3: Vị trí 3 đồng xu xuất hiện mặt ngửa)

Bây giờ, xét trường hợp tung 3 đồng xu không đồng chất. Ở mỗi đồng xu, xác suất xuất hiện mặt ngửa là p ngược lại xác suất xuất hiện mặt sấp là $1 - p$. Khi đó:

$\mathbb{P}(X = 0) = C_3^0.(1-p).(1-p).(1-p) = C_3^0(1-p)^3$

$\mathbb{P}(X = 1) = C_3^1.p.(1-p).(1-p) = C_3^1.p.(1-p)^2$

$\mathbb{P}(X = 2) = C_3^2.p.p.(1-p) = C_3^2.p^2.(1-p)$

$\mathbb{P}(X = 3) = C_3^3.p.p.p = C_3^3.p^3$

Đó chính là 1 ví dụ cho mô hình phân phối nhị thức (Binomial Distribution)

Xét 1 phép thử ngẫu nhiên, mà trong đó ta chỉ thực hiện 1 chuỗi gồm n phép thử độc lập với nhau, thoả điều kiện:

(i) Mỗi phép thử chỉ có 2 kết quả, đặt là "success" (tương ứng với 1) và "failure" (tương ứng với 0)

(ii) Với mỗi phép thử trong n phép thử trên, xác suất để kết quả "success" xảy ra đều là p với $0 < p < 1$

Khi đó, đặt X là biến ngẫu nhiên thể hiện số lần kết quả "success" xảy ra trong n phép thử trên. Do đó, X tuân theo phân phối nhị thức với tham số n và p. Kí hiệu $X \sim B(n, p)$.

Lưu ý: Mỗi phép thử trong n phép thử trên được gọi là phép thử Bernoulli.

Ta có: X nhận giá trị $\{0, 1, 2, .., n\}$ với $n \in \mathbb{N}$.

Tổng quát: Từ ví dụ trên, ta có:

Hàm trọng lượng xác suất thể hiện xác suất xuất hiện k lần kết quả "success", $k \in \mathbb{N}$.

$$f(k) = \mathbb{P}(X = k) = \begin{cases} C_n^k.p^k.(1-p)^{n-k} & , k \in \mathbb{N} \\ 0 & , k \text{ khác} \end{cases}$$

4 Hoán vị lặp - Chỉnh hợp lặp - Tổ hợp lặp

4.1 Hoán vị lặp

Định nghĩa 4.1

- Cho k phần tử khác nhau $a_1, a_2, ..., a_k$. Một cách sắp xếp n phần tử trong đó gồm n_1 phần tử a_1, n_2 phần tử a_2,..., n_k phần tử a_k (trong đó $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$) theo một thứ tự nào đó được gọi là **hoán vị lặp cấp n** và kiểu $(n_1, n_2, ..., n_k)$ của k phần tử.

- Số các hoán vị lặp dạng như trên là:

$$P_n(n_1, n_2, ..., n_k) = \frac{n!}{n_1! \times n_2! \times ... \times n_k!}$$

Ví dụ 4.1

Từ các số của tập $A = \{2; 4; 6; 8\}$ lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm bảy chữ số, trong đó chữ số 2 xuất hiện đúng hai lần; chữ số 4 xuất hiện 2 lần; chữ số 6 xuất hiện 2 lần và chữ số 8 xuất hiện 1 lần.

Với **Ví dụ 3.1**, Mỗi cách lập số có 7 chữ số thỏa mãn: chữ số 2 xuất hiện đúng 2 lần; chữ số 4 xuất hiện 2 lần; chữ số 6 xuất hiện 2 lần và chữ số 8 xuất hiện 1 lần là hoán vị lặp của 7 phần tử.

Theo quy tắc hoán vị lặp thì sẽ có tất cả:

$$P_7(2, 2, 2, 1) = \frac{7!}{2! \times 2! \times 2! \times 1!} = 630 \text{ (số)}$$

Vậy từ tập A có thể lập được 630 số thỏa yêu cầu bài toán.

4.1.1 Hoán vị vòng quanh (Hoán vị vòng)

Định nghĩa 4.2

Cho tập A gồm **n** phần tử. Một cách sắp xếp **n** phần tử của tập A thành một dãy kín được gọi là **một hoán vị vòng quanh của n phần tử**

Số các hoán vị vòng quanh của **n** phần tử là: $Q_n = (n - 1)!$

Ví dụ 4.2

Cuối năm học, các học sinh giỏi lớp 11A gồm 12 học sinh có tổ chức ăn liên hoan. Tổ 1 có 3 học sinh giỏi, Tổ 2 có 4 học sinh giỏi, Tổ 3 có 2 học sinh giỏi và tổ 4 có 3 học sinh giỏi. Hỏi có bao nhiêu cách xếp các học sinh này vào 1 bàn tròn?

Với **Ví dụ 3.2**, việc xếp 12 học sinh giỏi này vào 1 bàn tròn là một hoán vị vòng quanh của 12 phần tử nên theo **Định nghĩa 3.12**, số cách xếp thõa mãn là:

$$Q_{12} = (12 - 1)! = 11! \text{ (cách)}$$

Vậy sẽ có 11! cách để xếp 12 học sinh này vào 1 bàn tròn.

4.2 Chỉnh hợp lặp

Định nghĩa 4.3

Cho tập A gồm **n** phần tử. Một dãy gồm **k** phần tử của A, trong đó **mỗi phần tử** có thể được **lặp lại nhiều lần**, được sắp xếp theo một thứ tự nhất định được gọi là **một chỉnh hợp lặp chập k của n phần tử** của tập A.

Định nghĩa 4.4

Số chỉnh hợp lặp chập k của n phần tử kí hiệu là: F_n^k

$$F_n^k = n^k$$

Ví dụ 4.3

Biển đăng kí ô tô có 6 chữ số và 2 chữ cái đầu tiên trong 26 chữ cái (không dùng chữ O và I). Hỏi số ô tô được đăng kí nhiều nhất là bao nhiêu?

Ta gọi X là tập hợp các chữ cái dùng trong bảng chữ cái đăng kí. Suy ra X có 24 phần tử (vì không dùng O và I). Hai chữ cái này có thể hoán vị cho nhau hoặc có thể giống nhau tùy ý, nên theo **Định nghĩa 3.14**, ta có số cách chọn cho hai chữ cái đầu tiên là:

$$F_{24}^2 = 24^2 \text{ (cách)}$$

Gọi Y là tập hợp các chữ số dùng trong bảng đăng kí. Suy ra Y có 10 phần tử. Các phần tử trong Y có thể hoán vị cho nhau hoặc có thể giống nhau tùy ý, nên theo **Định nghĩa 3.14**, ta sẽ có số cách chọn cho 6 chữ số là:

$$F_{10}^6 = 10^6 \text{ (cách)}$$

Vậy theo quy tắc nhân, số biển số xe được đăng kí là:

$$24^2 \times 10^6 = 576000000 \text{ (biển số)}$$

4.3 Tổ hợp lặp

Định nghĩa 4.5

Cho tập A = $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ và số tự nhiên k bất kì. **Một tổ hợp lặp chập k của n phần tử** là một tổ hợp gồm k phần tử, trong đó mỗi phần tử là một trong **n** phần tử của A.

Định nghĩa 4.6

Số tổ hợp lặp chập k của n phần tử được ký hiệu là: K_n^k

$$K_n^k = C_{n+k-1}^k = C_{n+k-1}^{n-1}$$

Ví dụ 4.4

Có bao nhiêu cách để chọn 4 quả từ một đĩa chứa táo, cam, lê nếu thứ tự các quả được chọn không quan trọng, chỉ quan trọng loại quả và số lượng quả, và có ít nhất 4 quả mỗi loại trong đĩa

Với **Ví dụ 3.8**, số cách để chọn 4 quả từ mỗi loại đĩa là số tổ hợp lặp chập 4 từ tập 3 phần tử bao gồm Táo, Cam, Lê là:

$$C_{n+k-1}^{n-1} = C_{3+4-1}^{3-1} = 15$$

Vậy sẽ có 15 cách chọn 4 quả từ đĩa gồm táo, cam , lê thỏa yêu cầu bài toán.

4 Táo	4 Cam	4 Lê
3 táo, 1 cam	3 cam, 1 lê	3 lê, 1 táo
3 táo, 1 lê	3 cam, 1 táo	3 lê, 1 cam
2 táo, 2 cam	2 cam, 2 lê	2 lê, 2 táo
2 táo, 1 cam, 1 lê	2 cam, 1 táo, 1 lê	2 lê, 1 cam, 1 táo

Hình ảnh minh họa **Ví dụ 3.8**

5 Các bài toán liên quan

5.1 Bài toán xếp vị trí

Bài toán xếp vị trí là việc sắp xếp một tập hợp các đối tượng vào các vị trí nhất định sao cho các ràng buộc và điều kiện được đưa ra được tuân thủ. Các đối tượng có thể là người, đồ vật, sự kiện, hoặc bất kỳ yếu tố nào khác có thể được xếp vị trí. Đây là một trong những vấn đề thường gặp và quan trọng trong đời sống hàng ngày cũng như trong nhiều lĩnh vực khác nhau như sự kiện tổ chức, quản lý nhân sự, quản lý lịch trình công việc và nhiều lĩnh vực khác. Ứng dụng của tổ hợp trong giải quyết bài toán này đã mang lại những giải pháp hiệu quả và linh hoạt, giúp tối ưu hóa quy trình xếp vị trí và tạo ra các kế hoạch tổ chức hiệu quả hơn.

Đặt vấn đề :

• Xếp n phần tử phân biệt thành một dãy liên tiếp, số cách xếp $P_n = n!$ cách.

• Xếp k phần tử phân biệt vào n vị trí, trong đó

- Mỗi vị trí xếp tối đa 1 vị trí, số cách xếp: A_n^k cách.

- Mỗi vị trí xếp tối đa k phần tử, số cách xếp: $F_n^k = n^k$ cách

• Cho k phần tử khác nhau $a_1, a_2, ..., a_k$. Số cách sắp xếp n phần tử trong đó gồm n_1 phần tử a_1, n_2 phần tử a_2,..., n_k phần tử a_k (trong đó $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$) theo một thứ tự nào đó được gọi là **hoán vị lặp cấp n** và kiểu $(n_1, n_2, ..., n_k)$ của k phần tử:

$$P_n(n_1, n_2, ..., n_k) = \frac{n!}{n_1! \times n_2! \times ... \times n_k!}$$

• Xếp n phần tử phân biệt thành một vòng tròn, số cách xếp: $(n-1)!$ cách

Ví dụ 5.1

Trong một buổi buổi tiệc gia đình có 10 nam và 10 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp sao cho:

a. 20 người ngồi quanh một bàn tròn.

b. 20 người ngồi vào hai dãy ghế đối diện nhau sao cho nam nữ ngồi đối diện nhau.

Hướng dẫn giải:

∗ Ý tưởng giải: Câu **a** ta sẽ áp dụng công thức. Câu **b** ta sẽ xếp nam thành 1 dãy và nữ thành 1 dãy. Sau đó hoán đổi vị trí mỗi cặp nam - nữ. Sau đây là lời giải chi tiết cho bài toán.

a.

- Số cách xếp 20 người này thành một bàn tròn là:

$$(20 - 1)! = 19! \text{ (cách)}$$

b.

- Số cách xếp 10 nam vào 1 dãy ghế:

$$P_{10} = 10! \text{ (cách)}$$

- Số cách xếp 10 nữ vào 1 dãy ghế:

$$P_{10} = 10! \text{ (cách)}$$

- Lúc này, nam và nữ đang ngồi đối diện nhau. Ta có thể đổi vị trí mỗi cặp nam - nữ đối diện nhau vẫn thỏa yêu cầu bài toán. Do đó, mỗi cặp nam - nữ đối diện sẽ có 2 cách xếp vị trí. Số cách xếp vị trí cho 10 cặp nam - nữ đối diện là:

$$2^{10} = 1024 \text{ (cách)}$$

- Áp dụng quy tắc nhân ta có số cách sắp xếp vị trí 20 người thỏa yêu cầu bài toán là:

$$10! \times 10! \times 2^{10} = 1024 \times (10!)^2 \text{ (cách)}$$

5.2 Bài toán tìm số

Bài toán này yêu cầu chúng ta tìm các số tự nhiên thỏa mãn một hoặc nhiều điều kiện cụ thể, chẳng hạn như số nguyên tố, số chia hết cho một số cố định, hoặc số có tính chất đặc biệt nào đó. Đây là một trong những vấn đề cơ bản và thú vị trong toán học. Ứng dụng của tổ hợp trong giải quyết bài toán này không chỉ giúp chúng ta hiểu sâu hơn về tính chất của các số tự nhiên mà còn cung cấp các phương pháp hiệu quả để tìm kiếm và phân tích các đặc điểm của chúng.

Đặt vấn đề :

• Ta cần xét tính bình đẳng, phân biệt của các chữ số:

- Nếu các chữ số bình đẳng, phân biệt: Dùng các công thức tính nhanh.

- Nếu các chữ số không bình đẳng, không phân biệt: Ta cần liệt kê, tách nhóm.

• Cần đặt ra câu hỏi:

- Các chữ số có khác nhau không?

- Có mặt chữ số 0 hay không?

• Số $\overline{a_1a_2\cdots a_n}$ với:

- $a_1 \neq 0$, $a_1 \in \{1; 2; \cdots; 9\}$.

- $a_2, a_3, \cdots a_n \in \{0; 1; 2; \cdots; 9\}$.

- Nếu không có điều kiện ràng buộc thì thường a_1 sẽ được chọn trước.

• Phải nắm được các dấu hiệu chia hết cho $2; 3; 4; 5; 6; 9$.

• Số $\overline{a_1a_2\cdots a_n}$ có:

- "$a_1 \times a_2 \cdots a_n$ lẻ $\Leftrightarrow a_1, a_2, \cdots, a_n$ lẻ".

- "$a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ lẻ $\Leftrightarrow$ Có k chữ số lẻ (k lẻ, $k \leqslant n$)"

• Nếu có từ "ít nhất", "không quá", "không có mặt", ... thì thường ta sẽ đi tìm bằng cách gián tiếp, tức là tìm phần bù.

• Nếu bài toán có điều kiện "phải có mặt chữ số nào đó" hay "chữ số có mặt n lần" thì thường ta sẽ thực hiện giải như giải bài toán xếp vị trí.

Ví dụ 5.2

Cho tập hợp $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. Từ tập A có thể lập được bao nhiêu số có 4 chữ số khác nhau thỏa mãn số đó lớn hơn 2018?

Hướng dẫn giải:

$*$ Ý tưởng giải: Ở bài này chúng ta có 2 cách giải là trực tiếp và gián tiếp (phần bù), nhưng với cách trực tiếp sẽ có nhiều trường hợp nên khi dung phần bù sẽ giúp ta giải bài toán được nhanh hơn. Ta sẽ chia 2 trường hợp là chữ số đầu tiên bằng 2 và khác 2, sau đó ta sẽ chọn các chữ số còn lại.

- Gọi $\overline{a_1a_2a_3a_4}$ $\left(a_i \in \mathbb{N}; a_1 \neq 0; a_i \leqslant 9; a_i \neq a_j; \forall i, j = \overline{1, 4}; i \neq j\right)$ là số có 4 chữ số khác nhau.

• Đầu tiên ta sẽ tìm số các số tự nhiên có 4 chữ số đôi một khác nhau.

- Số cách chọn a_1: $a_1 \neq 0$ nên có 9 cách chọn.

- Số cách chọn a_2, a_3, a_4: Chọn 3 chữ số khác nhau từ tập $A \setminus \{a_1\}$ nên có $A_9^3 = 504$ cách chọn.

- Áp dụng quy tắc nhân, số các số tự nhiên có 4 chữ số đôi một khác nhau là:

$$9 \times 504 = 4536 \text{ (số)}$$

• Tiếp theo, ta sẽ tìm số các số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau và không vượt quá 2018.

- Xét trường hợp $a_1 = 2$:

+ Khi đó có 6 số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau không vượt quá 2018 là $\overline{2013; 2018}$.

- Xét trường hợp $a_1 \neq 2$:

+ Số cách chọn a_1: Chỉ có 1 cách chọn là $a_1 = 1$.

+ Số cách chọn a_2, a_3, a_4: Chọn 3 chữ số khác nhau từ tập $A \setminus \{a_1\}$ nên có $A_9^3 = 504$ cách chọn.

+ Áp dụng quy tắc nhân, số các số thỏa mãn là:

$$1 \times 504 = 504 \text{ (số)}$$

- Áp dụng quy tắc cộng, số các số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau và không vượt quá 2018 là:

$$6 + 504 = 510 \text{ (số)}$$

• Số các số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau và lớn hơn 2018 là:

$$4536 - 510 = 4026 \text{ (số)}$$

• Vậy có tổng cộng 4026 số tự nhiên thỏa yêu cầu bài toán.

5.3 Bài toán chọn - rút - phân chia

Một trong những áp dụng phổ biến của toán tổ hợp là trong việc giải quyết các bài toán chọn, rút và phân chia.Bài toán chọn, rút và phân chia thường được mô tả như sau: Cho một tập hợp các phần tử, ta cần chia tập hợp đó thành các phần nhỏ hơn sao cho mỗi phần có số lượng phần tử nhất định. Bằng cách kết hợp các công thức hoán vị, tổ hợp, chỉnh hợp, chúng ta có thể giải quyết được những bài dạng như thế này. Bài toán này có thể được áp dụng trong nhiều ngữ cảnh thực tế, từ việc phân chia tài nguyên trong kinh doanh đến việc lập lịch trình trong sản xuất.

Đặt vấn đề :

Bài toán 1:

Cho tập hợp A có n phần tử, chia tập hợp A thành k nhóm:

• Nếu có quan tâm đến thứ tự nhóm:

- Nhóm 1: Chọn n_1 phần tử, số cách chọn: $C_n^{n_1}$.

- Nhóm 2: Chọn n_2 phần tử, số cách chọn: $C_{n-n_1}^{n_2}$.

- Nhóm 3: Chọn n_3 phần tử, số cách chọn: $C_{n-n_1-n_2}^{n_3}$.

....

- Nhóm k: Chọn n_k phần tử, số cách chọn: $C_{n_k}^{n_k}$.

$\rightarrow$ Số cách chia là: $C_n^{n_1}.C_{n-n_1}^{n_2}.C_{n-n_1-n_2}^{n_3}\cdots C_{n_k}^{n_k} = \dfrac{n!}{n_1!.n_2!\cdots n_k!}$.

• Nếu không quan tâm đến thứ tự nhóm:

$\rightarrow$ Số cách chia là: $\dfrac{C_n^{n_1}.C_{n-n_1}^{n_2}.C_{n-n_1-n_2}^{n_3}\cdots C_{n_k}^{n_k}}{k!} = \dfrac{n!}{n_1!.n_2!\cdots n_k!.k!}$.

Bài toán 2:

Cho tập A có n phần tử phân biệt, tập B có m phần tử phân biệt, cho $k \leqslant min\{m, n\}$.

- Số cách chọn k phần tử từ tập A : C_n^k.

- Số cách chọn k phần tử từ tập B : C_m^k.

- Số cách ghép thành k cặp: $k!$

$\rightarrow$ Số cách ghép: $C_n^k.C_m^k.k! = C_n^k.A_m^k$.

Ví dụ 5.3

Hội đồng quản trị của một công ty gồm 12 người, trong đó có 5 nữ. Từ hội đồng quản trị đó người ta bầu ra 1 chủ tịch hội đồng quản trị, 1 phó chủ tịch hội đồng quản trị và 2 ủy viên. Hỏi có mấy cách bầu sao cho trong 4 người được bầu phải có nữ?

Hướng dẫn giải:

$*$ Ý tưởng giải: Ở bài toán này ta sẽ dùng phương pháp bù trừ, ta sẽ tìm số cách bầu bất kỳ và số cách bầu không có nữ. Tiếp theo ta sẽ tìm số cách bầu có nữ. Sau đây là lời giải chi tiết cho bài toán.

• Đầu tiên ta sẽ tìm số cách bầu bất kỳ.

- Số cách chọn chủ tịch hội đồng quản trị: 12 cách.

- Số cách chọn phó chủ tịch hội đồng quản trị: 11 cách.

- Số cách chọn 2 ủy viên hội đồng quản trị: $C_{10}^2 = 45$ cách.

- Áp dụng quy tắc nhân, số cách bầu là:

$$12 \times 11 \times 45 = 5940 \text{ (cách)}$$

• Đầu tiên ta sẽ tìm số cách bầu sao cho không có người nữ nào được chọn.

- Số cách chọn chủ tịch hội đồng quản trị: 7 cách.

- Số cách chọn phó chủ tịch hội đồng quản trị: 6 cách.

- Số cách chọn 2 ủy viên hội đồng quản trị: $C_5^2 = 10$ cách.

- Áp dụng quy tắc nhân, số cách bầu là:

$$7 \times 6 \times 10 = 420 \text{ (cách)}$$

• Số cách bầu sao cho trong 4 người được bầu phải có nữ là:

$$5940 - 420 = 5520 \text{ (cách)}$$

• Vậy có 5520 cách bầu thỏa mãn yêu cầu bài toán.

5.4 Bài toán có yếu tố hình học

Trong toán học, sự kết hợp giữa tổ hợp và hình học tạo ra một lĩnh vực mạnh mẽ và đa dạng, cho phép chúng ta giải quyết nhiều bài toán phức tạp liên quan đến hình học một cách hiệu quả. Trên cơ sở của các nguyên lý cơ bản của tổ hợp như hoán vị, tổ hợp, chỉnh hợp và nguyên lý bổ sung, chúng ta có thể áp dụng chúng vào việc phân tích và giải quyết các vấn đề hình học với độ chính xác cao và tính toán hiệu quả. Trong nhiều trường hợp, chúng ta cần tính số lượng các hình học như tam giác, hình chữ nhật, hình vuông và các hình dạng khác hoặc là tính số đường chéo của một đa giác. Sử dụng các khái niệm của tổ hợp, chúng ta có thể tính toán số lượng các hình học hoặc đường chéo này một cách chính xác.

Đặt vấn đề :

Bài toán 1:

Cho n điểm trong không gian, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng:

- Số đoạn thẳng (đường thẳng) nối (đi qua) 2 điểm: C_n^2 (đoạn-đường thẳng).

- Số vector có điểm đầu, điểm cuối là 2 điểm:

+ Khác vector 0 : $A_n^2 = n\left(n-1\right)$ (vector).

+ Kể cả vector 0: n^2 (vector).

- Số tam giác có 3 đỉnh là 3 điểm: C_n^3 (tam giác) ($n \geqslant 3$).

- Bốn điểm bất kỳ không đồng phẳng, số tứ diện tạo ra từ 4 điểm: C_n^4 (tứ diện) ($n \geqslant 4$).

Bài toán 2:

Cho n điểm thuộc đường thẳng a và m điểm thuộc đường thẳng b. Biết a song song b ($m,n \geqslant 2$):

- Số tam giác tạo thành từ $m+n$ điểm: $C_m^1.C_n^2 + C_n^1.C_m^2 = \dfrac{mn\left(m+n-2\right)}{2}$ (hình).

- Số hình thang tạo thành từ $m+n$ điểm: $C_m^2.C_n^2 = \dfrac{mn\left(m-1\right)\left(n-1\right)}{4}$ (hình).

Bài toán 3:

Cho đa giác lồi n đỉnh (cạnh):

- Số đường chéo: $C_n^2 - n = \dfrac{n\left(n-3\right)}{2}$ (đường chéo)($n \geqslant 3$).

- Số đường chéo cùng đi qua một đỉnh: $n-3$ (đường chéo) ($n \geqslant 3$).

- Số tam giác được tạo thành:

+ Có 2 cạnh là 2 cạnh của đa giác: n (tam giác) ($n \geqslant 4$).

+ Có 1 cạnh là cạnh của đa giác: $n\left(n-4\right)$ (tam giác) ($n \geqslant 4$).

+ Không có cạnh nào là cạnh của đa giác: $C_n^3 - n - n\left(n-4\right)$ (tam giác) ($n \geqslant 4$).

Bài toán 4:

Cho đa giác đều $2n$ đỉnh (cạnh) với $n \geqslant 2$:

- Số đường chéo đi qua tâm: n (đường chéo).

- Số hình chữ nhật: C_n^2 (hình chữ nhật).

- Số tam giác vuông: $n\left(2n-2\right)$ (tam giác).

- Số tam giác không vuông: $C_{2n}^3 - n\left(2n-2\right)$ (tam giác).

Ví dụ 5.4

Cho đa giác đều có $2n$ cạnh nội tiếp đường tròn tâm O. Biết số tam giác có các đỉnh là 3 trong $2n$ đỉnh của đa giác gấp 20 lần số hình chữ nhật có các đỉnh là 4 đỉnh trong $2n$ đỉnh của đa giác. Tính số hình chữ nhật.

Hướng dẫn giải:

$*$ Ý tưởng giải: Ở bài toán này, ta sẽ áp dụng công thức để tìm số tam giác và số hình chữ nhật có thể tạo được từ $2n$ đỉnh của đa giác rồi từ đó giải quyết bài toán. Sau đây là lời giải chi tiết cho bài toán.

- Số tam giác có các đỉnh là 3 trong $2n$ đỉnh của đa giác là:

$$C_{2n}^3 = \frac{(2n)!}{(2n-3)!.3!} = \frac{2n\left(2n-1\right)\left(2n-2\right)}{6} = \frac{n\left(2n-1\right)\left(2n-2\right)}{3} \text{ (tam giác)}$$

- Số đường chéo đi qua tâm O của đa giác là: n (đường chéo)

- Số hình chữ nhật có các đỉnh là 4 trong $2n$ đỉnh của đa giác (cũng chính là cách chọn 2 đường chéo đi qua tâm O của đa giác) là:

$$C_n^2 = \frac{n!}{(n-2)!.2!} = \frac{n\left(n-1\right)}{2} \text{ (hình chữ nhật)}$$

- Theo đề bài,số tam giác có các đỉnh là 3 trong $2n$ đỉnh của đa giác gấp 20 lần số hình chữ nhật có các đỉnh là 4 đỉnh trong $2n$ đỉnh của đa giác nên ta có:

$$\frac{n\left(2n-1\right)\left(2n-2\right)}{3} = \frac{20n\left(n-1\right)}{2} \Leftrightarrow 2n-1 = 15 \Leftrightarrow n = 8$$

- Số hình chữ nhật là:

$$\frac{n\left(n-1\right)}{2} = \frac{8\left(8-1\right)}{2} = 28 \text{ (hình chữ nhật)}$$

- Vậy số hình chữ nhật có các đỉnh là 4 đỉnh trong $2n = 16$ đỉnh của đa giác là 28 hình.

5.5 Bài toán chia kẹo Euler trong tổ hợp đếm

Bài toán chia kẹo Euler là một bài toán tổ hợp cổ điển trong lý thuyết đồ thị và tổ hợp đếm. Nó được đặt tên theo nhà toán học người Thụy Sĩ, Leonhard Euler, người đã nghiên cứu nhiều vấn đề liên quan đến lý thuyết đồ thị.

Đặt vấn đề :

Thầy giáo có m viên kẹo chia cho n em học sinh sao cho mỗi em được ít nhất một viên kẹo. Hỏi có bao nhiêu cách chia hết kẹo cho các em?

Hướng dẫn

$*$ Nhận xét: Bước đầu tìm hiểu, ta thấy bài toán cũng khá là tự nhiên, với các trường hợp số nhỏ thì ta có thể sử dụng đếm "chay" kết hợp quy tắc cộng, nhân để tính được. Nhưng m, n lớn thì điều này gần như quá khó.

Sau đây sẽ là một cách giải quyết bài toán.

• Nếu $m < n$, không có cách phân phối thỏa mãn yêu cầu, vì số lượng kẹo không đủ để mỗi em nhận ít nhất một viên.

• Nếu $m \geqslant n$, có thể phân phối kẹo theo nhiều cách khác nhau.

- Thầy giáo đặt m viên kẹo lên mặt bàn, rồi sử dụng $n-1$ chiếc que để chia m chiếc kẹo thành n phần. Sau đó phát mỗi phần cho các em học sinh theo đúng thứ tự. Yêu cầu là thầy giáo không được xếp 2 cạnh nhau, giữa chúng không có kẹo.

- Ví dụ thầy giáo chia 12 viên kẹo hình ngôi sao cho 6 em học sinh. Đầu tiên thầy đặt các viên kẹo thành một dãy trên bàn như sau:

$$\bigstar\bigstar\bigstar\bigstar\bigstar\bigstar\bigstar\bigstar\bigstar\bigstar\bigstar\bigstar$$

- Sau đó thầy đặt $6-1=5$ que vào chỗ trống giữa các viên kẹo:

$$\bigstar \mid \bigstar\bigstar \mid \bigstar\bigstar\bigstar \mid \bigstar\bigstar \mid \bigstar \mid \bigstar\bigstar\bigstar$$

- Khi đó, ta có thể hiểu rằng, em học sinh thứ nhất nhận được 1 viên kẹo, em thứ 2 nhận được 2 viên kẹo, em thứ 3 nhận được 3 viên kẹo, em thứ 4 nhận được 2 viên kẹo, em thứ 5 nhận được 1 viên kẹo và em thứ 6 nhận được 3 viên kẹo.

- Quay về bài toán, khi này bài toán trở thành việc tính số cách xếp $n-1$ chiếc que vào $m-1$ chỗ trống giữa m viên kẹo sao cho không có 2 que nào đặt cùng một chỗ.

■ Do đó, số cách chia kẹo thỏa mãn đề bài là $\mathbf{C_{m-1}^{n-1}}$.

- Như ở ví dụ trên, số cách chia 12 viên kẹo cho 6 học sinh sao cho em nào cũng có ít nhất 1 viên kẹo là : $C_{11}^{5} = 462$ cách.

Bài toán mở rộng :

Cũng là bài toán trên, thầy giáo muốn chia m viên kẹo cho n em học sinh nhưng hôm đó có một số em mắc lỗi nên sẽ không được nhận kẹo. Hỏi có bao nhiêu cách chia?

Hướng dẫn

-Thầy giáo sẽ ra tạp hóa mua thêm n viên kẹo nữa. Sau đó thầy sẽ phân $m+n$ viên kẹo cho n em học sinh sao cho mỗi em nhận được 1 viên kẹo. Tiếp theo thầy sẽ thu lại mỗi em 1 viên kẹo.

-Khi đó, bài toán sẽ quay về bài toán ban đầu với $m+n$ viên kẹo và n học sinh.

■ Do đó, số cách chia kẹo thỏa mãn đề bài là $\mathbf{C^{n-1}_{m+n-1}}$.

Ví dụ 5.5

Tìm số cách chia 10 viên bi cho 5 đứa trẻ trong các trường hợp sau:

a) Không có hạn chế nào cả.

b) Đứa trẻ lớn nhất được ít nhất 2 viên bi.

c) Mỗi đứa trẻ được ít nhất 1 viên bi.

Hướng dẫn giải:

$*$ Ý tưởng giải: Ở bài toán này, ta sẽ áp dụng các công thức đã cho để giải quyết. Sau đây là lời giải chi tiết cho bài toán.

a)

- Yêu cầu bài toán là chia 10 viên bi cho 5 đứa trẻ mà không có hạn chế nào tức là không nhất thiết đứa trẻ nào cũng nhận được viên bi. Do đó số cách chia là:

$$C^{5-1}_{10+5-1} = C^4_{14} = 1001 \text{ (cách)}$$

- Vậy có tổng cộng 1001 cách chia thỏa yêu cầu bài toán.

b)

- Trước tiên ta lấy 2 viên bi cho đứa trẻ lớn nhất. Số cách: 1 cách.

- Số viên bi còn lại:

$$10 - 2 = 8 \text{ (viên bi)}$$

- Lúc này, bài toán trở thành tìm số cách chia 8 viên bi cho 5 đứa trẻ mà không có hạn chế nào cả. Do đó, số cách chia là:

$$C^{5-1}_{8+5-1} = C^4_{12} = 495 \text{ (cách)}$$

- Vậy có tổng cộng 495 cách chia thỏa yêu cầu bài toán.

c)

- Đây chính là bài toán mở đầu. Số cách chia 10 viên bi cho 5 đứa trẻ sao cho mỗi đứa được ít nhất 1 viên bi là:

$$C^{5-1}_{10-1} = C^4_9 = 126 \text{ (cách)}$$

- Vậy có tổng cộng 126 cách chia thỏa yêu cầu bài toán.

Ví dụ 5.6

Có bao nhiêu cách phân phát 7 quyển vở , 5 cái bút và 6 cây thước cho 3 học sinh?

Hướng dẫn giải:

∗ Ý tưởng giải: Ở bài toán này, ta sẽ áp dụng công thức tổ như bài toán chia kẹo Euler để giải quyết vấn đề. Sau đây là lời giải chi tiết cho bài toán.

- Vì những quyển vở được xem là giống hệt nhau và những cái bút, cây thước cũng được xem là giống hệt nhau nên các cách phân phát được xem là khác nhau nếu có học sinh nhận được số vở khác nhau hoặc số bút, số thước khác nhau.

- Số cách chia 7 quyển vở cho 3 học sinh:

$$C_{7+3-1}^{3-1} = C_9^2 = 36 \text{ (cách)}$$

- Số cách chia 5 cái bút cho 3 học sinh:

$$C_{5+3-1}^{3-1} = C_7^2 = 21 \text{ (cách)}$$

- Số cách chia 6 cây thước cho 3 học sinh:

$$C_{6+3-1}^{3-1} = C_8^2 = 28 \text{ (cách)}$$

- Áp dung quy tắc nhân, số cách phân phát 7 quyển vở và 5 cái bút cho 3 học sinh:

$$36.21.28 = 21168 \text{ (cách)}$$

- Vậy có tổng cộng 21168 cách chia thỏa yêu cầu bài toán.

5.6 Bài toán tìm số nghiệm nguyên

Để tìm số nghiệm nguyên dương của một phương trình tổng, chúng ta thường sử dụng phương pháp tổ hợp lặp.

Đặt vấn đề :

Cho phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = m$ $(m, n \in \mathbb{N}^*)$.

Tìm số nghiệm nguyên dương của phương trình trên.

Hướng dẫn:

- Nếu $m < n$: Phương trình vô nghiệm.

- Nếu $m \geqslant n$: Bài toán trở về thành bài toán chia kẹo Euler đó là tìm số cách chia m viên kẹo cho n đứa trẻ sao cho mỗi đứa trẻ đều nhận được ít nhất 1 viên kẹo.

Do đó, số nghiệm nguyên dương của phương trình trên là: C_{m-1}^{n-1} (nghiệm).

Ví dụ 5.7

Tìm số nghiệm nguyên không âm của phương trình:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20 \ (1)$$

Hướng dẫn giải:

Cách 1:

- Đặt $y_i = x_i + 1, \forall i = \overline{1,4}$.

- Khi đó, phương trình (1) đã cho có trở thành:

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 24 \ (2)$$

- Bài toán quay lại thành tìm số nghiệm nguyên dương của phương trình (2).

- Do đó, số nghiệm nguyên không âm của phương trình (1) là:

$$C_{m-1}^{n-1} = C_{24-1}^{4-1} = C_{23}^{3} = 1771 \text{ (nghiệm)}$$

- Vậy phương trình (1) có 1771 nghiệm nguyên không âm.

Cách 2:

- Đây chính là bài toán mở rộng của bài toán chia kẹo Euler, tức là tìm số cách phân chia 20 viên kẹo cho 4 đứa trẻ mà không có hạn chế gì, không nhất thiết mỗi đứa trẻ đều có kẹo.

- Do đó, số nghiệm nguyên không âm của phương trình (1) là:

$$C_{m+n-1}^{n-1} = C_{20+4-1}^{4-1} = C_{23}^{3} = 1771 \text{ (nghiệm)}$$

- Vậy phương trình (1) có 1771 nghiệm nguyên không âm.

Ví dụ 5.8

Tìm số nghiệm nguyên không âm của phương trình:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20 \ (1)$$

thỏa điều kiện: $x_1 \leqslant 3; x_2 \geqslant 2; x_3 > 4. (*)$

Hướng dẫn giải:

- Điều kiện $(*)$ có dạng:

$0 \leqslant x_1 \leqslant 3; x_2 \geqslant 2; x_3 \geqslant 5; x_4 \geqslant 0. (*)$

- Ta xét các điều kiện sau:

- $x_1 \geqslant 0; x_2 \geqslant 2; x_3 \geqslant 5; x_4 \geqslant 0. (**)$.
- $x_1 \geqslant 4; x_2 \geqslant 2; x_3 \geqslant 5; x_4 \geqslant 0. (***)$.

- Gọi a, b, c lần lượt là các số nghiệm nguyên không âm của phương trình (1) thỏa các điều kiện $(*)\,,(**)\,,(***)$.

- Ta có: $a = b - c$.

- Đầu tiên, ta tìm b. Đặt:

$$y_1 = x_1; y_2 = x_2 - 2; y_3 = x_3 - 5; y_4 = x_4.$$

- Phương trình (1) trở thành:

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 13 \ (2)$$

- Số nghiệm nguyên không âm của phương trình (1) thỏa điều kiện $(**)$ chính bằng số nghiệm nguyên không âm của phương trình (2). Do đó:

$$b = C_{13+4-1}^{4-1} = C_{16}^{3} = 560 \text{ (nghiệm)}$$

- Tiếp theo, ta tìm c. Đặt:

$$z_1 = x_1 - 4; z_2 = z_2 - 2; z_3 = x_3 - 5; z_4 = x_4.$$

- Phương trình (1) trở thành:

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 9 \ (3)$$

- Số nghiệm nguyên không âm của phương trình (1) thỏa điều kiện $(***)$ chính bằng số nghiệm nguyên không âm của phương trình (3). Do đó:

$$c = C_{9+4-1}^{4-1} = C_{12}^{3} = 220 \text{ (nghiệm)}$$

- Số nghiệm nguyên không âm của phương trình (1) thỏa điều kiện $(*)$ là:

$$a = b - c = 560 - 220 = 340 \text{ (nghiệm)}$$

- Vậy số nghiệm nguyên không âm của phương trình (1) thỏa điều kiện $(*)$ là 340 nghiệm.

6 Ứng dụng thực tế

Ví dụ 6.1: Bài toán cụ thể về Rút thăm trúng thưởng

Một cửa hàng tổ chức cuộc thi rút thăm trúng thưởng, có tất cả 20 phiếu được đựng trong một cái hộp trong đó có 6 phiếu trúng thưởng. Có 2 người lần lượt lên rút thăm và rút lần lượt không hoàn lại. Tính xác suất để người đầu rút được lá thăm trúng thưởng và người thứ hai rút được lá thăm trúng thưởng.

Hướng dẫn giải:

Gọi A,B lần lượt là biến cố của người thứ nhất, người thứ hai rút được lá thăm trúng thưởng.

Chọn 1 trong 6 lá thăm trúng thưởng để người thứ nhất rút là 1 tổ hợp chập 1 của 6 phần tử: C_6^1

Xác suất để người thứ nhất rút được lá thăm trúng thưởng là:

$$P(A) = \frac{C_6^1}{C_{20}^1} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

Do đây là rút thăm không hoàn lại nên trong hộp chỉ còn 5 lá thăm trúng thưởng và tổng chỉ còn lại 19 lá thăm.

Chọn 1 trong 5 lá thăm trúng thưởng còn lại là 1 tổ hợp chập 1 của 5 phần tử: C_5^1

Xác suất để người thứ hai rút được lá thăm trúng thưởng là:

$$P(B|A) = \frac{C_5^1}{C_{19}^1} = \frac{5}{19}$$

Xác suất để người thứ nhất rút được lá thăm trúng thưởng và người thứ hai rút được lá thăm trúng thưởng là:

$$P(AB) = P(A).P(B|A) = \frac{3}{10}.\frac{5}{19} = \frac{3}{38}$$

Ví dụ 6.2: Bài toán cụ thể về rủi ro trong sản xuất

Một nhà máy sản xuất linh kiện điện tử cho biết tỉ lệ phế phẩm của nhà máy 0.02%. Nhà máy sản xuất 15000 linh kiện. Tính xác suất để nhà máy có không quá 4 linh kiện hỏng.

Hướng dẫn giải:

Gọi X là biến ngẫu nhiên thể hiện số phế phẩm trong 15000 linh kiện

Ta có:

$X \sim B(15000, 0.02\% = 2^{-4})$

Xác suất để nhà máy có không quá 4 linh kiện hỏng:

$$P\left(X \leqslant 4\right) = \sum_{k=0}^{4} C_{15000}^{k}.\left(2^{-4}\right)^{k}.\left(1-2^{-4}\right)^{15000-k} \approx 0.8153 = 81.53\%$$

Ví dụ 6.3: Phương pháp liệt kê tổ hợp bằng phương pháp sinh

Viết chương trình liệt kê các dãy bao gồm k phần tử không lặp lấy từ tập hợp $A = \{a_1, ..., a_n\}$ gồm n phần tử cho trước.

Input:
Dòng đầu tiên gồm hai số nguyên dương n, k $(1 \leqslant k \leqslant n \leqslant 20)$
Dòng tiếp theo là dãy n số nguyên dương $a_1, ..., a_n (1 \leqslant a_i \leqslant 10^6)$

Output:
Xuất ra dãy k phần từ tương ứng theo từng dòng

Sample Input 1	Sample Output 1
5 3 1 2 3 4 5	1 2 3 1 2 4 1 2 5 1 3 4 1 3 5 1 4 5 2 3 4 2 3 5 2 4 5 3 4 5

Sample Input 2	Sample Output 2
5 3 2 4 7 9 10	2 4 7 2 4 9 2 4 10 2 7 9 2 7 10 2 9 10 4 7 9 4 7 10 2 9 10 7 9 10

Hướng dẫn:
- Đầu tiên, ta nhập mảng $a = \{a_1, ..., a_n\}$
- Tạo mảng combination để lưu trữ các chỉ số của tổ hợp. Khởi tạo các chỉ số từ 1 tới k.
- Mỗi dãy thỏa mãn yêu cầu là một tập hợp con gồm k phần tử khác nhau của mảng a, có dạng $\left\{a\left[combination\left[i\right]\right], i = \overline{1, k}\right\}$.
- Tập hợp con (cấu hình) đầu tiên là $F = \{a_1, a_2, ..., a_k\}$
- Tập hợp con (cấu hình) cuối cùng có dạng $L = \{a_{n-k+1}, a_{n-k+2}, ..., a_n\}$
- Ta gọi tập hợp con $X = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$ là đứng trước tập hợp $Y = \{y_1, y_2, ..., y_k\}$ nếu tìm được chỉ số t sao cho : $x_1 = y_1, x_2 = y_2, ..., x_{t-1} = y_{t-1},\ x_t < y_t$.. Nếu tập hợp Y tồn tại có nghĩa là hàm để sinh tổ hợp kế tiếp trả về giá trị $TRUE$, ngược lại sẽ trả về giá trị $FALSE$.

Phương pháp:
- Giả sử cấu hình hiện tại là $X = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$.
- Nếu X là cấu hình cuối cùng thì thuật toán kết thúc.
- Tìm từ phải sang trái của X, phần tử $x_i \neq n - k + i$.
- Thay x_i bởi x_{i+1}, thay các phần tử x_j bởi các phần tử $x_{i+(j-i)}$ với $j = \overline{i + 1, k}$

Sau đây là chương trình cho bài toán:

```cpp
#include <iostream>
#include <algorithm>
using namespace std;

// Hàm in ra một tổ hợp từ mảng mang, sử dụng chỉ số trong mảng arr
void MangTohop(int mang[], int arr[], int k){
    for (int i=0; i< k; i++){
        cout << mang[arr[i]] << " "; // In giá trị từ mảng mang dựa vào chỉ số trong arr
    }
    cout << endl; // Xuống dòng sau khi in một tổ hợp
}
// Hàm để sinh tổ hợp kế tiếp
bool SinhTohopKetiep(int arr[], int n, int k){
    for (int i = k - 1; i >= 0; i--) {
        // Nếu có vị trí i mà giá trị tại đó chưa đạt giới hạn trên
        if (arr[i] < n - k + i) {
            // Tăng giá trị tại vị trí i
            arr[i]++;
            // Cập nhật các giá trị phía sau i
            for (int j = i + 1; j < k; j++) {
                arr[j] = arr[j - 1] + 1;
            }
            return true; // Đã tạo được tổ hợp kế tiếp
        }
    }
    return false; // Không tạo được tổ hợp mới, đã đạt đến tổ hợp cuối cùng
}
// Hàm để sinh và in tất cả các tổ hợp k phần tử từ mảng mang
void Tohop(int mang[],int n, int k){
    int arr[k];
    if (n == 0) { // Trường hợp đặc biệt khi n = 0
        cout << "Không có cách chọn" << endl;
        return;
    }
    for(int i = 0; i < k; i++){
        arr[i] = i;
    }
    do {
        MangTohop(mang, arr, k); // In tổ hợp hiện tại
    } while (SinhTohopKetiep(arr, n, k)); // Tạo tổ hợp kế tiếp và kiểm tra điều kiện lặp
}
int main(){ // Nhận đầu vào n là số lượng phần tử và k là kích thước của tổ hợp
    int n, k;
    cout<<("Nhập số n phần tử của mảng: ");
    cin >> n;
        while (n < 0) {
        cout << "Lỗi cú pháp! n phải là số nguyên dương. Vui lòng nhập lại.\n";
        cout << "Nhập số n phần tử của mảng: ";
        cin >> n;
    }// điều kiện để đảm bảo n>=0
    cout << "Nhập số chập k mong muốn (k <= n): ";
    cin >> k;
    while (k < 0 || k > n) {
        if (k < 0) {
            cout << "Lỗi cú pháp! k phải là số nguyên dương. Vui lòng nhập lại.\n";
        } else {
            cout << "Lỗi cú pháp! k phải nhỏ hơn hoặc bằng n. Vui lòng nhập lại.\n";
        }
        cout << "Nhập số chập k mong muốn (k <= n): ";
        cin >> k;//điều kiện để đảm bảo n>0 và n<=k
    }
    cout<<("Nhập mảng a:")<< endl;
    // Tạo mảng mang với kích thước đủ lớn
    int mang[n];
    for (int i = 0; i < n; i++){
        cin >> mang[i];// Nhận các giá trị đầu vào cho mảng mang
    }
    sort(mang, mang + n); // Sắp xếp mảng để có thứ tự tăng dần
    // Tạo và in tất cả các tổ hợp k phần tử từ mảng mang
    Tohop(mang,n,k);
    return 0; // Kết thúc chương trình
}
```

Thông qua phương pháp sinh tổ hợp trên, ta có thể thay đổi mảng a thành một chuỗi S , từ đó ta có thể sinh tổ hợp của các kí tự bao gồm chữ cái, số và các kí tự đặc biệt. Sau đó, ta có thể viết thêm một hàm đảo thứ tự ngẫu nhiên để tạo thành những đoạn mật mã khác nhau dựa trên các dãy sinh tổ hợp ấy. Qua đó, chúng ta có thể áp dụng nó cho việc gợi ý mật khẩu mạnh hay có thể dựa vào những đoạn mật mã ấy để kiểm tra xem mật khẩu khi tạo một tài khoản trên một trang web có đủ mạnh hay không. Đó là một ứng dụng của tổ hợp cho công nghệ thông tin.

Mặt khác, tổ hợp còn được sử dụng để định tuyến lưu lượng truy cập mạng, trong đó thứ tự các nút mạng không quan trọng. Ví dụ, các thuật toán định tuyến như OSPF (Open Shortest Path First) sử dụng tổ hợp để tìm đường đi ngắn nhất giữa hai mạng.

Không những vậy, tổ hợp còn được ứng dụng trong nhiều lĩnh vực khác như Xác suất và Thồng kê, Quản lý dự án, Lập lịch và xếp hàng, Tính độ rủi ro trong sản xuất, Mật mã học, Xếp hình và thứ tự, Thiết kế mạch điện, Kỹ thuật tối ưu, Vận chuyển và lộ trình,... Qua đó, ta thấy được tổ hợp có rất nhiều ứng dụng quan trọng trong cuộc sống xung quanh chúng ta.

7 Có thể bạn chưa biết

Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (13 tháng 2 năm 1805 – 5 tháng 5 năm 1859) là một nhà toán học người Đức được cho là người đưa ra định nghĩa hiện đại của hàm số. Trong chương trình giáo dục phổ thông, ông được biết đến với "Nguyên lý Dirichlet".

Nhà toán học Dirichlet

Trong toán học, nguyên lý chuồng bồ câu, nguyên lý hộp hay nguyên lý ngăn kéo Dirichlet có nội dung là nếu như một số lượng n vật thể được đặt vào m chuồng bồ câu, với điều kiện $n > m$, thì ít nhất một chuồng bồ câu sẽ có nhiều hơn 1 vật thể. Định lý này được minh họa trong thực tế bằng một số câu nói như "trong 3 găng tay, có ít nhất hai găng tay phải hoặc hai găng tay trái." Đó là một ví dụ của một đối số đếm, và mặc dù trông có vẻ trực giác nhưng nó có thể được dùng để chứng minh về khả năng xảy ra những sự kiện "không thể ngờ tới", tỉ như 2 người có cùng một số lượng sợi tóc trên đầu, trong 1 đám đông lớn có một số người mặc kiểu quần áo giống nhau, hoặc bất thình lình trong hộp thư nhận được một số lượng cực lớn thư rác.
Người đầu tiên đề xuất ra nguyên lý này được cho là nhà toán học Đức Johann Dirichlet khi ông đề cập tới nó với tên gọi "nguyên lý ngăn kéo" (Schubfachprinzip). Vì vậy, một tên gọi thông dụng khác của nguyên lý chuồng bồ câu chính là "nguyên lý ngăn kéo Dirichlet" hay đôi khi gọi gọn là "nguyên lý Dirichlet" (tên gọi gọn này có thể gây ra nhầm lẫn với nguyên lý Dirichlet về hàm điều hòa). Trong một số ngôn ngữ như tiếng Pháp, tiếng Ý và tiếng Đức, nguyên lý này cũng vẫn được gọi bằng tên "ngăn kéo" chứ không phải "chuồng bồ câu".
Nguyên lý ngăn kéo Dirichlet được ứng dụng trực tiếp nhất cho các tập hợp hữu hạn (hộp, ngăn kéo, chuồng bồ câu), nhưng nó cũng có thể được áp dụng đối với các tập hợp vô hạn không thể được đặt vào song ánh. Cụ thể trong trường hợp này nguyên lý ngăn kéo có nội dung là: "không tồn tại một đơn ánh trên những tập hợp hữu hạn mà codomain của nó nhỏ hơn tập xác định của nó". Một số định lý của toán học như bổ đề Siegel được xây dựng trên nguyên lý này.

Hình ảnh minh hoạ chuồng bồ câu

Định lý 7.1: Nguyên lý chuồng bồ câu dạng cơ bản

Gọi n và k là hai số nguyên dương, sao cho $n > k$. Giả sử ta cần đặt n quả bóng vào trong k chiếc hộp. Khi đó có ít nhất một chiếc hộp chứa ít nhất là 2 quả bóng.

Chứng minh:

- Giả sử rằng không có chiếc hộp nào chứa từ 2 quả bóng trở lên, nghĩa là mỗi chiếc hợp đều chứa nhiều nhất một quả bóng.

- Khi đó số bóng tối đa có thể là k quả bóng. Vì $k < n$ nên ta có điều mâu thuẫn.

- Suy ra, có ít nhất một chiếc hộp chứa từ 2 quả bóng trở lên.

Ví dụ 7.1

Chứng minh rằng có ít nhất một số nguyên trong dãy $7, 77, 777, 7777, ...$, sao cho số đó chia hết cho 2003.

Hướng dẫn giải:

- Ta sẽ chứng minh một phát biểu mạnh hơn đó là có ít nhất một số trong 2003 số đầu tiên của dãy trên chia hết cho 2003. Giả sử điều ngược lại là đúng, tức là không có số nào trong 2003 số đầu tiên của dãy trên chia hết cho 2003. Vì chúng không chia hết cho 2003 nên số dư khi chia các số đó cho 2003 chỉ có thể là các số từ 1 đến 2002.

- Ta có 2003 số dư mà chỉ có 2002 giá trị có thể nhận được nên theo nguyên lý chuồng bồ câu thì có ít nhất 2 số có số dư nhận giá trị giống nhau. Giả sử ta gọi hai số đó là $a_i = 7777...777$ (có i số 7) và $a_j = 7777...777$ (có j số 7) với $i < j$. Khi đó $a_j - a_i = 777...7700...000$.

- Vì a_i và a_j có cùng số dư khi chia cho 2003, nên $a_j - a_i$ chia hết cho 2003.

- Ta có $a_j - a_i = 777...7700...000 = 777...77 \times 10^i$. Hơn nữa, 10^i và 2003 là hai số nguyên tố cùng nhau và 10^i không chia hêt cho 2003, nên 777...77 (có $j - i$ số 7) chia hết cho 2003.

- Ta được điều cần chứng minh.

Ví dụ 7.2

Chứng minh rằng tại mọi thời điểm của một giải đấu cờ với n kỳ thủ ($n \geqslant 2$) tham dự theo thể thi đấu vòng tròn một lượt, luôn luôn có ít nhất hai kỳ thủ có số ván cờ đã thi đấu là bằng nhau.

Hướng dẫn giải:

- Tại một thời điểm bất kỳ, số ván cờ đã thi đấu của mỗi kỳ thủ có thể là $0, 1, 2, ..., n - 1$. Giả sử n kỳ thủ có số ván thi đấu đều khác nhau thì số ván đã thi đấu lầ lượt là $0, 1, 2, ..., n - 1$.

- Kỳ thủ đã thi đấu $n - 1$ ván thì đã thi đấu đầy đủ với $n - 1$ người khác, điều này mâu thuẫn vì có kỳ thủ vẫn chưa đấu ván nào.

- Do đó phải có ít nhất hai kỳ thủ có số ván cờ đã thi đấu là bằng nhau.

Định lý 7.2: Nguyên lý chuồng bồ câu dạng tổng quát

Gọi m, n và r là các số nguyên dương sao cho $n > rm$. Chia n quả bóng vào trong m chiếc hộp, khi đó có ít nhất một chiếc hộp trong đó chứa ít nhất là $r + 1$ quá bóng.

Chứng minh:

Ta giả sử mỗi chiếc hộp chứa tối đa r quả bóng. Khi đó, số quả bóng tối đa là $rm < n$. Điều này mâu thuẫn. Vậy có ít nhất một chiếc hộp chứa ít nhất $r + 1$ quả bóng.

Ví dụ 7.3

Có 10 điểm được đánh dấu sẵn trong một hình vuông đơn vị. Chứng minh rằng, có ít nhất hai điểm có khoảng cách gần hơn 0.48 và có ít nhất ba điểm nằm trong một hình tròn có bán kính 0.5.

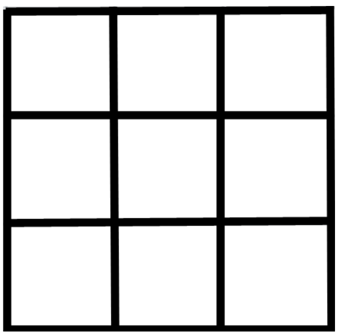
Hướng dẫn giải:

- Ta chia hình vuông đơn vị ra thành 9 hình vuông nhỏ như Hình 6.1a. Theo nguyên lý chuồng bồ câu, có ít nhất 2 điểm cùng nằm trong một hình vuông nhỏ nào đó.

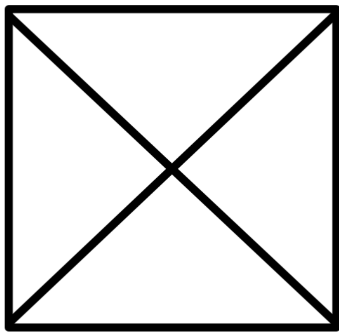
- Do hình vuông ban đầu là hình vuông đơn vị nên đường chéo của mỗi hình vuông nhỏ là $\frac{\sqrt{2}}{3} < 0.48$. Như vậy có ít nhất 2 điểm trong 10 điểm đã cho có khoảng cách gần hơn 0.48.

- Ta chia hình vuông ra thành 4 hình tam giác như Hình 6.1b. Theo nguyên lý chuồng bồ câu, có ít nhất 3 điểm cùng nằm trong một tam giác.

- Do hình vuông ban đầu là hình vuông đơn vị, nên mỗi tam giác nội tiếp trong một đường tròn có bán kính 0.5. Như vậy có ít nhất 3 điểm trong 10 điểm đã cho cùng nằm trong một hình tròn có bán kính là 0.5.



a



b

Hình 6.1: Hình vuông đơn vị

Ví dụ 7.4

Ông bà Smith mời đối tác gồm 4 cặp vợ chồng đến dự tiệc. Trong buổi tiệc, mỗi người chỉ bắt tay chào hỏi với những người đã quen biết trước. Sau khi đã bắt ta xong, ông Smith nói rằng: "nếu trừ tôi ra thì những người còn lại có số lần bắt tay đều khác nhau". Hỏi bà Smith đã bắt tay bao nhiêu lần?

Hướng dẫn giải:

- Ta thấy có 10 người dự tiệc. Mỗi người không bắt tay với chính mình và bắt tay với vợ (chồng) của mình nên số lần bắt tay của mỗi người có thể là $0, 1, 2, ..., 8$. Do số người đến dự tiệc là 10, nên theo nguyên lý chuồng bồ câu có ít nhất hai người có số lần bắt tay là bằng nhau.

-Gọi a là ông Smith. Vì nếu không kể a thì 9 người còn lại có số lần bắt tay khác nhau, nên số lần bắt tay của họ lần lượt là $0, 1, 2, ..., 8$.

-Gọi a_i là người đã bắt tay i lần $(0 \leqslant i \leqslant 8)$. Ta chứng minh a_i là vợ (chồng) của a_{8-i}.

- Nếu a_0 không là vợ (chồng) của a_8 thì có $j \in \{1, 2, .., 7\}$ để a_j là vợ (chồng) của a_8. Vì a_0 không bắt tay với người nào, nên a_8 không bắt tay với a_0. Suy ra a_8 chỉ bắt tay với 7 người (trừ a_0, a_j và a_8). Điều này mâu thuẫn. Vậy a_0 là vợ (chồng) của a_8.

- Nếu a_1 không là vợ (chồng) của a_7 thì có $j \in \{2, .., 6\}$ để a_j là vợ (chồng) của a_7. Vì a_0 không bắt tay với người nào và a_1 chỉ bắt tay 1 lần với người a_8, nên a_7 không bắt tay với a_0, a_1. Suy ra a_7 chỉ bắt tay với 6 người (trừ a_0, a_1, a_j và a_7). Điều này mâu thuẫn. vậy a_1 là vợ (chồng) của a_7.

- Tương tự, a_2 là vợ (chồng) của a_6, a_3 là vợ (chồng) của a_5. Suy ra bà Smith chính là a_4 và bà Smith bắt tay 4 lần.

Kết luận

Khi kết thúc cuộc hành trình này qua thế giới phức tạp của tổ hợp, chúng ta không chỉ nhận ra sự quan trọng của việc đếm, sắp xếp và chọn lựa, mà còn đắm chìm trong sự đa dạng và ứng dụng vô tận của nó. Từ việc tạo ra các thuật toán phức tạp trong khoa học máy tính đến việc tìm ra các kịch bản tối ưu trong quản lý tài nguyên, tổ hợp không chỉ là một phần của toán học mà còn là một phần không thể tách rời của cuộc sống hiện đại.

Tuy nhiên, nếu chỉ dừng lại ở mức độ ứng dụng, chúng ta có thể bỏ lỡ điều quan trọng nhất: sức mạnh của tổ hợp không chỉ nằm trong việc giải quyết các vấn đề cụ thể mà còn nằm trong việc mở rộng tầm nhìn và khả năng sáng tạo của con người. Từ việc phân tích dữ liệu phức tạp đến việc tối ưu hóa các quy trình sản xuất, sự hiểu biết về tổ hợp không chỉ là một phần của quá trình học mà còn là một cơ hội để khám phá và phát triển tiềm năng cá nhân.

Vậy nên, khi chúng ta đóng quyển sách này về tổ hợp, hãy nhớ rằng kiến thức và sự hiểu biết mà chúng ta đã tích lũy không chỉ là một phần của quá trình học mà còn là một nguồn cảm hứng và động lực không ngừng cho sự phát triển cá nhân và xã hội. Với tầm nhìn mở rộng và khả năng sáng tạo, chúng ta có thể sử dụng kiến thức về tổ hợp để giải quyết những thách thức phức tạp và tạo ra những cơ hội mới trong tương lai.

Và với điều này, cuộc hành trình của chúng ta với tổ hợp không bao giờ kết thúc, mà chỉ là một bước đi trong hành trình không ngừng khám phá và học hỏi về thế giới xung quanh chúng ta.

Tài liệu tham khảo

[1] GS.TS Đặng Đức Trọng. Lý Thuyết Xác Suất. Trường Đại Học Khoa Học Tự Nhiên, Khoa Toán-Tin học, 2023.

[2] ThS Lê Văn Chánh. "Dạng 0.01 Phân phối nhị thức". 2023

[3] Tài N. M. (n.d.). Lý thuyết Quy tắc cộng. Quy tắc nhân. Sơ đồ hình cây (Cánh diều 2024) hay, chi tiết | Toán lớp 10.

[4] Vnhoctap. (2021, August 30). Hoán vị lặp.

[5] Hocmai H. V. (n.d.). Hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp - Đại số, giải tích 11.

[6] Phuong. (2018, October 3). Tổ hợp lặp - tổ hợp lặp không lặp chỉnh hợp lặp. Thầy Nguyễn Thế Anh.

[7] Toanmath. (2022, December 6). Hướng dẫn giải các dạng toán tổ hợp và xác suất

[8] Luận văn: Một nghiên cứu của Didactic về việc dạy học khái niệm tổ hợp ở trường trung học phổ thông Việt Nam và Pháp. (2020, October 13).

[9] GS. Nguyễn Hữu Anh, PH. D. Giáo trình Toán rời rạc. Nhà xuất bản lao động xã hội. 2023.

[10] TS. Nguyễn Anh Thi, Giáo trình Toán học tổ hợp, Nhà xuất bản Đại Học Quốc Gia Thành Phố Hồ Chí Minh.