TRANFORMADA RAPIDA DE FOURIER

Es un importante método de medición en la tecnología de medición de audio y acústica. Descompone una señal en sus componentes espectrales individuales y así proporciona información sobre su composición.
Estrictamente hablando, la FFT es un algoritmo optimizado para implementar la "Transformación Discreta de Fourier". En este proceso, una sección limitada en el tiempo de una señal se descompone en sus componentes. Estos componentes son oscilaciones sinusoidales simples a frecuencias discretas, cuya amplitud y fase están determinadas. El FFT permite así la vista de una señal en el dominio de la frecuencia. (https://www.nti-audio.com/es/servicio/conocimientos/transformacion-rapida-de-fourier-fft#:~:text=La%20%22Transformaci%C3%B3n%20r%C3%A1pida%20de%20Fourier,proporciona%20informaci%C3%B3n%20sobre%20su%20composici%C3%B3n.)

- La transformada rápida de Fourier es un algoritmo o método matemático para encontrar la transformada discreta de Fourier. Generalmente es utilizado para encontrar la transformada de una función del tiempo en una función de frecuencias.

- De esta manera, al permitir cambiar funciones dependientes del tiempo en funciones de la frecuencia, es particularmente útil para el análisis de fenómenos que dependen del tiempo, como el sonido.

- **Transformada de Fourier:** (https://www.nobbot.com/educacion/que-es-la-transformada-de-fourier-y-para-que-sirve/) El concepto de 'transformada de Fourier' se refiere a varios conceptos de forma simultánea:

  - Operación de transformación de una función.
  - Función resultado de la operación.
  - Espectro de frecuencias de una función.

  La función original suele recibir el nombre de x(t), siendo muy común que 't' sea el tiempo, mientras que la función transformada suele recibir el nombre de X(f), en mayúscula, siendo 'f' la frecuencia.

  Como ejemplo, si se tiene una función p(t) donde 'p' es la potencia de una señal acústica y t el tiempo, P(f) es una transformada de Fourier que informa de cómo se distribuye p(t) en función de la frecuencia la potencia de la señal.

  Es importante destacar que, aunque el tiempo y la frecuencia son valores reales, tanto x(t) con su respectiva transformada X(f), no tienen por qué tomar valores reales. En el ejemplo de potencia es posible que la magnitud tenga elementos complejos.

  El concepto de frecuencia de la transformada de Fourier no tiene por qué guardar relación con la inversa del periodo de la función original, sino con la brusquedad o rapidez de los cambios en los valores de x(t).

  ¿Para qué sirve la transformada de Fourier?
  Dejando a un lado el tema matemático, la transformada de Fourier tiene muchas aplicaciones en ingeniería, medicina o telecomunicaciones. Uno de los ejemplos más

usados es la transformación de señales de potencia y energía de cara al envío de información por cables u ondas. Esta transformación permite la ocupación de todo el espectro radioeléctrico.
En acústica, las transformadas de Fourier tienen diferentes usos, desde comprimir audio a limpiar el ruido de archivos. La compresión de archivos usando este tipo de fórmulas también se usa en archivos como imágenes o vídeos; no tiene por qué ser de audio.

Ahora, supongamos que tenemos una señal de variable independiente continua x(t), si esta señal cumple con las condiciones de Dirichlet que son 3 se puede encontrar dicha transformada. (https://www.youtube.com/watch?v=soMw5WKKylg)

- Primera condición: que sea absolutamente integrable, es decir la integral entre dos puntos cualesquiera del módulo de la función de partida ha de ser menor que infinito:
$$\int_a^b |f(t)|dt < \infty$$
- Segunda condición es que la integral de menos infinito a infinito del módulo de la función ha de obtener un resultado menor que infinito:
$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt < \infty$$
- En cualquier intervalo finito, la función de partida tiene:
  . Un número finito de discontinuidades finitas.
  . Un número finito de máximos y un número finito de mínimos.

Para encontrar la transformada de Fourier se calcula el producto interno de la señal y una exponencial compleja de frecuencia fija.

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

Aquí se realiza el producto interno de dos señales, donde e^… es una señal periódica del tiempo y tendrá un valor dependiendo de lo que valga f.

La inversa de la transformada se define como:
(http://alojamientos.us.es/gtocoma/pid/pid4/pid43.htm)

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u)e^{2\pi iux}dx$$

(cambiar f(x) por x(t), F(u) por x(f), j por el i y el ux por ft)

El espectro es el nombre que se le da a la transformada de Fourier y esta nos permite ver la señal desde otro punto de vista.

Todo esto es la transformada de Fourier de señales de variables independientes continuas x(t), es un análisis frecuencial de este tipo de señales, pero ¿qué pasa si tenemos una señal de variable independiente discreta?, ¿qué análisis frecuencial puede resolver esto?

Para resolver esto se aplica la trasformada discreta de Fourier.

- **Transformada Discreta de Fourier:** (https://youtu.be/ysjbvYvHZOY)
  - Al calcular la transformada de Fourier de una secuencia, el resultado que tenemos es una línea continua, es decir, la FT es una función compleja de variable real.
  - Si calculamos la DFT lo que obtenemos es algo parecido a lo que obtenemos con la FT, información espectral, información de las frecuencias que componen una señal, pero en este caso al aplicar la DFT sobre una señal discreta, lo que obtenemos es otra señal discreta, una secuencia.

Para aplicar la DFT de N puntos de una señal, se deben cumplir dos condiciones: (https://www.lifeder.com/transformada-discreta-de-fourier/)

- La señal vale 0 para cualquier valor de n negativo y para cualquier valor de n superior al numero de puntos a calcular menos 1.
  X[n] = 0 n < 0, n > N-1
- La secuencia de N números complejos x0, ..., xN−1 se transforma en la secuencia de N números complejos X0, ..., XN−1 mediante la DFT con la fórmula:

  X[k] nos permite obtener un DFT dada una señal x[n].

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-\frac{2\pi i}{N}kn} \qquad k = 0, \dots, N-1$$

Donde i es la unidad imaginaria y $e^{\frac{2\pi i}{N}}$ es la N-ésima raíz de la unidad.

- La transformada inversa de Fourier se denota por:
  A partir de la transformada de Fourier nos permite obtener la secuencia en el dominio del tiempo x[n]

$$x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{\frac{2\pi i}{N}kn} \qquad n = 0, \dots, N-1.$$

- ALGUNAS PROPIEDADES DE LA DFT:

  PERIODISIDAD: S i la expresión que define la DFT se evalúa para todos los enteros k en lugar de únicamente para k = 0,…,N-1, la secuencia infinita resultante es una extensión periódica de la DFT, de período N.
  Esta periodicidad puede demostrarse directamente a partir de la definición:

$$X_{k+N} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-\frac{2\pi i}{N}(k+N)n} = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-\frac{2\pi i}{N}kn} \underbrace{e^{-2\pi i n}}_{1} = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-\frac{2\pi i}{N}kn} = X_k.$$

De forma similar, se puede demostrar que la fórmula de la IDFT lleva a una extensión periódica.

TEOREMA DEL DESPLAZAMIENTO: multiplicando Xn por una fase lineal $e^{\frac{2\pi i}{N}nm}$ para cualquier entero m equivale a un desplazamiento circular de la salida Xk : Xk se reemplaza por Xk-m , donde el subíndice se repite periódicamente (período N). De forma similar, un desplazamiento circular de la entrada Xn equivale a multiplicar la salida {\displaystyle X_{k}}Xk por una fase lineal. Matemáticamente, si {Xn} representa el vector x entonces:

$$\text{si } \mathcal{F}(\{x_n\})_k = X_k$$

$$\text{entonces } \mathcal{F}(\{x_n \cdot e^{\frac{2\pi i}{N}nm}\})_k = X_{k-m}$$

$$\text{y } \mathcal{F}(\{x_{n-m}\})_k = X_k \cdot e^{-\frac{2\pi i}{N}km}$$

TEOREMA DE LA CONVOLUCION CIRCULAR Y TEOREMA DE LA CORRELACION CRUZADA:

El teorema de la convolución para las transformada de Fourier continua y discreta indica que una convolución de dos secuencias infinitas se puede obtener como la transformada inversa del producto de las transformadas de cada una de ellas. Con secuencias y transformadas de longitud N, la convolución circular se define:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}\{\mathbf{X}\cdot\mathbf{Y}\}_n &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_k \cdot Y_k \cdot e^{\frac{2\pi i}{N}kn} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\sum_{l=0}^{N-1} x_l e^{-\frac{2\pi i}{N}kl}\right)\cdot\left(\sum_{m=0}^{N-1} y_m e^{-\frac{2\pi i}{N}km}\right)\cdot e^{\frac{2\pi i}{N}kn} \\
&= \sum_{l=0}^{N-1} x_l \sum_{m=0}^{N-1} y_m \left(\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N}k(n-l-m)}\right).
\end{aligned}$$

El número entre paréntesis es 0 para todos los valores de m excepto aquellos de la forma n-l-pN donde p es un entero cualquiera. En estas posiciones vale 1. Puede ser por tanto reemplazado por una suma infinita de deltas. Nótese que se pueden extender los límites de m hasta infinito, siendo las secuencias x e y definidas nulas fuera de [0,N-1]:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}\{\mathbf{X}\cdot\mathbf{Y}\}_n &= \sum_{l=0}^{N-1} x_l \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m \left(\sum_{p=-\infty}^{\infty} \delta_{m,(n-l-pN)}\right) \\
&= \sum_{l=0}^{N-1} x_l \sum_{p=-\infty}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m \cdot \delta_{m,(n-l-pN)}\right)}_{y_{n-l-pN}} \\
&= \sum_{l=0}^{N-1} x_l \left(\sum_{p=-\infty}^{\infty} y_{n-l-pN}\right) \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{x} * \mathbf{y_N})_n\ ,
\end{aligned}$$

QUE es la convolución de la secuencia x con la secuencia y qu esta definida periódicamente y definida:

$$(\mathbf{y_N})_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{p=-\infty}^{\infty} y_{(n-pN)} = y_{n(modN)}.$$

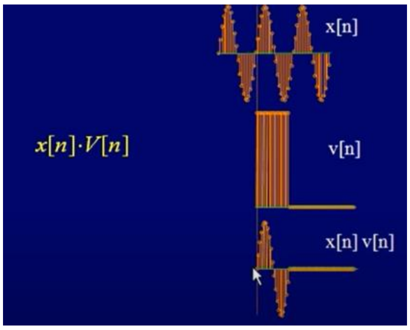
También se puede demostrar que:

$$\mathcal{F}^{-1}\{\mathbf{X}^* \cdot \mathbf{Y}\}_n = \sum_{l=0}^{N-1} x_l^* \cdot (y_N)_{n+l} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{x} \star \mathbf{y_N})_n \ ,$$

Que es la correlación cruzada de x y YN.

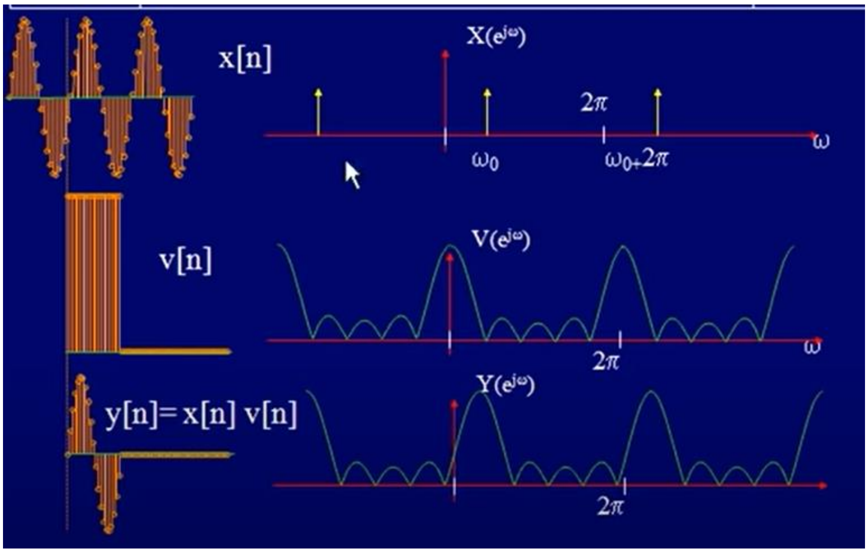
Una evaluación directa de la convolución requiere O(n^2) operaciones para una secuencia de entrada de longitud N. El método indirecto, usando transformadas, puede sacar provecho de la transformada rápida de Fourier (FFT), que necesita tan sólo O(NlogN) operaciones, de modo que se consigue una eficiencia mucho mayor. Además, las convoluciones pueden ser utilizadas para calcular de forma eficiente DFTs mediante el algoritmo FFT de Rader y el algoritmo FFT de Bluestein.

- Enventanado: asociado al cálculo de la transformada discreta de Fourier se tiene el concepto de enventanado, como para calcular la transformada discreta de fourier de una secuencia necesitamos que este limitada en tiempo, hay ocasiones e las que las señales no lo están, o bien porque acabn en instante muy altos o bien porque empiezan en valores inferiores a 0. En estos casos nos interesa recortar esta señal



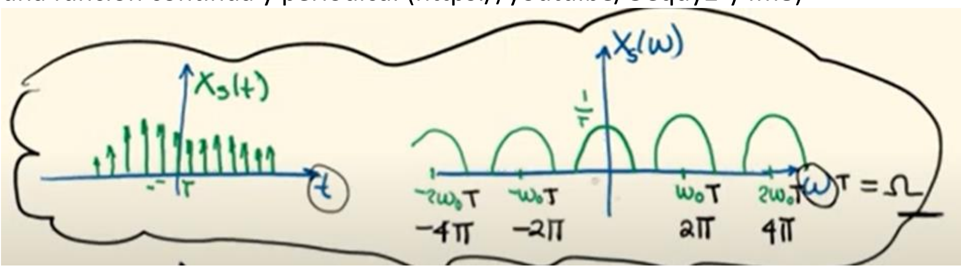
- Quedarnos con un trozo de la seña, matemáticamente esto corresponde a un enventanado, es decir multiplicar la señal x[n] por una secuencia que llamamos ventana, en este caso se trabaja con una ventana rectangular y lo que tenemos es un recorte de esa señal. Entonces que efecto tiene esto en el calculo de la transformada discreta de Fourier.

1. Veamos primero el efecto que tiene en la FT, si la FT de una señal seno o de un fasor, corresponde a un conjunto de deltas, a esa señal la multiplicamos en el dominio del tiempo por una función ventana, para obtener una nueva función, esto corresponde en el dominio de la frecuencia a una convolución circular entre la transformada de la señal y la ventana, hacer esta convolución lo que hará es sustituir cada una de estas deltas por una onda con la forma que tiene el espectro de la ventana, es decir sustituimos la delta, de un ancho infinitamente pequeño por otra forma de onda mas ancho y ese ancho va a depender del ancho que tenga la ventana. Cuanto mas ancho la ventana, más estrecha será la FT calculada.

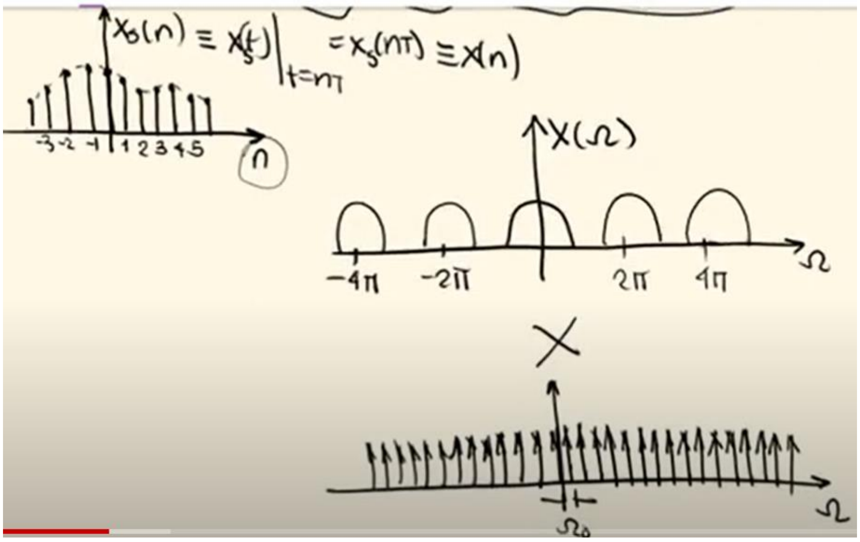


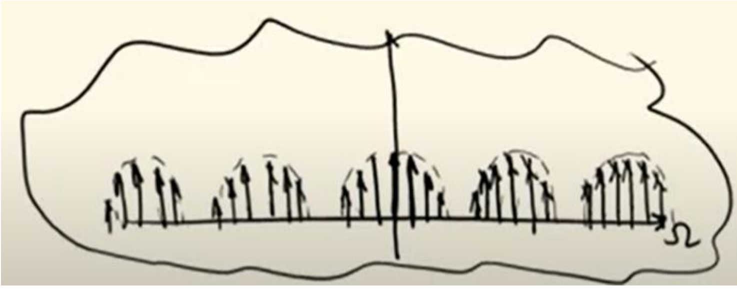
- La diferencia entre la trasformada de Fourier en tiempo discreto y las transformada discreta de Fourier es la siguiente:

  (https://youtu.be/TBtgqY5i-c4) La transformada de Fourier en tiempo discreto, se refiere a la trasformada natural de una secuencia, que como vemos en la gráfica es una función continua y periódica. (https://youtu.be/Oeqdy2-y4m8)



Cuando nosotros a esta señal un tren de impulso, ósea le aplicamos un muestreo, lo que obtenemos es un conjunto de muestras/impulsos y a esto se le conoce como TDF.

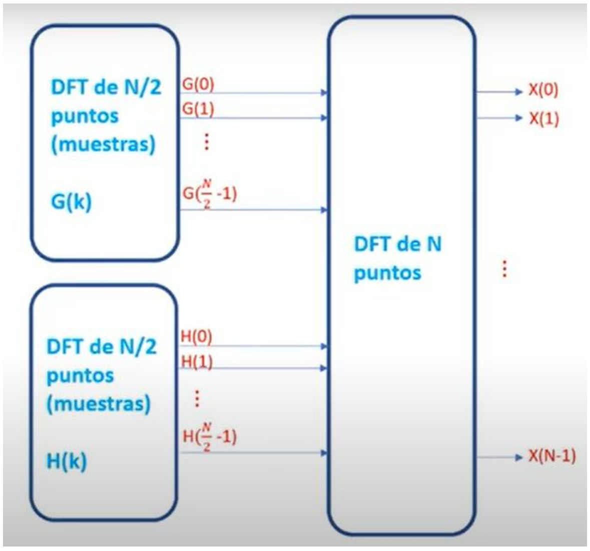




- **TRANFORMADA RAPIDA DE FOURIER:**
  La naturaleza de la transformada rápida de Fourier implica la realización de una serie de operaciones de sumas y multiplicaciones de números complejos, lo cual produce muchos cálculos engorrosos, ya sea que se desarrolle la DFT por una serie de ecuaciones o bien en su forma matricial. Por ejemplo, la DFT para una secuencia de N puntos va a requerir un orden de multiplicaciones de NxN multiplicaciones y de NxN-1 sumas; así surge la necesidad de buscar un algoritmo que permita obtener la DFT de una forma más rápida.

  En 1965 James Willians Cooley y John Wilder Tukey publicaron un articulo donde explican un algoritmo que permite la reducción del costo computacional durante el calculo de una DFT de N puntos, reduciendo así el orden de operaciones a O(nlogn) multiplicaciones y sumas complejas.

  La idea general de la FFT también conocido como algoritmo de la mariposa es descomponer la DFT original en un numero x(k) en un numero de DFT más pequeños G(k) y H(k) para que combinadas de manera adecuada finamente den origen a la DFT mas grande X(k)



  Existen dos algoritmos generales para la implementación de la FFT a partir de ellas surgieron modificaciones para explotar algunas características particulares del método, pero principalmente se conocen 2:

1. Algoritmo FFT diezmado en tiempo (base 2, esto es cuando N = 2^n)
   Este algoritmo solo se aplica para secuencias x(n) de n muestras donde n es una potencia de 2.

Aprovechando la simetría de la transformada discreta de Fourier y el paradigma divide y vencerás:

Consideramos un DFT de N muestras, donde las N muestras es el resultado de haber combinado de manera adecuada otras DFT de menor tamaño, exactamente otras DFT de N/2 muestras, a su vez es el resultado de combinar una DFT de la mitad de esas muestras y así consecutivamente hasta tener DFT de 2 muestras.

✓ Supongamos que tenemos una señal x(n) de N puntos o muestras, donde N es una potencia de 2.

  X(n) está compuesta por las muestras x(1), x(2), x(3), … x(N-1)

  Identificamos las muestras x(2), x(4), x(6),x(2r), como las muestras de índice par

  Identificamos las muestras x(1), x(3), x(5),x(2r-1), como las muestras de índice impar

  Sea la DFT de x(n) como dice la definición:

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} \qquad k = 0,1,2,3 \ldots N-1$$

Donde: $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$

  Si esta sumatoria se desglosan en dos donde una de ellas solo se considera las pares y la otra las impares.

x(2), x(4), x(6),.. x(2r)   x(1), x(3), x(5), …x(2r+1)

$$X(k)=\sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r) W_N^{2rk} + \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r+1) W_N^{(2r+1)k}$$

$$X(k)=\sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r)\left(W_N^2\right)^{rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r+1)\left(W_N^2\right)^{rk}$$

  Sabiendo además que:

$$W_N^n = \left(e^{-j\frac{2\pi}{N}}\right)^n = e^{-j\frac{2\pi n}{N}}$$

  Que se puede escribir como el reciproco de n:

$$W_N^n = e^{-j\frac{2\pi}{N/n}}$$

  N que multiplica es exactamente lo mismo que el inverso de n que divide.
  Si n=2

$$W_N^2 = e^{-j\frac{2\pi}{N/2}} = W_{\frac{N}{2}}$$

De la última expresión de de x(k):
Tenemos la suma de muestras pares e impares, se sustituye el W^2 por la nueva expresión y tendríamos:

Podemos sustituir: $W_N^2 = W_{\frac{N}{2}}$

$$X(k) = \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} \underbrace{x(2r)}_{g(n)} W_{\frac{N}{2}}^{rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} \underbrace{x(2r+1)}_{h(n)} W_{\frac{N}{2}}^{rk}$$

Acabamos de desglosar en términos de g(k) mas h(k), x(k) esta conformada por la suma de ambas DFT.

Finalmente obtenemos:

$$X(k) = G(k) + W_N^k\ H(k) \qquad k = 0, 1, 2, 3, \ldots N-1$$

Se repite cada N/2 muestras

Como g(k) y h(k) son periodicas con periodo N/2, se tienen dos periodos de cada una para extraer la x(k).

Debido a que la periodicidad se puede dividir X(k) y calcular la primera y segunda mitad de los valores así:

$$X(k) = G(k) + W_N^k\ H(k) \qquad k = 0, 1, 2, 3, \ldots \frac{N-1}{2}$$

Como se sabe que g y h son periódicas con periodo N/2 podríamos separar la DFT de x(k) en dos grupos de muestras, la primera que va de 0 a N/2 y la otra donde h(x) se repite

$$X\left(k+\frac{N}{2}\right) = G\left(k+\frac{N}{2}\right) + W_N^{k+\frac{N}{2}}\ H\left(k+\frac{N}{2}\right)$$

$$W^{k+\frac{N}{2}} = \left(e^{-j\frac{2\pi}{N}}\right)^{k+\frac{N}{2}} = e^{-j\frac{2\pi k}{N}} \cdot e^{-j\pi} = -W^k$$

$$X\left(k+\frac{N}{2}\right) = G(k) - W_N^k\ H(k)$$

Si separamos a la x(k) en dos grupos, el primero:

$$X(k) = G(k) + W_N^k\ H(k) \qquad 0 \le k \le \frac{N}{2} - 1$$

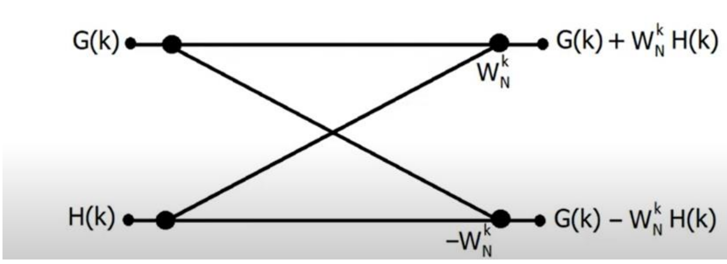
y el otro:

$$X(k) = G(k) - W_N^k\ H(k) \qquad \frac{N}{2} - 1 \le k \le N - 1$$

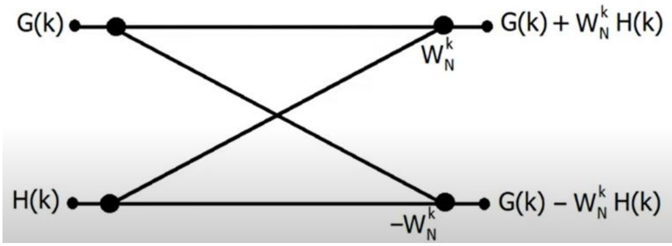
la x(k) entonces se define como la asociación de 2 DFT mas simples, si son las primeras muestras de 0 hasta N/2 -1 pues es la primera imagen y si es de N/2 -1 en adelante pues es la segunda imagen.

Esta pareja de ecuaciones se puede representar gráficamente con un diagrama de flujos:

Las entradas **G(k)** y **H(k)** se transforman en $\boldsymbol{G(k) + W_N^k\, H(k)}$ & $\boldsymbol{G(k) - W_N^k\, H(k)}$



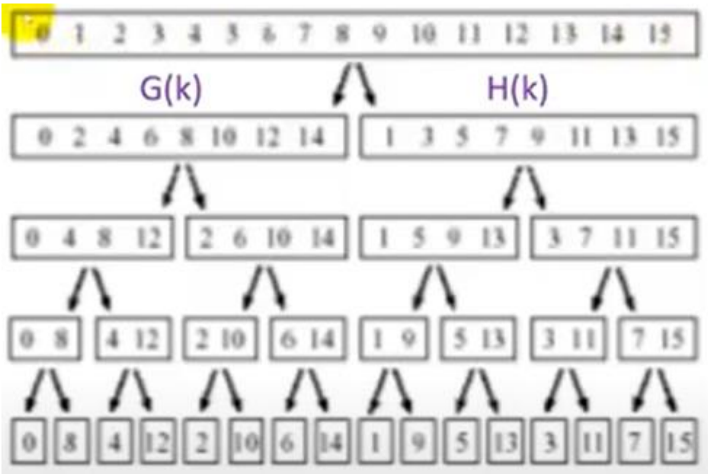
Mariposa básica de FFT



Este diagrama de flujo indica los resultados que acabamos de presenciar, por ejemplo, si a G(k) que es el vector del frente se suma con el vector de H(k) previamente multiplicado por W elevado a k y sub n, el resultado será la forma de la primera mita de x(k).

Entonces ese diagrama de flujos nos muestra la forma de obtener un DFT de N muestras en términos de 2 DFT de N/2 muestras.

- ✓ Idea de las divisiones sucesivas de x(k) para N = 16:

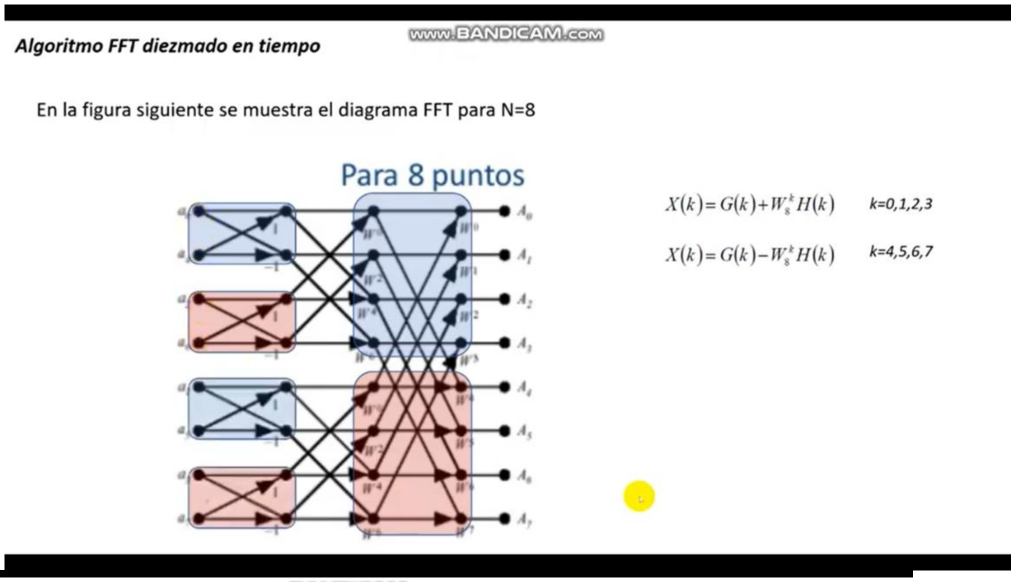


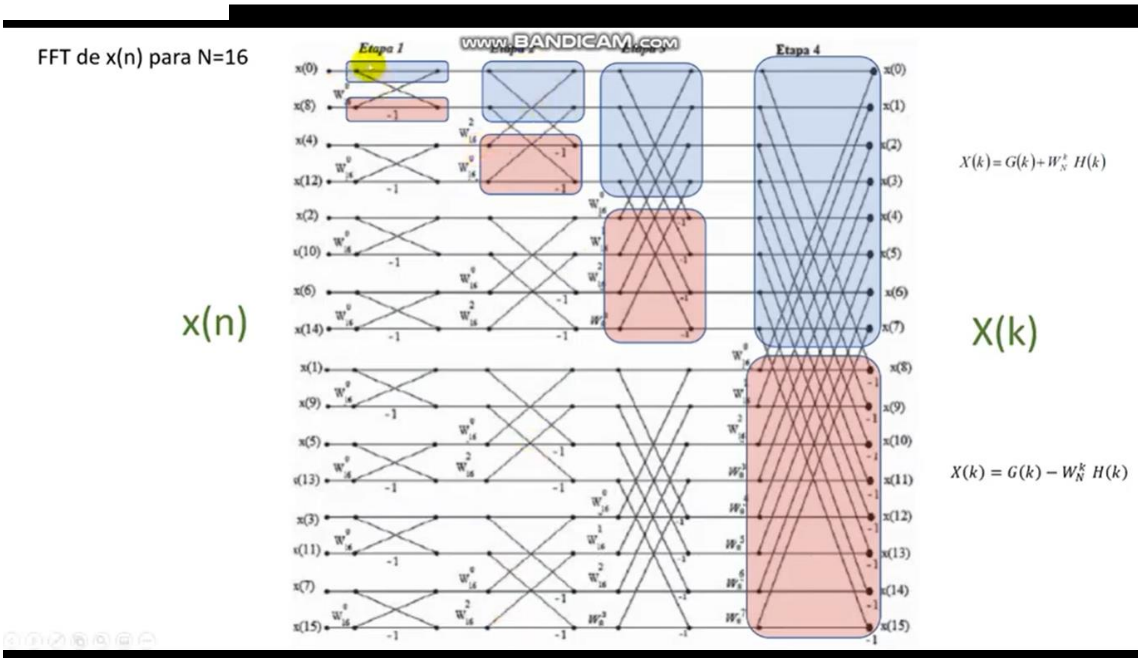
Curiosamente si se observan las muestras mas simples, las cuales corresponden a x(n), se puede identificar un patrón de orden llamado bit inverso.

¿Qué es el bit inverso?
Las divisiones en partes pares e impares subsecuentes equivalen a invertir el orden de los bits. Entonces para lograr esta descomposición habría que reordenar los componentes para que vayan juntos en la x(k).

Número de muestra	Representación Binaria	Representación Binaria después del reflejo vertical	Número de muestra que debe colocarse a la entrada del algoritmo
x(0)	000	000	x(0)
x(1)	001	100	x(4)
x(2)	010	010	x(2)
x(3)	011	110	x(6)
x(4)	100	001	x(1)
x(5)	101	101	x(5)
x(6)	110	011	x(3)
x(7)	111	111	x(7)

Numero de muestra	Representación Binaria	Representación Binaria después del reflejo vertical	Numero de muestra que debe colocarse a la entrada el algoritmo
X[0]	000	000	X[0]
X[1]	001	100	X[4]
X[2]	010	010	X[2]
X[3]	011	110	X[6]
X[4]	100	001	X[1]
X[5]	101	101	X[5]
X[6]	110	011	X[3]
X[7]	111	111	X[7]





TIEMPOS DE EJECUCION:

Como se puede observar, en el diagrama de FFT se forman mariposas de N puntos; N/2 puntos, N/4 puntos y así hasta tener mariposas de 2 puntos.

Cada grupo de mariposas forman una etapa en la FFT
Y el numero total de etapas de la FFT es igual a O(logn)

Como cada nodo se obtiene mediante una suma, donde uno de lo sumandos es un producto. Entonces por cada nodo se requiere una suma y una multiplicación.

Entonces el numero total de operaciones en este algoritmo FFT para obtener x(k) esta dado por:

Nlogn sumas
Nlogn multiplicaciones

2. Algoritmo FFT diezmado en frecuencia (base 2)

- (https://youtu.be/SZGiJRNWzNk) La FFT se diseñó en 1965 por los estadounidenses James Willians Cooley y John Wilder Tukey para reducir la complejidad computacional. Se restringe para el caso N = 2^gamma para algún entero gamma. El método consiste en 3 etapas:

1. Realizar una formulación matricial.
2. Hallar una factorización matricial.
3. Realizar una reorganización.

- La aplicación Shazam es un ejemplo en donde se usa la transformada de Fourier, otro ejemplo es wtsp, para transformar una imagen a jpg se utiliza la transformada de Fourier

facultad.efn.uncor.edu/webs/investigacion/DSP/documentos/FFT.pdf
https://www.tec.ac.cr/sites/default/files/media/doc/lec07.2.pdf
http://catarina.udlap.mx/u_dl_a/tales/documentos/lep/alonso_a_jp/capitulo3.pdf

https://github.com/lzhbrian/Fast-Fourier-Transform
https://github.com/miha53cevic?page=1&tab=repositories → maze generator
http://www.librow.com/articles/article-10