

COMPUTACIÓN CUÁNTICA: ATÁQUE A LA CRIPTOGRAFÍA SIMÉTRICA Y ASIMÉTRICA

Harold Alejandro Villanueva Borda
Ciencias de la Computación
Universidad Católica San Pablo
harold.villanueva@ucsp.edu.pe

Abstract—

Index Terms—Criptografía, Seguridad y Privacidad, QFT, algoritmo de Shor, Grover

I. INTRODUCCIÓN

En la década de 1980 el reconocido físico teórico Richard Phillips Feynman notó que la simulación de ciertos efectos de la mecánica cuántica en una computadora clásica no es muy eficiente, debido a esto se ideó la construcción de computadoras cuánticas pero este conlleva un desarrollo lento debido a su complejidad. En 1994 el matemático del MIT Peter Shor Williston diseñó un algoritmo cuántico de tiempo polinomial para la factorización de números enteros [11].

En el mundo de la informática se conoce el bit, a su vez existe el bit cuántico o también llamado qbit, donde este puede ponerse en un estado de superposición que codifica al 0 y al 1. En la computación clásica se usan los procesos paralelos para disminuir el tiempo de procesamiento de algunos cálculos, por otro lado en un sistema cuántico se usa el paralelismo de forma masiva. A diferencia de la computación clásica en donde se puede leer el resultado de un thread paralelo, en la computación cuántica debido que la medición es probabilística no se puede elegir qué resultado leer por lo que el acceso a los resultados es totalmente restringido y para acceder se realiza una medición, dicha solución se viene mejorando con el pasar de los años en donde se involucra algoritmos conocidos como la factorización de Shor, el algoritmo de Grover, sin embargo todas las propuestas recientes tiene problemas de escalabilidad y se requiere de un gran avance para sobrepasar las decenas de qbit [11].

Hoy en día muchos asumen que implementar un algoritmo criptográfico “irrompible” es imposible, por lo que en la actualidad se centran más en resistir el ataque. Los algoritmos de encriptación más usados son el RSA, DES, AES; si bien es cierto estos algoritmos están diseñados para resistir ataques de las computadoras actuales, pero es cuestión de tiempo para que estos sistemas sean cada vez menos resistentes. Este problema permitió el desarrollo de la criptografía cuántica en la que se basa en las leyes de la

mecánica cuántica con el objetivo de proteger el secreto de los mensajes [8]. Actualmente con las constantes investigaciones acerca de la computación cuántica, estamos por entrar a una nueva era de la criptografía en la que se plantea un nuevo protocolo de distribución de claves cuánticas BB84 desarrollado por Charles Bennet y Gilles Brassard en 1984 [2].

Los algoritmos cuánticos representan un peligro para la criptografía clásica; el más famoso y amenazante es el algoritmo de Shor ya que este resuelve el problema de factorización de enteros así como también el problema de logaritmos discretos en tiempo polinomial [14]. La transformada Cuántica de Fourier juega un papel importante y se encuentra en el núcleo de los algoritmos.

Actualmente hay 3 direcciones importantes de investigación de los ataques de clave pública de computación cuántica [15]:

- 1) Mejorar, modificar, simplificar el algoritmo de Shor y si fuera posible inventar uno que supere a Shor.
- 2) Algoritmos de ataque cuántico basados en computación cuántica adiabática
- 3) algoritmos de ataque cuántico basados en el principio de recorrido cuántico

Hoy en día el uso de la computación clásica en la vida cotidiana es normal y para el intercambio de información se hace uso de la criptografía de clave pública como el RSA (Rivest, Shamir y Adleman), en donde la encriptación de envío de datos desde un emisor hacia un receptor es confiable. La protección que brinda diversos algoritmos criptográficos clásicos hasta cierto punto son altamente seguros y eficientes, pero en algún momento estos dejaron de serlo y más aún con el desarrollo de la computación cuántica.

En este survey se muestran conceptos fundamentales de la computación cuántica, así como también se mostrarán algoritmos cuánticos y sus funcionalidades. Por otro lado la investigación en este survey se enfocará en vulnerar la seguridad del cifrado simétrico y asimétrico, haciendo uso de ideas como el algoritmo de Grover y del algoritmo de Shor para enfrentar la

solución de logaritmos discretos y la factorización de números enteros de gran tamaño, así como también, el uso importante y el gran papel que juega la Transformada Cuántica de Fourier.

II. ALGORITMOS CUÁNTICOS

- The Deutsch Algorithm

Este algoritmo se basa en la Transformada Cuántica de Fourier, así mismo, ilustra las ideas clave del paralelismo e interferencia cuántica que se usan en todos los algoritmos útiles [5]. Por otro lado este es el primer algoritmo que explota el paralelismo cuántico utilizando solo 2 qbits, dicho algoritmo ha inspirado la construcción de varios algoritmos cuánticos que son mucho más eficientes [9].

El problema de Deutsch fue planteado en 1985, aun sin usar el modelo de circuito cuántico. Una generalización del algoritmo de Deutsch es el algoritmo de Deutsch-Jozsa [9] tiene exactamente la misma estructura que su versión anterior y al igual que con el algoritmo de Deutsch, tenemos un circuito reversible que implementa una función desconocida f , pero esta vez f es una función de cadenas de n bits a un solo bit [5].

El problema de Deutsch

Entrada: una caja negra para calcular una función desconocida $f : \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$.

Problema: Determinar el valor de $f(0) \oplus f(1)$ haciendo consultas a f .

Supongamos que se tiene un circuito reversible para calcular una función desconocida de 1 bit $f : \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$: Tratamos al circuito reversible como una caja negra, esto quiere decir que al aplicar el circuito para obtener valores de $f(x)$ para x entradas, no se obtendrá ninguna información del funcionamiento interno del circuito para aprender sobre la función f . Clásicamente el número de consultas que realiza para determinar $f(0) \oplus f(1)$ es 2 [5].

- Quantum Transform Fourier

La transformada de Fourier convierte una función en el dominio del tiempo en las frecuencias que la componen en el dominio de la frecuencia, transformando una lista de muestras de funciones espaciadas uniformemente en una lista de coeficientes para una secuencia finita de sinusoides complejos, ordenados por frecuencia. En computación cuántica, la QFT (Quantum Transform Fourier) es el análogo cuántico de la DFT (Discret Fourier Transform). El QFT se puede realizar de

manera eficiente en una computadora cuántica utilizando exponencialmente menos puertas de las que se requieren para calcular clásicamente. En QIP (procesamiento de información cuántica), la QFT es una generalización de la transformada de Hadamard y ambas son bastante similares, con la excepción de que la QFT introduce una fase [12].

En el procesamiento de información cuántica (QIP), la transformada cuántica de Fourier (QFT) tiene una gran cantidad de aplicaciones: el algoritmo de Shor y la estimación de fase son solo algunos ejemplos bien conocidos. El algoritmo de factorización cuántica de Shor, uno de los algoritmos cuánticos más citados, se basa en gran medida en la QFT y encuentra eficientemente factores primos enteros de grandes números en computadoras cuánticas [12].

- Grover Algorithm

Este algoritmo cuántico brinda una aceleración polinomial sobre los algoritmos clásicos más conocidos para solucionar muchos problemas importantes. Este algoritmo de búsqueda cuántica realiza una búsqueda genérica, por ejemplo, dado un entero grande N , se puede reconocer eficientemente si un entero p es un factor no trivial de N . La búsqueda cuántica es una herramienta para acelerar este tipo de búsquedas genéricas [4].

El problema de búsqueda Entrada: Una caja negra U_f para calcular una función desconocida $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$. Problema: Encuentra una entrada $x \in \{0, 1\}^n$ tal que $f(x) = 1$.

El problema de búsqueda

Entrada: Una caja negra U_f para calcular una función desconocida $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$.

Problema: Encuentra una entrada $x \in \{0, 1\}^n$ tal que $f(x) = 1$.

Si la función f sólo se proporciona como una caja negra, entonces son necesarias $\Omega(\sqrt{2^n})$ aplicaciones de la caja negra para resolver el problema de búsqueda con alta probabilidad para cualquier entrada. Por lo tanto, los algoritmos cuánticos pueden proporcionar, como máximo, una aceleración cuadrática sobre la búsqueda exhaustiva clásica. El algoritmo de Grover realiza la búsqueda cuadráticamente más rápido de lo que se puede hacer de forma clásica. Si hay exactamente una solución, una búsqueda de fuerza bruta determinista clásica toma 2^n consultas en el peor de los casos. De hecho, cualquier algoritmo clásico, que para cualquier función encuentra una solución con una probabilidad de

al menos $\frac{2}{3}$, debe realizar consultas $\Omega(2^n)$ en el peor de los casos. El algoritmo de búsqueda cuántica de Grover solo toma $O(\sqrt{2^n}) = O(\sqrt{2}^{\frac{n}{2}})$ consultas [4].

En particular, el algoritmo de Grover proporciona una aceleración cuadrática en la solución de problemas NP-completos, que explican muchos de los problemas difíciles importantes en informática [4]. Por otro lado, el poder de los algoritmos cuánticos, tal como lo descubrió Lov Grover, es que $\frac{N}{2}$ se puede mejorar a $O(N^{1/2})$. En comparación con un algoritmo clásico de búsqueda aleatoria, el factor $\frac{1}{2}$ entra en el exponente, lo que es una gran mejora. Ahora explicaremos cómo y por qué funciona el algoritmo [6].

• Shor's Algorithm

El algoritmo de Shor se presentó en 1994 en una conferencia, este describe dos algoritmos cuánticos para la factorización de enteros y logaritmos discretos que se ejecutan en tiempo polinomial. Shor explota no solo el paralelismo cuántico sino también el entrelazamiento [10].

1) Idea general

En el algoritmo de factorización de Shor (SFA), el objetivo es encontrar un factor no trivial de un número entero compuesto N . Dicho brevemente, SFA funciona de la siguiente manera. Elige aleatoriamente un número entero $y < N$ y comprueba si y y N son coprimos. Si y es coprimo con N , entonces SFA ejecuta una subrutina cuántica especial para obtener el orden $2r$ de N con cierta probabilidad ($2r$ es aquí un número entero). En el SFA original y en todos los SFA anteriores, si $2r$ era un número entero par y $y^r \not\equiv -1 \pmod{N}$, entonces SFA usa y y $2r$ para obtener un factor no trivial de N . Sin embargo, si el resultado r obtenido por la subrutina de búsqueda de orden cuántico no era $2r$, o $2r$ no era un número entero par, o $y^r \equiv -1 \pmod{N}$, entonces la subrutina cuántica tendría que ejecutarse nuevamente [7].

2) Explicación detallada del algoritmo Shor [17]

- Elige un número d con factores primos pequeños tal que $2n^2 \leq d \leq 3n^2$.
- Elija un número entero aleatorio x que sea coprimo de n .
- Repita los siguientes pasos, registre d veces usando la misma x cada vez:
 - * Cree un registro de memoria cuántica de $2d$ enteros no negativos módulo n y divídelo en

dos mitades llamadas reg1 y reg2 . Para el estado de todo el registro escribimos el vector ket $|\text{reg1}, \text{reg2}\rangle$.

- * Cargue reg1 con los enteros $0, 1, \dots, d-1$ y reg2 con ceros en todos los lugares, luego normalice el registro de manera que podamos escribir el estado de todo el registro como ket vector (notación de Dirac).

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{a=0}^{d-1} |a, 0\rangle \quad (1)$$

- * Realice la transformación $x \rightarrow x^a \pmod{n}$ (usando paralelismo cuántico) en cada número (no normalizado) en reg1 y coloque los resultados en los lugares correspondientes en reg2 . Denote por r el período de la transformación anterior. Entonces el estado del registro completo (normalizado) se vuelve

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{a=0}^{d-1} |a, x^a \pmod{n}\rangle \quad (2)$$

- * Medir el contenido de reg2 mediante el operador hermitiano A . Entonces esto colapsa a algún k y tiene el efecto de proyectar el estado de reg1 para que sea una superposición de exactamente aquellos valores de a para los cuales $x^a = k \pmod{n}$. Por tanto, el estado del registro completo es

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\#M} \sum_{a' \in M} |a', k\rangle \quad (3)$$

donde $M := \{a' : x^{a'} = k \pmod{n}\}$

- * Calcule la transformada de Fourier discreta (rápida) del estado proyectado en reg1 y devuelva este resultado a reg1 . Esto mapea el estado proyectado en reg1 en una superposición

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\#M} \sum_{a' \in M} |a', k\rangle \quad (4)$$

- * Ahora, la transformada de Fourier en reg1 es una función periódica con un pico en múltiplos del período inverso $\frac{1}{r}$. Los estados correspondientes a múltiplos enteros de $\frac{1}{r}$ y los cercanos a ellos aparecen con mayores amplitudes de probabilidad que los que no corresponden a múltiplos enteros del período inverso. Entonces, en cada paso, obtenemos un número h' tal que $\frac{h'}{d}$ está cerca del múltiplo $\frac{\lambda}{r}$ del período inverso del mapa exponencial

para algún $\lambda \in \mathbb{N}$. Para estimar λ , se puede calcular la expansión de fracción continua de $\frac{h'}{d}$ siempre que el denominador sea menor que n y luego retener la fracción más cercana como $\frac{\lambda}{r}$. Si esto se hace con suficiente frecuencia, tenemos suficientes muestras de λ_i que conducen a una conjetura del verdadero λ y, por lo tanto, de r .

- Ahora que conocemos r , podemos determinar los factores de n con alta probabilidad [17].

Observamos que, por supuesto (con una probabilidad bastante baja), el algoritmo de Shor puede fallar. Tales contraejemplos se construyen fácilmente. Pero representan casos bastante atípicos. Además, en lugar de utilizar la transformada clásica (rápida) de Fourier, también hay algoritmos cuánticos para la transformada de Fourier, que hacen que el algoritmo de Shor funcione aún más rápido en la práctica, pero no hasta el punto de mejorar el orden lineal de complejidad [17].

III. TRABAJOS RELACIONADOS

- Cryptographic Attack Possibilities over RSA Algorithm through Classical and Quantum Computation

El sistema criptográfico RSA es usado para el diseño de cifrado, su protocolo de seguridad funciona según el principio de factorización de enteros grandes que descompone el número compuesto en un producto de números primos. En dicho survey se describe un ataque por fuerza bruta, en la que tiene como objetivo encontrar la clave secreta consultando la función de cifrado sucesivamente con todas las posibles claves. Por otro lado, para vulnerar el algoritmo RSA es necesario la factorización de números enteros grandes, actualmente no existe un algoritmo en tiempo polinomial que pueda realizarlo en una computadora clásica, sin embargo en dicho survey se propone el Algoritmo Shor logra factorizar números enteros grandes en tiempo polinomial, pero este algoritmo sólo puede ejecutarse en una computadora cuántica [13].

- Quantum Algorithm for Attacking RSA Based on Fourier Transform and Fixed-Point

Shor diseña un algoritmo cuántico de tiempo polinomial para encontrar el orden r de un elemento a en el grupo multiplicativo Z_n^* , que es usado para factorizar el entero positivo n y lograr así romper el famoso sistema criptográfico RSA, pero está sujeto a una condición, donde se requiere que r sea par, sin embargo dicho survey propone un ataque de punto fijo basado en la transformada inversa cuántica de Fourier y la estimación de fase, este algoritmo se ejecuta en tiempo polinomial

cuántico y no necesita factorizar explícitamente el módulo n y además no requiere que r sea par, esta propuesta asegura que la probabilidad de éxito sea mayor frente al algoritmo Shor, pero la complejidad del tiempo es la misma para ambos [15], [16].

- Experimental Analysis of Attacks on RSA Rabin Cryptosystems using Quantum Shor's Algorithm

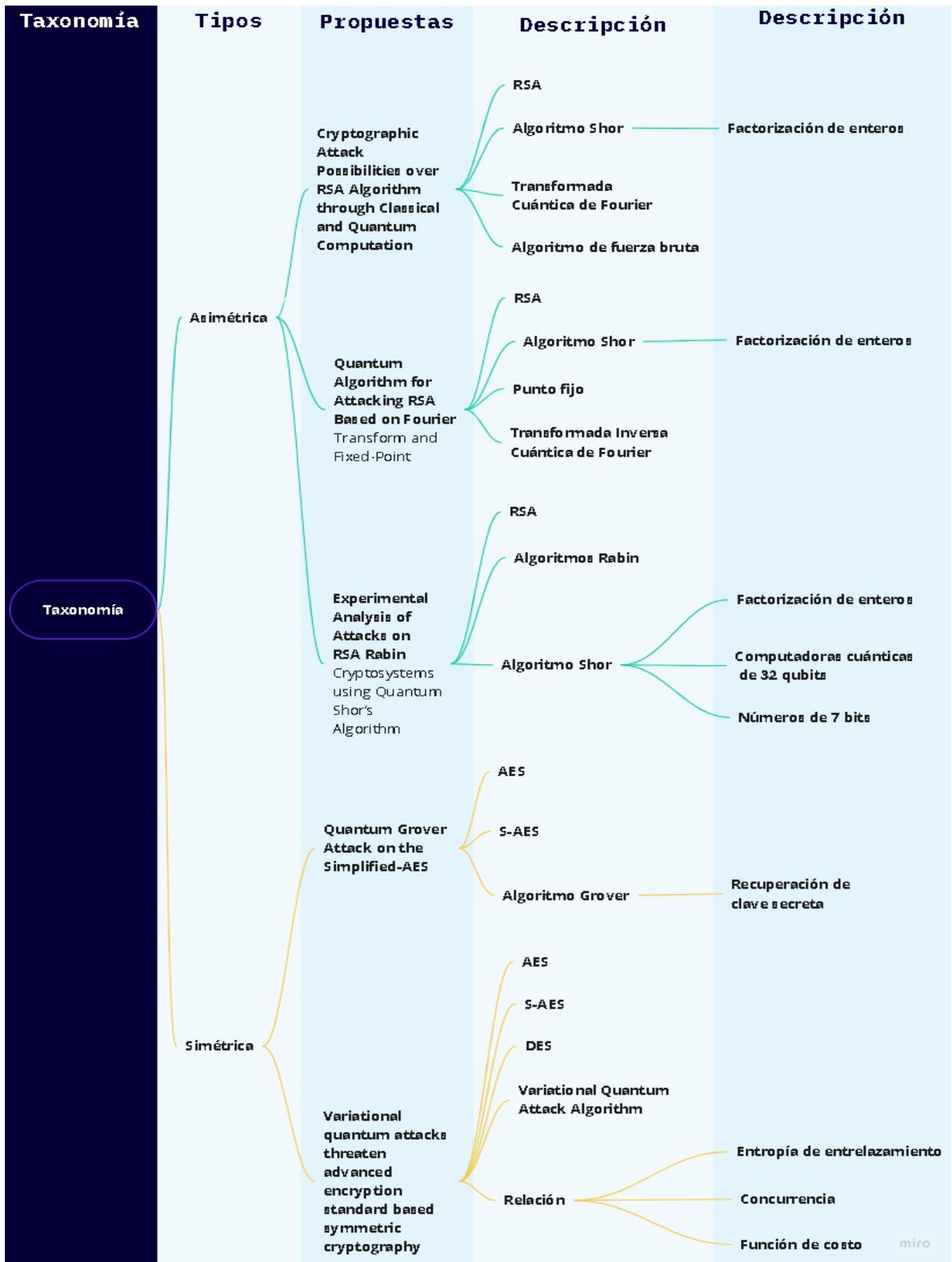
Este survey propone, cómo el algoritmo de Shor puede romper los algoritmos de de criptografía que se basan en factorización como el RSA y los algoritmos de Rabin usando IBM Quantum Experience, pero dicho experimento se hará con no más de 7 bits, puesto que IBM ofrece solo 32 qubits. El enfoque de dicho survey está en demostrar que el algoritmo de Quantum Shor representa un peligro para los criptosistemas asimétricos que utilizan productos de números primos grandes para la generación de claves [3].

- Quantum Grover Attack on the Simplified-AES

Este survey presenta la forma de atacar el algoritmo estándar de cifrado avanzado simplificado (S-AES) usando el algoritmo de Grover, donde se construyen circuitos cuánticos para los componentes principales de S-AES para luego juntarlos y formar una versión cuántica de dicho algoritmo; de esta forma el S-AES se integra en una caja negra que pasara por el algoritmo de Grover y así recuperar la clave secreta en aceleración cuadrática [1].

- Variational quantum attacks threaten advanced encryption standard based symmetric cryptography

Este survey propone un Variational Quantum Attack Algorithm (VQAA) para la criptografía simétrica AES (Advanced Encryption Standard), a su vez muestra cómo en ocasiones el VQAA es mucho más rápido que el algoritmo de Grover utilizando el mismo orden de consultas de espacio de búsqueda, así como también muestran la relación entre la entropía de entrelazamiento, la concurrencia y la función de costo [14].



REFERENCES

- [1] Mishal Almazrooie et al. "Quantum Grover Attack on the Simplified-AES". In: *Proceedings of the 2018 7th International Conference on Software and Computer Applications*. ICSCA 2018. Kuantan, Malaysia: Association for Computing Machinery, 2018, pp. 204–211.
- [2] Dagmar Bruss et al. "Quantum Cryptography: A Survey". In: *ACM Comput. Surv.* 39.2 (2007), 6–es.
- [3] Babita Jajodia and Ritu Thombre. "Experimental Analysis of Attacks on RSA Rabin Cryptosystems using Quantum Shor's Algorithm". In: Apr. 2021.
- [4] Phillip Kaye, Raymond Laflamme, and Michele Mosca. "ALGORITHMS BASED ON AMPLITUDE AMPLIFICATION". In: (Nov. 2006), pp. 152–163.
- [5] Phillip Kaye, Raymond Laflamme, and Michele Mosca. "Introductory Quantum Algorithms". In: (Nov. 2006), pp. 94–99.
- [6] Richard J. Lipton and Kenneth W. Regan. "Grover's Algorithm". In: *Quantum Algorithms via Linear Algebra: A Primer*. 2014, pp. 115–128.
- [7] Daniel Neuenchwander. "3 Factorization with Quantum Computers: Shor's Algorithm". In: *Probabilistic and Statistical Methods in Cryptology: An Introduction by Selected Topics*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2004, pp. 37–45.
- [8] Nick Papanikolaou. "An Introduction to Quantum Cryptography". In: *XRDS* 11.3 (2005), p. 3.
- [9] Renato Portugal. "Deutsch's Algorithm". In: (Sept. 2022), pp. 26–31.
- [10] Renato Portugal. "Shor's Algorithm for Factoring Integers". In: (Sept. 2022), pp. 56–74.
- [11] Eleanor Rieffel and Wolfgang Polak. "An Introduction to Quantum Computing for Non-Physicists". In: *ACM Comput. Surv.* 32.3 (2000), pp. 300–335.
- [12] Jacob Hammond Shlomo Kashani Maryam Alqasemi. "A quantum Fourier transform (QFT) based note detection algorithm". In: (Apr. 2022), pp. 4–8.
- [13] Kapil Kumar Soni and Akhtar Rasool. "Cryptographic Attack Possibilities over RSA Algorithm through Classical and Quantum Computation". In: *2018 International Conference on Smart Systems and Inventive Technology (ICSSIT)*. 2018, pp. 11–15.
- [14] Y. Wang, H. Zhang, and H. Wang. "Quantum Algorithm for Attacking RSA Based on the eth Root". In: *Gongcheng Kexue Yu Jishu/Advanced Engineering Science* 50 (2018), pp. 163–169.
- [15] Yahui Wang, Huanguo Zhang, and Houzhen Wang. "Quantum polynomial-time fixed-point attack for RSA". In: *China Communications* 15.2 (2018), pp. 25–32.
- [16] WANG, Yahui and ZHANG, Huanguo. "Quantum Algorithm for Attacking RSA Based on Fourier Transform and Fixed-Point". In: *Wuhan Univ. J. Nat. Sci.* 26.6 (2021), pp. 489–494.
- [17] Guoliang Xu et al. "Improving the Success Probability for Shor's Factorization Algorithm". In: *Reversibility and Universality: Essays Presented to Kenichi Morita on the Occasion of his 70th Birthday*. Ed. by Andrew Adamatzky. Cham: Springer International Publishing, 2018, pp. 447–462.