微分算符(Differntiation notation): How many of these are there?

在微积分中，为了表示微分（求导），演化出了多种不同的记号。他们形态各异，但是意义相同。

下面以一个函数 f 为例；函数 f 有参数(parameter) t, 通常写作 $f(t)$. f 对 t 的导数可以写成：

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f = f'(x) \tag{1}$$

前面两个记号是 Leibniz 记号，意义基本上完全相同。如果f形态不太友善（比如一个很长的分式），那么第二个记号写起来会简洁一些。

在我们刚才讨论的参数方程的语境中，$f(t)$ 是关于参数t 的函数，写作 $f(t) = (x(t), y(t))$. 可见，我们一打眼只能分别看出 y 与 t 的关系, x 与 t 的关系。

但通常情况下，我们对 y 与 x 的关系更感兴趣。因此，我们会想要求出 y 对 x 的导数。我们可以用如下方法找出：

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}x(t)} = \frac{\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}} = \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)} \tag{2}$$

在一些情况下，第三种写法会更简洁一些。它会帮助你区分$y(t)$ 和参数t

现在目光转向参数方程$f(t) = (x(t), y(t))$ 的二阶导数.因为二阶导数就是一阶导数的再求导，所以可以写出

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}_{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\text{对}x\text{ 再求导}} \tag{3}$$

把 Equation 3 中的 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 记作u, 那么他就这么变：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \tag{4}$$

利用 Equation 2, 公式中的y 现在是u, 那么

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x} \tag{5}$$

我们于是推出了参数方程的二阶导数的求导法则。如果推导过程看不懂，这个公式记住也不妨...

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x} \tag{6}$$

- 下面再讨论刚才的问题，“$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 的区别？”

  $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ 都是微分算符，区别在于一个对参数x 求导，一个对参数t 求导。

如果x 是另一个参数t的函数，就比如在刚才的许多例子中出现的$x(t)$，那么$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 就是x 对t 的导数。严谨的话，应记作$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}$)，以强调参数$t$。它与常见的$\frac{\mathrm{d}f(x}{\mathrm{d}x}$ 没有概念上的区别，这里的$x(t)$ 与 $f(x)$ 都是关于某一个参数函数。