三维坐标系下的分离变数法

拉普拉斯方程

$$\Delta u = 0$$

球坐标

球坐标系下

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0$$

分离变数

$$u(r,\theta,\varphi)=R(r)\mathrm{Y}(\theta,\varphi)$$

分解为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)-l(l+1)R=0 \tag{a}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\mathrm{Y}}{\partial\varphi^2}+l(l+1)\mathrm{Y}=0 \tag{b}$$

常微分方程(a)解为

$$R(r)=Cr^l+D\frac{1}{r^{l+1}}$$

偏微分方程(b)叫**球函数方程**。进一步分离变数

$$\mathrm{Y}(\theta,\varphi)=\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$$

得

$$\Phi''+\lambda\Phi=0 \tag{a}$$

$$\sin\theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)+\left[l(l+1)\sin^2\theta-\lambda\right]\Theta=0 \tag{b}$$

常微分方程(a)有自然周期条件

$$\Phi(\varphi+2\pi)=\Phi(\varphi)$$

得本征值

$$\lambda=m^2\quad(m=0,1,2,3,\cdots)$$

本征函数

$$\Phi(\varphi)=A\cos m\varphi+B\sin m\varphi$$

用代换

$$\theta=\arccos x$$

得

$$\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}x^2}-2x\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}x}+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]\Theta=0$$

上面方程为l阶**连带勒让德方程**。其$m=0$的特例，即

$$\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}x^2}-2x\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}x}+l(l+1)\Theta=0$$

则叫作l阶**勒让德方程**。

柱坐标

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

分离变数

$$u(\rho,\varphi,z)=R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z)$$

得

$$\Phi'' + \lambda\Phi = 0 \tag{a}$$

$$Z'' - \mu Z = 0 \tag{b}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d}\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho} + \left(\mu - \frac{m^2}{\rho^2}\right) R = 0 \tag{c}$$

其中式(a)与球坐标的相同。

$$\lambda = m^2$$

(1) $\mu = 0$

$$Z(z) = C + Dz$$

$$R(\rho) = \begin{cases} E + F\ln\rho & (m = 0), \\ E\rho^m + F/\rho^m & (m = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

(2) $\mu > 0$

$$Z(z) = C\mathrm{e}^{\sqrt{\mu}z} + D\mathrm{e}^{-\sqrt{\mu}z}$$

作代换$x = \sqrt{\mu}\rho$，式(c)化为

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d}x^2} + x\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x} + \left(x^2 - m^2\right) R = 0$$

称为m阶**贝塞尔方程**。

(3) $\mu < 0$

记$\nu^2 = -\mu > 0$，则有

$$Z(z) = C\cos\nu z + D\sin\nu z$$

作代换$x = \nu\rho$，式(c)化为

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d}x^2} + x\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x} - \left(x^2 + m^2\right) R = 0$$

称为m阶**虚宗量贝塞尔方程**。

总结

<table>
<tr><th>方程</th><th>球坐标系</th><th colspan="2">柱坐标系</th></tr>
<tr><td rowspan="3">拉普拉斯方程
$\Delta_3 u=0$</td><td rowspan="3">$\Phi(\varphi)=\begin{Bmatrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{Bmatrix}$
$R(r)=\begin{Bmatrix}r^l\\ 1/r^{l+1}\end{Bmatrix}$
$\Theta(x)$满足 l 阶连带勒让德方程(9.1.11)</td><td colspan="2">$\Phi(\varphi)=\begin{Bmatrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{Bmatrix}$</td></tr>
<tr><td>$(\mu>0)$
$Z(z)=\begin{Bmatrix}e^{\sqrt{\mu}z}\\ e^{-\sqrt{\mu}z}\end{Bmatrix}$
$R(\rho)$满足 m 阶贝塞尔方程(9.1.22)</td><td>$(\nu^2=-\mu>0)$
$Z(z)=\begin{Bmatrix}\cos\nu z\\ \sin\nu z\end{Bmatrix}$
$R(\rho)$满足 m 阶虚宗量贝塞尔方程(9.1.25)</td></tr>
<tr><td colspan="2">$(\mu=-\nu^2=0)$
$Z(z)=\begin{Bmatrix}1\\ z\end{Bmatrix}$
$R_0(\rho)=\begin{Bmatrix}1\\ \ln\rho\end{Bmatrix}$; $R_m(\rho)=\begin{Bmatrix}\rho^m\\ \rho^{-m}\end{Bmatrix}$ $(m\neq 0)$</td></tr>
<tr><td>波动方程
$u_{tt}-a^2\Delta_3 u=0$</td><td colspan="3">$T_0(t)=\begin{Bmatrix}1\\ t\end{Bmatrix}$; $T_k(t)=\begin{Bmatrix}\cos kat\\ \sin kat\end{Bmatrix}$ $(k\neq 0)$
$\Delta v(\boldsymbol{r})+k^2 v(\boldsymbol{r})=0$</td></tr>
<tr><td>输运方程
$u_t-a^2\Delta_3 u=0$</td><td colspan="3">$T(t)=e^{-k^2a^2t}$, $\Delta v(\boldsymbol{r})+k^2 v(\boldsymbol{r})=0$</td></tr>
<tr><td>亥姆霍兹方程
$\Delta_3 v+k^2 v=0$</td><td>$\Phi(\varphi)=\begin{Bmatrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{Bmatrix}$
$\Theta(\theta)$满足 l 阶连带勒让德方程(9.1.11)
$R(r)$满足 l 阶球贝塞尔方程(9.1.39)$(k\neq 0)$
$R_0(r)=\begin{Bmatrix}r^l\\ 1/r^{l+1}\end{Bmatrix}$</td><td colspan="2">$\Phi(\varphi)=\begin{Bmatrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{Bmatrix}$
$Z(z)=\begin{Bmatrix}\cos\nu z\\ \sin\nu z\end{Bmatrix}$; 但 $\nu=0$ 则
$Z(z)=\begin{Bmatrix}1\\ z\end{Bmatrix}$
$R(\rho)$满足 m 阶贝塞尔方程(9.1.49); 但 $\mu'=0$ 则
$R_0(\rho)=\begin{Bmatrix}1\\ \ln\rho\end{Bmatrix}$; $R_m(\rho)=\begin{Bmatrix}\rho^m\\ \rho^{-m}\end{Bmatrix}$ $(m\neq 0)$
$[k^2=\mu'+\nu^2]$</td></tr>
</table>

一些方程的级数解

贝塞尔方程

ν阶贝塞尔方程

$x_0=0$的邻域上的ν阶贝塞尔方程

$$x^2 y''+x y'+\left(x^2-\nu^2\right) y=0 \quad(\nu \notin Z)$$

ν阶**贝塞尔函数**

$$\mathrm{J}_\nu(x)=\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}$$

$-\nu$阶**贝塞尔函数**

$$\mathrm{J}_{-\nu}(x)=\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(-\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+2k}$$

ν阶贝塞尔方程的通解

$$y(x)=C_1 \mathrm{~J}_\nu(x)+C_2 \mathrm{~J}_{-\nu}(x)$$

ν阶**诺伊曼函数**

$$\mathrm{N}_\nu(x)=\frac{\mathrm{J}_\nu(x) \cos \nu \pi-\mathrm{J}_{-\nu}(x)}{\sin \nu \pi}$$

ν阶贝塞尔方程的通解也可为

$$y(x)=C_1 \mathrm{~J}_\nu(x)+C_2 \mathrm{~N}_\nu(x)$$

整数m阶贝塞尔方程

通解为

$$C_1 \mathrm{~J}_m(x)+C_2 \mathrm{~N}_m(x)$$

任意阶贝塞尔方程

取线性独立的

$$\left\{\begin{array}{l}
\mathrm{H}_\nu^{(1)}(x)=\mathrm{J}_\nu(x)+\mathrm{iN}_\nu(x) \\
\mathrm{H}_\nu^{(2)}(x)=\mathrm{J}_\nu(x)-\mathrm{iN}_\nu(x)
\end{array}\right.$$

并称之为**第一种和第二种汉克尔函数**。ν阶贝塞尔方程的通解可表为

$$y(x)=C_1\mathrm{H}_\nu^{(1)}(x)+C_2\mathrm{H}_\nu^{(2)}(x)$$

这对整数阶的情况也照样适用

虚宗量贝塞尔方程

ν阶虚宗量贝塞尔方程

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}x^2}+x\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x}-\left(x^2+\nu^2\right)R=0\quad(\nu\notin Z)$$

虚宗量贝塞尔函数

$$\mathrm{I}_\nu(x)=\mathrm{i}^{-\nu}\mathrm{J}_\nu(\mathrm{i}x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}$$

$$\mathrm{I}_{-\nu}(x)=\mathrm{i}^{\nu}\mathrm{J}_{-\nu}(\mathrm{i}x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\Gamma(-\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+2k}$$

ν阶贝塞尔函数的通解为

$$C_1\mathrm{I}_\nu(x)+C_2\mathrm{I}_{-\nu}(x)$$

整数m阶虚宗量贝塞尔方程

虚宗量汉克尔函数

$$\mathrm{K}_\nu(x)=\frac{\pi}{2}\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\nu}\mathrm{H}_\nu^{(1)}(\mathrm{i}x)=\frac{\pi}{2}\frac{\mathrm{I}_{-\nu}(x)-\mathrm{I}_\nu(x)}{\sin\nu\pi}$$

通解

$$C_1\mathrm{I}_m(x)+C_2\,\mathrm{K}_m(x)$$

该通解适用于任意阶。

球函数

球函数方程

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\mathrm{Y}}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\mathrm{Y}}{\partial\varphi^2}+l(l+1)\mathrm{Y}=0$$

分离变数

$$\mathrm{Y}(\theta,\varphi)=(A\cos m\varphi+B\sin m\varphi)\Theta(\theta)\quad(m=0,1,2,\cdots)$$

$\Theta(\theta)$满足

$$\left(1-x^{2}\right)\frac{\mathrm{d}^{2}\Theta}{\mathrm{d}x^{2}}-2x\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}x}+\left[l(l+1)-\frac{m^{2}}{1-x^{2}}\right]\Theta=0$$

其中$x=\cos\theta$

轴对称球函数

轴对称边界条件，$\Phi(\varphi)=\text{常数}$，则$m=0$，只需求勒让德方程

$$\left(1-x^{2}\right)\frac{\mathrm{d}^{2}\Theta}{\mathrm{d}x^{2}}-2x\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}x}+l(l+1)\Theta=0$$

自然边界条件: 解在$x=\pm1$有限。

本征值: $l(l+1)\quad l=0,1,2,\cdots$

本征函数: l阶**勒让德多项式**$\mathrm{P}_{l}(x)$

勒让德多项式的表达式

$$\mathrm{P}_{l}(x)=\sum_{k=0}^{[l/2]}(-1)^{k}\frac{(2l-2k)!}{2^{l}k!(l-k)!(l-2k)!}x^{l-2k}$$

其中$[l/2]$表示不超过$l/2$的最大整数。

微分表示：**罗德里格斯公式**

$$\mathrm{P}_{l}(x)=\frac{1}{2^{l}l!}\frac{\mathrm{d}^{l}}{\mathrm{d}x^{l}}\left(x^{2}-1\right)^{l}$$

积分表示：**施列夫利积分**

$$\mathrm{P}_{l}(x)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\frac{1}{2^{l}}\oint_{C}\frac{\left(z^{2}-1\right)^{l}}{(z-x)^{l+1}}\,\mathrm{d}z$$

C为z平面上围绕$z=x$点的任一闭合回路。

进行拉普拉斯积分

$$\mathrm{P}_{l}(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}[\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta\cos\psi]^{l}\,\mathrm{d}\psi$$

可得性质$|\mathrm{P}_{l}(x)|\leqslant1,\quad(-1\leqslant x\leqslant1)$

前几个勒让德多项式

$$
\begin{aligned}
&P_0(x)=1\\
&P_1(x)=x=\cos\theta\\
&P_2(x)=\tfrac{1}{2}\left(3x^2-1\right)=\tfrac{1}{4}(3\cos 2\theta+1)\\
&P_3(x)=\tfrac{1}{2}\left(5x^3-3x\right)=\tfrac{1}{8}(5\cos 3\theta+3\cos\theta)\\
&P_4(x)=\tfrac{1}{8}\left(35x^4-30x^2+3\right)=\tfrac{1}{64}(35\cos 4\theta+20\cos 2\theta+9)\\
&P_5(x)=\tfrac{1}{8}\left(63x^5-70x^3+15x\right)=\tfrac{1}{128}(63\cos 5\theta+35\cos 3\theta+30\cos\theta)\\
&P_6(x)=\tfrac{1}{16}\left(231x^6-315x^4+105x^2-5\right)=\tfrac{1}{512}(231\cos 6\theta+126\cos 4\theta+105\cos 2\theta+50)
\end{aligned}
$$

勒让德多项式与广义傅里叶

勒让德多项式的正交关系

$$\int_{-1}^{+1}\mathrm{P}_k(x)\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x=0\quad(k\neq l)$$

$$\int_0^{\pi}\mathrm{P}_k(\cos\theta)\mathrm{P}_l(\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta=0\quad(k\neq l)$$

勒让德多项式的模

$$N_l^2=\int_{-1}^{+1}\left[\mathrm{P}_l(x)\right]^2\ \mathrm{d}x=\frac{2}{2l+1}$$

$$N_l=\sqrt{\frac{2}{2l+1}}\quad(l=0,1,2,\cdots)$$

勒让德多项式的性质

几个特殊值

$$|\mathrm{P}_l(x)|\leqslant 1,\quad(-1\leqslant x\leqslant 1)$$

$$\mathrm{P}_l(1)=1$$

$$P_{2n+1}(0)=0$$

$$P_{2n}(0)=(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

记号

$$(2n)!!=(2n)(2n-2)(2n-4)\cdots 6\cdot 4\cdot 2$$

$$(2n-1)!!=(2n-1)(2n-3)(2n-5)\cdots 5\cdot 3\cdot 1$$

$$(2n)!=(2n)!!(2n-1)!!$$

奇偶性

$l=2n+1$，奇函数；$l=2n$偶函数。

母函数

$$\frac{1}{\sqrt{R^2-2rR\cos\theta+r^2}}=\begin{cases}\sum\limits_{l=0}^{\infty}\frac{1}{R^{l+1}}r^l\mathrm{P}_l(\cos\theta) & (r<R)\\ \sum\limits_{l=0}^{\infty}R^l\frac{1}{r^{l+1}}\mathrm{P}_l(\cos\theta) & (r>R)\end{cases}$$

递推公式

$$(k+1)\mathrm{P}_{k+1}(x)-(2k+1)x\mathrm{P}_k(x)+k\mathrm{P}_{k-1}(x)=0\quad(k\geq1)$$

可以用来转化$x\mathrm{P}_k(x)$。

另外的递推式

$$\mathrm{P}_k(x)=\mathrm{P}_{k+1}'(x)-2x\mathrm{P}_k'(x)+\mathrm{P}_{k-1}'(x)\quad(k\geqslant1)$$

$$(2k+1)\mathrm{P}_k(x)=\mathrm{P}_{k+1}'(x)-\mathrm{P}_{k-1}'(x)\quad(k\geqslant1)$$

$$\mathrm{P}_{k+1}'(x)=(k+1)\mathrm{P}_k(x)+x\mathrm{P}_k'(x)$$

$$k\mathrm{P}_k(x)=x\mathrm{P}_k'(x)-\mathrm{P}_{k-1}'(x)\quad(k\geqslant1)$$

$$\left(x^2-1\right)\mathrm{P}_k'(x)=kx\mathrm{P}_k(x)-k\mathrm{P}_{k-1}(x)\quad(k\geqslant1)$$

其它性质

$\left(x^2-1\right)^l=(x-1)^l(x+1)^l$以$x=\pm1$为$l$级零点，所以其$l-1$阶导数以$x=\pm1$为1级零点，则有

$$\left.\frac{\mathrm{d}^{l-1}\left(x^2-1\right)^l}{\mathrm{d}x^{l-1}}\right|_{-1}^{1}=0\quad(l\geq1)$$

常见的积分

可以用分部积分或递推关系求

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x=0\quad(l\geq1)$$

$$\int_0^1 x\mathrm{P}_{2n}(x)\mathrm{d}x=(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)}\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}\quad(n=1,2,\cdots)$$

连带勒让德函数

连带勒让德方程

$$\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}x^2}-2x\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}x}+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]\Theta=0\quad(x=\cos\theta)$$

其中$m=0,1,2,\cdots$，l为常数，待定。

表达式

代换

$$\Theta=\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}} y(x)$$

得

$$\left(1-x^2\right) y''-2(m+1) x y'+[l(l+1)-m(m+1)] y=0$$

将勒让德方程

$$\left(1-x^2\right) \mathrm{P}''-2 x \mathrm{P}'+l(l+1) \mathrm{P}=0$$

对x求导m次，得

$$\left(1-x^2\right) \mathrm{P}^{[m]''}-2(m+1) x \mathrm{P}^{[m]'}+[l(l+1)-m(m+1)] \mathrm{P}^{[m]}=0$$

因此有

$$y(x)=\mathrm{P}^{[m]}(x)$$

连带勒让德方程本征值问题

本征值：$l(l+1)$

本征函数：$\mathrm{P}_l^m(x)$

$$\mathrm{P}_l^m(x)=\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}} \mathrm{P}_l^{[m]}(x) \quad(m=0,1,2, \cdots, l)$$

微分表示，罗德里格斯公式

$$\mathrm{P}_l^m(x)=\frac{\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}}{2^l l!} \frac{\mathrm{d}^{l+m}}{\mathrm{d} x^{l+m}}\left(x^2-1\right)^l$$

积分表示，拉普拉斯积分

$$\mathrm{P}_l^m(x)=\frac{\mathrm{i}^m}{2 \pi} \frac{(l+m)!}{l!} \int_{-\pi}^\pi \mathrm{e}^{-\mathrm{i} m \psi}[\cos \theta+\mathrm{i} \sin \theta \cos \psi]^l \mathrm{~d} \psi$$

当$m>l$时，$P_l^m(x) \equiv 0$。

当$m<0$时，有

$$\mathrm{P}_l^{-m}(x)=\frac{(l-m)!}{(l+m)!} \mathrm{P}_l^m(x)$$

函数表

$$
\begin{aligned}
&P_1^1(x)=\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}=\sin\theta\\
&P_2^1(x)=3\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}x=\tfrac{3}{2}\sin 2\theta=3\sin\theta\cos\theta\\
&P_2^2(x)=3\left(1-x^2\right)=\tfrac{3}{2}(1-\cos 2\theta)=3\sin^2\theta\\
&P_3^1(x)=\tfrac{3}{2}\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(5x^2-1\right)=\tfrac{3}{8}(\sin\theta+5\sin 3\theta)=6\sin\theta-\tfrac{15}{2}\sin^3\theta\\
&P_3^2(x)=15\left(1-x^2\right)x=\tfrac{15}{4}(\cos\theta-\cos 3\theta)=15\sin^2\theta\cos\theta\\
&P_3^3(x)=15\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}=\tfrac{15}{4}(3\sin\theta-\sin 3\theta)=15\sin^3\theta\\
&P_4^1(x)=\tfrac{5}{2}\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(7x^3-3x\right)=\tfrac{5}{16}(2\sin 2\theta+7\sin 4\theta)=10\sin\theta\cos\theta-\tfrac{15}{2}\sin^3\theta\cos\theta\\
&P_4^2(x)=\tfrac{15}{2}\left(1-x^2\right)\left(7x^2-1\right)=\tfrac{15}{16}(3+4\cos 2\theta-7\cos 4\theta)=45\sin^2\theta-\tfrac{105}{2}\sin^4\theta\\
&P_4^3(x)=105\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}x=\tfrac{105}{8}(2\sin 2\theta-\sin 4\theta)=105\sin^3\theta\cos\theta\\
&P_4^4(x)=105\left(1-x^2\right)^2=\tfrac{105}{8}(3-4\cos 2\theta+\cos 4\theta)=105\sin^4\theta
\end{aligned}
$$

一些性质

奇偶性

$l-m$偶，偶；$l-m$奇，奇。

正交关系

$$\int_{-1}^{+1}\mathrm{P}_k^m(x)\mathrm{P}_l^m(x)\mathrm{d}x=0\quad(k\neq l)$$

模

$$\left(N_l^m\right)^2=\int_{-1}^{+1}\left[\mathrm{P}_l^m(x)\right]^2\,\mathrm{d}x=\frac{(l+m)!2}{(l-m)!(2l+1)}$$

$$N_l^m=\sqrt{\frac{(l+m)!2}{(l-m)!(2l+1)}}$$

递推公式

$$(2k+1)x\mathrm{P}_k^m(x)=(k+m)\mathrm{P}_{k-1}^m(x)+(k-m+1)\mathrm{P}_{k+1}^m(x)$$

$$(2k+1)\left(1-x^2\right)^{1/2}\mathrm{P}_k^m(x)=(k+m)(k+m-1)\mathrm{P}_{k-1}^{m-1}(x)-(k-m+2)(k-m+1)\mathrm{P}_{k+1}^{m-1}(x)\quad(k\geqslant 1)$$

$$(2k+1)\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{dP}_k^m(x)}{\mathrm{d}x}=(k+1)(k+m)\mathrm{P}_{k-1}^m(x)-k(k-m+1)\mathrm{P}_{k+1}^m(x)\quad(k\geqslant 1)$$

一般的球函数

表达式

球函数方程的分离变数解是

$$\mathrm{Y}_l^m(\theta,\varphi)=\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\left\{\begin{array}{l}\sin m\varphi\\ \cos m\varphi\end{array}\right\}\quad\left(\begin{array}{l}m=0,1,2,\cdots,l\\ l=0,1,2,3,\cdots\end{array}\right)$$

记号$\{\}$表示其中列举的函数是线性独立的，可任取其一。l叫作球函数的阶。

复数形式

$$\mathrm{Y}_l^m(\theta,\varphi)=\mathrm{P}_l^{|m|}(\cos\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}\left(\begin{array}{l}m=-l,-l+1,\cdots,0,1,\cdots,l\\ l=0,1,2,3,\cdots\end{array}\right)$$

一些性质

正交关系

球面S，$0\leqslant\theta\leqslant\pi,0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$

$$\iint_S \mathrm{Y}_l^m(\theta,\varphi)Y_k^n(\theta,\varphi)\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi=0\quad(m\neq n\text{ 或 }l\neq k)$$

对于复数形式

$$\iint_S Y_l^m(\theta,\varphi)\left[Y_k^n(\theta,\varphi)\right]^*\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi=0\quad(m\neq n\text{ 或 }l\neq k)$$

模

$$(N_l^m)^2=\iint_S\left[Y_l^m(\theta,\varphi)\right]^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi=\frac{2\pi\delta_m}{2l+1}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}$$

其中

$$\delta_m=\left\{\begin{array}{ll}2 & (m=0)\\ 1 & (m=1,2,3,\cdots)\end{array}\right.$$

$$N_l^m=\sqrt{\frac{2\pi\delta_m}{2l+1}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}}$$

复数形式

$$(N_l^m)^2=\iint_S Y_l^m(\theta,\varphi)\left[Y_l^m(\theta,\varphi)\right]^*\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi=\frac{4\pi}{2l+1}\cdot\frac{(l+|m|)!}{(l-|m|)!}$$

$$N_l^m=\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}\cdot\frac{(l+|m|)!}{(l-|m|)!}}$$

广义傅里叶展开

球面S上函数$f(\theta,\varphi)$可用球函数展开

$$f(\theta,\varphi)=\sum_{m=0}^{\infty}\left[A_m(\theta)\cos m\varphi+B_m(\theta)\sin m\varphi\right]$$

先匹配φ，再匹配θ。

复数形式

$$f(\theta,\varphi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}C_l^m\mathrm{P}_l^{|m|}(\cos\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}$$

系数C_l^m计算公式

$$C_l^m=\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta,\varphi)\mathrm{P}_l^{|m|}(\cos\theta)\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}\right]^*\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

拉普拉斯方程通解

$$\begin{aligned}u(r,\theta,\varphi)=&\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=m}^{\infty}r^l\left[A_l^m\cos m\varphi+B_l^m\sin m\varphi\right]\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)+\\&\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=m}^{\infty}\frac{1}{r^{l+1}}\left[C_l^m\cos m\varphi+D_l^m\sin m\varphi\right]\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\end{aligned}$$

正交归一化的球函数

$$\mathrm{Y}_{lm}(\theta,\varphi)=\frac{1}{N_l^m}\mathrm{Y}_l^m(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\cdot\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}}\mathrm{P}_l^{|m|}(\cos\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}\begin{pmatrix}m=-l,-l+1,\cdots,0,1,\cdots,l\\l=0,1,2,3,\cdots\end{pmatrix}$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{Y}_{lm}(\theta,\varphi)\mathrm{Y}_{kn}^*(\theta,\varphi)\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi=\delta_{lk}\delta_{mn}$$

广义傅里叶积分

$$f(\theta,\varphi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}C_{lm}\mathrm{Y}_{lm}(\theta,\varphi)$$

$$C_{lm}=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}f(\theta,\varphi)\mathrm{Y}_{lm}^*(\theta,\varphi)\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

加法公式

$$\mathrm{P}_l(\cos\Theta)=\sum_{m=0}^{l}\frac{2}{\delta_m}\cdot\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\left(\cos m\varphi_0\cos m\varphi+\sin m\varphi_0\sin m\varphi\right)\mathrm{P}_l^m\left(\cos\theta_0\right)\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)$$

$$\cos\Theta=\cos\theta_0\cos\theta+\sin\theta_0\sin\theta\cos\left(\varphi-\varphi_0\right)$$

柱函数

贝塞尔方程

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}x^2}+x\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x}+\left(x^2-m^2\right)R=0\quad(x=\sqrt{\mu}\rho)$$

虚宗量贝塞尔方程

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}x^2}+x\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x}-\left(x^2+m^2\right)R=0\quad(x=\nu\rho)$$

球贝塞尔方程

$$r^2\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}r}+2r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}+\left[k^2r^2-l(l+1)\right]R=0$$

m指整数阶，$l+1/2$指半奇数阶，ν统指一般的阶

三类柱函数

贝塞尔函数、诺伊曼函数、汉克尔函数又分别称为第一类、第二类、第三类柱函数。

$x\rightarrow 0$和$x\rightarrow\infty$时的行为

当$x\rightarrow 0$，有

$$\begin{aligned}&\mathrm{J}_0(x)\rightarrow 1,\quad \mathrm{J}_\nu(x)\rightarrow 0,\quad \mathrm{J}_{-\nu}(x)\rightarrow\infty,\\&\mathrm{N}_0(x)\rightarrow-\infty,\quad \mathrm{N}_\nu(x)\rightarrow\pm\infty\\&(\nu\neq 0)\end{aligned}$$

这样，在研究圆柱内部问题时，“解在圆柱轴上($\rho=0$亦即$x=0$)应为有限”这个要求就成为自然的边界条件，按照这个条件，应舍弃诺伊曼函数和负阶的贝塞尔函数，只要零阶和正阶的贝塞尔函数

当$x\rightarrow\infty$，有

$$\begin{aligned}&\mathrm{H}_\nu^{(1)}(x)\sim\sqrt{\tfrac{2}{\pi x}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-\nu\pi/2-\pi/4)}\\&\mathrm{H}_\nu^{(2)}(x)\sim\sqrt{\tfrac{2}{\pi x}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(x-\nu\pi/2-\pi/4)}\\&\mathrm{J}_\nu(x)\sim\sqrt{\tfrac{2}{\pi x}}\cos(x-\nu\pi/2-\pi/4)\\&\mathrm{N}_\nu(x)\sim\sqrt{\tfrac{2}{\pi x}}\sin(x-\nu\pi/2-\pi/4)\end{aligned}$$

当$x\rightarrow\infty$，它们全都$\rightarrow 0$ 这样，在研究圆柱外部问题时，两个线性独立特解，如$\mathrm{J}_\nu(x)$和$\mathrm{N}_\nu(x)$，或$\mathrm{H}_\nu^{(1)}(x)$和$\mathrm{H}_\nu^{(2)}(x)$，都要保留，不可任意舍弃两者之一，因为它们都满足“解在无限远处($\rho\rightarrow\infty$亦即$x\rightarrow\infty$)为有限”

递推公式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\mathrm{J}_\nu(x)}{x^\nu}\right]=-\frac{\mathrm{J}_{\nu+1}(x)}{x^\nu}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^\nu\mathrm{J}_\nu(x)\right]=x^\nu\mathrm{J}_{\nu-1}(x)$$

如用$\mathrm{Z}_\nu(x)$代表ν阶的第一或第二或第三类柱函数，总是有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\mathrm{Z}_\nu(x)/x^\nu\right]=-\mathrm{Z}_{\nu+1}(x)/x^\nu$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^\nu\mathrm{Z}_\nu(x)\right]=x^\nu\mathrm{Z}_{\nu-1}(x)$$

可改写为

$$\mathrm{Z}_\nu'(x)-\nu\mathrm{Z}_\nu(x)/x=-\mathrm{Z}_{\nu+1}(x)$$

$$\mathrm{Z}_\nu'(x)+\nu\mathrm{Z}_\nu(x)/x=\mathrm{Z}_{\nu-1}(x)$$

可得

$$\mathrm{Z}_{\nu-1}(x)-\mathrm{Z}_{\nu+1}(x)=2\mathrm{Z}_\nu'(x)$$

$$\mathrm{Z}_{\nu+1}(x)-2\nu\mathrm{Z}_\nu(x)/x+\mathrm{Z}_{\nu-1}(x)=0$$

贝塞尔方程的本征值问题

拉普拉斯方程在柱坐标系下，分离变数有三种情况$\mu<0,\mu=0,\mu>0$。

对于**圆柱内部**的问题，如果**柱侧有齐次的边界条件**，则只需考虑$\mu\geqslant 0$，即求解贝塞尔方程（对于$\mu<0$，若$m>0$，不满足有限值条件，$m=0$，是平凡解）。

本征函数

$$R(\rho)=\mathrm{J}_m(x)=\mathrm{J}_m(\sqrt{\mu}\rho)\quad(m\geqslant 0)$$

柱侧的齐次边界条件决定μ的可能值，这就是本征值。

不同边界条件下的本征值

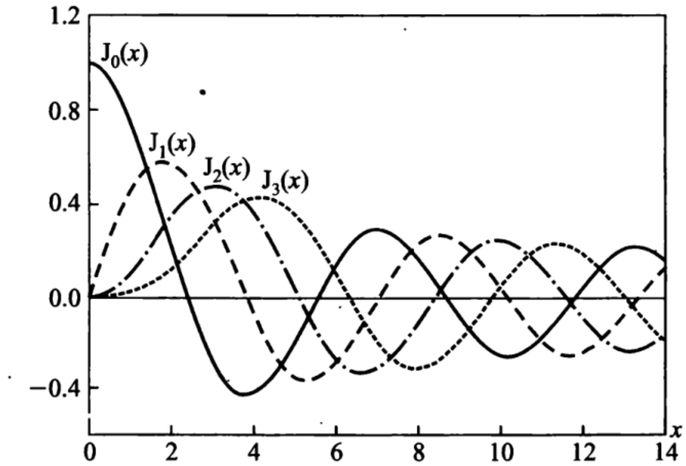
第一类齐次边界条件$R(\rho_0)=0$，则有$\mathrm{J}_m\left(\sqrt{\mu}\rho_0\right)=0$

用$x_n^{(m)}$表示方程$\mathrm{J}_m\left(x_0\right)=0$的第$n$个正根

则第一类齐次边界条件的本征值$\mu_n^{(m,1)}=\left(x_n^{(m)}/\rho_0\right)^2$（$\mu=0$是平凡解）

零点的一些结论

1. 正负成对，绝对值相等$\mathrm{J}_m(-x)=(-1)^m\,\mathrm{J}_m(x)$
2. 无穷多个零点
3. $\mathrm{J}_m(x)$和$\mathrm{J}_{m+1}(x)$的零点两两相间
4. $\mathrm{J}_m(x)$绝对值最小的零点比$\mathrm{J}_{m+1}(x)$的更接近于0



第二类齐次边界条件$R'\left(\rho_0\right)=0$

记$x_n^{(m,2)}$是方程

$$\frac{x_0}{\rho_0} J_m'\left(x_0\right)=0$$

的第n个正根

则本征值$\mu_n^{(m,2)}=\left(x_n^{(m,2)}/\rho_0\right)^2$，注意$\mu=0$也是本征值

$$\mathrm{J}_0'(x)=-\mathrm{J}_1(x)$$

$$\mathrm{J}_m'(x)=\frac{1}{2}\left[\mathrm{J}_{m-1}(x)-\mathrm{J}_{m+1}(x)\right]$$

第三类齐次边界条件$R\left(\rho_0\right)+HR'\left(\rho_0\right)=0$

记$x_n^{(m,3)}$为方程

$$\mathrm{J}_m\left(x_0\right)=\frac{x_0}{h+m}\mathrm{J}_{m+1}\left(x_0\right)$$

的第n个正根

则本征值$\mu_n^{(m,3)}=\left(x_n^{(m,3)}/\rho_0\right)^2$，注意$\mu=0$是否为本征值需要考虑

一些性质

正交性

$$\int_0^{\rho_0} \mathrm{J}_m\left(\sqrt{\mu_n}\rho\right)\mathrm{J}_m\left(\sqrt{\mu_l}\rho\right)\rho\,\mathrm{d}\rho=0 \quad (n\neq l)$$

模

$$
\begin{aligned}
\left[N_n^{(m)}\right]^2 &= \int_0^{\rho_0} \left[\mathrm{J}_m \left(\sqrt{\mu_n^{(m)}} \rho \right) \right]^2 \rho \, \mathrm{d}\rho \\
&= \frac{1}{2} \left(\rho_0^2 - \frac{m^2}{\mu_n^{(m)}} \right) \left[\mathrm{J}_m \left(\sqrt{\mu_n^{(m)}} \rho_0 \right) \right]^2 + \frac{1}{2} \rho_0^2 \left[\mathrm{J}_m' \left(\sqrt{\mu_n^{(m)}} \rho_0 \right) \right]^2
\end{aligned}
$$

第一类齐次边界条件

$$
\left[N_n^{(m)}\right]^2 = \frac{1}{2} \rho_0^2 \left[J_{m+1} \left(\sqrt{\mu_n^{(m)}} \rho_0 \right) \right]^2
$$

第二类齐次边界条件

$$
\left[N_n^{(m)}\right]^2 = \frac{1}{2} \left(\rho_0^2 - \frac{m^2}{\mu_n^{(m)}} \right) \left[J_m \left(\sqrt{\mu_n^{(m)}} \rho_0 \right) \right]^2
$$

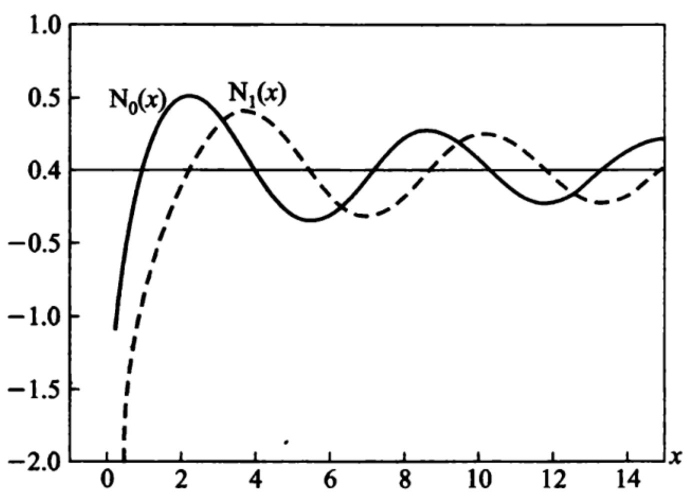
常见积分

$$
\begin{aligned}
&\int x^{-m} \, \mathrm{J}_{m+1}(x) \mathrm{d}x = -x^{-m} \, \mathrm{J}_m(x) + C \\
&\int \mathrm{J}_1(x) \mathrm{d}x = -\mathrm{J}_0(x) + C \\
&\int x^m \, \mathrm{J}_{m-1}(x) \mathrm{d}x = x^m \, \mathrm{J}_m(x) + C
\end{aligned}
$$

对于$\rho_0 \to \infty$的情况，则有傅里叶-贝塞尔积分

$$
\begin{cases}
f(\rho) = \int\limits_0^\infty F(\omega) \mathrm{J}_m(\omega\rho) \omega \mathrm{d}\omega \\
F(\omega) = \int\limits_0^\infty f(\rho) \mathrm{J}_m(\omega\rho) \rho \mathrm{d}\rho
\end{cases}
$$

诺伊曼函数



汉克尔函数

$\mathrm{H}_m^{(1)}$对应于会聚波，$\mathrm{H}_m^{(2)}$对应于发散波，J_m和N_m对应于驻波。

研究波发射问题，用汉克尔函数比较方便。

虚宗量的贝塞尔方程

圆柱状区域的拉普拉斯方程定解问题。
柱侧面有齐次边界条件，只要考虑$\mu \geqslant 0$的分离变数解。
如果圆柱上下底面具有齐次边界条件，而侧面为非齐次边界条件，这时$Z(z)$的齐次方程$Z'' + \nu^2 Z = 0$跟上下底面齐次边界条件构成本征值问题，其中$\nu^2 = -\mu \geqslant 0$，即应考虑$\mu \leqslant 0$的分离变数解。$\mu = 0$的情况比较简单，无需特别讨论；这里着重说一说$\mu < 0$的情况。

在

$$\nu^2 = -\mu < 0$$

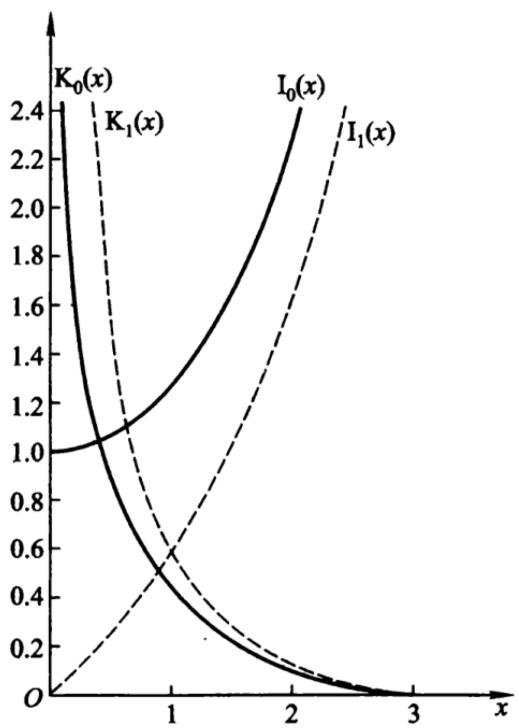
的情况下，$R(\rho)$是虚宗量贝塞尔方程的解

$$x^2 \frac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d}x^2} + x \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x} - \left(x^2 + m^2\right) R = 0 \quad (x = \nu\rho)$$

其通解为

$$y(x) = C_1 \mathrm{I}_m(x) + C_2\, \mathrm{K}_m(x)$$

函数行为



$x \to 0$时，$\mathrm{I}_0(0) = 1$，$\mathrm{I}_m(0) = 0 (m \neq 0)$，$\mathrm{K}_m(x) \to \infty$。

$x \to \infty$时

$$\mathrm{I}_m(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} e^x$$

$$\mathrm{K}_m(x)=\frac{\pi}{2\sqrt{x}}e^{-x}$$

递推公式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\mathrm{I}_\nu(x)}{x^\nu}\right]=\frac{\mathrm{I}_{\nu+1}(x)}{x^\nu};\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^\nu\mathrm{I}_\nu(x)\right]=x^\nu\mathrm{I}_{\nu-1}(x)$$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{I}_{v-1}(x)-\mathrm{I}_{v+1}(x)=\tfrac{2v}{x}\mathrm{I}_v(x)\\
&\mathrm{I}_{v-1}(x)+\mathrm{I}_{v+1}(x)=2\mathrm{I}_v'(x)\\
&\mathrm{K}_{v-1}(x)-\mathrm{K}_{v+1}(x)=-\tfrac{2v}{x}\,\mathrm{K}_v(x)\\
&\mathrm{K}_{v-1}(x)+\mathrm{K}_{v+1}(x)=-2\,\mathrm{K}_v'(x)
\end{aligned}$$

球贝塞尔方程

用球坐标系对亥姆霍兹方程进行分离变数，得到球贝塞尔方程

$$r^2\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}r^2}+2r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}+\left[k^2r^2-l(l+1)\right]R=0$$

下面讨论$k\neq 0$的情况。

变换

$$x=kr,\quad R(r)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}y(x)$$

化为$l+1/2$阶贝塞尔方程

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\left[x^2-\left(l+\frac{1}{2}\right)^2\right]y=0$$

线性独立解

球贝塞尔方程的线性独立解是下列五种之中任取的两种

球贝塞尔函数

$$\mathrm{j}_l(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,\mathrm{J}_{l+1/2}(x),\quad \mathrm{j}_{-l}(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,\mathrm{J}_{-(l+1/2)}(x)$$

球诺伊曼函数

$$\mathrm{n}_l(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,\mathrm{N}_{l+1/2}(x)$$

球汉克尔函数

$$\mathrm{h}_l^{(1)}(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\mathrm{H}_{l+1/2}^{(1)}(x),\quad \mathrm{h}_l^{(2)}(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\mathrm{H}_{l+1/2}^{(2)}(x)$$

递推公式

用$z_l(x)$代表球贝塞尔函数或球诺伊曼函数或球汉克尔函数，即

$$\mathrm{z}_l(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\mathrm{Z}_{l+1/2}(x)$$

则有递推公式

$$\mathbf{z}_{l+1}(x)=\frac{2l+1}{x}z_l-\mathbf{z}_{l-1}$$

关系式

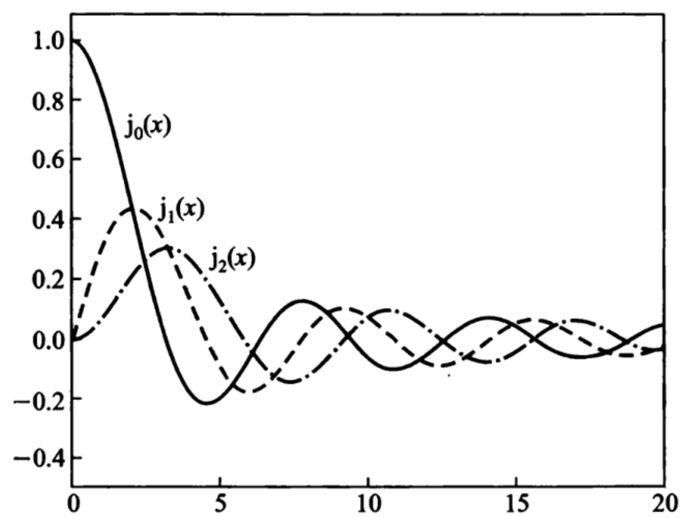
$$\mathrm{n}_l(x)=(-1)^{l+1}\mathrm{j}_{-(l+1)}(x)$$

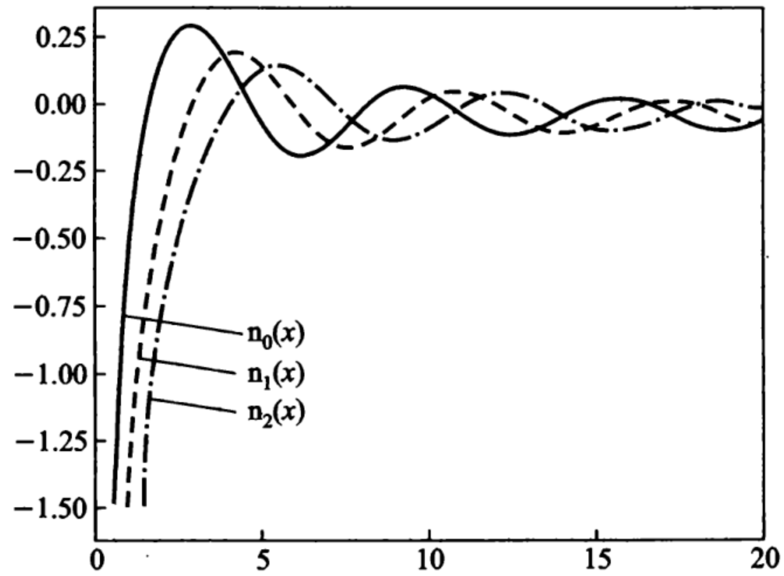
$$\mathrm{h}_l^{(1)}(x)=\mathrm{j}_l(x)+\mathrm{i}\mathrm{n}_l(x),\quad \mathrm{h}_l^{(2)}(x)=\mathrm{j}_l(x)-\mathrm{i}\mathrm{n}_l(x)$$

初等函数表示式

$$\mathrm{j}_0(x)=\frac{\sin x}{x},\quad \mathrm{j}_{-1}(x)=\frac{\cos x}{x}$$

$$\mathrm{n}_0(x)=-\frac{\cos x}{x},\quad \mathrm{n}_{-1}(x)=\frac{\sin x}{x}$$





函数行为