- ▼ 三维坐标系下的分离变数法
 - ▼ 拉普拉斯方程
 - 球坐标
 - 柱坐标
 - 总结
- ▼ 一些方程的级数解
 - ▼ 贝塞尔方程

 - 任意阶贝塞尔方程
 - ▼ 虚宗量贝塞尔方程

 - 整数m阶虚宗量贝塞尔方程
- ▼ 球函数
 - ▼ 轴对称球函数
 - 勒让德多项式的表达式
 - 勒让德多项式与广义傅里叶
 - ▼ 勒让德多项式的性质
 - 几个特殊值
 - 奇偶性
 - 母函数
 - 递推公式
 - 其它性质
 - 常见的积分
 - ▼ 连带勒让德函数
 - 表达式
 - 函数表
 - ▼ 一些性质
 - 奇偶性
 - 正交关系
 - ■模
 - 递推公式
 - ▼ 一般的球函数
 - ▼ 表达式
 - 复数形式
 - ▼ 一些性质
 - 正交关系
 - ■模
 - 广义傅里叶展开
 - 拉普拉斯方程通解
 - 正交归一化的球函数
 - 加法公式
- ▼ 柱函数
 - ▼ 三类柱函数

- $x \to 0$ 和 $x \to \infty$ 时的行为
- 递推公式
- ▼ 贝塞尔方程的本征值问题
 - 不同边界条件下的本征值
 - 一些性质
 - 诺伊曼函数
 - 汉克尔函数
- ▼ 虚宗量的贝塞尔方程
 - 函数行为
 - 递推公式
- ▼ 球贝塞尔方程
 - 线性独立解
 - 递推公式
 - 关系式
 - 初等函数表示式
 - 函数行为

三维坐标系下的分离变数法

拉普拉斯方程

$$\Delta u = 0$$

球坐标

球坐标系下

$$rac{1}{r^2}rac{\partial}{\partial r}\left(r^2rac{\partial u}{\partial r}
ight) + rac{1}{r^2\sin heta}rac{\partial}{\partial heta}\left(\sin hetarac{\partial u}{\partial heta}
ight) + rac{1}{r^2\sin^2 heta}rac{\partial^2 u}{\partial arphi^2} = 0$$

分离变数

$$u(r, \theta, \varphi) = R(r) Y(\theta, \varphi)$$

分解为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) - l(l+1)R = 0\tag{a}$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \mathbf{Y}}{\partial \varphi^2} + l(l+1)\mathbf{Y} = 0$$
 (b)

常微分方程(a)解为

$$R(r) = Cr^l + Drac{1}{r^{l+1}}$$

偏微分方程(b)叫**球函数方程**。进一步分离变数

$$Y(\theta, \varphi) = \Theta(\theta)\Phi(\varphi)$$

得

$$\Phi'' + \lambda \Phi = 0 \tag{a}$$

$$\sin\theta \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} \left(\sin\theta \frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta} \right) + \left[l(l+1)\sin^2\theta - \lambda \right] \Theta = 0 \tag{b}$$

常微分方程(a)有自然周期条件

$$\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$$

得本征值

$$\lambda=m^2 \quad (m=0,1,2,3,\cdots)$$

本征函数

$$\Phi(arphi) = A\cos marphi + B\sin marphi$$

用代换

$$\theta = \arccos x$$

得

$$\left(1-x^2
ight)rac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}x^2}-2xrac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}x}+\left[l(l+1)-rac{m^2}{1-x^2}
ight]\Theta=0$$

上面方程为l阶**连带勒让德方程**。其m=0的特例,即

$$\left(1-x^2
ight)rac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}x^2}-2xrac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}x}+l(l+1)\Theta=0$$

则叫作*l*阶**勒让德方程**。

柱坐标

$$rac{1}{
ho}rac{\partial}{\partial
ho}\left(
horac{\partial u}{\partial
ho}
ight)+rac{1}{
ho^2}rac{\partial^2 u}{\partialarphi^2}+rac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

分离变数

$$u(\rho, \varphi, z) = R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z)$$

$$\Phi'' + \lambda \Phi = 0 \tag{a}$$

$$Z'' - \mu Z = 0 \tag{b}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d}\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho} + \left(\mu - \frac{m^2}{\rho^2}\right) R = 0 \tag{c}$$

其中式(a)与球坐标的相同。

$$\lambda = m^2$$

(1) $\mu = 0$

$$Z(z)=C+Dz$$
 $R(
ho)=\left\{egin{array}{ll} E+F\ln
ho & (m=0),\ E
ho^m+F/
ho^m & (m=1,2,3,\cdots) \end{array}
ight.$

(2) $\mu > 0$

$$Z(z) = Ce^{\sqrt{\mu}z} + De^{-\sqrt{\mu}z}$$

作代换 $x = \sqrt{\mu}\rho$,式(c)化为

$$x^2rac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}x^2}+xrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x}+\left(x^2-m^2
ight)R=0$$

称为*m*阶**贝塞尔方程**。

(3) $\mu < 0$

记 $\nu^2 = -\mu > 0$,则有

$$Z(z) = C\cos\nu z + D\sin\nu z$$

作代换 $x = \nu \rho$, 式(c)化为

$$x^2 \frac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d}x^2} + x \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x} - \left(x^2 + m^2\right)R = 0$$

称为*m*阶**虚宗量贝塞尔方程**。

总结

方 程	球坐标系	柱 坐 标 系
		$\Phi(\varphi) = \begin{cases} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{cases}$
拉普拉斯方程 Δ ₃ u = 0	$ \Phi(\varphi) = \begin{cases} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{cases} $ $ R(r) = \begin{cases} r^{l} \\ 1/r^{l+1} \end{cases} $ $ \Theta(x) 满足 l 阶连 $ 带 勒 让 德 方 程 $ (9.1.11) $	$(\mu > 0) \qquad (\nu^2 = -\mu > 0)$ $Z(z) = \begin{cases} e^{\sqrt{\mu}z} \\ e^{-\sqrt{\mu}z} \end{cases} \qquad Z(z) = \begin{cases} \cos \nu z \\ \sin \nu z \end{cases}$ $R(\rho) 满足 m 阶贝塞尔 \qquad R(\rho) 满足 m 阶虚宗$
波动方程 $u_{tt} - a^2 \Delta_3 u = 0$	$T_{0}(t) = \left\{ \ln \rho \right\}; K_{m}(\rho) = \left\{ \rho^{-m} \right\} (m \neq 0)$ $T_{0}(t) = \left\{ \frac{1}{t} \right\}; T_{k}(t) = \left\{ \frac{\cos kat}{\sin kat} \right\} (k \neq 0)$ $\Delta v(\mathbf{r}) + k^{2}v(\mathbf{r}) = 0$	
输运方程 $u_{i} - a^{2} \Delta_{3} u = 0$	$T(t) = e^{-k^2a^2t}, \ \Delta v(r) + k^2v(r) = 0$	
亥姆霍兹方程 Δ ₃ v + k ² v = 0	$\Phi(\varphi) = \begin{cases} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{cases}$ $\Theta(\theta) 满足 l 阶连 带 勒 让 德 方 程 (9.1.11)$ $R(r) 满足 l 阶球贝塞尔方程 (9.1.39) (k≠0)$ $R_0(r) = \begin{cases} r^l \\ 1/r^{l+1} \end{cases}$	$\Phi(\varphi) = \begin{cases} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{cases}$ $Z(z) = \begin{cases} \cos \nu z \\ \sin \nu z \end{cases}; \text{但 } \nu = 0 \text{ 则}$ $Z(z) = \begin{cases} 1 \\ z \end{cases}$ $R(\rho) 满足 m 阶贝塞尔方程(9.1.49); \text{但 } \mu' = 0 \text{ 则}$ $R_0(\rho) = \begin{cases} 1 \\ \ln \rho \end{cases}; R_m(\rho) = \begin{cases} \rho^m \\ \rho^{-m} \end{cases} (m \neq 0)$ $[k^2 = \mu' + \nu^2]$

一些方程的级数解

贝塞尔方程

ν 阶贝塞尔方程

 $x_0=0$ 的邻域上的 ν 阶贝塞尔方程

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \nu^2\right)y = 0 \quad (\nu \notin Z)$$

 ν 阶**贝塞尔函数**

$$\mathrm{J}_{
u}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} rac{(-1)^k}{k!\Gamma(
u+k+1)} \left(rac{x}{2}
ight)^{
u+2k}$$

 $-\nu$ 阶**贝塞尔函数**

$$\mathrm{J}_{-
u}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} rac{(-1)^k}{k!\Gamma(-
u+k+1)} \left(rac{x}{2}
ight)^{-
u+2k}$$

 ν 阶贝塞尔方程的通解

$$y(x) = C_1 J_{\nu}(x) + C_2 J_{-\nu}(x)$$

 ν 阶**诺伊曼函数**

$$\mathrm{N}_{
u}(x) = rac{\mathrm{J}_{
u}(x)\cos
u\pi - \mathrm{J}_{-
u}(x)}{\sin
u\pi}$$

 ν 阶贝塞尔方程的通解也可为

$$y(x) = C_1 \operatorname{J}_
u(x) + C_2 \operatorname{N}_
u(x)$$

整数加阶贝塞尔方程

通解为

$$C_1 \operatorname{J}_m(x) + C_2 \operatorname{N}_m(x)$$

任意阶贝塞尔方程

取线性独立的

$$\left\{egin{array}{l} {
m H}_{
u}^{(1)}(x) = {
m J}_{
u}(x) + {
m i}{
m N}_{
u}(x) \ {
m H}_{
u}^{(2)}(x) = {
m J}_{
u}(x) - {
m i}{
m N}_{
u}(x) \end{array}
ight.$$

并称之为**第一种和第二种汉克尔函数**。*v*阶贝塞尔方程的通解可表为

$$y(x) = C_1 \mathrm{H}_
u^{(1)}(x) + C_2 \mathrm{H}_
u^{(2)}(x)$$

这对整数阶的情况也照样适用

虚宗量贝塞尔方程

u阶虚宗量贝塞尔方程

$$x^2rac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}x^2}+xrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x}-\left(x^2+
u^2
ight)R=0\quad (
u
otin Z)$$

虚宗量贝塞尔函数

$$\mathrm{I}_{
u}(x)=\mathrm{i}^{-
u}\mathrm{J}_{
u}(\mathrm{i}x)=\sum_{k=0}^{\infty}rac{1}{k!\Gamma(
u+k+1)}\left(rac{x}{2}
ight)^{
u+2k}$$

$$\mathrm{I}_{-
u}(x)=\mathrm{i}^
u\mathrm{J}_{-
u}(\mathrm{i} x)=\sum_{k=0}^\inftyrac{1}{k!\Gamma(-
u+k+1)}\left(rac{x}{2}
ight)^{-
u+2k}$$

 ν 阶贝塞尔函数的通解为

$$C_1 \mathrm{I}_{
u}(x) + C_2 \mathrm{I}_{-
u}(x)$$

整数加阶虚宗量贝塞尔方程

虚宗量汉克尔函数

$$\mathrm{K}_{
u}(x) = rac{\pi}{2} \mathrm{i} \mathrm{e}^{\mathrm{i} rac{\pi}{2}
u} \mathrm{H}_{
u}^{(1)}(\mathrm{i} x) = rac{\pi}{2} rac{\mathrm{I}_{-
u}(x) - \mathrm{I}_{
u}(x)}{\sin
u \pi}$$

通解

$$C_1\mathbf{I}_m(x) + C_2\mathbf{K}_m(x)$$

该通解适用于任意阶。

球函数

球函数方程

$$rac{1}{\sin heta}rac{\partial}{\partial heta}\left(\sin hetarac{\partial {
m Y}}{\partial heta}
ight)+rac{1}{\sin^2 heta}rac{\partial^2 {
m Y}}{\partialarphi^2}+l(l+1){
m Y}=0$$

分离变数

$$\mathrm{Y}(heta,arphi)=(A\cos marphi+B\sin marphi)\Theta(heta)\quad (m=0,1,2,\cdots)$$

 $\Theta(\theta)$ 满足

$$\left(1-x^2
ight)rac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}x^2}-2xrac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}x}+\left\lceil l(l+1)-rac{m^2}{1-x^2}
ight
ceil\Theta=0$$

其中 $x = \cos \theta$

轴对称球函数

轴对称边界条件, $\Phi(\varphi) =$ 常数, 则m = 0, 只需求勒让德方程

$$\left(1-x^2
ight)rac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}x^2}-2xrac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}x}+l(l+1)\Theta=0$$

自然边界条件: 解在 $x = \pm 1$ 有限。

本征值: l(l+1) $l=0,1,2,\cdots$

本征函数: l阶**勒让德多项式** $\mathrm{P}_l(x)$

勒让德多项式的表达式

$$\mathrm{P}_l(x) = \sum_{k=0}^{[l/2]} (-1)^k rac{(2l-2k)!}{2^l k! (l-k)! (l-2k)!} x^{l-2k}$$

其中[l/2]表示不超过l/2的最大整数。

微分表示:罗德里格斯公式

$$\mathrm{P}_l(x) = rac{1}{2^l l!} rac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d} x^l} \left(x^2 - 1
ight)^l$$

积分表示: 施列夫利积分

$$\mathrm{P}_l(x) = rac{1}{2\pi\mathrm{i}}rac{1}{2^l}\oint_Crac{\left(z^2-1
ight)^l}{(z-x)^{l+1}}\,\mathrm{d}z$$

C为z平面上围绕z=x点的任一闭合回路。

进行拉普拉斯积分

$$\mathrm{P}_l(x) = rac{1}{\pi} \int_0^\pi [\cos heta + \mathrm{i} \sin heta \cos \psi]^l \; \mathrm{d}\psi$$

可得性质 $|P_l(x)| \leq 1$, $(-1 \leq x \leq 1)$

前几个勒让德多项式

$$\begin{split} P_0(x) &= 1 \\ P_1(x) &= x = \cos \theta \\ P_2(x) &= \frac{1}{2} \left(3x^2 - 1 \right) = \frac{1}{4} (3\cos 2\theta + 1) \\ P_3(x) &= \frac{1}{2} \left(5x^3 - 3x \right) = \frac{1}{8} (5\cos 3\theta + 3\cos \theta) \\ P_4(x) &= \frac{1}{8} \left(35x^4 - 30x^2 + 3 \right) = \frac{1}{64} (35\cos 4\theta + 20\cos 2\theta + 9) \\ P_5(x) &= \frac{1}{8} \left(63x^5 - 70x^3 + 15x \right) = \frac{1}{128} (63\cos 5\theta + 35\cos 3\theta + 30\cos \theta) \\ P_6(x) &= \frac{1}{16} \left(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5 \right) = \frac{1}{512} (231\cos 6\theta + 126\cos 4\theta + 105\cos 2\theta + 50) \end{split}$$

勒让德多项式与广义傅里叶

勒让德多项式的正交关系

$$\int_{-1}^{+1} \mathrm{P}_k(x) \mathrm{P}_l(x) \mathrm{d}x = 0 \quad (k
eq l)$$
 $\int_{0}^{\pi} \mathrm{P}_k(\cos heta) \mathrm{P}_l(\cos heta) \sin heta \mathrm{d} heta = 0 \quad (k
eq l)$

勒让德多项式的模

$$egin{split} N_l^2 &= \int_{-1}^{+1} \left[\mathrm{P}_l(x)
ight]^2 \; \mathrm{d}x = rac{2}{2l+1} \ N_l &= \sqrt{rac{2}{2l+1}} \quad (l=0,1,2,\cdots) \end{split}$$

勒让德多项式的性质

几个特殊值

$$|\mathrm{P}_l(x)|\leqslant 1,\quad (-1\leqslant x\leqslant 1)$$
 $\mathrm{P}_l(1)=1$ $P_{2n+1}(0)=0$ $P_{2n}(0)=(-1)^nrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$

记号

$$(2n)!! = (2n)(2n-2)(2n-4)\cdots 6\cdot 4\cdot 2$$
 $(2n-1)!! = (2n-1)(2n-3)(2n-5)\cdots 5\cdot 3\cdot 1$
 $(2n)! = (2n)!!(2n-1)!!$

奇偶性

l=2n+1, 奇函数; l=2n偶函数。

母函数

$$rac{1}{\sqrt{R^2-2rR\cos heta+r^2}} = \left\{egin{array}{ll} \sum\limits_{l=0}^{\infty}rac{1}{R^{l+1}}r^l\mathrm{P}_l(\cos heta) & (r < R) \ \sum\limits_{l=0}^{\infty}R^lrac{1}{r^{l+1}}\mathrm{P}_l(\cos heta) & (r > R) \end{array}
ight.$$

递推公式

$$(k+1)P_{k+1}(x) - (2k+1)xP_k(x) + kP_{k-1}(x) = 0 \quad (k \ge 1)$$

可以用来转化 $xP_k(x)$ 。

另外的递推式

$$egin{aligned} \mathrm{P}_k(x) &= \mathrm{P}'_{k+1}(x) - 2x \mathrm{P}'_k(x) + \mathrm{P}'_{k-1}(x) & (k \geqslant 1) \ &(2k+1) \mathrm{P}_k(x) = \mathrm{P}'_{k+1}(x) - \mathrm{P}'_{k-1}(x) & (k \geqslant 1) \ &\mathrm{P}'_{k+1}(x) = (k+1) \mathrm{P}_k(x) + x \mathrm{P}'_k(x) \ &k \mathrm{P}_k(x) = x \mathrm{P}'_k(x) - \mathrm{P}'_{k-1}(x) & (k \geqslant 1) \ &(x^2-1) \, \mathrm{P}'_k(x) = kx \mathrm{P}_k(x) - k \mathrm{P}_{k-1}(x) & (k \geqslant 1) \end{aligned}$$

其它性质

 $\left(x^2-1
ight)^l=(x-1)^l(x+1)^l$ 以 $x=\pm 1$ 为l级零点,所以其l-1阶导数以 $x=\pm 1$ 为1级零点,则有

$$\left. rac{\mathrm{d}^{l-1} \left(x^2 - 1
ight)^l}{\mathrm{d} x^{l-1}} \right|_{-1}^1 = 0 \quad (l \geq 1)$$

常见的积分

可以用分部积分或递推关系求

$$\int_{-1}^1 \mathrm{P}_l(x) \mathrm{d}x = 0 \quad (l \geq 1)$$
 $\int_0^1 x \mathrm{P}_{2n}(x) \mathrm{d}x = (-1)^{n+1} rac{1}{(2n-1)} \cdot rac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} \quad (n=1,2,\cdots)$

连带勒让德函数

连带勒让德方程

$$\left(1-x^2
ight)rac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}x^2}-2xrac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}x}+\left[l(l+1)-rac{m^2}{1-x^2}
ight]\Theta=0\quad (x=\cos heta)$$

其中 $m=0,1,2,\cdots$, l为常数, 待定。

表达式

代换

$$\Theta = \left(1-x^2
ight)^{rac{m}{2}}y(x)$$

得

$$\left(1-x^2\right)y''-2(m+1)xy'+[l(l+1)-m(m+1)]y=0$$

将勒让德方程

$$(1 - x^2) P'' - 2xP' + l(l+1)P = 0$$

对x求导m次,得

$$\left(1-x^2
ight) \mathrm{P}^{[m]''} - 2(m+1)x \mathrm{P}^{[m]'} + [l(l+1)-m(m+1)] \mathrm{P}^{[m]} = 0$$

因此有

$$y(x) = \mathrm{P}^{[m]}(x)$$

连带勒让德方程本征值问题

本征值: l(l+1)

本征函数: $P_l^m(x)$

$$\mathrm{P}_l^m(x) = \left(1-x^2
ight)^{rac{m}{2}} \mathrm{P}_l^{[m]}(x) \quad (m=0,1,2,\cdots,l)$$

微分表示,罗德里格斯公式

$$\mathrm{P}_l^m(x) = rac{\left(1-x^2
ight)^{rac{m}{2}}}{2^l l!} rac{\mathrm{d}^{l+m}}{\mathrm{d}x^{l+m}} \left(x^2-1
ight)^l$$

积分表示, 拉普拉斯积分

$$\mathrm{P}_l^m(x) = rac{\mathrm{i}^m}{2\pi} rac{(l+m)!}{l!} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\psi} [\cos heta + \mathrm{i}\sin heta\cos\psi]^l \; \mathrm{d}\psi$$

当m>l时, $P_l^m(x)\equiv 0$ 。

当m < 0时,有

$$\mathrm{P}_l^{-m}(x) = rac{(l-m)!}{(l+m)!} \mathrm{P}_l^m(x)$$

函数表

$$\begin{split} P_1^1(x) &= \left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sin\theta \\ P_2^1(x) &= 3\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}} x = \frac{3}{2}\sin2\theta = 3\sin\theta\cos\theta \\ P_2^2(x) &= 3\left(1-x^2\right) = \frac{3}{2}(1-\cos2\theta) = 3\sin^2\theta \\ P_3^1(x) &= \frac{3}{2}\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(5x^2-1\right) = \frac{3}{8}(\sin\theta+5\sin3\theta) = 6\sin\theta - \frac{15}{2}\sin^3\theta \\ P_3^2(x) &= 15\left(1-x^2\right)x = \frac{15}{4}(\cos\theta-\cos3\theta) = 15\sin^2\theta\cos\theta \\ P_3^3(x) &= 15\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{15}{4}(3\sin\theta-\sin3\theta) = 15\sin^3\theta \\ P_4^1(x) &= \frac{5}{2}\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(7x^3-3x\right) = \frac{5}{16}(2\sin2\theta+7\sin4\theta) = 10\sin\theta\cos\theta - \frac{15}{2}\sin^3\theta\cos\theta \\ P_4^2(x) &= \frac{15}{2}\left(1-x^2\right)\left(7x^2-1\right) = \frac{15}{16}(3+4\cos2\theta-7\cos4\theta) = 45\sin^2\theta - \frac{105}{2}\sin^4\theta \\ P_4^3(x) &= 105\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}x = \frac{105}{8}(2\sin2\theta-\sin4\theta) = 105\sin^3\theta\cos\theta \\ P_4^4(x) &= 105\left(1-x^2\right)^2 = \frac{105}{8}(3-4\cos2\theta+\cos4\theta) = 105\sin^4\theta \end{split}$$

一些性质

奇偶性

l-m偶, 偶; l-m奇, 奇。

正交关系

$$\int_{-1}^{+1} \mathrm{P}_k^m(x) \mathrm{P}_l^m(x) \mathrm{d}x = 0 \quad (k
eq l)$$

模

$$\left(N_l^m\right)^2 = \int_{-1}^{+1} \left[\mathrm{P}_l^m(x)
ight]^2 \, \mathrm{d}x = rac{(l+m)!2}{(l-m)!(2l+1)}$$
 $N_l^m = \sqrt{rac{(l+m)!2}{(l-m)!(2l+1)}}$

递推公式

$$(2k+1)x\mathrm{P}_k^m(x)=(k+m)\mathrm{P}_{k-1}^m(x)+(k-m+1)\mathrm{P}_{k+1}^m(x) \ (2k+1)\left(1-x^2
ight)^{1/2}\mathrm{P}_k^m(x)=(k+m)(k+m-1)\mathrm{P}_{k-1}^{m-1}(x)-(k-m+2)(k-m+1)\mathrm{P}_{k+1}^{m-1}(x) \quad (k\geqslant 1) \ (2k+1)\left(1-x^2
ight)rac{\mathrm{d}\mathrm{P}_k^m(x)}{\mathrm{d}x}=(k+1)(k+m)\mathrm{P}_{k-1}^m(x)-k(k-m+1)\mathrm{P}_{k+1}^m(x) \quad (k\geqslant 1)$$

一般的球函数

表达式

球函数方程的分离变数解是

$$\mathrm{Y}_l^m(heta,arphi) = \mathrm{P}_l^m(\cos heta) \left\{egin{array}{l} \sin marphi \ \cos marphi \end{array}
ight\} \quad \left(egin{array}{l} m=0,1,2,\cdots,l \ l=0,1,2,3,\cdots \end{array}
ight)$$

记号{}表示其中列举的函数是线性独立的,可任取其一。1叫作球函数的阶。

复数形式

$$\mathrm{Y}_l^m(heta,arphi) = \mathrm{P}_l^{|m|}(\cos heta)\mathrm{e}^{\mathrm{i} m arphi} \left(egin{array}{c} m=-l,-l+1,\cdots,0,1,\cdots,l \ l=0,1,2,3,\cdots \end{array}
ight)$$

一些性质

正交关系

球面S, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi, 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$

$$\iint_S Y_l^m(heta,arphi)Y_k^n(heta,arphi)\sin heta\mathrm{d} heta\mathrm{d}arphi=0\quad (m
eq n$$
 或 $l
eq k)$

对于复数形式

$$\iint_{S} Y_{l}^{m}(\theta,\varphi) \left[Y_{k}^{n}(\theta,\varphi) \right]^{*} \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi = 0 \quad (m \neq n \ \vec{\boxtimes} \ l \neq k)$$

模

$$\left(N_l^m
ight)^2 = \iint_S \left[Y_l^m(heta,arphi)
ight]^2 \sin heta \mathrm{d} heta \mathrm{d}arphi = rac{2\pi\delta_m}{2l+1}rac{(l+m)!}{(l-m)!}$$

其中

$$\delta_m = \left\{egin{array}{ll} 2 & (m=0) \ 1 & (m=1,2,3,\cdots) \end{array}
ight. \ N_l^m = \sqrt{rac{2\pi\delta_m}{2l+1}rac{(l+m)!}{(l-m)!}}$$

复数形式

$$egin{align} (N_l^m)^2 &= \iint_S Y_l^m(heta,arphi) \left[Y_l^m(heta,arphi)
ight]^* \sin heta \mathrm{d} heta \mathrm{d}arphi &= rac{4\pi}{2l+1} \cdot rac{(l+|m|)!}{(l-|m|)!} \ N_l^m &= \sqrt{rac{4\pi}{2l+1} \cdot rac{(l+|m|)!}{(l-|m|)!}} \end{aligned}$$

广义傅里叶展开

球面S上函数 $f(\theta,\varphi)$ 可用球函数展开

$$f(heta,arphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \left[A_m(heta) \cos marphi + B_m(heta) \sin marphi
ight]$$

先匹配 φ ,再匹配 θ 。

复数形式

$$f(heta,arphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} C_l^m \mathrm{P}_l^{|m|}(\cos heta) \mathrm{e}^{\mathrm{i}marphi}$$

系数 C_l^m 计算公式

$$C_l^m = rac{2l+1}{4\pi}rac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}\int_0^\pi\int_0^{2\pi}f(heta,arphi)\mathrm{P}_l^{|m|}(\cos heta)\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}marphi}
ight]^*\sin heta\mathrm{d} heta\mathrm{d}arphi$$

拉普拉斯方程通解

$$egin{aligned} u(r, heta,arphi) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} r^l \left[A_l^m \cos marphi + B_l^m \sin marphi
ight] \mathrm{P}_l^m(\cos heta) + \ &\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} rac{1}{r^{l+1}} \left[C_l^m \cos marphi + D_l^m \sin marphi
ight] \mathrm{P}_l^m(\cos heta) \end{aligned}$$

正交归一化的球函数

$$egin{aligned} \mathrm{Y}_{lm}(heta,arphi) &= rac{1}{N_l^m} \mathrm{Y}_l^m(heta,arphi) = \sqrt{rac{2l+1}{4\pi} \cdot rac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} \mathrm{P}_l^{|m|}(\cos heta) \mathrm{e}^{\mathrm{i} m arphi} \left(egin{array}{c} m=-l,-l+1,\cdots,0,1,\cdots,l \ l=0,1,2,3,\cdots \end{array}
ight) \ \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \mathrm{Y}_{lm}(heta,arphi) \mathrm{Y}_{kn}^*(heta,arphi) \sin heta \mathrm{d} heta \mathrm{d}arphi &= \delta_{lk}\delta_{mn} \end{aligned}$$

广义傅里叶积分

$$egin{aligned} f(heta,arphi) &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} C_{lm} \mathrm{Y}_{lm}(heta,arphi) \ C_{lm} &= \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{\pi} f(heta,arphi) \mathrm{Y}_{lm}^{st}(heta,arphi) \sin heta \mathrm{d} heta \mathrm{d}arphi \end{aligned}$$

加法公式

$$egin{aligned} \mathrm{P}_l(\cos\Theta) &= \sum_{m=0}^l rac{2}{\delta_m} \cdot rac{(l-m)!}{(l+m)!} \left(\cos m arphi_0 \cos m arphi + \sin m arphi_0 \sin m arphi
ight) \mathrm{P}_l^m \left(\cos heta_0
ight) \mathrm{P}_l$$

柱函数

贝塞尔方程

$$x^2rac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}x^2}+xrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x}+\left(x^2-m^2
ight)R=0 \quad (x=\sqrt{\mu}
ho)$$

虚宗量贝塞尔方程

$$x^2rac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}x^2}+xrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x}-\left(x^2+m^2
ight)R=0 \quad (x=
u
ho)$$

球贝塞尔方程

$$r^2rac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}r}+2rrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}+\left[k^2r^2-l(l+1)
ight]R=0$$

m指整数阶, l+1/2指半奇数阶, ν 统指一般的阶

三类柱函数

贝塞尔函数、诺伊曼函数、汉克尔函数又分别称为第一类、第二类、第三类柱函数。

$x \to 0$ 和 $x \to \infty$ 时的行为

当 $x \to 0$,有

$$egin{aligned} \mathrm{J}_0(x) &
ightarrow 1, \quad \mathrm{J}_
u(x) &
ightarrow 0, \quad \mathrm{J}_{-
u}(x)
ightarrow \infty, \ \mathrm{N}_0(x) &
ightarrow -\infty, \quad \mathrm{N}_
u(x) &
ightarrow \pm \infty \ (
u &
ightarrow 0) \end{aligned}$$

这样,在研究圆柱内部问题时,"解在圆柱轴上(ho=0亦即x=0)应为有限"这个要求就成为自然的边界条件,按照这个条件,应舍弃诺伊曼函数和负阶的贝塞尔函数,只要零阶和正阶的贝塞尔函数

当 $x \to \infty$,有

$$egin{aligned} &\mathrm{H}_{
u}^{(1)}(x) \sim \sqrt{rac{2}{\pi x}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-
u\pi/2-\pi/4)} \ &\mathrm{H}_{
u}^{(2)}(x) \sim \sqrt{rac{2}{\pi x}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(x-
u\pi/2-\pi/4)} \ &\mathrm{J}_{
u}(x) \sim \sqrt{rac{2}{\pi x}} \cos(x-
u\pi/2-\pi/4) \ &\mathrm{N}_{
u}(x) \sim \sqrt{rac{2}{\pi x}} \sin(x-
u\pi/2-\pi/4) \end{aligned}$$

当 $x\to\infty$,它们全都 $\to 0$ 这样,在研究圆柱外部问题时,两个线性独立特解,如 $J_{\nu}(x)$ 和 $N_{\nu}(x)$,或 $H_{\nu}^{(1)}(x)$ 和 $H_{\nu}^{(2)}(x)$,都要保留,不可任意舍弃两者之一,因为它们都满足"解在无限远处($\rho\to\infty$ 亦即 $x\to\infty$)为有限"

递推公式

$$rac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[rac{\mathrm{J}_
u(x)}{x^
u}
ight] = -rac{\mathrm{J}_{
u+1}(x)}{x^
u}$$

$$rac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^{
u}\mathrm{J}_{
u}(x)
ight]=x^{
u}\mathrm{J}_{
u-1}(x)$$

如用 $Z_{\nu}(x)$ 代表 ν 阶的第一或第二或第三类柱函数,总是有

$$egin{aligned} rac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\mathrm{Z}_{
u}(x)/x^{
u}
ight] &= -\mathrm{Z}_{
u+1}(x)/x^{
u} \ \\ rac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^{
u}\mathrm{Z}_{
u}(x)
ight] &= x^{
u}\mathrm{Z}_{
u-1}(x) \end{aligned}$$

可改写为

$$egin{aligned} \mathrm{Z}_{
u}'(x) -
u \mathrm{Z}_{
u}(x)/x &= -\mathrm{Z}_{
u+1}(x) \ \\ \mathrm{Z}_{
u}'(x) +
u \mathrm{Z}_{
u}(x)/x &= \mathrm{Z}_{
u-1}(x) \end{aligned}$$

可得

$$egin{split} & \mathrm{Z}_{
u-1}(x) - \mathrm{Z}_{
u+1}(x) = 2\mathrm{Z}_{
u}'(x) \ & \mathrm{Z}_{
u+1}(x) - 2
u \mathrm{Z}_{
u}(x)/x + \mathrm{Z}_{
u-1}(x) = 0 \end{split}$$

贝塞尔方程的本征值问题

拉普拉斯方程在柱坐标系下,分离变数有三种情况 $\mu < 0, \mu = 0, \mu > 0$ 。

对于**圆柱内部**的问题,如果**柱侧有齐次的边界条件**,则只需考虑 $\mu \ge 0$,即求解贝塞尔方程(对于 $\mu < 0$,若m > 0,不满足有限值条件,m = 0,是平凡解)。

本征函数

$$R(
ho) = \mathrm{J}_m(x) = \mathrm{J}_m(\sqrt{\mu}
ho) \quad (m\geqslant 0)$$

柱侧的齐次边界条件决定 μ的可能值,这就是本征值。

不同边界条件下的本征值

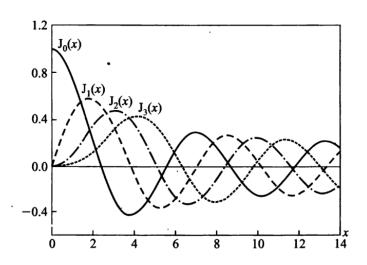
第一类齐次边界条件 $R(
ho_0)=0$,则有 $\mathrm{J}_m\left(\sqrt{\mu}
ho_0
ight)=0$

用 $x_{n}^{\left(m
ight) }$ 表示方程 $\mathbf{J}_{m}\left(x_{0}
ight) =0$ 的第n个正根

则第一类齐次边界条件的本征值 $\mu_n^{(m,1)}=\left(x_n^{(m)}/
ho_0
ight)^2$ $(\mu=0$ 是平凡解)

零点的一些结论

- 1. 正负成对,绝对值相等 $\mathrm{J}_m(-x)=(-1)^m\;\mathrm{J}_m(x)$
- 2. 无穷多个零点
- 3. $J_m(x)$ 和 $J_{m+1}(x)$ 的零点两两相间
- 4. $J_m(x)$ 绝对值最小的零点比 $J_{m+1}(x)$ 的更接近于0



第二类齐次边界条件 $R'(\rho_0)=0$

记 $x_n^{(m,2)}$ 是方程

$$\frac{x_0}{\rho_0}J_m'\left(x_0\right)=0$$

的第*n*个正根

则本征值 $\mu_n^{(m,2)}=\left(x_n^{(m,2)}/
ho_0
ight)^2$,注意 $\mu=0$ 也是本征值

$$\mathrm{J}_0'(x) = -\mathrm{J}_1(x)$$

$$\operatorname{J}'_m(x) = rac{1}{2} \left[\operatorname{J}_{m-1}(x) - \operatorname{J}_{m+1}(x)
ight]$$

第三类齐次边界条件 $R\left({{
ho }_{0}} \right)+HR'\left({{
ho }_{0}} \right)=0$

记 $x_n^{(m,3)}$ 为方程

$$\mathrm{J}_{m}\left(x_{0}
ight)=rac{x_{0}}{h+m}\mathrm{J}_{m+1}\left(x_{0}
ight)$$

的第n个正根

则本征值 $\mu_n^{(m,3)}=\left(x_n^{(m,3)}/\rho_0
ight)^2$,注意 $\mu=0$ 是否为本征值需要考虑

一些性质

正交性

$$\int_0^{
ho_0} \, \mathrm{J}_m \left(\sqrt{\mu_n}
ho
ight) \mathrm{J}_m \left(\sqrt{\mu_l}
ho
ight)
ho \, \mathrm{d}
ho = 0 \quad (n
eq l)$$

模

$$egin{split} \left[N_n^{(m)}
ight]^2 &= \int_0^{
ho_0} \left[\mathrm{\,J}_m \left(\sqrt{\mu_n^{(m)}}
ho
ight)
ight]^2
ho \,\mathrm{d}
ho \ &= rac{1}{2} \left(
ho_0^2 - rac{m^2}{\mu_n^{(m)}}
ight) \left[\mathrm{\,J}_m \left(\sqrt{\mu_n^{(m)}}
ho_0
ight)
ight]^2 + rac{1}{2}
ho_0^2 \left[\mathrm{\,J}_m' \left(\sqrt{\mu_n^{(m)}}
ho_0
ight)
ight]^2 \end{split}$$

第一类齐次边界条件

$$\left[N_n^{(m)}
ight]^2 = rac{1}{2}
ho_0^2 \left[J_{m+1}\left(\sqrt{\mu_n^{(m)}}
ho_0
ight)
ight]^2$$

第二类齐次边界条件

$$\left[N_n^{(m)}
ight]^2 = rac{1}{2}\left(
ho_0^2 - rac{m^2}{\mu_n^{(m)}}
ight)\left[J_m\left(\sqrt{\mu_n^{(m)}}
ho_0
ight)
ight]^2$$

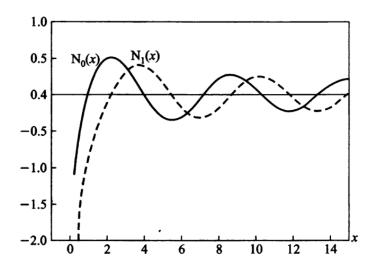
常见积分

$$\int x^{-m} \operatorname{J}_{m+1}(x) \mathrm{d}x = -x^{-m} \operatorname{J}_m(x) + C \ \int \operatorname{J}_1(x) \mathrm{d}x = -\operatorname{J}_0(x) + C \ \int x^m \operatorname{J}_{m-1}(x) \mathrm{d}x = x^m \operatorname{J}_m(x) + C$$

对于 $ho_0 o\infty$ 的情况,则有傅里叶-贝塞尔积分

$$\left\{egin{array}{l} f(
ho) = \int\limits_0^\infty F(\omega) \mathrm{J}_m(\omega
ho) \omega \mathrm{d}\omega \ F(\omega) = \int\limits_0^\infty f(
ho) \mathrm{J}_m(\omega
ho)
ho \mathrm{d}
ho \end{array}
ight.$$

诺伊曼函数



汉克尔函数

 $\mathbf{H}_{m}^{(1)}$ 对应于会聚波, $\mathbf{H}_{m}^{(2)}$ 对应于发散波, \mathbf{J}_{m} 和 \mathbf{N}_{m} 对应于驻波。

研究波发射问题,用汉克尔函数比较方便。

虚宗量的贝塞尔方程

圆柱状区域的拉普拉斯方程定解问题。

柱侧面有齐次边界条件,只要考虑 $\mu \geqslant 0$ 的分离变数解。

如果圆柱上下底面具有齐次边界条件,而侧面为非齐次边界条件,这时Z(z)的齐次方程 $Z''+\nu^2Z=0$ 跟上下底面齐次边界条件构成本征值问题,其中 $\nu^2=-\mu\geqslant 0$,即应考虑 $\mu\leqslant 0$ 的分离变数解。 $\mu=0$ 的情况比较简单,无需特别讨论;这里着重说一说 $\mu<0$ 的情况。

在

$$\nu^2 = -\mu < 0$$

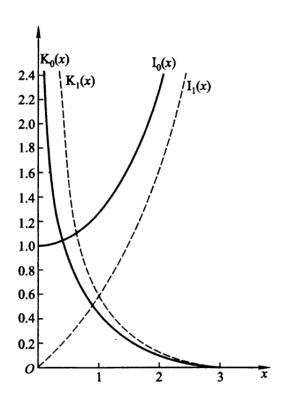
的情况下, $R(\rho)$ 是虚宗量贝塞尔方程的解

$$x^2rac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}x^2}+xrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x}-\left(x^2+m^2
ight)R=0 \quad (x=
u
ho)$$

其通解为

$$y(x) = C_1 I_m(x) + C_2 K_m(x)$$

函数行为



$$x o 0$$
时, $\mathrm{I}_0(0)=1$, $\mathrm{I}_m(0)=0 (m
eq 0)$, $\mathrm{K}_m(x) o \infty$ 。

 $x o \infty$ 时

$$\mathrm{I}_m(x)=rac{1}{2\sqrt{x}}e^x$$

$$\mathrm{K}_m(x) = rac{\pi}{2\sqrt{x}}e^{-x}$$

递推公式

$$egin{aligned} rac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left[rac{\mathrm{I}_{
u}(x)}{x^
u}
ight] &= rac{\mathrm{I}_{
u+1}(x)}{x^
u}; \quad rac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left[x^
u \mathrm{I}_
u(x)
ight] &= x^
u \mathrm{I}_{
u-1}(x) \\ &\mathrm{I}_{
u-1}(x) - \mathrm{I}_{
u+1}(x) = rac{2
u}{x} \mathrm{I}_
u(x) \\ &\mathrm{I}_{
u-1}(x) + \mathrm{I}_{
u+1}(x) = 2 \mathrm{I}'_
u(x) \\ &\mathrm{K}_{
u-1}(x) - \mathrm{K}_{
u+1}(x) = -rac{2
u}{x} \, \mathrm{K}_
u(x) \\ &\mathrm{K}_{
u-1}(x) + \mathrm{K}_{
u+1}(x) = -2 \, \mathrm{K}'_
u(x) \end{aligned}$$

球贝塞尔方程

用球坐标系对亥姆霍兹方程进行分离变数,得到球贝塞尔方程

$$r^2rac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}r^2}+2rrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}+\left[k^2r^2-l(l+1)
ight]R=0$$

下面讨论 $k \neq 0$ 的情况。

变换

$$x=kr,\quad R(r)=\sqrt{rac{\pi}{2x}}y(x)$$

化为l+1/2阶贝塞尔方程

$$\left[x^2rac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+xrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\left[x^2-\left(l+rac{1}{2}
ight)^2
ight]y=0$$

线性独立解

球贝塞尔方程的线性独立解是下列五种之中任取的两种

球贝塞尔函数

$${
m j}_l(x) = \sqrt{rac{\pi}{2x}} \ {
m J}_{l+1/2}(x), \quad {
m j}_{-l}(x) = \sqrt{rac{\pi}{2x}} \ {
m J}_{-(l+1/2)}(x)$$

球诺伊曼函数

$$\mathrm{n}_l(x) = \sqrt{rac{\pi}{2x}}\,\mathrm{N}_{l+1/2}(x)$$

球汉克尔函数

$$\mathrm{h}_{l}^{(1)}(x) = \sqrt{rac{\pi}{2x}} \mathrm{H}_{l+1/2}^{(1)}(x), \quad \mathrm{h}_{l}^{(2)}(x) = \sqrt{rac{\pi}{2x}} \mathrm{H}_{l+1/2}^{(2)}(x)$$

递推公式

用 $z_l(x)$ 代表球贝塞尔函数或球诺伊曼函数或球汉克尔函数,即

$$\mathrm{z}_l(x) = \sqrt{rac{\pi}{2x}} \mathrm{Z}_{l+1/2}(x)$$

则有递推公式

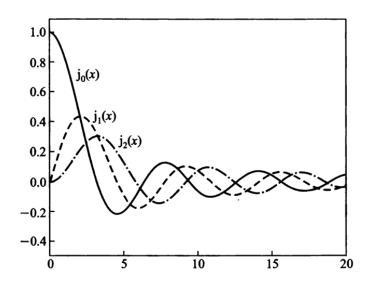
$$\mathbf{z}_{l+1}(x) = rac{2l+1}{x}z_l - \mathbf{z}_{l-1}$$

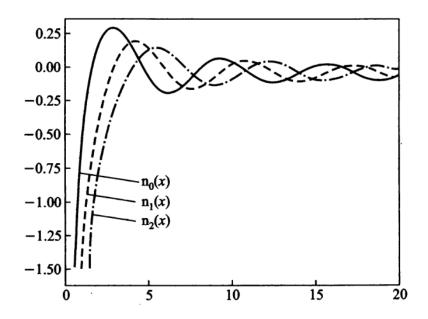
关系式

$$\mathrm{n}_l(x) = (-1)^{l+1} \mathrm{j}_{-(l+1)}(x) \ \mathrm{h}_l^{(1)}(x) = \mathrm{j}_l(x) + \mathrm{in}_l(x), \quad \mathrm{h}_l^{(2)}(x) = \mathrm{j}_l(x) - \mathrm{in}_l(x)$$

初等函数表示式

$$egin{aligned} \mathrm{j}_0(x) &= rac{\sin x}{x}, \quad \mathrm{j}_{-1}(x) &= rac{\cos x}{x} \ \mathrm{n}_0(x) &= -rac{\cos x}{x}, \quad \mathrm{n}_{-1}(x) &= rac{\sin x}{x} \end{aligned}$$





函数行为