安徽大学 2016—2017 学年第二学期

《高等数学 A（二）、B（二）》（A 卷）参考答案及评分标准

一、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

1. $x-3y+z+2=0$； **2.** 1； **3.** $-\ln\cos 1$； **4.** $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\sin 2$； **5.** 1

二、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

6. A； **7.** B； **8.** D； **9.** C； **10.** C

三、计算题（每小题 9 分，共 63 分）

11. 解：由 $f(x,y,z)=e^x yz^2$，知 $f_x'(x,y,z)=e^x yz^2+e^x y\cdot 2z\cdot z_x'(x,y)$

由 $x+y+z+xyz=0$，两边对 x 求导，得 $1+0+z_x'(x,y)+yz+xyz_x'(x,y)=0$

令 $x=0,y=1$，得 $z_x'(0,1)=0$，

故 $f_x'(0,1,-1)=1+2\cdot(-1)\cdot z_x'(0,1)=1-2z_x'(0,1)=1$． .... 9 分

12. 解：$F(x,y,z)=x^2+y^2-z$，$F_x'=2x$，$F_y'=2y$，$F_z'=-1$．

设切点坐标为 $P_0(x_0,y_0,z_0)$，则切平面的法向量为 $\{2x_0,2y_0,-1\}$，

由切平面与已知平面 $2x+4y-z=0$ 平行，因此有 $\frac{2x_0}{2}=\frac{2y_0}{4}=\frac{-1}{-1}$，

解得 $x_0=1,y_0=2$，相应地有 $z_0=x_0^2+y_0^2=5$．

故切点坐标为 $(1,2,5)$． .... 6 分

$\vec{n}=\{2,4,-1\}$ 的单位向量为 $\{\frac{2}{\sqrt{21}},\frac{4}{\sqrt{21}},\frac{-1}{\sqrt{21}}\}$，故所求的方向导数为

$$\frac{\partial F}{\partial n}\Big|_{P_0}=2\times\frac{2}{\sqrt{21}}+4\times\frac{4}{\sqrt{21}}+(-1)\times\frac{(-1)}{\sqrt{21}}=\sqrt{21}．$$ .... 9 分

13. 解：设 $D_1=\{(x,y)\mid -1\le x\le 1,0\le y\le x^2\}$；$D_2=\{(x,y)\mid -1\le x\le 1,x^2\le y\le 2\}$，

则 $\iint\limits_D |y-x^2|\,dxdy=\iint\limits_{D_1}(x^2-y)dxdy+\iint\limits_{D_2}(y-x^2)dxdy$

$$=\int_{-1}^{1}dx\int_0^{x^2}(x^2-y)dy+\int_{-1}^{1}dx\int_{x^2}^{2}(y-x^2)dy=\frac{1}{5}+\frac{43}{15}=\frac{46}{15}$$ .... 9 分

14．解： 利用柱坐标变换

$$\iiint_V z\,dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 dr\int_r^{\sqrt{2-r^2}} zr\,dz=\frac{\pi}{2}.$$ …………………… 9分

15．解：依题意，$ds=\sqrt{1+(\frac{a-2x}{2y})^2}\,dx=\frac{a}{2y}dx=\frac{a}{2\sqrt{ax-x^2}}dx$，$0\le x\le a$

由对称性知 $\int_L\sqrt{x^2+y^2}\,ds=2\int_0^a\sqrt{ax}\cdot\frac{a}{2\sqrt{ax-x^2}}dx=a\sqrt{a}\int_0^a\frac{dx}{\sqrt{a-x}}=2a^2$.

…………………… 9分

16．解：$\iint_S(x^3+1)dydz+(y^3+1)dzdx+(z^3+1)dxdy$

$$=\oiint_{S+S_1}(x^3+1)dydz+(y^3+1)dzdx+(z^3+1)dxdy-\iint_{S_1}(x^3+1)dydz+(y^3+1)dzdx+(z^3+1)dxdy$$

其中S_1：$x^2+y^2\le 1$，取下侧，由高斯公式

$$\oiint_{S+S_1}(x^3+1)dydz+(y^3+1)dzdx+(z^3+1)dxdy=3\iiint_V(x^2+y^2+z^2)dxdydz=\frac{6}{5}\pi,$$

$$\iint_{S_1}(x^3+1)dydz+(y^3+1)dzdx+(z^3+1)dxdy=-\iint_{x^2+y^2\le 1}dxdy=-\pi,$$

故原式$=\frac{11}{5}\pi$. …………………… 9分

17．解：由$\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}|=\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\cdot\frac{2n-1}{x^{2n-1}}|=x^2<1$，得收敛区间$-1<x<1$.

且当$x=\pm1$时，级数均收敛，故收敛域为$[-1,1]$. …………………… 3分

和函数$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\int_0^x t^{2n-2}dt=\int_0^x\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-t^2)^{n-1}dt$

$=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt=\arctan x$. …………………… 7分

故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}=S(1)=\arctan 1=\frac{\pi}{4}$. …………………… 9分

四、应用题（每小题 6 分，共 12 分）

18．解：Σ 的方程为 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$，Σ 在 xOy 面上的投影区域为 $D_{xy}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 3\}$．又 $\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=2\big/\sqrt{4-x^2-y^2}$，

故曲面块的质量

$$m=\iint_{\Sigma}\frac{dS}{z}=\iint_{D_{xy}}\frac{2dxdy}{4-x^2-y^2}=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{3}}\frac{rdr}{4-r^2}=4\pi\ln 2 \text{ .... } 6\text{分}$$

19．解：由第二类曲线积分的物理意义及格林公式，

$W=\oint_L (y+3x)dx+(2y-x)dy=-\iint_D[\frac{\partial}{\partial x}(2y-x)-\frac{\partial}{\partial y}(y+3x)]dxdy$，其中 D 为 L 所围成的闭区域 $4x^2+y^2\le 4$．

故 $W=2\iint_D dxdy=2\cdot\pi\cdot 2=4\pi$． .... 6 分

五、证明题（每小题 5 分，共 5 分）

20．$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}+(-1)^n}{n-1}=\sum_{n=2}^{\infty}[(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n-1}+\frac{1}{n-1}]$

令 $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x-1}$，由 $f'(x)=\frac{-x-1}{2\sqrt{x}(x-1)^2}<0$，知 $u_n=\frac{\sqrt{n}}{n-1}$ 单调递减，

且 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n-1}=0$，故由莱布尼兹判别法，交错级数 $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n-1}$ 收敛．

而级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}$ 发散，由级数的性质知，$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}+(-1)^n}{n-1}$ 发散．

.... 5 分