安徽大学 20<u>18</u>—20<u>19</u> 学年第<u> 1 </u>学期

《 数学物理方法 》考试试卷（A 卷）

（闭卷　　时间 120 分钟）

考场登记表序号__________

题 号	一	二	三	四	五	总分
得 分						
阅卷人						

院/系__________ 年级__________ 专业__________ 姓名__________ 学号__________

答 题 勿 超 装 订 线

---装---订---线---

一、单项选择题（每小题 2 分，共 16 分）

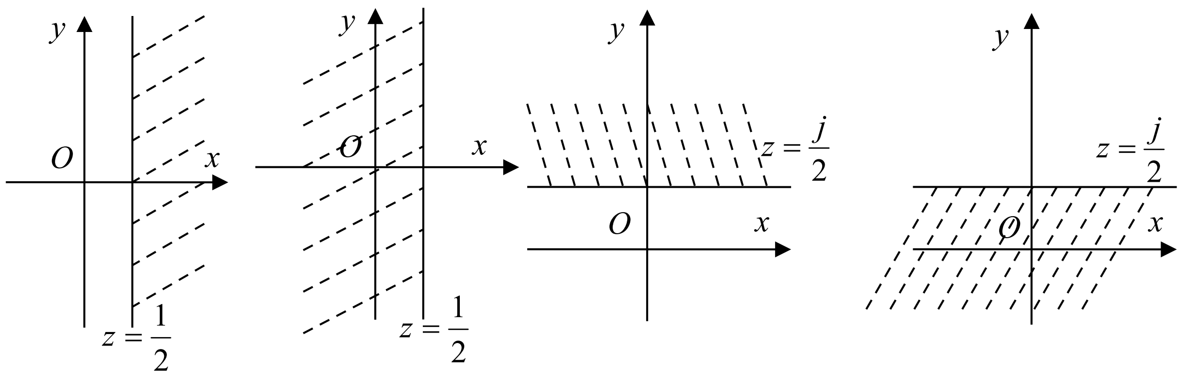
得分	

1. 当 $x<0$，$y>0$ 时，复数 $z=x+jy$ 的辐角主值为(C)

A. $\arctan\dfrac{y}{x}$； B. $-\arctan\dfrac{y}{x}$； C. $\arctan\dfrac{y}{x}+\pi$； D. $\arctan\dfrac{y}{x}-\pi$。

$\arctan\frac{y}{x}$

2. $\mathrm{Re}(z)>\dfrac{1}{2}$ 为下面哪个图中**虚线**所示的区域(A)



A　　B　　C　　D

3. 若函数 $f(z)$ 在 z_0 点解析，则下面的结论不正确的是(D)

A. $f(z)$ 在 z_0 点连续； B. $f(z)$ 在 z_0 点存在任意阶导数；

C. $f(z)$ 可以以 z_0 点为中心展开为泰勒级数；

D. $f(z)$ 以 z_0 点为中心的罗朗级数展开式中包含有限项负幂次项，即有 $f(z)=\sum\limits_{n=-m}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$，

其中 m 为大于零的整数。

4. 若函数 $f(z)$ 在环形区域 $R_1<|z-z_0|<R_2$ 内展开为罗朗级数，则下面的说法不正确的是(~~A~~)

D

A. z_0 可能是也可能不是 $f(z)$ 的不解析的点； B. $f(z)$ 在环形区域内解析；

C. 罗朗级数在环形区域内绝对且一致收敛；

D. 罗朗级数的系数为 $c_n=\frac{1}{j2\pi}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta$ ，其中积分路径 C 为环形区域内绕 z_0 的任一简单闭合曲线，由高阶导数公式可知 $c_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)$ 。

z环一定可解

5. 下面不能判断 z_0 为函数 $f(z)$ 的一阶极点的判据是(C)

A. $f(z)$ 以 z_0 为中心的罗朗级数展开式为 $f(z)=\sum_{n=-1}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$ ；

B. $\frac{1}{f(z)}\Big|_{z=z_0}=0$ ，但 $\frac{d}{dz}[\frac{1}{f(z)}]\Big|_{z=z_0}\neq 0$ ，即 z_0 为 $\frac{1}{f(z)}$ 的一阶零点；

C. $f(z)$ 在 z_0 点有界；

D. $f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$ ，函数 $P(z)$ 和 $Q(z)$ 都在 z_0 点解析， z_0 为 $Q(z)$ 的一阶零点，且 $P(z_0)\neq 0$ 。

6. 函数 $\sin kx$(k为实常数) 的拉普拉斯变换是(B)

A. $\frac{s}{s^2+k^2}$ ； **B.** $\frac{k}{s^2+k^2}$ ； **C.** $\frac{s}{s^2-k^2}$ ； **D.** $\frac{k}{s^2-k^2}$ 。

7. 方程 $(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})^2+(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})^2=\sin x\cos y$ 为下面那种性质的偏微分方程(D)

~~**A.**~~ 二阶线性齐次方程； **B.** 二阶线性非齐次方程；

~~**C.**~~ 二阶非线性齐次方程； **D.** 二阶非线性非齐次方程。

8. 对于施图姆－刘维尔(SL)型方程 $\frac{d}{dx}[p(x)\frac{dy}{dx}]+q(x)y+\lambda\rho(x)y=0,(a\le x\le b)$ ，附以齐次第一、二、三类边界条件或自然边界条件就构成了 SL 本征值问题，若 $p(x)$ 和 $\rho(x)$ 只取非负的值(≥ 0)，且 $q(x)\le 0$ ，则下面关于 SL 本征值问题的说法不正确的是(B)

A. 存在无穷多个本征值 $\lambda_1\le\lambda_2\le\cdots$ ，对应着无穷多个本征函数 $y_1(x),y_2(x),\cdots$ ；

B. 存在负的本征值； **C.** 对不同的本征函数 $y_m(x)$ 和 $y_n(x)$ 有正交性 $\int_a^b\rho(x)y_m(x)y_n(x)dx=0$ ；

D. 若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有连续的一阶和分段连续的二阶导数，且满足本征值问题的边界条件，可用本征函数系将 $f(x)$ 展开为绝对且一致收敛的广义傅里叶级数。

得分	

二、填空题（每空 2 分，共 24 分）

1. 复数 $z=2j$ 的指数式为: $2e^{j\frac{\pi}{2}}$ 。

2. 计算函数 $\sin j=$ $j\sinh 1$ ， $\ln(-1)=$ $j\pi$ 。

3. 设 C 为逆时针方向沿圆周 $|z|=1$ 的简单闭合曲线，则积分 $\oint_C\frac{1}{z^2}dz=$ 0 。

$$\frac{n!}{n^n}\cdot\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{1}{n^n}\cdot\frac{(n+1)^n}{1}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$
$$=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

4. 泰勒级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{n^n}(z-j)$ 的收敛圆为: $|z-j|=e$

5. 求函数 $\frac{z}{z^2+1}$ 在孤立奇点 j 处的留数 $\frac{1}{2}$。

6. 求广义傅里叶变换 $F[e^{jx}]=$ $2\pi\delta(\omega-1)$，拉普拉斯变换 $L[x^2]=$ $\frac{2}{s^3}$。

$e^{jx}\ e^{-j\omega x}$

$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{jx(1-\omega)}dx$

7. 对于本征值问题: $\begin{cases}X''(x)+\lambda X(x)=0, & x\in(0,l)\\ X'(0)=X'(l)=0\end{cases}$

其本征值为: $\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2$，本征函数为: $A\cos\frac{k\pi}{l}x$。

8. 已知勒让德方程 $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+n(n+1)y=0$ 满足在 $x=\pm1$ 处为有界的解是勒让德多项式 $P_n(x)$，则方程 $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+6y=0$ 的解可用勒让德多项式表示为: $P_n(x)$。

2×3

9. 已知 v 阶贝塞尔方程 $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-v^2)y=0$ 的一个解为 v 阶贝塞尔函数 $J_v(x)$，则可把方程 $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(4x^2-\frac{9}{25})y=0$ 的一个解用贝塞尔函数表示为: $J_n(2x)$。

答题勿超装订线

装 订 线

三、简答题（10分）

得分	

二阶线性常微分方程的标准形式为: $\frac{d^2w(z)}{dz^2}+p(z)\frac{dw(z)}{dz}+q(z)w(z)=0$

试简述方程的常点和正则奇点，并写出常点和正则奇点邻域内方程级数解的形式。

$p(z)$ 和 $q(z)$ 解析

2 解析 $(z-z_0)p(z)$ $(z-z_0)^2q(z)$

$w(z)=\sum^{\infty}a_n(z-z_0)^n$

2 $w(z)=(z-z_0)^\rho\sum a_n(z-z_0)^n$

四、证明题（10 分）

得分	

证明函数 $f(z)=z\,\mathrm{Re}(z)$ 在 $z=0$ 点可导，但在复平面上处处不解析。

$w = u + jv$

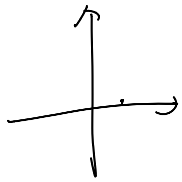
$f(z) = z\,\mathrm{Re}(z)$

五、计算题

得分	

（第 1, 2 题每题 10 分，第 3 题 8 分，第 4 题 12 分，共 40 分）

1. 计算积分 $\oint_{|z|=1} \dfrac{\cos z}{z^3} dz$ 。



$= j2\pi\,\mathrm{Res}\left[\dfrac{\cos z}{z^3}, 0\right] = -j\pi$

$\mathrm{Res}\left[\dfrac{\cos z}{z^3}, 0\right] = \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{1}{(3-1)!} \dfrac{d^3}{dz^2}\left[z^3 \cdot \dfrac{\cos z}{z^3}\right] = -\dfrac{1}{2}$

2．分别在区域 $0<|z|<1$ 和 $1<|z|$ 内把函数 $f(z)=\dfrac{1}{z^2(1-z)}$ 以 $z_0=0$ 为中心展开为罗朗级数。

$0<|z|<1$ $\quad f(z)=\frac{1}{z^2}\cdot\frac{1}{1-z}=\frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}z^n=\sum_{n=0}^{\infty}z^{n-2}$

$1<|z|$ $\quad f(z)=\frac{1}{z^3}\cdot\frac{1}{\frac{1}{z}-1}=-\frac{1}{z^3}\sum\frac{1}{z^n}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+3}}$

答 题 勿 超 装 订 线

装 订 线

3．由**达朗贝尔公式**求解初值问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0\\ u(x,t)\big|_{t=0}=\cos x \qquad (-\infty<x<\infty,t>0,a>0)\\ \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0}=\sin x\end{cases}$$

$u(x,t)=\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(s)ds$

$=\frac{1}{2}[\cos(x+at)+\cos(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\sin s\,ds$

4．应用分离变量法求解如下定解问题：
$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad (0<x<l, t>0) \text{ ①} \\ u(x,t)\big|_{x=0} = \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}\big|_{x=l} = 0 \quad (t>0) \\ u(x,t)\big|_{t=0} = cx, \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}\big|_{t=0} = 0, \quad (0<x<l) \end{cases}$$

解：Step 1. 分离变量

$u(x,t) = X(x)T(t)$

代入①

$X(x)T''(t) = a^2 X''(x) T(t)$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = -\lambda$$

Step 2、求解本征值问题

$X(0)=0$

$X'(l)=0$

$X''(x)+\lambda X(x)=0$

$r^2+\lambda=0$

当 $\lambda=0$ $r=0$

$X(x)=Ax+B$

$X(0)=B=0$

$X'(l)=A=0$

当 $\lambda<0$ $r_1=\sqrt{-\lambda}$, $r_2=-\sqrt{-\lambda}$

$$X=\begin{pmatrix} e^{\sqrt{\lambda}x} \\ e^{-\sqrt{\lambda}x}\end{pmatrix} = Ae^{\sqrt{\lambda}x}+Be^{-\sqrt{\lambda}x}$$

则
$$\begin{cases} X(0) = A+B=0 \\ X'(l) = \sqrt{\lambda}Ae^{\sqrt{\lambda}l}-\sqrt{\lambda}Be^{-\sqrt{\lambda}l}=0 \end{cases}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{\lambda}e^{\sqrt{\lambda}l} & -\sqrt{\lambda}e^{-\sqrt{\lambda}l}\end{vmatrix} = -\sqrt{\lambda}(e^{-\sqrt{\lambda}l}+e^{\sqrt{\lambda}l}) \neq 0$$

∴ 只有零解 即 $A=B=0$

$\lambda>0$ 时

$r_1=i\sqrt{\lambda}$ $r_2=-i\sqrt{\lambda}$

$$X=\begin{pmatrix} e^{i\sqrt{\lambda}} \\ e^{-i\sqrt{\lambda}}\end{pmatrix} = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x$$

$X(0)=A=0$

$X'(l)=\sqrt{\lambda}B\cos\sqrt{\lambda}l=0$

$\sqrt{\lambda}l=(n\pi+\frac{\pi}{2})$

$$\lambda=\left(\frac{n\pi+\frac{\pi}{2}}{l}\right)^2 \quad n=0,1,2\ldots$$

$$X(x)=B\sin\frac{n\pi+\frac{\pi}{2}}{l}x \quad n=0,1,2\ldots$$

Step 3. 求解 $T(t)$

$$T''(t)+a^2\left(\frac{n\pi+\frac{\pi}{2}}{l}\right)^2T(t)=0$$

$$r^2+a^2\left(\frac{n\pi+\frac{\pi}{2}}{l}\right)^2=0 \quad r=\pm i\frac{a(n\pi+\frac{\pi}{2})}{l}$$

$$T(t)=\begin{pmatrix}\sin\frac{a(n\pi+\frac{\pi}{2})}{l}t \\ \cos\frac{a(n\pi+\frac{\pi}{2})}{l}t\end{pmatrix}$$

Step 4. 解的叠加

$\sin\frac{n\pi}{l}$

$U_n=X_n(t)T_n(t)$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n\sin\frac{a(n\pi+\frac{\pi}{2})}{2}t+B_n\cos\frac{a(n\pi+\frac{\pi}{2})}{2}t\right)$$

$$\frac{U_n}{\partial t}\Big|_{t=0}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a(n\pi+\frac{\pi}{2})}{2}\left(A_n\cos\frac{a(n\pi+\frac{\pi}{2})}{2}t-B_n\sin\frac{a(n\pi+\frac{\pi}{2})}{2}t\right)$$

$\sin\frac{(n\pi+\frac{\pi}{2})}{2}x$

$$=A_n\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a(n\pi+\frac{\pi}{2})}{2}\cdot\sin\frac{(n\pi+\frac{\pi}{2})}{2}x=0$$

$A_n=0$

$$U_n = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos \frac{a(n+\frac{1}{2})\pi}{l} t \cdot \sin \frac{(n+\frac{1}{2})\pi}{l} x$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n \sin \frac{(n+\frac{1}{2})\pi}{l} x = cx$$

$$C_n = \frac{\int_0^l cx \sin (n+\frac{1}{2}) \frac{2\pi}{l} dx}{\int_0^l \sin^2 (n+\frac{1}{2}) \frac{2\pi}{l} x \, dx}$$

$$= \frac{2}{l} \int_0^l \sin (n+\frac{1}{2}) \frac{2x}{l} \cdot cx \, dx$$

$$= (-1)^n \frac{8cl}{\pi^2 (2n+1)^2}$$