安徽大学 2014—2015 学年第 1 学期

《 数理方法 》（A 卷）考试试题参考答案及评分标准

一、填空题（每空 2 分, 共 24 分.）

1. $2\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4})$

2. $e^2(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})$.

3. 0.

4. 1/2.

5. 2；$|z-i| = 2$.

6. $\bar{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$；$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\bar{f}(\omega)e^{i\omega x}d\omega$.

7. $\frac{1}{a^3}(ax - \sin ax)$,**或** $x * \frac{\sin x}{a}$.

8. $\lambda_n = (\frac{n\pi}{l})^2$，$n = 01,2,\cdots$，　$\sin\frac{n\pi}{l}x$，$n = 0,1,2,\cdots$

9. $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0$.

二、简答题（第 1 小题 6 分, 第 2 小题 10 分，共 16 分）

1．答：

偏导数 $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}$，$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}$，$\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}$，$\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}$ 在点 $z = x + iy$ 处存在、连续（或可微），

且满足柯西-黎曼条件：$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}$，$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}$

2．答：

$$\bar{f}(s) = L[f(x)] = \int_0^{+\infty} f(x)e^{-j\omega x}dx$$

① 线性性质：$L[\alpha f_1(x) + \beta f_2(x)] = \alpha \cdot L[f_1(x)] + \beta \cdot L[f_2(x)]$.

② 相似性质：假设 $L[f(x)] = \bar{f}(s)$，则对 $\forall a > 0$ 有 $L[f(ax)] = \frac{1}{a}\bar{f}(\frac{s}{a})$.

③延迟性质．设$L[f(t)]=F(s)$，当$t<0$时，$f(t)=0$，则对任意非负实数τ有

$$L[f(x-\tau)]=e^{-s\tau}\overline{f}(s).$$

④位移性质．$L[e^{ax}f(x)]=\overline{f}(s-a)\ (a\in\mathbf{C}).$

⑤微分性质：$L[f^{(n)}(x)]=s^n\overline{f}(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0).$

⑥积分性质：（1） 积分的像函数

设$L[f(x)]=\overline{f}(s)$，则有 $L[\int_0^x f(x)dx]=\frac{1}{s}\overline{f}(s).$

一般地，有：$L[\int_0^x dx\cdots\int_0^x dx\int_0^x f(x)dx]=\frac{1}{s^n}\overline{f}(s).$

(2).像函数的积分

设$L[f(x)]=\overline{f}(s)$，则有 $\int_s^{+\infty}\overline{f}(s)ds=L[\frac{f(x)}{x}].$

一般地，有：$\int_s^{+\infty}ds\cdots\int_s^{+\infty}ds\int_s^{+\infty}F(s)ds=L[\frac{f(t)}{t^n}].$

⑦周期函数的像函数

设$f(x)$是$[0,+\infty)$内以T为周期的函数，且$f(x)$在一个周期内逐段光滑，则

$$L[f(x)]=\frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T f(x)e^{-sx}dx.$$

⑧卷积定理 $L[f_1(x)*f_2(x)]=L[f_1(x)]\cdot L[f_2(x)].$

三、计算题（第 1、2、4 小题每题 10 分，第 3 小题 8 分，第 5 小题 12 分，共 50 分．）

1．方法一：

$$f(z)=\frac{z}{(z-1)(z-3)}=\frac{3}{2}\frac{1}{z-3}-\frac{1}{2}\frac{1}{z-1}$$

$$\frac{3}{2}\frac{1}{z-3}=\frac{3}{2}\frac{1}{z-1-2}=-\frac{3}{4}\frac{1}{1-\frac{z-1}{2}}=-\frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z-1}{2})^n$$

$$f(z)=\frac{z}{(z-1)(z-3)}=-3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{2^{n+2}}-\frac{1}{2}\frac{1}{z-1}$$

方法二： $f(z)=\frac{z}{(z-1)(z-3)}=\frac{1}{z-1}\frac{z}{z-3}=\frac{1}{z-1}(1+\frac{3}{z-3})$

$$\frac{3}{z-3}=\frac{3}{z-1-2}=-\frac{3}{2}\frac{1}{1-\frac{z-1}{2}}=-\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z-1}{2})^n$$

$$f(z)=\frac{z}{(z-1)(z-3)}=-\frac{1}{2}\frac{1}{z-1}-\frac{3}{2}\frac{1}{z-1}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{z-1}{2})^n=-3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{2^{n+2}}-\frac{1}{2}\frac{1}{z-1}$$

2. 解

方法一，$I=\oint_{|z|=1}\frac{e^z}{(2z+1)(z-2)}dz=\oint_{|z|=1}\frac{e^z}{2(z+\frac{1}{2})(z-2)}dz$

$$I=\oint_{|z|=1}\frac{\frac{e^z}{2(z-2)}}{(z+\frac{1}{2})}dz$$

$$I=2\pi i\left.\frac{e^z}{2(z-2)}\right|_{z=-\frac{1}{2}}=-i\frac{2}{5}\pi e^{-\frac{1}{2}}$$

方法二. $\operatorname{Re}s[\frac{e^z}{(2z+1)(z-2)},-\frac{1}{2}]=-\frac{1}{5}e^{-\frac{1}{2}}$

$$I=\oint_{|z|=1}\frac{e^z}{(2z+1)(z-2)}dz=2\pi i(-\frac{1}{5}e^{-\frac{1}{2}})=-i\frac{2}{5}\pi e^{-\frac{1}{2}}$$

3. 解：$f(\theta)=\cos^2\theta=A_0P_0(\cos\theta)+A_2P_2(\cos\theta)$

$\cos^2\theta=A_0+A_2\frac{1}{2}(3\cos^2\theta-1)$

比较系数可得：$A_0=\frac{1}{3}$， $A_2=\frac{2}{3}$

4．解：方法一：令 $Y(s)=L[y(x)]$，在方程两边取 Laplace 变换，并应用初始条件，得

$$s^2Y(s)-2sY(s)+2Y(s)=\frac{2(s-1)}{(s-1)^2+1}$$

求解此方程得

$$Y(s)=\frac{2(s-1)}{\left[(s-1)^2+1\right]^2}$$

因此， $y(x)=L^{-1}[Y(s)]=L^{-1}\left[\frac{2(s-1)}{\left[(s-1)^2+1\right]^2}\right]$

$$=e^xL^{-1}\left[\frac{2s}{(s^2+1)^2}\right]$$

$$=e^xL^{-1}\left[\left(\frac{-1}{s^2+1}\right)'\right]=xe^xL^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right]$$

$$=xe^x\sin x$$

方法二：令 $Y(s)=L[y(x)]$，在方程两边取 Laplace 变换，并应用初始条件，得

$$s^2Y(s)-2sY(s)+2Y(s)=\frac{2(s-1)}{(s-1)^2+1}$$

求解此方程得

$$Y(s)=\frac{2(s-1)}{\left[(s-1)^2+1\right]^2}$$

因此， $y(x)=L^{-1}[Y(s)]=L^{-1}\left[\frac{2(s-1)}{\left[(s-1)^2+1\right]^2}\right]$

$$=e^xL^{-1}\left[\frac{2s}{(s^2+1)^2}\right]$$

$$=2e^xL^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\bullet\frac{s}{s^2+1}\right]=2e^x(\sin x*\cos x)$$

$$=xe^x\sin x$$

5.解：应用分离变量法，设 $u(x,t)=X(x)T(t)$，分别代入泛定方程和边界条件可得：

$$① \begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0 \\ X(0)=0, X'(l)=0 \end{cases}$$

$$② \quad T'(t)+\lambda a^2 T(t)=0$$

① 式的本征值为 $\lambda_n=\beta_n{}^2=\left[(n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{l}\right]^2$，$(n=0,1,2,\cdots)$，本征函数为

$$X_n(x)=A_n\sin(n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{l}x$$

② 式的本征解为：$T_n(t)=C_n'\cos\beta_n at+D_n'\sin\beta_n at$

原问题的本征解为：

$$u_n(x,t)=X_n(x)T_n(t)=\left[C_n\cos(n+\frac{1}{2})\frac{a\pi t}{l}+D_n\sin(n+\frac{1}{2})\frac{a\pi t}{l}\right]\sin(n+\frac{1}{2})\frac{\pi x}{l}$$，其中

$C_n=A_nB_n$ 为待定常数。

原问题的解 $u(x,t)$ 表示为本征解 $u_n(x,t)$ 的线性叠加：

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[C_n\cos(n+\frac{1}{2})\frac{a\pi t}{l}+D_n\sin(n+\frac{1}{2})\frac{a\pi t}{l}\right]\sin(n+\frac{1}{2})\frac{\pi x}{l}$$

代入初始条件可得：$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[D_n(n+\frac{1}{2})\frac{a\pi}{l}\right]\sin(n+\frac{1}{2})\frac{\pi x}{l}=0\Rightarrow D_n=0$$

$$u(x,0)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n\sin(n+\frac{1}{2})\frac{\pi x}{l}=x$$

$$\Rightarrow C_n=\frac{\int_0^l x\sin(n+\frac{1}{2})\frac{\pi x}{l}dx}{\int_0^l \sin^2(n+\frac{1}{2})\frac{\pi x}{l}dx}=\frac{2}{l}\int_0^l x\sin(n+\frac{1}{2})\frac{\pi x}{l}dx=(-1)^n\frac{8l}{\pi^2(2n+1)^2}$$

所以问题的解为：$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{8l}{\pi^2(2n+1)^2}\cos(n+\frac{1}{2})\frac{a\pi t}{l}\sin(n+\frac{1}{2})\frac{\pi x}{l}$ 1 分

四、证明题（10 分）

1．证明：$\sin z=\dfrac{e^{jz}-e^{-jz}}{2j}$

$$\cos z=\frac{e^{jz}+e^{-jz}}{2}$$

$$\sin^2 z = \left(\frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j} \right)^2 = -\frac{(e^{jz})^2 - 2 + (e^{-jz})^2}{4}$$

$$\cos^2 z = \left(\frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2} \right)^2 = \frac{(e^{jz})^2 + 2 + (e^{-jz})^2}{4}$$

所以 $\sin^2 z + \cos^2 z = -\frac{(e^{jz})^2 - 2 + (e^{-jz})^2}{4} + \frac{(e^{jz})^2 + 2 + (e^{-jz})^2}{4} = 1$