一、单项选择题（每小题 2 分,共 30 分）

1. 复数$z=2-2j$的模和辐角主值分别是(　　　)

A. 2 和$\dfrac{\pi}{4}$； **B.** 2 和$-\dfrac{\pi}{4}$； **C.** $2\sqrt{2}$和$\dfrac{\pi}{4}$； **D.** $2\sqrt{2}$和$-\dfrac{\pi}{4}$。

2. 方程$|z-j|=1$表示的曲线是(　　　)

A. 圆； **B.** 直线； **C.** 椭圆； **D.** 双曲线。

3. $(1+j)^4=($　　　$)$

A. 4； **B.** -4； **C.** 16； **D.** -16。

4. $e^{j\frac{\pi}{2}}=($　　　$)$

A. j； **B.** $j\dfrac{\pi}{2}$； **C.** 1； **D.** 0。

5. $Ln(j)=($　　　$)$

A. 0； **B.** $\dfrac{\pi}{2}$； **C.** $j\pi$； **D.** $j(2k+\dfrac{1}{2})\pi$，k为任意整数。

6. $\sin(j)=($　　　$)$

A. $\dfrac{1}{2}(e+e^{-1})$； **B.** $\dfrac{1}{2}(e-e^{-1})$； **C.** $\dfrac{j}{2}(e+e^{-1})$； **D.** $\dfrac{j}{2}(e-e^{-1})$。

7. 下面积分结果为零的是(　　　)

A. $\oint_{|z|=1}\dfrac{z}{z-3}dz$； **B.** $\oint_{|z|=1}\dfrac{e^z}{z}dz$； **C.** $\oint_{|z|=1}\dfrac{1}{z}dz$； **D.** $\oint_{|z|=1}\dfrac{1}{\sin z}dz$。

8. 幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n}{2^n}z^n$的收敛半径是(　　　)

A. $\dfrac{1}{2}$； **B.** 2； **C.** 1； **D.** 4。

9. $z=0$是函数$\dfrac{\sin z}{z}$的(　　　)

A. 可去奇点； **B.** 一阶极点； **C.** 二阶极点； **D.** 本性奇点。

10. 留数$\mathrm{Re}\,s[\dfrac{2z}{z-1},1]=($　　　$)$

A. 1； **B.** -1； **C.** 2； **D.** -2。

11. $\delta(x)$的广义傅里叶变换是(　　　)

A. 1； **B.** 2π； **C.** $e^{-j\omega}$； **D.** $\delta(\omega)$。

12. x^2的拉普拉斯变换是(　　　)

A. $\dfrac{2}{s^2}$； **B.** $\dfrac{2}{s^3}$； **C.** $\dfrac{1}{s^2}$； **D.** $\dfrac{1}{s^3}$。

13. 下列关于$u(x,t)$的偏微分方程中，属于二阶、线性、非齐次的是(　　　)

A. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}+4\dfrac{\partial u}{\partial x}+u=\sin t$； **B.** $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-9e^u=9x^2$； **C.** $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\cos u=10$； **D.** $(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2})^2+\dfrac{\partial u}{\partial x}=t$。

14. 勒让德方程$(1-x^2)y''-2xy'+2y=0$的一个解是下面哪一个勒让德函数(　　　)

A. $P_1(x)$；　**B.** $P_2(x)$；　**C.** $P_3(x)$；　**D.** $P_6(x)$。

15. 贝塞尔方程$x^2y''+xy'+(x^2-9)y=0$的一个解是下面哪一个贝塞尔函数(　　　)

A. $J_1(x)$；　**B.** $J_2(x)$；　**C.** $J_3(x)$；　**D.** $J_9(x)$。

二、证明题（**10** 分）

16. 证明三角函数恒等式：$\sin^2 z+\cos^2 z=1$

三、辨析题（**10** 分）

17. 判断$x=0$是方程$y''(x)+xy'(x)+y(x)=0$的常点还是正则奇点，并写出以$x=0$为中心的邻域内幂级数解的形式。

四、计算题（**18**，**19**，**20** 题每题 **10** 分，**21** 题 **12** 分，**22** 题 **8** 分，共 **50** 分）

18. 设C为逆时针方向沿圆周$|z|=3$的闭合曲线，计算积分$\oint_C \frac{e^z}{z-2}dz$。

19. 在区域$0<|z|<1$内把函数$f(z)=\frac{1}{z^2(1-z)}$以$z_0=0$为中心展开为罗朗级数。

20. 求函数$f(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le\tau \\ 0 & x<0\text{和}x>\tau\end{cases}$的傅里叶变换，其中$\tau$为大于零的实数。

21. 用分离变量法求解如下定解问题(常数$l>0,K>0$)。

$$\begin{cases}u_{tt}-a^2u_{xx}=0, & x\in(0,l),t>0 \\ u(0,t)=u(l,t)=0, & t\ge 0 \\ u(x,0)=K\sin\frac{3\pi x}{l}, \quad u_t(x,0)=0, & x\in[0,l]\end{cases}$$

22. 求解如下初值问题。

$$\begin{cases}u_{tt}-a^2u_{xx}=0 & (-\infty<x<\infty,t>0,a>0) \\ u(x,0)=\sin x, \quad u_t(x,0)=\sin(x-\frac{\pi}{4})\end{cases}$$

一、单项选择题

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
D	A	B	A	D	D	A	B	A	C	A	B	A	A	C

二、证明题

16. 证明：因为$\sin z=\frac{e^{jz}-e^{-jz}}{2j}$

$\cos z=\frac{e^{jz}+e^{-jz}}{2}$

所以　$\sin^2 z+\cos^2 z=-\frac{(e^{jz})^2-2+(e^{-jz})^2}{4}+\frac{(e^{jz})^2+2+(e^{-jz})^2}{4}=1$

四、辨析题

17. $x=0$ 是方程的常点

方程的幂级数解：$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$， $|x|<\infty$

四、计算题

18. 留数： $\mathrm{Re}\,s[\frac{e^z}{z-2},2]=e^2$

$$\oint_C \frac{e^z}{z-2}dz=j2\pi\,\mathrm{Re}\,s[\frac{e^z}{z-2},2]=j2\pi e^2$$

19. $\frac{1}{z^2(1-z)}=\frac{1}{z^2}\frac{1}{1-z}$

$$\frac{1}{z^2(1-z)}=\sum_{n=0}^{\infty}z^{n-2}=\sum_{n=-2}^{\infty}z^n，\qquad 0<|z|<1$$

20. 傅里叶变换：$\bar{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-j\omega x}dx$

$\bar{f}(\omega)=\int_0^{\tau}e^{-j\omega x}dx$， $\qquad \bar{f}(\omega)=\frac{1}{j\omega}\left(1-e^{-j\omega\tau}\right)$

21. 把分离变量形式的解$u(x,t)=X(x)T(t)$代入方程和边界条件可得：

(1) $\quad T''(t)+\lambda a^2T(t)=0$

(2) $\quad \begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0 \\ X(0)=X(l)=0 \end{cases}$

方程(2)的本征值：$\lambda_n=(\frac{n\pi}{l})^2$

方程(2)的本征函数：$X_n(x)=\sin(\frac{n\pi}{l}x)$， $\quad n=1,2,3,\cdots$

方程(1)的通解：$T_n(t)=C_n\cos(\frac{an\pi}{l}t)+D_n\sin(\frac{an\pi}{l}t)$

定解问题的本征解：$u_n(x,t)=[C_n\cos(\frac{an\pi}{l}t)+D_n\sin(\frac{an\pi}{l}t)]\sin(\frac{n\pi}{l}x)$

定解问题的解：$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}[C_n\cos(\frac{an\pi}{l}t)+D_n\sin(\frac{an\pi}{l}t)]\sin(\frac{n\pi}{l}x)$

展开系数：$C_n=\begin{cases} K， & n=3 \\ 0, & n\neq 3 \end{cases}$， $\qquad D_n=0$

所以：$u(x,t)=K\cos(\frac{3\pi a}{l}t)\sin(\frac{3\pi}{l}x)$

22. 由达朗贝尔公式$u(x,t)=\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\zeta)d\zeta$ 可得：

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[\sin(x+at)+\sin(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\sin(\zeta-\frac{\pi}{4})d\zeta$$

$$u(x,t)=\sin x\cos at+\frac{1}{a}\sin(x-\frac{\pi}{4})\sin at$$