安徽大学 2015—2016 学年第 1 学期

《 数理方法 》（A 卷）考试试题参考答案及评分标准

一、填空题（每空 2 分, 共 20 分）

1. $2[\cos(\frac{2}{3}\pi)+i\sin(\frac{2}{3}\pi)]$；或 $2[\cos(\frac{2}{3}\pi+2k\pi)+i\sin(\frac{2}{3}\pi+2k\pi)]$($k=0,\pm1,\pm2,......$)

2. $\frac{1}{2}(e+\frac{1}{e})\cos1-i\frac{1}{2}(e-\frac{1}{e})\sin1$；或 $\cos1\cosh1-i\sin1\sinh1$

3. $R=2$

4. 1

5. $\frac{2\sin\omega\tau}{\omega}$

6. $\frac{1}{s}$， $\frac{2}{s^2+4}$,

7. 非线性， 非齐次

8. $\left|E_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right|$

二、计算题（第 1, 2, 4 题每题 10 分，第 3 题 12 分，第 5 题 18 分, 共 60 分）

1. 解:

$$L[f(t)]=\int_0^\infty te^{2t}e^{-st}dt$$
$$=-\frac{1}{s-2}\int_0^\infty td[e^{-(s-2)t}]$$
$$=-\frac{1}{s-2}\{t[e^{-(s-2)t}]\Big|_0^\infty-\int_0^\infty e^{-(s-2)t}dt\}$$
$$=\frac{1}{(s-2)^2},\quad \mathrm{Re}(s)>2$$

2. 解:

方法 1. 函数 $f(z)=e^{2z}$ 在 $C:|z|=3$ 上及其内部解析, $z=1$ 在 C 的内部，符合应用高阶导数公式的条件

分母 $(z-1)^3$ 意味着 $n=2$

所以： $I=\frac{2\pi i}{2!}\frac{d^2}{dz^2}[e^{2z}]\Big|_{z=1}=4\pi ie^2$

方法 2. $z=1$ 为被积函数 $\frac{e^{2z}}{(z-1)^3}$ 在 $C:|z|=3$ 内的三阶极点

留数：$\mathrm{Re}\,s[\frac{e^{2z}}{(z-1)^3},1]=\frac{1}{(3-1)!}\lim_{z\to 1}\frac{d^{3-1}}{dz^{3-1}}[(z-1)^3\frac{e^{2z}}{(z-1)^3}]=2e^2$

$I=2\pi i\,\mathrm{Re}\,s[\frac{e^{2z}}{(z-1)^3},1]=4\pi ie^2$

3. 解：

$$f(z)=\frac{z}{(z-1)(z-2)}=\frac{z}{z-2}-\frac{z}{z-1}$$

在$|z|<1$内， $f(z)=-\frac{1}{2}\frac{z}{1-\frac{z}{2}}+\frac{z}{1-z}$

$$f(z)=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{2^n}+\sum_{n=0}^{\infty}z^{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}(1-\frac{1}{2^{n+1}})z^{n+1}$$

在$1<|z|<2$内， $0<\frac{1}{|z|}<1$，$\frac{1}{2}<\frac{|z|}{2}<1$

所以： $f(z)=-\frac{1}{2}\frac{z}{1-\frac{z}{2}}-\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{2^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n}$

4. 解：

由达朗贝尔公式，可得：

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[\cos(x+at)+\cos(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\sin\zeta d\zeta$$

$$u(x,t)=\cos x\cos at+\frac{1}{a}\sin x\sin at$$

5. 解：直接用分离变量法

令$u(x,t)=X(x)T(t)$， 代入方程得：

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=-\lambda$$

$$T''(t)+\lambda a^2T(t)=0$$

$$X''(x)+\lambda X(x)=0$$

利用边界条件可得：$X(0)T(t)=X(l)T(t)=0\Rightarrow X(0)=X(l)=0$

求常微分方程的边值问题：$\begin{cases}X''(x)+\lambda X(x)=0\\ X(0)=X(l)=0\end{cases}$

本征值：$\lambda_n=(\frac{n\pi}{l})^2$

本征函数：$X_n(x)=\sin(\frac{n\pi}{l}x)$， $n=1,2,3,\cdots$

把$\lambda_n=(\frac{n\pi}{l})^2$代入$T''(t)+\lambda a^2T(t)=0$可得：$T_n''(t)+a^2(\frac{n\pi}{l})^2T_n(t)=0$

通解为：$T_n(t)=C_n\cos(\frac{an\pi}{l}t)+D_n\sin(\frac{an\pi}{l}t)$

本征解为：$u_n(x,t)=[C_n\cos(\frac{an\pi}{l}t)+D_n\sin(\frac{an\pi}{l}t)]\sin(\frac{n\pi}{l}x)$

解为：$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}[C_n\cos(\frac{an\pi}{l}t)+D_n\sin(\frac{an\pi}{l}t)]\sin(\frac{n\pi}{l}x)$

$$C_n=\frac{2k}{l}[\int_0^{\frac{l}{2}}x\sin(\frac{n\pi}{l}x)dx+\int_{\frac{l}{2}}^{l}(l-x)\sin(\frac{n\pi}{l}x)dx]=\frac{4kl}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$D_n=0$$

所以：$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4kl}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}\cos(\frac{an\pi}{l}t)\sin(\frac{n\pi}{l}x)$

三、证明题（10 分）

证明：

$$F[f(x)*g(x)]=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)*g(x)e^{-i\omega x}dx=\int_{-\infty}^{\infty}[\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)g(x-\tau)d\tau]e^{-i\omega x}dx$$

令$x-\tau=t$，则有：

$$\begin{aligned}F[f(x)*g(x)]&=\int_{-\infty}^{\infty}[\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)g(t)d\tau]e^{-i\omega(t+\tau)}dt\\&=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau\int_{-\infty}^{\infty}g(t)e^{-i\omega t}dt=\bar{f}(\omega)\cdot\bar{g}(\omega)\end{aligned}$$

四、简答题（10 分）

答：

(1)
$$x^2y''(x)+xy'(x)+(x^2-n^2)y(x)=0$$

或
$$y''(x)+\frac{1}{x}y'(x)+\frac{x^2-n^2}{x^2}y(x)=0$$

(2) 至少存在一个如下形式的幂级数解：

$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{k+\rho}$，或 $y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{k+n}$， 或 $J_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}(\frac{x}{2})^{n+2k}$