Chapter 5 Image restoration and Reconstruction

李想　P12214061

2025 年 4 月 30 日

1　问题一

在傅里叶变换中，周期性噪声在对应于周期干扰的频率处显示为集中突发的能量。方法是用一个选择性滤波器来分离噪声。简单的周期噪声，在空域中表现为一个个的条纹（摩尔纹），我们可以用陷波滤波器来去除它。

观察原始图像图1，我们能够发现图1中存在周期性的、近似水平的噪声模式。对图1进行傅里叶变换，得到频域的幅值谱和相位谱，如图2所示。在频域图像中，我们并没有看到一些突出的频率分量。

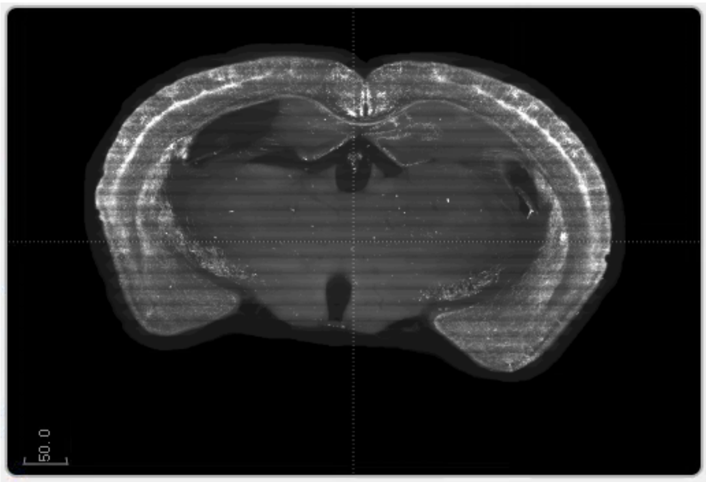


图 1: 原始图像

(a) 幅值谱　　(b) 相位谱

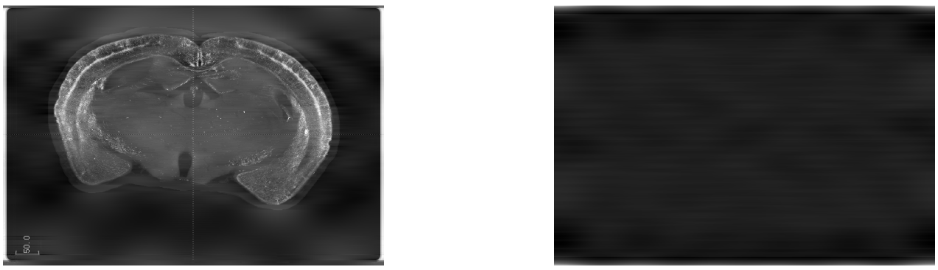
图 2: 原始图像的傅里叶变换

观察周期性条纹，我们发现条纹近似水平，我们认为其在频率域中的贡献集中在 DFT 的纵轴上。然而，这一噪声不足以在纵轴上产生清晰的模式。此时采用的方法是使用沿纵轴延申的一个窄矩形陷波滤波器，来消除沿纵轴分布的所有干扰分量。在接近原点的位置不进行滤波，以避免消除直流项和低频分量。图3a显示了我们所用的滤波器函数。

(a) 陷波带阻滤波器　　(b) 陷波带通滤波器

图 3: 滤波器函数

图4a显示了滤波后的结果。大部分周期性条纹被消除或明显减弱。为得到噪声的的模式图像，我们首先将带阻滤波器转换为带通滤波器，如图3b所示。然后将其应用于原始图像。图4b显示了滤波器滤出的噪声模式，为一些列周期性条纹。



(a) 滤波后的图像　　(b) 陷波滤波从图1中提取出的噪声模式

图 4: 陷波滤波的输出

2　问题二

运动模糊的图像可以用逆滤波和维纳滤波来恢复。逆滤波是基于图像的频域表示，假设模糊核已知。维纳滤波则是基于图像的统计特性，假设噪声和模糊核已知。

2.1　模糊核推导

下面匀速线性运动模糊核：

假设图像 $f(x, y)$ 做平面运动，$x_0(t)$ 和 $y_0(t)$ 分别是运动在 x 方向和 y 方向上的时变分量。记录介质（如胶片或数字存储器）上任何一点的总曝光量，是成像系统快门打开期间的瞬时曝光量的积分。假设快门开关是瞬间发生的，并且光学成像过程是完美的，这可让我们隔离由图像运动产生

的影响。于是，若 T 是曝光的持续时间，则有

$$g(x,y) = \int_0^T f(x - x_0(t), y - y_0(t)]dt \tag{1}$$

式中，$g(x,y)$ 是被模糊的图像。这个表达式的连续傅里叶变换为

$$G(u,v) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)e^{-j2\pi(ux+vy)}dxdy \tag{2}$$

将式 (1) 代入式 (2) 得

$$G(u,v) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_0^T f(x - x_0(t), y - y_0(t))dt\right]e^{-j2\pi(ux+vy)}dxdy \tag{3}$$

颠倒积分的顺序得

$$G(u,v) = \int_0^T \left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x - x_0(t), y - y_0(t))e^{-j2\pi(ux+vy)}dxdy\right]dt \tag{4}$$

方括号内的积分项是位移函数 $f[x - x_0(t), y - y_0(t)]$ 的傅里叶变换。

$$G(u,v) = \int_0^T F(u,v)e^{-j2\pi[ux_0(t)+vy_0(t)]}dt = F(u,v)\int_0^T e^{-j2\pi[ux_0(t)+vy_0(t)]}dt \tag{5}$$

定义

$$H(u,v) = \int_0^T e^{-j2\pi[ux_0(t)+vy_0(t)]}dt \tag{6}$$

可将式 (5) 表示为我们熟悉的形式：

$$G(u,v) = H(u,v)F(u,v) \tag{7}$$

若运动分量 $x_0(t)$ 和 $y_0(t)$ 是已知的，则可直接由式 (6) 得到传递函数 $H(u,v)$。如说明的那样，假设图像只在 x 方向 [即 $y_0(t) = 0$] 做速率为 $x_0(t) = at/T$ 的匀速直线运动。当 $t = T$ 时，图像移动的总距离为 a。令 $y_0(t) = 0$，由式 (6) 可得

$$H(u,v) = \int_0^T e^{-j2\pi ux_0(t)}dt = \int_0^T e^{-j2\pi uat/T}dt = \frac{T}{\pi ua}\sin(\pi ua)e^{-j\pi ua} \tag{8}$$

若允许图像同时在 y 方向做速率为 $y_0(t) = bt/T$ 的匀速直线运动，则退化函数变为

$$\boxed{H(u,v) = \frac{T}{\pi(ua+vb)}\sin[\pi(ua+vb)]e^{-j\pi(ua+vb)}} \tag{9}$$

为生成一个大小为 $M \times N$ 的离散滤波器传递函数，我们可在 $u = 0,1,2,...,M-1$ 和 $v = 0,1,2,...,N-1$ 处对上式取样。

2.2 逆滤波

逆滤波是基于图像的频域表示，假设模糊核已知。在没有噪声的情况下，估计图像为

$$\hat{F}(u,v) = \frac{G(u,v)}{H(u,v)} \tag{10}$$

逆滤波器的缺点是对噪声非常敏感。在有噪声的情况下

$$G(u,v) = H(u,v)F(u,v) + N(u,v) \tag{11}$$

两边同除 $H(u,v)$ 得到估计图像

$$\hat{F}(u,v) = F(u,v) + \frac{N(u,v)}{H(u,v)} \tag{12}$$

取 $H(u,v)$ 为模糊核，令 $T=1$，$a=0.1$，$b=0.1$，将模糊核作用于原始图像图5a，得到模糊后的图像图5b。

(a) 原始图像 (b) 运动模糊后的图像

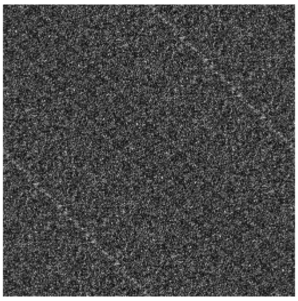
图 5: 陷波滤波的输出

在无噪声的情况下，使用逆滤波器恢复图像。图6显示了恢复后的图像。观察发现，恢复后的图

图 6: 逆滤波恢复后的图像

像几乎与原始图像一致。运动造成的模糊已被去除。

对运动模糊图像的频谱中，加入均值为 0，方差为 1 的高斯噪声，再次使用逆滤波器，得到恢复后的图像图7a，在图7a中原始图像完全不可见，这是因为逆滤波器对噪声敏感，在逆滤波器值较小的情况下噪声被放大，噪声成为了图像的主导项。为了解决这一为题，我们将逆滤波器的频率限制在原点附近，经过不断调试离原点的距离，最终得到限制频率的逆滤波恢复的图像图7b。观察到，噪声已不再是图像的主导项，可以看到略微模糊的原始图像。



(a) 有噪声时逆滤波恢复的图像

(b) 限制频率的逆滤波恢复的图像

图 7: 有噪声的情况

2.3 维纳滤波

维纳滤波则是基于图像的统计特性，假设噪声和模糊核已知。误差函数最小值在频域中可表示为

$$\hat{F} = [\frac{1}{H(u,v)}\frac{|H(u,v)|^2}{|H(u,v)|^2 + \frac{S_N(u,v)}{S_F(u,v)}}]G(u,v) \tag{13}$$

将模糊核带入式 (13)，得到复原图像 $\hat{F}(u,v)$，如图8所示。维纳滤波没有出现噪声被放大的现象，

图 8: 维纳滤波恢复后的图像

恢复后的图像比逆滤波恢复的图像更清晰。