学号＿＿＿＿ 姓名＿＿＿＿ 专业＿＿＿＿ 年级＿＿＿＿ 院/系＿＿＿＿

答 题 勿 超 装 订 线

装＿＿＿＿订＿＿＿＿线

安徽大学 20<u>18</u>—20<u>19</u> 学年第<u> 1 </u>学期

《 数学物理方法 》考试试卷（A 卷）

（闭卷　　时间 120 分钟）

考场登记表序号＿＿＿＿＿＿

题 号	一	二	三	四	五	总分
得 分						
阅卷人						

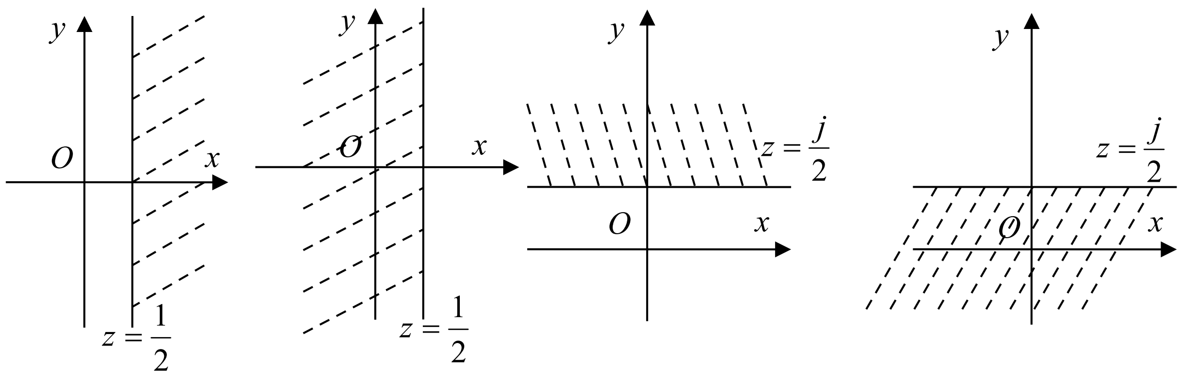
一、单项选择题（每小题 2 分, 共 16 分）

得分	

1. 当 $x<0$， $y>0$ 时，复数 $z=x+jy$ 的辐角主值为(　　　)

A. $\arctan\frac{y}{x}$； **B.** $-\arctan\frac{y}{x}$； **C.** $\arctan\frac{y}{x}+\pi$； **D.** $\arctan\frac{y}{x}-\pi$ 。

2. $\mathrm{Re}(z)>\frac{1}{2}$ 为下面哪个图中**虚线**所示的区域(　　　)



A　　　　**B**　　　　**C**　　　　**D**

3. 若函数 $f(z)$ 在 z_0 点解析，则下面的结论**不正确**的是(　　　)

A. $f(z)$ 在 z_0 点连续；　　　**B.** $f(z)$ 在 z_0 点存在任意阶导数；

C. $f(z)$ 可以以 z_0 点为中心展开为泰勒级数；

D. $f(z)$ 以 z_0 点为中心的罗朗级数展开式中包含有限项负幂次项，即有 $f(z)=\sum_{n=-m}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$，其中 m 为大于零的整数。

4. 若函数 $f(z)$ 在环形区域 $R_1<|z-z_0|<R_2$ 内展开为罗朗级数，则下面的说法**不正确**的是(　　　)

A. z_0 可能是也可能不是 $f(z)$ 的不解析的点；　　**B.** $f(z)$ 在环形区域内解析；

C. 罗朗级数在环形区域内绝对且一致收敛；

D. 罗朗级数的系数为$c_n=\dfrac{1}{j2\pi}\oint_C \dfrac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta$ ，其中积分路径C为环形区域内绕z_0的任一简单闭合曲线，由高阶导数公式可知$c_n=\dfrac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)$。

5. 下面**不能**判断z_0为函数$f(z)$的一阶极点的判据是(　　　)

A. $f(z)$以z_0为中心的罗朗级数展开式为$f(z)=\sum\limits_{n=-1}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$；

B. $\dfrac{1}{f(z)}\Big|_{z=z_0}=0$，但$\dfrac{d}{dz}[\dfrac{1}{f(z)}]\Big|_{z=z_0}\neq 0$，即$z_0$为$\dfrac{1}{f(z)}$的一阶零点；

C. $f(z)$在z_0点有界；

D. $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$，函数$P(z)$和$Q(z)$都在z_0点解析，z_0为$Q(z)$的一阶零点，且$P(z_0)\neq 0$。

6. 函数$\sin kx(k为实常数)$的拉普拉斯变换是(　　　)

A. $\dfrac{s}{s^2+k^2}$；　　**B.** $\dfrac{k}{s^2+k^2}$；　　**C.** $\dfrac{s}{s^2-k^2}$；　　**D.** $\dfrac{k}{s^2-k^2}$。

7. 方程$(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2})^2+(\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2})^2=\sin x\cos y$为下面那种性质的偏微分方程(　　　)

A. 二阶线性齐次方程;　　**B.** 二阶线性非齐次方程;

C. 二阶非线性齐次方程;　　**D.** 二阶非线性非齐次方程。

8. 对于施图姆－刘维尔(SL)型方程$\dfrac{d}{dx}[p(x)\dfrac{dy}{dx}]+q(x)y+\lambda\rho(x)y=0,(a\le x\le b)$，附以齐次第一、二、三类边界条件或自然边界条件就构成了 SL 本征值问题，若$p(x)$和$\rho(x)$只取非负的值(≥ 0)，且$q(x)\le 0$，则下面关于 SL 本征值问题的说法**不正确**的是(　　　)

A. 存在无穷多个本征值$\lambda_1\le\lambda_2\le\cdots$，对应着无穷多个本征函数$y_1(x),y_2(x),\cdots$；

B. 存在负的本征值；　**C.** 对不同的本征函数$y_m(x)$和$y_n(x)$有正交性$\int_a^b\rho(x)y_m(x)y_n(x)dx=0$；

D. 若函数$f(x)$在区间$[a,b]$上有连续的一阶和分段连续的二阶导数，且满足本征值问题的边界条件，可用本征函数系将$f(x)$展开为绝对且一致收敛的广义傅里叶级数。

得分	

二、填空题（每空 2 分，共 24 分）

1. 复数$z=2j$的指数式为：____________________。

2. 计算函数$\sin j=$______________，$\ln(-1)=$______________。

3. 设C为逆时针方向沿圆周$|z|=1$的简单闭合曲线，则积分$\oint_C\dfrac{1}{z^2}dz=$______________。

4. 泰勒级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{n^n}(z-j)$ 的收敛圆为：______________。

5. 求函数 $\frac{z}{z^2+1}$ 在孤立奇点 j 处的留数______________。

6. 求广义傅里叶变换 $F[e^{jx}]=$______________，拉普拉斯变换 $L[x^2]=$______________。

7. 对于本征值问题：$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0, \quad x\in(0,l) \\ X'(0)=X'(l)=0 \end{cases}$

其本征值为：______________，本征函数为：______________。

8. 已知勒让德方程 $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+n(n+1)y=0$ 满足在 $x=\pm 1$ 处为有界的解是勒让德多项式 $P_n(x)$，则方程 $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+6y=0$ 的解可用勒让德多项式表示为：__________。

9. 已知 v 阶贝塞尔方程 $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-v^2)y=0$ 的一个解为 v 阶贝塞尔函数 $J_v(x)$，则可把方程 $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(4x^2-\frac{9}{25})y=0$ 的一个解用贝塞尔函数表示为：__________。

三、简答题（10 分）

得分	

二阶线性常微分方程的标准形式为：$\frac{d^2w(z)}{dz^2}+p(z)\frac{dw(z)}{dz}+q(z)w(z)=0$

试简述方程的常点和正则奇点，并写出常点和正则奇点邻域内方程级数解的形式。

得分	

四、证明题（10 分）

证明函数 $f(z)=z\operatorname{Re}(z)$ 在 $z=0$ 点可导，但在复平面上处处不解析。

得分	

五、计算题

（第 1, 2 题每题 10 分，第 3 题 8 分，第 4 题 12 分，共 40 分）

1. 计算积分 $\oint_{|z|=1}\frac{\cos z}{z^3}dz$ 。

2. 分别在区域$0<|z|<1$和$1<|z|$内把函数$f(z)=\dfrac{1}{z^2(1-z)}$以$z_0=0$为中心展开为罗朗级数。

线

答　题　勿　超　装　订　线

3. 由**达朗贝尔公式**求解初值问题：

订

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0\\ u(x,t)|_{t=0}=\cos x \qquad (-\infty<x<\infty,t>0,a>0)\\ \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}|_{t=0}=\sin x\end{cases}$$

装

4．应用分离变量法求解如下定解问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad (0 < x < l, t > 0) \text{ ①} \\ u(x,t)\big|_{x=0} = \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=l} = 0 \qquad (t > 0) \\ u(x,t)\big|_{t=0} = cx, \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0, \quad (0 < x < l) \end{cases}$$