不定积分“不存在”的情况

求不定积分就是一个求原函数的过程，我们知道变上限积分 $\int_a^x f(t)dt(a\text{为任意常数})$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，而只要 $f(x)$ 连续，$\int_0^x f(t)dt$ 就一定存在，那为什么还会有很多连续函数的不定积分“不存在”呢？其实这个“不存在”的意思是原函数不能用初等函数表示（我们平时面对的基本都是初等函数）。下面就给出几种原函数不是初等函数的类型，遇到这些类型的不定积分，就不要再费劲去做了：

一、三角函数类型：

$\int \frac{\sin x}{x^n}dx, \int \frac{\cos x}{x^n}dx, \int \frac{\tan x}{x^n}dx, n\text{为正整数}$，$\int \sin x^2 dx, \int \cos x^2 dx, \int \tan x^2 dx$，$\int \sin(\cos x)dx, \int \cos(\sin x)dx$

$\int e^{a\sin x}dx, \int e^{a\cos x}dx, a \neq 0$，$\int \sqrt{1+\sin^2 x}dx, \int \sqrt{1+\cos^2 x}dx$，$\int e^{\sqrt{x}}\sin x dx$

$$\int \sqrt{1-k\sin^2 x}dx, \int \sqrt{1-k\cos^2 x}dx, \int \frac{1}{\sqrt{1-k\sin^2 x}}dx, \int \frac{1}{\sqrt{1-k\cos^2 x}}dx, 0<k<1$$

$$\int \ln(\sin x)dx, \int \ln(\cos x)dx, \int \ln(\tan x)dx, \int \ln(1+\sin x)dx, \int \ln(1+\cos x)dx, \int \ln(1+\tan x)dx$$

二、高斯类

$\int x^{2n}e^{ax^2}dx, \text{其中} a \neq 0, n\text{为自然数}$，特别的 $n=0$ 时，$\int e^{ax^2}dx$

三、指数和对数的分式型

$$\int \frac{e^x}{x}dx, \int \frac{e^{-x}}{x}dx, \int \frac{e^x}{1+x}dx, \int \frac{e^x}{1+x^2}dx, \int \frac{e^x}{x(1+x)}dx$$

$$\int \frac{1}{\ln x}dx, \int \frac{\ln x}{1+x}dx, \int \frac{\ln x}{1+x^2}dx, \int \frac{\ln x}{x(1+x)}dx$$

$$\int \frac{x}{e^x-1}dx, \int \frac{x^2}{e^x-1}dx, \int \frac{x^3}{e^x-1}dx$$

四、根式类型（椭圆和超几何）

$$\int \sqrt{1-x^3}dx, \int \sqrt{1-x^4}dx, \int \sqrt{1-x^n}dx(n \geq 3), \int \frac{1}{\sqrt{1-x^3}}dx. \int \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}dx, \int \frac{1}{\sqrt{1-x^n}}dx(n \geq 3)$$

$$\int \sqrt{1+x^3}dx, \int \sqrt{1+x^4}dx, \int \sqrt{1+x^n}dx(n \geq 3), \int \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}dx. \int \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}dx, \int \frac{1}{\sqrt{1+x^n}}dx(n \geq 3)$$

五、其他类型

$$\int x^x dx, \int \ln(\ln x)dx, \int e^{e^x}dx$$

六、虽然这些函数的原函数写不出来，但是在特定区间的定积分有些是可以求出来，例如我们在概率统计里经常用

到的结果$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$

更多公共数学内容可以关注微博：数学老师不上课难受