# 安徽大学 2020—2021 学年第二学期

# 《高等数学 A（二）》期末试卷（A 卷）参考答案

## 一、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1、B　　2、A　　3、D　　4、B　　5、B

## 二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

6. $\dfrac{2}{3}$

7. $\int_0^1 dy\int_0^y f(x,y)dx+\int_1^2 dy\int_0^{2-y} f(x,y)dx$

8. (0, 0)

9. $(2f_1' x+f_2'\dfrac{1}{y})dx+(2f_1' y-f_2'\dfrac{x}{y^2})dy$

10. 0

## 三、计算题

11.（9 分） **解：**

设 $F(x,y,z)=z^3-3xyz-a^3$，$F_x'=-3yz$，$F_y'=-3xz$，$F_z'=3z^2-3xy$，当 $z^2\neq xy$ 时，得

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xz}{z^2-xy}$$

12.（9 分）

**解：**

$$\oiint_\Sigma (z-1)^2 dS=\oiint_\Sigma z^2 dS-\oiint_\Sigma 2z dS+\oiint_\Sigma 1 dS$$

因为：$\oiint_\Sigma 1dS=4\pi 3^2=36\pi$，$\oiint_\Sigma 2zdS=0$，$\oiint_\Sigma z^2 dS=\dfrac{1}{3}\oiint_\Sigma (x^2+y^2+z^2)dS=\dfrac{1}{3}\oiint_\Sigma 3^2 dS=108\pi$

所以，原式$=144\pi$

13.（9 分）**解：** $S_1$：$x^2+y^2\le 1$ **取下侧**

由高斯公式

$$\iint_S (x^3+1)dydz+(y^3+1)dzdx+(z^3+1)dxdy$$

$$=\oiint_{S+S_1}(x^3+1)dydz+(y^3+1)dzdx+(z^3+1)dxdy$$

$$=3\iiint_V (x^2+y^2+z^2)dxdydz=\frac{6\pi}{5}$$

又因为：

$$\iint\limits_{S_1}(x^3+1)dydz+(y^3+1)dzdx+(z^3+1)dxdy$$

$$=-\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}dxdy=-\pi$$

所以，原式$=\dfrac{11\pi}{5}$

14.（9 分）**解：**

$$\int\limits_L\sqrt{x^2+y^2}ds=2\int_0^a\sqrt{ax}\frac{a}{2\sqrt{ax-x^2}}dx=a\sqrt{a}\int_0^a\frac{dx}{\sqrt{a-x}}=2a^2$$

15. （9 分）

**解：**由题知，收敛域为$(-1,1)$.

对任意$x\in(-1,1)$，设$s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1}$，则

$$s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n-2}=\frac{1}{1-x^2}.$$

故$s(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{1}{1-x^2}dx+s(0)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)2^n}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}(\frac{1}{\sqrt{2}})^{2n-1}=\frac{1}{\sqrt{2}}s(\frac{1}{\sqrt{2}})=\frac{\sqrt{2}}{2}\ln(\sqrt{2}+1)$$

16. （9 分）

先将其延拓为周期为$2\pi$的函数$F(x)$，且连续

对任意$F(x)\sim\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx=\pi$$

其中，$a_n=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}f(x)\cos nxdx=\begin{cases}-\dfrac{4}{n^2\pi} & n=2k-1\\ 0 & n=2k\end{cases}$，

$$f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x,[-\pi,\ \pi]$$

**四、应用题（共 10 分）**

17. **解：**由第二类曲线积分的物理意义和格林公式

$$W=\oint_L(y+3x)dx+(2y-x)dy=-\iint\limits_D\frac{\partial}{\partial x}(2y-x)-\frac{\partial}{\partial y}(y+3x)dxdy$$

$$=2\iint\limits_D dxdy=2S_{\text{椭圆}}=4\pi$$

**五、证明题（共 6 分）**

18. $\sum_{n=2}^{\infty}\sin(n\pi+\frac{1}{\ln n})=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\sin(\frac{1}{\ln n})$

$\sin(\frac{1}{\ln n})\sim\frac{1}{\ln n}$，$n\to\infty$

因为$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$发散，但$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{\ln n}$由莱布尼兹判别法可判断收敛

所以$\sum_{n=2}^{\infty}\sin(n\pi+\frac{1}{\ln n})$条件收敛.