安徽大学 2011—2012 学年第一学期
《 数理方法 》考试试题 A 卷参考答案及评分标准

一、填空题（每空 2 分，共 26 分）

1. $\pm(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2})$ （写出一个 1 分）

2. $e^{-3}(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2})$

3. $i2\pi$， 0

4. 1， $|z|=1$

5. $\sum_{n=-2}^{\infty}\frac{z^n}{(n+2)!}$ 或 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n-2}}{n!}$ 或 $\frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$， 1

6. $\frac{2\sin\omega\tau}{\omega}$

7. $\frac{1}{s}$， $\frac{2}{s^2+2^2}$

8. $\lambda_n=(\frac{n\pi}{l})^2$， $n=01,2,\cdots$， $\sin\frac{n\pi}{l}x$， $n=0,1,2,\cdots$

二、简答题（第 1 题 6 分，第 2 题 8 分，共 14 分）

1． 答：

偏导数 $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}$， $\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}$， $\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}$， $\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}$ 在点 $z=x+iy$ 处存在、连续（或可微），

且满足柯西-黎曼条件： $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}$， $\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=-\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}$

2．答：

如果 $p(z)$ 和 $q(z)$ 在 z_0 点的邻域内解析， z_0 为方程的常点

如果 $(z-z_0)p(z)$ 和 $(z-z_0)^2q(z)$ 在 z_0 点的邻域内解析， z_0 为正则奇点

在常点 z_0 的邻域内方程存在唯一的解析解，可表示为泰勒级数：

$$w(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$

在正则奇点z_0的邻域内方程至少存在一个如下形式的级数解：

$$w(z)=(z-z_0)^{\rho}\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$

三、证明题（共 10 分）

证明：

卷积$f(x)*g(x)$的拉氏变换为：

$$L[f(x)*g(x)]=\int_0^{\infty}f(x)*g(x)e^{-sx}dx=\int_0^{\infty}[\int_0^{x}f(x-\tau)g(\tau)d\tau]e^{-sx}dx$$

交换积分顺序可得：

$$L[f(x)*g(x)]=\int_0^{\infty}[\int_0^{x}f(x-\tau)g(\tau)d\tau]e^{-sx}dx=\int_0^{\infty}g(\tau)[\int_{\tau}^{\infty}f(x-\tau)e^{-sx}dx]d\tau$$

在上式中作变量替换$x-\tau=t$，则有：

$$\int_0^{\infty}g(\tau)[\int_0^{\infty}f(t)e^{-s(t+\tau)}dt]d\tau=\int_0^{\infty}g(\tau)e^{-s\tau}d\tau\int_0^{\infty}f(t)e^{-st}dt=\bar{f}(s)\cdot\bar{g}(s)$$

四、计算题（第 1、2，3 题各 8 分，第 4 题 14 分，第 5 题 12 分，共 50 分）

1．解：

函数$\dfrac{\cos z}{z^3}$在圆周$|z|=1$内只有$z=0$一个三阶极点

可得留数：$\mathrm{Re}\,s[\dfrac{\cos z}{z^3},0]=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{1}{(3-1)!}\dfrac{d^2}{dz^2}[z^3\dfrac{\cos z}{z^3}]=-\dfrac{1}{2}$

由留数定理可得：$\oint_{|z|=1}\dfrac{\cos z}{z^3}dz=i2\pi\,\mathrm{Re}\,s[\dfrac{\cos z}{z^3},0]=-i\pi$

2. 解：

$$u(\theta)=2+2\cos^2\theta=A_0P_0(\cos\theta)+A_2P_2(\cos\theta)$$

$$2+2\cos^2\theta=A_0+A_2\frac{1}{2}(3\cos^2\theta-1)$$

比较系数可得：$A_0=\dfrac{8}{3}$，$A_2=\dfrac{4}{3}$

3. 解：

令 $2x=t$， $y(x)=y(\frac{t}{2})=g(t)$，则原方程可化为：

$$t^2 g''(t)+tg'(t)+[t^2-(\frac{3}{5})^2]g(t)=0$$

上式为$\frac{3}{5}$阶贝塞尔方程，其两个线性独立的第一类贝塞尔函数解为：

$$g_1(t)=J_{\frac{3}{5}}(t)，\qquad g_2(t)=J_{-\frac{3}{5}}(t)$$

所以原方程的两个线性独立的第一类贝塞尔函数解为：

$$y_1(x)=J_{\frac{3}{5}}(2x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\frac{3}{5}+k+1)}(\frac{2x}{2})^{\frac{3}{5}+2k}$$

$$y_2(x)=J_{-\frac{3}{5}}(2x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(-\frac{3}{5}+k+1)}(\frac{2x}{2})^{-\frac{3}{5}+2k}$$

4．解：

应用分离变量法，设$u(x,t)=X(x)T(t)$，分别代入泛定方程和边界条件可得：

$$① \begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0 \\ X(0)=0, X(l)=0 \end{cases}$$

$$② \quad T'(t)+\lambda a^2 T(t)=0$$

① 式的本征值为$\lambda_n=(\frac{n\pi}{l})^2$， $(n=0,1,2,\cdots)$，本征函数为$X_n(x)=A_n\sin\frac{n\pi}{l}x$

② 式的本征解为：$T_n(t)=B_n e^{-(\frac{n\pi a}{l})^2 t}$

原问题的本征解为：$u_n(x,t)=X_n(x)T_n(t)=C_n e^{-(\frac{n\pi a}{l})^2 t}\sin\frac{n\pi}{l}x$，其中$C_n=A_nB_n$为待定常数。

原问题的解$u(x,t)$表示为本征解$u_n(x,t)$的线性叠加：

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n e^{-(\frac{n\pi a}{l})^2 t}\sin\frac{n\pi}{l}x$$

代入初始条件可得： $u(x,0)=\frac{x(l-x)}{l^2}=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\frac{n\pi}{l}x$

展开系数为：$C_n=\dfrac{2}{l}\int_0^l \dfrac{x(l-x)}{l^2}\sin\dfrac{n\pi}{l}xdx \Rightarrow \begin{cases} C_{2k+2}=0 \\ C_{2k+1}=\dfrac{8}{\pi^3(2k+1)^3} \end{cases} \quad (k=0,1,2,\cdots)$

所以问题的解为：$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{8}{\pi^3(2k+1)^3}\sin\dfrac{(2k+1)\pi}{l}xe^{-\frac{(2k+1)^2\pi^2a^2}{l^2}t}$

5．解：

在方程两边取拉氏变换可得：

$$L[y'']+a^2L[y]=L[f(x)]\Rightarrow s^2\bar{y}(s)-sy(0)-y'(0)+a^2\bar{y}(s)=\bar{f}(s)$$

由上式可解出：$\bar{y}(s)=\dfrac{s}{s^2+a^2}y(0)+\dfrac{1}{s^2+a^2}y'(0)+\dfrac{\bar{f}(s)}{s^2+a^2}$

对上式两边施行拉氏逆变换可得：

$$y(x)=L^{-1}[\bar{y}(s)]=L^{-1}[\frac{s}{s^2+a^2}]y(0)+L^{-1}[\frac{1}{s^2+a^2}]y'(0)+L^{-1}[\frac{\bar{f}(s)}{s^2+a^2}]$$

已知： $L^{-1}[\dfrac{s}{s^2+a^2}]=\cos ax$

$L^{-1}[\dfrac{1}{s^2+a^2}]=\dfrac{1}{a}\sin ax$

方程的解为：

$$y(x)=\frac{1}{a}\int_0^x f(\tau)\sin[a(x-\tau)]d\tau+y(0)\cos ax+y'(0)\frac{1}{a}\sin ax$$