院/系________ 专业________ 姓名________ 学号________

答题勿超装订线

安徽大学 2018—2019 学年第一学期

《高等数学 A（一）》期末考试试卷（A 卷）

（闭卷 时间 120 分钟）

考场登记表序号__________

题号	一	二	三	四	五	总分
得分						
阅卷人						

得分	

一、填空题（本题共五小题，每小题 3 分，共 15 分）

1. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n-2018}\right)^n=$______________.

2. 设函数 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$，则 $f^{(n)}(x)=$______________.

3. 设 $y=y(x)$ 是由方程 $y=\cos(x+y)$ 确定的隐函数，则微分 $\mathrm{d}y=$______________.

4. 曲线 $C: y=3x^5+5x^4-2x+4$ 的拐点坐标为______________.

5. 广义积分 $\displaystyle\int_1^2\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x=$______________.

得分	

二、选择题（本题共五小题，每小题 3 分，共 15 分）

6. 广义积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}x^p\mathrm{d}x$ 收敛的充分必要条件是 （　　）

A. $-1<p<0$;　　B. $p>-1$;　　C. $0<p<1$;　　D. $p<-1$.

7. 已知极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-x+\frac{1}{6}x^3}{x^k}=c$，其中 k,c 均为实常数，且 $c\neq0$. 则 （　　）

A. $k=4,c=-\dfrac{1}{24}$;　　B. $k=4,c=\dfrac{1}{24}$;

C. $k=5,c=-\dfrac{1}{120}$;　　D. $k=5,c=\dfrac{1}{120}$.

8. 设函数$F(x)$是$f(x)$的一个原函数．则下列说法正确的是 ( )

A. $F(x)$是偶函数当且仅当$f(x)$是奇函数；

B. $F(x)$是奇函数当且仅当$f(x)$是偶函数；

C. $F(x)$是周期函数当且仅当$f(x)$是周期函数；

D. $F(x)$是单调函数当且仅当$f(x)$是单调函数．

9. 设函数$y=f(x)$在$[a,b]$（$0<a<b$）上有连续导数，且$f(x)>0$．则由曲线$C: y=f(x)$与直线$x=a, x=b$以及x轴围成图形绕y轴旋转一周所得旋转体的体积为 ( )

A. $2\pi\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x$；　　B. $2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\mathrm{d}x$；

C. $\pi\int_a^b [f(x)]^2\mathrm{d}x$；　　D. $2\pi\int_a^b x\sqrt{1+[f'(x)]^2}\mathrm{d}x$．

10. 设函数$f(x)=\begin{cases} x^5\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$ 则下列说法正确的是 ( )

A. $f(x)$在$x=0$处有2阶导数，但$f''(x)$在$x=0$处不连续；

B. $f(x)$在$x=0$处有2阶导数，且$f''(x)$在$x=0$处连续；

C. $f(x)$在$x=0$处有3阶导数，但$f'''(x)$在$x=0$处不连续；

D. $f(x)$在$x=0$处有3阶导数，且$f'''(x)$在$x=0$处连续．

三、计算题（本题共六小题，每小题7分，共42分）

得　分	

11. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \sin(x-t)^2\,\mathrm{d}t}{\tan x - x}$．

姓名________ 学号________

答题勿超装订线

12．求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2}\sin\dfrac{k\pi}{n}$.

13．设函数$y=y(x)$由参数方程$\begin{cases}x=\sin t,\\ y=t\sin t+\cos t\end{cases}$（$t$为参数）．求$\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}$.

14．求不定积分$I=\int\sec^3 x\,\mathrm{d}x$.

15. 求定积分$\int_0^1 \frac{x^{\frac{3}{2}}}{1+x}\mathrm{d}x$.

16. 求初值问题$\begin{cases} xy'+y=\cos x, \\ y(\frac{\pi}{2})=1 \end{cases}$ 的解.

姓名________ 学号________

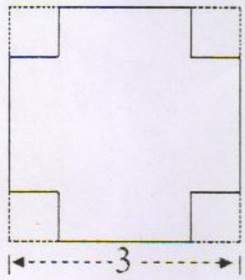
答 题 勿 超 装 订 线

装 订 线

四、应用题（本题共两小题，每小题8分，共16分）

得 分	

17. 设有边长为3的正方形纸板，将其四角剪去相等的小正方形，然后叠成盒子. 问小正方形的边长为多少时，叠成的盒子的体积为最大？



18. 设某钢丝段形状为 $\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t, \ (t \in [0, 2\pi]). \\ z = e^t \end{cases}$ 求该钢丝段的长度.

五、证明题（**本题共两小题，每小题 6 分，共 12 分**）

得 分	

19. 利用 Rolle（罗尔）定理证明 Lagrange（拉格朗日）中值定理：设$f(x)$满足 (i) 在$[a,b]$上连续，(ii) 在(a,b)内可导．则至少存在一个$\xi\in(a,b)$，使得$f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

20. 设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，且对任意$x\in[a,b]$，$f(x)>0$. 证明：存在唯一的$\xi\in(a,b)$，使得$\int_a^{\xi}f(t)\mathrm{d}t=\int_{\xi}^{b}\frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t$.

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-2018}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2019}{n-2018}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2019}{n-2018}\right)^{\frac{n-2018}{2019}\times\frac{2019n}{n-2018}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{2019}{n-2018}\right)^{\frac{n-2018}{2019}}\right]^{\frac{2019n}{n-2018}}$

$=\left[\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2019}{n-2018}\right)^{\frac{n-2018}{2019}}\right]^{2019}=e^{2019}$.

2. $f(x)=(1-x)^{-1}$，由

安徽大学 2018—2019 学年第一学期

3. $y'=(\cos(x+y))'=-\sin(x+y)(1+y')\Rightarrow y'=\frac{-\sin(x+y)}{1+\sin(x+y)}$，

《高等数学 A（一）》期末考试试卷（A 卷）

$\Rightarrow dy=\frac{-\sin(x+y)}{1+\sin(x+y)}dx$.

参考答案与评分标准

4. $y'=15x^4+20x^3-2$，$y''=60x^3+60x^2$，令 $y''=0$ 得 $\begin{cases}x=0,\\y=4.\end{cases}$ $\begin{cases}x=-1.\\y=8.\end{cases}$ 由拐点定义判定得 $\begin{cases}x=-1,\\y=8\end{cases}$ 为拐点（即在 $x=0$ 点左右两侧 $f''(x)$ 符号相同；在 $x=-1$ 点左右两侧 $f''(x)$ 符号相反）

5. $\int_1^2\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx=\lim\limits_{t\to1^+}\int_{1+t}^2\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx$

换元法 $x=\sec\theta$ $\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\theta=\frac{\pi}{3}$.

一、填空题（本题共五小题，每小题 3 分，共 15 分）

1、e^{2019}； 2、$\dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$； 3、$-\dfrac{\sin(x+y)\mathrm{d}x}{1+\sin(x+y)}$； 4、$(-1,8)$； 5、$\dfrac{\pi}{3}$.

6. 由广义积分收敛判别法得 $\int_1^{+\infty}x^p dx=\frac{1}{p+1}x^{p+1}\Big|_1^{+\infty}=\frac{1}{p+1}\left(1-\lim\limits_{t\to+\infty}t^{p+1}\right)$，此极限存在，要求 $\lim\limits_{t\to+\infty}t^{p+1}$ 存在，故必须 $p+1<0$ 才行。

二、选择题（本题共五小题，每小题 3 分，共 15 分）

（下式）

6、D； 7、D； 8、A； 9、A； 10、B.

7. 由 $\sin x$ 的麦克劳林公式得 $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^5)$，故 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x-x+\frac{1}{6}x^3}{x^k}=c=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{x^5}{5!}+o(x^5)}{x^k}$

三、计算题（本题共六小题，每小题 7 分，共 42 分）

故有 $k=5$，$c=\frac{1}{5!}=\frac{1}{120}$.

11. 解. 令 $x-t=u$，则

8. 若 F 为偶函数，则 $F(x)=F(-x)$，

$F'(x)=F'(-x)(-x)'=-F'(-x)$，①

$$\int_0^x\sin(x-t)^2\ \mathrm{d}t=\int_x^0\sin u^2(-\mathrm{d}u)=\int_0^x\sin u^2\mathrm{d}u\text{..........}（3 分）$$

由 $F'(x)=f(x)$ 得

$F'(-x)=f(-x)$，②

$$故原式=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x\sin u^2\ \mathrm{d}u}{\tan x-x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x^2}{\sec^2x-1}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x^2}{\tan^2x}=1\text{......................}（7 分）$$

①，② $\Rightarrow f(-x)=-f(x)$，

即 $f(x)$ 为奇函数，此结论可逆。

12. 解. 定积分定义

$$原式=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^n\frac{1}{n}\cdot\frac{k}{n}\sin(\frac{k}{n}\pi)\ =\int_0^1x\sin(\pi x)\mathrm{d}x\text{..}（4 分）$$

$$=-\frac{1}{\pi}(x\cos\pi x|_0^1-\int_0^1\cos\pi x\mathrm{d}x)=\frac{1}{\pi}.\text{...}（7 分）$$

13. 解. 由 $x'(t)=\cos t,y'(t)=t\cos t$ 可得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=t$. ....（4 分）

$$\frac{\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=$$

进而 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{1}{\cos t}$，故 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\Big|_{t=\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}$. ....（7 分）

分部积分法

14. 解. $I=\int\sec x\mathrm{d}(\tan x)=\sec x\tan x-\int\tan x\sec x\tan x\mathrm{d}x$.................（2 分）

（课本习题）

$$=\sec x\tan x-\int\sec x(\sec^2x-1)\mathrm{d}x=\sec x\tan x-I+\int\sec x\mathrm{d}x$$

$$=\sec x\tan x-I+\ln|\sec x+\tan x|$$

$$故I=\frac{1}{2}(\sec x\tan x+\ln|\sec x+\tan x|)+C\text{ ....}（7 分）$$

10. 考察函数的间断点（或分段点）连续及可导性质。

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=0=f(0)$，$\Rightarrow f(x)$ 在 $x=0$ 点连续。

$f'(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}x^4\sin\frac{1}{x}=0=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$，即 $f(x)$ 在 $x=0$ 点一阶可导。

$x\neq0$ 时 $f'(x)=5x^4\sin\frac{1}{x}-x^3\cos\frac{1}{x}$，且 $\lim\limits_{x\to0}f'(x)=f'(0)$，即 $f'(x)$ 在 $x=0$ 点处连续。

二阶导数定义：$f''(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}(5x^3\sin\frac{1}{x}-x^2\cos\frac{1}{x})=0$

$f''(x)=20x^3\sin\frac{1}{x}-8x^2\cos\frac{1}{x}-x\sin\frac{1}{x}$，$\Rightarrow\lim\limits_{x\to0}f''(x)=0=f''(0)$

$\Rightarrow f''(x)$ 在 $x=0$ 连续，但 $f'''(x)$ 在 $x=0$ 点不可导。

由函数的连续定义知 $f(x)$ 在 $x=0$ 无三阶导数 ~~在 $x=0$ 点，且 $f'''(x)$~~（C. 不对）

换元法

15. 解. 令$x = t^2, x|_0^1 \iff t|_0^1, \mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t$，则

原式$= \int_0^1 \frac{t^3}{1+t^2} \cdot (2t)\mathrm{d}t = 2\int_0^1 \frac{t^4}{1+t^2}\mathrm{d}t$…………………………………………（3 分）

$= 2\int_0^1 \frac{t^4-1+1}{t^2+1}\mathrm{d}t = 2\int_0^1 (t^2 - 1 + \frac{1}{1+t^2})\mathrm{d}t$

$= 2\left(\frac{1}{3}t^3 - t + \arctan t\right)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{3}$. ………………………………………（7 分）

一阶线性微分方程

16. 解. 原方程可写成 $y' + \frac{1}{x}y = \frac{\cos x}{x}$.

故原方程的通解为

$$y = e^{-\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left(\int e^{\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x}\frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x + C\right)$$

$$= \frac{1}{x}(\sin x + C)$$ ………………………………………（5 分）

又因$y(\frac{\pi}{2}) = 1$， 由此可得$C = \frac{\pi}{2} - 1$，故原初值问题的解为

$$y = \frac{1}{x}(\sin x + \frac{\pi}{2} - 1).$$ ………………………………（7 分）

四、应用题（本题共两小题，每小题 8 分，共 16 分）

求最值应用题，也可用不等式性质求解.

17、解. 设小正方形的边长为x，则叠成的盒子的体积为

$$V(x) = x(3-2x)^2, \ 0 < x < \frac{3}{2}.$$ ………………………………（3 分）

$V'(x) = 3(3-2x)(1-2x)$，得驻点$x = \frac{3}{2}$（舍去），$x = \frac{1}{2}$，

又当$0 < x < \frac{1}{2}$时，$V'(x) > 0$，当$\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$时，$V'(x) < 0$，

所以$V(x)$在$x = \frac{1}{2}$时取得最大值，

即小正方形的边长为$\frac{1}{2}$时， 叠成的盒子体积最大. ………………………………（8 分）

（弧长公式）

题5 几何应用综合题

18. 解. 该钢丝段的长度为

$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\mathrm{d}t$ ………………………………（4 分）

$= \int_0^{2\pi} \sqrt{3}e^t\mathrm{d}t = \sqrt{3}\left(e^{2\pi} - 1\right)$. ……………………………………………（8 分）

五、证明题（本题共两小题，每小题6分，共12分）

此题构造辅助函数有多种解法.

19. 证明. 构造辅助函数$F(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$……………………（3分）

则$F(a) = F(b) = f(a)$，且$F(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)上可导.

由 Rolle 定理可知，存在$\xi \in (a,b)$使得 $F'(\xi) = 0$，

即$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$……………………………………………………（6分）

中值定理考察的是介值定理和拉格朗日中值定理等。

20. 证明. 令$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t - \int_x^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t$.

$$F(a) = -\int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t < 0,\ F(b) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t > 0.$$

显然$F(x)$在$[a,b]$上连续，由零点定理可知，存在$\xi \in (a,b)$，使得$F(\xi) = 0$.

零点定理（介值定理）

即$\int_a^\xi f(t)\mathrm{d}t = \int_\xi^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t$. ……………………………………………（3分）

又因为$F'(x) = f(x) + \frac{1}{f(x)} > 0$，所以$F(x)$为严格单调递增函数，故上述$\xi \in (a,b)$是

唯一的. ……………………………………………………………………（6分）

复习要点：极限求法.（夹逼准则、单调有界原理、两面夹定理）. 两个重要极限、连续性.

导数公式（n阶求导方法：幂指函数求导、Leibniz公式（P112）.

参数方程求导数（P112）、

洛必达法则. 函数Taylor公式（P141）.. 相关判别法（§4.4节）. 画图. 凹凸性计算的判别. 拐点求法

不定积分计算（换元法、分部积分法）、n种特殊类型函数的不定积分.

定积分计算. 反常积分计算的判别. 定积分在几何方面应用（体积计算

面积最好也看一下）.

微分方程（一阶方程计算）