Date

19-20 A(二) A卷

一.选择题

1. 方程 $y'=-y+xe^{-x}$ 是(A)

A.一阶非齐次线性方程. B.一阶齐次线性方程 C.齐次方程 D.可分离变量方程.

方程可化为: $y'+y=xe^{-x}$ 为一阶非齐次线性方程.

2. 向量场 $\vec{a}=(x^2y+y^3)\vec{i}+(x^3-xy^2)\vec{j}$ 的散度为(D)

A. 2. B. $2x^2-4y^2$ C. $2xy$ D. 0

$P=x^2y+y^3$. $Q=x^3-xy^2$. $R=0$. $\operatorname{div}\vec{a}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=2xy+(-2xy)=0$

☆3. $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$, 则 $(0,0)$ 处 $f(x,y)$ (C)

A.偏导数不存在. B.不连续. C.不可微. D.可微.

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\sqrt{|xy|}=0=f(0,0) \Rightarrow (0,0)$ 连续.

$f'_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{0}{\Delta x}=0$, $f'_y(0,0)=0 \Rightarrow (0,0)$ 偏导数存在.

$$\frac{\Delta z-f'_x(0,0)\Delta x-f'_y(0,0)\Delta y}{\rho}=\frac{\sqrt{|\Delta x\Delta y|}-0-0}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\xrightarrow{\rho\to0}\!\!\!\!\!\!\!\!/\ \ \ 0.$$

$$\lim_{\substack{\Delta x\to0\\ \Delta y=k\Delta x}}\frac{\sqrt{|\Delta x\Delta y|}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\sqrt{|k|\cdot(\Delta x)^2}}{\sqrt{(1+k^2)(\Delta x)^2}}=\sqrt{\frac{|k|}{1+k^2}}\neq0\ (k\neq0\text{时})$$

$\therefore f(x,y)$ $(0,0)$ 不可微

KOKUYO

Date

4. $L: y=x^2(0\le x\le\sqrt{2})$，则 $I=\int_L x\,ds=$ (C)

A. 2　　B. 0　　C. $\frac{13}{6}$　　D. $\frac{5}{6}$

$$\int_L x\,ds=\int_0^{\sqrt{2}} x\cdot\sqrt{1+(2x)^2}\,dx=\int_0^{\sqrt{2}}(1+4x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot x\,dx \quad \left(\begin{array}{l} y=x^2,\ y'=2x \\ ds=\sqrt{1+(2x)^2}\,dx \end{array}\right)$$

$$=\int_0^{\sqrt{2}}\frac{1}{8}(1+4x^2)^{\frac{1}{2}}d(1+4x^2)=\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}\cdot(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\sqrt{2}}=\frac{1}{12}\left[(1+4\cdot2)^{\frac{3}{2}}-1\right]$$

不行

$$=\frac{1}{12}(27-1)=\frac{13}{6}$$

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{p+1}}$ 发散的充要条件是 (B)

A. $p>0$.　　B. $p\le0$.　　C. $p\le1$.　　D. $p<1$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{p+1}}$ 发散 $\Leftrightarrow$ $p+1\le1$ 即 $p\le0$

二. 填空题.

6. 已知 $|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$，$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{7}$，则 $\vec{a},\vec{b}$ 的夹角为 $\underline{\frac{\pi}{3}}$

$$(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=(|\vec{a}-\vec{b}|)^2=7=\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}$$

即 $4+9-2\vec{a}\cdot\vec{b}=7\Rightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=3$.

$$\therefore\cos\angle(\vec{a},\vec{b})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{3}{2\cdot3}=\frac{1}{2}\Rightarrow\angle(\vec{a},\vec{b})=\frac{\pi}{3}$$

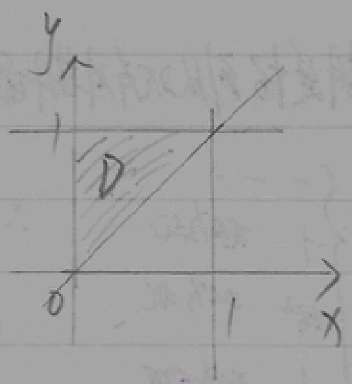
7. $z=\arctan\frac{x+y}{1-xy}$，则 $\frac{\partial z}{\partial x}=$ $\underline{\frac{1}{1+x^2}}$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2}\cdot\frac{1\cdot(1-xy)-(x+y)\cdot(-y)}{(1-xy)^2}=\frac{(1-xy)^2}{(1-xy)^2+(x+y)^2}\cdot\frac{1-xy+xy+y^2}{(1-xy)^2}=\frac{1+y^2}{1+x^2y^2+x^2+y^2}$$

Campus

即: $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1+y^2}{(1+x^2)(1+y^2)}=\frac{1}{1+x^2}$

8. 求 $I=\int_0^1 dx\int_x^1 e^{y^2}dy=\underline{\frac{e-1}{2}}$



$I=\iint_D e^{y^2}dxdy$ $\quad D=\{(x,y)|x\le y\le 1, 0\le x\le 1\}$

$=\{(x,y)|0\le x\le y, 0\le y\le 1\}$.

$\therefore I=\int_0^1 dy\int_0^y e^{y^2}dx=\int_0^1 y\cdot e^{y^2}dy=\frac{1}{2}e^{y^2}\Big|_0^1=\frac{e-1}{2}$

9. $L: x^2+y^2=9$. 逆时针方向, 则 $\oint_L (2xy-2y)dx+(x^2-4x)dy=\underline{-18\pi}$.

解1: 记 $D: x^2+y^2\le 9$. $P=2xy-2y$, $Q=x^2-4x$. P,Q 在 D 上有连续偏导, L 为 ∂D 取正向.

$\therefore \oint_L Pdx+Qdy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\iint_D(2x-4-(2x-2))dxdy=\iint_D -2dxdy=-2\cdot\pi\cdot 9=-18\pi$

解2: $L:\begin{cases}x=3\cos t\\ y=3\sin t\end{cases}$ $t:0\to 2\pi$.

$\therefore \oint_L Pdx+Qdy=\int_0^{2\pi}\left[(2\cdot 9\sin t\cos t-2\cdot 3\sin t)\cdot(-3\sin t)+(9\cos^2t-4\cdot 3\cos t)\cdot 3\cos t\right]dt$

$=\int_0^{2\pi}(-54\sin^2t\cos t+18\sin^2t+27\cos^3t-36\cos^2t)dt$

$=-54\int_0^{2\pi}\sin^2t\,d\sin t+18\cdot 4\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2t\,dt+27\cdot\int_0^{2\pi}\cos^3t\,dt-36\cdot 4\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2t\,dt$

$=0+(-18)4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}+0 \quad \left(\int_0^{2\pi}\cos^3t\,dt=\int_0^{2\pi}\sin^2t\,d\sin t=0\right)$

$=-18\pi$

Date

10. $f(x)=\begin{cases}-1 & -\pi\le x\le 0\\ 1+x^2 & 0<x\le\pi\end{cases}$，以$2\pi$为周期的Fourier级数在$x=\pi$处收敛于 $\underline{\frac{\pi^2}{2}}$

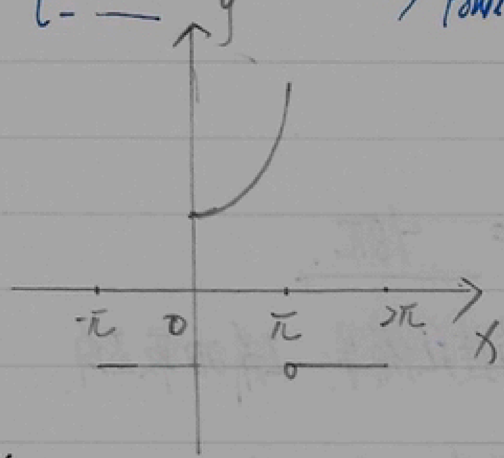
$f(x)$作周期延拓到以2π为周期的周期函数$F(x)$.

则 $F(x)=\begin{cases}\cdots\cdots \\ -1 & -\pi\le x\le 0\\ 1+x^2 & 0<x\le\pi\\ -1 & \pi<x\le 2\pi\\ \cdots\cdots\end{cases}$

$\therefore F(\pi^-)=1+(\pi)^2=1+\pi^2$

$F(\pi^+)=-1$

$\Rightarrow$ Fourier级数$x=\pi$处收敛于 $\frac{1+\pi^2+(-1)}{2}=\frac{\pi^2}{2}$



三. 计算题.

11. 设$z=f(u)$, $u=\sqrt{x^2+y^2}$. 求$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

解: $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{dz}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=f'(u)\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=f'(u)\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$$\therefore \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''(u)\cdot\frac{x^2}{x^2+y^2}+f'(u)\cdot\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}=f''(u)\cdot\frac{x^2}{x^2+y^2}+f'(u)\cdot\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''(u)\cdot\frac{y^2}{x^2+y^2}+f'(u)\cdot\frac{\sqrt{x^2+y^2}-y\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}=f''(u)\cdot\frac{y^2}{x^2+y^2}+f'(u)\cdot\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

12. 求 $\begin{cases}4y''+4y'+y=0\\ y(0)=2,\ y'(0)=0\end{cases}$ 的特解.

解: 1° $4y''+4y'+y=0$

特征方程为 $4\lambda^2+4\lambda+1=0 \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=-\frac{1}{2}$

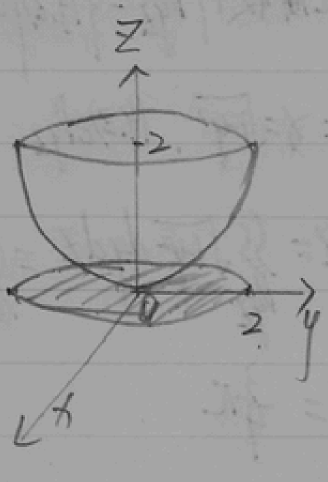
∴其通解为 $y=C_1e^{-\frac{x}{2}}+C_2x\cdot e^{-\frac{x}{2}}$

2° 对x求导. 有 $y'=-\frac{C_1}{2}e^{-\frac{x}{2}}+C_2e^{-\frac{x}{2}}-\frac{C_2}{2}x\cdot e^{-\frac{x}{2}}$

代入x=0. 有 $\begin{cases}y(0)=C_1=2\\ y'(0)=-\frac{C_1}{2}+C_2=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}C_1=2\\ C_2=1\end{cases}$

∴所求特解为 $y=2e^{-\frac{x}{2}}+x\cdot e^{-\frac{x}{2}}=(2+x)e^{-\frac{x}{2}}$

13. 求 $\iiint_V(x^2+y^2)dv$. $V: x^2+y^2=2z$ 与 $z=2$ 围成.



解: 柱面坐标下: $V=\{(r,\theta,z)|\frac{r^2}{2}\le z\le 2,\ 0\le r\le 2,\ 0\le\theta\le 2\pi\}$

∴ $\iiint_V(x^2+y^2)dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 dr\int_{\frac{r^2}{2}}^{2} r^2\cdot r\,dz$

$=2\pi\cdot\int_0^2 r^3(2-\frac{r^2}{2})dr=2\pi(\frac{r^4}{2}-\frac{r^6}{12})\Big|_0^2=2\pi(\frac{16}{2}-\frac{64}{12})$

$=2\pi(8-\frac{16}{3})=\frac{16}{3}\pi$.

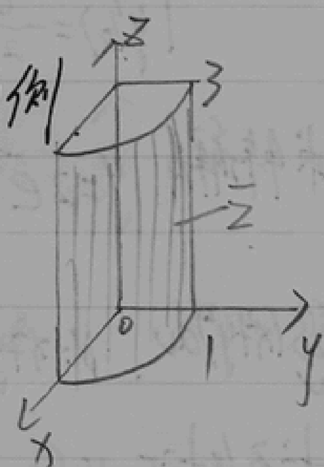
14. 求过Q$(3,-1,3)$及直线$\begin{cases}x=2+3t\\ y=-1+t\\ z=1+2t\end{cases}$的平面方程.

解: 直线$\begin{cases}x=2+3t\\ y=-1+t\\ z=1+2t\end{cases}$ 过P$(2,-1,1)$, 方向量$\vec{s}=(3,1,2)$

$\because$ 平面过Q, 且与$\vec{s}$, $\vec{PQ}$垂直. 故可取其法向量$\vec{n}=\vec{s}\times\vec{PQ}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 2\end{vmatrix}=(2,-4,-1)$

$\therefore$ 平面方程为: $2(x-3)-4(y+1)-(z-3)=0$ 即: $2x-4y-z-7=0$

15. 求$\iint_\Sigma x\,dydz$, Σ: 柱面$x^2+y^2=1$被$z=0$, $z=3$所截在第一卦限部分的前侧



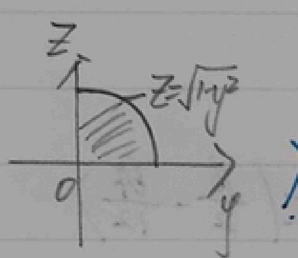
解: Σ对yOz面投影$D_{yz}=\{(y,z)\mid 0\le y\le 1, 0\le z\le 3\}$

Σ方程为: $x=\sqrt{1-y^2}$, $(y,z)\in D_{yz}$ 取前侧

$\therefore \iint_\Sigma x\,dydz=\iint_{D_{yz}}\sqrt{1-y^2}\,dydz=\int_0^1\sqrt{1-y^2}\,dy\cdot\int_0^3 dz$

$=\frac{\pi}{4}\cdot 3=\frac{3}{4}\pi$

($\int_0^1\sqrt{1-y^2}\,dy=\frac{\pi}{4}=$面积



)

16. 求$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$的收敛域及和函数.

解: 1° $a_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ $\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$. $\therefore R=1$ 收敛区间为$(-1,1)$

$x=-1$时, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(-1)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n-1}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{n}$ 发散, $x=1$时, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 收敛.

$\therefore$ 其收敛域为 $(-1,1]$

2° 设 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ $\quad x\in(-1,1]$. $\quad S(0)=0$

则 $S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\right]'=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}(-x)^{n-1}=\frac{1}{1+x}$ $\quad x\in(-1,1)$

$\therefore S(x)=\int_0^x\frac{1}{1+x}dx+S(0)=\int_0^x\frac{1}{1+x}dx=\ln(1+x)$ $\quad x\in(-1,1)$.

$x=1$ 时. $S(1)=\lim_{x\to1^-}S(x)=\ln2$

$\therefore S(x)=\ln(1+x)$ $\quad x\in(-1,1]$. 即 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=\ln(1+x)$ $\quad x\in(-1,1]$.

四.应用题.

17.求 $z=x^2+y^2+5$ 在条件 $x+y=1$ 下的极值,并说明是极小值还是极大值.

解: 1° 令 $L(x,y,\lambda)=x^2+y^2+5+\lambda(x+y-1)$.

$$\begin{cases}L_x'=2x+\lambda=0\\L_y'=2y+\lambda=0\\L_\lambda'=x+y-1=0\end{cases}$$

$\Rightarrow x=y$ 代入 $x+y-1=0$. 得唯一驻点 $x=y=\frac{1}{2}$.

$\therefore$ 可能极值点为 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

2° 判别 (此处无实际意义,仍用极值的充分条件判定). 转为一元函数较简便.

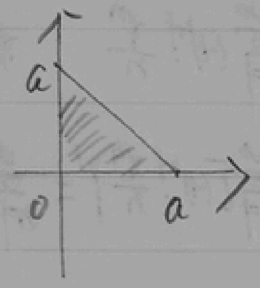
$z=x^2+y^2+5=x^2+(1-x)^2+5=2x^2-2x+6$

$z_x'=4x-2$, $z_{xx}''=4>0$.

$\therefore z(\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+5=\frac{11}{2}$ 为极小值. 无极大值.

18. 有一三角形薄片，顶点分别为$(0,0)$，$(a,0)$，$(0,a)$，其上各点密度为$\rho(x,y)=x+y$. 求其质量m.

解：$m=\iint\limits_D \rho(x,y)d\sigma=\iint\limits_D (x+y)d\sigma$. D为右图三角形



$=\int_0^a dx\int_0^{a-x}(x+y)dy=\int_0^a\left[x(a-x)+\frac{(a-x)^2}{2}\right]dx$

$=\int_0^a \frac{a-x}{2}(2x+a-x)dx=\int_0^a \frac{a^2-x^2}{2}dx$

$=\left(\frac{a^2}{2}x-\frac{x^3}{6}\right)\Big|_0^a=\frac{a^3}{2}-\frac{a^3}{6}=\frac{a^3}{3}$

五.证明题.

19. 求证：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\ln(1+n)}$ 条件收敛.

（即证 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{\ln(1+n)}\right|$ 发散，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\ln(1+n)}$ 收敛）

证：1° $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{\ln(1+n)}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(1+n)}$

而$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\ln(1+n)}}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\ln(1+n)}=+\infty$ （$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{1}{1+x}}=+\infty$）

又$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，$\therefore\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(1+n)}$ 发散

2° 对于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\ln(1+n)}$，$u_n=\frac{1}{\ln(1+n)}$

① $u_{n+1}=\frac{1}{\ln(2+n)}<\frac{1}{\ln(1+n)}=u_n$. ② $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(1+n)}=0$

由Leibniz公式，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\ln(1+n)}$ 收敛

$\therefore\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\ln(1+n)}$ 为条件收敛.