19-20 A(一)期中

一. 选择题

1. $\{x_n\}$ 为数列. 下列不正确的是 (C)

A. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1}=a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$ 存在. ✓

B. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$ 存在. 则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1}=a$ ✓

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1}=a$

C. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n}=\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n+1}=a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$ 存在. ×

D. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n}=\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n+1}=a$ 存在. ✓ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a \Leftrightarrow \{x_n\}$ 任一子列收敛到 a.

C: 取 x_n: $0,1,0,0,2,0,0,3,0,\cdots,0,n,0,\cdots$

即 $x_{3n}=x_{3n+1}=0$. $x_{3n+2}=n$. $n=0,1,2,\cdots$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n}=\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n+1}=0$. 但 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 不存在.

事实上, $\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n}=\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n+1}=\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n+2}=a \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$

2. $x\to 0$ 时. 函数 $f(x)=\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$ 是 (D)

A. 无穷小. B. 无穷大. C. 有界, 但不是无穷小. D. 无界, 但不是无穷大.

取 $x_n^1=\frac{1}{2n\pi}$, 则 $f(x_n^1)=(2n\pi)^2\cdot\sin 2n\pi=0$. $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n^1)=0$

$x_n^2=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$, $f(x_n^2)=(2n\pi+\frac{\pi}{2})^2\cdot\sin(2n\pi+\frac{\pi}{2})=(2n\pi+\frac{\pi}{2})^2$. $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n^2)=\infty$

$\therefore$ $f(x)$ 无界, 但非无穷大.

3. $f(x)=\begin{cases}(x-1)\arctan\frac{1}{x^2-1} & x\neq\pm1\\ 0 & x=\pm1\end{cases}$, 则 $f(x)$ (B)

A. 在 $x=-1$ 连续, $x=1$ 处间断.　　B. 在 $x=-1$ 处间断, $x=1$ 处连续.

C. 在 $x=-1$, $x=1$ 处都连续.　　D. 在 $x=-1$, $x=1$ 处都间断

$\lim\limits_{x\to1} f(x) = \lim\limits_{x\to1} (x+1)\cdot \arctan\frac{1}{x^2-1} = 0.$ $\left(\lim\limits_{x\to1}(x-1)=0,\ \left|\arctan\frac{1}{x^2-1}\right| < \frac{\pi}{2}\ 有界\right)$

$\lim\limits_{x\to-1} f(x) = \lim\limits_{x\to-1}(x-1)\cdot\arctan\frac{1}{x^2-1}$ 不存在.

$f(-1^-) = \lim\limits_{x\to-1}(x-1)\cdot\lim\limits_{x\to-1^-}\arctan\frac{1}{x^2-1} = -2\cdot\frac{\pi}{2} = -\pi$, $f(-1^+) = -2\cdot(-\frac{\pi}{2}) = \pi$

$\therefore \lim\limits_{x\to1} f(x) = f(1)$ $x=1$ 处连续. $f(-1^-) \neq f(-1^+)$. $x=-1$ 为跳跃间断点.

4. $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续. 下列错误的是 (D)　　$f(x)$ $x=0$ 连续 $\Rightarrow \lim\limits_{x\to0} f(x) = f(0)$

A. $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$ 存在. 则 $f(0)=0$. ✓　① 设 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x} = A$. 则 $\lim\limits_{x\to0} f(x) = \lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}\cdot x = 0$, 则 $f(0)=0$. A✓

B. $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在. 则 $f(0)=0$. ✓　且 $f'(0) = \lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x} = A$　C✓.

C. $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$ 存在. 则 $f'(0)$ 存在. ✓　② 若 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)+f(-x)}{x} = A$. 则 $\lim\limits_{x\to0}[f(x)+f(-x)] = A\cdot0 = 0$.

D. $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在. 则 $f'(0)$ 存在. ✗　即 $f(0)+f(0)=0 \Rightarrow f(0)=0$　B✓.

③ 取 $f(x)=|x|$. 则 $f(x)-f(-x)=0$. $\therefore \lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(-x)}{x} = 0$. 但 $f'(0)$ 不存在　D✗

5. 已知 $f(x)$ 有任意阶导数, 且 $f'(x) = [f(x)]^2$, 则当 n 为大于2的正整数时, $f^{(n)}(x)$ 为 (C)

A. $[f(x)]^{2n}$.　B. $n\cdot[f(x)]^{n+1}$　C. $n![f(x)]^{n+1}$　D. $n![f(x)]^{2n}$

$f'(x)=[f(x)]^2$，则 $f''(x)=[f^2(x)]'=2f(x)\cdot f'(x)=2![f(x)]^3$

$\therefore f'''(x)=[2\cdot f^3(x)]'=2\cdot 3\cdot f^2(x)\cdot f'(x)=3![f(x)]^4$

…… 故 $f^{(n)}(x)=n![f(x)]^{n+1}$

二. 填空题

6. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 是 k 个正数，则 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n)^{\frac{1}{n}}=$ $\underline{\max(a_1,a_2,\cdots,a_k)}$

$\max(a_1,\cdots,a_k)\le(a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n)^{\frac{1}{n}}\le\sqrt[n]{k}\cdot\max(a_1,a_2,\cdots,a_k)$

且 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{k}\cdot\max(a_1,\cdots,a_k)=\max(a_1,\cdots,a_k)$. $\therefore$ 原式 $=\max(a_1,a_2,\cdots,a_k)$

7. 已知 $x\to0$ 时，$(1-ax^2)^{\frac{1}{2}}-1$ 与 $\ln(\cos x)$ 是等价的无穷小，则 $a=$ $\underline{1}$

已知 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1-ax^2)^{\frac{1}{2}}-1}{\ln(\cos x)}=1$. 即 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1-ax^2)^{\frac{1}{2}}-1}{\ln(1-2\sin^2\frac{x}{2})}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}\cdot(-ax^2)}{-2\sin^2\frac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\frac{a}{2}x^2}{-2(\frac{x}{2})^2}=1$

$\therefore\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\frac{a}{2}x^2}{-\frac{x^2}{4}\cdot2}=\lim\limits_{x\to0}a=a=1$.

或洛必达法则：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1-ax^2)^{\frac{1}{2}}-1}{\ln(\cos x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}\cdot(ax^2)}{\ln(\cos x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-ax}{\frac{-\sin x}{\cos x}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{ax}{\tan x}=a=1$

8. 若 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}+\lambda[x]\right)$ 存在，$[x]$ 为不超过 x 的最大整数，则 $\lambda=$ $\underline{1}$

Date

$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}+\lambda[x]\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}+0\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=0$ $\left(x\to 0^+,\ \frac{1}{x}\to+\infty,\ e^{\frac{1}{x}}\to+\infty\right)$

$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}+\lambda[x]\right)=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}-\lambda\right)=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}-\lambda=\frac{1}{1+0}-\lambda=1-\lambda$

$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}+\lambda[x]\right)$ 存在, $\therefore$ $0=1-\lambda$, 即 $\lambda=1$.

9. 已知 $f(x)=(x-1)(x-2)\cdots(x-2020)$, 则 $f'(1)=$ <u>$-2019!$</u>

$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-2)\cdots(x-2020)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x-2)(x-3)\cdots(x-2020)=(-1)(-2)\cdots(-2019)=-2019!$

10. 若 $f(t)=\lim_{x\to\infty}t\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)^{tx}$, 则 $df(t)=$ <u>$(t+1)e^t\,dt$</u>

$f(t)=\lim_{x\to\infty}t\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)^{tx}=\lim_{x\to\infty}t\cdot\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{t}=t\cdot e^{t}$

$\therefore f'(t)=e^{t}+te^{t}=(t+1)e^{t}$

$df(t)=(t+1)e^{t}\,dt$

Campus