安徽大学 2011 — 2012 学年第 1 学期

《 数理方法 》考试试卷（A 卷）

（闭卷　　时间 120 分钟）

院/系__________年级__________专业__________姓名__________学号__________

题　号	一	二	三	四	总分
得　分					

一、填空题（每空 2 分，共 26 分）

得 分	

1. 计算 $\sqrt{-1+i\sqrt{3}}=$______________。

2. 计算复指数函数 $e^{-3+i\frac{\pi}{4}}=$________________。

3. 设 C 为逆时针方向沿圆周 $|z|=1$ 的闭合曲线，则回路积分 $\oint_C \frac{1}{z}dz=$__________，

若 C 为逆时针方向沿圆周 $|z-2|=1$ 的闭合曲线，则回路积分 $\oint_C \frac{1}{z}dz=$__________。

4. 泰勒级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}$ 的收敛半径为：__________， 收敛圆为：__________。

5. 将函数 $f(z)=\frac{e^z}{z^2}$ 以 $z_0=0$ 为中心展开为罗朗级数：________________，且 $f(z)=\frac{e^z}{z^2}$

在 $z_0=0$ 点的留数 $\mathrm{Res}[\frac{e^z}{z^2},0]=$__________。

6. 函数 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\le\tau\\ 0, & |x|>\tau\end{cases}$， $\tau>0$ 的傅里叶变换为：________________。

7. 求拉普拉斯变换： $L[1]=$__________， $L[\sin 2x]=$______________。

8. 对于本征值问题 $\begin{cases}X''(x)+\lambda X(x)=0, & x\in(0,l)\\ X(0)=X(l)=0\end{cases}$

其本征值为：______________________，本征函数为：______________________。

二、简答题（第 1 题 6 分，第 2 题 8 分，共 14 分）

得 分	

1. 试叙述复变函数 $w = f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ 在点 $z = x + iy$ 处可导的充要条件。

2. 二阶线性常微分方程的标准形式为：$\dfrac{d^2w(z)}{dz^2} + p(z)\dfrac{dw(z)}{dz} + q(z)w(z) = 0$，

试简述方程的常点和正则奇点，并写出常点和正则奇点邻域内方程级数解的形式。

三、证明题（共 10 分）

得 分	

已知：拉普拉斯变换 $\bar{f}(s)=L[f(x)]=\int_0^{\infty} f(x)e^{-sx}dx$， $\bar{g}(s)=L[g(x)]=\int_0^{\infty} g(x)e^{-sx}dx$；

卷积 $f(x)*g(x)=\int_0^{x} f(x-\tau)g(\tau)d\tau$，

试证明卷积定理： $L[f(x)*g(x)]=\bar{f}(s)\cdot\bar{g}(s)$

四、计算题（第 1、2，3 题各 8 分，第 4 题 14 分，第 5 题 12 分，共 50 分）

得 分	

1. 试计算回路积分 $\oint_{|z|=1}\frac{\cos z}{z^3}dz$ 。

2. 一个介质球面上的静电势分布为$u(\theta)=2+2\cos^2\theta$，将$u(\theta)$用勒让德多项式$P_n(\cos\theta)$展开，已知勒让德多项式：$P_n(x)=\dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$。

3. 试将方程$x^2 y''(x)+xy'(x)+(4x^2-\dfrac{9}{25})y(x)=0$的解用第一类贝塞尔函数表示出来。

4. 用分离变量法求解如下长为l的细杆导热的定解问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad (0 < x < l, t > 0) \\ u(x,t)\big|_{x=0} = 0, \quad u(x,t)\big|_{x=l} = 0, \quad (t > 0) \\ u(x,t)\big|_{t=0} = \dfrac{x(l-x)}{l^2}, \quad (0 < x < l) \end{cases}$$

其中$u(x,t)$为细杆上的温度分布。

5. 已知拉普拉斯变换的微分性质：$L[f^{(2)}(x)] = s^2\bar{f}(s) - sf(0) - f'(0)$，

试用拉普拉斯变换法求如下微分方程的解。

$$\begin{cases} y''(x) + a^2 y(x) = f(x), \quad a > 0, x > 0 \\ y(x)\big|_{x=0} = y(0), \quad y'(x)\big|_{x=0} = y'(0) \end{cases}$$