院/系________ 年级________ 专业________ 姓名________ 学号________

答题勿超装订线

装 订 线

安徽大学 2015—2016 学年第 1 学期

《数理方法》考试试卷（A 卷）

（闭卷　　时间 120 分钟）

考场登记表序号__________

题 号	一	二	三	四	总分
得 分					
阅卷人					

一、填空题（每空 2 分, 共 20 分）

得 分	

1. 复数 $z=-1+i\sqrt{3}$ 的三角表达式为：____________________。

2. 计算 $\cos(1+i)$ 的值为：______________________。

3. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{2^n}(z-1)^n$ 的收敛半径 R＝____________________。

4. 计算留数 $\mathrm{Re}\,s[\frac{1}{e^z-1},0]=$____________________。

5. 函数 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\le\tau\\ 0, & |x|>\tau\end{cases}$，$\tau>0$ 的傅里叶变换为：____________________。

6. 求拉普拉斯变换 $L[1]=$_________________，　$L[\sin(2t)]=$_________________。

7. $(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})^2+(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})^2=\sin x\cos y$ 为二阶，__________，__________ 偏微分方程。(填**线性**或**非线性，齐次或非齐次**)

8. 在分离变量法过程中得到函数 $u_n(x,t)=E_n\cos(\omega_n t-\theta_n)\sin(\frac{n\pi}{l}x)$ 代表驻波，其振幅依赖于点 x 的位置为：_________________。

二、计算题

（第 1, 2, 4 题每题 10 分，第 3 题 12 分，第 5 题 18 分, 共 60 分）

得 分	

1. 求函数 $f(t)=te^{2t}$ 的拉普拉斯变换。

2. 计算积分：$I=\oint_{|z|=3}\frac{e^{2z}}{(z-1)^{3}}dz$

答题勿超装订线

3. 已知函数 $f(z)=\dfrac{z}{(z-1)(z-2)}$，分别在(1)$|z|<1$；(2)$1<|z|<2$ 内把 $f(z)$ 展开为罗朗级数。

4. 求解初值问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \\ u(x,t)\big|_{t=0}=\cos x \qquad (-\infty<x<\infty, t>0, a>0) \\ \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0}=\sin x \end{cases}$$

5. 用**分离变量法**求解如下长为l两端固定均匀弦的微小横向振动的定解问题。

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad (0 < x < l, t > 0) \\
u(x,t)\big|_{x=0} = u(x,t)\big|_{x=l} = 0 \qquad (t > 0) \\
u(x,t)\big|_{t=0} = \begin{cases} kx, & (0 \le x \le \dfrac{l}{2}) \\ k(l-x), & (\dfrac{l}{2} < x \le l) \end{cases} \\
\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}\big|_{t=0} = 0
\end{cases}
$$

答题勿超装订线

线

订

装

三、证明题（10 分）

得　分	

已知函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的傅里叶变换分别为 $\bar{f}(\omega)=F[f(x)]$ 和 $\bar{g}(\omega)=F[g(x)]$，卷积的定义为 $f(x)*g(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)g(x-\tau)d\tau$，试证明傅里叶变换的卷积定理：

$$F[f(x)*g(x)]=\bar{f}(\omega)\cdot\bar{g}(\omega)$$

四、简答题（10 分）

得　分	

已知二阶线性变系数常微分方程的标准形式为 $y''(x)+p(x)y'(x)+q(x)y(x)=0$

(1) 试写出 n 阶贝塞尔方程的标准形式；

(2) 针对 n 阶贝塞尔方程写出其幂级数形式的解（不要求求解）。