安徽大学 2016—2017 学年第一学期

《高数数学 A（一）、B（一）》(A 卷)考试试题参考答案及评分

一、 填空题（每小题 2 分，共 10 分）

1、$\lambda=-1$　2、$x=1$　3、小　4、1　5、23040（也可写成 $2^9C_{10}^2$）

二、单选题（每小题 2 分，共 10 分）

6、C　7、D　8、B　9、A　10、B

三、计算题（每小题 8 分，共 48 分）

11、解. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)\sqrt{n}$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right)-\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\right)\sqrt{n}$$ ……4 分

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}-\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0.$$ ……8 分

12、解. 由洛必达法则，知

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x\left(f(1)-f(1-t)\right)dt}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1,$$ ……5 分

所以 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(1-x)-f(1)}{-x}=-2$，即 $f'(1)=-2$，

因此曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y-f(1)=-2(x-1)$. ……8 分

13、解. 方法一：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)-x}{x^3}=\dfrac{-1}{6}.$ ……8 分

方法二：由洛必达法则和等价无穷小替换，有

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{3x^2}=\frac{-1}{6}.$$ ……8 分

14、解. 对方程两端关于 x 求导数，有

$x+2yy'=0$，即有

$y'=\dfrac{-x}{2y}$.　(1) ……4 分

再对 (1) 关于 x 求导数，有

$$y''=-\frac{2y-2y'x}{4y^2}=-\frac{x^2+2y^2}{4y^3}.$$ ……8 分

$=-\dfrac{1}{2y^3}$

15、解. $I=\displaystyle\int\frac{dx}{\sin^2x\cos x}=\int\frac{(\sin^2x+\cos^2x)dx}{\sin^2x\cos x}=\int\frac{dx}{\cos x}+\int\frac{\cos x dx}{\sin^2x}$

$$=\int\frac{\cos x dx}{\cos^2x}+\int\frac{d\sin x}{\sin^2x}=-\int\frac{d\sin x}{1-\sin^2x}-\frac{1}{\sin x}$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right|-\frac{1}{\sin x}+c$$ ……8 分

其中 c 为任意常数.

16、解.利用被积函数的奇偶性，有

$$I=0+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\min\left\{\frac{1}{2},x^2\right\}dx=2\left(\int_0^{\frac{\sqrt2}{2}}x^2dx+\int_{\frac{\sqrt2}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}dx\right)$$

$$=\frac{3\pi-2\sqrt2}{6}$$ ……8 分

四、应用题（每小题 10 分，共 20 分）

17、解.由题意知，$V_1=\pi\int_a^1 16x^4dx$，$V_2=\pi\int_0^{4a^2}\frac{y}{4}dy$ ……4 分

$=\frac{16}{5}\pi(1-a^5)$　$V_2=4\pi a^4-\pi\int_0^{4a^2}\frac{y}{4}dy$

所以，有 $\dfrac{d(V_1+V_2)}{da}=-16\pi a^4+8\pi a^3$. 令 $-16\pi a^4+8\pi a^3=0$，$=2\pi\int_0^a x\cdot 4x^2dx=2\pi a^4$

所以有唯一的驻点 $a=\dfrac{1}{2}$. ……8 分

由问题的实际意义可知，当 $a=\dfrac{1}{2}$ 时，有 V_1+V_2 最大. ……10 分

18、解.依题意知，特征方程为 $\lambda^2+4\lambda+4=0$，

解得 $\lambda_1=\lambda_2=-2$，

故通解为 $x(t)=c_1e^{-2t}+c_2te^{-2t}$，其中 c_1,c_2 为两个互相独立的任意常数.

由初始条件,解得 $c_1=2,c_2=0$，所以特解为 $x(t)=2e^{-2t}$. ……8 分

计算 $\int_0^{+\infty}x(t)dt=\int_0^{+\infty}2e^{-2t}dt=1$. ……10 分

五、证明题（每小题 6 分，共 12 分）

19、解.

方法一：由于函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上二阶导数存在，所以由泰勒公式知，

$\exists\xi\in(0,x)$ 或 $(x,0)$，有 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(\xi)}{2!}x^2$. ……4 分

进一步，当 $x\neq0$ 时，有 $f(x)>x$. ……6 分

方法二：构造辅助函数 $F(x)=f(x)-x$，利用函数的单调性证明之给相应的分.

20、解.构造辅助函数 $F(x)=e^{-2x}f(x)$，显然有 $F(a)=F(b)=0$，由题意知 $F(x)$ 满足罗尔定理条件. 所以 $\exists\xi\in(a,b)$，有 $F'(\xi)=0$. ……4 分

而 $F'(x)=-2e^{-2x}f(x)+e^{-2x}f'(x)$，故结论正确. ……6 分