安徽大学 2018—2019 学年第二学期

《高等数学 A（二）》期中考试参考答案与评分标准

一、填空题（本题共五小题，每小题 3 分，共 15 分）

1、$\underline{\dfrac{\pi}{4}}$；2、$\underline{-\dfrac{1}{6}}$；3、$\underline{\mathrm{d}x-2\mathrm{d}y+\mathrm{d}z}$；4、$\underline{y-z=0}$；5、$\underline{\sqrt{2}}$.

二、选择题（本题共五小题，每小题 3 分，共 15 分）

6、C；7、A；8、B；9、D；10、C.

三、计算题（本题共六小题，每小题 8 分，共 48 分）

11. 解. 设点 P 的坐标为 (x,y,z).

则曲面 S 在点 P 处的法向量为 $\vec{n}=(4x,6y,-1)$. ……………………………（3 分）

由题设，$\vec{n}//L$，且 L 的方向向量为 $\vec{v}=(4,6,1)$. 故 $x=-1,y=-1$，且 $z=6$.

进一步，S 在点 P 的法线方程为 $\dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y+1}{6}=z-6$. ………………………（8 分）

12. 解. $\dfrac{\partial z}{\partial y}=e^{-x}(-\dfrac{x}{y^2})\cos\dfrac{x}{y}$ ……………………………………（3 分）

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(2,\frac{1}{\pi})}=\left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_{x=2}\left(\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{y=\frac{1}{\pi}}\right)=\left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_{x=2}(-\pi^2xe^{-x}\cos(\pi x))$$

$$=-\pi^2(e^{-x}\cos(\pi x)-xe^{-x}\cos(\pi x)-\pi xe^{-x}\sin(\pi x))|_{x=2}$$

$$=\pi^2e^{-2}$$ ……………………………………………………（8 分）

13. 解. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2xf_1'+ye^{xy}f_2'$ ，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=2yf_1'+xe^{xy}f_2'$ ………………………（4 分）

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2x(2yf_{11}''+xe^{xy}f_{12}'')+(e^{xy}+xye^{xy})f_2'+ye^{xy}(2yf_{21}''+xe^{xy}f_{22}'')$$

$$=(1+xy)e^{xy}f_2'+4xyf_{11}''+2e^{xy}(x^2+y^2)f_{12}''+xye^{2xy}f_{22}''$$ …………………………（8 分）

14. 解. 方程两边对 x 求导得 $\frac{\partial z}{\partial x}=e^{2x-3z}(2-3\frac{\partial z}{\partial x})$ ，

故 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2e^{2x-3z}}{1+3e^{2x-3z}}$. ....（4 分）

方程两边对 y 求导得 $\frac{\partial z}{\partial y}=e^{2x-3z}(-3\frac{\partial z}{\partial y})+2$,

故 $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2}{1+3e^{2x-3z}}$ . ...（8 分）

15. 解. 对 x 求导得

$1=e^u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial x}\sin v+u(\cos v)\frac{\partial v}{\partial x}$,

$0=e^u\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial x}\cos v+u(\sin v)\frac{\partial v}{\partial x}$. ....（4 分）

于是，$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\sin v}{e^u(\sin v-\cos v)+1}$ ，$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\cos v-e^u}{u[e^u(\sin v-\cos v)+1]}$ ....（8 分）

16. 解. 特征方程 $\lambda^2-6\lambda+9=0$ 有两个相等的实根 $\lambda_1=\lambda_2=3$. 故对应齐次方程组 $y''-6y'+9y=0$ 的通解为 $\overline{Y}=(C_1+C_2x)e^{3x}$ . ...（4 分）

又设原方程的特解为 $y^*=ax+b$ ，代入原方程得 $-6a+9(ax+b)=18x-3$ ，比较系数得 $a=2,b=1$.因此原方程通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{3x}+2x+1$, 其中 C_1,C_2 为任意常数.（8 分）

四、应用题（本题共 10 分）

17. 解. 构造 Lagrange 函数 $L(x,y,\lambda)=xy+\lambda(2x^2+3y^2-6)$.

令 $L_x=y+4\lambda x=0$ ，$L_y=x+6\lambda y=0$ ，$L_\lambda=2x^2+3y^2-6=0$ . ..….….…（5 分）

解得 $y=1,x=\frac{\sqrt{6}}{2},\lambda=-\frac{1}{2\sqrt{6}}$. 此时 $z=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

又因为 $z=xy$ 在条件 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$（$x,y\geq 0$）下必有最大值，且当 $x=0$ 或 $y=0$ 时，$z=0$. 故 $z=xy$ 在 $x=\frac{\sqrt{6}}{2},y=1$ 处取到最大值 $z=\frac{\sqrt{6}}{2}$ . ..….….….…（10 分）

五、证明题（本题共两小题，每小题 6 分，共 12 分）

18. 证明. 由定义，

$$f_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1,$$

$$f_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0 \text{. ....} \quad (3\text{ 分})$$

又因为 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(\dfrac{x^3}{x^2+y^2}-x\right)$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{-xy^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$$

令 $y=x$，则 $\lim\limits_{\substack{x\to 0^+\\ y=x}}\dfrac{-xy^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}=-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$. 因此极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{x^2+y^2}\neq 0$.

从而 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不可微. ....（6 分）

19. 证明：设 $z=f(u)$, $u=e^x\sin y$,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(u)\frac{\partial u}{\partial x}=f'(u)e^x\sin y, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=f'(u)\frac{\partial u}{\partial y}=f'(u)e^x\cos y \text{. ....} \quad (3\text{ 分})$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''(u)e^{2x}\sin^2 y+f'(u)e^x\sin y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''(u)e^{2x}\cos^2 y-f'(u)e^x\sin y.$$

故 $e^{2x}f(u)=e^{2x}z=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''(u)e^{2x}$，即 $f''(u)=f(u)$ ....（6 分）