21-22 A-期中

一. 选择题

1. 下列命题中错误的是(D)

A. 若$\{a_n\}$收敛, 则$\{a_n\}$有界. ✓ (有界性)

B. 若$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=1$, 则当$n$充分大时, $a_n>\frac{1}{2}$ ✓ (保序性)

取$\varepsilon=\frac{1}{2}>0$. 则$n$充分大时($\exists N\in Z^+$, $n>N$时), 有$|a_n-1|<\frac{1}{2}$, 即$\frac{1}{2}<a_n<\frac{3}{2}$

C. $\{a_n\}$收敛$\Leftrightarrow\{a_{2n}\}$, $\{a_{2n-1}\}$均收敛 ✓ (数列与子列收敛的关系)

D. $\{a_n\}$收敛$\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$ ×

如: $a_n=0$, 则$\{a_n\}$收敛, 但$\frac{a_{n+1}}{a_n}$不存在.

(或$a_n=n$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$, 但$\{a_n\}$发散)

2. $f(x)=\dfrac{x^2-x}{|x|(x^2-1)}$有(B)个第一类间断点

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

$f(x)$定义域: $x\neq0$且$x\neq\pm1$

① $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x(x-1)}{-x(x^2-1)}=\infty$　$x=-1$为第二类间断点.

② $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x(x-1)}{x(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$　$x=1$为可去间断点

③ $f(0^-)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x(x-1)}{-x(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1}{-(x+1)}=-1$, $f(0^+)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x(x-1)}{x(x-1)(x+1)}=1$　$x=0$为跳跃间断点

第一类

Date

3. 设 $y=f(x)$ 有 $f'(x_0)=\frac{1}{2}$, 则当 $\Delta x\to 0$ 时, $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处增量 Δy 是(A)

A. 与 Δx 同阶的无穷小.　　B. 与 Δx 等价的无穷小.

C. 比 Δx 高阶的无穷小.　　D. 比 Δx 低阶的无穷小.

$f'(x_0)=\frac{1}{2}$, 则 $\Delta x\to 0$ 时. $\Delta y=f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x)=\frac{1}{2}\Delta x+o(\Delta x)$

$\therefore \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)=\frac{1}{2}$. 即 Δy 是与 Δx 同阶的无穷小.

(注: 若 1° $f'(x_0)=1$. 则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=1$. 有 $\Delta y\sim\Delta x\ (\Delta x\to 0)$

2° $f'(x_0)=0$, 则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=0$. 此时 $\Delta y=o(\Delta x)\ (\Delta x\to 0)$).

4. 设 $f(x)$ 在 $(a.b)$ 内连续. 则 $f(x)$ $(a.b)$ 内(D)

A. 有界 ×　如: $f(x)=\frac{1}{x}$ (0.1)

B. 无界. ×　如: $f(x)=x$ (0.1)

C. 存在最值 ×. 如: $f(x)=x$ (0.1)

D. 不一定有界 ✓

5. $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 且 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h^2)}{h^2}=1$. 下列正确的是(B)

A. $f(0)=0$, $f'(0)=1$.　B. $f(0)=0$, $f'(0)$ 不一定存在.

C. $f(0)=1$, $f'(0)=1$.　D. $f(0)=1$, $f'(0)$ 不一定存在.

Campus

Date

二.填空题

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1}{x^2+x+1}(\sin x+\cos x)=$ <u>0</u>

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1}{x^2+x+1}=0$，且 $|\sin x+\cos x|\le 2$． ∴原式 $=0$ （无穷小×有界量→无穷小）

7. 若 $x\to 0$ 时，$\sqrt{1+ax^2}-1$ 与 $1-\cos x$ 是等价无穷小，则 $a=$ <u>1</u>

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+ax^2}-1}{1-\cos x}=1=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\cdot ax^2}{\frac{1}{2}x^2}=a$．

8. 若 $f(x)=\begin{cases}\frac{1-e^{2x}}{\arcsin x} & x>0\\ ae^x & x\le 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$ <u>-2</u>

$f(0^-)=f(0^+)=f(0)=a$

$\Rightarrow a=-2$

而 $f(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1-e^{2x}}{\arcsin x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{-2x}{x}=-2$

9. 若 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t-\ln(1+t)\\ y=t^3+t^2\end{cases}$ 所确定，则 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=$ <u>2</u>

$\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{3t^2+2t}{1-\frac{1}{1+t}}=\frac{t(3t+2)}{\frac{t}{1+t}}=(1+t)\cdot(3t+2)$．

$x=0$ 时，$t-\ln(1+t)=0\Rightarrow t=0$．

$\therefore\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=(1+0)\cdot(3\cdot 0+2)=2$

KOKUYO

10. $y=f(\ln x)\cdot e^x$，则微分 $dy=$ $\underline{e^x(\frac{1}{x}\cdot f'(\ln x)+f(\ln x))dx}$

$y=f(\ln x)\cdot e^x$

$y'=f'(\ln x)\cdot\frac{1}{x}\cdot e^x+f(\ln x)\cdot e^x$

$\therefore dy=y'\cdot dx$

5. ① $f(x)$ $x=0$ 连续，则 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$

$\lim\limits_{h\to0}\frac{f(h^2)}{h^2}=1 \Rightarrow \lim\limits_{h\to0}f(h^2)=0=\lim\limits_{t\to0}f(t)=f(0)$. 即 $f(0)=0$.

②. $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(h^2)}{h^2}=\lim\limits_{h^2\to0}\frac{f(h^2)-f(0)}{h^2-0}=1$

$\xlongequal[t\to0^+]{令t=h^2}\lim\limits_{t\to0^+}\frac{f(t)-f(0)}{t-0}=f'_+(0)=1$.

但 $f'_-(0)$ 无法确定！