安徽大学 2021—2022 学年第 一 学期

《 复变函数与数理方程 》期中考试试卷

（闭卷　　时间 120 分钟）

考场登记表序号__________

题 号	一	二	三	四	总分
得 分					
阅卷人					

一、单选题（每小题 2 分，共 30 分）

得 分	

1. 下列命题正确的是（　　）

A. 0 的辐角为 0；B. $\frac{1}{j}\overline{z}=\overline{jz}$；C. 仅有一个数 z，使 $z=-\frac{1}{z}$；D. $|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|$。

2. 下列等式成立的是（　　）

A. $-1=e^{j\pi}$；　B. $1=e^{-j\pi}$；　C. $1=e^{j\pi}$；　D. $-1=e^{j\frac{\pi}{2}}$。

3. 设 $z=\sqrt{3}+j$，$w=z^2$，则（　　）

A. $\arg w=\frac{\pi}{3}$；　B. $\arg w=\frac{\pi}{6}$；　C. $\arg w=-\frac{\pi}{6}$；　D. $\arg w=-\frac{\pi}{3}$。

4. 下列点集不是实轴的是（　　）

A. $\mathrm{Im}\,z=0$；　B. $z-\overline{z}=0$；　C. $|z-j|=|z+j|$；D. $z+\overline{z}=0$。

5. $2\sin j=$（　　）

A. $(e^{-1}-e)j$；　B. $(e^{-1}+e)j$；　C. $(e-e^{-1})j$；　D. $e+e^{-1}$。

6. $\ln(2j)=$（　　）

A. $\ln 2$；　B. $\ln 2+\frac{\pi}{2}j$；　C. $\ln 2-\frac{\pi}{2}j$；　D. $\ln 2+j\mathrm{Arg}(2j)$。

7. 下列说法不正确的是（　　）

A. $e^z\neq 0\ (\forall z\in C)$；　B. $e^{z_1}\cdot e^{z_2}=e^{z_1+z_2}\ (\forall z_1,z_2\in C)$；

C. $\lim\limits_{z\to\infty}e^z$ 不存在；　D. e^z 是以 $2k\pi$ 为周期的周期函数（k 为非零整数）。

8. 下列说法正确的是（　　）

A. $\mathrm{Ln}z^2=2\mathrm{Ln}z$；　B. 除去原点和负实轴，$\mathrm{Ln}z$ 在复平面内处处解析；

C. $|\sin z|<1$；　D. $\cosh(jz)=\cos z$。

9. 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{2^n}z^n$ 的收敛半径为（　　）

A. 1；　B. 2；　C. 4；　D. $+\infty$。

10. 函数 $f(z)=|z|^2$ 在复平面上（　　）

A. 处处不连续；　　　B. 处处连续，处处不可导；

C. 处处连续，仅在点 $z=0$ 可导；　　　D. 处处连续，仅在点 $z=0$ 解析。

11. 设 C 为正向圆周 $|z|=1$，$f(z)$ 是解析函数，$g(z)=\oint_C \frac{\zeta f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta$，则 $g'(0)=$（　　）

A. $-2j\pi f'(0)$；　B. $-2j\pi f(0)$；　C. $2j\pi f(0)$；　D. $2j\pi f'(0)$。

12. 设 C 是正向圆周 $|z|=1$，则 $\oint_C e^z \mathrm{d}z=$（　　）

A. 0；　B. 1；　C. 2π；　D. $2\pi j$。

13. 以 $z=0$ 为本性奇点的函数是（　　）

A. $\frac{\sin z}{z}$；　B. $\cancel{\frac{1}{\sin z}}$；$\sin\frac{1}{z}$　C. $\frac{1-\cos z}{z}$；　D. $\frac{1}{z(z-1)}$。

14. $z=2\pi j$ 是函数 $\frac{z}{e^z+e^{-z}-2}$ 的极点，其阶数为（　　）

A. 一阶极点；　B. 二阶极点；　C. 三阶极点；　D. 四阶极点。

15. $\mathrm{Res}\left[\frac{e^{jz}}{1+z^2}, j\right]=$（　　）

A. $-\frac{je}{2}$；　B. $-\frac{j}{2e}$；　C. $\frac{j}{2e}$；　D. $\frac{je}{2}$。

得 分	

二、计算题（每小题 10 分，共 50 分）

16. 求 $\sqrt[3]{-8}$。　$1+j\sqrt{3}$，-2，$1-j\sqrt{3}$

17. 求 $(1+j)^j$ 的所有值，并指出其主值。　$e^{-\frac{\pi}{4}}(\cos\ln\sqrt{2}+j\sin\ln\sqrt{2})$

18. 将函数 $f(z)=\frac{1}{(z-4)(z-3)}$ 在坐标原点处展开成泰勒级数，并求其收敛域。

$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3^{n+1}}-\frac{1}{4^{n+1}}\right)z^n$，$|z|<3$

19. 将函数 $f(z)=\frac{1}{(z-2)(z-3)}$ 在 $2<|z|<3$ 展开成罗朗级数。

$-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n$

20. 设 C 为正向圆周 $|z-2|=1$，求 $\oint_C \frac{e^z}{z(z-2)^2}\mathrm{d}z$。

$\frac{e^2}{2}\pi j$

得 分	

三、证明题（10 分）

21. 设 $f(z)=u(x,y)+jv(x,y)$ 在区域 D 内解析，且 $v=u^2$，试证明 $f(z)$ 是常数。

得 分	

四、综合题（10 分）

22. （1）求 $f(z)=\frac{e^{jz}}{z^2+4z+5}$ 在上半平面的所有孤立奇点；　$-2+j$

（2）求 $f(z)$ 在以上各孤立奇点的留数；　$\frac{1}{2je}(\cos 2-j\sin 2)$

（3）利用以上结果计算积分 $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x^2+4x+5}\mathrm{d}x$。　$-\frac{\pi}{e}\sin 2$