院/ 系 年级 专业 姓名 学号

答 题 勿 超 装 订 线

装 订 线

安徽大学 2013—2014 学年第 1 学期

《 数理方法》考试试卷（A 卷）

（闭卷　　时间 120 分钟）

考场登记表序号__________

题 号	一	二	三	四	总分
得 分					
阅卷人					

一、填空题（每小题 2 分, 共 20 分. ）

得 分	

1. 计算复指数函数 $e^{-1+j\frac{\pi}{4}} =$ ______________.

2. 若 C 为逆时针方向沿圆周 $|z-2|=1$ 的闭合曲线，则回路积分 $\oint_C \frac{1}{z^2}dz =$ __________.

3. 计算泰勒级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}$ 的收敛半径 R＝____________________.

4. 计算留数 $\mathrm{Re}\,s[\frac{e^z}{z^2},0] =$ _______________________.

5. 拉普拉斯变换 $L[x+1] =$ ________________.

6. $z=0$ 为 $\frac{\sin z}{z^4}$ 的___________阶极点. (填数字) .

7. $(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2 = \cos y$ 为二阶、非线性、________偏微分方程.(填齐次或非齐次)

8. 考虑具有统一边界条件的泊松方程问题，即定解问题为:

$$\begin{cases} \nabla^2 u(\mathbf{r}) = -f(\mathbf{r}) \\ [\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n}]|_S = \varphi(\mathbf{r}_S) \end{cases}$$

为求解此定解问题,可以定义一个与此问题相应的格林函数$G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)$,写出$G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)$满足的定解问题为：____________________________.

9. 计算广义 Fourier 变换$F[e^{j2x}]$____________________________.

10. 施图姆－刘维尔(S－L)型方程：$\frac{d}{dx}[p(x)\frac{dy}{dx}]-q(x)y+\lambda\rho(x)y=0$，$(a\le x\le b)$

其中：$p(x)$为核函数，$\rho(x)$为权函数，λ为分离变量过程中引入的参数.若取$p(x)=x$，$q(x)=\frac{n^2}{x}$，$\rho(x)=x$，$a=0$，$b=R$，$\lambda=1$，则上式可以转化为n阶贝塞尔方程。试写出n阶贝塞尔方程的**标准**形式：____.

二、简答题（每小题 10 分, 共 20 分）

得　分	

1. 二阶线性常微分方程的标准形式为：$\frac{d^2w(z)}{dz^2}+p(z)\frac{dw(z)}{dz}+q(z)w(z)=0$

试简述方程的**常点**和**正则奇点**，并写出常点和正则奇点邻域内方程**级数解**的形式.

2. 试写出 Fourier 正、逆变换表达式，并给出 Fourier 变换的性质(**至少四个**).

得 分	

三、计算题（第 1、2、3 小题每题 10 分，第 4 小题 8 分，第 5 小题 12 分，共 50 分.）

答题勿超装订线

装 订 线

1. 求解初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \\ u(x,0) = \sin x \qquad (-\infty < x < +\infty, t > 0, a > 0) \\ u_t(x,0) = e \end{cases}$$

2. 一个介质球面上的静电势分布为$u(\theta) = 1 + 2\cos^2\theta$,试将$u(\theta)$用勒让德多项式$P_n(\cos\theta)$展开.（注：0 到 3 阶勒让德多项式为$P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$.）

3. 将复变函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在区域 $1<|z|<2$ 内展开成**罗朗级数**.

4. 试计算积分 $I=\oint\limits_{|z|=3}\dfrac{2z^2-z+1}{(z-1)^3}dz$.

5．用**分离变量法**求解下面关于弦振动方程的定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & (0 < x < 1, t > 0) \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & (t > 0) \\ u(x,0) = \begin{cases} x, & \left(0 \le x \le \frac{1}{2}\right) \\ 1 - x, & \left(\frac{1}{2} < x \le 1\right) \end{cases} \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases}.$$

答题勿超装订线

装 订 线

四、证明题（每小题 10 分, 共 10 分）

得 分	

1. 若复变函数 $f(z)=u+jv$ 解析，试证明：函数 $f(z)$ 的实部 u 与虚部 v 满足关系 $\nabla u \bullet \nabla v = 0$.(注：算符 $\nabla = \hat{x}\dfrac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\dfrac{\partial}{\partial y}$)