16-17 A(一) 期中

一. 填空题

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{x^2+x+1}(\sin x+\cos x)=$ __0__

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{x^2+x+1}=0$. $|\sin x+\cos x|\le 2$. $\therefore$ 原式$=0$ (无穷小×有界量=无穷小)

2. 已知$f(x)$满足 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin x}-1}{e^{2x}-1}=2$. 则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$ __8__

$\because \lim\limits_{x\to 0}(e^{2x}-1)=0$. $\therefore \lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{1+f(x)\sin x}-1)=0$, 则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)\sin x=0$.

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin x}-1}{e^{2x}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}f(x)\sin x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{4}\cdot f(x)\cdot\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{4}\lim\limits_{x\to 0}f(x)=2$

$\Uparrow$

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=8$.

3. $y=f(x)$在$x=1$处连续. 且$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=1$. 则曲线$y=f(x)$在$x=1$处切线方程为 __$y=x-1$__

① $y=f(x)$ $x=1$连续 $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)$

② $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1}f(x)=0=f(1)$

③ $f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=1$

④ $x=1$时. $y=f(1)=0$. $\therefore (1,0)$ 切线为: $y-0=1\cdot(x-1)$ 即 $y=x-1$

4. $y=y(x)$由 $\ln(x^2+y)=x^3y+\sin x$ 确定. 则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=$ __1__

$x=0$代入方程: $\ln y=0+0=0 \Rightarrow y=1$

方程两边对x求导: $\dfrac{2x+y'}{x^2+y}=3x^2y+x^3y'+\cos x$ $x=0, y=1$代入,得: $\dfrac{0+y'(0)}{0+1}=0+0+1\Rightarrow y'(0)=1$

No.

Date

5. $f(x)$在$x=2$某邻域内可导，且$f'(x)=e^{f(x)}$，$f(2)=1$，则$f'''(2)=$ $2e^3$

$f'(x)=e^{f(x)} \Rightarrow f''(x)=e^{f(x)}\cdot f'(x)=(e^{f(x)})^2$ 代入$f(2)=1$，则$f'''(2)=2\cdot e^3$

$f'''(x)=2e^{2f(x)}\cdot f'(x)=2\cdot e^{3f(x)}$

二.选择题.

6. 下列关于$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$的定义，错误的是(B)

A. $\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，当$n>N$时，有$a_n\in U(a,\varepsilon)$ ✓ $a_n\in U(a,\varepsilon)$即$|a_n-a|<\varepsilon$

B. $\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，当$n>N$时，有无穷多项a_n，使$|a_n-a|<\varepsilon$. ×

C. $\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，当$n>N$时，有$|a_n-a|<c\varepsilon$，其中c是正常数 ✓ $c\varepsilon$仍为任意正数.

D. 对任意给定$m\in Z^+$，存在$N\in Z^+$，当$n>N$时，有$|a_n-a|<\frac{1}{m}$ ✓ $m\in Z^+$，$\varepsilon=\frac{1}{m}$为任意小于1正数

即$0<\varepsilon=\frac{1}{m}<1$

B. 可取$\{a_n\}$：$1,1,\frac{1}{2},1,\frac{1}{3},1,\frac{1}{4},1,\cdots,\frac{1}{n},1,\cdots$

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$不存在，但$\forall\varepsilon>0$，取$N=[\frac{2}{\varepsilon}]$，则$n>N$时，$n>\frac{2}{\varepsilon}$，$a_n=\frac{2}{n+1}<\frac{2}{n}<\varepsilon$ n为奇数时.

即N之后的奇数项a_n总有$|a_n-0|<\varepsilon$. 但$\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq 0$.

7. $f(x)=2^x+3^x-2$，则当$x\to 0$时，(D)

A. $f(x)$是x的高阶无穷小.　　B. $f(x)$是x的低阶无穷小.

C. $f(x)$是x的等价无穷小.　　D. $f(x)$是x的同阶但非等价无穷小.

$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2^x+3^x-2}{x}=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{2^x-1}{x}+\frac{3^x-1}{x}\right)=\ln2+\ln3$ ($\neq1$, $\neq0$).

Date

8. $f(x)=\dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}$，下列说法正确的是（ D ）

A. $x=0$ 是可去间断点.　　B. $x=0$ 是跳跃间断点

C. $x=1$ 是可去间断点.　　D. $x=1$ 是跳跃间断点.

$\lim\limits_{x\to0} f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}=\infty$　$x=0$ 为第二类间断点.

$f(1^-)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}=0$　$\left(\begin{aligned}&x\to1^-,\ \tfrac{x}{1-x}\to+\infty,\ e^{\frac{x}{1-x}}\to+\infty\\&1-e^{\frac{x}{1-x}}\to-\infty,\ \tfrac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}\to0\end{aligned}\right)$

$f(1^+)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}=\dfrac{1}{1-0}=1$　$(x\to1^+,\ \tfrac{x}{1-x}\to-\infty,\ e^{\frac{x}{1-x}}\to0)$.

$\therefore$ $x=1$ 为跳跃间断点.

9. 下列函数在区间 $(0,+\infty)$ 内有界的是（ C. ）

A $x\sin x$　　B $x\cos x$　　C. $\dfrac{\sin x}{x}$　　D. $\dfrac{\cos x}{x}$

A. $f(x)=x\sin x$. 取 $x_n=2n\pi+\frac{\pi}{2}$, 则 $f(x_n)=2n\pi+\frac{\pi}{2}\to\infty \Rightarrow f(x)$ $(0,+\infty)$ 无界.

B. $f(x)=x\cos x$. 取 $x_n'=2n\pi$, 则 $f(x_n')=2n\pi\to\infty \Rightarrow f(x)$ $(0,+\infty)$ 无界.

D. $f(x)=\frac{\cos x}{x}$　$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\cos x}{x}=+\infty \Rightarrow f(x)$ $(0,+\infty)$ 无界.

C. ① $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}=1 \Rightarrow f(x)=\frac{\sin x}{x}$ $(0,\delta)$ 有界.

② $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}=0 \Rightarrow f(x)$ $(X,+\infty)$ 有界 $(X>\delta)$　　$\Rightarrow f(x)$ $(0,+\infty)$ 有界.

③ $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ $[\delta,X]$ 连续 $\Rightarrow f(x)$ $[\delta,X]$ 有界

KOKUYO

No.

Date

10. $y=f\left(\frac{x-2}{3x+2}\right)$，$f'(x)=\arctan x^2$，则 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=$ (A)

A. $\frac{\pi}{2}$. B. $\frac{\pi}{3}$. C. $\frac{\pi}{4}$. D. π

$$\frac{dy}{dx}=f'\left(\frac{x-2}{3x+2}\right)\cdot\left(\frac{x-2}{3x+2}\right)'=f'\left(\frac{x-2}{3x+2}\right)\cdot\frac{(3x+2)-(x-2)\cdot 3}{(3x+2)^2}$$

$$\therefore \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=f'(-1)\cdot\frac{2-(-2)\cdot 3}{4}=\arctan 1\cdot 2=\frac{\pi}{4}\cdot 2=\frac{\pi}{2}$$