安徽大学 2015—2016 学年第一学期
《高等数学 A（一）、B（一）》（A 卷）考试试题参考答案及评分标准

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1．0；　**2**．$(\frac{1}{e})^{\frac{1}{e}}$；　**3**．$y=x+\frac{1}{e}$；　**4**．2；　**5**．$\ln(1+\sqrt{2})$

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

6．C；　**7**．D；　**8**．A；　**9**．B；　**10**．D

三、计算题（每小题 7 分，共 42 分）

11．解：由 $\left(2^n+3^n+4^n\right)^{\frac{1}{n}}=4[\left(\frac{2}{4}\right)^n+\left(\frac{3}{4}\right)^n+1]^{\frac{1}{n}}$

$$4\cdot 1^{\frac{1}{n}}\le 4[\left(\frac{2}{4}\right)^n+\left(\frac{3}{4}\right)^n+1]^{\frac{1}{n}}\le 4\cdot 3^{\frac{1}{n}}$$

. . . .　5 分

而 $\lim\limits_{n\to\infty}1^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}3^{\frac{1}{n}}=1$，再由两边夹知

$$\lim_{n\to\infty}\left(2^n+3^n+4^n\right)^{\frac{1}{n}}=4$$

. . . .　7 分

12．解：$\lim\limits_{x\to 0+}\ln x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}=\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\ln x}{\ln(e^x-1)}=\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{e^x}{e^x-1}}=\lim\limits_{x\to 0+}\frac{e^x-1}{x}=1$

故 $\lim\limits_{x\to 0+}x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}=e$

. . . .　7 分

13．解：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)^{ax}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{ax}$

若 $a=0$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{ax}=1$；若 $a\ne 0$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{ax}=e^{-a}$

$\int_a^{+\infty} xe^{-x}\,\mathrm{d}\,x = -\int_a^{+\infty} x\,\mathrm{d}\,e^{-x} = -xe^{-x}\,|_a^{+\infty} + \int_a^{+\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}\,x = (a+1)e^{-a}$

由$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{ax} = \int_a^{+\infty} xe^{-x}\,\mathrm{d}\,x$，得$a=0$

. . . .　7 分

14．解：　不妨设$x>0$，$x<0$可类似讨论

令$x=\tan t$，$t\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，则$\int\dfrac{1}{x^4\sqrt{1+x^2}}dx = \int\dfrac{1}{\tan^4 t\sec t}\sec^2 t dt = \int\dfrac{\cos^3 t}{\sin^4 t}dt$

. . . .　4 分

$=\int\dfrac{\cos^2 t}{\sin^4 t}d\sin t = \int\dfrac{1-\sin^2 t}{\sin^4 t}d\sin t = \dfrac{1}{\sin t}-\dfrac{1}{3\sin^3 t}+C = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}-\dfrac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3}+C$

. . . .　7 分

15．解：令$x=e^t$，$\int_1^e \sin(\ln x)dx = \int_0^1 e^t\sin t dt$

$\int_0^1 e^t\sin t dt = e^t\sin t\,|_0^1 - \int_0^1 e^t\cos t dt = e^t\sin t\,|_0^1 - e^t\cos t\,|_0^1 - \int_0^1 e^t\sin t dt$

故，$\int_0^1 e^t\sin t dt = \dfrac{e^t\sin t\,|_0^1 - e^t\cos t\,|_0^1}{2} = \dfrac{e\sin 1 - e\cos 1 + 1}{2}$

. . . .　7 分

16．解：　$f(x) = e^x - \int_0^x (x-t)f(t)dt = e^x - x\int_0^x f(t)dt + \int_0^x tf(t)dt$

由f连续，知$\int_0^x f(t)dt$及$\int_0^x tf(t)dt$可导，故$f(x)$可导，从而上式两边对x求导

$f'(x) = e^x - \int_0^x f(t)dt$，同理，再求导一次，得

$f''(x) = e^x - f(x)$，此为二阶常系数线性非齐次微分方程

. . . .　4 分

对$f''(x)+f(x)=0$，有通解：$C_1\cos x + C_2\sin x$

对$f''(x)+f(x)=e^x$，有特解：$\dfrac{1}{2}e^x$

$$\text{故 } f(x) = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{1}{2}e^x,$$

. . . .　6 分

代入初始条件：$f(0)=f'(0)=1$，最终得

$$f(x)=\frac{1}{2}(\cos x+\sin x+e^x)$$　. . . . .　7 分

四、综合题（每小题 9 分，共 18 分）

17．解：（1）两边对 x 求导，得 $y'-1=e^{x(1-y)}[1-y-xy']$

解得：$y'=\dfrac{1+(1-y)e^{x(1-y)}}{1+xe^{x(1-y)}}$

………………… 4 分

（2）在方程 $y-x=e^{x(1-y)}$ 中，令 $x=0$，得 $y=1$，又由（1）知 $f'(0)=1$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}=f'(0)=1$$

………………… 9 分

18．解：（1）设切点坐标为 $\left(a,\sqrt{a-1}\right)$，则切线方程为 $y-\sqrt{a-1}=\dfrac{1}{2\sqrt{a-1}}(x-a)$

由切线过原点，得 $a=2$，故切点为 $(2,1)$，切线方程为 $y=\dfrac{1}{2}x$

………………… 3 分

A 的面积 $S=\int_0^1(y^2+1-2y)dy=\int_0^1(y-1)^2dy=\dfrac{1}{3}$

………………… 6 分

（2）所求旋转体的体积 $V=\pi\int_0^1(y^2+1)^2dy-\pi\int_0^1(2y)^2dy=\dfrac{28}{15}\pi-\dfrac{4}{3}\pi=\dfrac{8}{15}\pi$

………………… 9 分

五、证明题（每小题 5 分，共 10 分）

19．$F'(x)=\dfrac{f(x)(x-a)-\int_a^x f(t)dt}{(x-a)^2}$

由积分中值定理 $\int_a^x f(t)dt=f(\xi)(x-a)$，其中 $a\le\xi\le x$，故

$$F'(x)=\frac{f(x)(x-a)-\int_a^x f(t)dt}{(x-a)^2}=\frac{f(x)(x-a)-f(\xi)(x-a)}{(x-a)^2}=\frac{f(x)-f(\xi)}{(x-a)}$$

依题意知 $f(x)$ 递增，知 $F'(x)\ge 0$

………………… 5 分

20．由 $f(0)f(1)>0$， $f(0)f(\frac{1}{2})<0$ 知， $f(0)f(\frac{1}{2})<0$， $f(\frac{1}{2})f(1)<0$

由连续函数的零点定理知，存在 $\eta\in(0,\frac{1}{2})$，$\zeta\in(\frac{1}{2},1)$，使得 $f(\eta)=f(\zeta)=0$

令 $F(x)=e^x f(x)$，显然 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，由罗尔定理知，

至少存在 $\xi\in(\eta,\zeta)\subset(0,1)$，使得 $f'(\xi)+f(\xi)=0$ ………… 5 分