2021-2022 第二学期高等数学 A(二)试卷 A 参考答案

一、选择题（每题 3 分，共 15 分）

1. C． 2. C． 3. D． 4. A． 5. B．

二、填空题（每题 3 分，共 15 分）

6. 5． **7.** $\dfrac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$． **8.** $\dfrac{1}{2}$． **9.** 4π **10.** $\dfrac{\pi^2}{2}$．

三、计算题（每题 9 分，共 63 分）

11. 解： 令 $F(x,y,z)=x^2+y^2-z$，于是该曲面在点 $(1,1,2)$ 处切平面的法向量为

$$\vec{n}=(F_x,F_y,F_z)\big|_{(1,1,2)}=(2x,2y,-1)\big|_{(1,1,2)}=(2,2,-1),$$

故所求切平面方程为

$$2(x-1)+2(y-1)-(z-2)=0,$$

即
$$2x+2y-z=2.$$

故所求法线方程为

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{-1}.$$

12. 解： 在方程两边关于 x 求偏导数得 $1-\dfrac{\partial z}{\partial x}=e^z\dfrac{\partial z}{\partial x}$，

当 $(x,y)=(1,0)$ 时，$z=0$，代入上式，得 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)}=\dfrac{1}{2}$．类似可得 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,0)}=\dfrac{1}{2}$．

两边关于 y 求偏导数得 $-\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=e^z\dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}+e^z\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$，代入 $x=1,y=0,z=0$，$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)}=\dfrac{1}{2}$ 及 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,0)}=\dfrac{1}{2}$，

解得 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,0)}=-\dfrac{1}{8}$．

或者：计算得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{1+e^z}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{-e^z}{(1+e^z)^3}$，同理可得 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,0)}=-\dfrac{1}{8}$．

13. 解：令$\begin{cases} f'_x(x,y)=-2x+6=0, \\ f'_y(x,y)=3y^2-12=0, \end{cases}$ 得驻点$(3,2),\ (3,-2)$．又

$$f''_{xx}(x,y)=-2,\quad f''_{xy}(x,y)=0,\quad f''_{yy}(x,y)=6y.$$

在驻点$(3,2)$处，$A=f''_{xx}(3,2)=-2, B=f''_{xy}(3,2)=0, C=f''_{yy}(3,2)=12$，

$AC-B^2=-24<0$，故$(3,2)$不是极值点；

在驻点$(3,-2)$处，$A=f''_{xx}(3,-2)=-2, B=f''_{xy}(3,-2)=0, C=f''_{yy}(3,-2)=-12$，

$AC-B^2=24>0$，且$A<0$，故$(3,-2)$是极大值点，且极大值为$f(3,-2)=-18.$

14. 解：$D=D_1\cup D_2$，其中$D_1:0\le x\le 1,\ x^2\le y\le 1$，$D_2:0\le x\le 1,\ 0\le y\le x^2$.

$$I=\iint\limits_{D_1}+\iint\limits_{D_2}=\int_0^1dx\int_{x^2}^1(y-x^2)dy+\int_0^1dx\int_0^{x^2}(x^2-y)dy$$

$$=\int_0^1(\frac{1}{2}-x^2+\frac{1}{2}x^4)dx+\int_0^1\frac{1}{2}x^4dx=\frac{4}{15}+\frac{1}{10}=\frac{11}{30}.$$

15. 解：令$P=2+xe^{2y}, Q=x^2e^{2y}-1$，

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2xe^{2y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$ ，故积分与路径无关，

取路径$OA: y=0, x:0\to 4$

$$I=\int_{OA}(2+xe^{2y})dx+(x^2e^{2y}-1)dy=\int_0^4(2+x)dx=16.$$

16. 解法一：补充曲面$\Sigma_1: z=1(x^2+y^2\le 1)$，取上侧；$\Sigma_2: z=0(x^2+y^2\le 1)$，取下侧，则$\Sigma,\Sigma_1,\Sigma_2$构成封闭曲面，取外侧，它们所围区域记为$\Omega$.

由高斯公式可得，$\displaystyle\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2}=\iiint\limits_{\Omega}(2xy+2y\sin x+2z)\mathrm{d}V$，

根据奇偶对称性可知$\displaystyle\iiint\limits_{\Omega}2xy\mathrm{d}V=\iiint\limits_{\Omega}2y\sin x\mathrm{d}V=0$，所以

$$\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2}=2\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}V=2\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_0^1 z\mathrm{d}z=\pi.$$

而$\displaystyle\iint\limits_{\Sigma_1}=\iint\limits_{\Sigma_1}z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}1^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi$，$\displaystyle\iint\limits_{\Sigma_2}=\iint\limits_{\Sigma_2}z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}0^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,$

所以$\displaystyle I=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2}-\iint\limits_{\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_2}=\pi-\pi-0=0.$

解法二：由于$\iint\limits_{\Sigma} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，所以$I=\iint\limits_{\Sigma} x^2y\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\sin x\mathrm{d}z\mathrm{d}x$.

补充曲面$\Sigma_1: z=1(x^2+y^2\le 1)$，取上侧；$\Sigma_2: z=0(x^2+y^2\le 1)$，取下侧，则$\Sigma,\Sigma_1,\Sigma_2$构成封闭曲面，所围区域为$\Omega$，取外侧.

由高斯公式可得，$\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2}=\iiint\limits_{\Omega}(2xy+2y\sin x)\mathrm{d}V$，

根据奇偶对称性可知$\iiint\limits_{\Omega}2xy\mathrm{d}V=\iiint\limits_{\Omega}2y\sin x\mathrm{d}V=0$，所以$\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2}=0$.

而$\iint\limits_{\Sigma_1} x^2y\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\sin x\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\iint\limits_{\Sigma_2} x^2y\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\sin x\mathrm{d}z\mathrm{d}x=0$，所以$I=0$.

17. 解. 收敛半径$R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{2n+3}=1$，故收敛区间为$(-1,1)$。

显然$x=\pm1$的时候，原级数发散，从而收敛域为$(-1,1)$

设$S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n, x\in(-1,1)$

又 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n=2\sum\limits_{n=0}^{\infty}nx^n+\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$

对 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n=\dfrac{1}{1-x}$ 逐项求导得 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}nx^{n-1}=\dfrac{1}{(1-x)^2}$，

故 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}nx^n=x\sum\limits_{n=0}^{\infty}nx^{n-1}=\dfrac{x}{(1-x)^2}$，

于是 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n=\dfrac{2x}{(1-x)^2}+\dfrac{1}{1-x}=\dfrac{1+x}{(1-x)^2}, x\in(-1,1).$

四、证明题（本题 7 分）

18. **证明**：设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(b_{n+1}-b_n)=s$.

由于其前n项部分和$s_n=b_2-b_1+b_3-b_2+\cdots+b_{n+1}-b_n=b_{n+1}-b_1$，

所以$\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\lim\limits_{n\to\infty}(b_{n+1}-b_1)=s$，得$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_{n+1}=s+b_1$，从而数列$\{b_n\}$有界.

不妨令$|b_n|\le M$，则$0\le|a_nb_n|\le Ma_n$.因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}Ma_n$收敛，所以由正项级数的比较判别法可知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|$收敛，即$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$绝对收敛.