附录 1

常用初等数学公式

§ 附录 1.1 代数

1. 绝对值与不等式

(1) $|a+b| \leqslant |a|+|b|$；　(2) $|a-b| \geqslant |a|-|b|$；

(3) $-|a| \leqslant a \leqslant |a|$；　(4) $\sqrt{a^2}=|a|$；

(5) $|ab|=|a| \cdot |b|$；　(6) $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}(b \neq 0)$；

(7) $|a| \leqslant b(b>0) \Leftrightarrow -b \leqslant a \leqslant b$；

(8) $|a|>b(b>0) \Leftrightarrow a>b$ 或 $a<-b$.

2. 指数与对数运算

(1) $\log_a 1=0$；　(2) $\log_a a=1$；

(3) $\log_b N=\log_a N / \log_a b$；　(4) $\log_a N^n=n\log_a N$；

(5) $\log_a \sqrt[n]{N}=\frac{1}{n}\log_a N$；　(6) $(a^x)^y=a^{xy}$；

(7) $\sqrt[y]{a^x}=a^{\frac{x}{y}}$；　(8) $a^x a^y=a^{x+y}$；

(9) $\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$；　(10) $\log_a (cd)=\log_a c+\log_a d$；

(11) $\log_a \frac{c}{d}=\log_a c-\log_a d$.

3. 有限项级数

(1) 等差级数

$a+(a+d)+(a+2d)+\cdots+(a+(n-1)d)=na+\dfrac{n(n-1)}{2}d$；

$1+2+3+\cdots+(n-1)+n=\dfrac{1}{2}n(n+1)$；

$1+3+5+\cdots+(2n-3)+(2n-1)=n^2$；

$2+4+6+\cdots+(2n-2)+2n=n(n+1)$；

$p+(p+1)+\cdots+(n-1)+n=\dfrac{1}{2}(n+p)(n-p+1)$（$p$ 为自然数）.

(2)等比数列

$a+aq+aq^2+\cdots+aq^{n-2}+aq^{n-1}=a\dfrac{1-q^n}{1-q}$（$q\neq 1$）.

(3)$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

(4)$1^3+2^3+3^3+\cdots n^3=\left(\dfrac{1}{2}n(n+1)\right)^2$.

(5)$1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2=\dfrac{1}{3}n(4n^2-1)$.

(6)$2^2+4^2+6^2+\cdots+(2n)^2=\dfrac{2}{3}n(n+1)(2n+1)$.

(7)$1^3+3^3+5^3+\cdots+(2n-1)^3=n^2(3n^2-1)$.

(8)$2^3+4^3+6^3+\cdots+(2n)^3=2n^2(n+1)^2$.

4. Newton 二项公式

(1)$(a+b)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}c_n^k a^{n-k}b^k$；

(2)$(a-b)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k c_n^k a^{n-k}b^k$.

5. 乘法及因式分解

(1)$(x\pm y)^2=x^2\pm 2xy+y^2$；

(2)$x^2-y^2=(x+y)(x-y)$；

(3)$(x\pm y)^3=x^3\pm 3x^2y+3xy^2\pm y^3$；

(4)$x^n-y^n=(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+\cdots+xy^{n-2}+y^{n-1})$；

(5)$x^n+y^n=(x+y)(x^{n-1}-x^{n-2}y+x^{n-3}y^2-\cdots+xy^{n-2}-y^{n-1})$

（n 为偶数）；

(6)$x^n+y^n=(x+y)(x^{n-1}-x^{n-2}y+x^{n-3}y^2-\cdots-xy^{n-2}+y^{n-1})$

（n 为奇数）；

(7)$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx$;

(8)$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$;

(9)$(x+y+z)^3=x^3+y^3+z^3+3x^2y+3xy^2+3y^2z+3yz^2+3z^2x+3zx^2+6xyz$.

6. 平均值不等式

对任意 n 个正数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$,

(1)$\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_n\cdots a_n}\geqslant n/(\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n})$,

当仅且当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时上式中等号成立;

(2)$\dfrac{a_1+a_2+\cdots a_n}{n}\leqslant\sqrt{\dfrac{1}{n}(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)}$.

7. Cauchy 不等式

$$(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k)^2\leqslant(\sum_{k=1}^{n}a_k^2)(\sum_{k=1}^{n}b_k^2).$$

§ 附录 1.2　三角

1. 和差公式

(1) $\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$;

(2) $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$;

(3) $\tan(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$;

(4) $\cot(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\cot\alpha\cot\beta\mp1}{\cot\beta\pm\cot\alpha}$;

(5) $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$;

(6) $\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$;

(7) $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$;

(8) $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$;

(9) $2\sin\alpha\cos\beta=\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$;

(10) $2\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)$;

(11) $2\cos\alpha\cos\beta=\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$;

(12) $-2\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)$.

2. 倍角与半角公式

(1) $\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$;　(2) $\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$;

(3) $\tan2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$;　(4) $\cot2\alpha=\dfrac{\cot^2\alpha-1}{2\cot\alpha}$;

(5) $\sin^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{2}$;　(6) $\cos^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1+\cos\alpha}{2}$;

(7) $\tan^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$;　(8) $\cot^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}$.

3. 斜三角形中的公式

(1) 正弦定理　$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$ (R 是外接圆半径);

(2) 余弦定理　$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$;

(3) 正切定理　$\dfrac{a-b}{a+b}=\dfrac{\tan\dfrac{A-B}{2}}{\tan\dfrac{A+B}{2}}$;

(4) 面积公式

$S=\dfrac{1}{2}ab\sin C$;

$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ $\left(p=\dfrac{1}{2}(a+b+c)\right)$.

4. 三角不等式

(1) $\sin x<x<\tan x$ $\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$;

(2) $\dfrac{2}{\pi}x<\sin x<x$ $\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$

§ 附录 1.3　几何

1. 圆

(1) 周长 $=2\pi r$;

(2)面积$=\pi r^2$；

(3)弧长$=r\theta$(圆心角θ以弧度计)；

(4)扇形面积$=\frac{1}{2}r^2\theta$.

2. 正圆锥

(1)体积$=\frac{1}{3}\pi r^2 h$；

(2)侧面积$=\pi rl$(l为斜高)；

(3)全面积$=\pi r(r+l)$.

3. 正棱锥

(1)体积$=\frac{1}{3}\times$底面积$\times$高；　(2)侧面积$=\frac{1}{2}\times$斜高$\times$底周长.

4. 圆台

(1)体积$=\frac{1}{3}\pi h(R^2+r^2+Rr)$；　(2)侧面积$=\pi l(R+r)$.

5. 球

(1)体积$=\frac{4}{3}\pi r^3$；　(2)表面积$=4\pi r^2$.