18-19 A(一) 期中

一.

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})\sqrt{n}=$ <u>0</u>

原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left[(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})-(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\right]\sqrt{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})\sqrt{n}-(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\sqrt{n}\right]$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}-\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}-\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}\right)$

$=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}=0$

2. 已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x-\sqrt{ax^2+bx+1})=2$. 则 $a=$ <u>9</u>, $b=$ <u>-12</u>

$\lim\limits_{x\to+\infty}(3x-\sqrt{ax^2+bx+1})=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(9-a)x^2-bx-1}{3x+\sqrt{ax^2+bx+1}}=2$ $\therefore 9-a=0$, 即 $a=9$.

$a=9$ 代入, 有: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-bx-1}{3x+\sqrt{9x^2+bx+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-b-\frac{1}{x}}{3+\sqrt{9+b\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}=\dfrac{-b}{3+3}=2\Rightarrow b=-12$

3. 当 $x\to 0$ 时, $\sqrt[3]{1+2x^{\alpha}}-1$ 是 $1-\cos x$ 的同阶无穷小量. 则 $\alpha=$ <u>2</u>

由已知, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+2x^{\alpha}}-1}{1-\cos x}=k\neq 0$. 即 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{3}\cdot 2x^{\alpha}}{\frac{1}{2}x^2}=k\neq 0\Rightarrow \alpha=2$

4. 曲线 $y=x^{\frac{2}{3}}$ 在点 $(1,1)$ 处的法线方程为 <u>$y=-\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}$</u>

$y=x^{\frac{2}{3}}$. $y'=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$ $y'(1)=\frac{2}{3}$. 即切线斜率 $k=\frac{2}{3}$, $\therefore$ 法线斜率 $k=-\frac{3}{2}$

则法线: $y-1=-\frac{3}{2}(x-1)$. 即 $y=-\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}$

Date

5. $f(x)=\begin{cases} x\arctan\frac{1}{x^2} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$，则 $f'(0)=\underline{\frac{\pi}{2}}$

$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cdot\arctan\frac{1}{x^2}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\arctan\frac{1}{x^2}$

$\underline{令\frac{1}{x^2}=t}$ $\lim\limits_{t\to+\infty}\arctan t=\frac{\pi}{2}$

二.

6. $f(x)=\frac{|x-2|\sin x}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列哪个区间有界（A.）

A. $(-1,0)$　　B. $(0,1)$　　C. $(1,2)$　　D. $(2,3)$

$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sin x}{x(x-1)|x-2|}=\infty$，则 $f(x)$ 在 $U(1,\delta)$，$U(2,\delta)$ 无界.

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{|x-2|}{(x-1)(x-2)^2}=1\cdot\frac{1}{-2}=-\frac{1}{2}$　$f(x)$ $U(0)$ 有界.

7. $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ 均为非负数列，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=2$，$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=+\infty$，则下列结论一定正确的是（D.）

A. $\forall n\in N$，$a_n<b_n$　× 　取 $a_n=\frac{10}{n}$，$b_n=2$.　$n=1,2,3,4$ 时 $a_n>b_n$.

B. $\forall n\in N$，$b_n<c_n$　×　取 $b_n=2+\frac{1}{n}$，$c_n=n$.　$n=1,2$ 时，$b_n>c_n$.

C. $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n$ 不存在　×　$\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=0\cdot 2=0$

D. $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 不存在　✓　$\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n=+\infty$

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0<\lim\limits_{n\to\infty}b_n=2\Rightarrow\exists N\in Z^+$，$\underline{n>N 时\ a_n<b_n}$.

Campus

8. $f(x)=(x-\frac{\pi}{2})\frac{1}{\cos x}$，$x=\frac{\pi}{2}$是$f(x)$的（B）

A.跳跃间断点　B.可去间断点　C.无穷间断点　D.连续点

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{x-\frac{\pi}{2}}{\cos x}\ (\frac{0}{0})=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{-\sin x}=-1$ ∴$x=\frac{\pi}{2}$为$f(x)$的可去间断点.

9. $f(x)=\begin{cases}x^3\sin\frac{1}{x} & x\neq0\\ 0 & x=0\end{cases}$，则$f(x)$在$x=0$处（C）

A.二阶可导，且$f''(x)$ $x=0$连续　B.二阶可导，但$f''(x)$ $x=0$处不连续

C.一阶可导，且$f'(x)$ $x=0$连续　D.一阶可导，但$f'(x)$ $x=0$处不连续

$x\neq0$时，$f'(x)=3x^2\sin\frac{1}{x}+x^3\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot(-\frac{1}{x^2})=3x^2\sin\frac{1}{x}-x\cos\frac{1}{x}$

$f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^3\sin\frac{1}{x}-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}x^2\sin\frac{1}{x}=0.$

∴$f'(x)=\begin{cases}3x^2\sin\frac{1}{x}-x\cos\frac{1}{x} & x\neq0\\ 0 & x=0\end{cases}$

且$\lim\limits_{x\to0}f'(x)=\lim\limits_{x\to0}[3x^2\sin\frac{1}{x}-x\cos\frac{1}{x}]=0=f'(0)$ 即$f'(x)$ $x=0$连续.

但$f''(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\frac{3x^2\sin\frac{1}{x}-x\cos\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to0}(3x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x})$ 不存在.

（$\lim\limits_{x\to0}3x\sin\frac{1}{x}=0$，但$\lim\limits_{x\to0}\cos\frac{1}{x}$不存在）

10. $f(x)$ $x=0$处连续，下列命题错误的是（D）

A. $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$存在，则$f(0)=0$.　B.若$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)+f(-x)}{x}$存在，则$f(0)=0$.

No.

Date

C. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f(x)$ $x=0$ 可导. D. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在，则 $f(x)$ $x=0$ 处可导.

若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=A$，(由 $f(x)$ $x=0$ 连，得：$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$.)

有 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\cdot x=A\cdot 0=0=f(0)$ A ✓

且 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=A$ C ✓

若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)+f(-x)}{x}=B$. 又 $\lim\limits_{x\to 0}f(-x)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}[f(x)+f(-x)]=0=2f(0)\Rightarrow f(0)=0$ B ✓

但若取 $f(x)=|x|$. 则 $f(x)-f(-x)=0$. 故 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(-x)}{x}=0$.

而 $f(x)$ $x=0$ 处 不可导. D ✗