安徽大学 2016—2017 学年第一学期

《高数数学 A（一）、B（一）》(A 卷)考试试题参考答案及评分

一、　填空题（每小题 2 分，共 10 分）

1、$l=-1$　　**2**、$x=1$　　**3**、小　　**4**、**1**　　**5**、 **23040**（也可写成 $2^9C_{10}^2$）

二、单选题（每小题 2 分，共 10 分）

6、**C**　　**7**、**D**　　**8**、**B**　　**9**、**A**　　**10**、**B**

三、计算题（每小题 8 分，共 48 分）

11、解. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)\sqrt{n}$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right)-\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\right)\sqrt{n}$$ ……**4** 分

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}-\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0.$$ ……**8** 分

12、解. 由洛必达法则，知

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x\left(f(1)-f(1-t)\right)dt}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1,$$ ……**5** 分

所以 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(1-x)-f(1)}{-x}=-2$，即 $f'(1)=-2$，

因此曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y-f(1)=-2(x-1)$． ……**8** 分

13、解. 方法一：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\frac{x^3}{3!}+o\left(x^3\right)-x}{x^3}=\dfrac{-1}{6}$. ……**8** 分

方法二：由洛必达法则和等价无穷小替换，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{3x^2}=\frac{-1}{6}.$$ ……8 分

14、解. 对方程两端关于 x 求导数，有

$x+2yy'=0$，即有

$$y'=\frac{-x}{2y}. \quad （1）$$ ……4 分

再对（1）关于 x 求导数，有

$$y''=-\frac{2y-2y'x}{4y^2}=-\frac{x^2+2y^2}{4y^3}.$$ ……8 分

15、解. $I=\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos x}=\int\frac{\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)dx}{\sin^2 x\cos x}=\int\frac{dx}{\cos x}+\int\frac{\cos xdx}{\sin^2 x}$

$$=\int\frac{\cos xdx}{\cos^2 x}+\int\frac{d\sin x}{\sin^2 x}=\int\frac{d\sin x}{1-\sin^2 x}-\frac{1}{\sin x}$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x}-\frac{1}{\sin x}+c$$ ……8 分

其中 c 为任意常数.

16、解.利用被积函数的奇偶性，有

$$I=0+2\int_0^{\frac{p}{2}}\min\left\{\frac{1}{2},x^2\right\}dx=2\left(\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}x^2dx+\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{p}{2}}\frac{1}{2}dx\right)$$

$$=\frac{3p-2\sqrt{2}}{6}$$ ……8 分

四、应用题（每小题 10 分，共 20 分）

17、解.由题意知,$V_1=p\int_a^1 16x^4dx, V_2=4p a^4-p\int_0^{4a^2}\frac{y}{4}dy$ ……4 分

所以，有 $\frac{d\left(V_1+V_2\right)}{da}=16p a^3-16p a^4+8p a^3$.令 $-16p a^4+8p a^3=0$，

所以有唯一的驻点 $a=\frac{1}{2}$. ……8 分

由问题的实际意义可知，当 $a=\frac{1}{2}$ 时，有 V_1+V_2 最大. ……10 分

18、解.依题意知，特征方程为 $l^2+4l+4=0$，

解得 $l_1 = l_2 = -2$，

故通解为 $x(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 t e^{-2t}$,其中 c_1, c_2 为两个互相独立的任意常数.

由初始条件,解得 $c_1 = 2, c_2 = 0$,所以特解为 $x(t) = 2e^{-2t}$.　　　　　　……8 分

计算 $\int_0^{+\infty} x(t)\,dt = \int_0^{+\infty} 2e^{-2t}\,dt = 1$.　　　　　　　　　　　……10 分

五、证明题（每小题 6 分，共 12 分）

19、解.

方法一：由于函数 $f(x)$ 在 ¡ 上二阶导数存在，所以由泰勒公式知，

$\exists x \in (0, x)$ 或 $(x, 0)$,有 $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(x)}{2!}x^2$.　　　　　　......4 分

进一步，当 $x \neq 0$ 时 , 有 $f(x) > x$.　　　　　　　　　　　　　　　　......6 分

方法二：构造辅助函数 $F(x) = f(x) - x$,利用函数的单调性证明之给相应的分.

20、解.构造辅助函数 $F(x) = e^{-2x} f(x)$,显然有 $F(a) = F(b) = 0$,由题意知 $F(x)$ 满足罗尔定理条件. 所以 $\exists x \in (a,b)$，有 $F'(x) = 0$.　　　　　　　……4 分

而 $F'(x) = -2e^{-2x} f(x) + e^{-2x} f'(x)$，故结论正确 .　　　　　　　　　……6 分