安徽大学 2013—2014 学年第 1 学期

《 数理方法 》（A 卷）考试试题参考答案及评分标准

一、填空题（每小题 2 分, 共 20 分）

1. $e^{-1}(\cos\frac{\pi}{4}+j\sin\frac{\pi}{4})$ 或 $e^{-1}(\frac{\sqrt{2}}{2}+j\frac{\sqrt{2}}{2})$..

2. 0.
3. 1.
4. 1.
5. $\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s}$.
6. 3.
7. 非齐次.

8. $\begin{cases}\nabla^2 G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)=-\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\\ [\alpha G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)+\beta\frac{\partial G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)}{\partial n}]\|_S=0\end{cases}$

9. $2\pi\delta(\omega-2)$.

10. $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-n^2)y=0$.

二、简答题（每小题 10 分, 共 20 分）

1．答：

如果 $p(z)$ 和 $q(z)$ 在 z_0 点的邻域内解析， z_0 为方程的常点

如果 $(z-z_0)p(z)$ 和 $(z-z_0)^2q(z)$ 在 z_0 点的邻域内解析，z_0 为正则奇点

在常点 z_0 的邻域内方程存在唯一的解析解，可表示为泰勒级数：

$$w(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$

在正则奇点 z_0 的邻域内方程至少存在一个如下形式的级数解：

$$w(z)=(z-z_0)^{\rho}\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$

2．答：

$$\bar{f}(\omega)=F[f(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$f(t)=F^{-1}[\bar{f}(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\bar{f}(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

① 线性性质：
$$F[\alpha\cdot f_1(t)\pm\beta\cdot f_2(t)]=\alpha\cdot F[f_1(t)]\pm\beta\cdot F[f_2(t)],$$
$$F^{-1}[\alpha\cdot\overline{f}_1(\omega)\pm\beta\cdot\overline{f}_2(\omega)]=\alpha\cdot F^{-1}[\overline{f}_1(\omega)]\pm\beta\cdot F^{-1}[\overline{f}_1(\omega)].$$

②对称性质：若 $\bar{f}(\omega)=F[f(t)]$，则有 $F[\bar{f}(t)]=2\pi f(-\omega)$

③延迟性质(或位移性质)：　若 $\overline{f}(\omega)=F[f(t)]$，则有

$$F[f(t\pm t_0)]=e^{\pm jwt_0}F[f(t)],\quad F^{-1}[\overline{f}(\omega\pm\omega_0)]=e^{\mp jw_0 t}f(t).$$

④相似性质(或坐标缩放性质)：　若 $\overline{f}(\omega)=F[f(t)]$，则对 $\forall a\neq 0,$ 有

$$F[f(at)]=\frac{1}{|a|}\overline{f}(\frac{\omega}{a}).$$

⑤微分性质：　若 $\lim\limits_{|t|\to+\infty}f(t)=0$，且 $F[f(t)]=\overline{f}(\omega)$，则

$$F[f'(t)]=j\omega\overline{f}(\omega)$$

⑥积分性质：　设 $g(t)=\int_{-\infty}^{t}f(x)dx,$ 且 $\lim\limits_{t\to+\infty}g(t)=0,\ F[f(t)]=\overline{f}(\omega)$，则

$$F[g(t)]=\frac{1}{j\omega}\overline{f}(\omega).$$

⑦卷积定理　设 $F[f_1(t)]=\overline{f}_1(\omega),F[f_2(t)]=\overline{f}_2(\omega)$，则

$$F[f_1(t)*f_2(t)]=\overline{f}_1(\omega)\cdot\overline{f}_2(\omega),$$
$$F[f_1(t)\cdot f_2(t)]=\frac{1}{2\pi}\overline{f}_1(\omega)*\overline{f}_2(\omega).$$

三、计算题（第 1、2、3 小题每题 10 分，第 4 小题 8 分，第 5 小题 12 分，共 50 分.）

1. 解：由**达朗贝尔公式**或**行波法**，可得

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[\sin(x+at)+\sin(x-at)]$$
$$+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}ed\zeta=\sin x\cos at+et$$

2．解：$u(\theta)=1+2\cos^2\theta=A_0P_0(\cos\theta)+A_2P_2(\cos\theta)$

$1+2\cos^2\theta=A_0+A_2\frac{1}{2}(3\cos^2\theta-1)$

比较系数可得：$A_0=\frac{5}{3}$，$A_2=\frac{4}{3}$

3．解：$1<|z|<2\Rightarrow\frac{1}{|z|}<1,|z/2|<1$

$$f(z)=\frac{1}{(z-2)}-\frac{1}{(z-1)}$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{1}{1-z/2}-\frac{1}{z}\frac{1}{1-1/z}$$

$$=-\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{n=0}^{\infty}z^n-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{z})^n.$$

4．解：函数 $f(z)=2z^2-z+1$ 在 L 及其内部解析，$z=1$ 在 L 的内部,符合应用高阶导数公式的条件,

分母 $(z-1)^3$ 意味着 $n=2$,故

$$I=\frac{2\pi j}{2!}\frac{d^2}{dz^2}[2z^2-z+1]\Big|_{z=1}=2\pi j$$

5.解：边界条件为第一类边界条件，直接用分离变量法。

令 $u(\mathrm{x,t})=\mathrm{X(x)T(t)}$ 代入方程得：

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=-l$$

$$T''(t)+la^2T(t)=0$$

$$X''(x)+lX(x)=0$$

利用边界条件，由于 $\mathrm{u(x,t)=X(x)T(t)}$ 则有 $\mathrm{X(0)T(t)=0,X(l)T(t)=0}$

有 $\mathrm{X(0)=X(l)=0}$，求常微分方程边值问题

$$\begin{cases}X''(x)+lX(x)=0\\X(0)=X(1)=0\end{cases}$$

当 $l<0$ 时，方程有 $X(x)=0$，不符合非零解的要求，因此 l 不能小于零。

当$l=0$时，方程有通解$X(x)=Ax+B$，代入条件可得$A=B=0$，因此l不能等于零。

当$l>0$时，则$X(x)=D_1\cos\sqrt{l}x+D_2\sin\sqrt{l}x$，有条件可得：

$D_1=0$，　$D_2\sin\sqrt{l}x=0$，由于D_2不能为零，则有$l=n^2\pi^2$

$X_n(x)=D_n\sin(n\pi x)(n=1,2,3\dots)$

把λ的值代入T(t)中得：$T_n''(t)+a^2n^2\pi^2T_n(t)=0$

通解为：$T_n(t)=C_n'\cos(n\pi at)+D_n'\sin(n\pi at)(n=1,2,3\dots)$

本征解为：$u_n(x,t)=[C_n\cos(n\pi at)+D_n\sin(n\pi at)]\sin(n\pi x)$

解为：$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}[C_n\cos(n\pi at)+D_n\sin(n\pi at)]\sin(n\pi x)$

$$C_n=2[\int_0^{\frac{1}{2}}x\sin(n\pi x)dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-x)\sin(n\pi x)dx]=\frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}$$

$D_n=0$

则：$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}\cos(n\pi at)\sin(n\pi x)$

四、证明题（每小题 10 分, 共 10 分）

1．证明：　$\nabla u=\hat{x}\frac{\partial u}{\partial x}+\hat{y}\frac{\partial u}{\partial y}$，　$\nabla v=\hat{x}\frac{\partial v}{\partial x}+\hat{y}\frac{\partial v}{\partial y}$

$f(z)=u+jv$解析，则u和v满足$C-R$方程$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$

$$\nabla u\cdot\nabla v=(\hat{x}\frac{\partial u}{\partial x}+\hat{y}\frac{\partial u}{\partial y})\cdot(\hat{x}\frac{\partial v}{\partial x}+\hat{y}\frac{\partial v}{\partial y})=(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial y})=0$$