18-19 A(二)期中

一. 填空题.

1. 平面 $x-\sqrt{2}y+z=1$ 与平面 $x+z=3$ 的夹角为 $\underline{\frac{\pi}{4}}$

$\pi_1: x-\sqrt{2}y+z=1$, 法向量 $\vec{n_1}=(1,-\sqrt{2},1)$ ; $\pi_2: x+z=3$, 法向量 $\vec{n_2}=(1,0,1)$

$\therefore \pi_1$ 与 $\pi_2$ 夹角 $\theta$ 的余弦 $\cos\theta=|\cos\angle(\vec{n_1},\vec{n_2})|=\left|\frac{\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}}{|\vec{n_1}|\cdot|\vec{n_2}|}\right|=\left|\frac{1+1}{\sqrt{1+2+1}\cdot\sqrt{1+1}}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$

即 $\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$. $\therefore \theta=\frac{\pi}{4}$

2. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x^2y)-x^2y}{x^6y^3}=\underline{-\frac{1}{6}}$

原式 $\xlongequal{令x^2y=t}\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t-t}{t^3}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\cos t-1}{3t^2}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{-\frac{1}{2}t^2}{3t^2}=-\frac{1}{6}$

3. $u=xy^2e^z$ 在 $(1,-1,0)$ 处全微分 $du\big|_{(1,-1,0)}=\underline{dx-2dy+dz}$

$u_x'=y^2e^z$, $u_y'=2xye^z$, $u_z'=xy^2e^z$. $\therefore u_x'(1,-1,0)=1$, $u_y'(1,-1,0)=-2$, $u_z'(1,-1,0)=1$

$\therefore du\big|_{(1,-1,0)}=dx-2dy+dz$

☆4. 曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=6\\x+y+z=0\end{cases}$ 在 $(2,-1,-1)$ 处法平面方程为 $\underline{y-z=0.}$

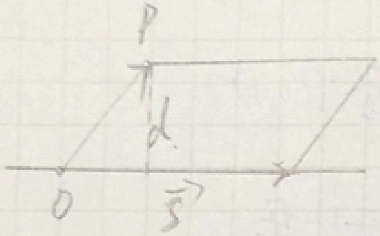
$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=6\\x+y+z=0\end{cases}$ 对x求导, 有 $\begin{cases}2y\cdot\frac{dy}{dx}+2z\frac{dz}{dx}=-2x\\\frac{dy}{dx}+\frac{dz}{dx}=-1\end{cases}$. 此时 $\begin{vmatrix}2y & 2z\\1 & 1\end{vmatrix}_{(2,-1,-1)}=0$ 无法求解.

故对z求导, 有: $\begin{cases}2x\cdot\frac{dx}{dz}+2y\frac{dy}{dz}=-2z\\\frac{dx}{dz}+\frac{dy}{dz}=-1\end{cases}$ $\Rightarrow \frac{dx}{dz}=\frac{y-z}{x-y}$, $\frac{dy}{dz}=\frac{z-x}{x-y}$. $\therefore$ 曲线在 $(2,-1,-1)$ 处切向量为 $(x'(z),y'(z),1)\big|_{(2,-1,-1)}$

$(0,-1,1)$.

∴曲线在$(2,-1,-1)$处法平面为 $(-1)(y+1)+(z+1)=0$. 即 $y-z=0$

5. 点$(1,2,3)$到直线 $x=y=z$ 距离为 $\underline{\sqrt{2}}$




$P(1,2,3)$. $l: x=y=z$. $\vec{s}=(1,1,1)$. $Q(0,0,0)\in l$

∴ $d=\frac{|\vec{QP}\times\vec{s}|}{|\vec{s}|}$. 又 $\vec{QP}\times\vec{s}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(-1,2,-1)$

∴ $|\vec{QP}\times\vec{s}|=\sqrt{1+4+1}=\sqrt{6}$, $|\vec{s}|=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}$. ∴ $d=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}=\sqrt{2}$

二.选择题

6. $l_1: \frac{x-1}{0}=\frac{y}{2}=z+2$ 与 $l_2: \frac{x-1}{4}=\frac{y-3}{-2}=z$ 的位置关系是(C.)

A.相交于一点. B.平行. C.异面. D.重合.

$l_1: \frac{x-1}{0}=\frac{y}{2}=z+2$ $\vec{s_1}=(0,2,1)$ $P_1(1,0,-2)\in l_1$

$\vec{P_1P_2}=(0,3,2)$

$l_2: \frac{x-1}{4}=\frac{y-3}{-2}=z$ $\vec{s_2}=(4,-2,1)$, $P_2(1,3,0)\in l_2$

$\vec{s_1}\nparallel\vec{s_2}$. ∴ B×, D×

又 $(\vec{P_1P_2},\vec{s_1},\vec{s_2})=\begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix}=4\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-4\neq0$ ∴ $l_1$与$l_2$异面.

7. $f(x,y)$在$(x_0,y_0)$的某邻域有定义, 则下列说法不正确的是(A) $f''_{xy}(0,0)=-1$, 而$f''_{yx}(0,0)=1$

A.若$f''_{xy}(x_0,y_0)$, $f''_{yx}(x_0,y_0)$存在, 则必有$f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0)$ × 书例9.2.5 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq0 \\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$

B.若$f''_{xy}(x,y)$, $f''_{yx}(x,y)$在$(x_0,y_0)$处连续, 则必有$f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0)$ ✓

C. 若 $f'_x(x,y)$ 与 $f'_y(x,y)$ 在 $(x_0,y_0)$ 处连续，则 $f(x,y)$ 在 $(x_0,y_0)$ 处可微 ✓

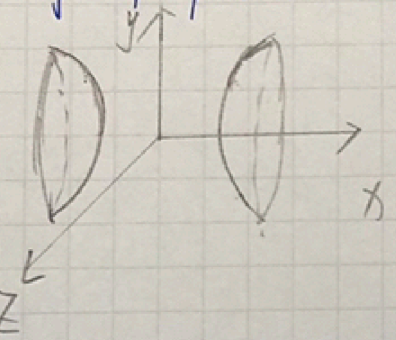
D. 若 $f'_x(x,y)$ 与 $f'_y(x,y)$ 在 $(x_0,y_0)$ 处连续，则 $f(x,y)$ 在 $(x_0,y_0)$ 处连续. ✓

$f'_x, f'_y$ $(x_0,y_0)$ 连续 $\Rightarrow$ $f(x,y)$ $(x_0,y_0)$ 可微 $\Rightarrow$ $f(x,y)$ $(x_0,y_0)$ 连续.

8. 二次曲面 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}-z^2=1$ 的形状是（ B ）

A. 单叶双曲面　B. 双叶双曲面.　C. 椭圆抛物面.　D. 双曲抛物面.

曲面 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$（双曲线）绕 x 轴旋转一周，得 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2+z^2}{9}=1$，再沿 z 轴方向伸缩，得 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}-z^2=1$




9. 设 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 的某邻域内有二阶连续偏导，若 $f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0$，$f''_{xx}(0,0)=0$，$f''_{xy}(0,0)=-2$.

$f''_{yy}(0,0)=3$. 则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处（ D ）

A. 取极大值.　B 要么取极大值，要么取极小值.

C. 取极小值　D. 不可能取极大值，也不可能是极小值.

$(0,0)$ 为驻点，且 $(0,0)$ 处 $A=0$，$B=-2$，$C=3$. $H=AC-B^2=-4<0$.

$\therefore$ $(0,0)$ 不是极值点.

10. 设有 $y''+py'+qy=0$（$p$、$q$ 为常数）。若 $\alpha\pm i\beta$ 为特征方程 $\lambda^2+p\lambda+q=0$ 的根，$\alpha$、$\beta$ 为实数，且 $\beta\neq0$。

$C_1$、$C_2$ 为任意实数，则 $y''+py'+qy=0$ 通解为（C）

A. $y=C_1e^{\alpha x}+C_2e^{\beta x}$

B. $y=C_1e^{\alpha x}+C_2xe^{\alpha x}$

C. $y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

D. $y=e^{\beta x}(C_1\cos\alpha x+C_2\sin\alpha x)$