

## 安徽大学 2021—2022 学年第一学期

## 《高等数学 A (一)》期末考试试卷 (B 卷)

(闭卷 时间 120 分钟)

考场登记表序号\_\_\_\_\_

题号	一	二	三	四	总分
得分					
阅卷人					

## 一、填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

得分

1. 若  $x \rightarrow 0$  时, 函数  $f(x) = x - \sin x$  与  $kx^3$  是等价无穷小, 则  $k =$  ( ).

- (A) 1                      (B)  $\frac{1}{2}$                       (C)  $\frac{1}{3}$                       (D)  $\frac{1}{6}$

2. 若函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{ax^2}, & x > 0 \\ b, & x \leq 0 \end{cases}$  在  $x = 0$  处连续, 则 ( ).

- (A)  $ab = \frac{1}{2}$                       (B)  $ab = -\frac{1}{2}$                       (C)  $ab = 2$                       (D)  $ab = -2$

3. 设  $f(x)$  在  $x = 0$  处连续, 且  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 1$ , 则 ( ).

- (A)  $f(0) = 1$                       (B)  $f'(0) = 1$   
(C)  $x = 0$  是  $f(x)$  的极小值点                      (D)  $x = 0$  是  $f(x)$  的极大值点

4. 若  $f(x)$  连续, 且  $F(x) = \int_0^x f(t-x)dt$ , 则  $F'(x)$  为 ( ).

- (A)  $f(-x)$                       (B)  $-f(-x)$                       (C)  $f(0)$                       (D)  $-f(0)$

5. 反常积分  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)} dx$ ,  $\int_0^1 \frac{1}{x(x+1)} dx$  分别 ( ).

- (A) 收敛, 收敛                      (B) 收敛, 发散                      (C) 发散, 发散                      (D) 发散, 收敛

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

6. 数列极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \right) = \underline{\hspace{2cm}} .$

得 分	
-----	--

7. 曲线  $y = \frac{x^3}{x^2 + x - 2}$  的斜渐近线为  $\underline{\hspace{2cm}} .$

8. 设函数  $y = y(x)$  由方程  $x^2 + xy + y^2 = 3$  确定，则  $y(x)$  的极小值为  $\underline{\hspace{2cm}} .$

9. 由曲线  $y = \frac{4}{x}$  和直线  $y = x$  及  $y = 4x$  在第一象限中所围图形的面积为  $\underline{\hspace{2cm}} .$

10.  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{\sin x}{1+x^2} + \sin^2 x \right) dx = \underline{\hspace{2cm}} .$

三、计算题（每小题 10 分，共 60 分）

得 分	
-----	--

11. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x t \ln(1+t \sin t) dt}{1 - \cos x^2} .$

12. 求函数  $y = \frac{2x^2}{(1-x)^2}$  的凹凸区间及该函数图形的拐点.

13. 计算不定积分  $\int \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}} dx$  ( $x > 1$ ) .

14. 计算定积分  $\int_0^{\pi^2} \sqrt{x} \cos \sqrt{x} dx$  .

15. 求曲线  $y = x^3$  ( $x \geq 0$ ) 与直线  $x = 2$ ,  $y = 0$  所围成的图形绕  $y$  轴旋转产生的旋转体的体积.

16. 求微分方程  $(x^2 - 1)y' + 2xy = \cos x$  满足条件  $y(0) = 1$  的特解.

四、证明题（每小题 5 分，共 10 分）

得分	
----	--

17. 设函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上连续，在  $(0, 1)$  内可导，且  $f(a) = f(b) = 0$ ，证明：存在  $\xi \in (a, b)$ ，使得  $f'(\xi) - f(\xi) = 0$ .

18. 设  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续，且  $f(x) < 1$ . 证明：方程  $2x - \int_0^x f(t)dt = 1$  在  $(0, 1)$  内有且仅有一个实根.