安徽大学 2021—2022 学年第二学期

《高等数学 A（二）》期末试卷（A 卷）

（闭卷　　时间 120 分钟）

$\vec{s}_1=(1,-2,1)$, $\vec{s}_2=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&-1&0\\0&2&1\end{vmatrix}=(-1,-1,2)$, $\therefore \cos\theta=\dfrac{|\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2|}{|\vec{s}_1|\cdot|\vec{s}_2|}=\dfrac{1}{2}$, 故 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$

一、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1. 直线 $L_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-5}{-2}=\dfrac{z+8}{1}$ 与直线 $L_2:\begin{cases}x-y=6\\2y+z=3\end{cases}$ 的夹角为 θ（ C ）

(A) $\dfrac{\pi}{6}$　　(B) $\dfrac{\pi}{4}$　　(C) $\dfrac{\pi}{3}$　　(D) $\dfrac{\pi}{2}$

① $f_x'(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0$

或 $f(0,y)=0 \Rightarrow \dfrac{df(0,y)}{dy}=0$

故 $f_y'(0,0)=0$

2. 二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处（ C ）.

(A) 连续，偏导数存在　　(B) 连续，偏导数不存在

(C) 不连续，偏导数存在　　(D) 不连续，偏导数不存在

① 对于 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$,

取 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{kx^2}{(1+k^2)x^2}=\dfrac{k}{1+k^2}$

与 k 有关, 故 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ 不存在

$\Rightarrow f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 不连续.

3. 设 $f(x,y)$ 为连续函数，则 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^{1} f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr=$（ D ）.

$=\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$　　$D=\{(r,\theta)\mid 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}, \frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}\le r\le 1\}$

① $r=\dfrac{1}{\sin\theta+\cos\theta}$, 即 $r\sin\theta+r\cos\theta=1$

转为直角坐标方程为 $x+y=1$

② $r=1$ 对应 $x^2+y^2=1$

(A) $\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$　　(B) $\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$

(C) $\int_0^1 dx\int_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$　　(D) $\int_0^1 dx\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$

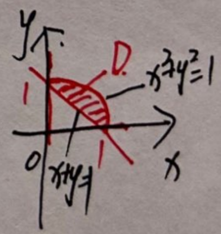
4. 设 $L: y=x, x\in[0,1]$，第一类曲线积分 $I_1=\int_L k(y-x)ds$，$I_2=\int_L (y-x^2)ds$，

$ds=\sqrt{1+1}\,dx=\sqrt{2}dx$

其中 k 为常数，则 I_1,I_2 的大小关系为（ A ）.

① $I_1=\int_L 0ds=0$

② $I_2=\int_0^1(x-x^2)\cdot\sqrt{2}dx>0$



(A) $I_1<I_2$　　(B) $I_1>I_2$　　(C) $I_1=I_2$　　(D) 无法比较

5. 若级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 在 $x=-1$ 处收敛，则此级数在 $x=2$ 处（ B ）.

即 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(-2)^n$ 收敛, 故 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 -2 处收敛. 由Abel定理 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ $(-2,2)$ 收敛, 且为绝对收敛.

(A) 发散　　(B) 绝对收敛　　(C) 条件收敛　　(D) 敛散性不定

而 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n$ $x=2$ 处对应 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n1^n$, 故其收敛, 且为绝对收敛.

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共

6. 函数 $z=x^2y+2xy$ 在点 $(1,1)$ 处的最大方向导数为 ___5___.

$z_x'=2xy+2y$, $z_y'=x^2+2x$

即为梯度方向的方向导数, 且值为 $|\mathrm{grad}\, z(1,1)|=\sqrt{4^2+3^2}=5$.

$z_x'(1,1)=4$, $z_y'(1,1)=3$ $\therefore \mathrm{grad}\, z(1,1)=(4,3)$

7. $z_x' = \frac{1}{1+(\frac{x+y}{x-y})^2}\cdot\frac{(x-y)-(x+y)}{(x-y)^2} = \frac{(x-y)^2}{(x-y)^2+(x+y)^2}\cdot\frac{-2y}{(x-y)^2} = \frac{-2y}{2(x^2+y^2)} = \frac{-y}{x^2+y^2}$

$\boxed{dz = z_x'dx + z_y'dy}$

7. 函数 $z=\arctan\frac{x+y}{x-y}$ 的全微分 $dz=$ $\underline{\frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}}$.

$z_y' = \frac{1}{1+(\frac{x+y}{x-y})^2}\cdot\frac{(x-y)-(-1)(x+y)}{(x-y)^2} = \frac{x}{x^2+y^2}$

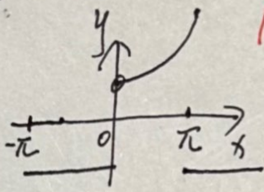
8. 设$\Omega=\{(x,y,z)|0\le x\le 1,0\le y\le 1,0\le z\le 2\}$，则三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} xydv=$ $\underline{\frac{1}{2}}$

8. $\iiint\limits_{\Omega} xydv=\int_0^1dx\int_0^1dy\int_0^2 xydz=\int_0^1xdx\cdot\int_0^1ydy\cdot\int_0^2 1dz=\frac12\cdot\frac12\cdot2=\frac12$

9. 设曲面Σ的方程为$x^2+y^2+z^2=1$，则曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} 3x^2 dS=$ $\underline{4\pi}$.

9. Σ具有轮换对称性. 故 $\iint\limits_{\Sigma} x^2dS=\iint\limits_{\Sigma} y^2dS=\iint\limits_{\Sigma} z^2dS$，$\therefore \iint\limits_{\Sigma} 3x^2dS=\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)dS=\iint\limits_{\Sigma} 1dS=4\pi$ (Σ面积)

10. 设函数 $f(x)=\begin{cases}-1,-\pi\le x\le 0,\\ 1+x^2,0<x\le\pi\end{cases}$ 则其以2π为周期的傅里叶级数在 $x=\pi$ 处收敛于 $\underline{\frac{\pi^2}{2}}$.



10. 如图，$f(x)$ $x=\pi$ 不连续.
故其 Fourier 级数 在π处
收敛于 $\frac{f(\pi^-)+f(\pi^+)}{2}=\frac{1+\pi^2+(-1)}{2}$
$=\frac{\pi^2}{2}$

三、解答题（本大题共 7 小题，每小题 9 分，共 63 分）

11. 求曲面$z=x^2+y^2$在点$(1,1,2)$处的切平面与法线方程.

12. 设$z=z(x,y)$是由方程$x+y-z=e^z$所确定隐函数，求$z_{xy}''(1,0)$.

13. 求函数 $f(x,y)=y^3-x^2+6x-12y+5$ 的极值. $f(x,y)$在$(3,2)$取极大值 $f(3,2)=\underline{\underline{30}}$

14. 计算二重积分$I=\iint\limits_{D}|y-x^2|d\sigma$，其中区域$D=\{(x,y)|0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$.

15. 计算曲线积分$I=\int_L(2+xe^{2y})dx+(x^2e^{2y}-1)dy$，其中$L$是沿着圆$(x-2)^2+y^2=4$顺时针方向的上半圆周.

16. 计算曲面积分$\iint\limits_{\Sigma}x^2ydydz+y^2\sin xdzdx+z^2dxdy$，其中$\Sigma$为圆柱面$x^2+y^2=1$介于平面$z$=0和$z$=1之间的部分，并取外侧.

17. 求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n$的收敛域及其和函数.

四、证明题（本题 7 分）

18. 设正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，级数$\sum_{n=1}^{\infty}(b_{n+1}-b_n)$收敛，证明$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$绝对收敛.

证：设$\sum_{n=1}^{\infty}(b_{n+1}-b_n)=S$，即其部分和数列$S_n$收敛到$S$. 故有$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}[(\cancel{b_2}-b_1)+(b_3-\cancel{b_2})+\cdots+(b_{n+1}-\cancel{b_n})]=S$.

即有$\lim_{n\to\infty}(b_{n+1}-b_1)=S$. $\therefore\lim_{n\to\infty}b_n=S+b_1$ (即$\{b_n\}$收敛，而收敛数列必有界).

故$\exists M>0$，s.t. $|b_n|\le M$. $\therefore 0\le|a_nb_n|\le Ma_n$，又$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛 $\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|$收敛. 即$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$绝对收敛.

安徽大学 2020—2021 学年第二学期

《高等数学 A（二）》期末试卷（A 卷）

（闭卷，时间 120 分钟）

考场登记表序号__________

题 号	一	二	三	四	五	总分
得 分						
阅卷人						

答 题 勿 超 装 订 线

装 订 线

一、 选择题（每小题 3 分，共 15 分）

$0\le\left|2020x\sin\frac{1}{y}\right|\le 2020x \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}2020x\sin\frac{1}{y}=0$

1. 二元极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\left[2020x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{2021x}\right]$（ B ）

$0\le\left|y\sin\frac{1}{2021x}\right|\le y \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}y\sin\frac{1}{2021x}=0$

A. 不存在　　B. 等于 0　　C. 等于 $\frac{2020}{2021}$　　D. 存在，但不等于 0 也不等于 $\frac{2020}{2021}$

2. 下列命题**正确的**是（ A ）

A. 若 $z=f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 点可微，则 $z=f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 点必连续.

B. 若 $z=f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 点存在二阶偏导数，则 $z=f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 点必有一阶连续偏导数 B. f_x', f_y' P_0 可偏导 $\not\Rightarrow$ f_x', f_y' P_0 连续.

C. 若 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内存在二阶偏导数，则在区域 D 内必有 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$. C. f_{xy}'', f_{yx}'' 连续 $\Rightarrow f_{xy}''=f_{yx}''$

D. 若 $z=f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 点存在一阶偏导数，则 $z=f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 点必可微。

D. f_x', f_y' P_0 连续 $\Rightarrow f(x,y)$ P_0 可微.

3. 设 $\Omega=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2\le z, 1\le z\le 2\}$，$f$ 在 Ω 上连续，则三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}f(z)dv=$（ D ）

D_z: $x^2+y^2\le z$, 其面积为 πz

A. $\pi\int_1^2 z^2 f(z)dz$　B. $2\pi\int_1^2 f(z)dz$　C. $2\pi\int_1^2 zf(z)dz$　D. $\pi\int_1^2 zf(z)dz$

$=\int_1^2 dz\iint\limits_{D_z}f(z)dxdy$

$=\int_1^2 f(z)\cdot\pi z\,dz=\pi\int_1^2 z f(z)dz$

4. 若第二类曲线积分 $\int_L(6xy+ky^2)dx+(3x^2+4xy)dy$ 与路径无关，则 k 的值是（ B ）

$P=6xy+ky^2$, $Q=3x^2+4xy$　由 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$. ∴ $6x+2ky=6x+4y$ $\Rightarrow k=2$

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

5. 设有以下命题 ① 如: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$　$u_{2n-1}+u_{2n}=0$.

× ①若 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛　✓ ②若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_{n+2021}$ 收敛（级数去掉前有限项不改变级数敛散性）

✓ ③若**正项**级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛　× ④若 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 都收敛

则以上命题中**正确的**是（ B ）

④ 如: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$ 都发散

A. ①②；　　B. ②③；　　C. ③④；　　D. ②④

但 $\sum_{n=1}^{\infty}[(-1)^n+(-1)^{n+1}]$ 收敛.

③: 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛 ∴ $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$

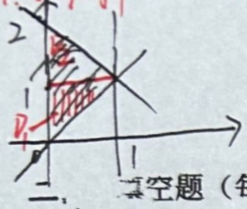
取 $\varepsilon=1$, $\exists N\in Z^+$, $n>N$ 时, $|a_n-0|<1$ 即 $0\le a_n<1$

∴ $n>N$ 时, $0\le a_n^2<a_n$ 由比较判别法, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛　（注: 若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 不是正项级数, 结论不成立）

如 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$ 收敛, 但 $\sum\frac{1}{n}$ 发散

7. $D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1,\ x\le y\le 2-x\} \Rightarrow D_1\cup D_2$ $D_1=\{(x,y)\mid 0\le y\le 1,\ 0\le x\le y\}$

$D_2=\{(x,y)\mid 1\le y\le 2,\ 0\le x\le 2-y\}$



6. $d=\frac{|1\cdot 1+2\cdot 2-2\cdot 3-1|}{\sqrt{1+4+4}}=\frac{2}{3}$

(平面π：$x+2y-2z-1=0$)

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

6. 点$P(1,2,3)$到平面$x+2y-2z=1$的距离为 $\frac{2}{3}$.

7. $\int_0^1 dx\int_x^{2-x} f(x,y)dy$ 交换积分次序是 $\int_0^1 dy\int_0^y f(x,y)dx+\int_1^2 dy\int_0^{2-y} f(x,y)dx$

8. 函数 $f(x,y)=x^3-4x^2+2xy-y^2$ 的极值点是 $(0,0)$

9. 已知 $z=f(x^2+y^2,\frac{x}{y})$, f 可微，则全微分 $dz=(2f_1'x+f_2'\cdot\frac{1}{y})dx+(2f_1'y-f_2'\cdot\frac{x}{y^2})dy$

8. $\begin{cases} f_x'=3x^2-8x+2y=0 \\ f_y'=2x-2y=0 \end{cases} \Rightarrow$ 驻点 $(0,0)$ 及 $(2,2)$

$f_{xy}''=2$, $f_{xx}''=6x-8$, $f_{yy}''=-2$ $(0,0)$ $AC-B^2>0$

$(2,2)$ $AC-B^2<0$ 非极值点

10. 设$\overrightarrow{F}(x,y,z)=\left\{e^x\sin y,2xy^2+z,xzy^2\right\}$，则散度 $div\overrightarrow{F}\big|_{(1,0,1)}=$ 0

10. $P=e^x\sin y$, $Q=2xy^2+z$, $R=xzy^2$ $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=e^x\sin y+4xy+xy^2$ $\therefore div\vec{F}\big|_{(1,0,1)}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\Big|_{(1,0,1)}=e\cdot 0+4\cdot 0+1\cdot 0=0$

三、计算题（每小题 9 分，共 54 分）

11. 设 $z=z(x,y)$ 是由 $z^3-3xyz=a^3$ 确定的隐函数，计算偏导数 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

12. 计算第一类曲面积分 $\oiint\limits_{\Sigma}(z-1)^2dS$，其中 Σ 球面 $x^2+y^2+z^2=9$.

13. 计算第二类曲面积分 $\iint\limits_{S}(x^3+1)dydz+(y^3+1)dzdx+(z^3+1)dxdy$， S 为上半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的上侧.

14. 计算第一类曲线积分 $\int_L\sqrt{x^2+y^2}\,ds$，其中 L 为 $x^2+y^2=ax(a>0)$.

15. 计算幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ 的收敛域与和函数，并求常数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)2^n}$ 的和.

16. 将函数 $f(x)=\begin{cases}-x & -\pi\le x<0\\ x & 0\le x\le\pi\end{cases}$ 展开为傅里叶级数.

四、应用题（每小题 10 分，共 10 分）

17. 求质点 $M(x,y)$ 在变力 $\overrightarrow{F}=(y+3x)\vec{i}+(2y-x)\vec{j}$ 的作用下沿路径 L 顺时针方向运动一周所做的功, 其中 L 为椭圆 $4x^2+y^2=4$.

五、证明题（每小题 6 分，共 6 分）

18. 证明级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\sin(n\pi+\frac{1}{\ln n})$ 条件收敛.

证：$\sum_{n=2}^{\infty}\sin(n\pi+\frac{1}{\ln n})=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\sin\frac{1}{\ln n}$，其中 $u_n=\sin\frac{1}{\ln n}$

① $n\ge 3$时, $\ln n>1$, 则 $0<\frac{1}{\ln n}<1<\frac{\pi}{2}$, $\therefore \sin\frac{1}{\ln n}>0$. 故级数为交错级数.

且 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{1}{\ln n}=0$, 又 $n\ge 3$时, $\{\frac{1}{\ln n}\}\downarrow$, $\frac{1}{\ln n}\in[0,\frac{\pi}{2}]$, 故 $\{\sin\frac{1}{\ln n}\}\downarrow$.

由Leibniz判别法, $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\sin\frac{1}{\ln n}$ 收敛

② $\cancel{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{\ln n}}{\frac{1}{\ln n}}=1}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{\ln n}}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\ln n}=+\infty$. 又 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散, $\therefore$ 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\frac{1}{\ln n})$ 发散

由①②, 级数为条件收敛.