安徽大学电子信息工程学院 20 18 —20 19 学年第 1 学期

《高等数学 A（一）》咸鱼班学业水平检测试卷

（闭卷　　时间 120 分钟）

考场座位号_____

题 号	一	二	三	四	五	总分
得 分						
阅卷人						

院/系______ 年级______ 专业______ 姓名______ 学号______

答 题 勿 超 装 订 线

装 订 线

一、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

得 分

1．曲线若 $y=e^{\frac{1}{x^2}}\arctan\dfrac{x^2+x+1}{(x-1)(x-2)}$ 的渐近线有 2 条。

2．设 $f(x)=x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)$，则 $f'(0)=$ $n!$ 。

3．若曲线 $L_1: y=x^2+ax+b$ 与 $L_2: 2y=-1+xy^3$ 在 $(1,-1)$ 处相切，则 $a=$ -1 ， $b=$ -1。

4．设常数 $k>0$，函数 $f(x)=\ln x-\dfrac{x}{e}+k$ 在 $(0,+\infty)$ 内零点个数为 2 。

5．设 $f(x)=e^{2x}(x^2+2x+2)$，则 $f^{(n)}(x)=2^{n-2}e^{2x}[4x^2+(4n+8)x+(n^2+3n+8)]$。

二、单项选择题（每小题 2 分，共 10 分）

得 分

6．设在 $[0,1]$ 上 $f''(x)>0$，则 $f'(0)$， $f'(1)$， $f(1)-f(0)$ 和 $f(0)-f(1)$ 四个数的大小顺序为（B）

A、 $f'(1)>f'(0)>f(1)-f(0)$　　B、 $f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$

C、 $f(1)-f(0)>f'(1)>f'(0)$　　D、 $f'(1)>f(0)-f(1)>f'(0)$

7．设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}} & x\neq 1\\ 0 & x=1\end{cases}$，则点 $x=1$ 是 $f(x)$ 的（D）

A、连续点　　B、可去间断点　　C、跳跃间断点　　D、第二类间断点

8．设 $f\left(x\right)$ 在 R 上有一阶导数，记 $\Gamma\left(x\right)=f\left(x\right)x^2$，则 $\Gamma\left(x\right)$ 在 $x=0$ 点有（B）导数。

A、1 阶　　　　B、2 阶　　　　C、不存在 3 阶　　　D、不能确定

9．设 $f'\left(x_0\right)=f''\left(x_0\right)=0$， $f'''\left(x_0\right)>0$，则下列正确的表述为（C）

A、 $f'\left(x_0\right)$ 是 $f'\left(x\right)$ 的极大值　　　　B、 $f\left(x_0\right)$ 是 $f\left(x\right)$ 的极大值

C、$\left(x_0,f\left(x_0\right)\right)$ 是曲线 $y=f\left(x\right)$ 的拐点　　　　D、 $f\left(x_0\right)$ 是 $f\left(x\right)$ 的极小值

10．已知 $\lim\limits_{x\to0}f\left(x\right)$ 存在，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+f\left(x\right)\sin 2x}-1}{e^{3x}-1}=2$，则 $\lim\limits_{x\to0}f\left(x\right)=$（A）

A、6　　　　B、3　　　　C、1　　　　D、2

得 分	

三、计算题（11、12、15 题每题 10 分，13、14 每题 12 分，共 54 分）

11．已知 $x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}\ \left(n\in N_*\right)$，且 $x_1=\sqrt{2}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$。**（10 分）**

解：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$，具体求解可利用单调有界定理求解。

12．求下列函数的极限。**（10 分）**

（1） $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\arctan x\right)^x$

（2） $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{1}{\ln\left(1+x\right)}-\dfrac{1}{x}\right]$

解：

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\frac{2}{\pi}+\ln\arctan x}{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\arctan x}\bullet\frac{-x^2}{1+x^2}\right)=-\frac{2}{\pi}$$

$\therefore$ 原式=$e^{-\frac{2}{\pi}}$

解：

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{2(x+1)}=\frac{1}{2}$$

13．求下列函数的导数。（**12 分**）

（1） 已知 $y=\sqrt{x\sin x\sqrt{1-e^x}}$ ，求 y 的一阶导数；

（2） 设 $y=y(x)$ 是由 $e^y+xy=e$ 所确定，求 y 的二阶导数；

解：（1）对 $y=\sqrt{x\sin x\sqrt{1-e^x}}$ 两边取对数运算，

$$\ln y=\frac{1}{2}\left[\ln x+\ln\sin x+\frac{1}{2}\ln\left(1-e^x\right)\right]$$

再同时两边对 x 求导

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{1}{2}\bullet\frac{-e^x}{1-e^x}\right)$$

$$\therefore y'=\frac{1}{2}\sqrt{x\sin x\sqrt{1-e^x}}\left(\frac{1}{x}+\cot x+\frac{-e^x}{2\left(1-e^x\right)}\right)$$

（2）$e^y+xy=e$ 两边对 y 求导，

$$e^y\bullet y'+y+xy'=0$$

得：

$$y'=-\frac{y}{e^y+x}$$

再对 $e^y\bullet y'+y+xy'=0$ 两边求 y 的导数，

$$e^y\bullet(y')^2+e^y\bullet y''+2y'+x\bullet y''=0$$

得：

$$y''=\frac{e^y\bullet(y')^2+2y'}{e^y+x}$$

将 $y'=-\dfrac{y}{e^y+x}$ 代入上式，即：

$$y''=-\frac{\left(y^2-2y\right)e^y-2xy}{\left(e^y+x\right)^3}$$

14．计算下列不定积分。（**12 分**）

（1） $I=\int\dfrac{xe^x dx}{\sqrt{1+e^x}}$；

（2） 设 $\dfrac{\sin x}{x}$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，求 $I=\int d[f(x)x^2]$；

解：（1）令 $\sqrt{1+\mathrm{e}^x}=t$，则 $x=\ln(t^2-1)$，$dx=\dfrac{2t}{t^2-1}dt$；所以，

原式$=2\int\ln(t^2-1)dt=2\int\ln(t+1)dt+2\int\ln(t-1)dt$

$=2[(t+1)\ln(t+1)-(t+1)+(t-1)\ln(t-1)-(t-1)]+C$

$=2[t\ln(t^2-1)+\ln|\dfrac{t+1}{t-1}|-2t]+C$

$=2x\sqrt{1+e^x}-4x\sqrt{1+e^x}+2\ln\dfrac{\sqrt{1+e^x}+1}{\sqrt{1+e^x}-1}+C$

（2）

$F(x)=\dfrac{\sin x}{x}, f(x)=F'(x)=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$

$x^2 f(x)=x\cos x-\sin x$

$d[f(x)x^2]=d[x\cos x-\sin x]=-x\sin xdx$

原式$=\int-x\sin xdx=\int xd\cos x=x\cos x-\int\cos xdx$

$=x\cos x-\sin x+C$

15．判断$\int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx$的敛散性，若收敛，计算它的值；若发散，给出理由。(**10 分**)

解：因为$x=1$为奇点，所以：

$$原式=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{1+\varepsilon}^{2}\frac{dx}{x^2\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}}$$

$$=-\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{1+\varepsilon}^{2}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}}d\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$=-\lim_{\varepsilon\to 0^+}\arcsin\left(\frac{1}{x}\right)\Big|_{1+\varepsilon}^{2}=\pi/3$$

因此该积分收敛，积分计算结果为$\frac{\pi}{3}$。

四、应用题（每小题 8 分，共 16 分）

得 分	

16．设有曲线$y=\sqrt{x-1}$，过原点做其切线，求由此曲线、切线及 x 轴围成平面图形绕 x 轴旋转一周所得到旋转体的表面积。(**8 分**)

解：根据题意可求切线方程为$y=\frac{1}{2}x$，切点为$(2,1)$；

其中，$y=\sqrt{x-1}$ $(1\le x\le 2)$绕 x 轴旋转一周所得旋转面的面积S_1：

$$S_1=\int_1^2 2\pi y\sqrt{1+y'^2}dx=\frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right)$$

$y=\frac{1}{2}x$ $(0\le x\le 2)$绕 x 轴旋转一周所得旋转面的面积S_2

$$S_2=\int_0^2 2\pi\bullet\frac{1}{2}x\bullet\frac{\sqrt{5}}{2}dx=\sqrt{5}\pi$$

因此，旋转体的表面积为$S=S_1+S_2=\frac{\pi}{6}\left(11\sqrt{5}-1\right)$。

17．在单位圆$x^2+y^2=1$的第二象限部分上求一点P，使过该点的切线、单位圆以及两坐标轴所围成的图形的面积最小，写出切线方程，并求出最小面积。要求：画图示意+公式理论求解。（**8 分**）

解：P点坐标为$\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$，切线方程：$y=x+\sqrt{2}$，最小面积$S=1-\dfrac{1}{4}\pi$。

五、证明题（每小题 5 分，共 10 分）

18．设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且$f(a)=f(b)=0$，试证：存在$\xi\in(a,b)$,使得$f'(\xi)=\lambda f(\xi)$。（**5 分**）

证：

令$F(x)=f(x)e^{-\lambda x}$

$\because f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导

$\therefore F(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导

$\because F(a)=f(a)e^{-\lambda a}$，$F(b)=f(b)e^{-\lambda b}$

$f(a)=f(b)=0$

$\therefore F(a)=F(b)$

由$Rolle$定理可知，存在$\xi\in(a,b)$，使得$F'(\xi)=0$

即$e^{-\lambda\xi}\left[f'(\xi)-\lambda f(\xi)\right]=0$

$\therefore f'(\xi)=\lambda f(\xi)$

19. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，且 $f(0)=f(1)=0$，试证：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f''(\xi)=\dfrac{2f'(\xi)}{1-\xi}$。

（5 分）

证：

$\because f(x)$在$[0,1]$上可导，且$f(0)=f(1)=0$

$\therefore$存在$\eta\in(0,1)$，使得$f'(\eta)=0$

令$F(x)=f'(x)(1-x^2)$，则在$[\eta,1]$上$F(\eta)=F(1)=0$

$\therefore$存在$\xi\in(\eta,1)\subset(0,1)$，使得$F'(\xi)=0$

即$f''(\xi)(1-\xi)^2+2f'(\xi)(1-\xi)\bullet(-1)=0$

$\therefore$可得$f''(\xi)=\dfrac{2f'(\xi)}{1-\xi}$