安徽大学 2014~2015 年期末试卷

《 电磁场与电磁波 》考试试题参考答案及评分标准

一、填空题（每空 1 分，共 20 分）

1、亥姆霍兹定理表明矢量场 $\boldsymbol{F}$ 由它的$\boxed{\text{旋度}}$和$\boxed{\text{散度}}$及边界条件唯一地确定。

2、无界真空中，线密度为 ρ_l 的无限长线电荷产生的电场强度为$\boxed{\mathbf{E}=\dfrac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0 r}\mathbf{e}_\mathbf{r}}$。

3、在导电媒质中，电磁波的相速随频率变化称为$\boxed{\text{色散}}$现象。

4、空气中一均匀平面波的电场为 $\boldsymbol{E}=(3\boldsymbol{e}_x+A\boldsymbol{e}_y)e^{\mathrm{j}kz}$，欲使其为右旋圆极化波，则 A=$\boxed{3\mathrm{j}}$；欲使其为左旋圆极化波，则 A=$\boxed{-3\mathrm{j}}$。

5、时变电磁场可以用一个标量位函数 ϕ 和一个矢量位函数 $\boldsymbol{A}$ 来描述，它们与电场 $\boldsymbol{E}$ 、磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 之间的关系分别为$\boxed{\boldsymbol{E}=-\nabla\phi-\dfrac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}}$、$\boxed{\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}}$。

6、已知真空中恒定磁场的磁感应强度 $\boldsymbol{B}=x\boldsymbol{e}_x+my\boldsymbol{e}_y$，则常数 $m=\boxed{-1}$，体电流密度 $\boldsymbol{J}=\boxed{0}$。

7、均匀平面波垂直入射到理想导体表面上，入射波电场振幅与反射波电场振幅的关系是$\boxed{E_{i0}=-E_{r0}}$，透射波的电场振幅为$\boxed{0}$。

8、矩形波导 $(a>b)$ 的主模是$\boxed{TE_{10}}$；圆波导的主模是$\boxed{TE_{11}}$；同轴线的主模是$\boxed{TEM}$。

9、矩形金属波导谐振腔 TE_{mnp} 、TM_{mnp} 模式中的下标 m 表示$\boxed{\text{场量沿谐振腔宽边方向变化的半驻波数}}$，$n$ 表示$\boxed{\text{场量沿谐振腔窄边方向变化的半驻波数}}$，$p$ 表示$\boxed{\text{场量沿谐振腔纵向变化的半驻波数}}$。

10、电流元的方向图函数 $f(\theta,\varphi)$ 为$\boxed{\sin\theta}$，方向性系数为$\boxed{1.5}$。

二、选择填空题（每小题 2 分，共 10 分）

1、若一个矢量函数的散度恒等于零，则这个矢量函数可以表示为一个（A）。

A．矢量函数的旋度　　B. 矢量函数的散度　　C. 标量函数的梯度

2、下面关于圆波导简并模叙述正确的是（ B ）。

A. TE_{1n} 模与 TM_{0n} 模简并　　B. TE_{0n} 模与 TM_{1n} 模简并　　C. 所有模式都存在极化简并

3、两导体平面相交成 60° 角，采用镜像法求解，其镜像电荷数为(B)个。

A. 7　　B. 5　　C. 4

4、填充 $\mu_r = 1$、$\varepsilon_r = 4$ 均匀介质的同轴线，其主模的相速度等于（ C ）。

A. $3\times10^{8} m/s$　　B. $2\times10^{8} m/s$　　C. $1.5\times10^{8} m/s$

4、当一个任意极化的电磁波以（ A ）入射到理想介质分界面时，其反射波中只剩下垂直极化波。

A. 布儒斯特角　　B. 临界角　　C. 折射角

三、简答题（共 10 分）

1、写出线性均匀各向同性媒质中麦克斯韦方程组的微分形式，并说明其物理意义。（6 分）

答:
$$\nabla\times\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \varepsilon\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$
$$\nabla\times\boldsymbol{E} = -\mu\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}$$
（4 分）
$$\nabla\cdot\mu\boldsymbol{H} = 0$$
$$\nabla\cdot\varepsilon\boldsymbol{E} = \rho$$

物理意义：麦克斯韦方程组反映了电磁场和源之间的全部关系，即真实电流和变化的电场是磁场的源，真实的电荷和变化的磁场是电场的源。　　（2 分）

2、写出时变场中不同介质分界面上的边界条件。（4 分）

$$E_{1t} = E_{2t}$$
$$H_{1t} - H_{2t} = J_s$$
$$D_{1n} - D_{2n} = \rho_s$$
$$B_{1n} = B_{2n}$$

四、计算题（每小题 15 分，共 60 分）

1、空气绝缘的无限长同轴线通过电流 I，内导体半径为 a，外导体半径为 b，假设外导体厚度很薄，其中的储能可以忽略不计，求：

（1）同轴线内外的磁场分布；

（2）同轴线单位长度内储藏的磁场能量。

解：设同轴线内外导体的电流分别为 I、-I

(1) 由安培环路定律 $\oint_l \mathrm{H}\cdot d\mathrm{l} = \sum I$ 得：

$r \le a$　　$H_1 = \dfrac{Ir}{2\pi a^2} e_{\varphi}$

$a \le r \le b \qquad H_2 = \frac{I}{2\pi r} e_\varphi$

$r \ge b \qquad H_3 = 0$

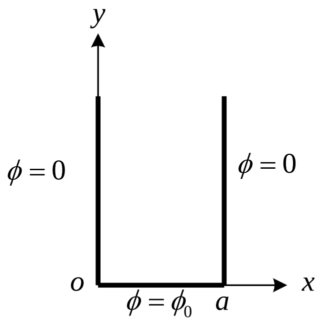
（9 分）

$$W_m = \frac{1}{2}\int_{v_1} \mu_0 H^2 d\tau + \frac{1}{2}\int_{v_2} \mu_0 H^2 d\tau$$

总磁场能量 $= \frac{1}{2}\int_a^b \mu_0 {H_2}^2 2\pi r \ dr + \frac{1}{2}\int_0^a \mu_0 {H_1}^2 2\pi r \ dr$ (6 分)

$$= \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \ln\frac{b}{a} + \frac{\mu_0 I^2}{16\pi}$$

2、如下图所示，无限长金属槽，两平行侧壁相距为a，高度向上方无限延伸，两侧壁的电位为零，槽底电位为ϕ_0，试求槽内的电位分布。



解：因为金属管在 z 轴方向为无限长，故管中的电位分布与 Z 坐标无关，令$\phi(x,y) = f(x)g(y)$

由题意得边界条件为

$y = 0, 0 < x < a$，$\phi = \phi_0$

$y = \infty, 0 < x < a$，$\phi = 0$

$x = 0, 0 < y < b$，$\phi = 0$

$x = a, 0 < y < b$，$\phi = 0$ （2 分）

由边界条件易写出槽内电位函数应该为

$$\phi = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \mathrm{e}^{-\frac{m\pi}{a}y} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)$$ （10 分）

由边界条件$\phi|_{y=0} = \phi_0$，得

$$\sum_{m=1}^{\infty} C_m \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) = \phi_0$$ （ 2 分）

对上述方程两边乘以$\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$，并对$x$从$0 \to a$积分，得到

$$\frac{a}{2}C_n = \int_0^a \phi_0 \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\mathrm{d}x$$

当n为奇数时，得到

$$\frac{a}{2}C_n = \frac{a\phi_0}{n\pi}(1 - \cos n\pi)$$

即 $C_n = \dfrac{4\phi_0}{n\pi}(n = 1,3,5,\cdots,\infty)$

因此，槽内电位函数为

$$\phi = \frac{4\phi_0}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\mathrm{e}^{-\frac{m\pi}{a}y}\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \quad (m = 1,3,5,\cdots,\infty) \qquad （1 分）$$

3、已知空气填充的矩形波导截面尺寸为 $a \times b = 23 \times 10 mm^2$，

（1）工作波长为 $\lambda = 20mm$ 时，波导中可传输哪些模式？

（2）工作波长为 $\lambda = 30mm$ 时，波导中可传输哪些模式？

（3）写出其主模的波导波长、相速度和波阻抗的公式。

解：

$$\lambda_c = \frac{2}{\sqrt{(\frac{m}{a})^2 + (\frac{n}{b})^2}} \qquad （3 分）$$

$m = 1, n = 0 \quad \lambda_c = 2a = 46mm$

$m = 2, n = 0 \quad \lambda_c = a = 23mm$

$m = 0, n = 1 \quad \lambda_c = 2b = 20mm$ （3 分）

（1）$\lambda = 20mm$， 满足传输条件 $\lambda \langle \lambda_c$ 的模式有 TE_{10}, TE_{20} （3 分）

（2）$\lambda = 30mm$，满足传输条件 $\lambda \langle \lambda_c$ 的模式有 TE_{10} （3 分）

（3）$\lambda_g = \dfrac{\lambda}{\sqrt{1 - (\frac{\lambda}{2a})^2}}$ （1 分）

$$v_p = \frac{v}{\sqrt{1 - (\frac{\lambda}{2a})^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - (\frac{\lambda}{2a})^2}} \qquad （1 分）$$

$$Z_{TE_{10}} = \frac{120\pi}{\sqrt{1 - (\frac{\lambda}{2a})^2}} \qquad （1 分）$$

4、两块相互平行的无限大理想导体板分别置于 $x = 0$ 和 $x = a$ 处，其间填充空气。已知两板间传输的电磁波的电场一般表达式为：

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{e}_y E_m(\sin K_x x + A\cos K_x x)e^{-j\beta z}$$

（1）利用边界条件确定常数 A 和 K_x；

（2）求出与 $\boldsymbol{E}$ 相应的磁场强度;

（3）求两导体板内表面上的电流密度表达式;

（4）此电磁波是TEM波、TE波还是TM波？

（1）边界条件为：$x = 0,\ a$；$E_y = 0$。

利用 $x = 0,\ \ E_y = 0$ 得：$A = 0$

利用 $x = a,\ \ E_y = 0$ 得：$\sin K_x a = 0$，则 $K_x = \dfrac{n\pi}{a}$。 (6 分)

$$\Rightarrow \boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_y E_y=\boldsymbol{e}_y E_m \sin(\frac{n\pi}{a}x)\, e^{-\mathrm{j}\beta Z}$$

（2）由 maxwell 方程 $\nabla\times\boldsymbol{E}=-j\omega\mu_0\boldsymbol{H}$ 得

$$\boldsymbol{H}=\frac{\nabla\times\boldsymbol{E}}{-\mathrm{j}\omega\mu_0}=\frac{1}{-\mathrm{j}\omega\mu_0}\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 0 & E_y & 0\end{vmatrix}=\frac{1}{-\mathrm{j}\omega\mu_0}(-\frac{\partial E_y}{\partial z}\boldsymbol{e}_x+\frac{\partial E_y}{\partial x}\boldsymbol{e}_z)$$

$$=\frac{1}{-\mathrm{j}\omega\mu_0}[\mathrm{j}\beta E_m\sin(\frac{n\pi}{a}x)\, e^{-\mathrm{j}\beta Z}\boldsymbol{e}_x+E_m(\frac{n\pi}{a})\cos(\frac{n\pi}{a}x)\, e^{-\mathrm{j}\beta Z}\boldsymbol{e}_z]$$ (4 分)

$$=\frac{\beta}{-\omega\mu_0}E_m\sin(\frac{n\pi}{a}x)\, e^{-\mathrm{j}\beta Z}\boldsymbol{e}_x+\frac{1}{-\mathrm{j}\omega\mu_0}E_m(\frac{n\pi}{a})\cos(\frac{n\pi}{a}x)\, e^{-\mathrm{j}\beta Z}\boldsymbol{e}_z$$

（3）导体板内表面上的电流密度

$$\boldsymbol{J}_S\big|_{x=0}=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}\big|_{x=0}=\boldsymbol{e}_x\times(H_x\boldsymbol{e}_x+H_z\boldsymbol{e}_z)\big|_{x=0}$$

$$=-H_z\big|_{x=0}\,\boldsymbol{e}_y=\frac{1}{\mathrm{j}\omega\mu_0}E_m(\frac{n\pi}{a})\, e^{-\mathrm{j}\beta Z}\boldsymbol{e}_y$$

$$\boldsymbol{J}_S\big|_{x=a}=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}\big|_{x=a}=-\boldsymbol{e}_x\times(H_x\boldsymbol{e}_x+H_z\boldsymbol{e}_z)\big|_{x=a}$$

$$=H_z\big|_{x=a}\,\boldsymbol{e}_y=\frac{1}{-\mathrm{j}\omega\mu_0}E_m(\frac{n\pi}{a})\cos(n\pi)\, e^{-\mathrm{j}\beta Z}\boldsymbol{e}_y$$ (4 分)

（4）此电磁波是 TE 波 (1 分)