

Teoría del Aprendizaje Estadístico

Nicolas Silva Nash
Departamento de Matemática
Universidad Nacional del Comahue

27 de diciembre de 2024

1. Introducción

La Teoría del Aprendizaje Estadístico proporciona la base teórica para muchos de los algoritmos de aprendizaje automático actuales y, sin lugar a dudas, es una de las ramas más bellamente desarrolladas de la inteligencia artificial en general. Nació con el perceptrón de Rosenblatt y la escuela matemática de la Unión Soviética en la década de 1960, y ganó amplia popularidad en la década de 1990 tras el desarrollo de las llamadas Máquinas de Vectores de Soporte (*SVM*, por sus siglas en inglés), que se han convertido en una herramienta estándar para el reconocimiento de patrones en muchas disciplinas, que van desde la visión por computadora hasta la biología computacional.

Proporcionar la base para nuevos algoritmos de aprendizaje no ha sido la única motivación para desarrollar la Teoría del Aprendizaje Estadístico. También ha sido una gesta de carácter filosófico, en el intento de responder a la pregunta de qué nos permite extraer conclusiones válidas a partir de datos empíricos.

2. El aprendizaje

En este contexto, el *aprendizaje* es el proceso a través del cual pueden inferirse reglas generales a partir de ejemplos. Nos interesa entender como una máquina -una computadora- puede resolver ciertos problemas sin conocer las reglas de antemano, solo a partir de ejemplos y a través de un *algoritmo de aprendizaje*. El objetivo es que la máquina pueda no solo aprender a reconocer las reglas que rigen a los ejemplos dados, si no que también pueden generalizar dichas reglas para ejemplos que le serán presentados con posterioridad.

Llamamos a esta disciplina *aprendizaje automático* (en inglés, *Machine Learning*, literalmente “aprendizaje de máquinas”) y reconocemos sus raíces en otras disciplinas: Estadística Matemática, Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial. Si bien el aprendizaje suele ser una parte fundamental de la mayoría de los esfuerzos en materia de Inteligencia Artificial, el objetivo del Machine

Learning es más acotado que el de su rama madre: En vez de intentar definir, explicar o generar comportamiento inteligente o *inteligencia*, aquí nos interesa solamente descubrir los mecanismos a través de los cuales las computadoras pueden resolver algunas tareas acotadas y bien definidas, y que en general escapan a soluciones que pueden ser especificadas con una cantidad finita de código de programación (reglas determinísticas).

Con fines ilustrativos, nos centraremos primero en el más conocido de los problemas del Machine Learning, el de clasificación. Consideremos dos espacios de variables: X , llamado *espacio de entrada*, e Y , el *espacio de etiquetas*. En un problema de clasificación, deseamos poder etiquetar correctamente elementos de X con los valores de Y . Por ejemplo, podríamos querer clasificar un conjunto de datos, en alguna representación fija, de distintos objetos en una cantidad de etiquetas como: silla, cama, microondas, perro, gato. Si esta representación es en imágenes de $N \times M$ píxeles en blanco y negro (realmente, matrices de orden $N \times M$ con coeficientes reales en el intervalo $[0, 1]$ que representan la intensidad de cada píxel, del negro al blanco), el espacio X es el conjunto de dichas matrices y el espacio Y las categorías distintas que corresponden a lo que las imágenes muestran. Con el fin de aprender, a un algoritmo se le muestran ejemplos de imágenes y sus respectivas etiquetas $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$, a partir de los cuales este debe encontrar una función $f : X \rightarrow Y$, que comete la menor cantidad de errores posibles. A esta función f la llamamos *clasificador*.

3. La historia del aprendizaje automático

El primer modelo de aprendizaje automático, según Vapnik en [2], fue sugerido por F. Rosenblatt, un psicólogo estadounidense, al que llamó *perceptrón*, y su introducción constituye el comienzo del análisis matemático del aprendizaje. Conceptualmente, la idea del perceptrón no era nueva, estando presente en la literatura de Neurofisiología durante varios años. Rosenblatt, sin embargo, se aventuró en describir el modelo como un programa para computadoras y demostró con simples experimentos que dicho modelo era generalizable. El perceptrón fue construido como una solución a un problema particular dentro del aprendizaje automático, el reconocimiento de patrones. En el caso más sencillo, este problema consiste en hallar una regla para separar datos en dos categorías distintas a partir de ejemplos.

Para construir la regla de separación, el perceptrón sigue el modelo más sencillo de neurona, propuesto previamente por McCulloch y Pitts, de acuerdo al cual una neurona recibe n valores (o *inputs*) en la forma de un vector $x = (x^1, \dots, x^n) \in X \subset \mathbb{R}^n$ y genera una etiqueta (*output*) $y \in \{-1, +1\}$ a través de una dependencia funcional dada por

$$y = \text{sgn}\{(w \cdot x) - b\}$$

con \cdot el producto interno de vectores en \mathbb{R}^n , b un valor de límite y un vector

w que se genera en el proceso de aprendizaje. Geométricamente, una neurona divide el espacio X en dos regiones: en una la etiqueta y vale $+1$ y en la otra -1 . Las dos regiones son separadas por el hiperplano:

$$(w \cdot x) - b = 0$$

El vector w y el escalar b determinan la posición del hiperplano y sus valores son aprendidos por el perceptrón. Cuando combinamos varias neuronas, el perceptrón separa el espacio de entrada en en dos regiones lineales a trozos y no necesariamente conexas. En 1960 no era claro como elegir todos los parámetros (w_1, \dots, w_k) y (b_1, \dots, b_k) de todas las neuronas, por lo que se fijaban los valores de las primeras $k-1$ y se intentaba encontrar los valores deseables para la última de ellas. Rosenblat proponía

4. Bibliografía

- [1] *Statistical Learning Theory: Models, Concepts and Results* - von Luxburg, Schölkopf (2008)
- [2] *The Nature of Statistical Learning Theory, second edition* - Vladimir Vapnik (2000)