सदिश

Ex 13.1

प्रश्न 1. निम्नलिखित सदिशों के परिमाण का परिकलन कीजिए :

$$\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$$

$$\vec{b} = 2\hat{i} - 7\hat{j} - 3\hat{k}$$

$$\vec{c} = \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{j} - \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{k}$$

हल :

सदिश का परिमाण

$$= |\vec{a}|$$

$$\therefore \quad |\vec{a}| = |\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}|$$

$$= \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}$$

$$= \sqrt{1 + 1 + 1} = \sqrt{3}$$

सदिश का परिमाण

$$= |\vec{b}|$$

$$\therefore \quad |\vec{b}| = |2\hat{i} - 7\hat{j} - 3\hat{k}|$$

$$= \sqrt{2^2 + (-7)^2 + (-3)^2}$$

$$= \sqrt{4 + 49 + 9} = \sqrt{62}$$

सदिश का परिमाण

$= |\vec{c}|$

$$\therefore \quad |\vec{c}| = \left|\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{j} - \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{k}\right|$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}}$$

$$= \sqrt{\frac{3}{3}} = \sqrt{1} = 1.$$

अत: दिए गए सदिशों के परिमाण क्रमशः √3, √62 तथा 1 हैं।

प्रश्न 2. समान परिमाण वाले दो विभिन्न सदिश लिखिए।

हल : माना सदिश

$\vec{a} = 3\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k}$

तथा

$\vec{b} = 4\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$

है

$$\text{अब} \quad |\vec{a}| = |3\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k}|$$

$$= \sqrt{3^2 + 4^2 + (-1)^2}$$

$$= \sqrt{9 + 16 + 1} = \sqrt{26}$$

$$\text{तथा} \quad |\vec{b}| = |4\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}|$$

$$= \sqrt{4^2 + (-1)^2 + 3^2}$$

$$= \sqrt{16 + 1 + 9} = \sqrt{26}$$

$$\text{अब} \quad |\vec{a}| = |\vec{b}| = \sqrt{26}$$

अत: सदिश $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ सम्मान परिमाण वाले दो सदिश हैं।

प्रश्न 3. समान दिशा वाले दो विभिन्न सदिश लिखिए।

हल : माना सदिश

$$\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$$

तथा
$$\vec{b} = 3\hat{i} + 3\hat{j} + 3\hat{k}$$

अब सदिश $\vec{a}$ के दिक्-कोसाइन l1, m1, n1 हों तो

$$l_1 = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$m_1 = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

तथा
$$n_1 = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

तथा यदि सदिश $\vec{b}$ के दिक्-कोसाइन l2, m2, n2 हों, तो

$$l_2 = \frac{3}{\sqrt{3^2+3^2+3^2}} = \frac{3}{\sqrt{27}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$m_2 = \frac{3}{\sqrt{3^2+3^2+3^2}} = \frac{3}{\sqrt{27}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

तथा
$$n_2 = \frac{3}{\sqrt{3^2+3^2+3^2}} = \frac{3}{\sqrt{27}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

इस प्रकार हम देखते हैं कि सदिश के दिक्-कोसाइन समान हैं अर्थात्

$$\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ तथा } \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$$

या सदिश समान दिशा वाले हैं।

अब
$$|\vec{a}| = |\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}|$$
$$= \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$$

तथा
$$|\vec{b}| = |3\hat{i} + 3\hat{j} + 3\hat{k}|$$
$$= \sqrt{3^2+3^2+3^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

$$\therefore \quad |\vec{a}| \neq |\vec{b}|$$

अतः सदिश $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ समान दिशा वाले दो विभिन्न सदिश हैं।

प्रश्न 4. यदि सदिश $2\hat{i}+3\hat{j}$ और $x\hat{i}+y\hat{j}$ समान हों, तो और। के मान ज्ञात कीजिए।

हल : दो सदिश समान होते हैं यदि उनके घटक समान हों।

माना $\vec{a}=2\hat{i}+3\hat{j}$ तथा $\vec{b}=x\hat{i}+y\hat{j}$

अब: $\vec{a}=\vec{b}$ तो $2\hat{i}+3\hat{j}=x\hat{i}+y\hat{j}$

तब 2 = x तथा 3 = y

∴ x = 2 तथा y = 3.

प्रश्न 5. एक सदिश का प्रारम्भिक बिन्दु (2, 1) है और अन्तिम विन्दु (-5, 7) है। इस सदिश के अदिश एवं सदिश घटक ज्ञात कीजिए।

हल : माना सदिश के प्रारम्भिक बिन्दु तथा अंतिम बिन्दु क्रमशः A तशा B हैं।

तन A के निर्देशांक (2, 1)

तथा B के निर्देशांक (-5, 7)

अव सूत्र $\vec{AB}=(x_2-x_1)\hat{i}+(y_2-y_1)\hat{j}+(z_2-z_1)\hat{k}$

$$\vec{AB}=(-5-2)\hat{i}+(7-1)\hat{j}$$

$$=-7\hat{i}+6\hat{j}$$

∴ $\vec{AB}$ के अदिश घटक -7 तथा 6 हैं।

तथा $\vec{AB}$ के सदिश घटक $-7\hat{i}$ तथा $6\hat{i}$ हैं।

प्रश्न 6. सदिश

$\vec{a}=\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$, $\vec{b}=-2\hat{i}+4\hat{j}+5\hat{k}$

और

$\vec{c}=\hat{i}-6\hat{j}-7\hat{k}$

का योगफल ज्ञात कीजिए।

हल : सदिश $\vec{a}, \vec{b}$ तथा $\vec{c}$ का यौगफल

$$= \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

$$\therefore \quad \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}) + (-2\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k}) + (\hat{i} - 6\hat{j} - 7\hat{k})$$

$$= (1 - 2 + 1)\hat{i} + (-2 + 4 - 6)\hat{j} + (1 + 5 - 7)\hat{k}$$

$$= 0\hat{i} - 4\hat{j} - \hat{k}$$

$$= -4\hat{j} - \hat{k}$$

प्रश्न 7. सदिश

$$\vec{c} = \hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$$

के अनुदिश एक मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए।

हल : सदिश $\vec{c}$ के अनुदिश मात्रक सदिश

$$= \hat{c} = \frac{1}{|\vec{c}|}\vec{c}$$

$$\text{अब } |\vec{c}| = |\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}|$$

$$= \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 1 + 4} = \sqrt{6}$$

$$\therefore \quad \hat{c} = \frac{\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}\hat{i} + \frac{1}{\sqrt{6}}\hat{j} + \frac{2}{\sqrt{6}}\hat{k}$$

जो $\vec{c}$ के अनुदिश अभीष्ट मात्रक सदिश है।

प्रश्न 8. सदिश $\vec{PQ}$ के अनुदिश मान्नक सदिश ज्ञात कीजिए जहाँ बिन्दु P और Q क्रमशः (1, 2, 3) और (4, 5, 6) हैं।

हल : बिन्दु P तथा Q को मिलाने वाला सदिश = $\vec{PQ}$

$$\therefore \quad \vec{PQ} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$

$$= (4-1)\hat{i} + (5-2)\hat{j} + (6-3)\hat{k}$$

$(\because \; x_1 = 1, y_1 = 2, z_1 = 3$
तथा $x_2 = 4, y_2 = 5, z_2 = 6)$

$$= 3\hat{i} + 3\hat{j} + 3\hat{k}$$

$$|\vec{PQ}| = |3\hat{i} + 3\hat{j} + 3\hat{k}|$$

$$= \sqrt{3^2 + 3^2 + 3^2}$$

$$= \sqrt{9+9+9} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

अब $\vec{PQ}$ के अनुदिश मात्रक सदिश

$$= \frac{1}{|\vec{PQ}|} \cdot \vec{PQ} = \frac{3\hat{i} + 3\hat{j} + 3\hat{k}}{3\sqrt{3}}$$

$$= \frac{3\hat{i}}{3\sqrt{3}} + \frac{3\hat{j}}{3\sqrt{3}} + \frac{3\hat{k}}{3\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{k}$$

अत: $\vec{PQ}$ के अनुदिश मात्रक सदिश

$\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{k}$ है।

प्रश्न 9. दिए हुए सदिश

$\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$

और

$\vec{b} = -\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$

के लिए सदिश

$\vec{a} + \vec{b}$

के अनुदिश मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए।

हल : दिए गए सदिश

$$\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$$

तथा $$\vec{b} = -\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$$

अब $$\vec{a} + \vec{b} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k} + (-\hat{i} + \hat{j} - \hat{k})$$

$$= 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k} - \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$$

$$= (2-1)\hat{i} + (-1+1)\hat{j} + (2-1)\hat{k}$$

$$= \hat{i} + 0.\vec{j} + \hat{k} = \hat{i} + \hat{k}$$

अब $|\vec{a} + \vec{b}| = |\hat{i} + \hat{k}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$(\vec{a} + \vec{b})$ के अनुदिश मात्रक सदिश

$$= \frac{1}{|\vec{a} + \vec{b}|}(\vec{a} + \vec{b})$$

$$= \frac{\hat{i} + \hat{k}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{k},$$

जो कि अभीष्ट मात्रक सदिश है।

प्रश्न 10. सदिश

$\mathbf{5\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}}$

के अनुदिश एक ऐसा सदिश ज्ञात कीजिए जिसका परिमाण 8 इकाई है।

हल : माना

$$\vec{a} = 5\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$$

तब $$|\vec{a}| = |5\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}|$$

$$= \sqrt{5^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{30}$$

सदिश $\vec{a}$ के अनुदिश मात्रक सदिश

$$\hat{a} = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a} = \frac{5\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}}{\sqrt{30}}$$

या $$\hat{a} = \frac{5}{\sqrt{30}}\hat{i} - \frac{1}{\sqrt{30}}\hat{j} + \frac{2}{\sqrt{30}}\hat{k}$$

अब $\vec{a}$ के अनुदिश और 8 परिमाण वाला सदिश = $8\vec{a}$

$$\text{अतः} \quad 8\vec{a} = 8\left(\frac{5}{\sqrt{30}}\hat{i} - \frac{1}{\sqrt{30}}\hat{j} + \frac{2}{\sqrt{30}}\hat{k}\right)$$

$$= \frac{40}{\sqrt{30}}\hat{i} - \frac{8}{\sqrt{30}}\hat{j} + \frac{16}{\sqrt{30}}\hat{k}$$

$$\text{अतः अभीष्ट सदिश} = \frac{8(5\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k})}{\sqrt{30}}$$

प्रश्न 11. दर्शाइए कि सदिश

$$2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$$

और

$$-4\hat{i} + 6\hat{j} - 8\hat{k}$$

संरेख हैं।

हल : माना

$$\vec{a} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$$

$$\text{तथा} \quad \vec{b} = -4\hat{i} + 6\hat{j} - 8\hat{k} = -2(2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k})$$

$$\therefore \quad \vec{b} = -2\vec{a}$$

$$-4\hat{i} + 6\hat{j} - 8\hat{k} = -2(2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k})$$

सदिश $\vec{b}$ को सदिश $\vec{a}$ के रूप में निर्दिष्ट किया जा सकता है। अतः सदिश $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ सरेख हैं।

$$\left[\vec{b} = \lambda\vec{a}, \text{ यहाँ } \lambda = -2, \ \vec{a} = -\frac{1}{2}\vec{b}, \text{ तब } \lambda = -\frac{1}{2}\right]$$

इति सिद्धम् ।

प्रश्न 12. बिन्दुओं

$$P(\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})$$

और

$$Q(-\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$$

को मिलाने वाली रेखा को 2:1 के अनुपात में

- **अन्तः,**
- **बाह्य, विभाजित करने वाले बिन्दु R की स्थिति सदिश ज्ञात कीजिए।**

हल : माना मूलबिन्दु O है, तब बिन्दुओं P, Q तथा R के स्थिति सदिश $\vec{OP}$, $\vec{OQ}$ तथा $\vec{OR}$ हैं।

प्रश्नानुसार, $\vec{OP} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$

तथा $\vec{OQ} = -\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$

- जब बिन्दु R, बिन्दुओं P तथा Q को मिलाने वाली रेखा को 2 : 1 के अनुपात में अन्तः विभाजित करता है, तब

$$\vec{OR} = \frac{m\vec{OQ} + n\vec{OP}}{m+n}$$

$$= \frac{2(-\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) + 1(\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})}{2+1} \quad (\because m = 2, n = 1)$$

या $$\vec{OR} = \frac{-2\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k} + \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}}{3}$$

$$= \frac{(-2+1)\hat{i} + (2+2)\hat{j} + (2-1)\hat{k}}{3}$$

$$= \frac{-\hat{i} + 4\hat{j} + \hat{k}}{3}$$

$$= -\frac{1}{3}\hat{i} + \frac{4}{3}\hat{j} + \frac{1}{3}\hat{k}$$

$\therefore$ **बिन्दु R का स्थिति सदिश** $-\frac{1}{3}\hat{i} + \frac{4}{3}\hat{j} + \frac{1}{3}\hat{k}$ **है।**

- जब बिन्दु R बिन्दुओं P तथा Q को मिलाने वाली रेखा को 2 : 1 के अनुपात में बाह्य विभाजित करता है, तब

$$\vec{OR} = \frac{m\vec{OQ} - n\vec{OP}}{m-n}$$

$$= \frac{2(-\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}) - 1(\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k})}{2-1}$$

$$= (-2-1)\hat{i} + (2-2)\hat{j} + (2+1)\hat{k}$$

या $\vec{OR} = -3\hat{i} + 3\hat{k}$

अतः बिन्दु R की स्थिति सदिश

$-3\hat{i} + 3\hat{k}$

है।

प्रश्न 13. दो बिन्दुओं P(2, 3, 4) और 2(4, 1 ,-2) को मिलाने वाले सदिश का मध्य-बिन्दु ज्ञात कीजिए।

हल : मानी मूलबिन्दु O है। तब O के सापेक्ष बिन्दुओं P तथा Q के स्थिति सदिश क्रमशः $\vec{OP}$ तथा $\vec{OQ}$ हैं।

अब $\vec{OP} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$

तथा $\vec{OQ} = 4\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$

अब $\vec{PQ}$ का मध्य-बिन्दु R हो, तब

$$\vec{OR} = \frac{\vec{OP} + \vec{OQ}}{2}$$

$$= \frac{2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}+4\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}}{2}$$

$$= \frac{(2+4)\hat{i}+(3+1)\hat{j}+(4-2)\hat{k}}{2}$$

$$= \frac{6\hat{i}+4\hat{j}+2\hat{k}}{2}$$

$$= 3\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$$

अत: अभीष्ट मध्य-बिन्दु

$3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$

है।

प्रश्न 14. दर्शाइए कि बिन्दु A, B और C, जिनके स्थिति सदिश क्रमश :

$\vec{a} = 3\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k}$, $\vec{b} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$

और

$\vec{c} = \hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k}$

हैं, एक समकोण त्रिभुज के शीर्षों का निर्माण करते हैं।

हल : माना मूलबिन्दु O है, तब

प्रश्नानुसार,

$$\vec{OA} = \vec{a} = 3\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k}$$

$$\vec{OB} = \vec{b} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$$

तथा $$\vec{OC} = \vec{c} = \hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k}$$

अब $$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \vec{b} - \vec{a}$$

$$= (2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) - (3\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k})$$

$$= 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k} - 3\hat{i} + 4\hat{j} + 4\hat{k}$$

$$= (2-3)\hat{i} + (-1+4)\hat{j} + (1+4)\hat{k}$$

या $$\vec{AB} = -\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}$$

$$\therefore \quad |\vec{AB}| = |-\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}|$$

$$= \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 5^2}$$

$$= \sqrt{1 + 9 + 25} = \sqrt{35}$$

$$\therefore \quad |\vec{AB}|^2 = (\sqrt{35})^2 = 35$$

$$\vec{BC} = \vec{OC} - \vec{OB} = \vec{c} - \vec{b}$$

$$= \hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k} - (2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$$

$$= \hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k} - 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$$

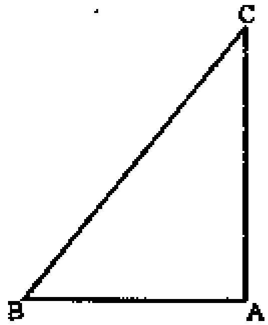
$$= (1-2)\hat{i} + (-3+1)\hat{j} + (-5-1)\hat{k}$$

$$= -\hat{i} - 2\hat{j} - 6\hat{k}$$

$\therefore \quad |\vec{BC}| = |-\hat{i}-2\hat{j}-6\hat{k}|$

$= \sqrt{(-1)^2+(-2)^2+(-6)^2}$

$= \sqrt{1+4+36} = \sqrt{41}$



$\therefore \quad |\vec{BC}|^2 = (\sqrt{41})^2 = 41$

$\vec{CA} = \vec{OA} - \vec{OC} = \vec{a} - \vec{c}$

$= 3\hat{i}-4\hat{j}-4\hat{k}-(\hat{i}-3\hat{j}-5\hat{k})$

$= 3\hat{i}-4\hat{j}-4\hat{k}-\hat{i}+3\hat{j}+5\hat{k}$

$= (3-1)\hat{i}+(-4+3)\hat{j}+(-4+5)\hat{k}$

$= 2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$

$|\vec{CA}| = |2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}| = \sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}$

$= \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$

$\therefore \quad |\vec{CA}|^2 = (\sqrt{6})^2 = 6$

$|\vec{BC}|^2 = 41$

$|\vec{AB}|^2 + |\vec{CA}|^2 = 35 + 6 = 41$

$\therefore \quad |\vec{BC}|^2 = |\vec{AB}|^2 + |\vec{CA}|^2$

अत: ΔABC एक समकोण त्रिभुज है।

अर्थात् बिन्दु A, B तथा C एक समकोण त्रिभुज के शीर्षों का निर्माण करते हैं।

इति सिद्धम्

Ex 13.2

प्रश्न 1. यदि दो सदिशों के परिमाण 4 और 5 इकाई हों, तो उनका अदिश गुणनफल ज्ञात कीजिए जबकि उनके मध्य का कोण हों।

(i) 60°

(ii) 90°

(iii) 30°

हल : माना दो सदिश $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ है तथा उनके बीच का कोण θ हो, तो

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}$$

(i) जब

$$\theta = 60° \text{ तथा } |\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 5$$

तब $\cos 60° = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{4\times 5}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{20}$

$\Rightarrow \vec{a}.\vec{b} = \dfrac{20}{2}$

$\Rightarrow \vec{a}.\vec{b} = 10$

अतः सदिशों का अदिश गुणनफल = 10.

(ii) जब

$$\theta = 90° \text{ तथा } |\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 5$$

तब $\cos 90° = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{4\times 5}$

$\Rightarrow 0 = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{10}$

$\Rightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0$

अतः सदिशों का अदिश गुणनफल = 0

(iii) जब

$$\theta = 30° \text{ तथा } |\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 5$$

तब $\cos 30° = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{4 \times 4}$

$\Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{20}$

$\Rightarrow \vec{a}.\vec{b} = \dfrac{20\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \vec{a}.\vec{b} = 10\sqrt{3}$

अतः सदिशों का अदिश गुणनफल = 10√3

प्रश्न 2.

$\vec{a} \cdot \vec{b}$ **का मान ज्ञात कीजिए जबकि** $\vec{a}$ **एवं** $\vec{b}$ **क्रमशः है**

(i) $2\hat{i}+5\hat{j}; 3\hat{i}-2\hat{j}$ **(ii)** $4\hat{i}+3\hat{k}; \hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$

(iii) $5\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}; 2\hat{i}-3\hat{j}$

हल : (i) दिया है कि

$\vec{a} = 2\hat{i}+5\hat{j}$ तथा $\vec{b} = 3\hat{i}-2\hat{j}$

दिए गए सदिशों को हम निम्न प्रकार से भी लिख सकते है।

$\vec{a} = 2\hat{i}+5\hat{j}+0\hat{k}$

तथा $\vec{b} = 3\hat{i}-2\hat{j}+0\hat{k}$

अब $\vec{a}.\vec{b} = (2\hat{i}+5\hat{j}+0\hat{k}).(3\hat{i}-2\hat{j}+0\hat{k})$

= (2 x 3) + {5 x (-2)} + (0 x 0)

= 6 - 10 + 0

अतः $\vec{a} \cdot \vec{b}$ = - 4

(ii) दिया है कि

$$\vec{a} = 4\hat{i} + 3\hat{k}$$

तथा $$\vec{b} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$$

दिए गए सदिशों के हम निम्न प्रकार से भी लिख सकते है।

$$\vec{a} = 4\hat{i} + 0\hat{j} + 3\hat{k}$$

तथा $$\vec{b} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$$

अब $$\vec{a} . \vec{b} = (4\hat{i} + 0\hat{j} + 3\hat{k}).(\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$$
$$= (4 \times 1) + \{0 \times (-1)\} + (3 \times 1)$$
$$= 4 + 0 + 3$$

अतः $$\vec{a} . \vec{b} = 7.$$

(iii) दिया है कि

$$\vec{a} = 5\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$$

तथा $$\vec{b} = 2\hat{i} - 3\hat{j}$$

दिए गए सदिशों को हम निम्न प्रकार से भी लिख सकते है।

$$\vec{a} = 5\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$$

तथा $$\vec{b} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 0\hat{k}$$

अब $$\vec{a} . \vec{b} = (5\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}).(2\hat{i} - 3\hat{j} + 0\hat{k})$$
$$= (5 \times 2) + \{1 \times (-3)\} + \{(-2) \times 0\}$$
$$= 10 - 3 + 0$$

अतः $$= 7.$$

प्रश्न 3. सिद्ध कीजिए कि

$$|\vec{a} . \vec{b}|^2 \leq |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2$$

हल : यदि $\vec{a}$ = 0 अथवा है $\vec{b}$ = 0 तो असमिका

$$|\vec{a}.\vec{b}| = 0 = |\vec{a}||\vec{b}|$$

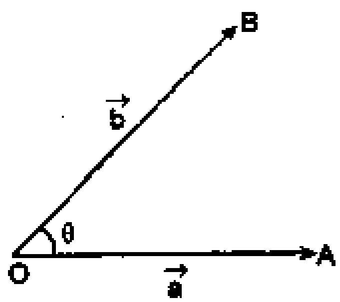
परन्तु यहाँ माना

$$|\vec{a}| \neq 0 \neq |\vec{b}|$$

तब हम जानते हैं कि

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

[सदिश $\vec{a}$ तथा सदिश $\vec{b}$ के बीच का कोण θ]



या $$\frac{|\vec{a}.\vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|} = |\cos\theta| \leq 1$$

[क्योंकि $-1 \leq \cos\theta \leq 1$]

∴ $$|\vec{a}.\vec{b}| \leq |\vec{a}||\vec{b}|$$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर।

$$|\vec{a}.\vec{b}|^2 \leq |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2$$

इति सिद्धम्

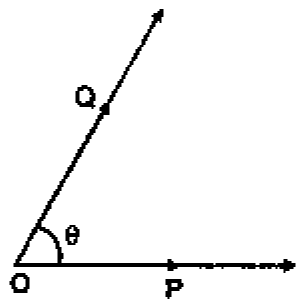
प्रश्न 4. यदि दो बिन्दुओं P एवं Q के निर्देशांक क्रमशः (3, 4) एवं (12, 9) हो, तो ∠POQ का मान ज्ञात कीजिए, जहाँ O मूल बिन्दु है।

हल : बिन्दु P के निर्देशांक = (3, 4)

तब सदिश $\overrightarrow{OP} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$

पुनः बिन्दु Q के निर्देशांक = (12, 9)

तब सदिश $\overrightarrow{OQ} = 12\hat{i} + 9\hat{j}$



माना $\overrightarrow{OP}$ तथा $\overrightarrow{OQ}$ के मध्य कोण $\angle POQ = \theta$, तब

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{OQ}}{|\overrightarrow{OP}|.|\overrightarrow{OQ}|}$$

$$\Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{(3\hat{i}+4\hat{j}).(12\hat{i}+9\hat{j})}{|3\hat{i}+4\hat{j}||12\hat{i}+9\hat{j}|}$$

$$\Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{(3\times 12)+(4\times 9)}{\sqrt{(3)^2+(4)^2}\sqrt{(12)^2+(9)^2}}$$

$$\Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{36+36}{\sqrt{25}\sqrt{225}}$$

$$\Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{72}{5\times 15}$$

$$\Rightarrow \quad \theta = \cos^{-1}\left(\frac{72}{75}\right)$$

अतः $\angle POQ = \cos^{-1}\left(\frac{72}{75}\right)$

प्रश्न 5. λ के किस मान के लिए सदिश $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ परस्पर लम्बवत् है

(i) $\vec{a} = 2\hat{i} + \lambda\hat{j} + \hat{k}$; $\vec{b} = 4\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}$

(ii) $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$; $\vec{b} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - \lambda\hat{k}$

हल :

(i) ∵ सदिश

$$\vec{a} = 2\hat{i} + \lambda\hat{j} + \hat{k}$$

तथा सदिश $\vec{b} = 4\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}$

परस्पर लम्बवत् है, तब

$$\vec{a} . \vec{b} = 0$$

$$(2\hat{i} + \lambda\hat{j} + \hat{k}).(4\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}) = 0$$

$$\Rightarrow (2 \times 4) + \{\lambda \times (-2)\} + \{1 \times (-2)\} = 0$$

$$\Rightarrow 8 - 2\lambda - 2 = 0$$

$$\Rightarrow 2\lambda = 6$$

$$\Rightarrow \lambda = 3$$

अतः λ = 3 के लिए दिए गए सदिश परस्पर लम्बवत् है।

(ii) ∵ सदिश

$\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$

तथा सदिश

$\vec{b} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - \lambda\hat{k}$

परस्पर लम्बवत् है, तब

$$\vec{a} . \vec{b} = 0$$

$$(2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}).(3\hat{i} + 2\hat{j} - \lambda\hat{k}) = 0$$

$$\Rightarrow (2 \times 3) + (3 \times 2) + \{4 \times (-\lambda)\} = 0$$

$$\Rightarrow 6 + 6 - 4\lambda = 0$$

$$\Rightarrow 4\lambda = 12$$

$$\Rightarrow \lambda = 3$$

अतः λ = 3 के लिए दिए गए सदिश परस्पर लम्बवत् है।

प्रश्न 6. सदिश

$$4\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$$

का सदिश

$$3\hat{i}+6\hat{j}-2\hat{k}$$

पर प्रक्षेप ज्ञात कीजिए।

हल : माना

$$\vec{a} = 4\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$$

तथा $$\vec{b} = 3\hat{i}+6\hat{j}-2\hat{k}$$

तब सदिश $\vec{a}$ को $\vec{b}$ सदिश पर प्रक्षेप

$$= \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|}$$

$$= \frac{(4\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}).(3\hat{i}+6\hat{j}-2\hat{k})}{|3\hat{i}+6\hat{j}-2\hat{k}|}$$

$$= \frac{(4\times3)+\{(-2)\times6\}+\{1\times(-2)\}}{\sqrt{(3)^2+(6)^2+(-2)^2}}$$

$$= \frac{12-12-2}{\sqrt{9+36+4}}$$

$$= \frac{-2}{\sqrt{49}}$$

$$= \frac{2}{7}$$

(प्रक्षेप ऋणात्मक नहीं होता इसलिए ऋण चिन्ह छोड़ने पर)

अत: सदिश

$$4\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$$

का सदिश

$3\hat{i}+6\hat{j}-2\hat{k}$

पर प्रक्षेप $\frac{2}{7}$ है।

प्रश्न 7. यदि

$\vec{a}=2\hat{i}-16\hat{j}+5\hat{k}$

तथा

$\vec{b}=3\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k}$

हो, तो एक सदिश $\vec{c}$ ज्ञात कीजिए जबकि

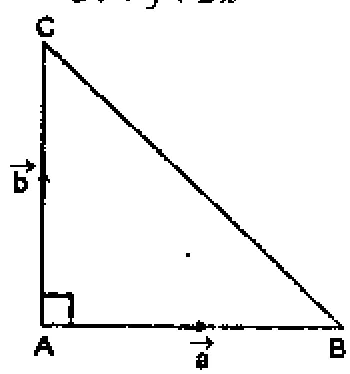
$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

एक समकोण त्रिभुज की भुजाओं को निरूपित करें।

हल : दिया है :

$$\vec{a} = 2\hat{i}-16\hat{j}+5\hat{k}$$

तथा $$\vec{b} = 3\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k}$$



$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b} &= (2\hat{i}-16\hat{j}+5\hat{k}).(3\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k})\\ &= (2\times 3)+\{(-16)\times 1\}+(5\times 2)\\ &= 6-16+10\\ &= 16-16\\ &= 0\end{aligned}$$

$\because$ $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

अतः सदिश $\vec{a}$ तथा सदिश $\vec{b}$ परस्पर लम्बवत् है अर्थात् समकोण बनाते है।अब हमें सदिश $\vec{c}$ ऐसा ज्ञात करना है जिससे $\vec{a}, \vec{b}$ तथा $\vec{c}$ समकोण त्रिभुज की भुजाओं को निरूपित करें। अब यदि $\vec{a}, \vec{b}$ तथा $\vec{c}$ किसी त्रिभुज की भुजाओं के सदिश है। तो इनमें निम्न सम्बन्ध होगा।

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{c} = (2\hat{i} - 16\hat{j} + 5\hat{k}) + (3\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k})$$

$$\Rightarrow \quad \vec{c} = (2\hat{i} + 3\hat{i}) + (-16\hat{j} + \hat{j}) + (5\hat{k} + 2\hat{k})$$

$$\Rightarrow \quad \vec{c} = 5\hat{i} - 15\hat{j} + 7\hat{k}$$

अतः सदिश $\vec{c} = 5\hat{i} - 15\hat{j} + 7\hat{k}$ है।

प्रश्न 8. यदि

$$|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$$

तो सिद्ध कीजिए कि $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ परस्पर लम्ब सदिश है।

हल : प्रश्नानुसार,

$$|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$$

तब $$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a} - \vec{b}|^2$$

[दोनों पक्षों का वर्ग करने पर]

या $$(\vec{a} + \vec{b}).(\vec{a} + \vec{b}) = (\vec{a} - \vec{b}).(\vec{a} - \vec{b})$$

या $$\vec{a}.(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{b}(\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a}.(\vec{a} - \vec{b}) - \vec{b}(\vec{a} - \vec{b})$$

[बंटन नियम से]

या $$\vec{a}.\vec{a} + \vec{a}.\vec{b} + \vec{b}.\vec{a} + \vec{b}.\vec{b} = \vec{a}.\vec{a} - \vec{a}.\vec{b} - \vec{b}.\vec{a} + \vec{b}.\vec{b}$$

या $$|\vec{a}|^2 + 2\vec{a}.\vec{b} + |\vec{b}|^2$$

$$= |\vec{a}|^2 - 2\vec{a}.\vec{b} + |\vec{b}|^2$$

$$[\because \vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}]$$

या $\quad 2\vec{a}.\vec{b} + 2\vec{a}.\vec{b} = 0$

या $\quad 4\vec{a}.\vec{b} = 0$

या $\quad \vec{a}.\vec{b} = 0$

अतः $\quad \vec{a} \perp \vec{b} \qquad (\because \vec{a} \neq 0$ तथा $\vec{b} \neq 0)$

अत: $\vec{a}$ और $\vec{b}$ परस्पर लम्ब सदिश है। इति सिद्धम्

प्रश्न 9. यदि बिन्दुओं A, B, C तथा D के निर्देशांक क्रमशः (3, 2, 4) (4, 5, -1), (6, 3, 2) तथा (2, 1, 0) हों, तो सिद्ध कीजिए कि रेखाएं $\overrightarrow{AB}$तथा $\overrightarrow{CD}$ परस्पर लम्ब है।

हल : दिया है कि बिन्दुओं A, B, C तथा D के निर्देशांक क्रमशः (3, 2, 4), (4, 5, - 1), (6, 3, 2) तथा (2, 1, 0) है।

तब भूल बिन्दु o के सापेक्ष A, B, C तथा D के स्थिति सदिश क्रमशः

$$\overrightarrow{OA} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 4\hat{k}$$

$$\overrightarrow{OB} = 4\hat{i} + 5\hat{j} - \hat{k}$$

$$\overrightarrow{OC} = 6\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$$

$$\overrightarrow{OD} = 2\hat{i} + \hat{j} + 0\hat{k} \text{ होंगे}$$

अब $\quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{AB} = (4\hat{i} + 5\hat{j} - \hat{k}) - (3\hat{i} + 2\hat{j} + 4\hat{k})$

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{AB} = 4\hat{i} + 5\hat{j} - \hat{k} - 3\hat{i} - 2\hat{j} - 4\hat{k}$

$$\overrightarrow{AB} = \hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}$$

पुनः $\quad \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}$

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{CD} = (2\hat{i} + \hat{j} + 0\hat{k}) - (6\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k})$

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{CD} = 2\hat{i} + \hat{j} + 0\hat{k} - 6\hat{i} - 3\hat{j} - 2\hat{k}$

$$\overrightarrow{CD} = -4\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}$$

यदि रेखाएँ [/latex] तथा $\overrightarrow{AB}$ तथा [/latex] तथा $\overrightarrow{CD}$ परस्पर लम्ब है, तो

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0 \text{ होगा।}$$

अब $$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = (\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}).(-4\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k})$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \{1 \times (-4)\} + \{3 \times (-2)\} + \{(-5) \times (-2)\}$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = -4 - 6 + 10$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = -10 + 10$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$$

अतः रेखाएँ [/latex] तथा $\overrightarrow{AB}$ तथा [/latex] तथा $\overrightarrow{CD}$ परस्पर लम्ब है। इति सिद्धम्

प्रश्न 10. किसी सदिश $\vec{a}$ के लिए सिद्ध कीजिए कि

$$\vec{a} = (\vec{a}.\hat{i})\hat{i} + (\vec{a}.\hat{j})\hat{j} + (\vec{a}.\hat{k})\hat{k}.$$

हल : माना

$$\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k} \quad \ldots(1)$$

तब $$\vec{a}.\hat{i} = (a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}).\hat{i} = a_1 \quad \ldots(2)$$

$$\left[\begin{array}{l} \because \hat{i}.\hat{i} = 1 = \hat{j}.\hat{j} \\ \hat{i}.\hat{j} = \hat{i}.\hat{k} = 0 \end{array}\right]$$

$$\vec{a}.\hat{j} = (a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}).\hat{j} = a_2 \quad \ldots(3)$$

तथा $$\vec{a}.\hat{k} = (a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}).\hat{k} = a_3 \quad \ldots(4)$$

$$\left[\begin{array}{l} \because \quad \hat{i}.\hat{i} = \hat{j}\hat{j} = \hat{k}.\hat{k} = 1 \\ \text{तथा } \hat{i}.\hat{j} = \hat{j}.\hat{k} = \hat{k}.\hat{i} = 0 \end{array}\right]$$

अब a1, a2 तथा a3 के मान समीकरण (1) में रखने पर,

अतः

$$\vec{a} = (\vec{a}.\hat{i})\hat{i} + (\vec{a}.\hat{j})\hat{j} + (\vec{a}.\hat{k})\hat{k}$$

इति सिद्धम्

प्रश्न 11. सदिश विधि से सिद्ध कीजिए कि समान्तर चतुर्भुज के विकर्णो के वर्गों का योग उसकी भुजाओं के वर्गों के योग के बराबर होता है।

हल : माना OACB एक समान्तर चतुर्भुज है। O को मूलबिन्दु लेने पर A और B के स्थिति सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ हैं।

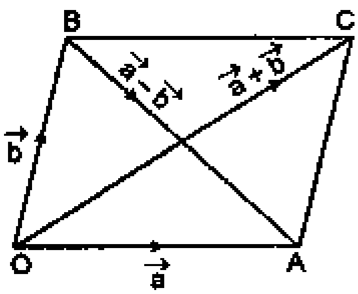
माना

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC} = \vec{a}$$

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AC} = \vec{b}$$

तब $$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$$

$$\overrightarrow{OC} = \vec{a} + \vec{b}$$



$$\therefore \quad \overrightarrow{OC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 = (\vec{a} + \vec{b})^2 + (\vec{b} - \vec{a})^2$$

$$= 2(\vec{a}^2 + \vec{b}^2)$$

$$= (\overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{BC}^2) + (\overrightarrow{OB}^2 + \overrightarrow{AC}^2)$$

∴ विकर्षों के वर्गों का योग = भुजाओं के वर्गों का योग।

अतः समान्तर चतुर्भुज के विकर्णो के वर्गों का योग उसकी भुजाओं के वर्गों के योग के बराबर होता है।

इति सिद्धम्

Ex 13.3

प्रश्न 1. सदिशों

$3\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$

तथा

$2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k}$

का सदिश गुणनफल ज्ञात कीजिए।

हल : माना

$$\vec{a} = 3\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$$

तथा $$\vec{b} = 2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k}$$

तब $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ का सदिश गुणनफल $= \vec{a}\times\vec{b}$

अब $$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{a}\times\vec{b} = \hat{i}(1+3)-\hat{j}(3+2)+\hat{k}(9-2)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{a}\times\vec{b} = 4\hat{i}-5\hat{j}+7\hat{k}$$

अतः सदिशों

$3\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$

तथा

$2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k}$

को सदिश गुणनफल

$4\hat{i}-5\hat{j}+7\hat{k}$

है।

प्रश्न 2. सदिशों

$\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$

तथा

$2\hat{i}+\hat{j}-3\hat{k}$

के लम्ब इकाई सदिश ज्ञात कीजिए।

हल : माना

$$\vec{a} = \hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$$

तथा $$\vec{b} = 2\hat{i}+\hat{j}-3\hat{k}$$

तब $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के लम्ब इकाई सदिश $\hat{n} = \dfrac{\vec{a}\times\vec{b}}{|\vec{a}\times\vec{b}|}$

अब $$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow$ $$\vec{a}\times\vec{b} = \hat{i}(6-1)-\hat{j}(-3-2)+\hat{k}(1+4)$$

$\Rightarrow$ $$\vec{a}\times\vec{b} = 5\hat{i}+5\hat{j}+5\hat{k}$$

तथा $$|\vec{a}\times\vec{b}| = \sqrt{(5)^2+(5)^2+(5)^2}$$

$\Rightarrow$ $$|\vec{a}\times\vec{b}| = \sqrt{25+25+25}$$

$\Rightarrow$ $$|\vec{a}\times\vec{b}| = \sqrt{125}$$

अतः $$|\vec{a}\times\vec{b}| = 5\sqrt{3}$$

अब $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के लम्ब इकाई सदिश

$$(\hat{n}) = \frac{5\hat{i}+5\hat{j}+5\hat{k}}{5\sqrt{3}}$$

या $$\hat{n} = \frac{5(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})}{5\sqrt{3}}$$

या $$\hat{n} = \frac{\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}}{\sqrt{3}}$$

अतः सदिशों

$\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$

तथा

$2\hat{i}+\hat{j}-3\hat{k}$

के लम्ब इकाई सदिश का मान

$$\frac{\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}}{\sqrt{3}}$$

है।

प्रश्न 3. सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के लिए सिद्ध कीजिए कि

$$|\vec{a}\times\vec{b}|^2=\begin{vmatrix}\vec{a}\cdot\vec{a} & \vec{a}\cdot\vec{b}\\ \vec{a}\cdot\vec{b} & \vec{b}\cdot\vec{b}\end{vmatrix}$$

हल :

माना सदिशों में $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के बीच का कोण θ है,

$$\text{तब } |\vec{a}\times\vec{b}|^2=|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{a}\times\vec{b})|$$

$$=(|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\,\hat{n})\cdot(|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\,\hat{n})$$

$$=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\sin^2\theta\,(\hat{n}\cdot\hat{n})$$

$$=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\sin^2\theta \qquad (\because \hat{n}\cdot\hat{n}=1)$$

$$=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2(1-\cos^2\theta)$$

$$=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\cos^2\theta$$

$$=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-\{(|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta)(|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta)\}$$

$$=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-\{(\vec{a}\cdot\vec{b})(\vec{a}\cdot\vec{b})\}$$

$$=(\vec{a}\cdot\vec{a})\cdot(\vec{b}\cdot\vec{b})-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{a}\cdot\vec{a} & \vec{a}\cdot\vec{b} \\ \vec{a}\cdot\vec{b} & \vec{b}\cdot\vec{b} \end{vmatrix}$$

अतः $|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = \begin{vmatrix} \vec{a}\cdot\vec{a} & \vec{a}\cdot\vec{b} \\ \vec{a}\cdot\vec{b} & \vec{b}\cdot\vec{b} \end{vmatrix}$ **इति सिद्धम्**

प्रश्न 4. सिद्ध कीजिए :

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})+\vec{b}\times(\vec{c}+\vec{a})+\vec{c}\times(\vec{a}+\vec{b})=\vec{0}$$

हल : प्रश्नानुसार,

$$\text{L.H.S.} = \vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})+\vec{b}\times(\vec{c}+\vec{a})+\vec{c}\times(\vec{a}+\vec{b})$$

$$= \vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{b}$$

$$= \vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}-\vec{a}\times\vec{b}-\vec{a}\times\vec{c}-\vec{b}\times\vec{c}$$

$$(\because \vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a})$$

$$= \vec{0} = \text{R.H.S.}$$

अतः $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})+\vec{b}\times(\vec{c}+\vec{a})+\vec{c}\times(\vec{a}+\vec{b})=\vec{0}$

इति सिद्धम्

प्रश्न 5. यदि $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ **इस प्रकार के इकाई सदिश हैं कि** $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$ **तथा** $\vec{b}$ **और** $\vec{c}$ **के मध्य का कोण** $\frac{\pi}{6}$ **है, तब सिद्ध कीजिए कि**

$$\vec{a} = \pm 2(\vec{b}\times\vec{c})$$

हल :

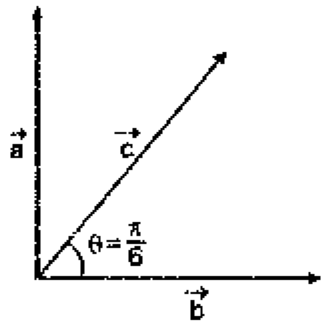
दिया है :

$|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 1$ तथा $|\vec{c}| = 1$

$\because$ $\vec{a}.\vec{b} = 0 \Rightarrow$ सदिश $\vec{a}$ सदिश $\vec{b}$ पर लम्ब है

तथा $\vec{a}.\vec{c} = 0 \Rightarrow$ सदिश $\vec{a}$ सदिश $\vec{c}$ पर लम्ब है

∵ सदिश $\vec{a}$, सदिशों $\vec{b}$ तथा $\vec{c}$ दोनों पर लम्ब है, अतः सदिश $\vec{a}$, सदिशों $\vec{b}$ तथा $\vec{c}$ दोनों पर लम्ब सदिश $\vec{b} \times \vec{c}$ के समान्तर होगा।



∴ माना $\quad \vec{a} = \lambda(\vec{b} \times \vec{c})$ ...(1) जहाँ λ कोई अदिश है।

परन्तु $\quad \vec{b} \times \vec{c} = |\vec{b}||\vec{c}| \sin \frac{\pi}{6} \hat{n}$

या $\quad \vec{b} \times \vec{c} = \frac{1}{2}\hat{n} \qquad [\because |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1]$

∴ समीकरण (1) से,

$$\vec{a} = \frac{\lambda}{2}\hat{n}$$

$$\Rightarrow (\vec{a})^2 = \left(\frac{\lambda}{2}\hat{n}\right)^2 \text{ या } |\vec{a}|^2 = \frac{\lambda^2}{4}|\hat{n}|^2$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{\lambda^2}{4} \cdot 1$$

$$\Rightarrow \lambda^2 = 4$$

$$\therefore \lambda = \pm 2$$

∴ समीकरण (1) से,

अतः $\quad \vec{a} = \pm 2(\vec{b} \times \vec{c})$ **इति सिद्धम्**

प्रश्न 6.
$|\vec{a} \times \vec{b}|$
का मान ज्ञात कीजिए, यदि
$|\vec{a}| = 10, |\vec{b}| = 2$
तथा
$\vec{a} \cdot \vec{b} = 12.$

हल : हम जानते हैं कि यदि $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ दो सदिश है तथा उनके बीच का कोण θ हो, तो

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}$$

$\Rightarrow$ $$\cos\theta = \frac{12}{10\times 2}$$

$\Rightarrow$ $$\cos\theta = \frac{3}{5}$$

तब $$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}$$

या $$\sin\theta = \sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}$$

या $$\sin\theta = \sqrt{1-\frac{9}{25}}$$

या $$\sin\theta = \sqrt{\frac{16}{25}}$$

या $$\sin\theta = \frac{4}{5} \qquad \ldots(1)$$

अब $$\sin\theta = \frac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

$\left[\text{समी. (1) से } \sin\theta = \frac{4}{5} \text{ रखने पर}\right]$

$$\frac{4}{5} = \frac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{10\times 2}$$

$\Rightarrow$ $$\frac{4}{5} = \frac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{20}$$

$\Rightarrow$ $$|\vec{a}\times\vec{b}| = \frac{20\times 4}{5}$$

अतः $|\vec{a}\times\vec{b}| = 16.$

प्रश्न 7. सदिशों

$4\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k}$

तथा

$-2\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}$

के लम्बवत् 9 इकाई परिमाण वाला सदिश ज्ञात कीजिए।

$\vec{a}=4\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k}$ तथा $\vec{b}=-2\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}$

पर लम्बवत् है, वह

$-3\hat{i}+6\hat{j}+6\hat{k}$

है।

हल :

माना $\vec{a}=4\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k}$ तथा $\vec{b}=-2\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}$

सदिश $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ पर लम्बवत् सदिश = $\vec{a}\times\vec{b}$

$$\text{अब } \vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 4 & -1 & 3\\ -2 & 1 & -2\end{vmatrix}$$

$$=\hat{i}(2-3)-\hat{j}(-8+6)+\hat{k}(4-2)$$

$$=-\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}$$

$\therefore$ $\vec{a}\times\vec{b}$ की दिशा के लम्बवत् मात्रक सदिश

$$=\frac{\vec{a}\times\vec{b}}{|\vec{a}\times\vec{b}|}$$

$$=\frac{-\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}}{\sqrt{1+4+4}}$$

$$=\frac{-\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}}{3}$$

$$=\frac{1}{3}(-\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k})$$

वह सदिश जिसका परिमाण 9 है तथा जो $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ दोनों के लम्बवत् हैं।

$$= 9\times\frac{1}{3}(-\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k})$$
$$= 3(-\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k})$$
$$= -3\hat{i}+6\hat{j}+6\hat{k}$$

अतः सदिशों $4\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k}$ तथा $-2\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}$ के लम्बवत्

9 इकाई परिमाण वाला सदिश $-3\hat{i}+6\hat{j}+6\hat{k}$ है।

प्रश्न 8. प्रदर्शित कीजिए कि
$$(\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b})=2(\vec{a}\times\vec{b})$$
इसकी ज्यामितीय व्याख्या भी कीजिए।

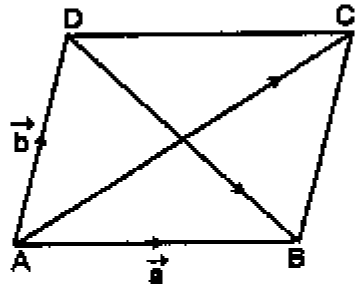
हल : बायाँ पक्ष (L.H.S.)
$$= (\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b})$$
$$= \vec{a}\times(\vec{a}+\vec{b})-\vec{b}\times(\vec{a}+\vec{b})$$
$$= \vec{a}\times\vec{a}+\vec{a}\times\vec{b}-\vec{b}\times\vec{a}-\vec{b}\times\vec{b}$$
$$= \vec{0}+\vec{a}\times\vec{b}-\{-(\vec{a}\times\vec{b})\}+\vec{0}$$
$$= \vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{b}$$
$$\left[\because \begin{array}{l}\vec{a}\times\vec{b} = -(\vec{b}\times\vec{a})\\ \vec{a}\times\vec{a} = \vec{0}\\ \vec{b}\times\vec{b} = \vec{0}\end{array}\right]$$
$$= 2(\vec{a}\times\vec{b}) = \text{दायाँ पक्ष (R.H.S.)}$$

अतः $(\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b})=2(\vec{a}\times\vec{b})$.

ज्यामितीय व्याख्या : माना ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है। माना मूलबिन्दु A के सापेक्ष बिन्दुओं B तथा D के स्थिति सदिश

क्रमशः $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ है।

$$\vec{AB} = \vec{a}$$
$$\vec{AD} = \vec{b}$$



ΔABC में,
$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$$
$$= \vec{AB} + \vec{AD}$$
$$= \vec{a} + \vec{b}$$

तब ΔABD में, $\vec{DB} = \vec{DA} + \vec{AB}$

$$= -\vec{AD} + \vec{AB} \qquad \therefore \vec{DA} = -\vec{AD}$$
$$= \vec{AB} - \vec{AD} = \vec{a} - \vec{b}$$

$$(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b}) = 2(\vec{a} \times \vec{b})$$

$$\Rightarrow \qquad \vec{DB} \times \vec{AC} = 2(\vec{AB} \times \vec{AD})$$

$\Rightarrow$ समान्तर चतुर्भुज $ABCD$ के विकर्णों $\vec{DB}$ तथा $\vec{AC}$ को आसन्न भुजाएँ लेकर बनाए गए समान्तर चतुर्भुज का सदिश क्षेत्रफल = 2(समान्तर चतुर्भुज ABCD को सदिश क्षेत्रफल) इस प्रकार हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि उस समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल जिसकी आसन्न भुजाएँ एक दिए हुए समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण हैं, दिए हुए समान्तर चतुर्भुज के क्षेत्रफल का दो गुना होता है।

इति सिद्धम्

प्रश्न 9. किसी भी सदिश $\vec{a}$ के लिए सिद्ध कीजिए कि .

$$|\vec{a} \times \hat{i}|^2 + |\vec{a} \times \hat{j}|^2 + |\vec{a} \times \hat{k}|^2 = 2|\vec{a}|^2$$

हल :

$$(\vec{a}\times\hat{j})^2 = (\vec{a}\times\hat{i}).(\vec{a}\times\hat{i})$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{a}.\vec{a} & \vec{a}.\hat{i} \\ \hat{i}.\vec{a} & 1 \end{vmatrix}$$

$$= |\vec{a}|^2 - a_1^2$$

जहाँ $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$

तथा $= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$

इसी प्रकार $(\vec{a}\times\hat{j})^2 = |\vec{a}|^2 - a_2^2$

तथा $(\vec{a}\times\hat{k})^2 = |\vec{a}|^2 - a_3^2$

L.H.S. $= (\vec{a}\times\hat{i})^2 + (\vec{a}\times\hat{j})^2 + (\vec{a}\times\hat{k})^2$

$= |\vec{a}|^2 - a_1^2 + |\vec{a}|^2 - a_2^2 + |\vec{a}|^2 - a_3^2$

$= 3|\vec{a}|^2 - (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)$

$= 3|\vec{a}|^2 - |\vec{a}|^2 = 2|\vec{a}|^2$

$= 2|\vec{a}|^2 =$ R.H.S.

अतः $(\vec{a}\times\hat{i})^2 + (\vec{a}\times\hat{j})^2 + (\vec{a}\times\hat{k})^2 = 2|\vec{a}|^2$ इति सिद्धम्

प्रश्न 10. यदि किसी त्रिभुज की दो भुजाएँ सदिश

$\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$

तथा

$3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$

से निरूपित हों, तो त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : त्रिभुज का सदिश क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2}|(\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k})\times(3\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k})|$$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}[\hat{i}(2+4)-\hat{j}(1-6)+\hat{k}(2-6)]$$

$$= \frac{1}{2}|(6\hat{i}+5\hat{j}-8\hat{k})|$$

अतः त्रिभुज के क्षेत्रफल का परिमाण

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(6)^2+(5)^2+(-8)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{36+25+64} = \frac{1}{2}\sqrt{125}$$

अत:त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{5}{2}\sqrt{5}$ वर्ग इकाई।

Ex 13.4

प्रश्न 1. सिद्ध कीजिए कि

(i) $[\hat{i}\ \hat{j}\ \hat{k}]+[\hat{i}\ \hat{k}\ \hat{j}]=0$

(ii) $[2\hat{i}\ \hat{j}\ \hat{k}]+[\hat{i}\ \hat{k}\ \hat{j}]+[\hat{k}\ \hat{j}\ 2\hat{i}]=-1$

हल :

(i) $[\hat{i}\ \hat{j}\ \hat{k}]+[\hat{i}\ \hat{k}\ \hat{j}]=2$

$$\begin{aligned}
\text{L.H.S.} &= [\hat{i}\ \hat{j}\ \hat{k}]+[\hat{i}\ \hat{k}\ \hat{j}] \\
&= \hat{i}.(\hat{j}\times\hat{k})+\hat{i}.(\hat{k}\times\hat{j}) \\
&= \hat{i}.\hat{i}+\hat{i}.(-\hat{i}) \\
&= 1-1 \\
&= 0 \\
&= \text{R.H.S.}
\end{aligned}$$

(ii) $[2\hat{i}\ \hat{j}\ \hat{k}]+[\hat{i}\ \hat{k}\ \hat{j}]+[\hat{k}\ \hat{j}\ 2\hat{i}]$

$$\begin{aligned}
\text{L.H.S.} &= [2\hat{i}\ \hat{j}\ \hat{k}]+[\hat{i}\ \hat{k}\ \hat{j}]+[\hat{k}\ \hat{j}\ 2\hat{i}] \\
&= 2\hat{i}.(\hat{j}\times\hat{k})+\hat{i}.(\hat{k}\times\hat{j})+\hat{k}.(\hat{j}\times 2\hat{i}) \\
&= 2\hat{i}.\hat{i}+\hat{i}.(-\hat{i})+\hat{k}.(-2\hat{k})
\end{aligned}$$

$[\because \hat{k}\times\hat{j}=-\hat{i}$ तथा $\hat{j}\times\hat{i}=-\hat{k}]$

$$\begin{aligned}
&= 2-\hat{i}.\hat{i}-2\hat{k}.\hat{k} \\
&= 2-1-2 \\
&= -1 \\
&= \text{R.H.S.}
\end{aligned}$$

इति सिद्धम्

प्रश्न 2. यदि

$\vec{a} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}, \vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$

तथा

$\vec{c} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$

हो तो

$[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]$

का मान ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है

$$\vec{a} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$$

$$\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$$

$$\vec{c} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$$

$$[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2(4-1) + 3(2+3) + 4(-1-6)$$

$$= 6 + 15 - 28$$

$$= 21 - 28$$

$$= -7$$

अतः $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] = -7.$

प्रश्न 3. सिद्ध कीजिए कि सदिश

$-2\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}, -2\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}$

तथा

$4\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}$

समतलीय है।

हल :

माना

$\vec{a} = -2\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$

$$\vec{b} = -2\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}$$

$$\vec{c} = 4\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}$$

अब $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] = \begin{vmatrix} -2 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & -2 \\ 4 & -2 & -2 \end{vmatrix}$

$$= -2(-8-4) + 2(4+8) - 4(4-16)$$
$$= -2(-12) + 2(12) - 4(-12)$$
$$= 24 + 24 - 48$$
$$= 48 - 48$$
$$= 0$$

$\because$ $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] = 0$

तो सदिश $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ समतलीय होंगे।

अत: सदिश $-2\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}, -2\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}$ तथा $4\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}$ समतलीय है। इति सिद्धम्

प्रश्न 4. λ के किस मान के लिये, निम्नलिखित सदिश समतलीय होंगे

(i) $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}, \vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ तथा $\vec{c} = 3\hat{i} + \lambda\hat{j} + 5\hat{k}$

(ii) $\vec{a} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}, \vec{b} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ तथा $\vec{c} = \lambda\hat{i} - \hat{j} + \lambda\hat{k}$

हल : (i) दिया है :

$$\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$$

$$\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$$

तथा $$\vec{c} = 3\hat{i} + \lambda\hat{j} + 5\hat{k}$$

$\because$ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ समतलीय है, तब

$$[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] = 0$$

$$\Rightarrow \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & \lambda & 5 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2(10 + 3l) + 1(5 + 9) + 1(\lambda - 6) = 0$$

$$\Rightarrow \quad 20 + 6\lambda + 14 + \lambda - 6 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 7\lambda + 28 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 7\lambda = -28$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = -4$$

अतः $\lambda = 4$ के लिए दिए गए सदिश समतलीय होंगे।

(ii) दिया है :

$$\vec{a} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$$

$$\vec{b} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$$

तथा $$\vec{c} = \lambda\hat{i} - \hat{j} + \lambda\hat{k}$$

$\because$ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ समतलीय है, तब

$$[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] = 0$$

$$\Rightarrow \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ \lambda & -1 & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad 1(\lambda - 1) + 1(2\lambda + \lambda) + 1(-2 - \lambda) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda - 1 + 3\lambda - 2 - \lambda = 0$$

$$\Rightarrow \quad 3\lambda - 3 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 3\lambda = 3$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = 1$$

अतः $\lambda = 1$ के लिए दिए गए सदिश समतलीय होंगे।

प्रश्न 5. सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित चारों बिन्दु उत्तर समतलीय है।

(i) A(-1, 4, -3), B(3, 2, -5), C(-3, 8, -5), D(-3, 2, 1)

(ii) A(0, -1, 0), B(2, 1, - 1), C(1, 1, 1), D(3, 3, 0)

हल : (i) दिए गए बिन्दु A(-1, 4, - 3), B(3, 2, -5), C(-3, 8, -5) तथा D(-3, 2, 1) है।

तब $\vec{OA} = -\hat{i} + 4\hat{j} - 3\hat{k}$

$\vec{OB} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k}$

$\vec{OC} = -3\hat{i} + 8\hat{j} - 5\hat{k}$

तथा $\vec{OD} = -3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$

यदि ये चारों बिन्दु समतलीय है तो सदिश $\vec{BA}, \vec{BC}, \vec{BD}$ समतलीय होंगे। पुन: समतलीयता के

प्रतिबन्ध से

$$[\overrightarrow{BA}\ \overrightarrow{BC}\ \overrightarrow{BD}] = 0$$

अब $\quad \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{BA} = (-\hat{i} + 4\hat{j} - 3\hat{k}) - (3\hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k})$

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{BA} = -\hat{i} + 4\hat{j} - 3\hat{k} - 3\hat{i} - 2\hat{j} + 5\hat{k}$

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{BA} = -4\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$

तथा $\quad \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{BC} = (-3\hat{i} + 8\hat{j} - 5\hat{k}) - (3\hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k})$

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{BC} = -3\hat{i} + 8\hat{j} - 5\hat{k} - 3\hat{i} - 2\hat{j} + 5\hat{k}$

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{BC} = -6\hat{i} + 6\hat{j}$

पुनः $\quad \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB}$

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{BD} = (-3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) - (3\hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k})$

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{BD} = -3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k} - 3\hat{i} - 2\hat{j} + 5\hat{k}$

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{BD} = -6\hat{i} + 6\hat{k}$

अब $[\overrightarrow{BA}\ \overrightarrow{BC}\ \overrightarrow{BD}]$

$$= \begin{vmatrix} -4 & 2 & 2 \\ -6 & 6 & 0 \\ -6 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= -4(36 - 0) - 2(-36 - 0) + 2(0 + 36)$$

$$= -144 + 72 + 72$$

$$= -144 + 144$$

$$= 0$$

$\because [\overrightarrow{BA}\ \overrightarrow{BC}\ \overrightarrow{BD}] = 0$

अतः दिए गए चारों बिन्दु समतलीय है।

(ii) दिए गए बिन्दु A(0, - 1, 0), B(2, 1,- 1), C(1, 1, 1) तथा D(3, 3, 0) है। तब 24 = 01-3+0∗

तब $\qquad \overrightarrow{OA} = 0\hat{i} - \hat{j} + 0\hat{k}$

$\qquad \overrightarrow{OB} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$

$\qquad \overrightarrow{OC} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$

तथा $\qquad \overrightarrow{OD} = 3\hat{i} + 3\hat{j} + 0\hat{k}$

यदि ये चारों बिन्दु समतलीय है तो सदिश $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}$ समतलीय होंगे। पुनः समतलीयता के प्रतिबन्ध से,

$$[\overrightarrow{BA}\ \overrightarrow{BC}\ \overrightarrow{BD}] = 0$$

अब $\qquad \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$

$\Rightarrow \qquad \overrightarrow{BA} = (0\hat{i} - \hat{j} + 0\hat{k}) - (2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k})$

$\Rightarrow \qquad \overrightarrow{BA} = 0\hat{i} - \hat{j} + 0\hat{k} - 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$

$\Rightarrow \qquad \overrightarrow{BA} = -2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$

तथा $\qquad \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$

$\Rightarrow \qquad \overrightarrow{BC} = (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) - (2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k})$

$\Rightarrow \qquad \overrightarrow{BC} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k} - 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$

$\Rightarrow \qquad \overrightarrow{BC} = -\hat{i} + 2\hat{k}$

पुनः $\qquad \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB}$

$\Rightarrow \qquad \overrightarrow{BD} = (3\hat{i} + 3\hat{j} + 0\hat{k}) - (2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k})$

$\Rightarrow \qquad \overrightarrow{BD} = 3\hat{i} + 3\hat{j} + 0\hat{k} - 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$

$\Rightarrow \qquad \overrightarrow{BD} = \hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$

अब $[\overrightarrow{BA}\ \overrightarrow{BC}\ \overrightarrow{BD}] = \begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

$$= -2(0-4) + 2(-1-2) + 1(-2-0)$$
$$= 8 - 6 - 2$$
$$= 8 - 8 = 0$$

$\because \ [\overrightarrow{BA}\ \overrightarrow{BC}\ \overrightarrow{BD}] = 0$

अतः दिए गए चारों बिन्दु समतलीय है। इति सिद्धम्

प्रश्न 6. सिद्ध कीजिए कि

$\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k},\ \vec{b} = \hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k}$

तथा

$\vec{c} = 3\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k}$

एक समकोण त्रिभुज की सदिश भुजाएं हैं।

हल : दी गई भुजाएँ।

$$\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$$
$$\vec{b} = \hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k}$$

तथा $\qquad \vec{c} = 3\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k}$

$$|\vec{a}| = \sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (1)^2}$$
$$= \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$$
$$|\vec{b}| = \sqrt{(1)^2 + (-3)^2 + (-5)^2}$$
$$= \sqrt{1+9+25} = \sqrt{35}$$

$$|\vec{c}| = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2 + (-4)^2}$$
$$= \sqrt{9+16+16} = \sqrt{41}$$
$$|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 = (\sqrt{6})^2 + (\sqrt{35})^2$$
$$\Rightarrow |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 = 6 + 35$$
$$\Rightarrow |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 = 41$$
$$\Rightarrow |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 = (\sqrt{41})^2$$
$$\Rightarrow |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 = |\vec{c}|^2$$
$$\therefore \quad |\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2$$

अतः दी गई सदिश भुजाएँ एक समकोण त्रिभुज की भुजाएँ है।

इति सिद्धम्।

प्रश्न 7. उस समान्तर षट्फलक का आयतन ज्ञात कीजिए जिसकी तीन संगामी कोरे निम्नलिखित सदिशों द्वारा निरूपित हैं :

(i) $\vec{a} = 4\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ **तथा** $\vec{c} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$

(ii) $\vec{a} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ **तथा** $\vec{c} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$

हल :

(i) दिए गए समान्तर षट्फलक की भुजाएँ।

$$\vec{a} = 4\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$$
$$\vec{b} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$$
तथा $$\vec{c} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$$

समान्तर घट्फलक का आयतन

$$= \begin{vmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$= 4(4-1) + 3(6+3) + 1(-3-6)$

$= 12 + 27 - 9$

$= 30$

अतः समान्तर षट्फलक का आयतन

= 30 घन मात्रक

(ii) दिए दिए समान्तर षट्फलक की भुजाएँ।

$$\vec{a} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$$

$$\vec{b} = \hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$$

तथा $$\vec{c} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$$

समान्तर घट्फलक का आयतन

$= [\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]$

$$= \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$= 2(1-2) + 3(-1-4) + 1(1+2)$

$= -2 - 15 + 3$

$= -14$

चूँकि आयतन सदैव धनात्मक होता है।

अतः दिए गए समान्तर षट्फलक का आयतन

= 14 घन इकाई।

Ex 13.5

प्रश्न 1.

$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$

का मान ज्ञात कीजिए यदि

(i) $\vec{a} = 3\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}, \ \vec{b} = \hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$

तथा $\vec{c} = -\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$

(ii) $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}, \ \vec{b} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$

तथा $\vec{c} = -\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k}$

हल : (i) दिया है :

$\vec{a} = 3\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$

$\vec{b} = \hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$

तथा $\vec{c} = -\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$

हम जानते हैं कि

$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} . \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} . \vec{b})\vec{c}$

अब $\vec{a} . \vec{c} = (3\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}).(-\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k})$

$\vec{a} . \vec{c} = (3)(-1) + (-1)(1) + (1)(3)$

$\vec{a} . \vec{c} = -3 - 1 + 3$

अतः $\vec{a} . \vec{c} = -1$

पुनः $\vec{a} . \vec{b} = (3\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}).(\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k})$

$\vec{a} . \vec{b} = (3)(1) + (-1)(3) + (1)(-1)$

$\vec{a} . \vec{b} = 3 - 3 - 1$

अतः $\vec{a} . \vec{b} = -1$

अब $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}.\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}.\vec{b})\vec{c}$

$\Rightarrow \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (-1)(\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k})$

$-(-1)(-\hat{i}+\hat{j}+3\hat{k})$

$\Rightarrow \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = -\hat{i}-3\hat{j}+\hat{k}-\hat{i}+\hat{j}+3\hat{k}$

अतः $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = -2\hat{i}-2\hat{j}+4\hat{k}$

(ii) दिया है :

$\vec{a} = 2\hat{i}+\hat{j}-3\hat{k}$

$\vec{b} = \hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$

तथा $\vec{c} = -\hat{i}+\hat{j}-4\hat{k}$

हम जानते हैं कि

$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}.\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}.\vec{b})\vec{c}$

अब $\vec{a}.\vec{c} = (2\hat{i}+\hat{j}-3\hat{k}).(-\hat{i}+\hat{j}-4\hat{k})$

$\Rightarrow \vec{a}.\vec{c} = (2)(-1)+(1)(1)+(-3)(-4)$

$\Rightarrow \vec{a}.\vec{c} = -2+1+12$

अतः $\vec{a}.\vec{c} = 11$

पुनः $\vec{a}.\vec{b} = (2\hat{i}+\hat{j}-3\hat{k}).(\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k})$

$\Rightarrow \vec{a}.\vec{b} = (2)(1)+(1)(-2)+(-3)(1)$

$\Rightarrow \vec{a}.\vec{b} = 2-2-3$

अतः $\vec{a}.\vec{b} = -3$

अब $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}.\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}.\vec{b})\vec{c}$

$\Rightarrow \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = 11(\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k})-(-3)(-\hat{i}+\hat{j}-4\hat{k})$

$\Rightarrow \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = 11\hat{i} - 22\hat{j} + 11\hat{k} - 3\hat{i} + 3\hat{j} - 12\hat{k}$

अतः $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = 8\hat{i} - 19\hat{j} - \hat{k}$

प्रश्न 2. सिद्ध कीजिए कि

$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$

यदि

(i) $\vec{a} = 2\hat{i} + 5\hat{j} - 7\hat{k}$, $\vec{b} = -3\hat{i} + 4\hat{j} + \hat{k}$,

$\vec{c} = -\hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k}$

(ii) $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}$, $\vec{b} = -\hat{i} + \hat{j} + \sqrt{2}\hat{k}$,

$\vec{c} = 4\hat{i} - 2\hat{j} + \sqrt{3}\hat{k}$

हल :

(i) दिया है।

$$\vec{a} = 2\hat{i} + 5\hat{j} - 7\hat{k}$$

$$\vec{b} = -3\hat{i} + 4\hat{j} + \hat{k}$$

तथा
$$\vec{c} = -\hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k}$$

$$\vec{a} . \vec{b} = (2\hat{i} + 5\hat{j} - 7\hat{k}).(-3\hat{i} + 4\hat{j} + \hat{k})$$
$$= -6 + 20 - 7 = 7$$

$$\vec{b} . \vec{c} = (-3\hat{i} + 4\hat{j} + \hat{k}).(-\hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k})$$
$$= 3 - 8 - 3 = -8$$

$$\vec{a} . \vec{c} = (2\hat{i} + 5\hat{j} - 7\hat{k}).(-\hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k})$$
$$= -2 - 10 + 21 = 9$$

अब $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} . \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} . \vec{b})\vec{c}$

या $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = 9(-3\hat{i} + 4\hat{j} + \hat{k}) - 7(-\hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k})$

या $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = -27\hat{i} + 36\hat{j} + 9\hat{k} + 7\hat{i} + 14\hat{j} + 21\hat{k}$

या $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = -20\hat{i}+50\hat{j}+30\hat{k}$ ...(1)

पुन: $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = (\vec{a}.\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}.\vec{c})\vec{a}$

या $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = 9(-3\hat{i}+4\hat{j}+\hat{k})$

$-(-8)(2\hat{i}+5\hat{j}-7\hat{k})$

या $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = -27\hat{i}+36\hat{j}+9\hat{k}+16\hat{i}+40\hat{j}-56\hat{k}$

या $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = -11\hat{i}+76\hat{j}-47\hat{k}$ ...(2)

समीकरण (1) व (2) से

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) \neq (\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$$

(ii) दिया है :

$\vec{a} = 2\hat{i}+3\hat{j}-5\hat{k}$

$\vec{b} = -\hat{i}+\hat{j}+\sqrt{2}\hat{k}$

$\vec{c} = 4\hat{i}-2\hat{j}+\sqrt{3}\hat{k}$

$\vec{a}.\vec{b} = (2\hat{i}+3\hat{j}-5\hat{k}).(-\hat{i}+\hat{j}+\sqrt{2}\hat{k})$

$= -2+3-5\sqrt{2} = 1-5\sqrt{2}$

$\vec{b}.\vec{c} = (-\hat{i}+\hat{j}+\sqrt{2}\hat{k}).(4\hat{i}-2\hat{j}+\sqrt{3}\hat{k})$

$= -4-2+\sqrt{6} = -6+\sqrt{6}$

$\vec{a}.\vec{c} = (2\hat{i}+3\hat{j}-5\hat{k}).(4\hat{i}-2\hat{j}+\sqrt{3}\hat{k})$

$= 8-6-5\sqrt{2} = 2-5\sqrt{3}$

अब $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}.\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}.\vec{b})\vec{c}$

या $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (2-5\sqrt{3})(-\hat{i}+\hat{j}+\sqrt{2}\hat{k})$

$-(1-5\sqrt{2})(4\hat{i}-2\hat{j}+\sqrt{3}\hat{k})$

या $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (-2+5\sqrt{3}-4+20\sqrt{2})\hat{i}$

$+(2-5\sqrt{3}+2-10\sqrt{2})\hat{j}$

$+(2\sqrt{2}-5\sqrt{6}-\sqrt{3}+5\sqrt{6})\hat{k}$

या $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (-6+20\sqrt{2}+5\sqrt{3})\hat{i}$

$+(4-10\sqrt{2}-5\sqrt{3})\hat{j}$

$$+ (2\sqrt{2}-\sqrt{3})\hat{k} \quad ...(1)$$

पुनः $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = (\vec{a}.\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}.\vec{c})\vec{a}$

या $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = (2-5\sqrt{3})(-\hat{i}+\hat{j}+\sqrt{2}\hat{k})$

$$-(-6+\sqrt{6})(2\hat{i}+3\hat{j}-5\hat{k})$$

या $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = (-2+5\sqrt{3}+12-2\sqrt{6})\hat{i}$

$$+ (2-5\sqrt{3}+18-3\sqrt{6})\hat{j}$$

$$+ (2\sqrt{2}-5\sqrt{6}+30-5\sqrt{6})\hat{k}$$

या $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = (10+5\sqrt{3}-2\sqrt{6})\hat{i}$

$$+ (20-5\sqrt{3}-3\sqrt{6})\hat{j}$$

$$+ (30+2\sqrt{2}-10\sqrt{6})\hat{k} \quad ...(2)$$

समीकरण (1) व (2) से,

$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) \neq (\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ इति सिद्धम्

प्रश्न 3. सूत्र

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}.\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}.\vec{b})\vec{c}$$

को सत्यापन कीजिए, जबकि

(i) $\vec{a} = \hat{i}+\hat{j}-2\hat{k},\ \vec{b} = 2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k},\ \vec{c} = \hat{i}+3\hat{j}-\hat{k}$

(ii) $\vec{a} = \hat{i}-2\hat{j}+\hat{k},\ \vec{b} = 2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k},\ \vec{c} = 3\hat{i}+5\hat{j}+2\hat{k}$

हल : (i) दिया है :

$$\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$$

$$\vec{b} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$$

तथा $$\vec{c} = \hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$$

$$(\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow$ $$(\vec{b} \times \vec{c}) = \hat{i}(1-3) - \hat{j}(-2-1) + \hat{k}(6+1)$$

$\Rightarrow$ $$(\vec{b} \times \vec{c}) = -2\hat{i} + 3\hat{j} + 7\hat{k}$$

अब $$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}) \times (-2\hat{i} + 3\hat{j} + 7\hat{k})$$

या $$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & 7 \end{vmatrix}$$

या $$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \hat{i}(7+6) - \hat{j}(7-4) + \hat{k}(3+2)$$

या $$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = 13\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k} \quad \ldots(1)$$

पुनः $$\vec{a} . \vec{c} = (\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}).(\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k})$$
$$= 1 + 3 + 2 = 6$$

तथा $$\vec{a} . \vec{b} = (\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}).(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$$
$$= 2 - 1 - 2 = -1$$

अब $$(\vec{a} . \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} . \vec{b})\vec{c} = 6(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$$
$$- (-1)(\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k})$$

$$(\vec{a} . \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} . \vec{b})\vec{c} = 12\hat{i} - 6\hat{j} + 6\hat{k} + \hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$$

$$(\vec{a} . \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} . \vec{b})\vec{c} = 13\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k} \quad \ldots(2)$$

समीकरण (1) व (2) से सत्यापित होता है कि

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} . \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} . \vec{b})\vec{c}$$

(ii) दिया है :

$\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$

$$\vec{b} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$$

तथा $$\vec{c} = 3\hat{i} + 5\hat{j} + 2\hat{k}$$

$$(\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

या $$(\vec{b} \times \vec{c}) = \hat{i}(2+5) - \hat{j}(4+3) + \hat{k}(10-3)$$

$$\Rightarrow \quad (\vec{b} \times \vec{c}) = 7\hat{i} - 7\hat{j} + 7\hat{k}$$

अब $$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}) \times (7\hat{i} - 7\hat{j} + 7\hat{k})$$

$$\Rightarrow \quad \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 7 & -7 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \hat{i}(-14+7) - \hat{j}(7-7) + \hat{k}(-7+14)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = -7\hat{i} + 7\hat{k} \qquad \ldots(1)$$

पुनः $$\vec{a} \cdot \vec{c} = (\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}) \cdot (3\hat{i} + 5\hat{j} + 2\hat{k})$$

$$= 3 - 10 + 2 = -5$$

तथा $$\vec{a} \cdot \vec{b} = (\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}) \cdot (2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k})$$

$$= 2 - 2 - 1 = -1$$

अब $(\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$

$$= -5(2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}) - (-1)(3\hat{i} + 5\hat{j} + 2\hat{k})$$

या $(\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$

$$= -10\hat{i} - 5\hat{j} + 5\hat{k} + 3\hat{i} + 5\hat{j} + 2\hat{k}$$

या $(\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} = -7\hat{i} + 7\hat{k} \qquad \ldots(2)$

समीकरण (1) व (2) से सत्यापित होता है कि

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} \qquad \text{इति सिद्धम्}$$

प्रश्न 4. किसी सदिश $\vec{a}$ के लिए सिद्ध कीजिए कि

$$\hat{i}\times(\vec{a}\times\hat{i})+\hat{j}\times(\vec{a}\times\hat{j})+\hat{k}\times(\vec{a}\times\hat{k})=2\vec{a}$$

हल : हम जानते हैं कि

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$$

$$\hat{i}\times(\vec{a}\times\hat{i})=(\hat{i}\cdot\hat{i})\vec{a}-(\hat{i}\cdot\vec{a})\hat{i}=\vec{a}-(\hat{i}\cdot\vec{a})\hat{i}$$

$$(\because\ \hat{i}\cdot\hat{i}=1)$$

$$\hat{j}\times(\vec{a}\times\hat{j})=(\hat{j}\cdot\hat{j})\vec{a}-(\hat{j}\cdot\vec{a})=\vec{a}-(\hat{j}\cdot\vec{a})\hat{j}$$

$$(\because\ \hat{j}\cdot\hat{j}=1)$$

$$\hat{k}\times(\vec{a}\times\hat{k})=(\hat{k}\cdot\hat{k})\vec{a}-(\hat{k}\cdot\vec{a})\hat{k}=\vec{a}-(\hat{k}\cdot\vec{a})\hat{k}$$

$$(\because\ \hat{k}\cdot\hat{k}=1)$$

उक्त तीनों को जोड़ने पर,

$$\hat{i}\times(\vec{a}\times\hat{i})+\hat{j}\times(\vec{a}\times\hat{j})+\hat{k}\times(\vec{a}\times\hat{k})$$

$$=3\vec{a}-\{(\hat{i}\cdot\vec{a})\hat{i}+(\hat{j}\cdot\vec{a})\hat{j}+(\hat{k}\cdot\vec{a})\hat{k}\} \quad \ldots(1)$$

माना $\vec{a}=l\hat{i}+m\hat{j}+n\hat{k}$ ...(2)

$$\hat{i}\cdot\vec{a}=\hat{i}\cdot(l\hat{i}+m\hat{j}+n\hat{k})$$

$$=l(\hat{i}\cdot\hat{i})+m(\hat{i}\cdot\hat{j})+n(\hat{i}\cdot\hat{k})$$

$$=l(1)+m(0)+n(0)$$

$$=l+0+0=l$$

इसी प्रकार, $\hat{j}\cdot\vec{a}=m$ तथा $\hat{k}\cdot\vec{a}=n$

समीकरण (2) में l, m, n के उक्त मान रखने पर,

$$\vec{a}=(\hat{i}\cdot\vec{a})\hat{i}+(\hat{j}\cdot\vec{a})\hat{j}+(\hat{k}\cdot\vec{a})\hat{k}$$

अतः समीकरण (1) से,

$$\hat{i}\times(\vec{a}\times\hat{i})+\hat{j}\times(\vec{a}\times\hat{j})+\hat{k}\times(\vec{a}\times\hat{k})=3\vec{a}-\vec{a}=2\vec{a}$$

अतः, $\hat{i}\times(\vec{a}\times\hat{i})+\hat{j}\times(\vec{a}\times\hat{j})+\hat{k}\times(\vec{a}\times\hat{k})=2\vec{a}$

इति सिद्धम्

प्रश्न 5. सिद्ध कीजिए कि
$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})+\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})=0$$

हल : L.H.S.

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})+\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})$$
$$=(\vec{a}.\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}.\vec{b})\vec{c}+(\vec{b}.\vec{a})\vec{c}$$
$$-(\vec{b}.\vec{c})\vec{a}+(\vec{c}.\vec{b})\vec{a}-(\vec{c}.\vec{a})\vec{b}$$
$$=(\vec{a}.\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}.\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}.\vec{b})\vec{c}$$
$$+(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}-(\vec{b}.\vec{c})\vec{a}+(\vec{b}.\vec{c})\vec{a}$$
$= 0$ $\qquad [\because \vec{c}.\vec{a}=\vec{a}.\vec{c},\ \vec{b}.\vec{a}=\vec{a}.\vec{b}$

तथा $\vec{c}.\vec{b}=\vec{b}.\vec{c}]$

= R.H.S.

अतः $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})+\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})=0$

इति सिद्धम्

प्रश्न 6. सिद्ध कीजिए कि

$\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$

समतलीय हैं, यदि और केवल यदि

$\vec{a}\times\vec{b},\ \vec{b}\times\vec{c},\ \vec{c}\times\vec{a}$

समतलीय हैं।

हल : हम जानते हैं कि

$$[\vec{l}\ \vec{m}\ \vec{n}] = \vec{l}\cdot(\vec{m}\times\vec{n})$$

तब $[\vec{a}\times\vec{b}\quad \vec{b}\times\vec{c}\quad \vec{c}\times\vec{a}]$

$$= (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\{(\vec{b}\times\vec{c})\times(\vec{c}\times\vec{a})\}$$

$$= (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\{(\vec{d}\times(\vec{c}\times\vec{a}))\} \qquad \text{जहाँ } \vec{d} = \vec{b}\times\vec{c}$$

$$= (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\{(\vec{d}\cdot\vec{a})\,\vec{c} - (\vec{d}\cdot\vec{c})\,\vec{a}\}$$

$$= (\vec{d}\cdot\vec{a})\{(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}\} - (\vec{d}\cdot\vec{c})\{(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{a}\}$$

$$= (\vec{d}\cdot\vec{a})[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] - (\vec{d}\cdot\vec{c})[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{a}]$$

$$= (\vec{d}\cdot\vec{a})[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] - (\vec{d}\cdot\vec{c})(0) \quad [\because [\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{a}] = 0$$

$$= \{(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}\}[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] - 0 \quad (\because \vec{d} = \vec{b}\times\vec{c})$$

$$= [\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{a}][\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]$$

$$= [\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}][\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] \qquad [\because \vec{b}\ \vec{c}\ \vec{a} = \vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]$$

$$= [\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]^2$$

अतः $\quad [\vec{a}\times\vec{b}\quad \vec{b}\times\vec{c}\quad \vec{c}\times\vec{a}] = [\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] \qquad \ldots(1)$

अब यदि $\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}$ समतलीय हैं तो

$$[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] = 0$$

समीकरण (1) से,

$$[\vec{a}\times\vec{b}\quad \vec{b}\times\vec{c}\quad \vec{c}\times\vec{a}] = \{0\}^2$$

$$\Rightarrow \quad [\vec{a}\times\vec{b}\quad \vec{b}\times\vec{c}\quad \vec{c}\times\vec{a}] = 0$$

अतः $\vec{a}\times\vec{b},\ \vec{b}\times\vec{c},\ \vec{c}\times\vec{a}$ समतलीय हैं।

अब यदि $\vec{a}\times\vec{b},\ \vec{b}\times\vec{c},\ \vec{c}\times\vec{a}$ समतलीय हैं तो

$$[\vec{a}\times\vec{b}\quad \vec{b}\times\vec{c}\quad \vec{c}\times\vec{a}] = 0$$

तब समीकरण (1) से,

$$0 = [\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]^2$$

$$\Rightarrow \quad [\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] = 0$$

अतः $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ **समतलीय हैं।**

अतः

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

समतलीय हैं, यदि और केवल यदि

$\vec{a} \times \vec{b},\ \vec{b} \times \vec{c},\ \vec{c} \times \vec{a}$

समतलीय हैं।

इति सिद्धम्

प्रश्न 7. सिद्ध कीजिए कि

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = [\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{d}]\,\vec{c} - [\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]\,\vec{d}$$

हल : L.H.S.

$$= (\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d})$$

$$= \vec{r} \times (\vec{c} \times \vec{d})$$

माना $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{r}$, **तब**

$$= (\vec{r} . \vec{d})\,\vec{c} - (\vec{r} . \vec{c})\,\vec{d}$$

$$= \{(\vec{a} \times \vec{b}). \vec{d}\}\,\vec{c} - \{(\vec{a} \times \vec{b}). \vec{c}\}\,\vec{d}$$

[$\vec{r} = \vec{a} \times \vec{b}$ **रखने पर**]

$$= [\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{d}]\,\vec{c} - [\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]\,\vec{d}$$

= R.H.S.

इति सिद्धम्

प्रश्न 8. दो सदिशों में $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के परिमाण क्रमशः √3 एवं 2 हैं और $\vec{a}.\vec{b} = \sqrt{6}$ है, तो $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

हल : मोना $\vec{a}$ तथा $\vec{a}$ के बीच का कोण θ है, तब

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}\times 2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\left[\because\ |\vec{a}| = \sqrt{3} \text{ तथा } |\vec{b}| = 2\right]$$

$$\therefore \qquad \theta = \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{या} \qquad \theta = \frac{\pi}{4}$$

अत: सदिश $\vec{a}$ तथा $\vec{a}$ के बीच का कोण $\frac{\pi}{4}$ है।

प्रश्न 9. सदिशों

$$\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$$

और

$$3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$$

के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

हल : माना

$$\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$$
$$\vec{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$$

तथा $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के बीच का कोण θ है,

तब $\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

अब $\vec{a}\cdot\vec{b} = (\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k}).(3\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k})$

$= 1\times3+(-2)(-2)+3\times1$

$= 3+4+3 = 10$

∴ $\vec{a}\cdot\vec{b} = 10$

पुनः $|\vec{a}| = |\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k}|$

$= \sqrt{(1)^2+(-2)^2+3^2}$

$= \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$

$|\vec{b}| = |3\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}|$

$= \sqrt{3^2+(-2)^2+1^2}$

$= \sqrt{9+4+1} = \sqrt{14}$

$\vec{a}\cdot\vec{b}, |\vec{a}|$ तथा $|\vec{b}|$ के मान समी- (1) में रखने पर,

$\cos\theta = \dfrac{10}{\sqrt{14}\times\sqrt{14}} = \dfrac{10}{14} = \dfrac{5}{7}$

∴ $\theta = \cos^{-1}\left(\dfrac{5}{7}\right)$

अतः सदिशों के बीच का कोण $cos^{-1}\left(\frac{5}{7}\right)$ है।

प्रश्न 10. सदिश $\hat{i}+\hat{j}$ पर सदिश $\hat{i}-\hat{j}$ का प्रक्षेप ज्ञात कीजिए।

हल : हम जानते हैं कि सदिश $\vec{a}$ का सदिश $\vec{b}$ पर प्रक्षेप

$$= \vec{a} \cdot \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$$

माना $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j}$ **तथा** $\vec{b} = \hat{i} - \hat{j}$

तब $\vec{b} = \hat{i} - \hat{j}$ **का सदिश** $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j}$ **पर प्रक्षेप**

$$= \vec{b} \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{(\hat{i} - \hat{j}) \cdot (\hat{i} + \hat{j})}{|\hat{i} + \hat{j}|}$$

$$= \frac{\hat{i} \cdot \hat{i} + \hat{i} \cdot \hat{j} - \hat{j} \cdot \hat{i} - \hat{j} \cdot \hat{j}}{\sqrt{1^2 + 1^2}}$$

$$= \frac{|\hat{i}|^2 + 0 - 0 - |\hat{j}|^2}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1 - 1}{\sqrt{2}} \qquad \left[\because |\hat{i}| = 1, \; |\hat{j}| = 1 \right]$$

$$= 0.$$

अत: सदिश $\hat{i} + \hat{j}$ पर सदिश $\hat{i} - \hat{j}$ का प्रक्षेप 0 है।

प्रश्न 11. सदिश

$$\hat{i} + 3\hat{j} + 7\hat{k}$$

का सदिश

$$7\hat{i} - \hat{j} + 8\hat{k}$$

पर प्रक्षेप ज्ञात कीजिए।

हल :

माना $\vec{a} = \hat{i}+3\hat{j}+7\hat{k}$

तथा $\vec{b} = 7\hat{i}-\hat{j}+8\hat{k}$

तब सदिश $\vec{a}$ का सदिश $\vec{b}$ पर प्रक्षेप

$$= \vec{a}.\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$$

$$= \frac{(\hat{i}+3\hat{j}+7\hat{k}).(7\hat{i}-\hat{j}+8\hat{k})}{|7\hat{i}-\hat{j}+8\hat{k}|}$$

$$= \frac{1\times 7+3\times(-1)+7\times 8}{\sqrt{7^2+(-1)^2+8^2}}$$

$$= \frac{7-3+56}{\sqrt{49+1+64}} = \frac{60}{\sqrt{114}}.$$

अत: सदिश $\hat{i}+3\hat{j}+7\hat{k}$ का सदिश $7\hat{i}-\hat{j}+8\hat{k}$ पर प्रक्षेप $\frac{60}{\sqrt{114}}$ है।

प्रश्न 12.

$(3\vec{a}-5\vec{b}).(2\vec{a}+7\vec{b})$

का मान ज्ञात कीजिए।

हल :

$$(3\vec{a}-5\vec{b}).(2\vec{a}+7\vec{b})$$

$$= 3\vec{a}.(2\vec{a}+7\vec{b})-5\vec{b}.(2\vec{a}+7\vec{b})$$

$$= 6(\vec{a}.\vec{a})+21\vec{a}.\vec{b}-10\vec{b}.\vec{a}-35\vec{b}.\vec{b}$$

$$= 6|\vec{a}|^2+11\vec{a}.\vec{b}-35|\vec{b}|^2 \quad \left[\begin{array}{l}\because \vec{a}.\vec{a}=|\vec{a}|^2\\ \vec{b}.\vec{b}=|\vec{b}|^2\end{array}\right]$$

अत: $(3\vec{a}-5\vec{b}).(2\vec{a}+7\vec{b})$

$$= 6|\vec{a}|^2+11\vec{a}\cdot\vec{b}-35|\vec{b}|^2$$

प्रश्न 13. दो सदिशों में $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के परिमाण ज्ञात कीजिए, यदि इनके परिमाण समान हैं और इनके बीच का कोण 60° है तथा इनका अदिश गुणनफल $\frac{1}{2}$ है।

हल :

प्रश्नानुसार,

$$|\vec{a}| = |\vec{b}|$$

तथा $$\vec{a}.\vec{b} = \frac{1}{2}$$

$\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के बीच का कोण $\theta = 60°$

माना $$|\vec{a}| = |\vec{b}| = k$$

अब $$\cos\theta = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{\frac{1}{2}}{k \cdot k} = \frac{1}{2k^2}$$

अत: सदिशों $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ का परिमाण 1 है।

या $$\cos 60° = \frac{1}{2k^2}$$

या $$\frac{1}{2} = \frac{1}{2k^2}$$

या $$k^2 = 1$$

या $$k = \pm 1$$

परंतु $$k = |\vec{a}| = |\vec{b}|$$

$\therefore$ $$k = 1 = |\vec{a}| = |\vec{b}|$$

$$\left[\begin{array}{ll} \because & |\vec{a}| \neq -1 \\ \text{तथा} & |\vec{a}| \neq -1 \end{array}\right]$$

$\therefore$ $$|\vec{a}| = 1 \text{ तथा } |\vec{b}| = 1.$$

प्रश्न 14.

यदि एक मात्रक सदिश $\vec{a}$ के लिए

$$(\vec{x} - \vec{a}).(\vec{x} + \vec{a}) = 12$$

हो, तो | $\vec{x}$ | ज्ञात कीजिए।

हल :

प्रश्नानुसार,

$$|\vec{a}| = 1$$

तथा $$(\vec{x}-\vec{a}).(\vec{x}+\vec{a}) = 12$$

या $$\vec{x}.(\vec{x}+\vec{a})-\vec{a}.(\vec{x}+\vec{a}) = 12$$

या $$\vec{x}.\vec{x}+\vec{x}.\vec{a}-\vec{a}.\vec{x}-\vec{a}.\vec{a} = 12$$

या $$|\vec{x}|^2-|\vec{a}|^2 = 12 \qquad (\because \vec{x}.\vec{a}=\vec{a}.\vec{x})$$

या $$|\vec{x}|^2-1 = 12$$

या $$|\vec{x}|^2 = 12+1 = 13$$

अतः $$|\vec{x}| = \sqrt{13}$$

प्रश्न 15. यदि

$$\vec{a} = 2\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$$

$\vec{b} = -\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ **और** $\vec{c} = 3\hat{i}+3\hat{j}$

इस प्रकार हैं कि $\vec{a}+\lambda\vec{b}, \vec{c}$ पर लम्ब है, तो λ को मान ज्ञात कीजिए।

हल : प्रश्नानुसार,

$\vec{a}+\lambda\vec{b}, \vec{c}$ पर लम्ब है।

$$\therefore \quad (\vec{a}+\lambda\vec{b}).\vec{c} = 0$$

$$\{(2\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})+\lambda(-\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k})\}\cdot(3\hat{i}+3\hat{j}) = 0$$

या $$\{(2-\lambda)\hat{i}+(2+2\lambda)\hat{j}+(3+\lambda)\hat{k}\}.(3\hat{i}+3\hat{j}) = 0$$

या $$3(2-\lambda)\hat{i}.\hat{i}+3(2-\lambda)(\hat{i}.\hat{j})+3(2+2\lambda)(\hat{j}.\hat{i})$$

$$+3(2+2\lambda)\hat{j}.\hat{j}+3(3+\lambda)\hat{k}.\hat{i}+3(3+\lambda)\hat{k}.\hat{j} = 0$$

$$3\,(2-\lambda)\,\hat{i}\cdot\hat{i}+3(2+2\lambda)\,\hat{j}\cdot\hat{j}=0$$

$$[\because \hat{i}\cdot\hat{j}=0=\hat{k}\cdot\hat{i}=\hat{j}\cdot\hat{k},\ \hat{i}\cdot\hat{i}=\hat{j}\cdot\hat{j}=1]$$

या $\quad 3(2-\lambda)+3\,(2+2\lambda)=0$

या $\quad 6-3\lambda+6+6\lambda=0$

या $\quad 12+3\lambda=0$

अतः $\quad \lambda=-4.$

ध्यान दें : यदि यहाँ $\vec{c}=3\hat{i}+\hat{j}$ लें तो $\lambda=8$ प्राप्त होता है।