

अवकल समीकरण

Ex 12.1

निम्नलिखित अवकल समीकरण की कोटि एवं घात ज्ञात कीजिए :

प्रश्न 1.

$$\frac{dy}{dx} = \sin 2x + \cos 2x$$

हल :

$$\frac{dy}{dx} = \sin 2x + \cos 2x$$

y का उच्चतम अवकलज

$$= \frac{dy}{dx} = \left(\frac{d^1 y}{dx^1} \right)^1$$

अतः कोटि = 1, घात = 1

प्रश्न 2.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \sin x + \cos x$$

हल :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \sin x + \cos x$$

y का उच्चतम अवकलज

$$= \frac{d^2 y}{dx^2} = \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^1$$

अतः कोटि = 2, घात = 1

प्रश्न 3.

$$\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

हल :

$$\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

y का उच्चतम अवकलज

$$= \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)^2$$

अतः कोटि = 2, घात = 2

प्रश्न 4.

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = 2$$

हल :

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = 2$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 + 1 = 2 \frac{dy}{dx}$$

y का उच्चतम अवकलज

$$= \left(\frac{dy}{dx}\right)^4 = \left(\frac{d^1 y}{dx^1}\right)^4$$

अतः कोटि = 1, घात = 4

प्रश्न 5.

$$a \frac{d^2 y}{dx^2} = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{3/2}$$

हल :

$$a \frac{d^2 y}{dx^2} = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{3/2}$$

$$a^2 \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^3$$

y का उच्चतम अवकलज

$$= \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2$$

अतः कोटि = 2, घात = 2

प्रश्न 6.

$$x dx + y dy = 0$$

हल :

$$x dx + y dy = 0$$

$$\Rightarrow x + \frac{y dy}{dx} = 0$$

y का उच्चतम अवकलज

$$= \frac{dy}{d^1 x} = \left(\frac{d^1 y}{dx^1} \right)^1$$

अतः कोटि = 1, घात = 1

प्रश्न 7.

$$\left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^3 + y \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + y^3 = 0$$

हल :

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^5 = 0$$

y का उच्चतम अवकलज

$$= \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3$$

अतः कोटि = 2, घात = 3

प्रश्न 8.

$$x \frac{dy}{dx} + \frac{3}{\left(\frac{dy}{dx}\right)} = y^2$$

हल :

$$x \frac{dy}{dx} + \frac{3}{\left(\frac{dy}{dx}\right)} = y^2$$

$$x \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 3 = y^2 \frac{dy}{dx}$$

y का उच्चतम अवकलज

$$= \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \left(\frac{d^1y}{dx^1}\right)^2$$

अतः कोटि = 1, घात = 2

Ex 12.2

प्रश्न 1. वक्र कुल $y = ax + \frac{b}{x}$ के लिए अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल : $y = a + \frac{b}{x} \dots (i)$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = a + b(-1)x^{-2}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = a - \frac{b}{x^2} \dots (ii)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = 0 - b[(-2)x^{-3}]$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2b}{x^2} \dots (iii)$$

समीकरण (iii) है।

$$\Rightarrow x^2 \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2b}{x} \dots (iv)$$

समीकरण (ii) से,

$$x \frac{dy}{dx} = ax - \frac{b}{x} \dots (v)$$

समीकरण (iv) व (v) को जोड़कर (i) घटाने पर

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - y = \frac{2b}{x} + ax - \frac{b}{x} - ax - \frac{b}{x}$$
$$\Rightarrow x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - y = 0$$

यही अभीष्ट समीकरण है।

प्रश्न 2. वक्र कुल $x^2 + y^2 = a^2$ के लिए अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल: $x^2 + y^2 = a^2$

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow x + y \frac{dy}{dx} = 0$$

यही अभीष्ट अवकल समीकरण है।

प्रश्न 3. वक्र कुल $y = Ae^{3x} + Be^{5x}$ का अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल: $y = Ae^{3x} + Be^{5x}$ (i)

$$\frac{dy}{dx} = 3Ae^{3x} + 5Be^{5x} \quad \dots(ii)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 9Ae^{3x} + 25Be^{5x} \quad \dots(iii)$$

समीकरण (i) का 15 गुना करके समीकरण (ii) में जोड़ने पर,

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} + 15y &= 15Ae^{3x} + 9Ae^{3x} + 15Be^{5x} + 25Be^{5x} \\ \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} + 15y &= 24Ae^{3x} + 40Be^{5x} \quad \dots(iv) \end{aligned}$$

समीकरण (iv) में से (ii) का 8 गुना घटाने पर,

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2y}{dx^2} + 15y \right) - 8 \frac{dy}{dx} &= (24Ae^{3x} + 40Be^{5x}) \\ &\quad - 8(3Ae^{3x} + 5Be^{5x}) \\ \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} - 8 \frac{dy}{dx} + 15y &= 24Ae^{3x} - 24Ae^{3x} + 40Be^{5x} \\ &\quad - 40Be^{5x} \\ \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} - 8 \frac{dy}{dx} + 15y &= 0 \end{aligned}$$

यही अभीष्ट अवकल समीकरण है।

प्रश्न 4. वक्र कुल $y = e^x(A \cos x + B \sin x)$

हल : $y = e^x(A \cos x + B \sin x)$ (i)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{dy}{dx} &= e^x(A \cos x + B \sin x) \\ &\quad + e^x(-A \sin x + B \cos x) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y + e^x(-A \sin x + B \cos x) \quad \dots(ii)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{dy}{dx} - e^x(-A \cos x - B \sin x) \\ &\quad + e^x(-A \sin x + B \cos x) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dy}{dx} + e^x(A \cos x + B \sin x) + e^x(-A \sin x + B \cos x)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dy}{dx} - y + \frac{dy}{dx} - y \quad (\text{समीकरण (ii) से})$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} = 2 \frac{dy}{dx} - 2y$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

यही अभीष्ट समीकरण है।

प्रश्न 5. वक्र कुल $y = a \cos(x + b)$, जहाँ a और b स्वेच्छा अचर है, की अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल : $y = a \cos(x + b)$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -a \sin(x + b)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} = -a \cos(x + b)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} = -y$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} + y = 0$$

यही अभीष्ट समीकरण है।

Ex 12.3

प्रश्न 1. सिद्ध कीजिए कि $y^2 = 4a(x + 1)$ अवकल समीकरण

$$y = \left[1 - \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] = 2x \frac{dy}{dx}$$

का हल है।

$$\text{हल : } y^2 = 4a(x + 1) \dots(i)$$

$$\Rightarrow 2y \frac{dy}{dx} = 4a$$

$$\Rightarrow y \frac{dy}{dx} = 2a$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2a}{y} \dots(i)$$

$$\begin{aligned} \left[1 - \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] &= 1 - \left(\frac{2a}{y} \right)^2 \\ &= \frac{y^2 - 4a^2}{y^2} \dots(ii) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left[2x \frac{dy}{dx} \right] &= 2x \cdot \frac{2a}{y} \\ \Rightarrow \left[2x \frac{dy}{dx} \right] &= \frac{4ax}{y} \dots(iii) \end{aligned}$$

$$y = \sqrt{4a(x+1)} \dots(iv)$$

प्रश्न 2. सिद्ध कीजिए कि $y = ae^{-2x} + be^x$ अवकल समीकरण

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 2y = 0$$

का हल है।

$$\text{हल : } y = ae^{-2x} + be^x \dots(i)$$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= 2ae^{-2x} \cdot -2 + be^x \\ \Rightarrow \frac{dy}{dx} &= -4ae^{-2x} + be^x \quad \dots(ii) \\ \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} &= -4a \cdot e^{-2x} \cdot (-2) + be^x \\ \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} &= 8ae^{-2x} + be^x \quad \dots(iii)\end{aligned}$$

L.H.S.

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 2y &= (8ae^{-2x} + be^x) + (-4ae^{-2x} + be^x) - 2(2ae^{-2x} + be^x) \\ &= (8ae^{-2x} - 4ae^{-2x} - 4ae^{-2x}) + (be^x + be^x - 2be^x) \\ &= 0 + 0 = 0 \\ &= \text{R.H.S.}\end{aligned}$$

इति सिद्धम्

प्रश्न 3.

सिद्ध कीजिए कि $y = \frac{c-x}{1+cx}$ अवकल समीकरण $(1+x^2) \frac{dy}{dx} + (1+y^2) = 0$ का हल है।

हल :

$$\begin{aligned}(1+x^2) \frac{dy}{dx} + (1+y^2) &= 0 \\ (1+x^2) \frac{dy}{dx} &= -(1+y^2) \\ \frac{dy}{(1+y^2)} &= -\frac{1}{(1+x^2)} dx\end{aligned}$$

समाकलन करने पर,

$$\begin{aligned}\int \frac{dy}{1+y^2} &= - \int \frac{1}{1+x^2} dx \\ \Rightarrow \tan^{-1}y &= -\tan^{-1}x + \tan^{-1}c \\ \Rightarrow \tan^{-1}y &= \tan^{-1}c - \tan^{-1}x \\ \Rightarrow \tan^{-1}y &= \tan^{-1} \frac{c-x}{1+cx}\end{aligned}$$

तुलना करने पर,

$$y = \frac{c-x}{1+cx}$$

इति सिद्धम्

प्रश्न 4. सिद्ध कीजिए कि $y = a \cos (\log x) + b \sin (\log x)$ अवकल समीकरण

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + y = 0$$

का हल है।

हल : दिया गया फलन

$$y = a \cos (\log x) + b \sin (\log x) \dots(1)$$

समीकरण (1) के दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{a \sin (\log x)}{x} + \frac{b \cos (\log x)}{x}$$

$$\text{या } x \frac{dy}{dx} = -a \sin (\log x) + b \cos (\log x) \dots(2)$$

समीकरण (2) का x के सापेक्ष पुनः अवकलन करने पर,

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = -\frac{a \cos (\log x)}{x} - \frac{b \sin (\log x)}{x}$$

$$\text{या } x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} = -[a \cos (\log x) + b \sin (\log x)]$$

$= -y$ [समीकरण (1) से]

$$\text{या } x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + y = 0$$

$$\therefore y = a \cos (\log x) + b \sin (\log x)$$

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + y = 0$$

अवकल समीकरण का हल है।

इति सिद्धम्

प्रश्न 5. सिद्ध कीजिए कि $xy = \log y + c$ अवकल समीकरण

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{1-xy} \quad (xy \neq 1)$$

का हल है।

हल : दिया गया फलन

$$xy = \log y + c \dots\dots(i)$$

समीकरण (1) का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$x \frac{dy}{dx} + y = \frac{1}{y} \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow xy \frac{dy}{dx} + y^2 = \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} - xy \frac{dy}{dx} = y^2$$

$$\Rightarrow (1 - xy) \frac{dy}{dx} = y^2$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{1 - xy}$$

अतः दिया गया फलन $xy + \log y + c$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{1 - xy}$$

अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{1 - xy}$ का हल है।

इति सिद्धम्

Ex 12.4

निम्नलिखित अवकल समीकरणों को हल कीजिए

प्रश्न 1. $(e^y + 1) \cos x \, dx + e^y \sin x \, dy = 0$

हल : दिया गया अवकल समीकरण

$$(e^y + 1) \cos x \, dx + e^y \sin x \, dy = 0$$

या
$$\frac{\cos x}{\sin x} dx + \frac{e^y}{e^y + 1} dy = 0$$

दोनों पक्षों को समाकलन करने पर,

$$\int \cot x \, dx + \int \frac{e^y}{e^y + 1} dy = 0$$

या $\log \sin x + \log(e^y + 1) = \log C$

या $\log (\sin x(e^y + 1)) = \log C$

या $\sin (e^y + 1) = C$

ओं अवकलन समीकरण का अभीष्ट हल है।

प्रश्न 2. $(1 + x^2) dy = (1 + y^2) dx$

हल : $(1 + x^2) dy = (1 + y^2) dx$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1 + y^2}{1 + x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1 + y^2} dy = \frac{1}{1 + x^2} dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{1 + y^2} dy = \int \frac{1}{1 + x^2} dx$$

$$\Rightarrow \tan^{-1} y = \tan^{-1} x + \tan^{-1} C$$

$$\Rightarrow \tan^{-1} \frac{y - x}{1 + xy} = \tan^{-1} C$$

$$\Rightarrow \frac{y - x}{1 + xy} = C \text{ तुलना से}$$

$$\Rightarrow y - x = C(1 + xy)$$

यही अभीष्ट व्यापक हल है।

प्रश्न 3.

$$(x + 1) \frac{dy}{dx} = 2xy$$

हल :

$$(x + 1) \frac{dy}{dx} = 2xy$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y} dy = \frac{2x}{x+1} dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y} dy = \frac{2x+2-2}{x+1} dx$$

समाकलन करने पर

$$\Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int 2 dx - \int \frac{2}{x+1} dx$$

$$\log y = 2x - 2 \log (x + 1) + C$$

$$\log y = 2[x - \log (x + 1)] + C$$

अवकल समीकरण का अभीष्ट हल है।

प्रश्न 4.

$$\frac{dy}{dx} = e^{x-y} + x^2 e^{-y}$$

हल :

$$\frac{dy}{dx} = e^{x-y} + x^2 e^{-y}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^{-y} (e^x + x^2)$$

$$\Rightarrow e^y dy = (e^x + x^2) dx$$

दोनों पक्षों को समाकलन करने पर,

$$\int e^y dy = \int (e^x + x^2) dx$$

$$\Rightarrow e^y = e^x + \frac{x^3}{3} + C$$

जो अवकल समीकरण का अभीष्ट हल है।

प्रश्न 5. $(\sin x + \cos x)dy + (\cos x - \sin x)dx = 0$

हल : $(\sin x + \cos x)dy + (\cos x - \sin x)dx = 0$

$$\Rightarrow dy = -\frac{(\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)} dx$$

समाकलन करने पर,

$$\int dy = - \int \frac{\sin x - \cos x}{\cos x + \sin x} dx$$

$$\Rightarrow y + \log (\cos x + \sin x) = \log C$$

$$\Rightarrow \log e^y + \log (\cos x + \sin x) = \log C$$

$$\Rightarrow e^y + (\sin x + \cos x) = C$$

जो अवकल समीकरण का अभीष्ट हल है।

प्रश्न 6.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3e^{2x} + 3e^{4x}}{e^x + e^{-x}}$$

हल :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3e^{2x} + 3e^{4x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\Rightarrow dy = \frac{3(e^{2x} + e^{4x})}{e^x + e^{-x}} dx$$

$$\Rightarrow dy = \frac{3\left(\frac{e^{2x} + e^{4x}}{2}\right)}{\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)} dx$$

$$\Rightarrow dy = 3\left(\frac{e^{3x}}{1}\right) dx$$

$$\Rightarrow \int dy = 3 \int e^{3x} dx = \frac{3e^{3x}}{3} + C$$

$$y = e^{3x} + c$$

जो अवकल समीकरण का अभीष्ट हल है।

प्रश्न 7. $\sec^2 x \tan y dy + \sec^2 y \tan x dx = 0$

हल : $\sec^2 x \tan y dy + \sec^2 y \tan x dx = 0$

$$\Rightarrow \sec^2 x \tan y dy = -\sec^2 y \tan x dx$$

$$\Rightarrow \frac{\tan y}{\sec^2 y} dy = -\frac{\tan x}{\sec^2 x} dx$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{\sin y}{\cos y}}{\frac{1}{\cos^2 y}} dy + \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{1}{\cos^2 x}} dx = 0$$

$$\Rightarrow \sin y \cos y dy + \sin x \cos x dx = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\sin^2 y}{2} + \frac{\sin^2 x}{2} = C_1$$

$$\Rightarrow \sin^2 x + \sin^2 y = 2C_1$$

$$\Rightarrow \sin^2 x + \sin^2 y = C$$

प्रश्न 8.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x(2 \log x + 1)}{\sin y + y \cos y}$$

हल :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x(2 \log x + 1)}{\sin y + y \cos y}$$

$$(\sin y + y \cos y) dy = x(2 \log x + 1) dx$$

$$\Rightarrow \int \sin y dy + \int y \cos y dy = 2 \int x \log x dx + \int x dx$$

$$\Rightarrow -\cos y + y \sin y - \int 1 \cdot \sin y dy$$

$$= 2 \left[\log x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{2} dx + \int x dx \right]$$

$$\Rightarrow -\cos y + y \sin y + \cos y = x^2 \log x - \int x dx + \int x dx$$

$$\Rightarrow y \sin y = x^2 \log x + C$$

यहीं अभीष्ट व्यापक हल है।

प्रश्न 9. $(1 + \cos x) dy = (1 - \cos x) dx$

हल : $(1 + \cos x) dy = (1 - \cos x) dx$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} \\
 &= \tan^2 \frac{x}{2} = \sec^2 \frac{x}{2} - 1
 \end{aligned}$$

या $dy = \left(\sec^2 \frac{x}{2} - 1 \right) dx \quad \dots(1)$

समीकरण (1) के दोनों पक्षों को समाकलन करने पर,

$$\begin{aligned}
 \int dy &= \int \left(\sec^2 \frac{x}{2} - 1 \right) dx \\
 &= \int \sec^2 \frac{x}{2} dx - \int dx
 \end{aligned}$$

या $y = 2 \tan \frac{x}{2} - x + C$

यही अवकल समीकरण का व्यापक हल है।

प्रश्न 10.

$$\sqrt{1-x^6} dy = x^2 dx$$

हल :

$$\sqrt{1-x^6} dy = x^2 dx$$

$$\Rightarrow dy = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}} dx$$

$$\Rightarrow dy = \frac{x^2}{\sqrt{1-(x^3)^2}} dx$$

$$\Rightarrow \int dy = \int \frac{x^2}{\left(1-(x^3)^2\right)^{\frac{1}{2}}} dx$$

$$\Rightarrow y = \sin^{-1}(x^3) \times \frac{1}{3} + C$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{3} \sin^{-1}(x^3) + C$$

यही अवकल समीकरण का व्यापक हल है।

Ex 12.5

निम्नलिखित अवकलन समीकरण को हल कीजिए :

प्रश्न 1.

$$(x + y)^2 \frac{dy}{dx} = a^2$$

हल :

दी गई अवकल समीकरण

$$(x + y)^2 \frac{dy}{dx} = a^2 \quad \dots(1)$$

माना $x + y = u$

$$1 + \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - 1$$

समीकरण (1) से

$$u^2 \cdot \left(\frac{du}{dx} - 1 \right) = a^2$$

$$\Rightarrow u^2 \frac{du}{dx} - u^2 = a^2$$

$$\Rightarrow u^2 \frac{du}{dx} = a^2 + u^2$$

$$\Rightarrow \int \frac{u^2}{u^2 + a^2} du = \int dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{u^2 + a^2 - a^2}{u^2 + a^2} du = \int dx$$

$$\Rightarrow \int 1 \cdot du - \int \frac{a^2}{u^2 + a^2} du = x + C$$

$$\Rightarrow u - a^2 \cdot \frac{1}{a} \tan^{-1} \left(\frac{u}{a} \right) = x + C$$

$$\Rightarrow u - a \tan^{-1} \left(\frac{u}{a} \right) = x + C [u = x + y \text{ रखने पर}]$$

$$\Rightarrow x + y - a \tan^{-1} \left(\frac{x+y}{a} \right) = x + C$$

$$\Rightarrow y - a \tan^{-1} \left(\frac{x+y}{a} \right) = C$$

$$\Rightarrow y = a \tan^{-1} \left(\frac{x+y}{a} \right) + C$$

$$\Rightarrow y - C = a \tan^{-1} \left(\frac{x+y}{a} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{y-C}{a} = \tan^{-1} \left(\frac{x+y}{a} \right)$$

$$\Rightarrow \tan^{-1} \left(\frac{y-C}{a} \right) = \frac{x+y}{a}$$

$$\Rightarrow a \tan^{-1} \left(\frac{y-C}{a} \right) = x + y$$

$$\text{या } x + y = a \tan \left(\frac{y-C}{a} \right)$$

प्रश्न 2.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+y+1}$$

हल :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+y+1}$$

$$\text{माना } x + y + 1 = t$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{dy}{dx} + 0 = \frac{dt}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx} - 1$$

$$\Rightarrow \frac{dt}{dx} - 1 = \frac{1}{t}$$

$$\Rightarrow \frac{dt}{dx} = 1 + \frac{1}{t} = \frac{t+1}{t}$$

$$\Rightarrow \frac{t}{t+1} dt = dx$$

$$\Rightarrow dt - \frac{1}{t+1} dt = dx$$

$$\Rightarrow \int dt - \int \frac{1}{t+1} dt = \int dx$$

$$\Rightarrow t - \log(t+1) = x + C_1$$

$$\Rightarrow (x+y+1) - \log(x+y+1+1) = x + C_1$$

$$\Rightarrow y+1 - \log(x+y+2) = C_1$$

$$\Rightarrow \log(x+y+2) = (y+1) + C_1$$

$$\Rightarrow \log(x+y+2) = y + (C_1+1)$$

$$\Rightarrow e^{\log(x+y+2)} = e^{y+(C_1+1)}$$

$$\Rightarrow x+y+2 = e^y(e^{(C_1+1)})$$

$$\Rightarrow x+y+2 = e^y.C$$

जहाँ $C = e^{(C_1+1)}$

अतः अभीष्ट हल $x+y+2 = Ce^y$ है।

प्रश्न 3. $\cos(x+y)dy = dx$

हल : माना $x+y = v$

$$1 + \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx} - 1$$

$$\Rightarrow \cos v \cdot \left(\frac{dv}{dx} - 1 \right) = 1$$

$$\Rightarrow \cos v \frac{dv}{dx} = 1 + \cos v$$

$$\Rightarrow \frac{\cos v dv}{1 + \cos v} = dx$$

$$\Rightarrow \frac{(1 + \cos v) - 1}{1 + \cos v} dv = dx \quad (\text{ध्यान दें})$$

$$\Rightarrow \left[1 - \frac{1}{(1 + \cos v)} \right] dv = dx$$

$$\Rightarrow \left[1 - \frac{1}{2 \cos^2 \frac{1}{2} v} \right] dv = dx$$

$$\Rightarrow \left[1 - \frac{1}{2} \sec^2 \frac{1}{2} v \right] dv = dx$$

\therefore समाकलन करने पर,

$$v - \tan \frac{1}{2} v = x + C$$

$$\text{या } x + y - \tan \frac{1}{2} v = x + C \quad [\because v = x + y]$$

$$\text{या } y = \tan \frac{1}{2} (x + y) + C$$

यही अभीष्ट हल है।

प्रश्न 4.

$$e^{x+y} = 1 + \frac{dy}{dx}$$

हल : माना $x + y = v$

$$\text{तब } 1 + \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx} - 1$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dx} = e^v$$

$$\Rightarrow e^{-v} dv - dx = 0$$

\therefore समाकलन करने पर,

$$-e^{-v} - x = C_1$$

$$x + e^{-(x+y)} = C$$

$$(\because v = x+y \text{ तथा } C = -C_1)$$

यही अभीष्ट हल है।

प्रश्न 5.

$$(x + y) (dx - dy) = dx + dy$$

हल :

$$\Rightarrow (x + y) (dx - dy) = dx + dy$$

$$\Rightarrow (x + y)dx - (x + y)dy = dx + dy$$

$$\Rightarrow dy + (x + y)dy = (x + y) dx - dx$$

$$\Rightarrow [(1 + (x + y))]dy = (x + y - 1) dx$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x + y - 1}{x + y + 1}$$

माना

$$x + y = v$$

$$1 + \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx} - 1$$

$$\frac{dv}{dx} - 1 = \frac{v - 1}{v + 1}$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dx} = 1 + \frac{v - 1}{v + 1} = \frac{v + 1 + v - 1}{v + 1}$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{2v}{v + 1}$$

$$\Rightarrow \frac{v + 1}{2v} dv = dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} dv + \frac{1}{2v} dv = dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} v + \frac{1}{2} \log v = x + C_1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} (x + y) + \frac{1}{2} \log (x + y) = x + C_1$$

$$\Rightarrow x + y + \log (x + y) = 2x + 2C_1$$

$$\Rightarrow \log (x + y) = 2x - x - y + 2C_1$$

$$\Rightarrow \log (x + y) = x - y + 2C_1$$

$$\Rightarrow \log (x + y) = x - y + C_1$$

जहाँ $C = 2C_1$ है।

अतः अभीष्ट हल $x - y + C = \log (x + y)$ है।

प्रश्न 6.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y+1}{x+y}$$

हल : माना

$$x+y+1=v$$

$$1 + \frac{dy}{dx} + 0 = \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx} - 1$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dx} - 1 = \frac{v}{v-1}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \frac{dv}{dx} &= \frac{v}{v-1} + 1 \\ &= \frac{v+v-1}{v-1} = \frac{2v-1}{v-1}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{v-1}{2v-1} dv = dx$$

$$\Rightarrow \frac{(v-1/2)-1/2}{(2v-1)} dv = dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \frac{(2v-1)}{(2v-1)} dv - \frac{1}{2} \frac{1}{(2v-1)} dv = dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{2} dv - \frac{1}{4} \int \frac{1}{(v-1/2)} dv = \int dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}v - \frac{1}{4} \log(v-1/2) = x + C$$

$$\Rightarrow \frac{v}{2} - \frac{\log(v-1/2)}{4} = x + C$$

$$\Rightarrow \frac{x+y+1}{2} - x = \log \frac{x+y+1-1/2}{4} + C$$

$$\Rightarrow \frac{y-x}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\log(x+y+1/2)}{4} + C$$

$$2(y-x) = \log(1+2x+2y) + C_1$$

$$\text{जहाँ } C_1 = 4C - 2$$

यही अभीष्ट हल है।

प्रश्न 7.

$$x + y = \sin^{-1} \left(\frac{dy}{dx} \right)$$

हल : दी गई अवकल समीकरण

$$x + y = \sin^{-1} \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \sin(x + y) = \frac{dy}{dx} \quad \dots(1)$$

माना

$$x + y = u$$

$$1 + \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - 1$$

समीकरण (1) से

$$\sin u = \frac{du}{dx} - 1$$

$$\frac{du}{dx} = 1 + \sin u$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{1 + \sin u} du = \int dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{1 - \sin u}{1 + \sin^2 u} du = x + C_1$$

$$\Rightarrow \int \frac{1 - \sin u}{\cos^2 u} du = x + C_1$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{\cos^2 u} du - \int \frac{\sin u}{\cos^2 u} = x + C_1$$

$$\int \sec^2 u du - \int \sec u \tan u du = x + C_1$$

$$\tan u - \sec u = x + C_1 \quad [u = x + y \text{ रखने पर}]$$

$$\tan(x + y) - \sec(x + y) = x + C_1$$

$$\text{या } x = \tan(x + y) - \sec(x + y) + C$$

$$\text{जहाँ } C = -C_1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x-y} + 1$$

माना

$$x - y = v$$

$$1 - \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{dv}{dx}$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{dv}{dx} = \frac{1}{v} + 1$$

$$\Rightarrow \frac{-dv}{dx} = \frac{1}{v}$$

$$\Rightarrow -v dv = dx$$

$$\Rightarrow -\int v dv = \int dx$$

$$\Rightarrow \frac{-v^2}{2} = x + C_1$$

$$\Rightarrow \frac{-(x-y)^2}{2} = x + C_1$$

$$2x + (x-y)^2 + 2C_1 = 0$$

$$2x + (x-y)^2 = -2C_1$$

अतः अभीष्ट हल $2x + (x-y)^2 = C$ है, जहाँ $C = -2C_1$ है।

प्रश्न 9.

$$\frac{dy}{dx} = \sec(x+y)$$

हल : इसी अभ्यास का प्रश्न 3 पर देखें।

प्रश्न 10.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x-y)+3}{2(x-y)+5}$$

हल :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x-y)+3}{2(x-y)+5}$$

माना

$$x-y=v$$

$$1 - \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1 - \frac{dv}{dx}$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{dv}{dx} = \frac{v+2}{2v+5}$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dx} = 1 - \frac{v+2}{2v+5} = \frac{2v+5-v-2}{2v+5}$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{v+3}{2v+5}$$

$$\Rightarrow \frac{2v+5}{v+3} dv = dx$$

$$\Rightarrow \frac{2(v+3)+1}{(v+3)} dv = dx$$

$$\Rightarrow 2 dv + \frac{1}{v+3} dv = dx$$

$$\Rightarrow 2 \int dv + \int \frac{1}{v+3} dv = dx$$

$$\Rightarrow 2v + \log(v+3) = x + C$$

$$\Rightarrow 2(x-y) + \log(x-y+3) = x + C$$

यही अभीष्ट हल है।

Ex 12.6

निम्नलिखित अवकल समीकरणों को हल कीजिए :

प्रश्न 1. $x^2 y dx - (x^3 + y^3) dy = 0$

हल : $x^2 y dx - (x^3 + y^3) dy = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 y}{x^3 + y^3} \quad \dots(1)$$

जो समघातीय हैं।

$\therefore y = vx$ रखने पर,

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx} \quad \dots(2)$$

अब समीकरण (1) तथा (2) से,

$$\begin{aligned} v + x \frac{dy}{dx} &= \frac{vx^3}{x^3 + v^3 x^3} = \frac{x^3}{x^3(1 + v^3)} \\ \Rightarrow \quad v + x \frac{dy}{dx} &= \frac{v}{1 + v^3} \\ \Rightarrow \quad x \frac{dv}{dx} &= \frac{v}{1 + v^3} - v \\ \Rightarrow \quad x \frac{dv}{dx} &= \frac{v - v - v^4}{1 + v^3} = \frac{-v^4}{1 + v^3} \\ \Rightarrow \quad x \frac{dv}{dx} &= -\frac{v^4}{1 + v^3} \\ \Rightarrow \quad \frac{1 + v^3}{v^4} dv &= -\frac{dx}{x} \end{aligned}$$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर,

$$\begin{aligned}
& -\int \frac{1+v^3}{v^4} dv = \int \frac{dx}{x} \\
\Rightarrow & -\int \frac{1}{v^4} - \int \frac{1}{v} dv = \int \frac{dx}{x} \\
\Rightarrow & \frac{1}{3v^3} - \log v = \log x + \log C_1 \\
\Rightarrow & \frac{1}{3v^3} = \log x + \log v + \log C_1 \\
\Rightarrow & \frac{1}{3v^3} = \log (C_1 vx) \\
\Rightarrow & \log (Cy) = \frac{x^3}{3y^3} \\
\Rightarrow & Cy = e^{x^3/3y^3} \\
\Rightarrow & y = \frac{1}{C_1} e^{x^3/3y^3} \\
\Rightarrow & y = Ce^{x^3/3y^3} \quad \text{जहाँ } C = \frac{1}{C_1} \text{ है।}
\end{aligned}$$

यही अभीष्ट हल है।

प्रश्न 2.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \sin\left(\frac{y}{x}\right)$$

हल :

$$\begin{aligned}
& \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \sin\left(\frac{y}{x}\right) \\
\Rightarrow & f(x, y) = \frac{y}{x} + \sin\left(\frac{y}{x}\right) \\
\Rightarrow & f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda y}{\lambda x} + \sin\left(\frac{\lambda y}{\lambda x}\right) \\
& = \lambda^0 \left\{ \frac{y}{x} + \sin \frac{y}{x} \right\} \\
& = \lambda^0 f(x, y)
\end{aligned}$$

अतः $f(x,y)$ शून्य घात का समघातीयफलन है।

$y = vx$ रखने पर, ... (ii)

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx} \quad \dots (iii)$$

अब समीकरण (i), (ii) तथा (iii) से,

$$\Rightarrow v + x \frac{dv}{dx} = v + \sin v$$

$$\Rightarrow x \frac{dv}{dx} = \sin v$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{\sin v} = \frac{dx}{x}$$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर,

$$\int \frac{dv}{\sin v} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \int \operatorname{cosec} v \, dv = \int \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \log |\operatorname{cosec} v - \cot v| = \log |x| + \log c$$

$$\Rightarrow \log |\operatorname{cosec} v - \cot v| = \log |Cx|$$

तुलना से,

$$\operatorname{cosec} v - \cot v = Cx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin v} - \frac{\cos v}{\sin v} = Cx$$

$$\Rightarrow \frac{1 - \cos v}{\sin v} = Cx$$

$$\Rightarrow \frac{2 \sin^2 \frac{v}{2}}{2 \sin \frac{v}{2} \cos \frac{v}{2}} = Cx$$

$$\Rightarrow \tan \frac{v}{2} = Cx$$

$$\Rightarrow \tan \frac{y}{2x} = Cx \quad \left(\because \frac{y}{x} = v \right)$$

यही अभीष्ट हल है।

प्रश्न 3.

$$x \frac{dy}{dx} + \frac{y^2}{x} = y$$

हल :

$$x \frac{dy}{dx} = y - \frac{y^2}{x} = \frac{xy - y^2}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy - y^2}{x^2},$$

यह समघात समी. है।

$y = vx$ रखने पर

$$\frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx}$$

$$v + x \frac{dv}{dx} = \frac{x.vx - v^2 x^2}{x^2}$$

$$\Rightarrow v + x \frac{dv}{dx} = v - v^2$$

$$\Rightarrow x \frac{dv}{dx} = -v^2$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{-v^2}{x}$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{v^2} dv = - \int \frac{1}{x} dx$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{v} = -\log x + C$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{y/x} = -\log x + C$$

$$\Rightarrow -\frac{x}{y} = -\log x + C$$

$$\Rightarrow -x = -y \log x + Cy$$

$$\Rightarrow x + Cy = y \log x$$

प्रश्न 4.

$$x \sin \left[\frac{y}{x} \right] \frac{dy}{dx} = y \sin \left[\frac{y}{x} \right] - x$$

हल :

दिया हुआ अवकल समीकरण

$$x \sin\left(\frac{y}{x}\right) \frac{dy}{dx} = y \sin\left(\frac{y}{x}\right) - x \quad \dots(1)$$

या
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y \sin\left(\frac{y}{x}\right) - x}{x \sin\left(\frac{y}{x}\right)}$$

या
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x} \sin\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{x}{x}}{\sin\left(\frac{y}{x}\right)}$$

या
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x} \sin\left(\frac{y}{x}\right) - 1}{\sin\left(\frac{y}{x}\right)} \quad \dots(2)$$

यह $\frac{dy}{dx} = F(x, y)$ के रूप का अवकल समीकरण है।

अब
$$F(x, y) = \frac{\frac{y}{x} \sin\left(\frac{y}{x}\right) - 1}{\sin\left(\frac{y}{x}\right)}$$

$$\therefore F(\lambda x, \lambda y) = \frac{\frac{\lambda y}{\lambda x} \sin\left(\frac{\lambda y}{\lambda x}\right) - 1}{\sin\left(\frac{\lambda y}{\lambda x}\right)}$$

$$= \frac{\lambda^0 \left\{ \sin\left(\frac{y}{x}\right) - 1 \right\}}{\sin\left(\frac{y}{x}\right)}$$

$$= \lambda^0 F(x, y)$$

अतः $F(x, y)$ शून्य घात का समघातीय फलन है।

इसलिए दिया हुआ अवकल समीकरण समघातीय है। माना

माना $y = vx \quad \dots(3)$

तब
$$\frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx} \quad \dots(4)$$

समीकरण (2), (3) तथा (4) से,

$$\begin{aligned}
 v + x \frac{dv}{dx} &= \frac{v \sin v - 1}{\sin v} \\
 \Rightarrow x \frac{dv}{dx} &= \frac{v \sin v - 1}{\sin v} - v \\
 \Rightarrow x \frac{dv}{dx} &= \frac{v \sin v - 1 - v \sin v}{\sin v} = \frac{-1}{\sin v} \\
 \Rightarrow x \frac{dv}{dx} &= \frac{-1}{\sin v} \\
 \Rightarrow \sin v \, dv &= -\frac{dx}{x} \quad \dots(5)
 \end{aligned}$$

समीकरण (5) के दोनों पक्षों का समाकलन करने पर,

$$\begin{aligned}
 \int \sin v \, dv &= - \int \frac{dx}{x} \\
 \Rightarrow -\cos v &= -\log |x| - \log |C| \\
 \Rightarrow -\cos v &= -\log |Cx| \\
 \Rightarrow \cos \left(\frac{y}{x} \right) &= \log |Cx| \\
 \Rightarrow \log |C_1 x| &= \cos \left(\frac{y}{x} \right) \\
 \Rightarrow C_1 x &= e^{\cos(y/x)} \\
 \Rightarrow x &= \frac{1}{C_1} e^{\cos(y/x)} \\
 \Rightarrow x &= C e^{\log(y/x)} \quad (\text{जहाँ } C = \frac{1}{C_1})
 \end{aligned}$$

यह अवकल समीकरण (1) का व्यापक हल है।

प्रश्न 5.

$$x dy - y dx = \sqrt{x^2 + y^2} \, dx$$

हल:

$$x \, dy = (y + \sqrt{x^2 + y^2}) \, dx$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x} \quad \dots(1)$$

माना $f(x, y) = \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x}$

तब $f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda y + \sqrt{\lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2}}{\lambda x}$

$$= \frac{\lambda y + \lambda \sqrt{x^2 + y^2}}{\lambda x}$$

$$= \frac{\lambda(y + \sqrt{x^2 + y^2})}{\lambda x}$$

$$= \lambda^0 \frac{(y + \sqrt{x^2 + y^2})}{x}$$

$$\Rightarrow \text{या } f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^0(x, y)$$

अतः $f(x, y)$ शून्य घात का समघातीय फलन है।

\therefore दिया हुआ अवकल समीकरण समघातीय है।

अब $y = vx \quad \dots(2)$

तब $\frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx} \quad \dots(3)$

समीकरण (1), (2) तथा (3) से,

$$v + x \frac{dv}{dx} = \frac{vx + \sqrt{x^2 + v^2 x^2}}{x}$$

$$\Rightarrow v + x \frac{dv}{dx} = \frac{vx + x\sqrt{1 + v^2}}{x}$$

$$\Rightarrow v + x \frac{dv}{dx} = \frac{x(v + \sqrt{1 + v^2})}{x}$$

$$\Rightarrow v + x \frac{dv}{dx} = v + \sqrt{1 + v^2}$$

$$\Rightarrow x \frac{dv}{dx} = \sqrt{1 + v^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{\sqrt{1 + v^2}} = \frac{dx}{x}$$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर,

$$\log |v + \sqrt{1+v^2}| = \log |x| + \log C$$

$$\Rightarrow \therefore \log \left| \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} \right| = \log |x| + \log C \quad (\because y = vx)$$

$$\Rightarrow \log \left| \frac{y}{x} + \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x} \right| = \log |x| + \log C$$

$$\Rightarrow \log \left| \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x} \right| - \log |x| = \log C$$

$$\Rightarrow \log \left| \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x \times x} \right| = \log C$$

$$\Rightarrow \log \left| \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x^2} \right| = \log C$$

$$\Rightarrow \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x^2} = C$$

$$\Rightarrow y + \sqrt{x^2 + y^2} = Cx^2$$

यही अभीष्ट हल है।

प्रश्न 6.

$$(x^2 + y^2) dx = 2xy dy$$

हल :

$$(x^2 + y^2) dx = 2xy dy$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{2xy} \quad \dots(1)$$

जो समघातीय है।

$\therefore y = vx$ रखने पर

$$\frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx} \quad \dots(2)$$

अब समीकरण (1) तथा (2) से,

$$\begin{aligned}
 v + x \frac{dv}{dx} &= \frac{x^2 + v^2 x^2}{2x^2 v} = \frac{x^2(1+v^2)}{x^2 \times 2v} \\
 \Rightarrow v + x \frac{dv}{dx} &= \frac{1+v^2}{2v} \\
 \Rightarrow x \frac{dv}{dx} &= \frac{1+v^2}{2v} - v = \frac{1+v^2-2v^2}{2v} \\
 \Rightarrow x \frac{dv}{dx} &= \frac{1-v^2}{2v} \\
 \Rightarrow \frac{2v}{1-v^2} dv &= \frac{dx}{x}
 \end{aligned}$$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर,

$$\begin{aligned}
 \int \frac{2v}{1-v^2} dv &= \int \frac{dx}{x} \\
 -\log(1-v^2) &= \log x + \log C \\
 -\log(1-v^2) &= \log(Cx) \\
 \log(Cx) + \log(1-v^2) &= 0 \\
 \log\{(Cx)(1-v^2)\} &= 0 \\
 Cx(1-v^2) &= e^0 = 1 \\
 Cx\left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right) &= 1 \quad \left(\because v = \frac{y}{x}\right) \\
 x &= C(x^2 - y^2)
 \end{aligned}$$

यही अभीष्ट हल है।

प्रश्न 7.

$$\left(1 + e^{\frac{x}{y}}\right) dx + e^{\frac{x}{y}} \left(1 - \frac{x}{y}\right) dy = 0$$

हल :

$$(1 + e^{x/y}) dx + e^{x/y} \left(1 - \frac{x}{y}\right) dy = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy} + \frac{e^{x/y} \left(1 - \frac{x}{y}\right)}{1 + e^{x/y}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy} = - \frac{e^{x/y} \left(1 - \frac{x}{y}\right)}{1 + e^{x/y}} \quad \dots(1)$$

माना $f(x, y) = - \frac{e^{x/y} \left(1 - \frac{x}{y}\right)}{1 + e^{x/y}}$

तब $f(\lambda x, \lambda y) = - \frac{e^{\lambda x / \lambda y} \left(1 - \frac{\lambda x}{\lambda y}\right)}{1 + e^{\lambda x / \lambda y}}$

$$= - \lambda^0 \frac{\left\{ e^{x/y} \left(1 - \frac{x}{y}\right) \right\}}{1 + e^{x/y}}$$

$$= \lambda^0 f(x, y)$$

अतः $f(x, y)$ शून्य घात का समघी फलन है।

\therefore दिया हुआ अवकल समीकरण समघातीय हैं।

$$x = vy \text{ रखने पर,} \quad \dots(2)$$

तब $\frac{dx}{dy} = v + y \frac{dv}{dy} \quad \dots(3)$

समीकरण (1), (2) तथा (3) से,

$$v + y \frac{dv}{dy} = - \frac{e^v (1 - v)}{1 + e^v}$$

$$\Rightarrow y \frac{dv}{dy} = - \frac{e^v (1 - v)}{1 + e^v} - v$$

$$\Rightarrow y \frac{dv}{dy} = \frac{-e^v + ve^v - v - ve^v}{1 + e^v}$$

$$\Rightarrow y \frac{dv}{dy} = \frac{-(v + e^v)}{(1 + e^v)}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1 + e^v}{v + e^v} \right) dv = - \frac{dy}{y}$$

दोनों पक्षों को समाकलन करने पर,

$$\int \frac{1+e^v}{v+e^v} dv = - \int \frac{dy}{y}$$

$$\left[\begin{array}{l} v + e^v = t \\ (1 + e^v) dv = dt \end{array} \right.$$

$$\therefore \int \frac{1+e^v}{v+e^v} dv = \int \frac{dt}{t}$$

$$= \log t]$$

$$\Rightarrow \log (v + e^v) = -\log y + \log C$$

$$\Rightarrow \log (v + e^v) = \log \left(\frac{C}{y} \right)$$

$$\Rightarrow v + e^v = \frac{C}{y}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y} + e^{x/y} = \frac{C}{y}$$

$$\Rightarrow y \left(\frac{x}{y} + e^{x/y} \right) = C$$

$$\Rightarrow x + ye^{x/y} = C$$

अवकल समीकरण (1) का अभीष्ट हल है।

प्रश्न 8. $(3xy + y^2) dx + (x^2 + xy) dy = 0$

हल : $(3xy + y^2) dx + (x^2 + xy) dy = 0$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{3xy+y^2}{x^2+xy}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{xy(3+y/x)}{x^2(1+y/x)}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y(3+y/x)}{x(1+y/x)} \quad \dots(1)$$

यह समघात अवकल समीकरण है।

माना $y = vx$

तब
$$\frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx}$$

समीकरण (1) में मान रखने पर,

$$v + x \frac{dv}{dx} = \frac{v(3+v)}{(1+v)}$$

$$\Rightarrow v + x \frac{dv}{dx} = \frac{3v+v^2}{1+v}$$

$$\Rightarrow v + x \frac{dv}{dx} = -\frac{3v+v^2}{1+v} - v$$

$$\begin{aligned} v \frac{dv}{dx} &= \frac{-3v-v^2-v-v^2}{1+v} \\ &= \frac{-4v-2v^2}{1+v} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{(1+v)dv}{-4v-2v^2} = \frac{dx}{x}$$

$$\frac{(1+v)dv}{2v+v^2} = -2 \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{1+v}{v(v+2)} dv = -2 \int \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \int \left(\frac{1}{2v} + \frac{1}{2(v+2)} \right) dv = -2 \log x + \log C_1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} [\log v + \log (v+2)] = \log \frac{1}{x^2} + \log C_1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} [\log v(v+2)] = \log \frac{C_1}{x^2}$$

$$\Rightarrow \log [v(v+2)] = 2 \log \frac{C_1}{x^2}$$

$$\Rightarrow \log v(v+2) = \log \frac{C_1^2}{x^4}$$

$$\Rightarrow \log \frac{y}{x} \left(\frac{y}{x} + 2 \right) = \log \frac{C_1^2}{x^4}$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x} \left(\frac{y}{x} + 2 \right) = \frac{C_1^2}{x^4}$$

$$\Rightarrow \frac{y(y+2x)}{x^2} = \frac{C_1^2}{x^4}$$

$$\Rightarrow \frac{x^4 y(y+2x)}{x^2} = C_1^2 = C \quad (\text{माना})$$

$$\Rightarrow x^2 y(y+2x) =$$

$$\Rightarrow x^2 y^2 + 2x^3 y = C$$

यह दी हुई अवकल समीकरण का अभीष्ट हल है।

प्रश्न 9.

$$x^2 \frac{dy}{dx} = x^2 + xy + y^2$$

हल:

$$x^2 \frac{dy}{dx} = x^2 + xy + y^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2},$$

यह समघातीय समी. है।

$y = vx$ रखने पर।

$$v + x \frac{dv}{dx} = \frac{x^2 + x.vx + v^2 x^2}{x^2}$$

$$\Rightarrow x \frac{dv}{dx} = (1 + v + v^2) - v$$

$$\Rightarrow x \frac{dv}{dx} = 1 + v^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+v^2} dv = \frac{1}{x} dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{1+v^2} dv = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\Rightarrow \tan^{-1} v = \log x + C$$

$$\Rightarrow \tan^{-1} \frac{y}{x} = \log x + C$$

यही अभीष्ट हल है।

प्रश्न 10. $x(x - y) dy = y(x + y) dx$

हल : $x(x - y) dy = y(x + y) dx$

इस समीकरण को इस प्रकार भी लिख सकते हैं।

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(x+y)}{x(x-y)}$$

यह समघातीय समीकरण है।

\therefore माना $y = vx$, तब

$$v + x \frac{dv}{dx} = \frac{x \cdot vx + v^2 x^2}{x^2 - x \cdot vx} = \frac{v + v^2}{1 - v}$$

$$\Rightarrow x \frac{dv}{dx} = \frac{v + v^2}{1 - v} - v = \frac{2v^2}{1 - v}$$

$$\Rightarrow x \frac{dv}{dx} = \frac{2v^2}{1 - v}$$

$$\Rightarrow \int \frac{1-v}{v^2} dv = \int \frac{2}{x} dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{v^2} dv - \int \frac{1}{v} dv = 2 \int \frac{1}{x} dx$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{v} - \log v = 2 \log x + c$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{y/x} - \log \left(\frac{y}{x} \right) = 2 \log x + c$$

$$\Rightarrow -\frac{x}{y} - \log y + \log x = 2 \log x + c$$

$$\Rightarrow -\frac{x}{y} = \log x + \log y + c$$

$$\Rightarrow -\frac{x}{y} = \log (xy) + c$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y} + \log (xy) + c = 0.$$

Ex 12.7

निम्नलिखित अवकल समीकरणों को हल कीजिए

प्रश्न 1.

$$\frac{dy}{dx} + \frac{3x-2y-5}{2x+3y-5} = 0$$

हल :

$$\frac{dy}{dx} + \frac{3x+2y-5}{2x+3y-5} = 0$$

यहाँ $\frac{a}{a_1} \neq \frac{b}{b_1}$

तब $x = X + h$ तथा $y = Y + k$

$$\frac{dY}{dX} = - \frac{3(X+h)+2(Y+k)-5}{2(X+h)+3(Y+k)-5}$$

$$\Rightarrow \frac{dY}{dX} = - \frac{3X+2Y+(3h+2k-5)}{2X+3Y+(2h+3k-5)} \dots(1)$$

h तथा k इस प्रकार हैं कि

$$3h+2k-5=0 \text{ तथा } 2h+3k-5=0$$

हल करने पर, $h=1, k=1$

समीकरण (1) में h व k के मान रखने पर,

$$\frac{dY}{dX} = - \frac{3X+2Y}{2X+3Y}$$

यह एक समघातीय समीकरण है।

तब $Y = vX$

$$v + X \frac{dv}{dX} = \frac{-3X + 2vX}{2X + 3vX}$$

$$\Rightarrow X \frac{dV}{dX} = \frac{-3 + 2V}{2 + 3V} - V$$

$$= -\frac{3 + 4V + 3V^2}{2 + 3V}$$

$$\Rightarrow \frac{-dX}{X} = \frac{2 + 3V}{3V^2 + 4V + 3} dV$$

$$= \frac{1}{2} \frac{(6V + 4) dV}{3V^2 + 4V + 3}$$

$$\Rightarrow -2 \frac{dX}{X} = \frac{6V + 4}{3V^2 + 4V + 3} dV$$

$$\Rightarrow -2 \log X + \log c = \log (3V^2 + 4V + 3)$$

$$\Rightarrow \log \{(3V^2 + 4V + 3)X^2\} - \log C$$

$$\Rightarrow x^2[3(x^2/x^2) + 4(Y/X) + 3] = C$$

$$\Rightarrow 2Y^2 + 4XY + 3X^2 = C$$

$$\Rightarrow 3(y - 1)^2 + 4(y - 1)(x - 1) + 3(x - 1)^2 = C$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 3y^2 + 4xy - 10x - 10y + 10 = C$$

$$\Rightarrow 3(x^2 + y^2) + 4xy - 10(x + y - 1) - C$$

प्रश्न 2.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - y + 3}{2x - 2y + 5}$$

हल : यहाँ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - y + 3}{2(x - y) + 5}$$

$x - y = v$ रखने पर,

$$\begin{aligned}
\Rightarrow 1 - \frac{dy}{dx} &= \frac{dv}{dx} \\
\Rightarrow 1 - \frac{dv}{dx} &= \frac{v+3}{2v+5} \\
\Rightarrow \frac{dv}{dx} &= 1 - \frac{v+3}{2v+5} \\
\Rightarrow \frac{dv}{dx} &= \frac{v+2}{2v+5} \\
\Rightarrow dx &= \frac{2v+5}{v+2} dv \\
\Rightarrow dx &= \left(2 + \frac{1}{v+2} \right) dv
\end{aligned}$$

$$x + C = 2v + \log(v+2)$$

$$x + C = 2(x - y) + \log(x - y + 2)$$

$$x - 2y + \log(x - y + 2) = C,$$

यही अभीष्ट हल है।

प्रश्न 3.

$$(2x + y + 1) dx + (4x + 2y - 1) dy = 0$$

हल :

$$(2x + y + 1) dx + (4x + 2y - 1) dy = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{2x+y+1}{4x+2y-1}$$

$$\text{यहाँ } \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1}$$

$$\therefore \text{ माना } 2x + y = v$$

$$\text{तब } 2 + (dy/dx) = dv/dx$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dx} - 2 = -\frac{v+1}{2v-1}$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dx} = 2 - \frac{v+1}{2v-1} = \frac{3v-3}{2v-1}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow 3dx &= \frac{2v-1}{v-1} dv = \frac{2(v-1)+1}{v-1} dv \\
&= \left(2 + \frac{1}{v-1} \right) dv
\end{aligned}$$

समाकलन करने पर,

$$\Rightarrow 3x + C = 2v + \log(v - 1)$$

$$\Rightarrow 3x + C = 2(2x + y) + \log(2x + y - 1), [\because v = 2x + y]$$

$$\Rightarrow x + 2y + \log(2x + y - 1) = C,$$

यही अभीष्ट हल है।

प्रश्न 4.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - 3x - 3y}{2(x + y)}$$

हल :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - 3x - 3y}{2(x + y)}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1 - 3(x + y)}{2(x + y)}$$

$$\text{यहाँ } \frac{a}{a_1} \neq \frac{b}{b_1}$$

तब माना $x + y = v$

$$\Rightarrow 1 + (dy/dx) = (dv/dx)$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dx} - 1 = \frac{1 - 3v}{2v}$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{1 - 3v}{2v} + 1 = \frac{1 - v}{2v}$$

$$\Rightarrow dx \frac{2v dv}{1 - v} = \left[-2 + \frac{2}{1 - v} \right] dv$$

\therefore समाकलन करने पर,

$$x + C = -2v - 2 \log(1 - v)$$

$$\text{या } x + C + 2(x + y) + 2 \log(1 - x - y) = 0 [\because v = x + y]$$

$$\text{या } 3x + 2y + 2 \log(1 - x - y) + C = 0,$$

यही अभीष्ट हल है।

प्रश्न 5.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6x - 2y - 7}{2x + 3y - 6}$$

हल :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6x - 2y - 7}{2x + 3y - 6}$$

यहाँ $\frac{a}{a_1} \neq \frac{b}{b_1}$

तब $x = X + h$ तथा $y = Y + k$ रखने पर,

$$\frac{dY}{dX} = \frac{6(X + h) - 2(Y + k) - 7}{2(X + h) + 3(Y + k) - 6}$$

$$\Rightarrow \frac{dY}{dX} = \frac{6X - 2Y + (6h - 2k - 7)}{2X + 3Y + (2h + 3k - 6)} \quad \dots(1)$$

h व k इस प्रकार हैं कि

$$6h - 2k - 7 = 0 \text{ तथा } 2h + 3k - 6 = 0$$

दोनों समीकरणों को हल करने पर,

$$h = \frac{2}{3}, k = 1$$

h व k के मान समी. (1) में रखने पर

$$\frac{dY}{dX} = \frac{6X - 2Y}{2X + 3Y}$$

यह एक समघातीय समीकरण है तब $Y = vX$ रखने पर,

$$\Rightarrow 3(y-1)^2 + 4\left(x - \frac{3}{2}\right)(y-1) - 6\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = c$$

$$\Rightarrow 2 \log X = -\log (3v^2 + 4v - 6) + \log c$$

$$\Rightarrow \log X^2 + \log (3v^2 + 4v - 6) = \log c$$

$$\Rightarrow \log X^2 (3v^2 + 4v - 6) = \log c$$

$$\Rightarrow X^2 (3V^2 + 4v - 6) = c$$

$$\Rightarrow 3Y^2 - 4XY + 6X^2$$

Ex 12.8

निम्नलिखित अवकल समीकरणों को हल कीजिए

प्रश्न 1.

$$\frac{dy}{dx} + 2y = 4x$$

हल :

$$\frac{dy}{dx} + 2y = 4x \quad \dots(i)$$

समी. (i) को $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ से तुलना करने पर,

$$P = 2, Q = 4x$$

$$I.F = e^{\int 2dx} = e^{2x}$$

समी. (i) को e^{2x} से गुणा करने पर

$$e^{2x} \frac{dy}{dx} + 2e^{2x}y = 4xe^{2x}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(ye^{2x}) = 4xe^{2x}$$

$$\int \left[\frac{d}{dx}(ye^{2x}) \right] dx = 4 \int x e^{2x} dx$$

$$\Rightarrow ye^{2x} = 4 \left[x \int e^{2x} dx - \int \left[\frac{d}{dx} x \cdot \int e^{2x} dx \right] dx + c \right]$$

$$\Rightarrow ye^{2x} = 4 \left[x \cdot \frac{e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2} dx \right] + C$$

$$\Rightarrow ye^{2x} = 4 \left[\frac{x}{2} e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} \right] + C$$

$$\Rightarrow ye^{2x} = 4 \times \frac{1}{4} e^{2x}(2x - 1) + C$$

$$\Rightarrow ye^{2x} = e^{2x}(2x - 1) + C$$

$$\Rightarrow y = (2x - 1) + Ce^{-2x}$$

यही अभीष्ट हल है।

प्रश्न 2.

$$\cos^2 x \frac{dy}{dx} + y = \tan x.$$

हल : दिया हुआ अवकल समीकरण

$$\cos^2 x \frac{dy}{dx} + y = \tan x$$

$$\text{या} \quad \frac{dy}{dx} + \frac{y}{\cos^2 x} = \frac{\tan x}{\cos^2 x}$$

$$\text{या} \quad \frac{dy}{dx} + \sec^2 x \cdot y = \tan x \sec^2 x \quad \dots(1)$$

समीकरण (1) की तुलना $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ से करने पर,

$$\therefore P = \sec^2 x, Q = \sec^2 x \tan x$$

$$\therefore \text{I.F.} = e^{\int \sec^2 x \, dx} = e^{\tan x}$$

समीकरण (1) को $e^{\tan x}$ से गुणा करने पर,

$$e^{\tan x} \frac{dy}{dx} + e^{\tan x} (\sec^2 x) y = e^{\tan x} \times \tan x \sec^2 x$$

$$\text{या} \quad \frac{d}{dx} (ye^{\tan x}) = \tan x \sec^2 x e^{\tan x}$$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष समाकलन करने पर,

$$ye^{\tan x} = \int \tan x \sec^2 x e^{\tan x} \, dx + C$$

$$\text{या} \quad ye^{\tan x} = \int t e^t \, dt + C \quad \left[\begin{array}{l} \because \tan x = t \\ \therefore \sec^2 x \, dx = dt \end{array} \right]$$

$$= t \int e^t - \int \left(\frac{d}{dt} (t) \int e^t \, dt \right) + C$$

$$= t e^t - \int 1 \cdot e^t \, dt + C$$

$$= t e^t - \int e^t \, dt + C$$

$$= t e^t - e^t + C$$

$$\text{या} \quad ye^{\tan x} = \tan x e^{\tan x} - e^{\tan x} + C$$

$$\text{या} \quad ye^{\tan x} = e^{\tan x} (\tan x - 1) + C$$

$$\Rightarrow y = (\tan x - 1) + Ce^{-\tan x}$$

यही अभीष्ट हल है।

प्रश्न 3.

$$(1+x^2)\frac{dy}{dx} + 2yx = 4x^2.$$

हल :

$$(1+x^2)\frac{dy}{dx} + 2yx = 4x^2.$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2x}{1+x^2}y = \frac{4x^2}{1+x^2} \quad \dots(1)$$

समीकरण (1) की तुलना $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ से करने पर,

$$P = \frac{2x}{1+x^2}; Q = \frac{4x^2}{(1+x^2)}$$

$$\therefore \text{I.F.} = e^{\int \frac{2x}{1+x^2} dx} = e^{\log(1+x^2)} = 1+x^2$$

समीकरण (1) को $(1+x^2)$ से गुणा करने पर,

$$y(1+x^2) = \int 4x^2 dx + C$$

$(1+x^2)$ से भाग करने पर,

$$y = \frac{4x^3}{3(1+x^2)} + \frac{C}{(1+x^2)}$$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष समाकलन करने पर,

$$y(1+x^2) = \int 4x^2 dx + C$$

$(1+x^2)$ से भाग करने पर,

$$y = \frac{4x^3}{3(1+x^2)} + \frac{C}{(1+x^2)}$$

यही अभीष्ट हल है।

प्रश्न 4.

$$(2x-10y^3)\frac{dy}{dx} + y = 0.$$

हल :

$$(2x - 10y^3) \frac{dy}{dx} + y = 0$$

$$y \frac{dx}{dy} + 2x - 10y^3 = 0$$

$$\text{or} \quad \frac{dx}{dy} + \frac{2}{y} \cdot x = 10y^2 \quad \left[\frac{dx}{dy} + Px = Q \text{ से} \right]$$

यहाँ $P = (2/y)$,

$$\text{तब } \int P \, dy = \int (2/y) \, dy = 2 \log y$$

$$\therefore \text{I.F.} = e^{\int P \, dy} = e^{2 \log y}$$

$$= e^{\log y^2}$$

$$= y^2$$

$$\therefore x(\text{I.F.}) = \int \{Q(\text{I.F.})\} dy + C$$

$$\text{i.e., } x.y^2 = \int 10y^2 \cdot y^2 dy + C, [\because Q = 10y^2]$$

$$= \int 10y^4 \, dy + C = 10 \cdot \frac{1}{5} y^5 + C$$

$$\text{अतः } xy^2 = 2y^5 + C,$$

यही अभीष्ट हल है।

प्रश्न 5.

$$\frac{dy}{dx} + y \cot x = \sin x.$$

हल :

$$\frac{dy}{dx} + y \cot x = \sin x \quad \dots(i)$$

समीकरण (1) की तुलना $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ से करने पर,

$$p = \cot x, Q = \sin x$$

$$\therefore \text{IF} = e^{\int \cot x \, dx}$$

$$\Rightarrow \text{I.F.} = e^{\log \sin x} = \sin x$$

समीकरण (i) में $\sin x$ की गुणा करने पर,

$$\sin x \frac{dy}{dx} + \sin x \cdot \cot xy = \sin^2 x$$

$$\Rightarrow \sin x \frac{dy}{dx} + \cos xy = 1 - \cos^2 x$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} (\sin x \cdot y) = 1 - \cos^2 x$$

$$\int \left[\frac{d}{dx} (\sin x \cdot y) \right] dx = \int 1 dx - \int \cos^2 x dx$$

$$\Rightarrow y \sin x = x - \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx$$

$$\Rightarrow y \sin x = x - \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x dx$$

$$\Rightarrow y \sin x = x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \frac{\sin 2x}{2} + C$$

$$\Rightarrow y \sin x = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \sin 2x + C$$

यही अभीष्ट हल है।

प्रश्न 6.

$$(1 - x^2) \frac{dy}{dx} + 2xy = x\sqrt{1 - x^2}$$

हल :

$$(1 - x^2) \frac{dy}{dx} + 2xy = x\sqrt{1 - x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} + \frac{2x}{(1 - x^2)} y = \frac{x\sqrt{1 - x^2}}{(1 - x^2)}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} + \frac{2x}{1 - x^2} y = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \quad \dots(i)$$

समीकरण (1) की तुलना $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ से करने पर,

$$P = \frac{2x}{1-x^2}, Q = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\therefore \text{I.F.} = e^{\int \frac{2x}{1-x^2} dx}$$

$$\Rightarrow \text{I.F.} = e^{\log \frac{1}{1-x^2}}$$

$$\Rightarrow \text{I.F.} = \frac{1}{1-x^2}$$

समीकरण (i) में दोनों ओर $\frac{1}{(1-x^2)}$ की गुणा करने पर,

$$\Rightarrow \frac{1}{(1-x^2)} \frac{dy}{dx} + \frac{2x}{(1-x^2)^2} y = \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{(1-x^2)} \cdot y \right] = \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}$$

$$\int \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{(1-x^2)} y \right] dx = \int \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}} dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1-x^2)} y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + C$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{1-x^2} + (1-x^2)C$$

यही अभीष्ट हल है।

प्रश्न 7.

$$\sin^{-1} \left[\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x} y \right] = x$$

हल :

$$\sin^{-1} \left[\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x} y \right] = x$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} + \frac{2}{x} y = \sin x \quad \dots(i)$$

समीकरण (1) की तुलना $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ से करने पर,

$$P = \frac{2}{x}, Q = \sin x$$

$$\therefore \text{I.F.} = e^{\int \frac{2}{x} dx}$$

$$\Rightarrow \text{I.F.} = e^{\log(x^2)}$$

$$\Rightarrow \text{I.F.} = x^2$$

समीकरण (i) को x^2 से गुणा करने पर,

$$x^2 \frac{dy}{dx} + \frac{2}{x} x^2 y = x^2 \sin x$$

$$\Rightarrow \left[x^2 \frac{dy}{dx} + 2xy \right] = x^2 \sin x$$

$$\Rightarrow \int \frac{d}{dx}(x^2 \cdot y) dx = \int x^2 \cdot \sin x dx \quad \dots(ii)$$

$$\text{माना } I = \int x^2 \sin^2 x dx$$

$$\Rightarrow I = x^2 \int \sin x dx - \int \left[\frac{d}{dx} x^2 \cdot \int \sin x dx \right] dx$$

$$\Rightarrow I = -x^2 \cos x + 2 \int_1^x x \cos x dx$$

$$\Rightarrow I = -x^2 \cos x + 2 \left[x \sin x - \int 1 \sin x dx \right]$$

$$\Rightarrow I = -x^2 \cos x + 2 \left[x \sin x - \int \sin x dx \right]$$

$$\Rightarrow I = -x^2 \cos x + 2x \sin x - 2 \int \sin x dx$$

$$\Rightarrow I = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C \dots(iii)$$

समी. (ii) व (iii) से,

$$x^2 y = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + c$$

$$x^2 y = C + (2 - x^2) \cos x + 2x \sin x$$

यह अभीष्ट हल है।

प्रश्न 8.

$$x \frac{dy}{dx} + 2y = x^2 \log x$$

हल :

$$x \frac{dy}{dx} + 2y = x^2 \log x$$

$$\text{या } \frac{dy}{dx} + \frac{2}{x} y = x \log x \quad \dots(1)$$

समीकरण (1) की तुलना $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ से करने पर,

$$P = \frac{2}{x}, Q = x \log x$$

$$\therefore \text{I.F.} = e^{\int \frac{2}{x} dx} = e^{2 \log x} = e^{\log x^2} = x^2$$

समीकरण (1) को x^2 से गुणा करने पर,

$$x^2 \frac{dy}{dx} + x^2 \times \frac{2}{x} y = x^3 \log x$$

$$\text{या } x^2 \frac{dy}{dx} + 2xy = x^3 \log x$$

$$\text{या } \frac{d}{dx} (x^2 y) = x^3 \log x$$

दोनों पक्षों का x के साक्ष समाकलन करने पर,

$$x^2 y = \int x^3 \log x dx + C$$

$$= \log x \int x^3 dx - \int \left\{ \frac{d}{dx} (\log x) \int x^3 dx \right\} dx + C$$

($\log x$ को प्रथम फलन लेने पर)

$$= \frac{x^4}{4} \log x - \int \frac{1}{x} \times \frac{x^4}{4} dx + C$$

$$= \frac{x^4}{4} \log x - \frac{1}{4} \int x^3 dx + C$$

$$= \frac{x^4}{4} \log x - \frac{1}{4} \times \frac{x^4}{4} + C$$

$$\text{या } x^2 y = \frac{1}{16} x^4 [4 \log x - 1] + C$$

$$16x^2 y = 4x^4 \log x - x^4 + C$$

जो अभीष्ट हल है।

प्रश्न 9. $dx + xdy = e^{-y} \sec^2 y dy$

हल : $dx + xdy = e^{-y} \sec^2 y dy$

$$\left[\frac{dx}{dy} + px = Q \text{ से} \right]$$

$$\frac{dx}{dy} + 1 \cdot x = e^{-y} \sec^2 y$$

यहाँ $P = 1$,

$$\text{तब } \int P dy = \int 1 \cdot dy = y$$

$$\therefore \text{समाकलन गुणांक} = e^{\int P \cdot dy} = e^y$$

$$\therefore x \cdot (\text{I.F.}) = \int \{Q(\text{I.F.})\} dy + C$$

$$\text{i.e., } xe^y = \int e^y \sec^2 y \cdot e^y dy + C \quad [\because Q = e^y \sec^2 y]$$

$$= \int \sec^2 y dy + C = \tan y + C$$

अतः $xe^y = \tan y + C$ ही अभीष्ट हल है।

प्रश्न 10.

$$(1 + y^2) + (x - e \tan^{-1} y) \frac{dy}{dx} = 0$$

हल:

$$(1 + y^2) + (x - e \tan^{-1} y) \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dx}{dy} + \frac{x}{1 + y^2} = \frac{e \tan^{-1} y}{1 + y^2} \quad \left[\frac{dx}{dy} + Px = Q \text{ से} \right]$$

$$\text{यहाँ } P = 1/(1 + y^2)$$

$$\text{तब } \int P dy = \int \{1/(1 + y^2)\} dy = \tan^{-1} y$$

$$\therefore \text{समाकलन गुणांक} = e^{\int P dy} = e^{\tan^{-1} y}$$

$$x \cdot (\text{I.F.}) = \int Q \cdot (\text{I.F.}) dy + C$$

$$\text{i.e., } xe^{\tan^{-1} y} = \int \frac{e^{\tan^{-1} y}}{1 + y^2} \cdot e^{\tan^{-1} y} dy + C$$
$$\left[\because Q = \frac{e^{\tan^{-1} y}}{1 + y^2} \right]$$

$$= \int e^{2t} dt + C,$$

$$\text{माना } \tan^{-1} y = t$$

$$\text{तब } dy/(1 + y^2) = dt$$

$$= \frac{1}{2} e^{2t} + c = \frac{1}{2} e^{2 \tan^{-1} y} + C$$
$$[\because t = \tan^{-1} y]$$

$$\text{अतः } xe^{\tan^{-1} y} = \frac{1}{2} e^{2 \tan^{-1} y} + C$$

$$x = \frac{1}{2} e^{\tan^{-1} y} + ce^{-\tan^{-1} y}$$

यही अभीष्ट हल है।

Ex 12.9

निम्नलिखित अवकल समीकरणों को हल कीजिए :

प्रश्न 1.

$$\frac{dy}{dx} + xy = x^3 y^3.$$

हल :

$$\frac{dy}{dx} + xy = x^3 y^3 \quad \dots(i)$$

$$\text{या } \frac{1}{y^3} \frac{dy}{dx} + x \cdot \frac{1}{y^2} = x^3 \quad \dots(1)$$

$$\text{माना } 1/y^2 = v,$$

$$\text{तब } (-2/y^3) (dy/dx) = (dv/dx)$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} \frac{dv}{dx} + x \cdot v = x^3$$

$$\text{या } \frac{dv}{dx} - 2x \cdot v = -2x^3$$

यह चर राशि में एक रैखिक समी. है।

यहाँ $P = -2x$ और $Q = -2x^3$

$$\therefore \text{I.F.} = e^{\int P dx} = e^{\int -2x dx}$$

$$= e^{-2 \cdot \frac{1}{2} x^2} = e^{-x^2}$$

$$\therefore v \cdot (\text{I.F.}) = \int [Q(\text{I.F.})] dx + C$$

$$\text{i.e., } v \cdot e^{-x^2} = \int -2x^3 \cdot e^{-x^2} dx + C$$

$$= - \int (-x^2) \cdot e^{-x^2} \cdot (-2x) dx + C$$

$$= - \int t e^t dt + C$$

$$\text{माना } -x^2 = t \text{ और } -2x dx = dt$$

$$= - \left[t \cdot e^t - \int e^t dt \right] + C$$

$$= (1 - t) e^t + C$$

$$= (1/y^2) e^{-x^2} \quad [\because t = -x^2]$$

$$(1/y^2) e^{-x^2} = x^2 e^{-x^2} + e^{-x^2} + C,$$

$v =$ रखने पर

$$y^2 = 1 + x^2 + ce^{x^2}$$

प्रश्न 2.

$$\frac{dy}{dx} = e^{x-y} (e^x - e^y).$$

हल :

$$\frac{dy}{dx} = e^{x-y} (e^x - e^y)$$

$$e^y \frac{dy}{dx} = e^x e^x - e^x e^y$$

$$\Rightarrow e^y \frac{dy}{dx} + e^x \cdot e^y = e^{2x}$$

माना $e^y = v,$

तब $e^y (dy/dx) = (dv/dx)$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dx} + e^x \cdot v = e^{2x}$$

यह चर राशि v में एक रैखिक समी. है।

यहाँ $P = e^x$ और $Q = e^{2x}$

यहाँ $P = e^x$ और $Q = e^{2x}$

$$\therefore \text{I.F.} = e^{\int e^x dx} = e^{e^x}$$

$$\therefore v \cdot e^{e^x} = \int e^x e^{e^x} \cdot e^x dx + C \quad (\text{Note})$$
$$= \int t \cdot e^t dt + c$$

माना $e^x = t$ और $e^x dx = dt$

$$= [te^t - \int e^t dt] + c = (t-1)e^t + c$$

या $e^y \cdot e^{e^x} = (e^x - 1)e^{e^x} + c$ [$\because t = e^x$ and $v = e^y$]

$$\Rightarrow e^y = e^x - 1 + ce^{-e^x}$$

यही अभीष्ट हल है।

प्रश्न 3.

$$\frac{dy}{dx} - y \tan x = -y^2 \sec x.$$

हल :

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} - y \tan x &= -y^2 \sec x \\ \Rightarrow \frac{1}{y^2} \frac{dy}{dx} - \frac{1}{y} \tan x &= -\sec x \quad \dots(1) \end{aligned}$$

माना $-1/y = v$

तब $(1/y^2) (dy/dx) = (dv/dx)$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dx} + \tan x \cdot v = -\sec x$$

यह चर राशि v में एक रैखिक समी. है।

यहाँ $P = \tan x$ और $Q = -\sec x$

$$\begin{aligned} \therefore \text{I.F.} &= e^{\int P dx} = e^{\int \tan x dx} \\ &= e^{\log \sec x} = \sec x \quad \dots(2) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow -(1/y) \cdot \sec x = -\int \sec^2 x dx + C \quad [\because v = -1/y]$$

$$\Rightarrow -(\sec x)/y = -\tan x + C$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y} = \frac{\tan x - C}{\sec x} = \frac{\sin x - C \cos x}{\cos x \sec x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y} - \sin x + C \cos x = 0$$

प्रश्न 4.

$$\tan x \cos y \frac{dy}{dx} + \sin y + e^{\sin x} = 0.$$

हल :

$$\tan x \cos y \frac{dy}{dx} + \sin y + e^{\sin x} = 0$$

$$\tan x \cos y \frac{dy}{dx} + \sin y = -e^{\sin x}$$

समीकरण को $\tan x$ से भाग देने पर

$$\cos y \frac{dy}{dx} + \cot x (\sin y) = -e^{\sin x} \cdot \cot x \quad \dots(1)$$

अब माना $z = \sin y \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \cos y \frac{dy}{dx}$

तब समीकरण (1)

$$\frac{dz}{dx} + \cot x \cdot (z) = -\cot x e^{\sin x}$$

$$\begin{aligned} \text{I.F.} &= e^{\int \cot x dx} \\ &= e^{\log \sin x} \\ &= \sin x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore z \cdot \sin x &= \int -\cot x e^{\sin x} \cdot \sin x dx + C \\ &= -\int e^{\sin x} \cdot \cos x dx + C \\ &= -\int e^t dt + C \quad [\text{माना } \sin x = t \text{ से}] \end{aligned}$$

$$\sin y \cdot \sin x = -e^t + c$$

$$\sin x \sin y = -e^{\sin x} + c$$

$$\text{या } \sin x \sin y + e^{\sin x} = c$$

प्रश्न 5.

$$\frac{dy}{dx} + x \sin 2y = x^3 \cos^2 y$$

हल :

$$\frac{dy}{dx} + x \sin 2x = x^3 \cos^2 y$$

$$\Rightarrow \sec^2 y \frac{dy}{dx} + 2x \cdot \tan y = x^3 \quad \dots(1)$$

माना $\tan y = v$

तब $\sec^2 y (dy/dx) = dv/dx$

$$\frac{dv}{dx} + 2x \cdot v = x^3$$

यह चर राशि v में एक रैखिक समी है।

यहाँ $P = 2x$ और $Q = x^3$

$$\therefore \text{I.F.} = e^{\int 2x \, dx} = e^{x^2}$$

$$\therefore v \cdot e^{x^2} = \int x^3 \cdot e^{x^2} \, dx + C$$

$$\begin{aligned} \text{या } v \cdot e^{x^2} &= \frac{1}{2} \int x^2 \cdot e^{x^2} \cdot 2x \, dx + C \\ &= \frac{1}{2} \int t \cdot e^t \, dt + C \end{aligned}$$

$x^2 = t$ और $2x \, dx = dt$ रखने पर

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \left[t \cdot e^t - \int e^t \, dt \right] + C \\ &= \frac{1}{2} e^t (t - 1) + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{या } \tan y e^{x^2} &= \frac{1}{2} e^{x^2} (x^2 - 1) + C \\ &[\because v = \tan y \text{ and } t = x^2] \end{aligned}$$

अतः $\tan y = \frac{1}{2} (x^2 - 1) + C e^{-x^2}$ ही अभीष्ट हल है।

प्रश्न 6.

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} \log y = \frac{y}{x^2} (\log y)^2$$

हल :

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} \log y &= \frac{y}{x^2} (\log y)^2 \\ \frac{1}{y(\log y)^2} \frac{dy}{dx} + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\log y} &= \frac{1}{x^2} \end{aligned} \quad \dots (1)$$

माना $1/\log y = v$

$$- \{1(\log y)^2\} \cdot (1/y) \cdot (dy/dx) = dv/dx$$

$$\Rightarrow -\frac{dv}{dx} + \frac{v}{x} = +\frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dx} - \frac{1}{x} \cdot v = -\frac{1}{x^2}$$

यह चर राशि v में एक रैखिक समीकरण है।

यहाँ $P = -1/x$ और $Q = -1/x^2$

$$\therefore \text{I.F.} = e^{\int P dx} = e^{-\int (1/x) dx} \\ = e^{-\log x} = e^{\log (1/x)} = 1/x$$

$$\therefore v/x = \int (-1/x^2) \cdot (1/x) dx + C$$

$$\Rightarrow (1/\log y) (1/x) = - \int x^{-3} dx + C \quad [\because v = 1/\log y]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x \log y} = \frac{1}{2x^2} + C$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\log y} = \frac{1}{2x} + Cx$$

यही अभीष्ट हल है।

प्रश्न 7. अवकल समीकरण

$$(1+x^2) \frac{dy}{dx} + 2xy = \frac{1}{1+x^2},$$

यदि $x=1, y=0$ का हल दीजिए।

हल :

$$(1+x^2) \frac{dy}{dx} + 2xy = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} + \frac{2xy}{1+x^2} = \frac{1}{(1+x^2)^2}$$

$$\text{तब,} \quad \frac{dy}{dx} + Py = Q$$

$$\text{जहाँ} \quad P = \frac{2x}{1+x^2} \text{ तथा } Q = \frac{1}{(1+x^2)^2}$$

$$\text{I.F.} = e^{\int P dx}$$

$$= e^{\int \frac{2x}{1+x^2} dx}$$

$$= e^{\int \frac{1}{t} dt}$$

$$= e^{\log t}$$

$$= t$$

$$= 1+x^2$$

$$\text{माना } 1+x^2 = t$$

$$2x dx = dt$$

अवकल समीकरण का हल

$$y \cdot (I.F) = \int Q(I.F.) dx + c$$

$$y(1+x^2) = \int \frac{1}{(1+x^2)^2} \cdot (1+x^2) dx + c$$

$$y(1+x^2) = \int \frac{1}{1+x^2} dx + c$$

$$y(1+x^2) = \tan^{-1} x + c$$

अब $x = 1$ तथा $y = 0$ रखने पर।

$$0 = \tan^{-1}(1) + c$$

$$0 = \frac{\pi}{4} + c$$

$$c = -\frac{\pi}{4}$$

अतः अवकल समीकरण का हल

$$y(1+x^2) = \tan^{-1} x - \frac{\pi}{4}$$

Miscellaneous Exercise

प्रश्न 1.

$$(x^2 + 1) \frac{dy}{dx} = 1$$

का हल है

(a) $y = \cot^{-1}x + C$

(b) $y = \tan^{-1}x + C$

(c) $y = \sin^{-1}x + C,$

(d) $y = \cos^{-1}x + C$

हल :

$$(x^2 + 1) \frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(x^2 + 1)}$$

$$dy = \frac{1}{x^2 + 1} dx$$

दोनों तरफ समाकलन करने पर,

$$\int dy = \int \frac{1}{x^2 + 1} dx$$

$$y = \tan^{-1} x + C$$

अतः उत्तर (b) सही है।

प्रश्न 2. समीकरण

$$\frac{dy}{dx} + 2x = e^{3x}$$

का हल है

(a) $y + x^2 = \frac{1}{3} e^{3x} + C$ (b) $y + x^2 = \frac{1}{3} e^{3x} + C$

(c) $y - x^2 = \frac{1}{3} e^{2x} + C$ (d) $y - x^2 = \frac{1}{3} e^{3x} + C$

हल : समीकरण

$$\frac{dy}{dx} + 2x = e^{3x}$$

$$dy + 2x \, dx = e^{3x} \cdot dx$$

समाकलन करने पर,

$$\int dy + \int 2x \, dx = \int e^{3x} \, dx$$

$$\Rightarrow y + \frac{2x^2}{2} = e^{3x} \times \frac{1}{3} + C$$

$$\Rightarrow y + x^2 = \frac{1}{3} e^{3x} + C$$

अतः उत्तर (a) सही है।

प्रश्न 3. समीकरण

$$\frac{dy}{dx} + \cos x \tan y = 0$$

का हल है

- (a) $\log \sin y + \sin x + C$
- (b) $\log \sin x \sin y = C$
- (c) $\sin y + \log \sin x + C$
- (d) $\sin x \sin y + C$

हल : समीकरण

$$\text{समीकरण } \frac{dy}{dx} + \cos x \tan y = 0$$

$$\Rightarrow dy + \cos x \tan y \, dx = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\tan y} \, dy + \cos x \, dx = 0$$

$$\Rightarrow \cot y \, dy + \cos x \, dx = 0$$

दोनों तरफ समाकलन करने पर,

$$\int \cot y \, dy + \int \cos x \, dx = 0$$

$$\Rightarrow \log \sin y + \sin x + C = 0$$

अब उत्तर (a) सही है।

प्रश्न 4. समीकरण

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

का हल है

- (a) $y = \log (e^x + e^{-x}) + C$
- (b) $y = \log (e^x - e^{-x}) + C$
- (c) $y = \log (e^x + 1) + C$
- (d) $y = \log (1 - e^{-x}) + C$

हल :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

$$dy = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} dx$$

समाकलन करने पर,

$$\Rightarrow y = \log (e^x - e^{-x}) + C$$

अतः उत्तर (b) सही है।

प्रश्न 5. समीकरण

$$e^{-x+y} \frac{dy}{dx} = 1$$

का हल है

- (a) $e^y = e^x + C$
- (b) $e^y = e^{-x} + C$
- (c) $e^{-y} = e^{-x} + C$
- (d) $e^{-y} = e^x + C$

हल :

$$e^{-x+y} \frac{dy}{dx} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{e^y}{e^x} \frac{dy}{dx} = 1$$

$$\Rightarrow e^y dy = e^x dx$$

समाकलन करने पर,

$$\int e^y dy = \int e^x dx$$

$$\Rightarrow e^y = e^x + C$$

अतः उत्तर (a) सही है।

प्रश्न 6. समीकरण

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{y} + y = 0$$

का हल है

$$(a) x + \frac{1}{2} \log(1+y) + C \quad (b) x + \frac{1}{2} \log(1+y^2) = C$$

$$(c) x + \log(1+y) = C \quad (d) x + \log(1+y^2) = C$$

हल :

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{y} + y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1+y^2}{y} = 0$$

$$\frac{y}{1+y^2} dy + dx = 0$$

समाकलन करने पर,

$$\Rightarrow \int dx + \int \frac{y}{1+y^2} dy = 0$$

$$\Rightarrow x + \frac{1}{2} \log(1+y^2) = C$$

अतः उत्तर (b) सही है।

प्रश्न 7. समीकरण

$$\frac{dy}{dx} = \cos^2 y$$

का हल है

$$(a) x + \tan y = C$$

$$(b) \tan y = x + C$$

$$(c) \sin y + x = C$$

$$(d) \sin y - x = C$$

हल :

$$\frac{dy}{dx} = \cos^2 y$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{\cos^2 y} = dx$$

$$\Rightarrow \sec^2 y \, dy = dx$$

समाकलन करने पर,

$$\tan y = x + C$$

अतः उत्तर (b) सही है।

प्रश्न 8. समीकरण

$$\frac{dy}{dx} = e^y + x + e^y x^2$$

का हल है

$$(a) e^x + e^y = \frac{x^3}{3} + C \quad (b) e^{-x} + e^y + \frac{x^3}{3} = C$$

$$(c) e^{-x} + e^{-y} = \frac{x^3}{3} + C \quad (d) e^x + e^{-y} + \frac{x^3}{3} = C$$

हल :

$$\frac{dy}{dx} = e^y + x + e^y x^2$$

$$\Rightarrow dy = e^y(e^x + x^2)dx$$

$$\Rightarrow e^{-y} dy = e^x dx + x^2 dx$$

समाकलन करने पर,

$$\int e^y dy = \int e^x dx + \int x^2 dx$$

$$\Rightarrow -e^{-y} + C = e^x + \frac{x^2 + 1}{3}$$

$$\Rightarrow e^x + e^{-y} + \frac{x^3}{3} = C$$

अतः उत्तर (b) सही है।

प्रश्न 9. अवकल समीकरण

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \frac{y^2}{x^2}$$

में निम्न में से किस प्रतिस्थापन द्वारा रैखिक समीकरण में परिवर्तित होगी ?

(a) $y = t$

(b) $y^2 = t$

(c) $\frac{1}{y} = t$

(d) $\frac{1}{y^2} = t$

हल : उत्तर (c) सही है।

प्रश्न 10. अवकल समीकरण

$$\frac{dy}{dx} + xy = e^{-x}y^3$$

में निम्न में से किस प्रतिस्थापन द्वारा अवकल समीकरण में परिवर्तित होगी

(a) $\frac{1}{y} = v$

(b) $y^{-2} = v$

(c) $y^{-3} = v$

(d) $y^3 = v$

हल : उत्तर (b) सही है।

प्रश्न 11. अवकल समीकरण

$$\frac{dy}{dx} + 2x = e^{3x}$$

का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

हल :

$$\frac{dy}{dx} + 2x = e^{3x}$$

$$dy + 2x \, dx = e^{3x} \, dx$$

समाकलन करने पर,

$$\int dy + \int 2x dx = \int e^{3x} dx$$

$$\Rightarrow y + \frac{2x^2}{2} = \frac{1}{3} e^{3x} + C$$

$$\Rightarrow y + x^2 = \frac{1}{3} e^{3x} + C$$

यही अभीष्ट व्यापक हल है।।

प्रश्न 12.

अवकल समीकरण

$$\frac{dy}{dx} + y \tan x = \sin x$$

समाकलन गुणांक ज्ञात कीजिए।

हल :

$$\frac{dy}{dx} + y \tan x = \sin x$$

इसकी तुलना

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q \text{ से करने पर,}$$

$$P = \tan x, Q = \sin x$$

$$\text{समाकलन गुणांक (I.F.)} = e^{\int P dx}$$

$$= e^{\int \tan x dx}$$

$$= e^{\log \sec x}$$

$$= \sec x$$

प्रश्न 13. अवकल समीकरण

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{\sin x} y = e^x$$

का समाकलन गुणांक ज्ञात कीजिए।

हल:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{\sin x} y = e^x$$

इसकी तुलना समी. $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ से करने पर,

$$P = \frac{1}{\sin x}, Q = e^x$$

समाकलन गुणांक (I.F.) = $e^{\int p \, dx}$

$$= e^{\int \frac{1}{\sin x} \, dx} = e^{\int \operatorname{cosec} x \, dx}$$

$$= e^{\log |\operatorname{cosec} x - \cot x|}$$

$$= |\operatorname{cosec} x - \cot x|$$

$$= \left| \frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x} \right|$$

$$= \left| \frac{1 - \cos x}{\sin x} \right| = \left| \frac{1 - 2 \sin^2 x/2 - 1}{2 \sin x/2 \cos x/2} \right|$$

$$= \left| \tan \frac{x}{2} \right| \text{ या } \tan \frac{x}{2}$$

प्रश्न 14. अवकल समीकरण

$$\cos(x+y) \frac{dy}{dx} = 1$$

किस रूप की है ?

हल: चरों को पृथक-पृथक परिवर्तित करने वाली समीकरण के रूप की है।

प्रश्न 15. अवकल समीकरण

$$\frac{dy}{dx} - y \tan x = e^x \sec x$$

किस रूप की है ?

हल : रैखिक समीकरण।

प्रश्न 16. अवकल समीकरण

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x + 3y + 1}{3x + 2y + 1}$$

का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

हल :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x + 3y + 1}{3x + 2y + 1}$$

यहाँ $\frac{a}{a_1} \neq \frac{b}{b_1}$

$$\therefore x = X + h \text{ तथा } y = Y + k$$

$$\begin{aligned} \frac{dY}{dX} &= \frac{4(X+h)+3(Y+k)+1}{3(X+h)+2(Y+k)+1} \\ &= \frac{4X+3Y+(4h+3k+1)}{3X+2Y+(3h+2k+1)} \end{aligned} \quad \dots(i)$$

h व k इस प्रकार है कि

$$4h + 3k + 1 = 0$$

$$\text{तथा } 3h + 2k + 1 = 0$$

हल करने पर, $h = -1, k = 1$

h व k के मान समी (i) में रखने पर,

$$\frac{dY}{dX} = \frac{4X+3Y}{3X+2Y} \quad \dots(ii)$$

यह एक समघातीय समी. है।

$$\therefore Y = vx$$

$$\frac{dY}{dX} = v + X \frac{dv}{dX} \quad \dots(iii)$$

समी. (i) व (ii) से,

$$\begin{aligned} v + X \frac{dv}{dX} &= \frac{4X+3Y}{3X+2Y} \\ \Rightarrow v + X \frac{dv}{dX} &= \frac{4X+3vX}{3X+2vX} \\ \Rightarrow v + X \frac{dv}{dX} &= \frac{4+3v}{3+2v} \\ \Rightarrow X \frac{dv}{dX} &= \frac{4+3v}{3+2v} - v \\ \Rightarrow X \frac{dv}{dX} &= \frac{4+3v-3v-2v^2}{3+2v} \\ \Rightarrow X \frac{dv}{dX} &= \frac{2(2-v^2)}{(3+2v)} \\ \frac{3+2v}{(2-v^2)} dv &= \frac{2}{X} dX \\ \Rightarrow \left(\frac{2v}{v^2-2} + \frac{3}{v^2-2} \right) dv &= \frac{-2}{X} dX \end{aligned}$$

समाकलन करने पर

$$\Rightarrow \log (v^2 - 2) + 3 \times \frac{1}{2\sqrt{2}} \log \frac{v - \sqrt{2}}{v + \sqrt{2}} \\ = -2 \log X + \log C$$

$$\Rightarrow \log \left(\frac{Y^2}{X^2} - 2 \right) + \frac{3}{2\sqrt{2}} \log \left(\frac{\frac{Y}{X} - \sqrt{2}}{\frac{Y}{X} + \sqrt{2}} \right) = \log \left(\frac{C}{X^2} \right)$$

$$\Rightarrow \log \left(\frac{Y^2 - 2X^2}{X^2} \right) + \frac{3}{2\sqrt{2}} \log \left(\frac{Y - \sqrt{2}X}{Y + \sqrt{2}X} \right) = \log \left(\frac{C}{X^2} \right)$$

$$\Rightarrow \log \left(\frac{Y^2 - 2X^2}{X^2} \right) + \log \left(\frac{Y - \sqrt{2}X}{Y + \sqrt{2}X} \right)^{3/2\sqrt{2}} = \log \left(\frac{C}{X^2} \right)$$

$$\Rightarrow \log \left(\frac{Y - \sqrt{2}X}{Y + \sqrt{2}X} \right)^{3/2\sqrt{2}} = \log \left(\frac{C}{X^2} \right) - \log \left(\frac{Y^2 - 2X^2}{X^2} \right)$$

$$\Rightarrow \log \left(\frac{Y - \sqrt{2}X}{Y + \sqrt{2}X} \right)^{3/2\sqrt{2}} = \log \left\{ \frac{C/X^2}{\left(\frac{Y^2 - 2X^2}{X^2} \right)} \right\}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{Y - \sqrt{2}X}{Y + \sqrt{2}X} \right)^{3/2\sqrt{2}} = \frac{C}{Y^2 - 2X^2}$$

इसमें $Y = y - 1$ तथा $X = x + 1$ रखने पर

$$\left(\frac{y - 1 - \sqrt{2}(x + 1)}{y - 1 + \sqrt{2}(x + 1)} \right)^{3/2\sqrt{2}} = \left[\frac{C}{(y - 1)^2 - 2(x + 1)^2} \right]^{2\sqrt{2}/3}$$

यही अभीष्ट हल है।

प्रश्न 17.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \left\{ \log \left(\frac{y}{x} \right) + 1 \right\}$$

हल :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(\log y - \log x + 1)}{x} \quad \dots(1)$$

माना $y = vx$ तब $\frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx}$ समी. (1) से,

$$\begin{aligned} v + x \frac{dv}{dx} &= \frac{vx\{(vx) - \log x + 1\}}{x} \\ &= v(\log v + \log x - \log x + 1) \\ &= v(\log v + 1) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dx} = v \log v + v - v = v \log v$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dv}{v \log v}$$

समाकलन करने पर,

$$\log x + \log c = \int \frac{dv}{v \log v}$$

$$\text{माना } \log v = t \text{ तब } \frac{1}{v} dv = dt$$

$$\Rightarrow \log(cx) = \int (1/t) dt = \log t = \log(\log v) \quad [\because t = \log v]$$

$$\Rightarrow cx = \log v = \log(y/c)$$

$$\Rightarrow y = x e^{cx}$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x} = e^{cx}$$

$$\Rightarrow \log\left(\frac{y}{x}\right) = Cx$$

यही अभीष्ट हल है।

प्रश्न 18.

$$x \frac{dy}{dx} = y + 2\sqrt{y^2 - x^2}$$

हल :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y + 2\sqrt{(y^2 - x^2)}}{x},$$

यह समघातीय समी. है। ... (1)

∴ माना $y = vx$ तब $\frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx}$ समी. (1) से,

$$v + x \frac{dv}{dx} = \frac{vx + 2\sqrt{(v^2 x^2 - x^2)}}{x}$$

$$= v + 2\sqrt{(v^2 - 1)}$$

$$\Rightarrow x \frac{dv}{dx} = 2\sqrt{(v^2 - 1)}$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{\sqrt{(v^2 - 1)}} = \frac{2dx}{x}$$

समाकलन करने पर

$$\log [v(v^2 - 1)] = 2 \log x + \log C = \log (Cx)^2$$

$$\Rightarrow v + \sqrt{(v^2 - 1)} = Cx^2$$

$$\Rightarrow (y/x) + \sqrt{(y^2/x^2 - 1)} = Cx^2$$

$$\Rightarrow y + \sqrt{(y^2 - x^2)} = Cx^3$$

यही अभीष्ट हल है।

प्रश्न 19.

$$\frac{dy}{dx} = e^{x-y} (e^y - e^x)$$

हल :

$$\frac{dy}{dx} = e^{x-y} (e^y - e^x)$$

$$\Rightarrow e^y \frac{dy}{dx} = e^x e^y - e^x \cdot e^x$$

$$\Rightarrow e^y \frac{dy}{dx} = e^x \cdot e^y - e^{2x} \quad \dots(1)$$

$$\text{माना } e^y = v \text{ तथा } e^y \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx}$$

समी. (1) से,

$$\frac{dv}{dx} = e^x \cdot v - e^{2x}$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dx} - e^x v = -e^{2x}$$

यह आश्रित चर v के साथ रैखिक समी. हैं।

यहाँ $P = -e^x$ और $Q = e^{2x}$

$$\therefore v \cdot e^{-e^x} = \int e^x e^{-e^x} e^x dx + C$$

$$= \int t e^{-t} dt + C$$

माना $e^x = t$

$$e^x dx = dt$$

$$= -te^{-t} + \int e^t dt + C$$

$$= -e^{-t}(t+1)$$

$$\Rightarrow e^y \cdot e^{-e^x} = (e^x + 1) e^{-e^x} + C \quad [\because t = e^x \text{ तथा } v = e^y]$$

अतः $e^y = e^x + 1 + Ce_{(x)}$ ही अभीष्ट हल है।

प्रश्न 20.

$$\frac{dy}{dx} + x \sin 2y = x^3 \cos^2 y$$

हल :

$$\frac{dy}{dx} + x \sin 2y = x^3 \cos^2 y$$

$$\sec^2 y \frac{dy}{dx} + 2x \cdot \tan y = x^3 \quad \dots(1)$$

माना $\tan y = v$, तब $\sec^2 y (dy/dx) = dv/dx$, समी. (1) से,

$\frac{dv}{dx} + 2x \cdot v = x^3$, यह आश्रित चर v के साथ रैखिक समी. है।

यहाँ $P = 2x$ और $Q = x^3$

$$\therefore \text{I.F.} = e^{\int 2x \, dx} = e^{x^2}$$

$$\therefore v \cdot e^{x^2} = \int x^3 \cdot e^{x^2} \, dx + C$$

$$\Rightarrow v \cdot e^{x^2} = \frac{1}{2} \int x^2 \cdot e^{x^2} \cdot 2x \, dx + C \quad (\text{ध्यान दें})$$

$$= \frac{1}{2} \int t \cdot e^t \, dt + c, \text{ माना } x^2 = t \text{ और } 2x \, dx = dt$$

$$= \frac{1}{2} \left[t \cdot e^t - \int e^t \, dt \right] + c = \frac{1}{2} e^t (t - 1) + C$$

$$\Rightarrow e^{x^2} \tan y = \frac{1}{2} e^{x^2} (x^2 - 1) + C$$

$$[\because v = \tan y \text{ और } t = x^2]$$