आव्यूह

Ex 3.1

प्रश्न 1. यदि आव्यूह $A = [a_{ij}]_{2\times4}$ हो तो A में अवयवों की संख्या लिखिए।

हल : m x n क्रम वाले आव्यूह में अवयवों की संख्या mn होती हैं

अतः दिये गये आव्यूह में अवयवों की संख्या = 8 है।

प्रश्न 2. 4 x 4 का इकाई का आव्यूह लिखिए।

हल :

4 x 4 इकाई का आव्यूह

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

प्रश्न 3. यदि

$$\begin{bmatrix} k+4 & 1 \\ 3 & k-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

तो a का मान ज्ञात कीजिए।

हल :

दिया है,

$$\begin{bmatrix} k+4 & 1 \\ 3 & k-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

∴ प्रश्नानुसार दोनों आव्यूह बराबर है अत: संगत अवयव भी बराबर होंगे।

∴ $k + 4 = a$ ......(i)

$k - 6 = -4$ ......(ii)

समीकरण (i) से,

$k = -4 + 6$

$= 2$

समीकरण (ii) से,

$a = k + 4 = 6$

∴ $a = 6$.

प्रश्न 4. 6 अवयवों वाले आव्यूह के सम्भावित क्रम क्या होंगे ?

हल : यदि किसी आव्यूह का क्रम m x n है तो उसमें mn अवयव होते हैं, अत: 6 अवयवों वाले सम्भावित क्रम 6 x 1, 1 x 6, 2 x 3 और 3 x 2 होंगे।

प्रश्न 5. 2 x 2 क्रम का आव्यूह A = [a_{ij}] ज्ञात कीजिए जिसके अवयव

(i) $a_{ij} = \dfrac{2i - j}{3i + j}$ (ii) $a_{ij} = \dfrac{(i + 2i)^2}{2i}$ (iii) $a_{ij} = 2i - 3j$

हल :

(i) $$a_{ij} = \frac{2i - j}{3i + j}$$

$$\therefore \quad a_{11} = \frac{2 \times 1 - 1}{3 \times 1 + 1} = \frac{2 - 1}{3 + 1} = \frac{1}{4}$$

$$a_{12} = \frac{2 \times 1 - 2}{3 \times 1 + 2} = \frac{2 - 2}{3 + 2} = 0$$

$$a_{21} = \frac{2 \times 2 - 1}{3 \times 2 + 1} = \frac{4 - 1}{6 + 1} = \frac{3}{7}$$

$$a_{22} = \frac{2 \times 2 - 2}{3 \times 2 + 2} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \text{ अभीष्ट आव्यूह} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ 3/7 & 1/4 \end{bmatrix}$$

(ii) $$a_{ij} = \frac{(i + 2j)^2}{2i}$$

$$a_{11} = \frac{(1 + 2 \times 1)^2}{2 \times 1} = \frac{3^2}{2} = \frac{9}{2}$$

$$a_{12} = \frac{(1 + 2 \times 2)^2}{2 \times 1} = \frac{5^2}{2} = \frac{25}{2}$$

$$a_{21} = \frac{(2 + 2 \times 1)^2}{2 \times 2} = \frac{4^2}{4} = 4$$

$$a_{22} = \frac{(2+2\times1)^2}{2\times2} = \frac{6^2}{4} = 9$$

$$\therefore \text{ अभीष्ट आव्यूह} = \begin{bmatrix} 9/2 & -25/2 \\ 4 & -9 \end{bmatrix}$$

(iii) $a_{ij} = 2i - 3j$

$a_{11} = 2 \times 1 - 3 \times 1 = 2 - 3 = -1$

$a_{12} = 2 \times 1 - 3 \times 2 = 2 - 6 = -4$

$a_{21} = 2 \times 2 - 3 \times 1 = 4 - 3 = 1$

$a_{22} = 2 \times 2 - 3 \times 2 = 4 - 6 = -2$

$$\text{अभीष्ट आव्यूह} = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

प्रश्न 6. एक 2 x 3 क्रम का आव्यूह A = a_{ij} ज्ञात कीजिए जिसके अवयव $a_{ij} = \frac{1}{2}|2i - 3j|$ हैं।

हल : 2 x 3 के आव्यूह में 2 पंक्तियाँ एवं 3 स्तम्भ होते हैं।

अतः i = 1, 2 तथा j = 1, 2, 3

$$\therefore \quad a_{ij} = \frac{1}{2}|2i - 3j|,$$

$$a_{11} = \frac{1}{2}|2 \times 1 - 3 \times 1| = \frac{1}{2}|2 - 3| = \frac{1}{2}$$

$$a_{12} = \frac{1}{2}|2 \times 1 - 3 \times 2| = \frac{1}{2}|2 - 6| = \frac{4}{2} = 2$$

$$a_{13} = \frac{1}{2}|2 \times 1 - 3 \times 3| = \frac{1}{2}|2 - 9| = \frac{7}{2}$$

$$a_{21} = \frac{1}{2}|2 \times 2 - 3 \times 1| = \frac{1}{2}|4 - 3| = \frac{1}{2}$$

$$a_{22} = \frac{1}{2}|2 \times 2 - 3 \times 2| = \frac{1}{2}|4 - 6| = 1$$

$$a_{23} = \frac{1}{2}|2 \times 2 - 3 \times 3| = \frac{1}{2}|4 - 9| = \frac{5}{2}$$

$$a_{23} = \frac{1}{2}|2 \times 2 - 3 \times 3| = \frac{1}{2}|4 - 9| = \frac{5}{2}$$

अत: 2×3 क्रमका आव्यूह $= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1/2 & 2 & 7/2 \\ 1/2 & 1 & 5/2 \end{bmatrix}$$

प्रश्न 7.

यदि

$$\begin{bmatrix} a+b & 2 \\ 7 & ab \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 7 & 8 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

हो, तो a वे b का मान ज्ञात कीजिए।

हल :

$$\begin{bmatrix} a+b & 2 \\ 7 & ab \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 7 & 8 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

दिये हुये आव्यूह समान हैं, अत: संगत अवयवों की तुलना करने पर

a + b = 6 ...(i)

ab = 8 ...(ii)

समी. (i) से b = b − a समी. (ii) में रखने पर,

a(6 − a) = 8

⇒ 6a − a^2 − 8 = 0

⇒ a^2 − 2a − 4a + 8 = 0

⇒ a^2 − 2a − 4a + 8 = 0

⇒ (a − 2)(a − 4) = 0

अतः a = 2, 4

ab = 8 तो b = 4, 2

प्रश्न 8. यदि

$$\begin{bmatrix} 2x & 3x+y \\ -x+z & 3y-2p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$$

हो, तो x,y,z व p के मान ज्ञात कीजिए।

हल :

$$\begin{bmatrix} 2x & 3x+y \\ -x+z & 3y-2p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$$

संगत अवयवों की तुलना करने पर
2x = 4 ⇒ x = 2
3x + y = 5 ⇒ y = 5 − 3 x 2 = 5 − 6 = -1
-x + z = − 4
⇒ 3y − 2p = − 3 ⇒ 2p = 3y + 3 = 3 x − 1 + 3 = 0
अतः p = 0
x = 2, y = − 1, z = − 2, p = 0.

प्रश्न 9. a, b व c के किन मानों के लिए आव्यूह A तथा B समान आव्यूह हैं। जहाँ

$$A = \begin{bmatrix} a-2 & 3 & 2c \\ 12c & b+2 & 3c \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b & c & 6 \\ 6b & a & 3b \end{bmatrix}$$

हल :
दिया है, A = B

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} a-2 & 3 & 2c \\ 12c & b+2 & bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & c & 6 \\ 6b & a & 3b \end{bmatrix}$$

संगत अवयवों की तुलना करने पर
a − 2 = b ⇒ a − b = 2 ...(i)
3 = c
12c = 6b
⇒ b = $\frac{12\times3}{6}$ = 6
⇒ b = 6
b + 2 = a
a − b = 2
a = 2 + b = 2 + 6 = 8
अतः a = 8, b = 6, c = 3

Ex 3.2

प्रश्न 1. यदि

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 7 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 \\ -1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

हों, तो A + B व A − B ज्ञात कीजिए।

हल :

दिया है,

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 7 \end{bmatrix} \text{ तथा } B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 \\ -1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad A + B = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 \\ -1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3+3 & 2+5 & 1+(-2) \\ 1+(-1) & -4+4 & 7+(-2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A - B = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 \\ -1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3-3 & 2-5 & 1+2 \\ 1+1 & -4-4 & 7+2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -6 & -3 & 3 \\ 2 & -8 & 9 \end{bmatrix}$$

प्रश्न 2. यदि

$$A + B = \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \qquad A - B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

हों, तो आव्यूह A व B ज्ञात कीजिए।

हल :

$$A + B = \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \qquad \ldots(i)$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad \ldots(ii)$$

समी. (i) व (ii) को जोड़ने पर

$$2A = \begin{bmatrix} -7+3 & 0-2 \\ 2+0 & -5+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A = \frac{1}{2} \times \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

समी. (i) में A का मान रखने पर

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + B = \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow B = \begin{bmatrix} -7+2 & 0+1 \\ 2-0 & -5+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$$

अतः $\quad A\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$

प्रश्न 3. यदि

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

हों, तो आव्यूह C ज्ञात कीजिए, जहाँ A + 2B + C = 0 तथा O शून्य आव्यूह है।

हल :

दिया है,

A + 2B + C = 0

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} + C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 4 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 4 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -5 & -5 \\ -4 & -5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

प्रश्न 4. यदि

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$$

हों, तो $3A^2 - 2B$ ज्ञात कीजिए।

हल :

प्रश्नानुसार,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2\times 2+(-1)\times 3 & 2\times -1+(-1)\times 2 \\ 3\times 2+2\times 3 & 3\times -1+2\times 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4-3 & -2-2 \\ 6+6 & -3+4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 12 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad 3A^2 - 2B = 3\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 12 & 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -12 \\ 36 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ -2 & 14 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -12 \\ 36 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ 2 & -14 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3+0 & -12+(-8) \\ 36+2 & 3+(-14) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -20 \\ 38 & -11 \end{bmatrix}$$

प्रश्न 5. यदि

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2 & 3\\3 & 2 & 1 & 0\end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix}0 & 3\\1 & 2\\2 & 1\\3 & 0\end{bmatrix}$$

हो, तो दिखाओ कि AB ≠ BA.

हल :

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2 & 3\\3 & 2 & 1 & 0\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0 & 3\\1 & 2\\2 & 1\\3 & 0\end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2 & 3\\3 & 2 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 3\\1 & 2\\2 & 1\\3 & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0+1+4+9 & 0+2+2+0\\0+2+2+0 & 9+4+1+0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}14 & 4\\4 & 14\end{bmatrix} \quad \ldots(i)$$

$$BA=\begin{bmatrix}0 & 3\\1 & 2\\2 & 1\\3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 2 & 3\\3 & 2 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix}0+9 & 0+6 & 0+3 & 0+0\\0+6 & 1+4 & 2+2 & 3+0\\0+3 & 2+2 & 4+1 & 6+0\\0+0 & 3+0 & 6+0 & 9+0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad BA = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 3 & 0 \\ 6 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \qquad \ldots\text{(ii)}$$

समीकरण (i) और (ii) से स्पष्ट है :

AB ≠ BA.

इति सिद्धम्।

प्रश्न 6. यदि

$$f(x) = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x & 0 \\ \sin x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

तो प्रदर्शित कीजिए – f(A) f(B) = f(A + B).

हल :

दिया है,

$$f(x) = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x & 0 \\ \sin x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{तो} \qquad f(A) = \begin{bmatrix} \cos A & -\sin A & 0 \\ \sin A & \cos A & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{तथा} \qquad f(B) = \begin{bmatrix} \cos B & -\sin B & 0 \\ \sin B & \cos B & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$f(A+B) = \begin{bmatrix} \cos(A+B) & -\sin(A+B) & 0 \\ \sin(A+B) & \cos(A+B) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

तो सिद्ध करना है।

f(A) + f(B) = f(A + B)

L.H.S.= f(A) x f(B)

$$= \begin{bmatrix} \cos A & -\sin A & 0 \\ \sin A & \cos A & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos B & -\sin B & 0 \\ \sin B & \cos B & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos A \cos B - \sin A \sin B + 0 & -\cos A \sin B - \sin A \cos B + 0 & 0+0+0 \\ \sin A \cos B + \cos A \sin B + 0 & -\sin A \sin B + \cos A \cos B & 0+0+0 \\ 0+0+0 & 0+0+0 & 0+0+1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos (A+B) & -\sin (A+B) & 0 \\ \sin (A+B) & \cos (A+B) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$= f(A + B)$

$=$ R.H.S. **इति सिद्धम्।**

प्रश्न 7. यदि

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 6 & -7 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

हो, तो सिद्ध कीजिए : $(AB)^T = B^T A^T$

हल : दिया है,

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 6 & -7 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \qquad AB = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -7 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4\times 6 + 2\times -1 + (-5)\times 1 & 4\times -7 + 2\times 2 + (-5)\times 0 & 4\times 0 + 2\times 5 + (-5)\times 2) \\ 1\times 6 + 0\times -1 + 3\times 1 & 1\times -7 + 0\times 2 + 3\times 0 & 1\times 0 + 0\times 5 + 3\times 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 24-2-5 & -28+4+0 & 0+10-10 \\ 6+0+3 & -7+0+0 & 0+0+6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 17 & -24 & 0 \\ 9 & -7 & 6 \end{bmatrix}$$

$$(AB)^T = \begin{bmatrix} 17 & 9 \\ -24 & -7 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{...(i)}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}^T \quad \text{...(ii)}$$

$$B^T = \begin{bmatrix} 6 & -7 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & -1 & 1 \\ -7 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{...(iii)}$$

$$\therefore\ B^T A^T = \begin{bmatrix} 6 & -1 & 1 \\ -7 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6\times4+(-1)\times2+1\times-5 & 6\times1+(-1)\times0+1\times3 \\ -7\times4+2\times2+0\times-5 & -7\times1+2\times0+0\times3 \\ -0\times4+5\times2+2\times-5 & 0\times1+5\times0+2\times3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\ B^T A^T = \begin{bmatrix} 24-2-5 & 6+10+3 \\ -28+4+0 & -7+0+0 \\ 0+10-10 & 0+0+6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 17 & 9 \\ -24 & -7 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{...(iv)}$$

समीकरण (i) और (iv) से

$(AB)^T = B^T A^T$

इति सिद्धम्।

प्रश्न 8. सिद्ध कीजिए :

$$[x \quad y \quad z]\begin{bmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = [ax^2 + by^2 + cz^2 + 2hxy + 2fyz + 2gzx]$$

हल :

दिया है,

LHS

$$= [x \quad y \quad z]\begin{bmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$= [ax + hy + gz \;\; hx + by + fz \;\; gx + fy + cz]\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

$= (ax + hy + gz)x + (hx + by + fz) + (gx + fy + cz)z$

$= ax^2 + hxy + gzx + hxy + by^2 + fyz + gzx + fyz + cz^2$

$= ax^2 + by^2 + cz^2 + 2hxy + 2fyz + 2gzx$

= R.H.S.

इति सिद्धम्।

प्रश्न 9. यदि

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

तथा I तृतीय क्रम का इकाई आव्यूह हो, तो सिद्ध कीजिए

$$A^2 - 3A + 9I = \begin{bmatrix} -6 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 4 \\ 2 & 8 & -3 \end{bmatrix}$$

हल : दिया है,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ तथा } I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} 1\times1+(-2)\times2+3\times(-3) & 1\times(-2)+(-2\times3)+3\times1 & 1\times3+(-2)\times(-1)+3\times2 \\ 2\times1+3\times2+(-1)(-3) & 2\times(-2)+3\times3+(-1)\times1 & 2\times3+3\times(-1)+(-1)\times2 \\ -3\times1+1\times2+2\times(-3) & -3\times(-2)+1\times3+2\times1 & -3\times3+1\times(-1)+2\times2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-4-9 & -2-6+3 & 3+2+6 \\ 2+6+3 & -4+9-1 & 6-3-2 \\ -3+2-6 & 6+3+2 & -9-1+4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -12 & -5 & 11 \\ 11 & 4 & 1 \\ -7 & 11 & -6 \end{bmatrix}$$

$\therefore A^2 - 3A + 9I$

$$= \begin{bmatrix} -12 & -5 & 11 \\ 11 & 4 & 1 \\ -7 & 11 & -6 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix} + 9\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -12 & -5 & 11 \\ 11 & 4 & 1 \\ -7 & 11 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 6 & -9 \\ -6 & -9 & 3 \\ 9 & -3 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -12-3+9 & -5+6+0 & 11-9+0 \\ 11-6+0 & 4-9+9 & 1+3+0 \\ -7+9+0 & 11-3+0 & -6-6+9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -6 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 4 \\ 2 & 8 & -3 \end{bmatrix}$$

= R.H.S. **इति सिद्धम्।**

प्रश्न 10. यदि

$$[a \quad 4 \quad 1]\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

जहाँ 0 शून्य आव्यूह है, तो a का मान ज्ञात कीजिए।

हल :

$$[a \quad 4 \quad 1]\begin{bmatrix}2 & 1 & 2\\1 & 0 & 2\\0 & 2 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\4\\1\end{bmatrix}=[0 \quad 0 \quad 0]$$

$$[2a+4\times1+1\times0 \quad 1\times a+4\times0+1\times2 \quad 2a+4\times2+1\times-4]\begin{bmatrix}a\\4\\1\end{bmatrix}=[0 \quad 0 \quad 0]$$

$$[2a+4 \quad a+2 \quad 2a+8-4]\begin{bmatrix}a\\4\\1\end{bmatrix}=[0 \quad 0 \quad 0]$$

$\Rightarrow 2a^2 + 10a + 12 = 0$

$\Rightarrow a^2 + 50 + 6 = 0$

$\Rightarrow a^2 + 2a + 3a + b = 0$

$\Rightarrow a(a + 2) + 3(a + 2) = 0$

$\Rightarrow (a + 2)(a + 3) = 0$

$\Rightarrow a + 2 = 0, a + 3 = 0$

$\Rightarrow a = -2, a = -3$

अत: $a = -2, -3$.

प्रश्न 11. यदि

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1\\2 & -1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}a & 1\\b & -1\end{bmatrix}$$

तथा $(A + B)^2 = A^2 + B^2$ हो, तो a व b के मान ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} a & 1 \\ b & -1 \end{bmatrix}$$

$$(A + B) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & +1 \\ b & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1+a) & 0 \\ (2+b) & -2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad (A + B)^2 = \begin{bmatrix} (a+1) & +0 \\ (b+2) & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (a+1) & 0 \\ (b+2) & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (a+1)(a+1) + 0 \times (b+2) & (a+1) \times 0 + 0 \times -2 \\ (b+2)(a+1) + (-2)(b+2) & (b+2) \times 0 + (-2) \times (-2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^2 + 2a + 1 & 0 \\ ab + 2a + b + 2 - 4 - 2b & 4 \end{bmatrix}$$

$$(A + B)^2 = \begin{bmatrix} a^2 + 2a + 1 & 0 \\ ab + 2a - b - 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad \text{...(i)}$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \times 1 + 2 \times -1 & 1 \times -1 + (-1)(-1) \\ 2 \times 1 + 2 \times -1 & 2 \times -1 + (-1)(-1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 - 2 & -1 + 1 \\ 2 - 2 & -2 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B^2 = B \cdot B = \begin{bmatrix} a & 1 \\ b & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 1 \\ b & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^2 + b & a \times 1 + 1 \times -1 \\ b \times a - b \times 1 & b \times 1 + (-1)(-1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^2 + b & a - 1 \\ ab - b & b + 1 \end{bmatrix}$$

$$(A+B)^2 = A^2 + B^2$$

$$\begin{bmatrix} a^2+2a+1 & 0 \\ ab+2a-b-2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a^2+b & a-1 \\ ab-b & b+1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a^2+2a+1 & 0 \\ ab+2a-b-2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+b-1 & a-1 \\ ab-b & b \end{bmatrix}$$

संगत पदों की तुलना करने पर

$\Rightarrow a^2 + 2a + 1 = a^2 + b - 1$

$\Rightarrow 2a = b - 2 = 4 - 2 = 2$

$\Rightarrow a = 1, b = 4.$

प्रश्न 12. यदि

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\tan\frac{x}{2} \\ \tan\frac{x}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

तथा I, 2 x 2 क्रम का इकाई आव्यूह है, तो सिद्ध कीजिए कि

$$I + A = (I - A)\begin{bmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{bmatrix}$$

हल

माना $\tan\frac{x}{2} = t$

$$\therefore \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{L.H.S.} = I + A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -t \\ t & 1 \end{bmatrix}$$

$$\because \quad \cos x = \frac{1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

और
$$\sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\text{R.H.S.} = (I - A)\begin{bmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1-t^2}{1+t^2} & \frac{-2t}{1+t^2} \\ \frac{2t}{1+t^2} & \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1-t^2}{1+t^2} & \frac{-2t}{1+t^2} \\ \frac{2t}{1+t^2} & \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1-t^2+2t^2}{1+t^2} & \frac{-2t+t(1-t^2)}{1+t^2} \\ \frac{-t(1-t^2)+2t}{1+t^2} & \frac{2t^2+1-t^2}{1+t^2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -t \\ t & 1 \end{bmatrix} = \text{L.H.S.}$$ **इति सिद्धम्।**

प्रश्न 13. यदि

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

हो, तो K का मान ज्ञात कीजिए, जहाँ $A^2 = 8A + KI$

हल : दिया है, $A^2 = 8A + KI$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} = 8\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} + k\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1\times1+0\times(-1) & 1\times0+0\times7 \\ -1\times1+7\times(-1) & -1\times0+7\times7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ -8 & 56 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1+0 & 0+0 \\ -1-7 & 0+49 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8+k & 0 \\ -8-0 & 56+k \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -8 & 49 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8+k & 0 \\ -8 & 56+k \end{bmatrix}$$

दोनों पक्षों में a_{11} की तुलना करने पर।
$\Rightarrow 8 + k = 1 \Rightarrow k = 1 - 8 = -7$

प्रश्न 14. यदि

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 \\ -2 & -10 & 6 \\ 13 & 20 & -9 \end{bmatrix}$$

हो, तो A का मान ज्ञात कीजिए|

हल :

माना आव्यूह

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 \\ -2 & -10 & 6 \\ 13 & 20 & -9 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 \\ -2 & -10 & 6 \\ 13 & 20 & -9 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 2a_{11} - a_{21} & 2a_{12} - a_{22} & 2a_{13} - a_{23} \\ -3a_{11} + 4a_{21} & -3a_{12} + 4a_{22} & -3a_{13} + 4a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 \\ -2 & -10 & 6 \\ 13 & 20 & -9 \end{bmatrix}$$

दोनों पक्षों के संगत अवयवों की तुलना से,
$a_{11} = 1, a_{12} = -4, a_{13} = 3$
$2a_{11} - a_{21} = -2 \Rightarrow 2 \times 1 - a_{21} = -2 \Rightarrow a_{21} = 4$
$2a_{12} - a_{22} = -10 \Rightarrow 2(-4) - a_{22} = -10 \Rightarrow a_{22} = 2$
$2a_{13} - a_{23} = 6 \Rightarrow 2(3) - a_{23} = 6 \Rightarrow a_{23} = 0$
अत: आव्यूह

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

प्रश्न 15. यदि

$$A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

ता सिद्ध काजी

$$A^n = \begin{bmatrix} \cos n\alpha & \sin n\alpha \\ -\sin n\alpha & \cos n\alpha \end{bmatrix}$$

जहा n धन पूणकि है।

हल : दिया है,

$$A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^2 = A.A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2 - \sin^2\alpha & \cos\alpha\sin\alpha + \sin\alpha\cos\alpha \\ -\cos\alpha\sin\alpha - \cos\alpha\cos\alpha & -\sin^2\alpha + \cos^2\alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ -\sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ -\sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos^2\alpha & \sin^2\alpha \\ -\sin\alpha & \cos^2\alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos 2\alpha\cos\alpha - \sin 2\alpha\sin\alpha & \cos 2\alpha\sin\alpha + \sin 2\alpha\cos\alpha \\ -\sin 2\alpha\cos\alpha - \cos 2\alpha\sin\alpha & -\sin 2\alpha\sin\alpha + \cos 2\alpha\sin\alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos 3\alpha & \sin 3\alpha \\ -\sin 3\alpha & \cos 3\alpha \end{bmatrix}$$

$$A^4 = A^3 A = \begin{bmatrix} \cos 3\alpha & \sin 3\alpha \\ -\sin 3\alpha & \cos 3\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos 3\alpha\cos\alpha - \sin 3\alpha\sin\alpha & \cos 3\alpha\sin\alpha + \sin 3\alpha\cos\alpha \\ -\sin 3\alpha\cos\alpha - \cos 3\alpha\sin\alpha & -\sin 3\alpha\sin\alpha + \cos 3\alpha\sin\alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos 4\alpha & \sin 4\alpha \\ -\sin 4\alpha & \cos 4\alpha \end{bmatrix}$$

इसी प्रकार सिद्ध कर सकते हैं कि

$$A^n = \begin{bmatrix} \cos n\alpha & \sin n\alpha \\ -\sin n\alpha & \cos n\alpha \end{bmatrix}$$ इति सिद्धम्।

Miscellaneous Exercise

प्रश्न 1. यदि आव्यूह

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

हो, तो A^2 ज्ञात कीजिए।

हलः

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+1 & -1+1 \\ -1+1 & 1+1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

प्रश्न 2. यदि

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

हो, तो (A – 2I). (A – 3I) ज्ञात कीजिए।

हलः

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4-2 & 2-0 \\ -1-0 & 1-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A - 3I = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4+3 & 2-0 \\ -1-0 & 1-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \qquad \ldots(i)$$

$$\therefore \quad (A-2I)(A-3I) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2\times1 + 2\times(-1) & 2\times2 + 2\times(-2) \\ -1\times1 + (-1)\times(-1) & -1\times2 + (-1)\times(-2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2-2 & 4-4 \\ -1+1 & -2+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= 0$$

प्रश्न 3. यदि

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \; B = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

हो, तो AB ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times5+2\times-1 \\ -3\times5+4\times-1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5-2 \\ -15+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -11 \end{bmatrix}$$

प्रश्न 4. यदि

$$A = \begin{bmatrix} -i & o \\ o & i \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} o & i \\ i & o \end{bmatrix}$$

हो, तो BA ज्ञात कीजिए जहाँ i = √-1

हल :

दिया है,

$$A = \begin{bmatrix} -i & o \\ o & i \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} o & i \\ i & o \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} o & i \\ i & o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i & o \\ o & i \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0\times-i+i\times0 & 0\times0+i\times i \\ i\times-i+0\times0 & i\times0+0\times i \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & i^2 \\ -i^2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

प्रश्न 5. यदि

$$A - B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

तथा

$$A + B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -7 \\ -1 & 1 & 4 \\ 11 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

हो, तो आव्यूह A तथा B ज्ञात कीजिए।

हलः दिया है,

$$A + B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -7 \\ -1 & 1 & 4 \\ 11 & 8 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{...(i)}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{...(ii)}$$

(i) और (ii) को जोड़ने पर

$$2A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -7 \\ -1 & 1 & 4 \\ 11 & 8 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3+1 & 5+1 & -7-1 \\ -1+1 & 1+1 & 4+0 \\ 11+1 & 8+0 & 0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & -8 \\ 0 & 2 & 4 \\ 12 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \qquad A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & 6 & -8 \\ 0 & 2 & 4 \\ 12 & 8 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

(i) और (ii) को घटाने पर

$$2B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -7 \\ -1 & 1 & 4 \\ 11 & 8 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3-1 & 5-1 & -7+1 \\ -1+(-1) & 1+(-1) & 4-0 \\ 11+(-1) & 8-0 & 0-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ -2 & 0 & 4 \\ 12 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ -2 & 0 & 4 \\ 10 & 8 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

प्रश्न 6. यदि

$$\begin{bmatrix} -2 & -3 & 1 \\ -y-x & -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+2 & -3 & 1 \\ 5 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

हो, तो x तथा y ज्ञात कीजिए।

हल : हल : संगत अवयवों की तुलना करने पर

$x + 2 = -2$

$\therefore x = -4$

$-y - x = 5 \Rightarrow y = -x - 5 = -(-4) - 5$

$= 4 - 5 = -1$

अतः $= -4, y = -1$

प्रश्न 7. आव्यूह A का क्रम 3 x 4 है तथा B इस प्रकार का आव्यूह है कि $A^T B$ एवं AB^T दोनों ही परिभाषित है तो B का क्रम लिखिए।

हल :

$\therefore$ A का क्रम 3 x 4 है।

$\therefore$ A^T का क्रम 4 x 3 होगा

परन्तु A^TB तथा AB^T परिभाषित है

अत: B का क्रम भी 3 x 4 ही होगा।

प्रश्न 8. यदि

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & 7 & 4 \\ 1 & -x & -3 \end{bmatrix}$$

एक सममित आव्यूह है तो x का मान ज्ञात कीजिए।

हल :

दिया है,

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & 7 & 4 \\ 1 & -x & -3 \end{bmatrix}$$

एक सममित आव्यूह है,

अत: $a_{ij} = a_{ji}$, की तुलना करने पर

$a_{32} = a_{23} \Rightarrow -x = 4$

$\therefore x = -4$

प्रश्न 9. एक 3 x 3 क्रम को आव्यूह B = [b_{ij}] लिखिए जिनके अवयव b_{ij} = (i) (j) हैं।

हल : $B_{11} = 1 \times 1 = 1$

$B_{12} = 1 \times 2 = 2$

$B_{13} = 1 \times 3 = 3$

$B_{21} = 2 \times 1 = 2.$

$B_{22} = 2 \times 1 = 4.$

$B_{23} = 2 \times 3 = 6$

$B_{31} = 3 \times 1 = 3$

$B_{32} = 3 \times 2 = 6$

$B_{33} = 3 \times 3 = 9$

$$B_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

प्रश्न 10. यदि

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -4 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

तथा

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -5 & -6 \end{bmatrix}$$

तो A + B^T ज्ञात कीजिए।

हल :

दिया है,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -5 & -6 \end{bmatrix}$$

$$B^T = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -5 \\ 2 & 4 & -6 \end{bmatrix}$$

$$A + B^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 3 & -5 \\ 2 & 4 & -6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2+(-1) & 3+3 & -4+(-5) \\ -1+2 & 2+4 & 3+(-6) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 6 & -9 \\ 1 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

प्रश्न 11. आव्यूह A को सममित व विषम सममित आव्यूह के योग के रूप में व्यक्त कीजिए, जहाँ

$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ है।

हल :

दिया है, $A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \therefore A^T = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

अत: $A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T)$

अत: $A + A^T = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 6+6 & 2+5 \\ 5+2 & 4+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 7 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \frac{1}{2}(A + A^T) = \frac{1}{2} = \begin{bmatrix} 12 & 7 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & \frac{7}{2} \\ \frac{7}{2} & 4 \end{bmatrix} \quad ...(1)$$

$$A - A^T = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6-6 & 2-5 \\ 5-2 & 4-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ +3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2}(A - A^T) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

अत: $A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T)$

$$= \begin{bmatrix} 6 & \frac{7}{2} \\ \frac{7}{2} & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

(सममित) (विषम सममित)

प्रश्न 12. यदि

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

हो तो सिद्ध कीजिए ।

(i) $(A^T)^T = A$

(ii) $A + A^T$ एक सममित आव्यूह है।

(ii) $A - A^T$ एक विषम सममित आव्यूह है।

(iv) AA^T तथा A^TA सममित आव्यूह है।

हल : (i) $(A^T)^T = A$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(A^T) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(A^T)^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = A$$

इति सिद्धम्।

(ii) $A + A^T$ एक सममित आव्यूह है।

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad A + A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2+2 & 1+(-1) & 1+0 \\ -1+1 & 0+0 & 2+1 \\ 0+1 & 1+2 & 3+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$(A + A^T) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\therefore (A + A^T) = A + A^T$$

अत: A + A^T एक सममित आव्यूह है।

इति सिद्धम्।

(iii)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \; A^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A - A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2-2 & 1-(1-) & 1-0 \\ -1-1 & 0-0 & 2-1 \\ 0-1 & 1-2 & 3-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore (A + A^T)^T = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= -(A + A^T)$$

$$\therefore \quad (A + B^T)^T = -(A - A^T)$$

अत: A − A^T सममित आव्यूह है।

इति सिद्धम

(iv)

$$AA^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2\times2+1\times1+1\times1 & 2\times-1+1\times0+2\times1 \\ -1\times2+0\times1+2\times1 & -1\times-1+0\times0+2\times2 \\ 0\times2+1\times1+3\times1 & -1\times0+1\times0+2\times3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} 2\times0+1\times1+1\times3 \\ -1\times0+0\times1+2\times3 \\ 0\times0+1\times1+3\times3 \end{matrix}\Bigg]$$

$$= \begin{bmatrix} 4+1+1 & -2+0+2 & 0+1+3 \\ -2+0+2 & 2+0+4 & 0+0+6 \\ 0+1+3 & 0+0+6 & 0+1+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & 6 \\ 4 & 6 & 10 \end{bmatrix} \quad ...(i)$$

यहाँ $a_{21} = a_{12} = 0$

$a_{31} = a_{13} = 4$

$a_{23} = a_{32} = 6$

अत: $A^T A$ सममित आव्यूह है।

$$A^T A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2\times2+(-1)(-1)+0\times0 & 2\times1+(-1)\times0+0\times1 \\ 1\times2+0\times(-1)+1\times0 & 1\times1+0\times0+1\times1 \\ 1\times2+2\times(-1)+3\times0 & 1\times1+2\times0+3\times1 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 2\times1+(-1)\times2+0\times3 \\ 1\times1+0\times2+1\times3 \\ 1\times1+2\times2+3\times3 \end{matrix}\Bigg]$$

$$= \begin{bmatrix} 4+1+0 & 2+0+0 & 2-2+0 \\ 2+0+0 & 1+0+1 & 1+0+3 \\ 2-2+0 & 1+0+3 & 1+4+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 14 \end{bmatrix}$$

यहाँ $a_{12} = a_{21} = 2$

$a_{13} = a_{31} = 0$

$a_{32} = a_{23} = 4$

अत: A^T A सममित आव्यूह है।

इति सिद्धम

प्रश्न 13. यदि

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

तथा 3A – 2B + C एक अशून्य आव्यूह है तो आव्यूह C लिखिए।

हल :

$$A=\begin{bmatrix}4 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix}$$

अतः 3A − 2B + C = 0

∴ C = 2B − 3A + 0

$$=2\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}4 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-4 & 2\\ 6 & 4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}12 & 6\\ 3 & 9\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-4-12+0 & 2-6+0\\ 6-3+0 & 4-9+0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-16 & -4\\ 3 & -5\end{bmatrix}$$

प्रश्न 14. एक 2×3 क्रम का आव्यूह B= |b$_{ij}$| लिखिए जिसके अवयव है,

$$b_{ij}=\frac{(i+2j)^2}{2}$$

हल : दिया है, B = [b$_{ij}$] जिसके अवयव हैं।

$$b_{ij}=\frac{(i+2j)^2}{2}$$

$$b_{11}=\frac{(1+2\times 1)^2}{2}=\frac{(3)^2}{2}=\frac{9}{2}$$

$$b_{12}=\frac{(1+2\times 2)^2}{2}=\frac{(5)^2}{2}=\frac{25}{2}$$

$$b_{13}=\frac{(1+2\times 3)^2}{2}=\frac{(7)^2}{2}=\frac{49}{2}$$

$$b_{21}=\frac{(2+2\times 1)^2}{2}=\frac{(4)^2}{2}=\frac{16}{2}$$

$$b_{22}=\frac{(2+2\times 2)^2}{2}=\frac{(6)^2}{2}=\frac{36}{2}$$

$$b_{23} = \frac{(2+2\times 3)^2}{2} = \frac{(8)^2}{2} = \frac{64}{2}$$

अतः वांछित आव्यूह $B_{ij} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \frac{9}{2} & \frac{25}{2} & \frac{49}{2} \\ 8 & 18 & 32 \end{bmatrix}$$

प्रश्न 15. यदि

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix};\ B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 7 \end{bmatrix}\ C = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

हों, तो ABC का प्रथम पंक्ति के अवयव ज्ञात कीजिए।

हल :

$$ABC = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1\times 1+0\times 0+1\times 0 & -1\times 0+0\times -1+1\times 5 & -1\times 0+0\times 2+1\times 7 \\ 2\times 1+3\times 0+(-2)\times 0 & 2\times 0+3\times -1+(-2)\times 5 & 2\times 0+3\times 2-2\times 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 5 & 7 \\ 2 & -13 & -8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1\times -1+5\times 0+7\times 1 \\ 2\times -1+(-13)\times 0+(-8)\times 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+0+7 \\ -2+0-8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -10 \end{bmatrix}$$

अतः पहली पंक्ति का अवयव 8 है।

प्रश्न 16. यदि आव्यूह

$$A=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$

हो तो AA^T ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है,

$$A=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix},\quad A^T=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad A\cdot A^T=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos^2\theta+\sin^2\theta & -\sin\theta\cos\theta+\sin\theta\cos\theta\\ -\sin\theta\cos\theta+\cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta+\cos^2\theta\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=I_2.$$

प्रश्न 17. यदि

$$[1\ \ x\ \ 1]\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 3 & 2 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\end{bmatrix}=0$$

तो x का मान ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है,

$$[1\ x\ 1]\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 3 & 2 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\end{bmatrix}=0$$

$$\Rightarrow [1\times 1+x\times 4+1\times 3\quad 1\times 2+5x+1\times 2\quad 3\times 1+6x+1\times 5]\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\end{bmatrix}=0$$

$$\Rightarrow \quad [1+4x+3\quad 2+5x+2\quad 3+6x+5]\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\end{bmatrix}=0$$

$$\Rightarrow \quad [4x+4 \quad 5x+2 \quad 6x+8]\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad (4x+4)\times 1 + (5x+4)\times 2 + (6x+8)\times 3 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 4x + 4 + 10x + 8 + 18x + 24 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 32x + 36 = 0 \quad \Rightarrow \quad 32x = -36$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{-9}{8}$$

प्रश्न 18. यदि

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

हो तो सिद्ध कीजिए कि

$B^2 - (a + d)B = (bc - ad)I_2$, जहाँ

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

हल :

दिया है,

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \; I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad B^2 = B \cdot B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{bmatrix}$$

$$\text{L.H.S.} = B^2 - (a+d)B$$

$$= \begin{bmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{bmatrix} - (a+d)\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a(a+d) & b(a+d) \\ c(a+d) & d(a+d) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^2 + bc - a^2 - ad & ab + bd - ba - bd \\ ac + cd - ac - cd & bc + d^2 - ad - d^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} bc - ad & 0 \\ 0 & bc - ad \end{bmatrix}$$

$$= (bc - ad)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

= (bc − ad)I_2
= R.H.S.
इति सिद्धम्।

प्रश्न 19. यदि

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

हो तो (aA + bB) (aA − bB) को आव्यूह के रूप में ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

अत: $aA + bB = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \qquad \ldots(i)$$

$$aA - bB = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & -b \\ b & +a \end{bmatrix} \qquad \ldots(ii)$$

$\therefore (aA + bB)(aA - bB)$

$$= \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^2+b^2 & -ab+ab \\ -ab+ab & b^2+a^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^2+b^2 & 0 \\ 0 & a^2+b^2 \end{bmatrix}$$

$$= (a^2+b^2) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= (a^2+b^2)A.$$

प्रश्न 20. यदि

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

हो, तो सिद्ध कीजिए कि

$(A - B)^2 \neq A^2 - 2AB + B^2$.

हल : दिया है,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ तथा } B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad (A-B) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad (A-B)^2 = (A-B)(A-B)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1\times1+(-3)\times0 & 1\times-3+(-3)\times1 \\ 0\times1+1\times0 & 0\times-3+1\times1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \ldots(i)$$

$A^2 - 2AB + B^2$

$= A \,.\, A - 2 \,.\, A \,.\, B + B \,.\, B$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2\times2+1\times-1 & 2\times1+1\times2 \\ -1\times2+2\times-1 & -1\times1+2\times2 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 2\times1+1\times-1 & 2\times4+1\times1 \\ -1\times1+2\times-1 & -1\times4+2\times1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1\times1+4\times-1 & 1\times4+4\times1 \\ -1\times1+1\times-1 & -1\times4+1\times1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4-1 & 2+2 \\ -2-2 & -1+4 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 2-1 & 8+1 \\ -1+-2 & -4+2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1-4 & 4+4 \\ -1-1 & -4+1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 9 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 8 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 18 \\ -6 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 8 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3-2-3 & 4-18+8 \\ -4+6-2 & 3+4-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -6 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad \ldots\text{(i)}$$

समीकरण (i) और (ii) से

$(A - B)^2 \neq A^2 - 2AB + B^2$.

इति सिद्धम्।

प्रश्न 21. यदि

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

तो k का मान ज्ञात कीजिए, जहाँ $A^2 = kA - 2I_2$

हल : दिया है,

दिया है, $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$

तथा $A^2 = kA - 2I_2$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3\times3+(-2)\times4 & 3\times-2+(-2)(-2) \\ 4\times3+(-2)\times4 & 4\times-2+(-2)(-2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9-8 & -6+4 \\ 12-8 & -8+4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$$

अत: $A^2 = kA - 2I_2$ से,

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3k & -2k \\ 4k & -2k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3k-2 & -2k-0 \\ 4k-0 & -2k-2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3k-2 & -2k \\ 4k & -2k-2 \end{bmatrix}$$

संगत अवयवों की तुलना करने पर

$3k - 2 = 1$ से,

$$3k = 3 \Rightarrow k = \frac{3}{3} \Rightarrow k = 1.$$

प्रश्न 22.यदि

$$A = \begin{bmatrix} i & o \\ o & i \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} o & i \\ i & o \end{bmatrix}$$

तथा $i = \sqrt{-1}$ निम्नलिखित सम्बन्धों का सत्यापन कीजिए

(i) $A^2 = B^2 = C^2 = I_2$

(ii) $AB = -BA = -C$

हल :

(i) $A^2 = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} i^2+0 & 0+0 \\ 0+0 & 0+i^2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ $[\because i = \sqrt{-1}]$ ...(i)

$B^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$B^2 = \begin{bmatrix} 0\times 0+1\times -1 & 0\times -1+(-1)\times 0 \\ 1\times 0+0\times 1 & 1\times -1+0\times 0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ...(ii)

$C^2 = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 0\times 0+i\times i & 0\times i+i\times 0 \\ i\times 0+0\times i & i\times i+0\times 0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} i^2 & 0 \\ 0 & i^2 \end{bmatrix}$ $\because i = \sqrt{-1}$

$= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ...(iii)

$-I_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ...(iv)

समीकरण (i), (ii) और (iii) से

$A^2 = B^2 = C^2 = -I_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ इति सिद्धम्।

(ii) $$AB = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} i\times 0+0\times i & i\times -1+0\times 0 \\ 0\times 0+i\times -1 & 0\times -1+i\times 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix} \quad \text{...(i)}$$

$$-BA = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$$

$$= -\begin{bmatrix} 0\times i+(-1)\times 0 & 0\times 0+(-1)i \\ 1\times i+0\times 0 & 1\times 0+0\times i \end{bmatrix}$$

$$= -\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix} \quad \text{...(ii)}$$

$$-C = -\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix} \quad \text{...(iii)}$$

समीकरण (i), (ii) और (iii) से

$$AB = -BA = -C = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix}$$ इति सिद्धम्।

प्रश्न 23. याद

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

तथा $f(A) = A^2 - 5A + 7I$ हो, तो $f(A)$ ज्ञात कीजिए।

हल :

दिया है,

दिया है, $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

$\therefore \quad f(A) = A^2 - 5A + 7I$

$= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + 7\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 3\times3+1\times-1 & 3\times1+1\times2 \\ 3\times-1+2\times-1 & -1\times1+2\times2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 15 & 5 \\ -5 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 9-1 & 3+2 \\ -3-2 & -1+4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 15 & 5 \\ -5 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -15 & -5 \\ 5 & -10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 8-15+7 & 5-5+0 \\ -5+5+0 & 3-10+7 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$= 0$

प्रश्न 24. सिद्ध कीजिए कि

$$\begin{bmatrix} \cos^2\alpha & \cos\alpha\sin\alpha \\ \cos\alpha\sin\alpha & \sin^2\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos^2\beta & \cos\beta\sin\beta \\ \cos\beta\sin\beta & \sin^2\beta \end{bmatrix} = 0$$

जबकि $\alpha - \beta = (2m-1)\frac{\pi}{2}$, $m \in N$

हल : L.H.S. $= \begin{bmatrix} \cos^2\alpha & \cos\alpha\sin\alpha \\ \cos\alpha\sin\alpha & \sin^2\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos^2\beta & \cos\beta\sin\beta \\ \cos\beta\sin\beta & \sin^2\beta \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2\alpha\cos^2\beta + \cos\alpha\sin\alpha\cos\beta\sin\beta & \cos^2\alpha\cos\beta\sin\beta + \cos\alpha\sin\alpha\sin^2\beta \\ \cos^2\beta\cos\alpha\sin\alpha + \sin^2\alpha\cos\beta\sin\beta & \cos\alpha\sin\alpha\cos\beta\sin\beta + \sin^2\alpha\sin^2\beta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta) & \cos\alpha\sin\beta(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta) \\ \cos\beta\sin\alpha(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta) & \sin\alpha\sin\beta(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta) \end{bmatrix}$$

$$= (\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta) \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta & \cos\alpha\sin\beta \\ \cos\beta\sin\alpha & \sin\alpha\sin\beta \end{bmatrix}$$

$= \cos(\alpha - \beta)\,[\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\sin\beta]$
$= \cos(\alpha - \beta) \times 0$
$= 0$
= R.H.S.