

विद्युत धारिता

पाठ्य पुस्तक के प्रश्न एवं उत्तर

बहुचयनात्मक प्रश्न

प्रश्न 1. किसी गोलीय चालक की धारिता का मान समानुपाती होता है

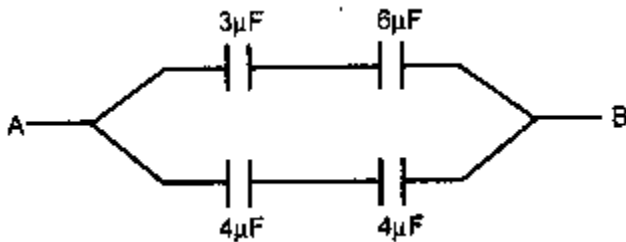
- (अ) $C \propto R$
- (ब) $C \propto R^2$
- (स) $C \propto R^{-2}$
- (द) $C \propto R^{-1}$

उत्तर: (अ) $C \propto R$

गोलीय चालक की धारिता $C = 2\pi\epsilon_0 R$

$$C \propto R$$

प्रश्न 2. दिये गये चित्र में बिन्दु A तथा B के मध्य तुल्य धारिता का मान होगा



- (अ) $2\mu F$
- (ब) $4\mu F$
- (स) $25\mu F$
- (द) $3\mu F$

उत्तर: (ब) $4\mu F$

$3\mu F$ तथा $6\mu F$ श्रेणीक्रम में जोड़ने पर—

$$C' = \frac{3\mu F \times 6\mu F}{9\mu F} \\ = 2\mu F$$

$4\mu\text{F}$ तथा $4\mu\text{F}$ को श्रेणीक्रम में जोड़ने पर—

$$C'' = \frac{4\mu\text{F} \times 4\mu\text{F}}{8\mu\text{F}}$$

$$= 2\mu\text{F}$$

C' तथा C'' को समान्तर क्रम में जोड़ने पर—

$$C_{eq} = C' + C''$$

$$= 2\mu\text{F} + 2\mu\text{F}$$

$$= 4\mu\text{F}$$

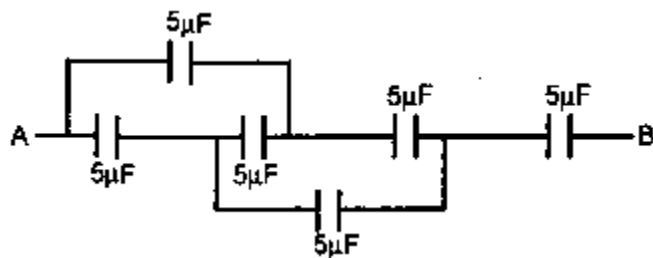
प्रश्न 3. एक आवेशित संधारित्र की दोनों प्लेटों को एक तार से जोड़ दिया जाये तब

- (अ) विभव अनन्त हो जायेगा।
- (ब) आवेश अनन्त हो जायेगा
- (स) आवेश पूर्व मान का दुगुना हो जायेगा
- (द) संधारित्र निरावेशित हो जायेगा।

उत्तर: (द) संधारित्र निरावेशित हो जायेगा।

संधारित्र की दोनों प्लेटों को तार से जोड़ने पर चालन के कारण संधारित्र निरावेशित हो जायेगा।

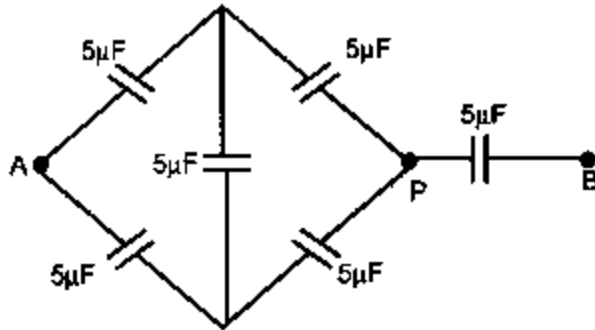
प्रश्न 4. दिये गये चित्र में संयोजित संधारित्रों के लिये बिन्दु A तथा B के मध्य तुल्य धारिता का मान होगा—



- (अ) $5\mu\text{F}$
- (ब) $2.5\mu\text{F}$
- (स) $10\mu\text{F}$
- (द) $20\mu\text{F}$

उत्तर: (ब) $2.5\mu\text{F}$

चित्र को व्यवस्थित करने पर—



AP के मध्य तुल्य धारिता $C' = 5\mu F$

C' तथा $5\mu F$ को श्रेणीक्रम में जोड़ने पर—

$$C'' = \frac{5\mu F \times 5\mu F}{10\mu F} = 2.5\mu F$$

प्रश्न 5. दो गोलाकार चालकों की त्रिज्याओं का अनुपात 1 : 2 है, तो उनकी धारिताओं का अनुपात होगा

- (अ) 4 : 1
- (ब) 1 : 4
- (स) 1 : 2
- (द) 2 : 1

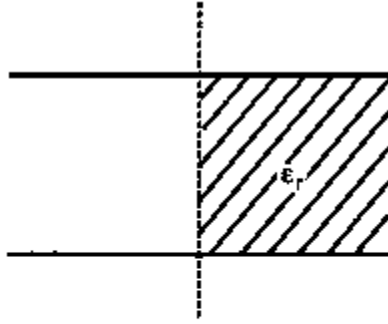
उत्तर: (ब) 1 : 4

गोलीय चालक के लिये $C \propto R$

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{1}{2}$$

प्रश्न 6. चित्र के अनुसार एक समान्तर प्लेट संधारित्र की प्लेटों के मध्य आधे भाग में किसी परावैद्युत पदार्थ जिसका परावैद्युतांक ϵ_r है, सरकाया जाता है। यदि संधारित्र की प्रारम्भिक धारिता C हो तब

नवीन धारिता का मान होगा।



- (अ) $\frac{C}{2} [1 + \epsilon_r]$ (ब) $\frac{1}{2} \cdot \frac{C}{(\epsilon_r + 1)}$
 (स) $\frac{(1 + \epsilon_r)}{2C}$ (द) $C(1 + \epsilon_r)$.

उत्तर: (अ)

$$C_1 = \frac{\epsilon_0 A}{2d}$$

$$C_2 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r A}{2d}$$

∴ अनुप्रस्थ काट परिवर्तित है इसलिये दोनों समान्तर क्रम में जुड़ेंगे।

$$C_{eq} = C_1 + C_2 = \frac{\epsilon_0 A}{2d} [1 + \epsilon_r]$$

$$\therefore C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

$$\therefore C_{eq} = \frac{C}{2} [1 + \epsilon_r]$$

प्रश्न 7. समान त्रिज्या तथा समान आवेश की पारे की आठ बूंदें परस्पर मिलकर एक बड़ी बूंद बनाती हैं। बड़ी बूंद की धारिता प्रत्येक छोटी बूंद की धारिता की तुलना में होगी

- (अ) 2 गुना
 (ब) 8 गुना
 (स) 4 गुना
 (द) 16 गुना

उत्तर: (अ) 2 गुना

बड़ी बूंद का आयतन = $8 \times$ छोटी बूंद का आयतन

$$\frac{4}{3} \pi R^3 = 8 \times \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$R = 2r$$

छोटी बूंद की धारिता $G = 4\pi\epsilon_0 r$

तथा बड़ी बूंद की त्रिज्या $C_2 = 4\pi\epsilon_0 R$

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{r}{R} = \frac{r}{2r}$$

अर्थात् दोगुनी हो जायेगी

प्रश्न 8. एक संधारित्र की धारिता C है। इसे v विभवान्तर तक आवेशित किया गया है। यदि अब इसे प्रतिरोध से सम्बन्धित कर दिया जाये तब ऊर्जा क्षय की मात्रा होगी—

(अ) CV^2

(ब) $\frac{1}{2} CV^2$

(स) $\frac{1}{3} CV^2$

(द) $\frac{1}{2} QV^2$

उत्तर: (ब) $\frac{1}{2} CV^2$

ऊर्जा क्षय = संधारित्र में संचित ऊर्जा

$$\frac{1}{2} CV^2$$

प्रश्न 9. यदि एक संधारित्र को आवेश Q देने पर संग्रहीत ऊर्जा w है। आवेश दुगुना करने पर संग्रहीत ऊर्जा होगी

(अ) $2w$

(ब) $4w$

(स) $8w$

(द) $\frac{1}{2} w$

उत्तर: (ब) 4W

$$\text{संधारित्र में संचित ऊर्जा (U)} = \frac{q^2}{2C}$$

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{q_1^2}{q_2^2}$$

$$U_1 = W, q_1 = q$$

$$U_2 = ?, q_2 = 2q$$

$$\frac{W}{U_2} = \frac{q}{4q^2}$$

$$U_2 = 4W$$

प्रश्न 10. $3\mu\text{F}$ व $5\mu\text{F}$ के दो गोलों को क्रमशः 300V तथा 500V तक आवेशित कर जोड़ दिया जाता है। उभयनिष्ठ विभव होगा—

(अ) 400V

(ब) 375V

(स) 425V

(द) 350V

उत्तर: (स) 425V

$$\begin{aligned}\text{उभयनिष्ठ विभव (V)} &= \frac{q_1 + q_2}{C_1 + C_2} = \frac{C_1 V_1 + C_2 V_2}{C_1 + C_2} \\ &= \frac{5\mu\text{F} \times 500 + 3\mu\text{F} \times 300}{8\mu\text{F}} \\ &= \frac{2500 + 900}{8} = \frac{3400}{8} \\ &= 425\text{V}\end{aligned}$$

प्रश्न 11. एक आवेशित समान्तर प्लेट संधारित्र की प्लेटों के मध्य स्थितिज ऊर्जा U_0 है यदि एक ϵ_r परावैद्युतांक वाली पट्टिका मध्य में रख दी जाये तब नवीन स्थितिज ऊर्जा होगी—

(अ) $\frac{U_0}{\epsilon_r}$

(ब) $U_0 \epsilon_r^2$

(स) $\frac{U_0}{\epsilon_r^2}$

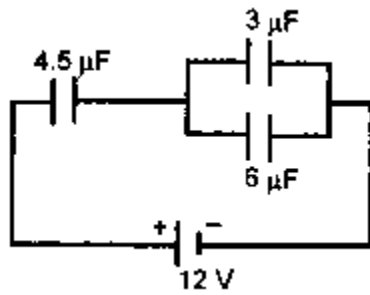
(द) U_0

उत्तर: (अ) $\frac{U_0}{\epsilon_r}$

ऊर्जा ϵ_r गुना कम हो जायेगी।

$$\therefore U = \frac{U_0}{\epsilon_r}$$

प्रश्न 12. चित्र में दिखाये गये परिपथ में $4.5\mu\text{F}$ वाले संधारित्र पर विभवान्तर है।



(अ) $\frac{8}{3}\text{V}$

(ब) 4V

(स) 6V

(द) 8V

उत्तर: (द) 8V

$6\mu\text{F}$ तथा $3\mu\text{F}$ को समान्तर क्रम में जोड़ने पर—

$$C_1 = 6\mu\text{F} + 3\mu\text{F} = 9\mu\text{F}$$

C_1 तथा $4.5\mu\text{F}$ को श्रेणीक्रम में जोड़ने पर—

$$C'' = \frac{C_1 \times C_2}{C_1 + C_2} = \frac{9 \times 4.5}{9 + 4.5} \mu\text{F} = \frac{9 \times 4.5}{13.5} \mu\text{F} \\ = 3\mu\text{F}$$

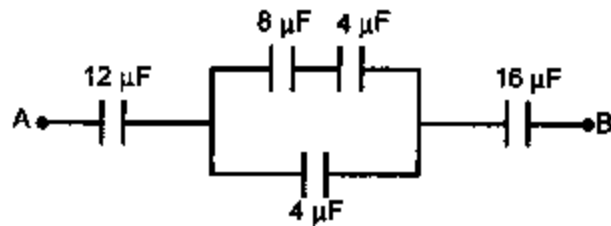
परिपथ में कुल आवेश $q = CV = 3\mu\text{F} \times 12 = 36\mu\text{C}$,

चूँकि श्रेणीक्रम में आवेश नियत होता है।

$$q = CV$$

$$\therefore V = \frac{q}{C} = \frac{36\mu\text{C}}{4.5\mu\text{F}} = 8\text{V}.$$

प्रश्न 13. चित्र में दिखाये गये परिपथ में A व B के मध्य तुल्य धारिता होगी



- (अ) 1F
 (ब) 9F
 (स) 1.5F
 (द) 1/3F

उत्तर: (अ) 1F

8μF तथा 4μF को श्रेणीक्रम में जोड़ने पर—

$$C' = \frac{8\mu F \times 4\mu F}{12\mu F} = \frac{8\mu F}{3}$$

C' तथा 4μF को समान्तर क्रम में जोड़ने पर—

$$C'' = \frac{8\mu F}{3} + 4\mu F = \frac{8\mu F \times 12\mu F}{3} = \frac{20\mu F}{3}$$

C'' तथा 12μF तथा 16μF को श्रेणीक्रम में जोड़ने पर—

$$\begin{aligned} \frac{1}{C_{eq}} &= \frac{1}{C''} + \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \\ &= \frac{3}{20\mu F} + \frac{1}{12\mu F} + \frac{1}{16\mu F} \end{aligned}$$

$$= \frac{3 \times 12 \times 16 + 20 \times 16 + 12 \times 20}{20\mu F \times 12 \times 16}$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{576 + 320 + 240}{3840\mu F} = \frac{1136}{3840\mu F}$$

$$C_{eq} = \frac{3840\mu F}{1136} = 3.38\mu F$$

अति लघूत्तरात्मक प्रश्न

प्रश्न 1. एक समान्तर प्लेट संधारित्र की एक प्लेट का क्षेत्रफल आधा कर दिया जाये तो क्या यह युक्ति संधारित्र का कार्य करेगी ?

उत्तर: नहीं, क्योंकि दोनों प्लेटों पर आवेश असमान हो जायेगा।

प्रश्न 2. तीन संधारित्रों जिनके प्रत्येक की धारिता $6\mu\text{F}$ है, के संयोजनों से प्राप्त अधिकतम व न्यूनतम धारिताओं का मान क्या होगा ?

उत्तर: (i) अधिकतम धारिता के लिये तीनों को समान्तर क्रम में जोड़ा जाता है।

$$\therefore C_{\max} = C_1 + C_2 + C_3 = 6\mu\text{F} + 6\mu\text{F} + 6\mu\text{F} = 18\mu\text{F}$$

(ii) न्यूनतम धारिता के लिये तीनों को श्रेणीक्रम में संयोजित करते हैं।

$$\begin{aligned}\frac{1}{C_{\min}} &= \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} = \frac{1}{6\mu\text{F}} + \frac{1}{6\mu\text{F}} + \frac{1}{6\mu\text{F}} \\ \frac{1}{C_{\min}} &= \frac{1+1+1}{6\mu\text{F}} = \frac{3}{6\mu\text{F}} \\ \therefore C_{\min} &= 2\mu\text{F}.\end{aligned}$$

प्रश्न 3. किसी चालक की धारिता का मान किन कारकों पर निर्भर करता है ?

उत्तर: किसी चालक की धारिता का मान चालक के अनुप्रस्थ काट के क्षेत्रफल तथा उसके चारों ओर के माध्यम पर निर्भर करता है।

प्रश्न 4. पृथ्वी को गोलीय चालक मानने पर पृथ्वी की धारिता कितनी होती है ?

उत्तर: गोलीय चालक की धारिता (C)

$$= 4\pi\epsilon_0 R$$

$$= \frac{6.4 \times 10^6}{9 \times 10^9} = 711\mu\text{F}$$

प्रश्न 5. आवेशित समान्तर प्लेट संधारित्र की प्लेटों के मध्य परिणामी विद्युत् क्षेत्र कितना होता है जबकि प्लेटों पर पृष्ठ आवेश घनत्व σ है ?

उत्तर: परिणामी विद्युत् क्षेत्र $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$

प्रश्न 6. यदि समान धारिता C के n संधारित्र श्रेणीक्रम में जोड़े जाये तब तुल्य धारिता कितनी होगी ?

उत्तर:

$$C \text{ परिणामी} = \frac{C}{n}$$

प्रश्न 7. समान्तर प्लेट संधारित्र की प्लेटों के मध्य ऊर्जा घनत्व को सूत्र लिखिये।

उत्तर:

$$u = \frac{U}{V} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \text{ जहाँ } E = \text{विद्युत क्षेत्र}$$

प्रश्न 8. ऊर्जा घनत्व का मात्रक लिखिये।

उत्तर:

$$\frac{\text{जूल}}{\text{m}^3}$$

प्रश्न 9. दो संधारित्र जिनकी धारितायें C_1 व C_2 हैं। यदि उन्हें समान आवेश दिये जायें तब उनमें एकत्रित स्थिर विद्युत स्थितिज ऊर्जाओं का अनुपात लिखिये।

उत्तर:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{q_1^2}{q_2^2} \times \frac{C_2}{C_1}$$
$$\therefore \frac{U_1}{U_2} = \frac{C_2}{C_1}$$

प्रश्न 10. ऐसा चालक बताइये जिसको लगभग असीमित (अनन्त) आवेश दिया जा सकता हो।

उत्तर: पृथ्वी, क्योंकि इसकी धारिता अधिक होती है।

प्रश्न 11. किसी आवेशित संधारित्र की ऊर्जा किस रूप में कहाँ संचित रहती है ?

उत्तर: संधारित्र की ऊर्जा विद्युत ऊर्जा के रूप में प्लेटों के मध्य संचित होती है।

प्रश्न 12. किसी आवेशित संधारित्र पर नैट विद्युत आवेश कितना होता है ?

उत्तर: 0 (शून्य)

प्रश्न 13. किसी समान्तर प्लेट संधारित्र की प्लेटों के सम्पूर्ण स्थान में कोई परावैद्युत भरने से उसकी धारिता 5 गुनी हो जाती है। परावैद्युत का पराविद्युतांक क्या है ?

उत्तर:

$$\epsilon_r = \frac{C_m}{C} = \frac{5C}{C} = 5$$

प्रश्न 14. संधारित्र का मूल उपयोग क्या है ?

उत्तर: विद्युत आवेश तथा विद्युत ऊर्जा की बड़ी मात्रा को संचित करने के लिये।

प्रश्न 15. एक समान्तर प्लेट संधारित्र की प्लेटों के मध्य की दूरी d है। यदि $d/2$ मोटाई की कोई धात्विक प्लेट संधारित्र के प्लेटों के मध्य रख दी जाये तब धारिता पर क्या प्रभाव पड़ेगा ?

उत्तर:

$$\begin{aligned} \text{धात्विक प्लेट के लिये धारिता (I)} &= \frac{\epsilon_0 A}{d-t} = \frac{\epsilon_0 A}{d-d/2} \\ &= \frac{2\epsilon_0 A}{d} = 2C \end{aligned}$$

अर्थात् धारिता दोगुनी हो जायेगी।

प्रश्न 16. $24\mu\text{F}$ धारिता के संधारित्र को आवेशित करने में कितना कार्य करना पड़ेगा जबकि प्लेटों के मध्य विभवान्तर 500V

उत्तर: कार्य $(W) = q.V$

$$W = 24 \times 10^{-6} \times 500 \times 500$$

$$= 6\text{J}$$

प्रश्न 17. यदि आपको कम धारिता के संधारित्र दिये हैं तो। इनसे अधिक धारिता किस प्रकार प्राप्त करेंगे ?

उत्तर: दिये गये संधारित्रों को समान्तर क्रम में जोड़ने पर।

प्रश्न 18. $2\mu\text{F}$ धारिता वाले दो संधारित्रों को श्रेणीक्रम में जोड़ने पर तुल्य धारिता कितनी होगी ?

उत्तर:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{2\mu F} + \frac{1}{2\mu F}$$

$$C = 1\mu F.$$

प्रश्न 19. एक समान्तर प्लेट संधारित्र को तेल में डुबोने से । उसकी धारिता पर क्या प्रभाव पड़ेगा ? तेल का परावैद्युतांक 2 है।

उत्तर: किसी माध्यम में धारिता $C = KC_0$, $K = 2$

∴ धारिता दोगुनी हो जायेगी।

प्रश्न 20. वृत्ताकार समान्तर प्लेट संधारित्र की त्रिज्या है। प्लेटों के मध्य हवा भरी है। यदि संधारित्र की धारिता R त्रिज्या के गोले की धारिता के बराबर है तब प्लेटों के मध्य दूरी बताइये।

उत्तर:

$$\text{समान्तर प्लेट संधारित्र की धारिता (C)} = \frac{\epsilon_0 A}{d} = \frac{\epsilon_0 \pi r^2}{d}$$

$$\text{गोलीय संधारित्र की धारिता (C)} = 4\pi\epsilon_0 R$$

प्रश्नानुसार—

$$4\pi\epsilon_0 R = \frac{\epsilon_0 \pi r^2}{d}$$

$$\therefore d = \frac{r^2}{4R}$$

लघूत्तरात्मक प्रश्न

प्रश्न 1. चालक एवं विद्युतरोधी को उदाहरण सहित समझाइये।

उत्तर: चालक एवं विद्युतरोधी (Conductor and Insulator)

प्रकृति में पाये जाने वाले अधिकांश पदार्थों को विद्युत धारा के प्रवाह के आधार पर दो भागों में बाँटा जा सकता है—(i) चालक, (ii) अचालक या विद्युतरोधी।

“वह पदार्थ जो आवेश को ले जाने या आवेश को एक स्थान से दूसरे स्थान तक ले जाने के लिए प्रयोग किया जाता है, चालक कहलाता है।” चाँदी सर्वोत्तम चालक है, इसके अलावा सभी धातुएँ चालक की श्रेणी में आती हैं, जैसे ताँबा, लोहा, ऐलुमिनियम, पारा आदि। पृथ्वी भी विद्युत की अच्छी सुचालक (good conductor) है और मानव शरीर भी विद्युत का सुचालक है। सभी लवणों, अम्लों एवं क्षारों के जलीय घोल (water soluble salts, acids and bases) विद्युत के सुचालक होते हैं। इन घोलों में मौजूद आयन आवेश वाहक (charge carriers) का कार्य करते हैं।

धातुओं में मौजूद मुक्त इलेक्ट्रॉन (free electrons) आवेश वाहक का कार्य करते हैं। मुक्त इलेक्ट्रॉन परमाणुओं की सबसे बाहरी कक्षा के इलेक्ट्रॉन होते हैं जो थोड़ी भी ऊर्जा पाकर संगत परमाणु को छोड़कर चालक की परिसीमाओं (boundary) के अन्दर कहीं भी घूम सकते हैं। लेकिन चालक को छोड़कर नहीं जा सकते हैं। इन मुक्त (free) इलेक्ट्रॉनों की तुलना किसी बर्तन में बन्द गैस के अणुओं से की जा सकती है, अतः इनके समूह को इलेक्ट्रॉन गैस भी कह सकते हैं।

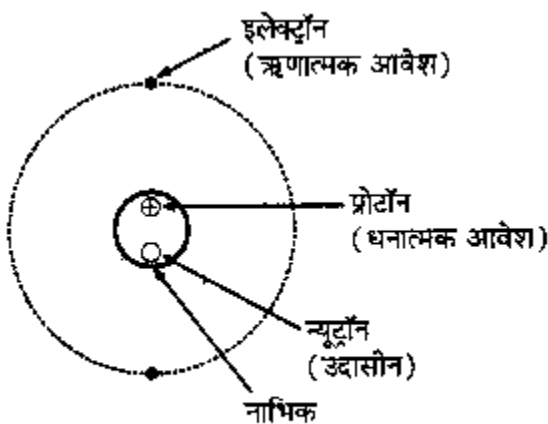
विद्युतरोधी या अचालक (Insulators)-अचालक वे पदार्थ होते हैं जिनसे होकर विद्युत प्रवाह नहीं हो सकता है। अचालकों के सामान्य उदाहरण काँच, रबर, प्लास्टिक, एबोनाइट, अभ्रक, मोम आदि हैं। इन पदार्थों में नगण्य संख्या में मुक्त इलेक्ट्रॉन होते हैं। दूसरे शब्दों में यह कह सकते हैं कि इन पदार्थों के परमाणुओं में सभी इलेक्ट्रॉन बद्ध इलेक्ट्रॉन (bound electrons) होते हैं और वे मुक्त रूप से गति नहीं कर सकते हैं। चूँकि अचालकों में मुक्त रूप से विचरण (movable) करने वाले आवेश नहीं होते हैं इसलिए इनसे होकर विद्युत का चालन सम्भव नहीं होता है।

यह स्मरणीय तथ्य है कि अचालकों को ही परावैद्युत (dielectric) पदार्थ भी कहते हैं। स्वाभाविक है कि परावैद्युत माध्यमों में भी विद्युत प्रवाह सम्भव नहीं है लेकिन बाहरी विद्युत क्षेत्र (external electric field) में रखने पर इनकी सतह पर प्रेरित आवेश एकत्र हो जाता है। इस प्रकार हम परावैद्युत पदार्थ की परिभाषा निम्न प्रकार कर सकते हैं, “वे अचालक पदार्थ जो चालन के बिना विद्युत प्रभाव का प्रदर्शन करते हैं, परावैद्युत पदार्थ कहलाते हैं।”

प्रश्न 2. ध्रुवीय तथा अध्रुवीय परावैद्युत में अन्तर स्पष्ट कीजिये।

उत्तर: मुक्त एवं बद्ध आवेश (Free and Bound Charges)

प्रत्येक पदार्थ परमाणु से मिलकर बना होता है। परमाणु की संरचना में एक भाग नाभिक होता है जिसके अन्दर प्रोटॉन तथा न्यूट्रॉन रहते हैं तथा नाभिक के चारों ओर इलेक्ट्रॉन वृत्तीय कक्षा में घूमते रहते हैं। नाभिक के परितः निश्चित कक्षाओं में इलेक्ट्रॉन बिना कोई ऊर्जा नष्ट किये गतिशील रहते हैं। इलेक्ट्रॉन पर -1.6×10^{-19} कूलॉम आवेश होता है और इसका द्रव्यमान 9.1×10^{-31} kg होता है। परमाणु विद्युत उदासीन (electrically neutral) होता है।



चित्र 4.1—परमाणु संरचना

अतः नाभिक में जितने प्रोटॉन होते हैं उतने ही इलेक्ट्रॉन नाभिक के परितः चक्कर लगाते हैं। जो इलेक्ट्रॉन नाभिक के समीप वाली कक्षाओं में होते हैं उन पर नाभिक का नियन्त्रण अधिक होता है, इन्हें सम्बद्ध या बद्ध इलेक्ट्रॉन (bound electron) कहते हैं। इन इलेक्ट्रॉनों को आसानी से नाभिक से अलग नहीं किया जा सकता है। जैसे-जैसे इलेक्ट्रॉन नाभिक से दूर जाते हैं, नाभिक का इलेक्ट्रॉन पर से नियन्त्रण कम होता जाता है। तथा अन्तिम कक्षा वाले इलेक्ट्रॉनों पर नाभिक का नियन्त्रण सबसे कम होता है। इन इलेक्ट्रॉनों को मुक्त इलेक्ट्रॉन (free electron) कहते हैं। क्योंकि थोड़ी-सी ऊर्जा देने पर इन इलेक्ट्रॉनों को संगत परमाणुओं से अलग किया जा सकता है।

कुचालक पदार्थ के परमाणु की बाह्यतम कक्षा के इलेक्ट्रॉनों पर नाभिक का आकर्षण बल प्रबल होता है अतः इनके सभी इलेक्ट्रॉन बद्ध अवस्था में होते हैं। इनका स्वतन्त्र रूप से विचरण सम्भव नहीं हो पाता है। अतः इन पदार्थों में धारा का चालन नहीं होता है।

प्रश्न 3. किसी गोलीय चालक की धारिता का व्यंजक स्थापित कीजिये।

उत्तर: विलगित गोलीय चालक की धारिता (Capacitance of an Isolated Spherical Conductor) माना R त्रिज्या का एक गोलाकार चालक K परावैद्युतक वाले माध्यम में रखा है। जब इस गोले को +q आवेश दिया जाता है तो यह आवेश गोले के पृष्ठ पर समान रूप से वितरित हो जाता है और फलस्वरूप गोले के पृष्ठ पर विभव V उत्पन्न हो जाता है। गोले का पृष्ठ समविभव पृष्ठ (equi-potential surface) की भाँति व्यवहार करता है। अतः

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 K} \frac{q}{R}$$

$$\therefore \text{चालक की धारिता } C = \frac{q}{V} = \frac{q}{\frac{1}{4\pi\epsilon_0 K} \frac{q}{R}}$$

$$\text{या} \quad \boxed{C = 4\pi\epsilon_0 K R} \quad \dots(1)$$

$$\text{या} \quad C = \frac{KR}{9 \times 10^9}$$

$$\therefore C \propto R$$

अर्थात् किसी गोलाकार चालक की धारिता उसकी त्रिज्या के अनुक्रमानुपाती होती है।

यदि गोलीय चालक, किसी परावैद्युत माध्यम में स्थित हो जिसको परावैद्युतक ϵ_r हो तो उसकी धारिता

$$C_m = \frac{q}{V} = 4\pi\epsilon_0 \epsilon_r R$$

$$C_m = 4\pi\epsilon_0 R \epsilon_r$$

$$\therefore \frac{C_m}{C} = \epsilon_r$$

अतः माध्यम का परावैद्युतांक माध्यम की विद्युत धारिता एवं वायु (निर्वात) की विद्युत धारिता के अनुपात के बराबर होती है।

प्रश्न 4. एक आवेशित समान्तर प्लेट संधारित्र की प्लेटों को निकट लाने पर उसकी प्लेटों के मध्य विभवान्तर पर क्या प्रभाव पड़ेगा ? जबकि आवेश नियत रखा जाता है। समझाइये।

उत्तर: $q = CV \Rightarrow V = \frac{q}{C}$

अर्थात् $V \propto \frac{1}{C}$ होती है जब आवेश नियत रहता है।

निकट जाने पर d का मान कम होता है लेकिन धारिता के सूत्र $C = \epsilon_0 A/d$ के अनुसार C का मान बढ़ता है जिसके कारण विभवान्तर प्लेट के मध्य घट जाता है।

प्रश्न 5. एक समान्तर प्लेट संधारित्र एक स्रोत (बैटरी) से V विभवान्तर तक आवेशित किया गया है, जबकि प्लेटों के मध्य वायु है। संधारित्र को बैटरी से अलग किये बिना वायु के स्थान पर ϵ_r परावैद्युतांक का परावैद्युत माध्यम भर दिया गया है। कारण सहित बताइये कि निम्नलिखित में क्या परिवर्तन होगा ?

- (i) विभवान्तर
- (ii) प्लेटों के मध्य विद्युत क्षेत्र
- (iii) धारिता
- (iv) आवेश
- (v) ऊर्जा ?

उत्तर: जब बैटरी जुड़ी रहती है तो

- (i) विभवान्तर अपरिवर्तित रहेगा,
- (ii) धारिता K गुनी हो जायेगी,
- (iii) आवेश $q = CV$ के आधार पर C बढ़ने से बढ़ जायेगा अर्थात् K गुना हो जायेगा,
- (iv) विद्युत् क्षेत्र $E = \frac{E_0}{K}$ घट जायेगा और
- (v) ऊर्जा $\frac{1}{2} CV^2$

धारिता C बढ़ने से बढ़ जायेगी अर्थात् K गुनी हो जायेगी। यहाँ K परावैद्युतांक है।

प्रश्न 6. एक समान्तर प्लेट वायु संधारित्र एक विद्युत संभरण से जुड़ा है तथा V_0 विभवान्तर तक आवेशित किया गया है। इसको विद्युत संभरण [Supply] से अलग करके इसके प्लेटों के मध्य परावैद्युत पदार्थ भर दिया जाता है। कारण सहित बताइये कि निम्नलिखित में क्या परिवर्तन होगा ?

- (i) आवेश
- (ii) विभवान्तर
- (iii) धारिता
- (iv) विद्युत क्षेत्र
- (v) ऊर्जा।

उत्तर: बैटरी हटा लेने के बाद पराविद्युत गुटका खिसकाने से घटकों पर प्रभाव

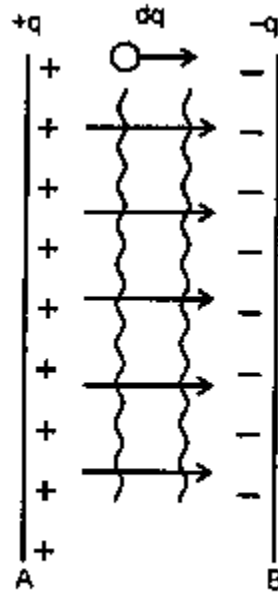
- (i) धारिता K गुनी हो जायेगी,
- (ii) आवेश अपरिवर्तित रहेगा,
- (iii) विभवान्तर $V = \frac{d}{C}$ घट जायेगा क्योंकि धारिता C का मान बढ़ जायेगा,
- (iv) विभवान्तर घटने से विद्युत क्षेत्र $E = \frac{V}{d}$ भी कम हो जायेगा तथा
- (v) $U = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$ के आधार पर ऊर्जा भी कम हो जायेगी।

प्रश्न 7. आवेशित संधारित्र में संचित ऊर्जा का सूत्र व्युत्पन्न कीजिये।

उत्तर: संधारित्र में संचित ऊर्जा (Energy Stored in Capacitor)

किसी चालक को आवेशित करने में जो कार्य किया जाता है, वही आवेशित चालक की ऊर्जा कहलाती है।” जब किसी चालक को आवेश दिया जाता है तो प्रारम्भ में चालक को आवेश का पहला भाग देने में कोई कार्य नहीं करना पड़ता है क्योंकि उस आवेश का कोई विरोध नहीं होता है। इसके बाद जैसे-जैसे आवेश के शेष भाग दिये जाते हैं, तो चालक पर पहले से ही मौजूद आवेश दिये जाने वाले आवेशों का विरोध करते हैं, अतः बाद में दिये जाने वाले सभी आवेशों को देने में इसी प्रतिकर्षण के विरुद्ध कार्य (work done against repulsion) करना पड़ता है। स्पष्ट है कि चालक को आवेश देने में कार्य करना पड़ता है और

किसी चालक को आवेश देने में किये गये सम्पूर्ण कार्य को ही आवेशित चालक की ऊर्जा कहते हैं।



चित्र — 4.26 संधारित्र एक प्लेट से दूसरी तक लघु चरणों में आवेश स्थानांतरण

स्थानांतरण। संधारित्र को आवेशित करने में किया गया कार्य ही आवेशित संधारित्र की ऊर्जा कहलाता है। यदि आवेशित संधारित्र की एक प्लेट के आवेश को दूसरी प्लेट तक ले जाया जाये तो संधारित्र अनाविष्ट (uncharged) हो जायेगा। इस क्रिया में जितनी ऊर्जा प्राप्त होगी, वही आवेशित संधारित्र की ऊर्जा होगी। माना कि संधारित्र का प्रारम्भिक विभवान्तर V है और अनाविष्ट होने पर इसका अन्तिम विभवान्तर शून्य होगा। उक्त क्रिया में संधारित्र का औसत विभवान्तर

$$= \frac{0+V}{2} = \frac{V}{2}$$

यदि संधारित्र पर आवेश q हो तो इस आवेश को एक प्लेट से दूसरी प्लेट तक ले जाने में किया गया कार्य अर्थात् संधारित्र की ऊर्जा

$$\therefore U = W = \text{आवेश} \times \text{औसत विभवान्तर}$$

$$= q \times \frac{V}{2}$$

$$U = \frac{1}{2}qV$$

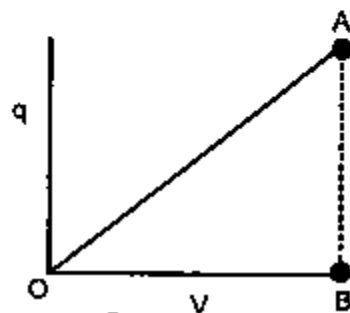
$$\therefore q = CV$$

$$\therefore U = \frac{1}{2} CVV = \frac{1}{2} CV^2$$

$$\text{या } U = \frac{1}{2} C \left(\frac{q}{C} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}, \text{ क्योंकि } V = \frac{q}{C}$$

$$\therefore \boxed{U = \frac{1}{2} qV = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}} \quad \dots(1)$$

दूसरी विधि— आवेश तथा विभवान्तर के मध्य ग्राफ एक सीधी रेखा होती है—



चित्र-4.27

आवेश के प्रवाह में किया गया कार्य (W) = आकृति OAB का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2} \times \text{आधार (OB)} \times \text{ऊँचाई (AB)}$$

$$= \frac{1}{2} \times V \times q = \frac{1}{2} qV$$

$$\therefore q = CV \text{ से—}$$

$$\therefore W = \frac{1}{2} CVV = \frac{1}{2} CV^2$$

$$\therefore U = W = \frac{1}{2} CV^2$$

प्रश्न 8. C धारिता के तीन संधारित्र एक बार श्रेणीक्रम में वे दूसरी बार समान्तर क्रम में जोड़े जाते हैं। इन स्थितियों में तुल्य धारिता का अनुपात क्या होगा ?

उत्तर: (i) समान्तर क्रम में

$$C_p = C_1 + C_2 + C_3$$

$$= 3C \dots\dots\dots (i)$$

(ii) श्रेणीक्रम में

$$\frac{1}{C_s} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

$$\therefore C_s = \frac{C}{3} \dots\dots(2)$$

$$\therefore \boxed{\frac{C_p}{C_s} = 9.}$$

प्रश्न 9. समान धारिता के n संधारित्रों को श्रेणीक्रम में संयोजित करने पर तुल्य धारिता C_s तथा समान्तर क्रम में संयोजित करने पर तुल्य धारिता C_p है। $\frac{C_p}{C_s}$ का मान ज्ञात कीजिये।

उत्तर: (i) समान्तर क्रम में

$$C_p = C_1 + C_2 + C_3$$

$$= 3C \dots\dots\dots (i)$$

(ii) श्रेणीक्रम में

$$\frac{1}{C_s} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

$$\therefore C_s = \frac{C}{3} \dots\dots(2)$$

$$\therefore \boxed{\frac{C_p}{C_s} = 9.}$$

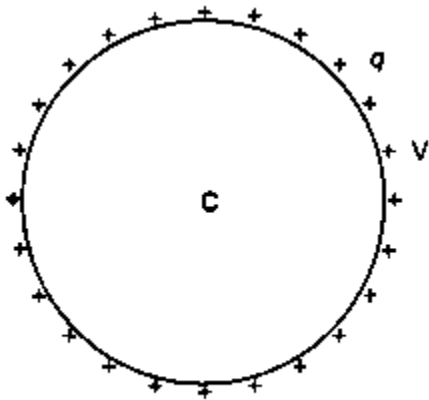
$$\frac{C_p}{C_s} = n^2$$

प्रश्न 10. विद्युत धारिता की परिभाषा लिखिये तथा इसका S.I. मात्रक लिखिये।

उत्तर: चालक की धारिता (Capacitance of Conductor)

धारिता शब्द का अर्थ है 'धारण करने की क्षमता', अतः किसी चालक की विद्युत धारिता का अर्थ उसके द्वारा विद्युत आवेश धारण करने की क्षमता (ability to hold electric charge) से है। एक निश्चित सीमा के बाद यदि हम किसी बर्तन में कोई द्रव भरते हैं तो वह फैलने लगता है। इसी प्रकार जब एक निश्चित सीमा के बाद किसी चालक को आवेश दिया जाता है तो उसका विसर्जन (discharge) वातावरण में होने

लगता है।



चित्र 4.6—चालक की धारिता के लिये

जिस प्रकार किसी बर्तन में डाला गया द्रव उसके गुरुत्वीय तल को बढ़ाता है, ठीक उसी प्रकार किसी चालक को दिया गया आवेश उसके विद्युत तल अर्थात् विद्युत विभव को बढ़ाता है। किसी चालक को जितना अधिक आवेश दिया जाता है, उसका विभव भी उतना ही अधिक बढ़ता है अर्थात् “किसी चालक पर उपस्थित आवेश उसके विभव के अनुक्रमानुपाती होता है।”

$$\therefore q \propto V$$

$$\text{या } q = CV \dots\dots\dots (1)$$

जहाँ C एक नियतांक है, जिसे चालक की विद्युत धारिता कहते इस प्रकार चालक की विद्युत धारिता एक नियतांक होती है। इसका मान चालक की आकृति, क्षेत्रफल, चारों ओर के माध्यम तथा पास में रखे अन्य चालकों की उपस्थिति पर निर्भर करता है।

$$\therefore C = \frac{q}{V} \dots\dots\dots (2)$$

प्रश्न 11. एक गोलीय चालक पर आवेश की मात्रा तीन गुनी करने पर उसकी धारिता पर क्या प्रभाव पड़ेगा ? कारण दीजिये।

उत्तर: गोलीय चालक की धारिता (C) = $4\pi\epsilon_0 R$

अतः आवेश का कोई प्रभाव नहीं पड़ेगा।

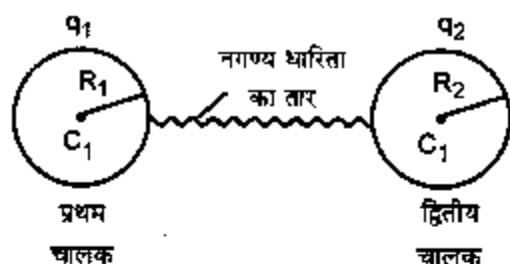
प्रश्न 12. $2\mu F$ धारिता वाले वायु संधारित्र की प्लेटों के मध्य अभ्रक की प्लेट रखने से उसकी धारिता $5\mu F$ हो जाती है। अभ्रक का पराविद्युतांक ज्ञात कीजिये।

उत्तर:

$$\begin{aligned}
 K \text{ या } \epsilon_r &= \frac{C_m}{C} \\
 &= \frac{5\mu F}{2\mu F} \\
 &= 2.5.
 \end{aligned}$$

प्रश्न 13. दो आवेशित चालकों की त्रिज्यायें क्रमशः R_1 व R_2 , धारितायें क्रमशः C_1 व C_2 आवेश क्रमशः Q_1 व Q_2 तथा विभव क्रमशः V_1 व V_2 हैं ($V_1 > V_2$) यदि चालकों को परस्पर एक नगण्य धारिता वाले चालक तार से जोड़ दिया जाता है तब सिद्ध कीजिये कि चालकों के विभव में परिवर्तनों का अनुपात $\frac{\Delta V_1}{\Delta V_2} = \frac{C_2}{C_1}$ होगा

उत्तर:



$$\text{प्रथम चालक पर विभव } (V_1) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} \quad \dots(1)$$

$$\text{द्वितीय चालक पर विभव } (V_2) = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} \quad \dots(2)$$

चालक तार से जोड़ने पर—

$$V_1 = V_2$$

$$\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

\therefore

$$\frac{Q_1}{R_1} = \frac{Q_2}{R_2}$$

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{R_1}{R_2} \quad \dots(1)$$

$$\therefore \text{उभयनिष्ठ विभव (V)} = \frac{q_1 + q_2}{C_1 + C_2} = \frac{C_1 V_1 + C_2 V_2}{C_1 + C_2}$$

यदि $V_1 > V_2$ तो $V_1 > V > V_2$

$$\text{प्रथम चालक पर } \Delta V_1 = V_1 - V = V_1 - \left(\frac{C_1 V_1 + C_2 V_2}{C_1 + C_2} \right)$$

$$\Delta V_1 = C_2 (V_1 - V_2) / C_1 + C_2$$

द्वितीय चालक पर—

$$\Delta V_2 = V - V_2 = V - \left(\frac{C_1 V_1 + C_2 V_2}{C_1 + C_2} \right)$$

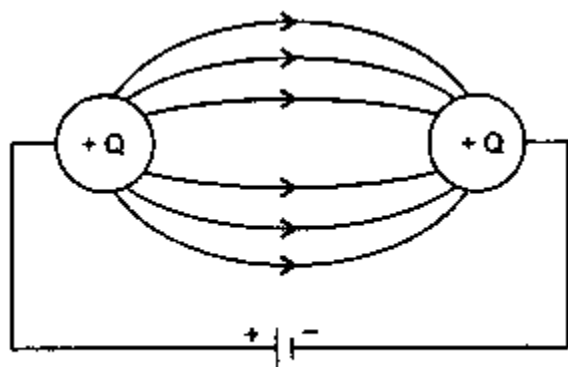
$$\therefore \Delta V_1 / \Delta V_2 = \frac{C_2}{C_1} \\ = C_1 (V_1 - V_1) / C_1 + C_2.$$

प्रश्न 14. संधारित्र किसे कहते हैं ? समझाइये।

उत्तर: संधारित्र (Capacitor)

“वह युक्ति (device) जिसमें चालक के आकार को बिना बदले उसकी धारिता बढ़ायी जा सकती है, संधारित्र कहलाती है।”

संधारित्र में दो परस्पर निकट स्थित चालक प्लेटें होती हैं, जिनमें से एक प्लेट पर धनावेश तथा दूसरी प्लेट पर उतना ही ऋणावेश होता है। इसके लिए दोनों प्लेटों को बैटरी के क्रमशः धन एवं ऋण टर्मिनलों से



चित्र 4.8(a)—संधारित्र

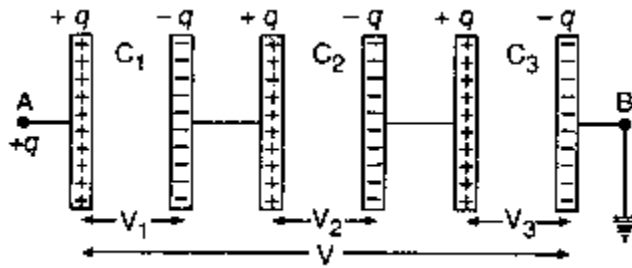
जोड़ा जाता है (चित्र 4.8(a)) अब यदि बैटरी को हटा लिया जाए तो भी चालकों पर आवेश संग्रहित रहता है। अतः संधारित्र को आवेश संचय की युक्ति भी कहा जाता है।

प्रश्न 15. तीन संधारित्र जिनकी धारितायें क्रमशः C_1 , C_2 व C_3 हैं, श्रेणीक्रम में जुड़े हैं। तुल्य धारिता का सूत्र व्युत्पन्न कीजिये।

उत्तर: श्रेणीक्रम (Series Combination)

उद्देश्य- धारदा को करने के लिए २ध की श्रेणीक्रम में जोड़ा जाता है।

इसमें एक संधारित्र की दूसरी प्लेट दूसरे संधारित्र की पहली प्लेट से, दूसरे की दूसरी प्लेट तीसरे की पहली प्लेट से तथा इसी प्रकार शेष सभी को जोड़ दिया जाता है (चित्र 4.16)। संयोजन की पहली प्लेट को आवेश दिया जाता है और अंतिम प्लेट को पृथ्वी से सम्बन्धित कर दिया जाता है।



चित्र 4.16 संधारित्रों का श्रेणीक्रम संयोजन

यदि पहले संधारित्र की पहली प्लेट को $+q$ वेश दिया जाये तो प्रेरण द्वारा सभी संधारित्रों की सभी प्लेटों पर एक समान आवेश q होगा, चाहे संधारित्र की धारिता कुछ भी हो। धारिताओं के मान अलग-अलग होने के कारण सभी संधारित्रों की प्लेटों के विभवान्तर अलग-अलग होंगे। यदि पूरे संयोजन का विभवान्तर V हो तो

$$V = V_1 + V_2 + V_3 \quad \dots(1)$$

चूँकि प्रत्येक संधारित्र पर आवेश समान है अतः

$$q = C_1 V_1 = C_2 V_2 = C_3 V_3$$

$$\therefore V_1 = \frac{q}{C_1}, V_2 = \frac{q}{C_2}, V_3 = \frac{q}{C_3}$$

यदि संयोजन की तुल्य धारिता C मान लें तो

$$V = \frac{q}{C}$$

अब समी. (1) में विभवान्तरों के मान रखने पर,

$$\frac{q}{C} = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} + \frac{q}{C_3}$$

$$\text{या} \quad \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

इसी प्रकार जितने भी संधारित्र होंगे, सभी उक्त सूत्र की भाँति जुड़ जायेंगे।

$$\therefore \boxed{\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}} \quad \dots(2)$$

प्रश्न 16. तीन संधारित्र जिनकी धारितायें क्रमशः C_1 , C_2 व C_3 हैं, समान्तर क्रम में जुड़े हैं। तुल्य धारिता का सूत्र व्युत्पन्न कीजिये।

उत्तर: पाश्र्व क्रम या समान्तर क्रम संयोजन (Parallel Combination of Capacitors)

उद्देश्य- धारिता को बढ़ाने के लिए संधारित्रों को पाश्र्व क्रम या समान्तर क्रम में संयोजित किया जाता है। इस संयोजन में सभी संधारित्रों की पहली प्लेटें एक संधि A व दूसरी प्लेटें दूसरी संधि B के मध्य जोड़ दी जाती हैं। पहली संधि A को + q आवेश दिया जाता है और संधि B को पृथ्वी से सम्बन्धित कर दिया जाता है। चूँकि सभी संधारित्र संधियों A व B के मध्य जुड़े होते हैं अतः सबका विभवान्तर (V) समान होता है। संधि A को दिया गया आवेश + q धारिताओं के अनुसार तीनों संधारित्रों में बँट जाता है।

$$q = q_1 + q_2 + q_3 \dots\dots\dots (i)$$

चूँकि सभी संधारित्रों का विभवान्तर समान (V) है। अतः

$$q_1 = C_1V, q_2 = C_2V, q_3 = C_3V$$

यदि संयोजन की तुल्य धारिता C हो तो

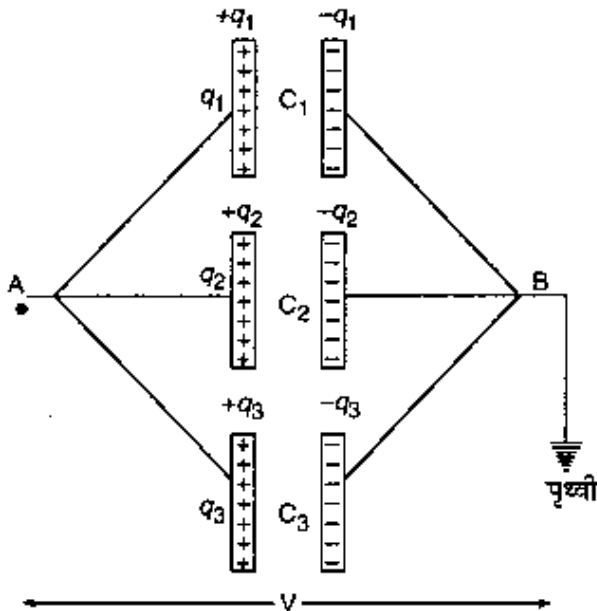
$$q = CV$$

समी. (1) में आवेशों के मान रखने पर,

$$CV = C_1V + C_2V + C_3V$$

या

$$C = C_1 + C_2 + C_3$$



चित्र 4.18 संधारित्रों का समान्तर क्रम संयोजन

इसी प्रकार अन्य सभी धारिताएँ जुड़ जायेंगी।

∴

$$C = C_1 + C_2 + \dots + C_n \quad \dots(2)$$

निबन्धात्मक प्रश्न

प्रश्न 1. समान्तर प्लेट संधारित्र का सिद्धान्त समझाते हुए इसकी धारिता का व्यंजक स्थापित कीजिये।

उत्तर: संधारित्र का सिद्धान्त (Principle of Capacitor)

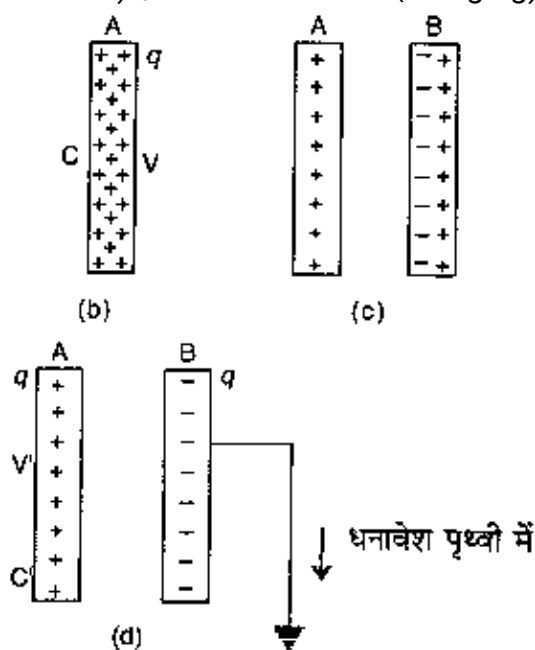
किसी चालक को q आवेश देने पर यदि उसका विभव V हो जाता है, तो उसकी धारिता

$$C = \frac{q}{V}$$

स्पष्ट है कि यदि किसी प्रकार आवेश q के लिए विभव का मान V से कम हो जाये, तो चालक की धारिता C बढ़ जायेगी। इसी विचार से संधारित्र की खोज हुई। संधारित्र का सिद्धान्त (principle) निम्नलिखित तीन पदों में समझा जा सकता है। (i) माना किसी चालक A को q आवेश देने पर उसका विभव V हो जाता है, तो उसकी धारिता

$$C = \frac{q}{V} \dots \dots \dots (1)$$

(ii) अब यदि चालक A के पास इसी प्रकार का दूसरा अनावेशित चालक B लाया जाये, तो प्रेरण (induction) द्वारा उसका आवेशन (charging) चित्र 4.8 (c) की भाँति होगा।



चित्र 4.8

(iii) अब यदि चालक B को पृथ्वी से सम्बन्धित कर दिया जाये, तो उसका समस्त धनावेश पृथ्वी में चला जायेगा। इस नवीन स्थिति में यदि चालक A का विभव V' हो, तो A की धारिता

$$C' = \frac{q}{V'} \quad \dots(2)$$

समीकरण (1) व (2) से,

$$\frac{C'}{C} = \frac{q/V'}{q/V} = \frac{V}{V'}$$

या

$$\frac{C'}{C} = \frac{V}{V'} \quad \dots(3)$$

परन्तु $V' =$ चालक A के आवेश के कारण उत्पन्न विभव

+ चालक B के आवेश के कारण उत्पन्न विभव

या। $V' = V - V''$

इसी समीकरण से स्पष्ट है कि

$$V > V'$$

∴ समी. (3) से, $C' > C$

अर्थात् “जब एक आवेशित चालक के पास दूसरा अनावेशित एवं पृथ्वी से सम्बन्धित चालक लाया जाता है तो पहले चालक की धारिता बढ़ जाती है।” यही संधारित्र का सिद्धान्त है।

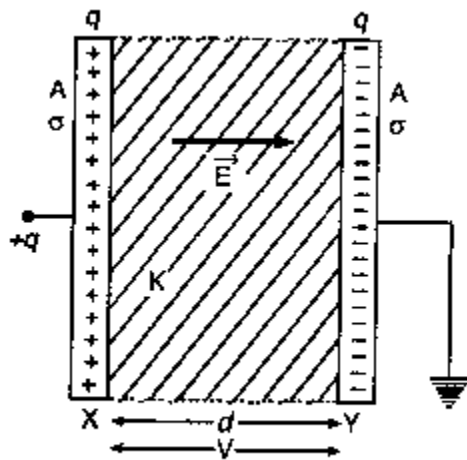
इस प्रकार उक्त सिद्धान्त से स्पष्ट है कि संधारित्र में दो पृथक्कृत धात्विक प्लेटें (separated metallic plates) होती हैं जिसमें एक को आवेश दिया जाता है और दूसरी को पृथ्वी से सम्बन्धित कर देते हैं। जब प्लेटों के मध्य किसी परावैद्युत माध्यम की जगह वायु होती है तो उसे वायु संधारित्र कहते हैं।

समान्तर प्लेट संधारित्र (Parallel Plate Capacitor)

इस संधारित्र में धातु की दो आयताकार प्लेटें एक ही आकार की होती हैं जो एक-दूसरे के आमने-सामने चित्र 4.9 के अनुसार परस्पर समान्तर रखी होती हैं। दोनों प्लेटें विद्युत् रोधी स्टैंडों (insulated stands) पर लगी रहती हैं और दोनों के मध्य K परावैद्युतांक वाला कोई परावैद्युत माध्यम होता है। एक प्लेट को आवेश दिया जाता है और दूसरी को पृथ्वी से सम्बन्धित (earthing) कर देते हैं।

माना प्रत्येक प्लेट का क्षेत्रफल A मीटर है तथा उनके बीच की दूरी d मीटर है। माना कि प्लेट X को हम +q कूलॉम आवेश देते हैं। प्रेरण द्वारा उसके सामने वाली प्लेट Y के भीतरी तल पर -q कूलॉम आवेश तथा बाहरी तल पर +q कूलॉम आवेश उत्पन्न हो जायेगा। चूँकि प्लेट Y पृथ्वी से जुड़ी है, अतः इसके बाहरी तल का +q कूलॉम आवेश पृथ्वी में चला जायेगा। इस प्रकार प्लेटों X व Y पर बराबर तथा विपरीत आवेश होंगे।

प्लेट X से चलने वाली सभी विद्युत बल रेखाएँ प्लेट Y पर पहुँचेगी तथा किनारों को छोड़कर बीच में विद्युत क्षेत्र सभी जगह एकसमान (uniform) होगा।



चित्र 4.9—समान्तर प्लेट संधारित्र

दोनों प्लेटों पर आवेश का पृष्ठ घनत्व (surface charge density)

$$\sigma = \frac{q}{A}$$

जहाँ: A प्लेटों का क्षेत्रफल है।

यदि प्लेटों के मध्य दूरी उनके विस्तार (extent) की तुलना में नगण्य (negligible) हो तो उनके मध्य विद्युत क्षेत्र की तीव्रता

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

जहाँ ϵ_0 = निर्वात की विद्युतशीलता यदि प्लेटों के मध्य विभवान्तर V एवं दूरी d हो तो

$$E = \frac{V}{d}$$

$$\therefore \frac{V}{d} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{q}{A\epsilon_0}$$

$$\therefore V = \frac{qd}{A\epsilon_0}$$

अतः संधारित्र की धारिता

$$C = \frac{q}{V} = \frac{q}{\frac{qd}{A\epsilon_0}}$$

या

$$C = \frac{A\epsilon_0}{d}$$

...(1)

समी. (1) से स्पष्ट है कि समान्तर प्लेट संधारित्र की धारिता निम्न प्रकार बढ़ायी जा सकती है

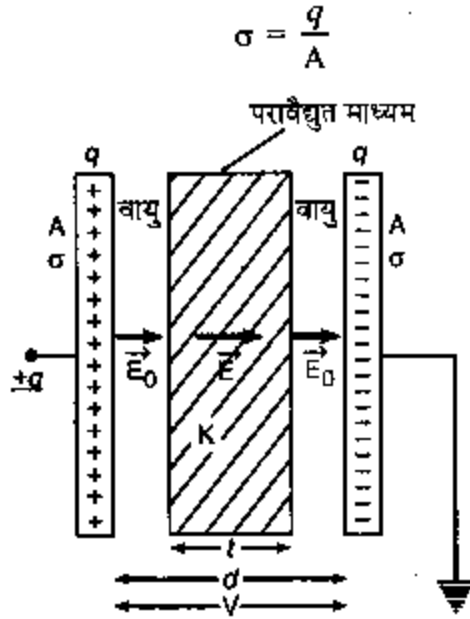
(i) $C \propto A$ अर्थात् प्लेटों का क्षेत्रफल बढ़ाकर संधारित्र की धारिता बढ़ायी जा सकती है, लेकिन यह संधारित्र के सिद्धान्त के विरुद्ध है, अतः क्षेत्रफल बढ़ाकर संधारित्र की धारिता नहीं बढ़ायी जाती है।

(ii) $C \propto \frac{1}{d}$ अर्थात् प्लेटों के मध्य दूरी घटाकर संधारित्र की धारिता बढ़ायी जा सकती है।

प्रश्न 2. आंशिक रूप से भरे परावैद्युत पदार्थ के लिये समान्तर प्लेट संधारित्र की धारिता का व्यंजक व्युत्पन्न कीजिये।

उत्तर: समान्तर प्लेट संधारित्र की धारिता जबकि परावैद्युत पदार्थ अंशतः भरा हो (Capacitance of Parallel Plate Capacitor Partially Filled with a Dielectric)

उद्देश्य- परावैद्युतांक की सहायता से संधारित्र की धारिता बढ़ाना। माना समान्तर प्लेट संधारित्र की प्लेटों के मध्य दूरी d है और उनके मध्य K परावैद्युतांक (dielectric constant) एवं t मोटाई (thickness) का परावैद्युत माध्यम आंशिक (partially) रूप से रखा है। प्लेटों के मध्य वायु वाले क्षेत्र परावैद्युतांक में विद्युत क्षेत्र की तीव्रता \vec{E}_0 एवं पराविद्युत माध्यम में \vec{E} है। दोनों प्लेटों पर आवेश की पृष्ठ घनत्व



चित्र 4.13 आंशिक रूप से भरा संधारित्र

यदि प्लेटों के मध्य दूरी उनके विस्तार की तुलना (comparison to their extent) में नगण्य हो तो

$$E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad \text{और} \quad E = \frac{\sigma}{\epsilon_0 K}$$

विभवान्तर की परिभाषा से प्लेटों के मध्य विभवान्तर

$V = +1C$ आवेश को ऋण प्लेट से धन प्लेट

तक ले जाने में किया गया कार्य

$= +1C$ आवेश को $(d-t)$ दूरी वायु (air) में

$+t$ दूरी परावैद्युत माध्यम (dielectric medium) में

ले जाने में कुल कार्य

$$= E_0 (d-t) + E \cdot t$$

$$= \frac{\sigma}{\epsilon_0} (d-t) + \frac{\sigma}{\epsilon_0 K} \cdot t$$

$$= \frac{\sigma}{\epsilon_0} \left[(d-t) + \frac{t}{K} \right]$$

या

$$V = \frac{q}{A\epsilon_0} \left[(d-t) + \frac{t}{K} \right]$$

\therefore संधारित्र की धारिता

$$C = \frac{q}{V} = \frac{q}{\frac{q}{A\epsilon_0} \left[(d-t) + \frac{t}{K} \right]}$$

या
$$C = \frac{A\epsilon_0}{(d-t) + \frac{t}{K}} \quad \dots(1)$$

विशेष स्थितियाँ—(i) यदि प्लेटों के मध्य केवल वायु है तो $t = 0$

∴
$$C_0 = \frac{A\epsilon_0}{(d-0) + 0}$$

या
$$C_0 = \frac{A\epsilon_0}{d}$$

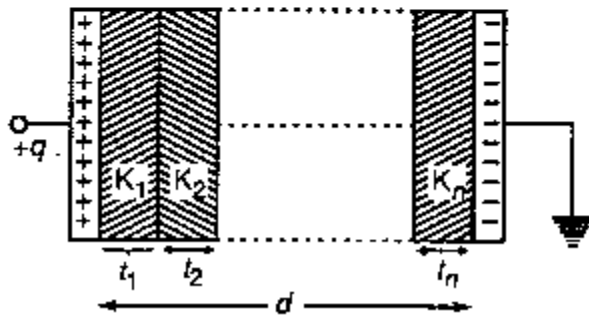
(ii) यदि प्लेटों के मध्य केवल परावैद्युत माध्यम है तो $t = d$

∴
$$C = \frac{A\epsilon_0}{(d-d) + \frac{d}{K}} = \frac{A\epsilon_0}{\frac{d}{K}} = \frac{KA\epsilon_0}{d}$$

या
$$C = \frac{KA\epsilon_0}{d}$$

(iii) यदि प्लेटों के मध्य भिन्न-भिन्न (different) परावैद्युतांकों के n माध्यम रखे हों जिनकी मोटाइयाँ क्रमशः t_1, t_2, \dots, t_n हों तो

$$d = (t_1 + t_2 + \dots + t_n)$$



चित्र 4.14 संघारित्र में भिन्न-भिन्न परावैद्युत पदार्थ

अतः

$$C = \frac{A\epsilon_0}{d - (t_1 + t_2 + \dots + t_n) + \frac{t_1}{K_1} + \frac{t_2}{K_2} + \dots + \frac{t_n}{K_n}}$$

या

$$C = \frac{A\epsilon_0}{\left[\frac{t_1}{K_1} + \frac{t_2}{K_2} + \dots + \frac{t_n}{K_n} \right]} \quad \dots(2)$$

(iv) जब प्लेटों के बीच t मोटाई का धातु की कोई पट्टी हो तो

$$K = \infty$$

अतः समीकरण (1) से,

$$C = \frac{A\epsilon_0}{(d - t) + \frac{t}{\infty}} = \frac{A\epsilon_0}{d - t}$$

प्रश्न 3. किसी समान्तर प्लेट संधारित्र की प्लेटों के मध्य विद्युत क्षेत्र के ऊर्जा घनत्व का व्यंजक व्युत्पन्न कीजिये।

उत्तर: समान्तर प्लेट संधारित्र का ऊर्जा घनत्व (Energy Density of Parallel Plate Capacitor) . माना समान्तर प्लेट संधारित्र की प्रत्येक प्लेट का क्षेत्रफल A हो तथा उसकी प्लेटों q आवेश दिया जाता है तब उसकी प्लेटों के मध्य विद्युत क्षेत्र (E)

$$E = \frac{V}{d} \Rightarrow V = Ed$$

निर्वात में संधारित्र की धारिता $C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$

अतः

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{A\epsilon_0}{d} \right) \times (Ed)^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{A\epsilon_0}{d} \times E^2 d^2 \\ &= \frac{1}{2} A\epsilon_0 E^2 d \end{aligned}$$

या
$$U = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 A d \quad \dots(1)$$

चूँकि संधारित्र का आयतन

$$= \text{प्लेटों का क्षेत्रफल} \times \text{उनके मध्य दूरी} \\ = A d$$

$$\therefore \frac{U}{A d} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

या संधारित्र के प्रति एकांक आयतन में संचित ऊर्जा

$$= \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

या
$$\boxed{u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2} \quad \dots(2)$$

u को ऊर्जा घनत्व भी कहते हैं।

प्रश्न 4. गोलीय संधारित्र क्या है ? गोलीय संधारित्र की धारिता के लिये व्यंजक व्युत्पन्न कीजिये।

उत्तर: विलगित गोलीय चालक की धारिता (Capacitance of an Isolated Spherical Conductor) माना R त्रिज्या का एक गोलाकार चालक K परावैद्युतोंक वाले माध्यम में रखा है। जब इस गोले को +q आवेश दिया जाता है तो यह आवेश गोले के पृष्ठ पर समान रूप से वितरित हो जाता है और फलस्वरूप गोले के पृष्ठ पर विभव V उत्पन्न हो जाता है। गोले का पृष्ठ समविभव पृष्ठ (equi-potential surface) की भाँति व्यवहार करता है। अतः

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 K} \frac{q}{R}$$

$$\therefore \text{चालक की धारिता } C = \frac{q}{V} = \frac{q}{\frac{1}{4\pi\epsilon_0 K} \frac{q}{R}}$$

या
$$\boxed{C = 4\pi\epsilon_0 K R} \quad \dots(1)$$

या
$$C = \frac{K R}{9 \times 10^9}$$

$$\therefore C \propto R$$

अर्थात् किसी गोलाकार चालक की धारिता उसकी त्रिज्या के अनुक्रमानुपाती होती है।

यदि गोलीय चालक, किसी परावैद्युत माध्यम में स्थित हो जिसको परावैद्युततांक ϵ_r हो तो उसकी धारिता

$$C_m = \frac{q}{V} = 4\pi\epsilon_0\epsilon_r R$$

$$C_m = 4\pi\epsilon_0 R \epsilon_r$$

$$C_m = C \epsilon_r$$

$$\therefore \frac{C_m}{C} = \epsilon_r$$

अतः माध्यम का परावैद्युततांक माध्यम की विद्युत धारिता एवं वायु (निर्वात) की विद्युत धारिता के अनुपात के बराबर होती है।

प्रश्न 5. आवेशित चालकों के संयोजन से आवेशों का पुनर्वितरण समझाइये। आवेश के पुनर्वितरण के पश्चात् आवेशों का अनुपात ज्ञात कीजिये तथा ऊर्जा हानि का सूत्र व्युत्पन्न कीजिये।

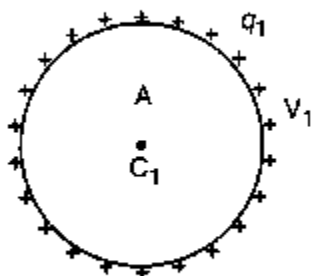
उत्तर: आवेशित चालकों के संयोजन से आवेश का पुनर्वितरण तथा *charge redistribution* (Re-distribution of Charges and Loss of Energy by the Combination of Charged Conductors)

माना C_1 व C_2 धारिता के दो चालक A व B हैं। इन्हें q_1 व q_2 आवेश देने पर इनके विभव V_1 व V_2 हो जाते हैं। इनकी ऊर्जाएँ क्रमशः U_1 व U_2 हैं।

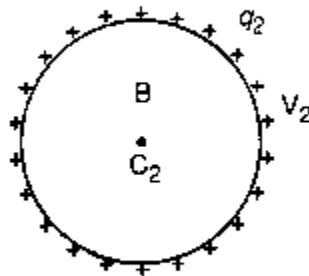
जब इन चालकों को किसी पतले संयोजक तार (connecting wire) द्वारा जोड़ देते हैं, तो अधिक विभव वाले चालक से कम विभव वाले चालक पर आवेश का स्थानान्तरण (transfer) तब तक होता रहेगा जब तक दोनों के विभव समान नहीं हो जाते। इसी समान विभव (V) को उभयनिष्ठ विभव (common potential) कहते हैं। दूसरे शब्दों में, चालकों को जोड़ने पर आवेशों का पुनर्वितरण (redistribution) हो जाता है, यद्यपि आवेश की कुल मात्रा $q_1 + q_2$ ही रहती है। प्रारम्भ में

एवं

$$\begin{aligned} q_1 &= C_1 V_1 \\ q_2 &= C_2 V_2 \end{aligned}$$

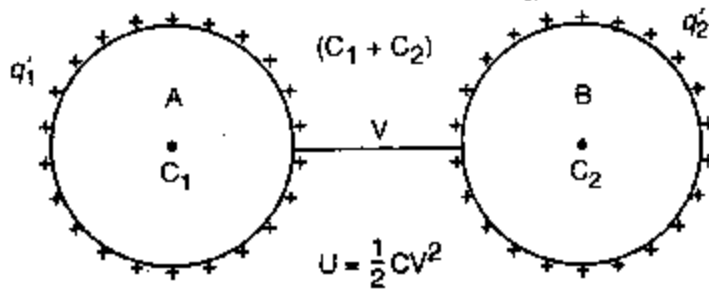


$$U_1 = \frac{1}{2} C_1 V_1^2$$



$$U_2 = \frac{1}{2} C_2 V_2^2$$

(अ) चालक तार जोड़ने से पूर्व



चित्र 4.28

(i) उभयनिष्ठ विभव (Common Potential)- यदि संयोजक तार की धारिता नगण्य (negligible) मान लें, तो पूरे संयोजन की धारिता $C = (C_1 + C_2)$ होगी।

$$\therefore \text{उभयनिष्ठ विभव} = \frac{\text{कुल आवेश}}{\text{कुल धारिता}}$$

$$\text{या} \quad V = \frac{q_1 + q_2}{C_1 + C_2}$$

$$\text{या} \quad \boxed{V = \frac{C_1 V_1 + C_2 V_2}{C_1 + C_2}} \quad \dots(1)$$

(ii) पुनर्वितरण के बाद (after redistribution) प्रत्येक चालक पर आवेश-चालकों को जोड़ने के बाद आवेशों के पुनर्वितरण के पश्चात् चालक A व B पर आवेश क्रमशः

$$\text{और} \quad q_2' = C_2 V$$

$$\therefore \frac{q_1'}{q_2'} = \frac{C_1}{C_2} \quad \dots(2)$$

अर्थात् आवेशों के पुनर्वितरण के पश्चात् चालकों पर आवेशों का अनुपात उनकी धारिताओं के अनुपात में होता है।

$$\text{यदि} \quad V_1 > V_2$$

$$\text{तब} \quad V_1 > V > V_2$$

अतः प्रथम चालक पर विभव—

$$\Delta V_1 = V_1 - V = V_1 - \left(\frac{C_1 V_1 + C_2 V_2}{C_1 + C_2} \right)$$

$$\Delta V_1 = \frac{C_2(V_1 - V_2)}{C_1 + C_2} \quad \dots(3)$$

द्वितीय चालक के विभव में परिवर्तन—

$$\Delta V_2 = V - V_2 = \left(\frac{C_1 V_1 + C_2 V_2}{C_1 + C_2} \right) - V_2$$

$$\Delta V_2 = \frac{C_1(V_1 - V_2)}{C_1 + C_2} \quad \dots(4)$$

समी. (3) व समी. (4) से

$$\begin{aligned} \frac{\Delta V_1}{\Delta V_2} &= \frac{C_2(V_1 - V_2)/C_1 + C_2}{C_1(V_1 - V_2)/C_1 + C_2} \\ &= \frac{C_2}{C_1} \end{aligned}$$

ऊर्जा हानि (Energy Loss)

आवेशों के पुनर्वितरण प्रक्रिया में आवेश चालक तार से प्रवाहित होता है। इसके परिणामस्वरूप ऊर्जा की कुछ मात्रा ऊष्मा के रूप में परिवर्तित हो जाती है। इस परिवर्तन को ऊष्मा हानि कहते हैं। ऐसा चालक तार के प्रतिरोध के कारण होता है।

(ii) ऊर्जा का हास (Loss of Energy)-चालकों को जोड़ने के पश्चात् चालकों की विद्युत स्थितिज ऊर्जा कुछ कम हो जाती है, अतः ऊर्जा में कमी ΔU = जोड़ने के पहले कुल ऊर्जा – जोड़ने के बाद कुल ऊर्जा जोड़ने से पहले (before contact),

पहले चालक की विद्युत स्थितिज ऊर्जा

$$= \frac{1}{2} C_1 V_1^2$$

दूसरे चालक की विद्युत स्थितिज ऊर्जा

$$= \frac{1}{2} C_2 V_2^2$$

∴ जोड़ने से पहले दोनों चालकों की कुल स्थितिज ऊर्जा

$$U = \frac{1}{2} (C_1 V_1^2 + C_2 V_2^2)$$

दोनों चालकों को जोड़ने (after contact) पर संयुक्त धारिता $(C_1 + C_2)$ तथा उभयनिष्ठ विभव (common potential) V हो जाता है, अतः दोनों चालकों की कुल स्थितिज ऊर्जा

$$U' = \frac{1}{2} (C_1 + C_2) V^2$$

परन्तु $V = \frac{C_1 V_1 + C_2 V_2}{C_1 + C_2}$

अतः $U' = \frac{1}{2} (C_1 + C_2) \left(\frac{C_1 V_1 + C_2 V_2}{C_1 + C_2} \right)^2 \quad \dots(2)$

अतः ऊर्जा में कमी,

$$\Delta U = U - U'$$

या
$$\begin{aligned} \Delta U &= \left(\frac{1}{2} C_1 V_1^2 + \frac{1}{2} C_2 V_2^2 \right) - \frac{1}{2} C V^2 \\ &= \frac{1}{2} \left[C_1 V_1^2 + C_2 V_2^2 - (C_1 + C_2) \frac{(C_1 V_1 + C_2 V_2)^2}{(C_1 + C_2)^2} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[C_1 V_1^2 + C_2 V_2^2 - \frac{(C_1 V_1 + C_2 V_2)^2}{(C_1 + C_2)} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{(C_1 + C_2) (C_1 V_1^2 + C_2 V_2^2) - (C_1 V_1 + C_2 V_2)^2}{(C_1 + C_2)} \right] \end{aligned}$$

या
$$\begin{aligned} \Delta U &= \frac{1}{2(C_1 + C_2)} [C_1^2 V_1^2 + C_1 C_2 V_2^2 \\ &\quad + C_1 C_2 V_1^2 + C_2^2 V_2^2 - C_1^2 V_1^2 \\ &\quad - C_2^2 V_2^2 - 2C_1 C_2 V_1 V_2] \\ &= \frac{1}{2(C_1 + C_2)} [C_1 C_2 V_2^2 + C_1 C_2 V_1^2 \\ &\quad - 2C_1 C_2 V_1 V_2] \\ &= \frac{C_1 C_2}{2(C_1 + C_2)} [V_2^2 + V_1^2 - 2V_1 V_2] \end{aligned}$$

या
$$\Delta U = \frac{C_1 C_2}{2(C_1 + C_2)} (V_1 - V_2)^2 \quad \dots(3)$$

(i) यदि $V_1 = V_2$ तो $(V_1 - V_2) = 0$

$\therefore \Delta U = 0$

अर्थात् जब दोनों चालकों के विभव समान होते हैं, तो ऊर्जा में कोई कमी नहीं होती है क्योंकि इस स्थिति में उन्हें जोड़ने पर आवेशों का पुनर्वितरण नहीं होता है।

(ii) जब $V_1 \neq V_2$ तो $(V_1 - V_2)^2 = 0$

$\therefore \Delta U > 0$

अर्थात् ऊर्जा में कमी होगी। ऊर्जा में कमी (loss of energy) का कारण चालकों के मध्य आवेश का पुनर्वितरण (sharing of charges) है। आवेश का प्रवाह संयोजक तार से होकर होता है, अतः संयोजक तार के प्रतिरोध के विरुद्ध (against the resistance of connecting wire) आवेश के प्रवाहित होने में किया गया कार्य ऊष्मा में बदल जाता है। यही ऊर्जा में कमी का कारण है।

आंकिक प्रश्न

प्रश्न 1. एक गोलाकार चालक की धारिता 1pF है। इसकी त्रिज्या ज्ञात कीजिये।

हल: गोलीय चालक की धारिता (C) = 1pF = 1×10^{-12} F

त्रिज्या (R) = ?

गोलीय चालक की धारिता (C) = $4\pi \epsilon_0 R$

$$R = \frac{C}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9 \times 1 \times 10^{-12}$$

$$= 9 \times 10^{-3} = 9\text{mm.}$$

प्रश्न 2. एक समान्तर प्लेट संधारित्र की प्रत्येक प्लेट का क्षेत्रफल 100 cm तथा दोनों प्लेटों के मध्य विद्युत क्षेत्र की तीव्रता 100N/C है। प्रत्येक प्लेट पर आवेश कितना है ?

उत्तर: दिया है- (A) क्षेत्रफल = $100 \text{ cm}^2 = 100 \times 10^{-4} \text{ m}^2$

विद्युत क्षेत्र (E) = 100N/C

$$\text{विद्युत क्षेत्र की तीव्रता (E)} = \frac{\sigma}{A} = \frac{q}{A\epsilon_0}$$

$$\therefore q = A\epsilon_0 E = 100 \times 10^{-4} \times 8.86 \times 10^{-12} \times 100$$

$$= 8.86 \times 10^{-12} \text{ C (प्रत्येक प्लेट पर)}$$

प्रश्न 3. किसी समान्तर प्लेट संधारित्र को एक निश्चित विभवान्तर पर रखा जाता है। इसके विभवान्तर पद रखा जाता है। इसके विभवान्तर को समान रखते हुए प्लेटों के मध्य 3mm मोटी स्लैब रखी जाती है तो प्लेटों के मध्य दूरी 2.4mm बढ़ानी पड़ती है। स्लैब के परावैद्युतांक की गणना कीजिये।

$$\text{हल: समान्तर प्लेट संधारित्र की धारिता (C)} = \frac{\epsilon_0 A}{d} \dots\dots\dots (1)$$

t मोटाई का परावैद्युतांक रखने पर धारिता

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d - t + \frac{t}{K}} \dots\dots\dots (2)$$

चूँकि परावैद्युत पट्टिका रखने पर संधारित्र के आवेश में कोई परिवर्तन नहीं होता है। अतः समान्तर प्लेटों के मध्य विभवान्तर को समान बनाये रखने के लिये उसकी धारिता को प्रारम्भिक मान के बराबर ही होना होगा।

यदि अब उसकी प्लेटों के मध्य दूरी d' हो तो

$$C = C_K$$

$$\frac{\epsilon_0 A}{d} = \frac{\epsilon_0 A}{d' - t + \frac{t}{K}}$$

$$d' - t + \frac{t}{K} = d$$

$$\therefore d' - d = t - \frac{t}{K} = t \left(1 - \frac{1}{K} \right) \dots\dots(3)$$

$$\text{प्रश्नानुसार } d' - d = 2.4 \text{ mm} = 2.4 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$t = 3 \text{ mm} = 3 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$2.4 \times 10^{-3} = 3 \times 10^{-3} \left(1 - \frac{1}{K} \right)$$

$$\frac{24}{30} = 1 - \frac{1}{K}$$

$$\frac{1}{K} = 1 - \frac{24}{30} = \frac{30 - 24}{30}$$

$$\therefore K = \frac{30}{6} = 5.$$

प्रश्न 4. दो संधारित्र की धारितायें क्रमशः $2\mu\text{F}$ तथा $4\mu\text{F}$ हैं। जब इनको क्रमशः श्रेणीक्रम में तथा समान्तर क्रम में जोड़ा जाता है तो इनकी तुल्य धारिताओं की तुलना कीजिये।

हल: श्रेणीक्रम में संयोजन से—

$$C_s = \frac{C_1 \times C_2}{C_1 + C_2} = \frac{2\mu\text{F} \times 4\mu\text{F}}{6\mu\text{F}} = \frac{8\mu\text{F}}{6} = \frac{4\mu\text{F}}{3}$$

समान्तर क्रम में धारिता—

$$C_p = C_1 + C_2 = 2\mu\text{F} + 4\mu\text{F} = 6\mu\text{F}$$

$$\frac{C_s}{C_p} = \frac{4\mu\text{F}}{3 \times 6\mu\text{F}} = \frac{2}{9}$$

प्रश्न 5. दो आवेशित धातु के गोलों की त्रिज्यायें क्रमशः 0.05m तथा 0.10m हैं। प्रत्येक गोले पर $75\mu\text{C}$ आवेश है। इन गोलों को पतले तार द्वारा जोड़ने पर (i) उभयनिष्ठ विभव तथा (ii) आवेश प्रवाह की मात्रा ज्ञात करो।

हल: (i) प्रथम आवेशित धातु के गोले की धारिता $C_1 = 4\pi\epsilon_0 R_1$

द्वितीय आवेशित धातु के गोले की धारिता $C_2 = 4\pi\epsilon_0 R_2$

$$\begin{aligned} \text{उभयनिष्ठ विभव (V)} &= \frac{q_1 + q_2}{C_1 + C_2} \\ &= \frac{75\mu\text{C} + 75\mu\text{C}}{4\pi\epsilon_0 R_1 + 4\pi\epsilon_0 R_2} \\ &= \frac{150\mu\text{C}}{4\pi\epsilon_0 (R_1 + R_2)} \\ &= \frac{150 \times 10^{-6} \times 9 \times 10^9}{(0.10 + 0.05)} \\ &= \frac{150 \times 10^{-6} \times 9 \times 10^9}{0.15} = 9 \times 10^6 \text{V} \end{aligned}$$

प्रश्न 6. 150 वोल्ट पर आवेशित $2\mu\text{F}$ धारिता के एक गोलीय चालक का सम्बन्ध $1\mu\text{F}$ के किसी निरावेशित गोले से कर दिया जाता है। उभयनिष्ठ विभव की गणना करो। प्रत्येक चालक पर आवेश का मान भी ज्ञात करो।

हल: दिया है- $V_1 = 150$ वोल्ट, $V_2 = 0$ (निरावेशित है),

$C_1 = 2\mu\text{F}$ तथा $C_2 = 1\mu\text{F}$

$$\text{अतः उभयनिष्ठ विभव (V)} = \frac{q_1 + q_2}{C_1 + C_2} = \frac{C_1 V_1 + C_2 V_2}{C_1 + C_2}$$

$$V = \frac{2 \times 150 \mu\text{C} + 0}{3 \mu\text{F}} = 100\text{V}$$

$2 \mu\text{F}$ वाले संधारित्र पर आवेश—

$$\begin{aligned} q_1 &= C_1 V = 2 \times 10^{-6} \times 100 \\ &= 200 \times 10^{-6} \text{C} = 200 \mu\text{C} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 \mu\text{F} \text{ वाले संधारित्र पर आवेश—} q_2 &= C_2 V = 1 \times 10^{-6} \times 100 \\ &= 100 \mu\text{C} \end{aligned}$$

प्रश्न 7. 125 बूंदों को 200 वोल्ट के विभव तक आवेशित किया जाता है। इन बूंदों को मिलाकर एक बड़ी बूंद बनाते हैं। इससे विभव तथा ऊर्जा में परिवर्तन की गणना कीजिये।

हल: 125 छोटी बूंद का आयतन = एक बड़ी बूंद का आयतन

$$125 \times \frac{4}{3} \pi s^2 = \frac{4}{3} \pi b^3$$

$$\boxed{5s = b}$$

$$\text{छोटी बूंद पर विभव (V}_s\text{)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{s} = 200 \quad \dots(1)$$

$$\text{बड़ी बूंद पर विभव (V}_b\text{)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{125q}{5s} \quad \dots(2)$$

$$\frac{200}{V_b} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{s} \times \frac{4\pi\epsilon_0 \times 5s}{125q}$$

$$\frac{200}{V_b} = \frac{5}{125} = \frac{1}{25}$$

$$V_b = 200 \times 25 = 5000 \text{ वोल्ट}$$

$$\text{एक छोटी बूंद की ऊर्जा} = \frac{1}{2} C_1 V_1^2$$

$$U_s = \frac{1}{2} 4\pi\epsilon_0 s \times (200)^2 \quad \dots(1)$$

∴ 125 छोटी बूंदों की ऊर्जा—

$$U_{TS} = 125 \times \frac{1}{2} 4\pi\epsilon_0 s \times (200)^2 \quad \dots(2)$$

एक बड़ी बूंद की ऊर्जा—

$$U_b = \frac{1}{2} C_2 V_2^2 = \frac{1}{2} 4\pi\epsilon_0 b \times (5000)^2 \dots(3)$$

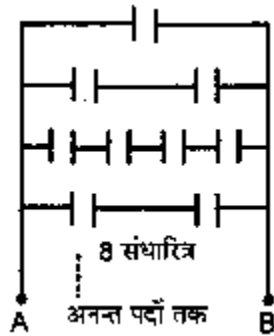
$$\frac{U_b}{U_{TS}} = \frac{\frac{1}{2} 4\pi\epsilon_0 b \times (5000)^2}{125 \times \frac{1}{2} 4\pi\epsilon_0 s (200)^2}$$

$$\frac{U_b}{U_{TS}} = \frac{5s \times (5000)^2}{125 \times (200)^2 \times s}$$

$$\frac{U_b}{U_{TS}} = 25$$

$$U_b = 25 \times U_{TS}$$

प्रश्न 8. चित्र में प्रत्येक संधारित्र की धारिता $1\mu F$ है। A व B के मध्य तुल्य धारिता ज्ञात कीजिये।



हल: प्रत्येक भुजा की धारिता

$$C_1 = 1\mu F$$

$$C_2 = \frac{1}{2}\mu F$$

$$C_3 = \frac{1}{4}\mu F$$

तथा $C_4 = \frac{1}{8}\mu F$

यह क्रम जारी रहेगा।

∴ सभी को समान्तर क्रम में जोड़ने पर—

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 \dots \text{अनन्त पदों तक}$$

$$C_{eq} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \text{अनन्त पदों तक}$$

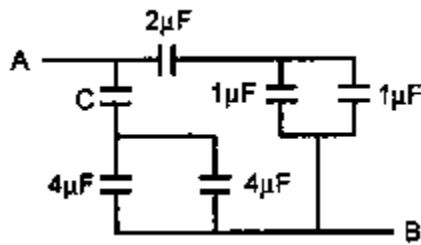
∴ प्रथम पद (a) = 1

$$\text{सार्वनुपात } (r) = \frac{1}{2}$$

$$\therefore S_{\infty} = \frac{a}{1-r} \text{ से}$$

$$C_{eq} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2\mu F.$$

प्रश्न 9. चित्र में A व B के मध्य तुल्य धारिता $5\mu F$ है। संधारित्र C की धारिता ज्ञात करो।



हल: A तथा B के मध्य तुल्य धारिता $C_{\text{तुल्य}} = 5\mu F$

$1\mu F$ तथा $1\mu F$ को समान्तर क्रम में जोड़ने पर

$$C' = C_1 + C_2 = 1\mu F + 1\mu F = 2\mu F$$

C' तथा $2\mu F$ को श्रेणीक्रम में जोड़ने पर

$$\begin{aligned} \frac{1}{C''} &= \frac{1}{C'} + \frac{1}{2\mu F} = \frac{1}{2\mu F} + \frac{1}{2\mu F} \\ &= \frac{1+1}{2\mu F} \end{aligned}$$

$$C'' = \frac{2\mu F}{2} = 1\mu F$$

$4\mu F$ तथा $4\mu F$ को समान्तर क्रम में जोड़ने पर—

$$C''' = C_1 + C_2 = 4\mu F + 4\mu F = 8\mu F$$

C''' तथा C को श्रेणीक्रम में जोड़ने पर—

$$C'''' = \frac{C \times C'''}{C + C'''} = \frac{8C}{8 + C}$$

C'''' तथा C'' को समान्तर क्रम में जोड़ने पर CAB के मध्य तुल्य धारिता प्राप्त होगी।

$$C_{\text{तुल्य}} = C' + C''$$

$$= 1\mu\text{F} + \left(\frac{8C}{8+C}\right)\mu\text{F}$$

प्रश्नानुसार— $C_{\text{तुल्य}} = 5\mu\text{F}$

$$5\mu\text{F} = 1\mu\text{F} + \left(\frac{8C}{8+C}\right)\mu\text{F}$$

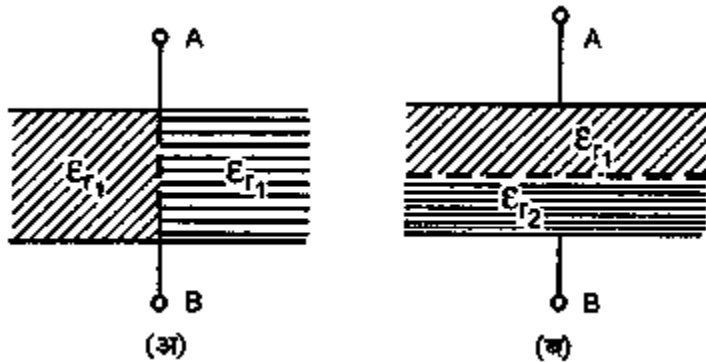
$$\left(\frac{8C}{8+C}\right)\mu\text{F} = 4\mu\text{F}$$

$$\frac{2C}{8+C} = 1$$

$$2C = 8+C$$

$$C = 8\mu\text{F}$$

प्रश्न 10. चित्र में दर्शाये गये संधारित्रों की धारिता ज्ञात कीजिये। प्रत्येक प्लेट का क्षेत्रफल A व प्लेटों के मध्य की दूरी d है।



हल: प्रथम चित्र (अ) में अनुप्रस्थ काट से दो बराबर भागों में बँटा। इसलिए यह दोनों संधारित्र समान्तर क्रम में जुड़ेंगे।

$$C_1 = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 A}{2d} \text{ तथा } C_2 = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 A}{2d}$$

$$\therefore C_p = C_1 + C_2 = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 A}{2d} + \frac{\epsilon_r \epsilon_0 A}{2d}$$

$$= \frac{\epsilon_0 A}{2d} [\epsilon_r + \epsilon_r]$$

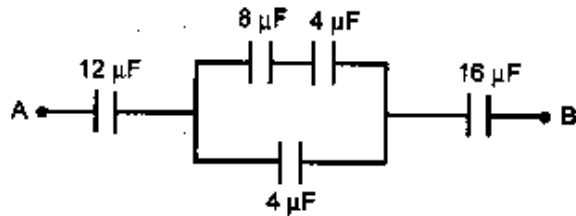
द्वितीय चित्र (ब) में संधारित्र के बीच की दूरी दो बराबर भागों में बँटी है इसलिये यह दोनों संधारित्र श्रेणीक्रम में संयोजित होंगे।

$$C_1 = \frac{2\epsilon_r \epsilon_0 A}{d} \text{ तथा } C_2 = \frac{2\epsilon_r \epsilon_0 A}{d}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{C_s} &= \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \\ &= \frac{d}{2\epsilon_0 \epsilon_{r_1} A} + \frac{d}{2\epsilon_0 \epsilon_{r_2} A} \\ &= \frac{d}{2\epsilon_0 A} \left[\frac{1}{\epsilon_{r_1}} + \frac{1}{\epsilon_{r_2}} \right] \\ \frac{1}{C_s} &= \frac{d}{2\epsilon_0 A} \left[\frac{\epsilon_{r_2} + \epsilon_{r_1}}{\epsilon_{r_1} \epsilon_{r_2}} \right] \end{aligned}$$

$$\therefore C_s = \frac{2\epsilon_0 A [\epsilon_{r_1} \epsilon_{r_2}]}{d [\epsilon_{r_2} + \epsilon_{r_1}]}$$

प्रश्न 11. चित्र में A तथा B के मध्य तुल्य धारिता ज्ञात कीजिये।



हल: $8\mu\text{F}$ तथा $4\mu\text{F}$ को श्रेणीक्रम में जोड़ने पर

$$\begin{aligned} C' &= \frac{C_1 \times C_2}{C_1 + C_2} = \frac{8 \times 4}{8 + 4} \mu\text{F} \\ &= \frac{32}{12} = \frac{8}{3} \mu\text{F} \end{aligned}$$

C' तथा $4\mu\text{F}$ को समान्तर क्रम में जोड़ने पर—

$$\begin{aligned} C'' &= C' + C_1 = \frac{8}{3} \mu\text{F} + 4\mu\text{F} \\ &= \frac{20}{3} \mu\text{F} \end{aligned}$$

C'' , $12\mu\text{F}$ तथा $16\mu\text{F}$ को श्रेणीक्रम में जोड़ने पर—

$$\frac{1}{C_{\text{तुल्य}}} = \frac{1}{C''} + \frac{1}{12\mu\text{F}} + \frac{1}{16\mu\text{F}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{3}{30\mu\text{F}} + \frac{1}{12\mu\text{F}} + \frac{1}{16\mu\text{F}} \\
&= \frac{36 + 20 + 15}{240\mu\text{F}} \\
&= \frac{240}{71} \mu\text{F} \\
C_{\text{कुल}} &= \frac{240}{71} \mu\text{F}
\end{aligned}$$

प्रश्न 12. एक विलगित चालक को दूसरे संकेन्द्रीय गोलीय चालक जिसका बाहरी पृष्ठ पृथ्वी से सम्बन्धित है, से ढक देते हैं। इन गोलीय चालकों की त्रिज्याओं का अनुपात $\frac{n}{n-1}$ है। सिद्ध कीजिये कि इस समायोजन से गोलीय चालक की धारिता गुना बढ़ जाती है।

हल: माना गोलीय चालक की त्रिज्या r_2 है तथा r_1 त्रिज्या से ढका जाता है।

गोलीय चालक की धारिता $(C_2) = 4\pi\epsilon_0 r_2 \dots\dots\dots(1)$

द्वितीय स्थिति में द्वितीय स्थिति में आधारित गोलीय चालक की संधारित्र की धारिता

$$(C_2) = \frac{4\pi\epsilon_0 r_1 r_2}{r_1 - r_2} \dots\dots\dots(2)$$

समी. (1)/(2)

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{\frac{4\pi\epsilon_0 r_2}{r_1 - r_2}}{\frac{4\pi\epsilon_0 r_1 r_2}{r_1 - r_2}} = \frac{r_1 - r_2}{r_1}$$

$$\frac{C_1}{C_2} = 1 - \frac{r_2}{r_1}$$

∴ प्रश्नानुसार—

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{n}{n-1}$$

$$\therefore \frac{C_1}{C_2} = 1 - \left(\frac{n-1}{n} \right) = \frac{n-n+1}{n}$$

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{1}{n}$$

$$\therefore C_2 = nC_1$$

प्रश्न 13. एक समान्तर प्लेट संधारित्र द्वारा संचित ऊर्जा घनत्व $4.43 \times 10^{-10} \text{ J/m}^3$ है। संधारित्र की प्लेटों के मध्य विद्युत क्षेत्र की तीव्रता ज्ञात कीजिये। $\epsilon_0 = 8.86 \times 10^{-12} \text{ F/m}$.

हल: ऊर्जा घनत्व (u) = $4.43 \times 10^{-10} \text{ J/m}$

विद्युत क्षेत्र की तीव्रता $E = ?$

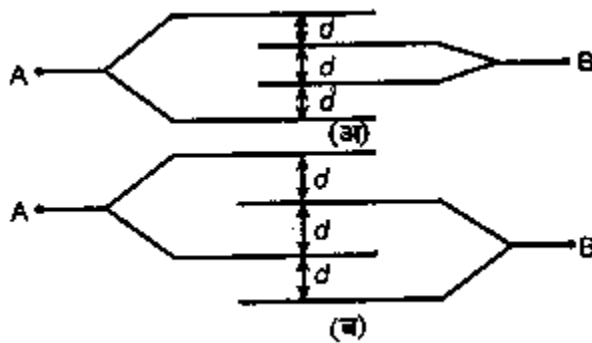
$$\text{ऊर्जा घनत्व } (u) = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

$$4.43 \times 10^{-10} = \frac{1}{2} \times 8.86 \times 10^{-12} \times E^2$$

$$E = \sqrt{\frac{2 \times 4.43 \times 10^{-10}}{8.86 \times 10^{-12}}}$$

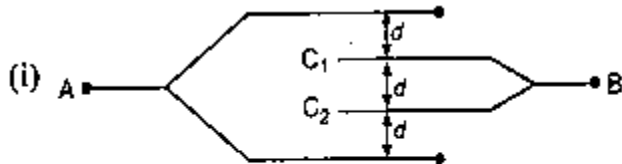
$$= \sqrt{100} = 10 \text{ N/C}$$

प्रश्न 14. चित्र में प्रदर्शित निकाय के मध्य की धारिता कितनी होगी यदि प्रत्येक प्लेट का क्षेत्रफल A तथा दो निकटवर्ती प्लेटों के मध्य की दूरी d हो ?



हुल: महत्वपूर्ण दिशा निर्देश- इस प्रकार के प्रश्नों में एक प्लेट को धनात्मक तथा दूसरी को ऋणात्मक मानने पर, यदि

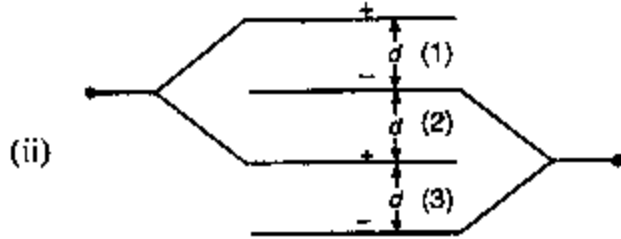
- (1) + प्लेट एक स्थान पर तथा - प्लेट दूसरे स्थान पर प्राप्त हो तो क्रम समानान्तर होगा।
- (2) - प्लेट के आगे दूसरी + प्लेट तथा दूसरी -प्लेट के आगे तीसरी (+) है तो श्रेणीक्रम होता है।



$$C_1 = \frac{\epsilon_0 A}{d} \text{ तथा } C_2 = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

(चूँकि दो (-) प्लेट एक साथ हैं, इसलिए यह संधारित्र नहीं है।)

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\epsilon_0 A}{d} + \frac{\epsilon_0 A}{d} = \frac{2\epsilon_0 A}{d}$$



$$C_1 = \frac{\epsilon_0 A}{d},$$

$$C_2 = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

तथा

$$C_3 = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

$$C = C_1 + C_2 + C_3$$

$$= \frac{\epsilon_0 A}{d} + \frac{\epsilon_0 A}{d} + \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

$$= \frac{3\epsilon_0 A}{d}$$

प्रश्न 15. C धारिता के संधारित्रों को श्रेणीक्रम में संयोजित करने पर तुल्य धारिता C_s तथा समान्तर क्रम में संयोजित करने पर तुल्य धारिता C_p है। सिद्ध कीजिये – $C_p - C_s = \frac{(n^2 - 1)}{n} C$

हल: श्रेणीक्रम में संयोजन से

$$\begin{aligned}\frac{1}{C_s} &= \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots \frac{1}{C_n} \\ &= \frac{1}{C} + \frac{1}{C} + \frac{1}{C} + \dots \frac{n \text{ पदों तक}}{C} \\ &= \frac{n}{C}\end{aligned}$$

$$\therefore C_s = \frac{C}{n} \quad \dots(1)$$

समान्तर क्रम में संयोजन से—

$$\begin{aligned}C_p &= C_1 + C_2 + C_3 \dots n \text{ पदों तक} \\ C_p &= C + C + C \dots n \text{ पदों तक} \\ C_p &= nC \quad \dots(2)\end{aligned}$$

प्रश्नानुसार—

$$\begin{aligned}C_p - C_s &= nC - \frac{C}{n} \\ &= \left(n - \frac{1}{n}\right)C = \left(\frac{n^2 - 1}{n}\right)C\end{aligned}$$

प्रश्न 16. एक समान्तर प्लेट संधारित्र में प्रयुक्त प्लेट की त्रिज्या 10 cm है। यदि प्लेटों के मध्य की दूरी 10cm हो तो हवा के लिये संधारित्र की धारिता ज्ञात कीजिये।

हल: प्लेट की त्रिज्या = 10cm = 10×10^{-2} m
 प्लेट की अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल (A) = πr^2
 $= \pi \times (10 \times 10^{-2})^2$
 प्लेटों के मध्य दूरी (d) = 10cm = 10×10^{-2} मी.
 समान्तर प्लेट संधारित्र की धारिता (C) = $\frac{\epsilon_0 A}{d}$

$$C = \frac{8.86 \times 10^{-12} \times 3.14 \times (10 \times 10^{-2})^2}{10 \times 10^{-2}}$$

 $= 2.78 \times 10^{-12} \text{F}$
 $= 2.78 \mu\text{F}.$