# रैरिवक प्रोग्रामन

## Ex 15.1

**प्रश्न 1.. निम्न रैखिक प्रोगामन समस्याओं को आलेखीय विधि से हल करो**
**निम्नतम Z = – 3x + 4y**
**व्यवरोध x + 2y ≤ 8**
**3x + 2y ≤ 12**
**तथा x ≥ 0, y ≥ 0**

**हल :** अवरोध के रूप में दी गई सभी असमिका को समीकरणों में बदलने पर,
x + 2y = 8 …(1)
3x + 2 = 12 …(2)
असमिका x + 2 = 8 द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र—
रेखा x + 2y = 8 निर्देशी अक्षों को A(8, 0) तथा B(0, 4) बिंदुओं पर मिलती है।
x + 2y = 8 के मानों के लिए सारणी

| | | |
|---|---|---|
| x | 8 | 0 |
| y | 0 | 4 |

A(8, 0), B(0, 4)
बिंदुओं A तथा B को अंकित कर रेखा का आलेख खींचते हैं।
असमिका में मूल बिन्दु (0, 0) को प्रतिस्थापित करने पर 0 + 2(0) = 0 < 8 असमिका सन्तुष्ट होती हैं।
अतः असमिका को हल क्षेत्र मूल बिन्दु की ओर होगा।
असमिका 3r + 2y ≤ 12 द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र–
रेखा 3x + 2y = 12 निर्देशी अर्को को क्रमश: C(4, 0) तथा D(0, 6) बिंदुओं पर मिलती है।
3x + 2y = 12 के मानों के लिए सारणी

| | | |
|---|---|---|
| x | 4 | 0 |
| y | 0 | 6 |

C(4, 0), D(0, 6)
बिन्दु C और D को अंकित कर रेखा का आलेख खींचते हैं। असमिका में मूल बिन्दु (0, 0) को प्रतिस्थापित करने पर 3(0) + 2(0) = 0 < 12 असमिका सन्तुष्ट होती है। अत: असमिका का हल थक्षेत्र मूल बिंदु की ओर होगा I x > 0, y > 0 द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र –
चूंकि प्रथम पाद का प्रत्येक बिंदु इन दोनों असमिकाओं को सन्तुष्ट करता है। अतः असमिकाओं x ≥ 0 तथा y ≥ 0 द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र प्रथम पाद है।

छायांकित क्षेत्र QCEB उपरोक्त असमिकाओं का उभयनिष्ठ क्षेत्र प्रदर्शित करता है। यह क्षेत्र दी गई रैखिक प्रोग्रामन समस्या का हल क्षेत्र है। छायांकित सुसंगत क्षेत्र के कोणीय बिंदुओं के निर्देशांक O(0, 0), C(4, 0), E(2, 3) तथा B(0, 4) है। जहाँ बिंदु E को दोनों रेखाओं।
$x + 2y = 8$ तथा $3x + 2y = 12$ के प्रतिच्छेद से प्राप्त किया गया है। इन बिंदुओं पर उद्देश्य फलन के मान निम्न तालिका में दिये गये है।

| **बिन्द,** | **x निर्देशांक** | **y निर्देशांक** | **उद्देश्य फलन Z = 3x+4y** |
|---|---|---|---|
| O | 0 | 0 | $Z_O = -3(0)+4(0) = 0$ |
| C | 4 | 0 | $Z_C = -3(4)+4(0) = -12$ |
| E | 2 | 3 | $Z_E = -3(2)+4(3) = 6$ |
| B | 0 | 4 | $Z_B = -3(0)+4(4) = 16$ |

सारणी से स्पष्ट है कि बिंदु C(4, 0) पर फलन का मान निम्नतम है। अतः $x = 4$, $y = 0$ दी गई रैखिक प्रोग्रामन समस्या का इष्टतम हल है तथा निम्नतम मान – 12 है।

**प्रश्न 2. अधिकतम Z = 3x + 4y**
**ध्व्यवरोध x + y ≤ 4**
**तथा x ≥ 0, y ≥ 0**

**हल :** व्यवरोध के रूप में दी गई समिका $x + y \leq 4$ को समीकरण में परिवर्तित करने पर
$x + y = 4$
असमिका $x + y = 4$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र –
रेखा $x + y = 4$ निर्देशी अक्षों को क्रमशः A(4, 0) तथा B(0, 4) बिंदुओं पर मिलती है।
$x + y = 4$ के मानों के लिए सारणी

| | | |
|---|---|---|
| x | 4 | 0 |
| y | 0 | 4 |

A(4,0); B(0, 4)
बिंदुओं A तथा B को अंकित कर रेखा का आलेख खचते हैं।
असमिका में मूल बिंदु प्रतिस्थापित करने पर $0 + 0 \leq 0 \leq 4$ असमिका को सन्तुष्ट करते हैं। अत: हल क्षेत्र मूल बिंदु की ओर होगा।

$x \geq 0$ तथा $y \geq 0$

द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र चूंकि प्रथम पद का प्रत्येक बिंदु इन दोनों असमिकाओं को सन्तुष्ट करता है। अतः असमिकाओं $x \geq 0$ तथा $y \geq 0$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र प्रथम पाद है।
छायांकित क्षेत्र OAB उपरोक्त असमिकाओं का उभयनिष्ठ क्षेत्र प्रदर्शित करता है। यही क्षेत्र दी गई रैखिक प्रोग्रामन संख्या का सुसंगत हल क्षेत्र है। छायांकित सुसंगत क्षेत्र के कोणीय बिंदुओं के निर्देशांक O(0, 0), A(4, 0) तथा B(0, 4) हैं।
इन बिन्दुओं पर उद्देश्य फलन के मान निम्न तालिका में दिये गये हैं।

| **बिन्द,** | **x निर्देशांक** | **y निर्देशांक** | उद्देश्य फलन $Z = 3x+4y$ |
|---|---|---|---|
| O | 0 | 0 | $Z_O = -3(0)+4(0) = 0$ |
| A | 4 | 0 | $Z_A = 3(4)+4(0) = 12$ |
| B | 0 | 4 | $Z_B = 3(0)+4(4) = 16$ |

सारणी से स्पष्ट है कि बिंदु (0, 4) पर
फलन का मान अधिकतम है। अतः $x = 0, y = 4$ पर दी गई रैखिक प्रोग्रामन समस्या का इष्टतम हल है तथा अधिकतम मान $Z = 16$ है।

**प्रश्न 3.**
**निम्नतम $Z = -50x + 20y$**
**व्यवरोध $2x - y \geq -5$**
**$3x + y \geq 12$**
**$2x - 3y \leq 12$**
**तथा $x \geq 0, y \geq 0$**

**हल :** यवरोध के रूप में दी गई असमिकाओं को समीकरण के रूप में लिखने पर।
$2x - y = -5$ ...(1)
$3x + y = 12$ ....(2)
$2x - 3y = 12$
असमिका $2x - y = -5$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र
रेख $2x - y = -5$ निर्देशी अक्षों को क्रमशः A($\frac{-5}{2}$,0) तथा B(0, 5) बिंदुओं पर मिलती है।
$x - y = -5$ के मानों के लिए सारणी

| | | |
|---|---|---|
| x | -5/2 | 0 |
| y | 0 | 5 |

A(-5/2, 0); B(0, 5)
बिंदुओं A तथा B को अंकित कर रेखा का आलेख खींचते है। असमिका में मूल बिंदु प्रतिस्थापित करने पर
2(0) – (0) = 0 ≥ = – 5
असमिका को सन्तुष्ट करते है अतः समस्या का हल क्षेत्र मूल बिंदु की ओर होगा।
3x + y ≥ 12 द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र –
रेखा 3x + y = 12 निर्देशी अक्षों को क्रमशःA(4,0) तथा B(0, 12) बिंदुओं पर मिलती है।
3x + y =12 के मानों के लिए सारणी

| | | |
|---|---|---|
| x | 4 | 0 |
| y | 0 | 12 |

C(4, 0); D(0, 12)
बिंदुओं C तथा D को अंकित कर रेखा का आलेख खचते है। असमिका में मूल बिंदु प्रतिस्थापित करने पर
3(0) + 0 = 0 ≥ 12
अतः असमिका सन्तुष्ट नहीं होती है। इसलिये असमिका का हल क्षेत्र मूल बिंदु के विपरीत ओर होगा।
2x – 3y ≤ 12 द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र –
रेखा 2x – 3y = 12 निर्देशी अक्षों को क्रमशः A(6,0) तथा B(0, -4) बिंदुओं पर मिलती है।
2x – 3y = 12 के मानों के लिए सारणी

| | | |
|---|---|---|
| x | 6 | 0 |
| y | 0 | – 4 |

E(6, 0); F(0, – 4)
बिंदुओं E तथा F को अंकित कर रेखा का आलेख खींचते हैं। असमिका में मूल बिंदु प्रतिस्थापित करने पर
।
2(0) – 3(0) = 0 ≤ 12
असमिका को सन्तुष्ट करते हैं। अतः असमिका का हल क्षेत्र मूल बंदु की ओर ही होगा।
x ≥ 0 तथा y ≥ 0 द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र –
चूंकि प्रथम पाद में प्रत्येक बिंदु इन दोनों असमिकाओं को सन्तुष्ट करता है अतः सुसंगत हुल क्षेत्र प्रथम पाद होगा।
2x – y = – 5 तथा
3x + y = 12 का प्रतिच्छेद बिंदु

$$x = \frac{7}{5}, y = \frac{39}{5}$$

$\Rightarrow G\left(\frac{7}{5}, \frac{39}{5}\right)$

$3x + y = 12$ तथा

$2x - 3y = 12$ का प्रतिच्छेद बिंदु

$$x = \frac{48}{11}, y = \frac{-12}{11}$$

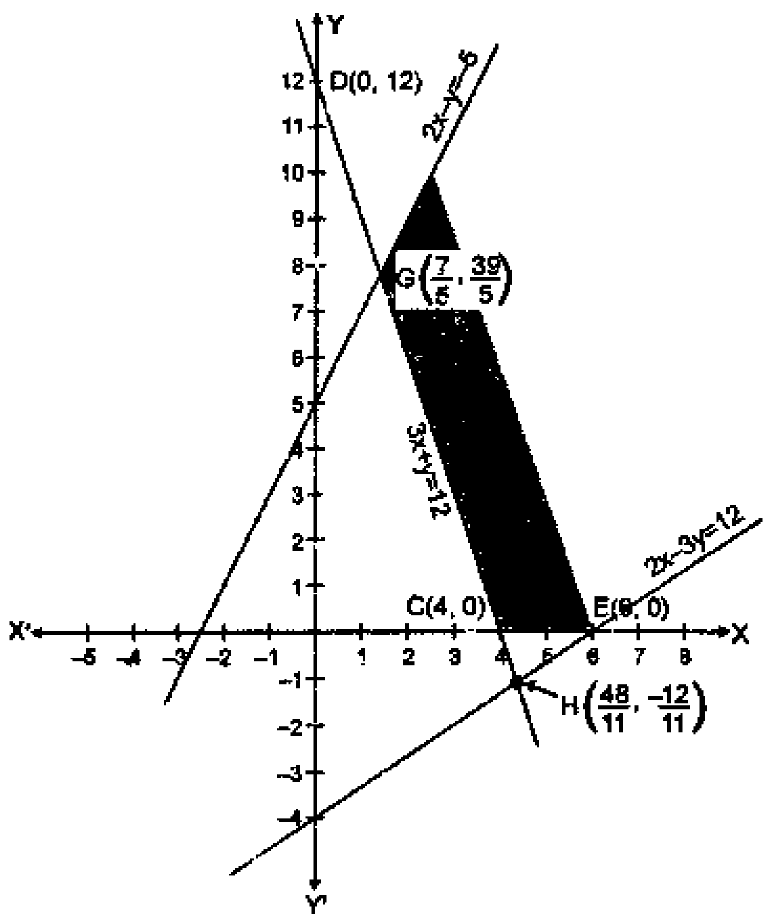
$\Rightarrow H\left(\frac{48}{11}, \frac{-12}{11}\right)$

तथा $2x - y = -5$ तथा

$2x - 3y = 12$ का प्रतिच्छेद बिन्दु

$$x = \frac{-27}{4}, y = \frac{-17}{2}$$

$\Rightarrow I\left(\frac{-27}{4}, \frac{-17}{2}\right)$



आलेख में छांयाकित क्षेत्र एक अपरिबद्ध क्षेत्र है जो दिये गये सभी व्यवरोधों को सन्तुष्ट नहीं करता।
अतः दिये गये अवरोधों के लिये उद्देश्य फलन का कोई निम्नतम मान विद्यमान नहीं है।

**प्रश्न 4.**
**निम्नतम Z = 3x + 5y**
**व्यवरोध x + 3y ≥ 3**
**x + y ≥ 2**
**तथा x ≥ 0, y ≥ 0**

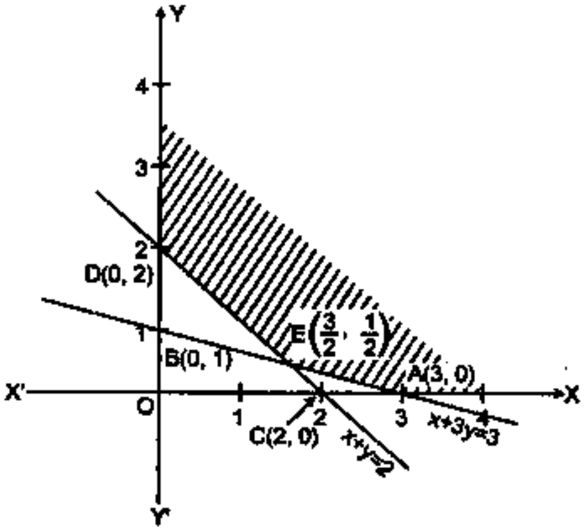
**हल :** व्यवरोध के रूप में दी गई असमिकाओं को समीकरण में परिवर्तित करने पर
x + 3y = 3 ….(1)
x + y = 2 …(2)
असमिका x + 3y ≥ 3 द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र –
रेखा x + 3y = 3 निर्देशी अक्षों को क्रमशः A(3, 0) तथा B(0, 1) बिंदुओं पर मिलती है।
x + 3y = 3 के गानों के लिए सारणी

| | | |
|---|---|---|
| x | 3 | 0 |
| y | 0 | 1 |

A(3, 0), B(0, 1)
बिंदुओं A(3, 0) तथा B(0, 1) को अंकित कर रेखा का आलेख खींचते हैं। असमिका में मूलबिंदु प्रतिस्थापित करने पर
0 + 3(0) = 0 ≥ 3
अतः असमिका सन्तुष्ट नहीं होती है, इसलिये असमिका का हल क्षेत्र मूलबिंदु के विपरीत ओर होगा।
असमिका x + y ≥ 2 द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र –
रेखा x + y = 2 निर्देशी अक्षों को क्रमशः बिंदु C(2, 0) तथा D(0, 2) बिंदुओं पर मिलती है।
x + y = 2 के मानों के लिए सारणी

| | | |
|---|---|---|
| x | 2 | 0 |
| y | 0 | 2 |

C(2, 0); D(0, 2)
बिंदुओं C(2, 0) तथा D(0, 2) को अंकित करके रेखा का आलेख खींचते है। असमिका में मूल बिंदु प्रतिस्थापित करने पर,
0 + 0 = 0 ≥ 2
अत: असमिका सन्तुष्ट नहीं होती है इसलिये असमिका का हल क्षेत्र मूल बिंदु के विपरीत और होगा।
x ≥ 0 तथा y ≥ 0
चूँकि प्रथम पाद में प्रत्येक बिंदु इन दोनों असमिकाओं को सन्तुष्ट करता है। अतः सुसंगत हल क्षेत्र प्रथम पाद में होगा।




x + 3y = 3 तथा x + y = 2 के प्रतिच्छेद बिंदु E के निर्देशांक होंगे।
छायांकित क्षेत्र AED सुसंगत अपरिबद्ध है। उपरोक्त असमिकाओं का उभयनिष्ठ क्षेत्र प्रदर्शित करता है।
यह क्षेत्र दी गई रैखिक प्रोग्रामन समस्या का सुसंगत हल क्षेत्र है। इस क्षेत्र के कोणीय बिंदुओं के निर्देशांक A(3, 0), E($\frac{3}{2}$,$\frac{1}{2}$) D(0, 2) हैं।
इन बिंदुओं पर उद्देश्य फलन के मान निम्न तालिका में दिये गये हैं।

| **बिन्द,** | **x निर्देशांक** | **y निर्देशांक** | **उद्देश्य फलन Z = 3x+4y** |
|---|---|---|---|
| O | 3 | 0 | $Z_O$ = 3×3+5(0) = 0 |
| E | $\frac{3}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $Z_E$ = $3\left(\frac{3}{2}\right)+5\left(\frac{1}{2}\right)$ = 7 |
| D | 0 | 2 | $Z_D$ = 3(0)+5(2) = 10 |

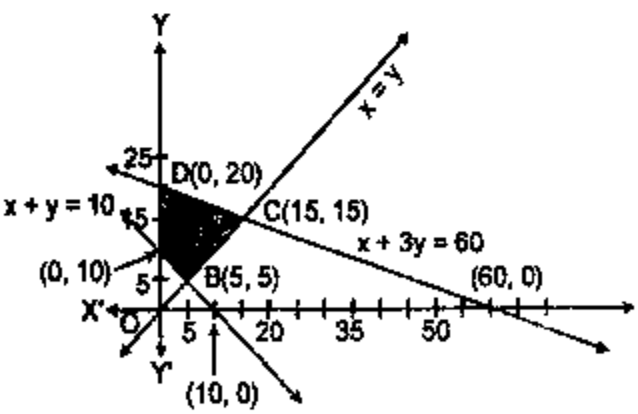
सारणी से स्पष्ट है कि बिंदु E($\frac{3}{2}$,$\frac{1}{2}$) पर फलन का मान निम्नतम है। अतः x =$\frac{3}{2}$, y = $\frac{1}{2}$ पर दी गई रैखिक प्रोग्रामन समस्या का इष्टतम हल है तथ निम्नतम मान Z = 7 है।

**प्रश्न 5. निम्नतम और अधिकतम मान ज्ञात कीजिए**
**जहाँ Z = 3x + 9y**
**व्यवरोध x + 3y ≤ 60**
**x + y ≥ 10**
**तथा x ≥ 0,y ≥ 0**

**हल :** व्यवरोध के रूप में दी गई असमिकाओं को समीकरण में बदलने पर,
x + 3y = 60 ...(1)
x + y = 10 ...(2)

x = y ...(3)
सबसे पहले हम (1) से (3) तक ही रैखिक समीकरणों के निकाय के सुसंगत क्षेत्र का आलेख खींचते हैं। सुसंगत क्षेत्र ABCD को चित्र में दिखाया गया है। क्षेत्र परिबद्ध है। कोनीय बिंदुओं A, B, C और D के निर्देशांक क्रमश: (0, 10), (5, 5), (15, 15) और (0, 20) है। अब हम Z के न्यूनतम और अधिकतम मान ज्ञात करने के लिए कोनीय बिंदु विधि का उपयोग करते हैं।

| कोनीय बिंदु | Z के संगत मान $Z = 3x + 9y$ | |
|---|---|---|
| $A(0,10)$ | 60 | |
| $B(5,5)$ | 60 ← | न्यूनतम |
| $C(15, 15)$ | 180 } ← | अधिकतम |
| $D(0, 20)$ | 180 } | (बहु इष्टतम हल) |




अत: Z का न्यूनतम मान 60 है जो कोनीय बिन्दु B(5, 5) पर है। Z का अधिकतमान मान सुसंगत क्षेत्र के दो कोनीय बिंदुओं प्रत्येक C(15, 15) और D(0, 20) पर 180 प्राप्त होता है।

**प्रश्न 6.**
**निम्नतम Z = x + 2y**
**व्यवरोध 2x + y ≥ 3**
**x + 2y ≥ 6**
**तथा x ≥ 0, y ≥ 0**

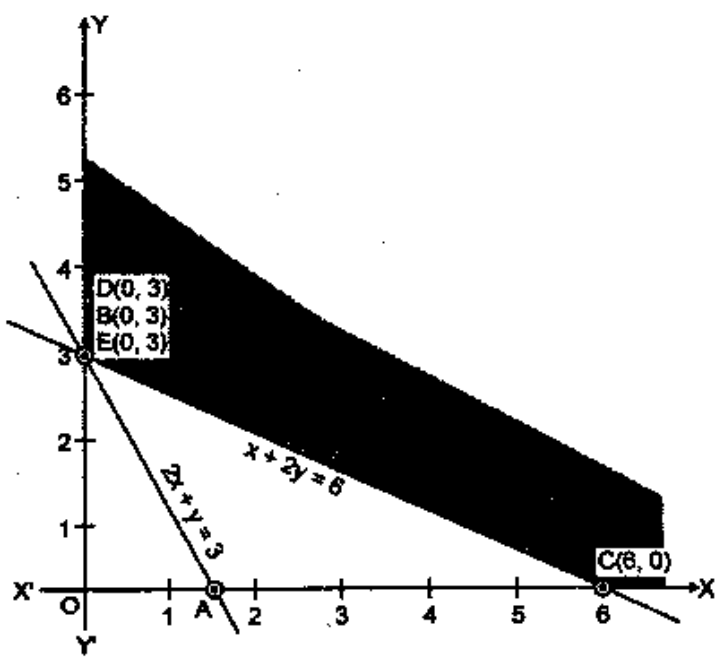
**हल :** व्यवरोध के रूप में दी गई असमिकाओं को समीकरण में व्यक्त करने पर,
2x + y = 3 ...(1)
x + 2y = 6 ...(2)
असमिका 2x + y ≥ 3 द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र –
रेखा 2x + y = 3 निर्देशी अक्षों को बिंदु A(3/2, 0) तथा B(0, 3) पर मिलती है।
2x + y = 3 के मानों के लिए सारणी

| | | |
|---|---|---|
| x | 3/2 | 0 |
| y | 0 | 3 |

A(3/2, 0), B(0, 3)
बिंदुओं (3/2, 0) तथा B(0, 3) को अंकित करते हुये रेख का समीकरण खींचते हैं।
असमिका में मूल बिंदु को प्रतिस्थापित करने पर
$2(0) + (0) = 0 \geq 3$
अतः असमिका सन्तुष्ट नहीं होती है, इसलिये असमिका का सुसंगत हल क्षेत्र मूल बिंदु के विपरीत ओर होगा।
असमिका $x + 2y \geq 6$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र
रेखा $x + 2y = 6$ निर्देशी अक्षों को क्रमशः बिंदु C(6, 0) तथा B(0, 3) पर मिलती है।
$x + 2y = 6$ के मानों के लिए सारणी

| | | |
|---|---|---|
| x | 6 | 0 |
| y | 0 | 3 |

C(6, 0), B(0, 3)
बिंदुओं C(6, 0) तथा B(0, 3) को अंकित करते हुए रेखा का आलेख खचते है।
असमिका में मूल बिंदु को प्रतिस्थापित करने पर
$0 + 2(0) \geq 6$
असमिका को सन्तुष्ट नहीं करता है। अतः असमिका का सुसंगत हल क्षेत्र मूल बिंदु के विपरीत और होगा।
असमिका $r \geq 0$ तथा $y \geq 0$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र –
चूँकि प्रथम पाद में प्रत्येक बिंदु इन दोनों असमिकाओं को सन्तुष्ट करता है। अतः सुसंगत क्षेत्र प्रथम पाट में होगा। रेखाओं $2x + y = 3$ और $x + 2y = 6$ के प्रतिच्छेद बिंदु B के निर्देशांक $x = 0$ तथा $y = 3$ हैं।



छायांकित क्षेत्र OCB में रेखा CB पर स्थित प्रत्येक बिंदु दी हुई। असमिकाओं को सन्तुष्ट कर रहा है। अतः इन बिंदुओं पर फलन के निम्नतम मान निम्न सारणी में दिये गये हैं।

| **बिन्द,** | **x निर्देशांक** | **y निर्देशांक** | **उद्देश्य फलन Z = x+2y** |
|---|---|---|---|
| O | 0 | 0 | $Z_O = 0+2(0) = 0$ |
| B | 0 | 3 | $Z_B = 0+2(3) = 6$ |
| C | 6 | 0 | $Z_C = 6+2(0) = 6$ |

उपरोक्त सारणी से स्पष्ट है कि रैखिक प्रोग्रामन समस्या का इष्ट्तम हल रेखा BC पर स्थित प्रत्येक बिंदु है तथा इन बिंदुओं पर निम्नतम मान Z = 6 है।

**प्रश्न 7.**
**निम्नतम और अधिकतम मान ज्ञात कीजिए-**
**जहाँ Z = 5x + 10y**
**व्यवरोध x + 2y ≤ 120**
**x + y ≥ 60**
**x – 2y ≥ 0**
**x ≥ 0, y ≥ 0**

**हल :**
व्यवरोध के रूप में दी गई असमिकाओं को समीकरण में व्यक्त करने पर
x + 2y = 120 …..(1)
x + y = 60 …(2)
x – 2y = 0 …(3)
असमिका x + 2y ≤ 120 द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र –
रेखा x + 2y = 120 निर्देशी अक्षों को बिंदु A(120, 0) तथा B(0, 60) पर मिलती है अतः
x + 2y = 120 के मानों के लिए सारणी

| | | |
|---|---|---|
| x | 120 | 0 |
| y | 0 | 60 |

A(120, 0); B(0, 60)
बिंदुओं A(120, 0) तथा B(0, 60) को अंकित करते हुये आलेख खींचते हैं।
असमिका में मूल बिंदु को प्रतिस्थापित करने पर,
0 + 2(0) = 0 ≤ 120
दी हुई असमिका को सन्तुष्ट करते है। अतः असमिको का सुसंगत हल क्षेत्र मूल बिंदु की ओर होगा।
असमिका x + y ≥ 60 द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र –

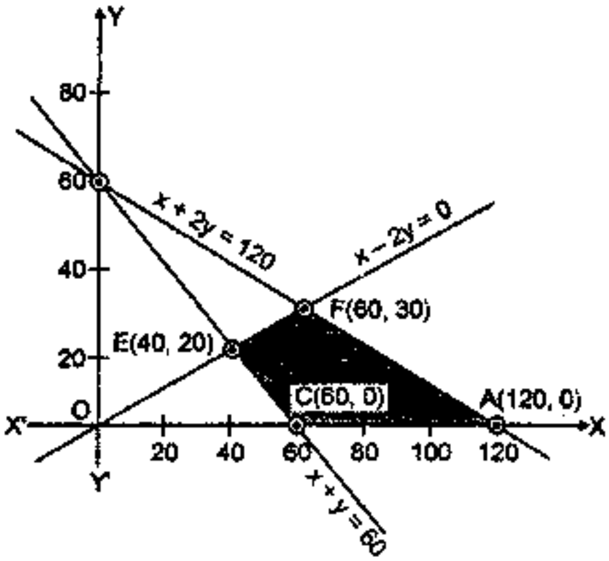
रेखा $x + y = 60$ निर्देशी अक्षों के बिंदु C(60, 0) तथा (0, 60) पर मिलती है।
$x + y = 60$ के मानों के लिए सारणी

| | | |
|---|---|---|
| x | 60 | 0 |
| y | 0 | 60 |

C(60, 0); D(0, 60)
बिंदुओं C(60, 0) और D(0, 60) को अंकित करते हुये रेखा का आलेख खींचते हैं।
असमिका में मूल बिंदु को प्रतिस्थापित करने पर
$0 + 0 \geq 60$
असमिका को सन्तुष्ट नहीं करते है। अतः असमिका का सुसंगत हल क्षेत्र मूल बिंदु के विपरीत ओर होता है।
असमिका $x - 2y \geq 0$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र –
रेखा $x - 2y = 0$ निर्देशी अक्षों के बिंदु E(0, 0) तथा F(60, 30) पर मिलती है।
$x - 2y = 0$ के मानों के लिए सारणी

| | | |
|---|---|---|
| x | 0 | 60 |
| y | 0 | 30 |

E(0, 0); F(60, 30)
बिंदुओं E(0, 0) तथा F(60, 30) को अंकित करते हुये रेखा को आलेख खींचते है।
असमिका में मूल बिंदु को प्रतिस्थापित करने पर,
$0 - 2(0) = 0$
असमिका को सन्तुष्ट करते हैं। अतः असमिका का सुसंगत हल मूल बिंदु की ओर होगा।
$x \geq 0, y \geq 0$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र –
चूँकि प्रथम पाद में प्रत्येक बिंदु इन दोनों असमिकाओं को सन्तुष्ट करता है। अतः सुसंगत हल क्षेत्र प्रथम पाद में होगा।
रेखा $x + 2y = 120$ तथा $x + y = 60$ के प्रतिच्छेद बिंदु के निर्देशांक (0, 60) होंगे।
रेखा $x + 2y = 120$ तथा $x - 2y = 0$ के प्रतिच्छेद बिंदु के निर्देशांक (60, 30) होंगे।
रेखा $x + y = 60$ तथा $x - 2y = 0$ के प्रतिच्छेद बिंदु के निर्देशांक (20, 40) हैं।




छायांकित क्षेत्र ACEF उपरोक्त असमिकाओं का उभयनिष्ठ क्षेत्र प्रदर्शित करता है। यह क्षेत्र दी गई रैखिक प्रोग्रामन समस्या का सुसंगत हल क्षेत्र है। इस क्षेत्र के कोनीय बिन्दुओं के निर्देशांक A(120, 0), C(60, 0), E(40, 20) तथा F(60, 30) हैं।
इन बिंदुओं पर उद्देश्य फलन कै मान निम्नलिखित सारणी में दिये गये है।

| **बिन्द,** | **x निर्देशांक** | **y निर्देशांक** | **उद्देश्य फलन $Z=5x+10y$** |
|---|---|---|---|
| A | 120 | 0 | $Z_A=5(120)+10(0)=600$ |
| C | 60 | 0 | $Z_C=5(60)+10(0)=300$ |
| E | 40 | 20 | $Z_E=5(40)+10(20)=400$ |
| F | 60 | 30 | $Z_F=5(60)+10(30)=600$ |

उपरोक्त सारणी से स्पष्ट है कि रैखिक प्रोग्रामन समस्या का इष्टतम हल बिंदु (60, 0) पर निम्नतम मान 300 तथा बिंदु A(120, 0) तथा F(60, 30) को मिलाने वाली रेखा के प्रत्येक बिंदु पर अधिकतम मान 600 है।
अत: बिंदु (60, 0) पर निम्नतम मान Z = 300
बिंदु (120, 0) तथा बिंदु (60, 30) वाली रेखा पर अधिकतम मान Z = 600.

**प्रश्न 8.**
**अधिकतम $Z = x + y$**
**व्यवरोध $x - y \le -1$**
**$-x + y \le 0$**
**तथा $x \ge 0, y \ge 0$**

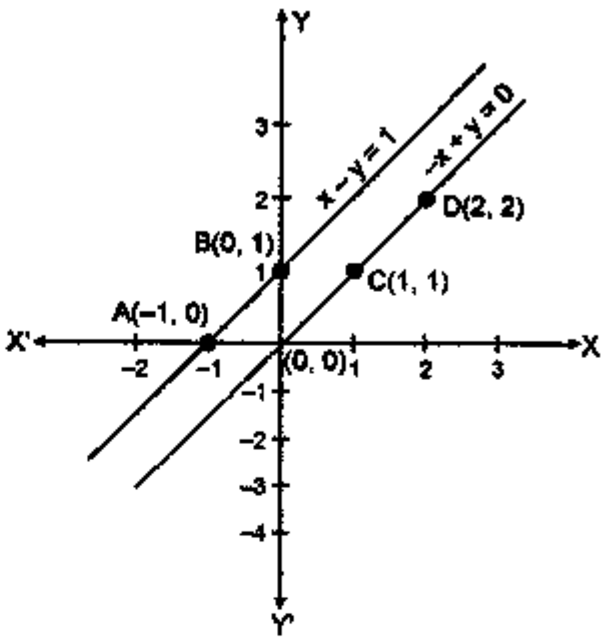
**हल :** व्यवरोध के रूप में दी गई असमिकाओं को समीकरण में व्यक्त करने पर,
$x - y = -1$ ...(1)
$-x + y = 0$ ...(2)
असमिका $x - y \leq -1$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र
रेखा $x - y = -1$ निर्देशी अक्षों के बिंदु A(-1, 0) तथा B(0, 1) पर मिलती है।
$x - y = -1$ के मानों के लिए सारणी

| | | |
|---|---|---|
| x | -1 | 0 |
| y | 0 | 1 |

A(-1, 0); B(0, 1)
बिंदुओं A(-1, 0) तथा B(0, 1) को अंकित करते हुये रेखा का आलेख खींचते हैं।
असमिका में मूल बिंदु को प्रतिस्थापित करने पर
$0 - 0 \leq -1$
असमिका को सन्तुष्ट नहीं करता है। अतः असमिका का हल क्षेत्र मूल बिंदु के विपरीत ओर होगा।
असमिका $-x + y \leq 0$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र –
रेखा $-x + y = 0$ निर्देशी अक्षों को बिंदु C(0, 0) तथा D(1, 1) पर मिलती है।
$-x + y = 0$ के मानों के लिए सारणी

| | | |
|---|---|---|
| x | 1 | 2 |
| y | 1 | 2 |

C(1, 1); D(2, 2)
बिंदुओं C(0, 0) तथा D1, 1) को अंकित करते हुये रेखा का आलेख खचते हैं।
असमिका में मूल बिंदु को प्रतिस्थापित करने पर,
$-(0) + 0 = 0 \leq 0$
असमिका को सन्तुष्ट करता है। अतः असमिका का हल क्षेत्र मूल बिंदु की ओर होगा।
$x \geq 0$ तथा $y \geq 0$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र –
चूँकि प्रथम पाद में प्रत्येक बिंदु इन दोनों असमिकाओं को सन्तुष्ट करता है। अतः सुसंगत हल क्षेत्र प्रथम पाद ही होगा।




आलेख से स्पष्ट है कि बिंदुओं A(-1, 0) तथा B(0, 1) को मिलाने वाली रेखा, बिंदु C(1, 1) तथा D(2, 2) को मिलाने वाली रेखा के समान्तर है।
अतः असमिकाओं का उभयनिष्ठ सुसंगत हल सम्भव नहीं है।
अतः दिये गये अवरोधों के लिये उद्देश्य फलन का कोई अधिकतम मान विद्यमान नहीं है।

**प्रश्न 9. निम्नतम $Z = 3x + 2y$**
**व्यवरोध $x + y \geq 8$**
**$3x + 5y \leq 15$**
**तथा $x \geq 0, y \geq 0$**

**हल :** व्यवरोधों के रूप में दी गई असमिकाओं को समीकरण के रूप में व्यक्त करने पर
$x + y = 8$ ...(1)
$3x + 5y = 15$ ...(2)
असमिका $x + y \geq 8$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र –
रेखा $x + y = 8$ निर्देशी अक्षों को बिंदु A(8, 0) तथा B(0, 8) पर मिलती है।
$x + y = 8$ के मानों के लिए सारणी

| | | |
|---|---|---|
| x | 8 | 0 |
| y | 0 | 8 |

A(8, 0); B(0, 8)
बिंदुओं A(8, 0) तथा B(0, 8) को अंकित करते हुये रेखा को आलेख खींचते है।
असमिका में मूल बिंदु को प्रतिस्थापित करने पर,
$0 + 0 = 0 \ngeq 8$
असमिका को सन्तुष्ट नहीं करता है। अतः असमिका को हल क्षेत्र । मूल बिंदु के विपरीत ओर होगा।
असमिका $3x + 5y \leq 15$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र –
रेखा $3x + 5y = 15$ निर्देशी अक्षों को बिंदु C(5,0) तथा D(0, 3) पर मिलती है।
$3x + 5y = 15$ के मानों के लिए सारणी

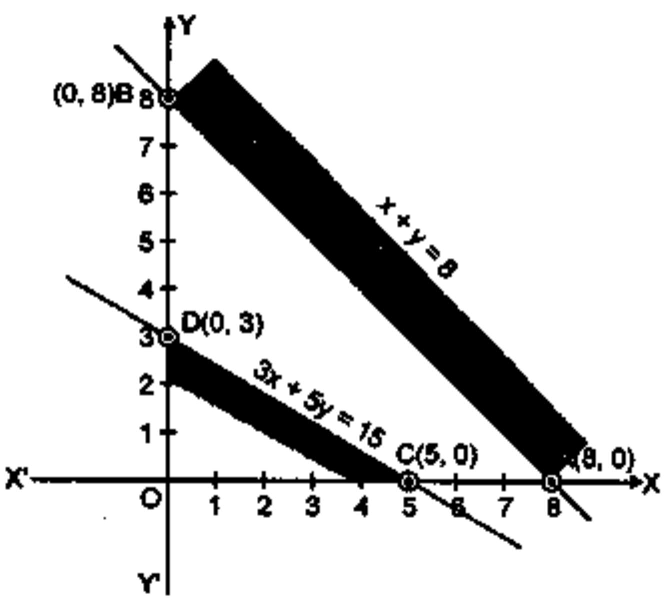
| | | |
|---|---|---|
| x | 5 | 0 |
| y | 0 | 3 |

C(5, 0); D(0, 3)
बिंदुओं C(5, 0) तथा D(0, 3) को अंकित कर आलेख खचते हैं।

असमिका में मूल बिंदु को प्रतिस्थापित करने पर $3(0) + 5(0) = 0 \leq 15$ असमिका को सन्तुष्ट करता है।
अतः असमिका हल क्षेत्र मूल बिंदु का ओर होगा।

$x \geq 0$ तथा $y \geq 0$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र –

चूंकि प्रथम पाद में प्रत्येक बिन्दु इन दोनों असमिकाओं को सन्तुष्ट करती है। अतः सुसंगत हल क्षेत्र प्रथम पाद ही होगा।



आलेख से स्पष्ट है कि दी गई असमिकाओं का कोई उभयनिष्ठ हल क्षेत्र नहीं है। अतः दिये गये अवरोधों के लिये उद्देश्य फलने का कोई निम्नतम मान विद्यमान नहीं है।

**प्रश्न 10. अधिकतम**
**$Z = -x + 2y$**
**व्यवरोध $x \geq 3$**
**$x + y \geq 5$**
**$x + 2y \leq 6$**
**तथा $y \geq 0$**

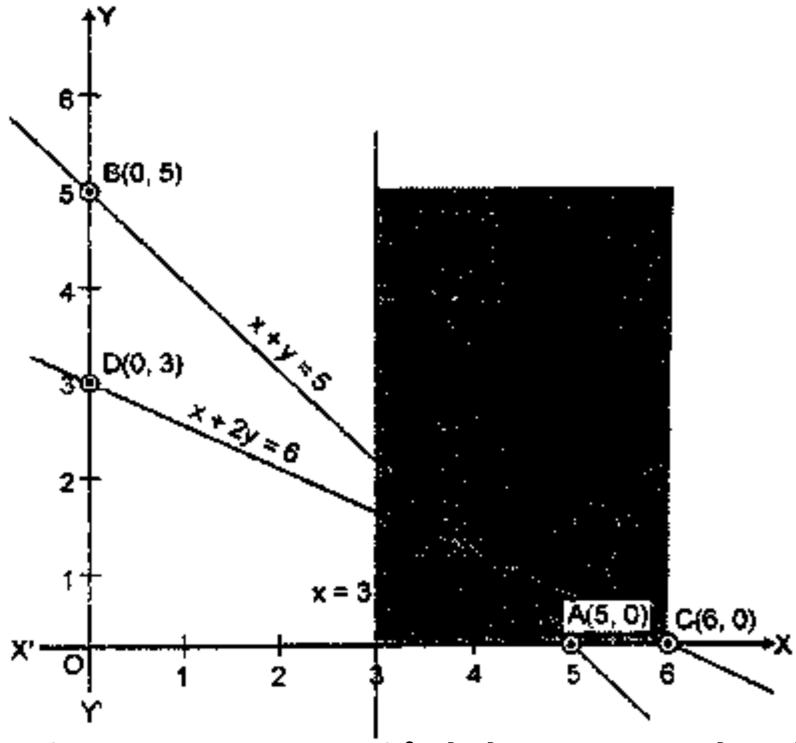
**हल :** व्यवरोधों के रूप में दी गई असमिकाओं को समीकरण रूप में व्यक्त करने पर,
$x = 3$ ....(1)
$x + y = 5$ ...(2)
$x + 2y = 6$ ...(3)
$y = 0$
असमिका $x + y \geq 5$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र –
रेखा $x + y = 5$ निर्देशी अक्षों को बिंदु A(5, 0) तथा B(0, 5) पर मिलती है।
$x + y = 5$ के मानों के लिए सारणी

| | | |
|---|---|---|
| x | 5 | 0 |
| y | 0 | 5 |

A(5, 0); B(0, 5)
बिंदु A(5, 0) तथा B(0, 5) को अंकित कर रेखा का आलेख खींचते है।
असमिका में मूल बिंदु को प्रतिस्थापित करने पर $0 + 0 = 0 \geq 5$ असमिका को सन्तुष्ट नहीं करता है। अतः सुसंगत हल क्षेत्र मूल बिंदु के विपरीत ओर होगा।
असमिका $x + 2y \geq 6$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र–रेखा $x + 2y = 6$ निर्देशी अक्षों को बिंदु C(6, 0) तथा D(0, 3) पर मिलती है।
$x + 2y = 6$ के मानों के लिए सारणी

| | | |
|---|---|---|
| x | 6 | 0 |
| y | 0 | 3 |

C(6, 0); D(0, 3)
बिंदु C(6, 0) तथा D(0, 3) को अंकित करते हुये रेखा का आलेख खींचते हैं।
असमिका में मूलबिंदु को प्रतिस्थापित करने पर $0 + 2(0) = 0 \geq 6$ असमिका को सन्तुष्ट नहीं करती है।
अत: सुसंगत हल क्षेत्र मूल बिंदु के विपरीत ओर होगा।




असमिका x ≥ 3, y ≥ 0 द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र रेखा x = 3 का आलेख y के प्रत्येक मान के लिये प्रथम पाद में होगा तथा y = 0 का क्षेत्र भी प्रथम पाद,में ही होगा ।

आलेख से स्पष्ट है कि दी गई असमिकाओं का कोई उभयनिष्ठ हल क्षेत्र नहीं है। अत: दिये गये व्यवरोधों के लिये उद्देश्य फलन का कोई अधिकतम मान विद्यमान नहीं है।

# Ex 15.2

**प्रश्न 1. एक आहार विज्ञानी दो प्रकार के भोज्यों को इस प्रकार मिलाना चाहती है कि प्राप्त मिश्रण में विटामिन A की कम से कम 8 इकाई तथा विटामिन C की कम से कम 10 इकाई विद्यमान हो। भोज्य I में विटामिन A2 इकाई प्रति किलोग्राम तथा विटामिन C1 इकाई प्रति किलोग्राम तथा भोज्य II में विटामिन A, 1 इकाई प्रति किलोग्राम तथा विटामिन C2 इकाई प्रति किलोग्राम विद्यमान है। भोज्य I व II को प्रति किलोग्राम खरीदने की लागत क्रमशः Rs 5 ध Rs 7 है। इस प्रकार के मिश्रण की निम्नतम लागत ज्ञात कीजिये। समस्या का गणितीय सूत्रीकरण करते हुए हल कीजिए।'**

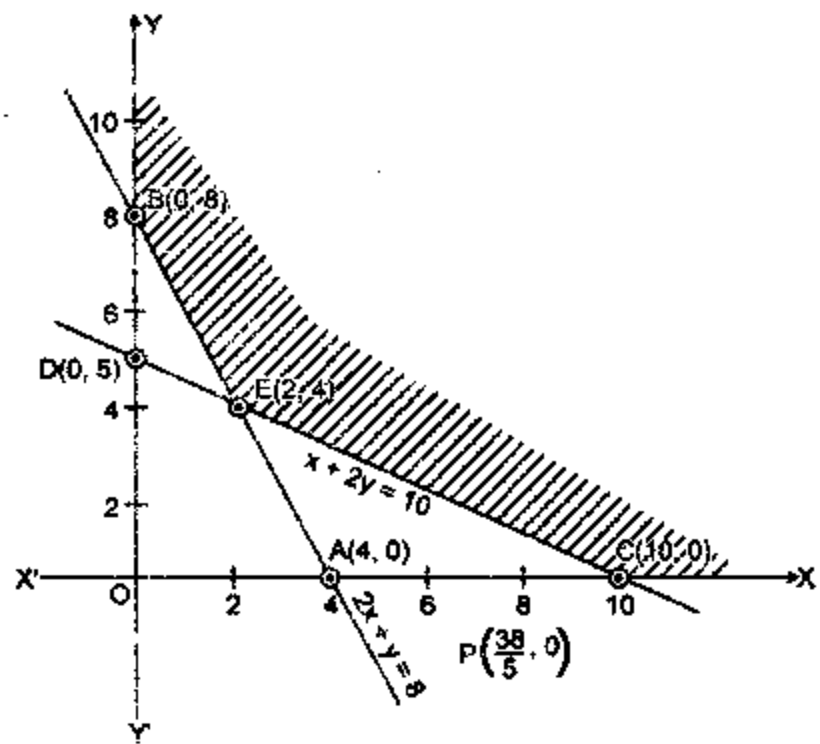
**हल :** माना भोज्य I की x किग्रा तथा भोग्य II की y किग्रा. की मात्रा मिश्रण में है।
∴प्रश्नानुसार 5 प्रति किग्रा को दर से x किग्रा का मूल्य
= Rs 5x
तथा Rs 7 प्रति किग्रा की दर से y किग्रा का मूल्य
= Rs 7y
∴मिश्रण का कुल लागत न्यूनतम मूलय = 5x + 7y
अत: न्यूनतम मूल्य उद्देश्य फलन z = 5x + 7y
मिश्रण में भोज्य I के x किग्रा मात्रा में विटामिन A की कुल इकाई
= 2x
तथा मिश्रण में भोज्य II के y किग्रा मात्रा में विटामिन A की कुल इकाई = y
∴प्रश्नानुसार व्यवरोध 2x + y ≥ 8 ….(1)
इस प्रकार मिश्रण में भोज्य I के x किग्रा. मात्रा में विटामिन C की कुल इकाई = x
तथा मिश्रण में भोज्य II के y किग्रा मात्रा में विटामिन C की कुल इकाई = 2y
∴ प्रश्नानुसार व्यवरोध x + 2y = 10 …(2)
तथा
x ≥ 0, y ≥ 0
अतः समस्या का गणितीय सूत्रीकरण
न्यूनतम लागत मूल्य फलन
z = 5x + 7y
2x + y ≥ 8
x + 2y ≥ 10
x ≥ 0, y ≥ 0
व्यवरोध के रूप में प्राप्त असमिकाओं को समीकरण के रूप में व्यक्त करने पर
2x + y = 8 …(1)
x + 2 = 10 …(2)
असभिका 2x + y ≥ 8 द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र –
रेखा 2 + y = 8 निर्देशी अक्षों को क्रमशः बिंदु A(4, 0) तथा B(0, 8) पर मिलती है।
2x + y = 8 के मानों के लिए सारणी

| | | |
|---|---|---|
| x | 4 | 0 |
| y | 0 | 8 |

A(4, 0); B(0, 8)
बिंदु A(4, 0) तथा B(0, 8) को अंकित कर रेखा का आलेख खींचते है।
असमिका में मूल बिंदु को प्रतिस्थापित करने पर 2(0) + 0 = 0 ≥ 8 असभिका सन्तुष्ट नहीं होती है।
अत: समस्या का सुसंगत हुल क्षेत्र मूल बिंदु के विपरीत और होगा।
असमिका $x + 2y \geq 10$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र –
रेखा $x + 2y = 10$ निर्देशी अक्षों को क्रमशः बिंदु C(10, 0) तथा D(0, 5) पर मिलती है।
$x + 2y = 10$ के मानों के लिए सारणी

| | | |
|---|---|---|
| x | 10 | 0 |
| y | 0 | 5 |

C(10, 0); D(0, 5)
बिंदु C(10, 0) तथा D(0, 5) को अंकित कर रेखा का आलेख खींचते हैं।
असमिका में मूल बिंदु को प्रतिस्थापित करने पर 0 + 2(0) = 0 ≥ 10 असमिका सन्तुष्ट नहीं होती है। अत: समस्या का हल क्षेत्र मूल बिंदु से विपरीत और होगा।
$x \geq 0$ तथा $y \geq 0$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र –
चूँकि प्रथम पाद का प्रत्येक बिंदु इन दोनों असमिकाओं को सन्तुष्ट करता है। अतः असमिका द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र प्रथम पाद होगा।



रेखा $2x + y = 8$ तथा $x + 2y = 10$ के प्रतिच्छेद बिंदू E के निर्देशांक $x = 2$ था $y = 4$
छायांकित भाग CEB उपर्युक्त असमिकाओं द्वारा उभयनिष्ठ क्षेत्र प्रदर्शित करता है। यह सुसंगत क्षेत्र अपरिबद्ध है। यह क्षेत्र दी गई रैखिक प्रोग्रामन समस्या का सुसंगत हल क्षेत्र है। जिसके कोनीय बिंदु C(10, 0), E(2, 4), B(0, 8) हैं। इन बिंदुओं पर उद्देश्य फलन का मान नीचे सारणी में दिये गये हैं।

| **बिन्द** | **x निर्देशांक** | **y निर्देशांक** | **उददेश्य फलन $Z = 5x + 7y$** |
|---|---|---|---|
| C | 10 | 0 | $Z_C = 5 \times 10 + 7 \times 0 = 50$ |
| E | 2 | 4 | $Z_E = 5 \times 2 + 7 \times 4 = 38$ |
| B | 0 | 8 | $Z_B = 5 \times 0 + 7 \times 8 = 56$ |

सारणी में बिंदु E(2, 4) पर उद्देश्य फलन का मान निम्नतम Rs 38 है। चूंकि सुसंगत क्षेत्र अपरिबद्ध है। अत: असमिका $5x + 7y \le 38$ द्वारा निर्धारित परिणामी तुला अद्धतल, सुसंगत क्षेत्र के माध्य कोई उभयनिष्ठ बिंदु नहीं रखता है।
अत: उद्देश्य फला निन्नतम $Z = 3x + 7$
व्यवरोध $2x + y \ge 8$
$x + 2y \ge 10$
तथा $x \ge 0, y \ge 0$
मिश्रण में भोज्य I की 2 किग्रा तथा II की 4 किग्रा मात्रा मिलाने पर कुल न्यूनतम मूल्य Rs 38 है।

**प्रश्न 2. एक गृहिणी दो प्रकार के भोज्यों X तथा Y को एक साथ इस प्रकार मिलाना चाहती है कि मिश्रण में विटामिन A, B तथा C की क्रमशः कम से कम 10, 12 तथा 8 इकाइयाँ विद्यमान हो। एक किलोग्राम भोज्य में विटामिन संयोजन निम्न प्रकार है**

| | **विटामिन A** | **विटामिन B** | **विटामिन C** |
|---|---|---|---|
| **भोज्य x** | 1 | 2 | 3 |
| **भोज्य y** | 2 | 2 | 1 |

भोज्य X तथा Y के एक किलोग्राम की कीपत क्रमशः Rs 6 व Rs 10 है। इस प्रकार के भोज्य मिश्रण की न्यूनतम कीमत ज्ञात कीजिये।

**हल :** माना गृहिणी ने मिश्रण में x किग्रा भोज्य X तथा y किग्रा ज्य Y की मात्रा मिलाई ।
अत: प्रश्नानुसार मिश्रा भोज्य में कुल न्यूनतम कीमत का उद्देश्य फलन
$z = 6x + 10y$ ...(1)

**व्यवरो के लिये –**
विटामिन A के लिये मिश्रण में भोज्य X की x इकाई तथा भोज्य Y की 2y इकाई ली गई हैं।
अत: प्रश्नानुसार $x + 2y \geq 10$ ....(1)

विटामिन B के लिये मिश्रण में भोज्य X की 2x इकाई तथा भोज्य Y की 2y इकाई ली गई है।
अत: प्रश्नानुसार $2x + 2y \geq 12$ ....(1)

विटामिन B के लिये मिश्रण में भोज्य X की 2 इकाई तथा भोज्य Y की 2y इकाई ली गई हैं।
अत: प्रश्नानुसार $2x + 2y \geq 12$ ...(2)

विटामिन C के लिये मिश्रण में भोज्य X की 3x इकाई तथा भोज्य Y की y इकाई ली गई हैं।
अत: प्रश्नानुसार, $3x + y \geq 8$ ...(3)

तथा $x \geq 0, y \geq 0$
अतः समस्या के रैखिक प्रोग्रामन का गणितीय सूत्रीकरण निम्न
निम्नतम $Z = 6x + 10y$
व्यवरोध $x + 2y \geq 10$
$2x + 2y \geq 12$
$3x + y \geq 8$
$x \geq 0, y \geq 0$
ध्यवरोधों के रूप में दी गई असमिकाओं को समीकरण में परिवर्तित करने पर
$x + 2y = 10$
$2x + 2y = 12$ ...(2)
$3x + y = 8$ ...(3)
असमिका $x + 2 \geq 10$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र –
रेखा $x + 2y = 10$ निर्देशी अक्षों के क्रमशः बिंदु A(10, 0) तथा B(0, 5) पर मिलती है।
$x + 2y = 10$ के मानों के लिए सारणी

| | | |
|---|---|---|
| x | 10 | 0 |
| y | 0 | 5 |

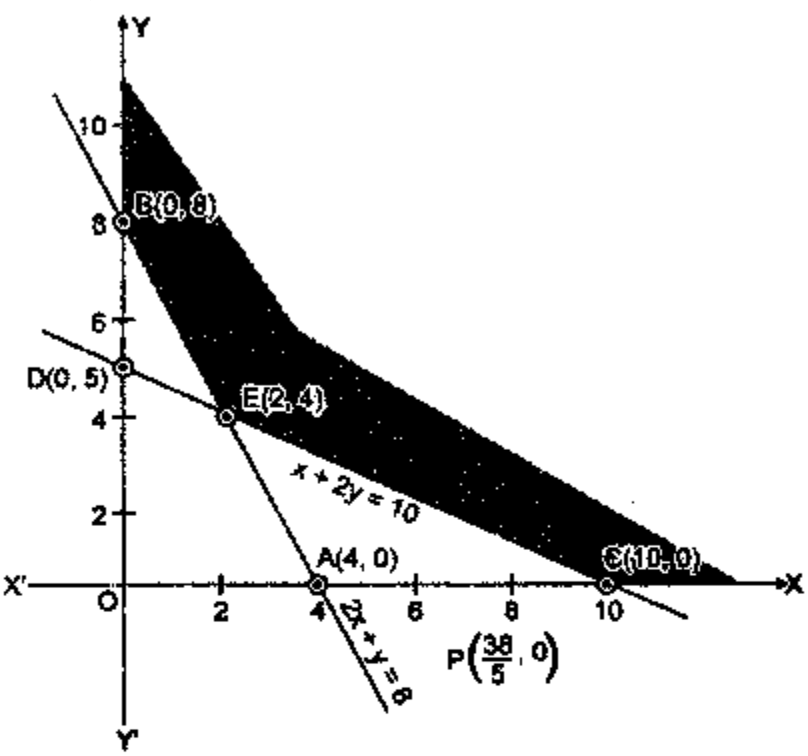
A(10, 0); B(0, 5)
बिंदुओं A तथा B को अंकित कर रेखा का आलेख खींचते हैं। असमिका में मूल बिंदु (0, 0) को प्रतिस्थापित करने पर $0 + 2(0) = 0 \geq 10$ असमिका सन्तुष्ट नहीं होती है। अतः असमिका का हल क्षेत्र मूल बिंदु के विपरीत और होगा।
असमिका $2x + 2y \geq 12$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र –
रेखा $2x + 2y \geq 12$ निर्देशी अक्षों के बिंदु C(6, 0) तथा D(0, 6) पर मिलती है।
$2x + 2y = 12$

| | | |
|---|---|---|
| x | 6 | 0 |
| y | 0 | 6 |

C(6, 0); D(0, 6)
बिंदुओं C और D को अंकित कर रेखा का आलेख खींचते हैं। असमिका में मूल बिंदु (0, 0) को प्रतिस्थापित करने पर 2(0) + 2(0) = 0 ≥ 12 असमिका सन्तुष्ट नहीं होती है। अतः असमिका का हल क्षेत्र मूल बिंदु के विपरीत और होगा।
असमिका 3x + y ≥ 8 द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र –
रेखा 3x + y = 8
निर्देशी अक्षों के बिंदु E($\frac{8}{3}$, 0) तथा F(0, 8) पर मिलती है।
3x + y = 8 के मानों के लिए सारी

| | | |
|---|---|---|
| x | 8/3 | 0 |
| y | 0 | 8 |

बिंदुओं E तथा F को अंकित कर रेखा का आलेख खींचते हैं। असमिका में मूल बिंदु (0, 0) प्रतिस्थापित करने पर 3(0) + 0 = 0 ≥ 8 असमिका को सन्तुष्ट नहीं करते हैं। अतः असमिका का हल क्षेत्र मूल बिंदु के विपरीत ओर होगा।
x ≥ 0 तथा y ≥ 0 द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र –
चूँकि प्रथम पाद में प्रत्येक बिंदु इन दोनों असमिकाओं को सन्तुष्ट करता है। अतः असमिका का हुल क्षेत्र प्रथम पाई में होगा।




रेखा x + 2y = 10 तथा 2x + 2y = 12 के प्रतिच्छेद बिंदु P(2, 4) के निर्देशांक x = 2 तथा y = 4 हैं।

तथा रेखा $2x + 2y = 12$ तथा $3x + y = 8$ के प्रतिच्छेद बिंदु Q के निर्देशक Q(1, 5) में $x = 1$ तथा $y = 5$ है।
छायांकित क्षेत्र APQF उपरोवत असमिकाओं का हल क्षेत्र है। यह सुसंगत क्षेत्र अपरिबद्ध है। अतः अपरिवद्ध सुसंगत क्षेत्र के कोणीय बिंदुओं के निर्देशांक A( 10, 3), P(2, 4), Q(1, 5) तथा F(0, 8) है। बिंदु P(2, 4), $x + 2y = 10$ तथा $2x + 2 = 12$ रेखाओं का प्रतिच्छेद बिन्दु है त रेखा $2x + 2y = 12$ और रेखा $3x + y = 8$ के प्रतिच्छेद बिंदु के निर्देशांक Q(1, 5) है।
इन बिंदुओं पर उद्देश्य फलन के मान निम्न तालिका में दिये गये है।

| **बिन्द** | **x निर्देशांक** | **y निर्देशांक** | **उदेश्य फ्लन Z=6x+10y** |
|---|---|---|---|
| A | 10 | 0 | $Z_A = 6×10+10×0 = 60$ |
| P | 2 | 4 | $Z_P = 6×2+10×4 = 52$ |
| Q | 1 | 5 | $Z_Q = 6×1+10×5 = 56$ |
| F | 0 | 8 | $Z_F = 6×0+10×8 = 80$ |

सारणी से स्पष्ट है कि उद्देश्य फलन का मान बिंदु P(2, 4) पर न्यूनतम 52 है।
इसलिये गृहिणी के लिये भोज्य X की 2 किलोग्राम तथा भोज्य Y की 4 किग्रा से मिश्रण बनाने की नीति इष्टतम नीति होगी जिसकी न्यूनतम लागत Rs 52 होगी।

**प्रश्न 3. एक प्रकार के केक को बनाने के लिए 300 ग्राम आटा तथा 15 ग्राम धसा की आवश्यकता होती है, जबकि दूसरे प्रकार के केक को बनाने के लिए 150 ग्राम आटा तथा 30 ग्राम वसा की आवश्यकता होती है। यह मानते हुए कि केकों को बनाने के लिये अन्य सामग्री की कमी नहीं है, 7.5 किलोग्राम आटे तथा 600 ग्राम वसा से। अनाये जा सकने वाले केकों की अधिकतम संख्या ज्ञात कीजिए। समस्या का गणितीय सूत्रीकरण करते हुए आलेखीय विधि से हल कीजिये।**

**हल :** माना एक प्रकार के केक तथा दूसरे प्रकार के y केक तैयार होते हैं। अत: केक की अधिकतम सीमा का उद्देश्य फलन
$Z = x + y$

व्यवरोध के रूप में पहले प्रकार के केक में आटा 300x ग्राम तथा दूसरे प्रकार के केक में आटा 150y ग्राम ।
अत: प्रश्नानुसार $300x + 150y \leq 7500$ ग्राम
दूसरे व्यवरोध के रूप में पहले प्रकार के केक में वसा 15x ग्राम तथा दूसरे प्रकार के केक में वसा 30y ग्राम
अत: प्रश्नानुसार, $15x + 30 \leq 600$ ग्राम
दी गई केकों की संख्या कभी ऋणात्मक नहीं हो सकती।
अतः $x \geq 0$ तथा $y \geq 0$

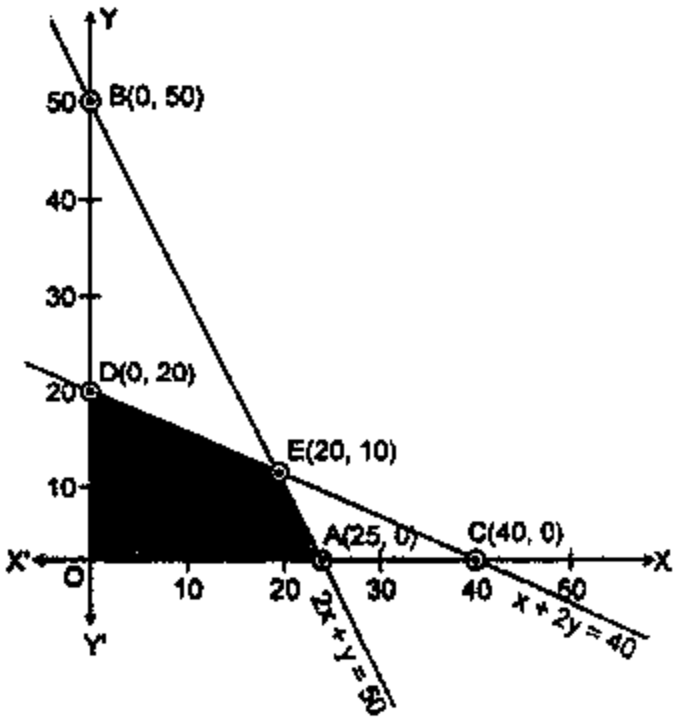
इसलिये दी गई रैखिक प्रोगामन समस्या का गणितीय सूत्रीकरण निम्न है
अधिकतम $Z = x + y$
व्यवरोध $300x + 150y \leq 7500$
$15x + 30y \leq 600$
$x \geq 0, y \geq 0$
व्यवरोध के रूप में दी गई असमिकाओं को समीकरण में बदलने पर
$300x + 150y \leq 7500$
$2x + y \leq 50$ ....(1)
तथा $15x + 30y \leq 600$
$x + 2y \leq 40$ ...(2)
असमिका $2x + y \leq 50$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र –
रेखा $2x + y = 50$ निर्देशी अक्षों को क्रमशः बिंदु A(25, 0) तथा B(0, 50) पर मिलती है।
$2x + y = 50$ के मानों के लिए सारणी

| | | |
|---|---|---|
| x | 25 | 0 |
| y | 0 | 50 |

A(25, 0); B(0, 50) बिंदुओं A तथा B को अंकित कर रेखा का आलेख खींचते हैं। असमिका में मूल बिंदु (0, 0) को प्रतिस्थापित करने पर $2(0) + 0 = 0 < 50$ असमिका को सन्तुष्ट करता है। अतः इस असमिका का हल क्षेत्र मूल बिंदु की ओर होगा।
असमिका $x + 2y \leq 40$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र
रेखा $x + 2y = 40$ निर्देशी अक्षों को क्रमशः बिंदु C(40, 0) तथा (0, 20) पर मिलती है।
$x + 2y = 40$ के मानों के लिए सारणी

| | | |
|---|---|---|
| x | 40 | 0 |
| y | 0 | 20 |

C(40, 0); D(0, 20) बिंदुओं C और D को अंकित कर रेखा का आलेख खींचते हैं। असमिका में मूल बिंदु (0, 0) को प्रतिस्थापित करने पर $0 + 2(0) = 0 \leq 40$ असमिका को सन्तुष्ट करता है। अतः असमिका को हल क्षेत्र मूल बिंदु की ओर होगा।
$x \geq 0$ तथा $y \geq 0$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र –
चूँकि प्रथम पाद का प्रत्येक बिंदु इन दोनों असमिकाओं को सन्तुष्ट करता है। अतः असमिकाओं $x \geq 0$ तथा $y \geq 0$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र प्रथम पाद है।




रेखा x + 2y = 40 तथा 2x + y = 50 का प्रतिच्छेद बिंदु E के निर्देशांक x = 20 तथा y = 10.
छायांकित क्षेत्र OAED दी गई असमिकाओं का उभयनिष्ठ क्षेत्र प्रदर्शित करता है। यह क्षेत्र दो गई रैखिक प्रोग्रामन समस्या का सुसंगत हल क्षेत्र है। इस हल क्षेत्र के कोनीय बिंदुओं के निर्देशांक O(0, 0), A(25, 0), E(20, 10) तथा D(0, 20) है।।
इन बिंदुओं पर उद्देश्य फलन के मान नीचे सारणी में दिये गये है

| **बिन्द** | **x निर्देशांक** | **y निर्देशांक** | **उदेश्य फ्लन Z=x+y** |
|---|---|---|---|
| O | 0 | 0 | $Z_O$ = 0+0 = 0 |
| A | 25 | 0 | $Z_A$ = 25+0 = 25 |
| E | 20 | 10 | $Z_E$ = 20+10 = 30 |
| D | 0 | 20 | $Z_D$ = 0+20 = 20 |

सारणो से स्पष्ट है कि उद्देश्य फलन का मान बिंदु E(20, 10) पर अधिकतम 30 है। अत: पहले प्रकार के केकों की संख्या 20 तथा दूसरे प्रकार के केकों की संख्या 10 है।

**प्रश्न 4. एक निर्माता औद्योगिक यंत्रों के लिए नट और बोल्ट का उत्पादन करता है। एक पैकेट नटों के उत्पादन के लिए मंत्र A पर 1 एटा तथा यंत्र B पर 3 घण्टे काम करना पड़ता है जबकि एक पैकेट बोल्टों के उत्पादन के लिए यंत्र B पर 3 घण्टे तथा यंत्र B पर 1 घण्टा काम करना पड़ता है। निर्माता नटों तथा खोल्टों के प्रति पैकेट पर लाभ क्रमशः Rs 2.50 तथा Rs 1 कमाता है। यदि वह प्रतिदिन अपने चंत्रों को अधिकतम 12 घण्टे संचालित करता हो तो प्रत्येक (नट और बोल्ट) के कितने पैकेट**

**उत्पादित किए जाने चाहिए ताकि वह अधिकतम लाभ अर्जित कर सके। समस्या का गणितीय सूत्रीकरण कर हल वीजिये।**

**हल :** माना अधिकतम लाभ अर्जित करने के लिये x पैकेट नट तथा y पैकेट बोल्ट बनाने चाहिये। 1 निर्माता न पर लाभ Rs 2:50 तथा बोल्ट पर Rs 1 प्रति पैकेट कमाता है।
अतः उद्देश्य कथन $Z = 2.50x + y$ अधिकतम मशीन A पर नट बनाने के लिये x घंटे तथा B पर नट बनाने के लिये 3y घंटे काम करना पड़ता है।
अतः व्यवरोध $x + 3y \leq 12$ .....(1)
तथा बोल्ट बनाने के लिये मशीन A को 3x घंटे तथा मशीन B को y घंटे काम करना पड़ता है। अतः व्यरोध $3x + y \leq 12$ ......(2)
चूंकि नट और बोल्ट की संख्या ऋणात्मक नहीं हो सकती है।
$\therefore x \geq 0$ तथा $y \geq 0$
दी गई रैखिक प्रोग्रामन समस्या का गणितीय सूत्रीकरण निम्न है
अधिकतम $Z = 2.50x + y$
यवरोध $x + 3y \leq 12$
$3x + y \leq 12$
$x \geq 0, y \geq 0$
व्यवरोधों के रूप में दी गई असमिकाओं को समीकरण में व्यस्त करने पर
$x + 3y = 12$ ....(1)
$3x + y = 12$ ....(2)
असमिका $x + 3y \leq 12$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र – रेखा $x + 3y = 12$ निर्देशी अक्षों को क्रमशः बिंदु A(12, 0) तथा B(0, 4) पर मिलती है।
$x + 3y = 12$ के मानों के लिए सारणी

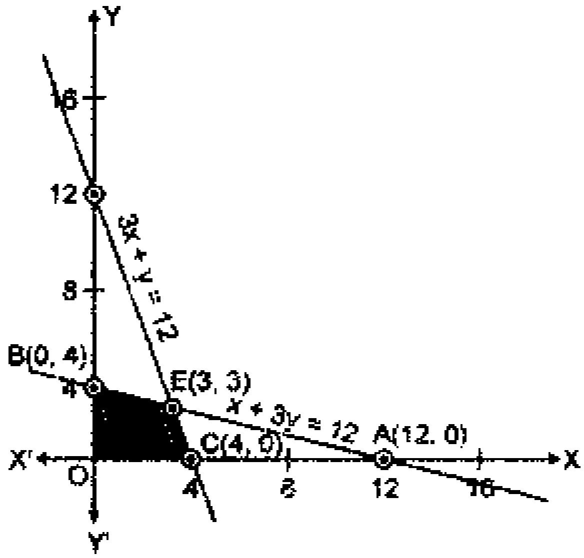
| | | |
|---|---|---|
| x | 12 | 0 |
| y | 0 | 4 |

A(12, 0); B(0, 4)
बिंदु A और B को अंकित कर रेखा का आलेख चते है। असमिका में मूल बिंदु (0, 0) को प्रतिस्थापित करने पर $0 + 3(0) = 0 \leq 12$ असमिका सन्तुष्ट होती है। अतः इस अभिका को हल क्षेत्र मूल बिंदु की और होगा।
असमिका $3x + y \leq 12$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र – रेखा $3x + y = 12$ निर्देशी अक्षों को क्रमश: बिंदु C(4, 2) तथा D(0, 12) पर मिलती है।
$3x + y = 12$ के मान के लिए करारी

| | | |
|---|---|---|
| x | 4 | 0 |
| y | 0 | 12 |

C(4, 0); D(0, 12)

बिंदु C और D को अंकित कर देगा का आलेख चते हैं। असमिका में मूल बिंदु को प्रतिस्थापित करने पर $3(0) + 0 = 0 \le 12$ असमिका सन्तुष्ट होती है। अतः असमिका का हल क्षेत्र मूल बिंदु की ओर होगः
$x \ge 0$ तथा $y \ge 0$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र – चूँकि प्रथम पाद का प्रत्येक बिंदु इन असमिकाओं को सन्तुष्ट करता है। अत: असमिकाओं $x \ge 0$ तथा $y \ge 0$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र प्रथम शद होगा।




रेखाओं $x + 3y = 12$ तथा $3x + y = 32$ के प्रतिच्छेद बिंदु के निर्देशांक E(3, 3) हैं।
छायांकित क्षेत्र OCEB उपरोक्त असमिकाओं का उभयनिष्ठ क्षेत्र प्रदर्शित करता है। यह क्षेत्र दी गई कि प्रोग्राभन समस्या का सुसंगत
हल क्षेत्र है। इस हल क्षेत्र के कोनीय बिंदु O(0, 0), C(4, 0), E(3, 3) तथा B(0, 4) हैं। इन बिंदुओं पर उद्देश्य फलन का मान निम्न तालिका में दिया गया है।

| **बिन्द** | **x निर्देशांक** | **y निर्देशांक** | **उदेश्य फ्लन Z=2.50x+y** |
|---|---|---|---|
| O | 0 | 0 | $Z_O = 2.50(0)+0 = 0$ |
| C | 4 | 0 | $Z_C = 2.50(4)+0 = 10$ |
| E | 3 | 3 | $Z_E = 2.50(3)+3 = 10.50$ |
| B | 0 | 4 | $Z_B = 2.50(0)+4 = 4$ |

सारणी से स्पष्ट है कि उद्देश्य फलन का मान Z = 10.50 बिंदु E(3, 3) पर अधिकतम है। अत: निर्माता को अधिकतम लाभ प्राप्त करने के लिये नट तथा बोल्ट प्रत्येक के 3 – 3 पैकेट प्रतिदिन बनाने चाहिये।

**प्रश्न 5. एक व्यापारी पंखे तथा सिलाई मशीनें खरीदना चाहता है। उसके पास निवेश करने के लिए केवल Rs 5760 है तथा अधिकतम 20 वस्तुओं को रखने के लिए ही स्थान उपलब्ध है। एक पंखे तथा सिलाई मशीन की कीमत क्रमशः Rs 360 वर Rs 240 है। वह एक पंखे तथा एक सिलाई मशीन को बेचने पर क्रमशः Rs 22 व Rs 18 लाभ कमाता है। यह मानते हुए कि व्यापारी कितनी वस्तुएँ खरीदता है, वे सभी वस्तुएँ वह बेच सकता है। अधिकतम लाभ अर्जित करने के लिए उसे कितने पंखे तथा सिलाई मशीने खरीदनी चाहिए। समस्या का गणितीय सूत्रीकरण कर हल कीजिए।**

**हल :** माना व्यापारी x पंखे तथा y सिलाई मशीन खरीदता है। अत:
x पंखों की कीमत = Rs 360x
तथा सिलाई मशीनों की कीमत = Rs 240y
अत: प्रश्नानुसार,
$360x + 240y \leq 5760$
व्यापारी के पास सामान रखने के स्थान के अनुसार
$x + y \leq 20$
व्यापारी द्वारा x पंखों का अर्जित लाभ = Rs 22x
तथा y सिलाई मशीनों पर अर्जित लाभ = Rs 18y
अत: अधिकतम लाभ अर्जित करने के लिये उद्देश्य फलन
$Z = 22x + 18y$
दी गई रैखिक प्रोग्रामन समस्या का गणितीय सूत्रीकरण निम्न प्रकार है–
अधिकतम $Z = 22x + 18y$
व्यवरोध $360x + 240y \leq 5760$
$x + y \leq 20$
$x \geq 0, y \geq 0$
व्यवरोध के रूप में दी गई असमिकाओं को समीकरण में व्यक्त करने पर
$360x + 240y = 5760$
$\Rightarrow 3x + 2y = 48$ …(1)
तथा $x + y = 20$ ..(2)
असपिका $360x + 240y \leq 5760$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र –
रेखा $3x + 2y = 48$ निर्देशी अक्षों को क्रमश: बिंदु A(16, 0) तथा B(0, 24) पर मिलती है।
$3x + 2y = 480$ के मान के लिए सारणी

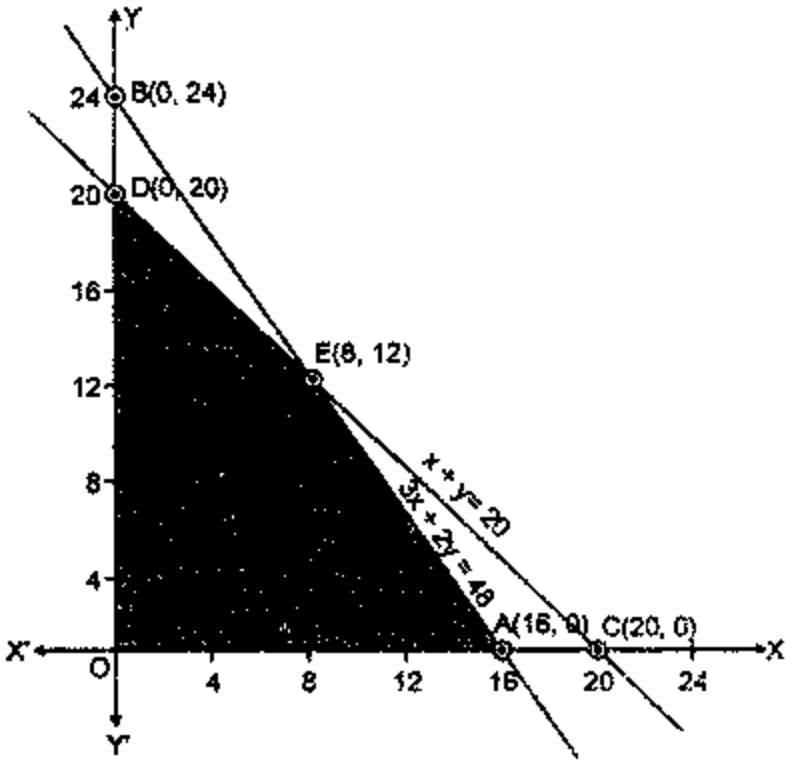
| | | |
|---|---|---|
| x | 16 | 0 |
| y | 0 | 24 |

A(16, 0); B(0, 24)
बिंदु A तथा B को अंकित कर रेखा का आलेख खींचते हैं।
असमिका में भूल बिंदु (0, 0) प्रतिस्थापित करने पर $3(0) + 2(0) = 0 \leq 48$ अपमिका को सन्तुष्ट करता है।
अतः समस्या का हल क्षेत्र मूल बिंदु की ओर है।

असमिका $x + y \le 20$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र –
रेखा $x + y = 20$ निर्देशी अक्षों को क्रमशः बिंदु C(20, 0) तथा D(0, 20) को मिलती है।
$x + y = 20$ के मानों के लिए सारणी

| | | |
|---|---|---|
| x | 20 | 0 |
| y | 0 | 20 |

C(20, 0); D(0, 20)
बिंदु C तथा D को अंकित कर रेखा का आलेख खींचते हैं। असमिका में मूल बिंदु (0, 0) को प्रति स्थापित करने पर $0 + 0 = 0 \le 20$ असमिका को सन्तुष्ट करता है।
अतः असमिका को हल मूल बिंदु की ओर होगा।
$x \ge 0$ तथा $y \ge 0$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र –
चूँकि प्रथम पाद का प्रत्येक बिंदु असमिकाओं $x \ge 0$ तथा $y \ge 0$ को सन्तुष्ट करता है। अत: असमिका का हल प्रथम पाद है।
रेखाओं $3x + 2y = 480$ तथा $x + y = 20$ के प्रतिच्छेद बिंदु के निर्देशांक $x = 8$ तथा $y = 12$ अतः प्रतिच्छेद बिंदु E(8, 12) है।




छायांकित क्षेत्र OAED उपरोक्त असमिकाओं का उभयनिष्ठ क्षेत्र प्रदर्शित करता है। यह क्षेत्र दी गई रैखिक समस्या का सुसंगत हल है। इस क्षेत्र के कोनीय बिंदुओं के निर्देशांक O(0, 0), A(16, 0), E(8, 12) तथा D(0, 20) हैं। जहाँ E रेखाओं $3x + 2y = 48$ तथा $x + y = 20$ का प्रतिच्छेद बिंदु है।

**इन बिंदुओं पर उद्देश्य फलन के मान नीचे सारणी में दिये गये हैं।**

| **बिन्द** | **x निर्देशांक** | **y निर्देशांक** | **उदेश्य फ्लन Z=22x+18y** |
|---|---|---|---|
| O | 0 | 0 | $Z_O = 22\times0+18\times0 = 0$ |
| A | 16 | 0 | $Z_A = 22\times16+18\times0 = 352$ |
| E | 8 | 12 | $Z_E = 22\times8+18\times12 = 392$ |
| D | 0 | 20 | $Z_D = 22\times0+18\times20 = 360$ |

सारणी से स्पष्ट है कि उद्देश्य फलन का मान बिंदु E(8, 12) पर अधिकतम Rs 392 है।
अतः व्यापारी को अधिकतम लाभ अर्जित करने के लिये 8 पंखे तथा 12 सिलाई मशीन खरीदना चाहिये।

**प्रश्न 6. एक कारखाना दो प्रकार के पेचों A तथा B का उत्पादन करता है। प्रत्येक के उत्पादन के लिए दो प्रकार के यंत्रों स्वचालित तथा हस्तचालित की आवश्यकता होती है। एक पैकेट पेचों A के उत्पादन में 4 मिनट स्वचालित तथा 6 मिनट हस्तचालित मशीन तथा एक पैकेट पेचों B के उत्पादन में 6 मिनट स्वचालित तथा 3 मिनट हस्तचालित मशीन का कार्य होता है। प्रत्येक मशीन किसी भी दिन के लिये अधिकतम A घण्टे कार्य के लिए उपलब्ध है। निर्माता पेंच A के प्रत्येक पैकेट पर 70 पैसे तथा पेंच B के प्रत्येक पैकेट पर Rs 1 का लाभ कमाता है। यह मानते हुए कि कारखानों में निर्मित सभी पेचों के पैकेट बिक जाते हैं, निर्माता को प्रतिदिन प्रत्येक प्रकार के कितने पैकेट बनाने चाहिये जिससे अधिकतम लाभ अर्जित हो सके।**

**हल :** माना निर्माता को प्रतिदिन A पेचों के x पैकिट तथा B पेचों के y पैकिट बनाने चाहिये।
अतः x पैकेट पेच का लाभ = Rs 0.70x
तथा y पैकेट पेचों का लाभ = Rs y
अत: अधिकतम लाभ अर्जित करने के लिये उद्देश्य फलन
$Z = 0.70x + y$
A प्रकार के x पेचों को स्वचालित मशीन से बनाने का समय = 4x मिनट
तथा B प्रकार के y पेचों को स्वचालित मशीन से बनाने का समय = 6y मिनट
अतः प्रश्नानुसार स्वचालित मशीन द्वारा प्रतिदिन बनने वाले पैचों में लगा समय = 4x + 6y मिनट
परन्तु स्वचालित मशीन केवल चार घंटे ही उपलब्ध होती है । अतः
व्यवरोध $4x + 6y \le 4 \times 60$ मिनट
$4x + 6y \le 240$ मिनट
इसी प्रकार A प्रकार के पेच को हस्तचालित मशीन द्वारा बनाने में लगा समय = 6x मिनट
तथा B प्रकार के पेचों को हस्तचालित मशीन से बनाने में लगा समय = 3y मिनट
परन्तु हस्तचालित मशीन केवल 4 घंटे ही उपलब्ध होती है।

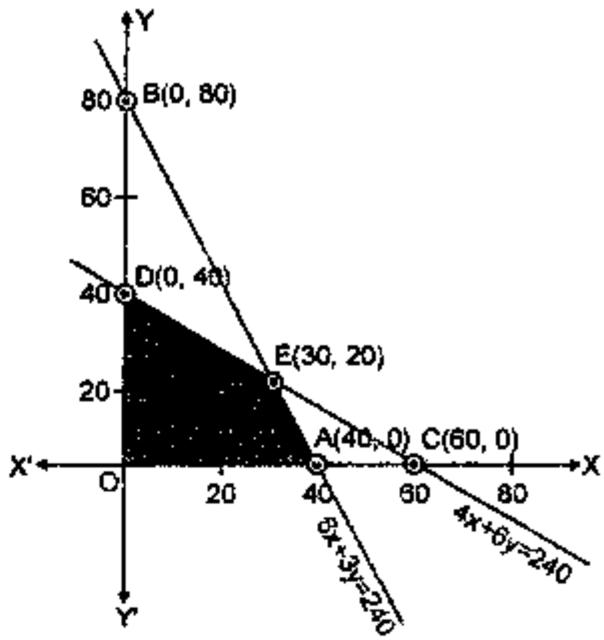
अतः व्यवरोध $6x + 3y \le 4 \times 60$ मिनट
$\Rightarrow 6x + 3y \le 240$ मिनट
$\because x$ और $y$ पेचों की संख्या है।
$\therefore x \ge 0$ तथा $y \ge 0$
दी गई रैखिक प्रोग्रामिन समस्या का गणितीय सूत्रीकरण निम्न है-
अधिकतम
$z = 0.70x + y$
व्यवरोध $4x + 6y \le 240$
$6x + 3y \le 240$
$x \ge 0, y \ge 0$
व्यवरोधों के रूप में दी गई सभी असमिकाओं को समीकरण में । परिवर्तित करने पर,
$4x + 6y = 240$ ...(1)
$6x + 3y = 240$ ...(2)
असमिका $4x + 6y \le 240$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र –
रेखा $4x + 6y = 240$ निर्देशी अक्षों को क्रमशः बिंदु A(60, 0) तथा B(0, 40) पर मिलती
$4x + 6y = 240$ के मानों के लिए सारणी

| | | |
|---|---|---|
| x | 60 | 0 |
| y | 0 | 40 |

बिंदु A और B को अंकित कर आलेख खींचते हैं।
असमिका में मूल बिंदु (0, 0) को प्रतिस्थापित करने पर $4(0) + 6(0) = 0 \le 240$ असमिका को सन्तुष्ट करता है। अत: असमिका का हल क्षेत्र मूल बिंदु की ओर होगा ।
असमिका $6x + 3y \le 240$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र –
देखा $6x + 3y = 240$ निर्देशी अक्षों को क्रमशः बिंदु C(40,0) तथा D(0, 80) पर मिलती
$6x + 3y = 240$ के दानों के लिए सारणी

| | | |
|---|---|---|
| x | 40 | 0 |
| y | 0 | 80 |

C(40, 3); D(0, 80)
बिंदु C और D को अंकित कर रेखा का आलेख खींचते हैं। असमिका में मूल बिंदु (0, 0) प्रतिस्थापित करने पर $6(0) + 3(0) = 0 \le 240$ असमिका को सन्तुष्ट करता है। अतः असमिका का हल क्षेत्र मूल | बिंदु की ओर होगा।
$x \ge 0$ तथा $y \ge 0$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र –
चूँकि प्रथम पाद में प्रत्येक बिंदु इन दोनों असमिकाओं को सन्तुष्ट करता है। अतः असभिकाओं $x \ge 0$ तथा $y \ge 0$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र प्रथम पाद है।




रेखाओं 4x + 6y = 240 तथा 6x + 3y = 240 के प्रतिच्छेद बिंदु के निर्देशांक x = 30 तथा y = 20 है।।
छायांकित क्षेत्र OAED उपरोक्त असमिकाओं का उभयनिष्ठ क्षेत्र प्रदर्शित करता है। यह क्षेत्र दी गई खिक प्रोग्रामन समस्या का सुसंगत हल क्षेत्र हैं।
इस हल क्षेत्र के कोनीय बिंदुओं के निर्देशांक O(0, 0), A(40, 0), E(30, 20) तथा D(0, 40) हैं।
इन बिंदुओं पर उद्देश्य फलन के मान नीचे सारणी में दिये गये हैं-

| **बिन्द** | **x निर्देशांक** | **y निर्देशांक** | **उदेश्य फ्लन Z=0.70x+y** |
|---|---|---|---|
| O | 0 | 0 | $Z_O$ = 0.70×0+0 = 0 |
| A | 40 | 0 | $Z_A$ = 0.70×40+0 = 28 |
| E | 30 | 20 | $Z_E$ = 0.70×30+20 = 41 |
| D | 0 | 40 | $Z_D$ = 0.70×0+40 = 40 |

सारणी से स्पष्ट है कि उद्देश्य फलन का मान बिंदु E(30, 20) पर अधिकतम Rs 41 है।
अतः निर्माता को पेंच A के 30 पैकेट तथा पेच B के 20 पैकेट बनाने चाहिये ताकि उसे अधिकतम लाभ Rs 41 प्राप्त हो सके।

**प्रश्न 7. एक फर्म प्लाईवुड के अनूठे स्मृति चिन्ह का निर्माण करती है A प्रकार के प्रत्येक स्मृति चिन्ह के निर्माण में 5 मिनट काटने तथा 10 मिनट जोड़ने में लगते हैं। B प्रकार के प्रत्येक स्मृति चिन्ह के निर्माण में 8 मिनट काटने तथा 8 मिनट जोड़ने में लगते है। काटने तथा जोड़ने के लिये कुल समय क्रमशः 3 घण्टे 20 मिनट तथा 4 घण्टे उपलब्ध है। फर्म को प्रत्येक A प्रकार के स्मृति चिन्ह पर Rs 5**

**तथा प्रत्येक B प्रकार के स्मृति चिन्ह पर Rs 6 का लाभ होता है। अधिकतम लाभ प्राप्त करने के लिए फर्म को प्रत्येक प्रकार के कितने-कितने स्मृति चिन्हों का निर्माण करना चहिये?**

**हल :** माना फर्म को A प्रकार के x स्मृति चिन्ह तथा B प्रकार के y स्मृति चिन्ह बनाने चाहिये।
इसलिये x स्मृति चिन्हों पर अर्जित लाभ = Rs 5x
तथा y स्मृति चिन्हों पर अर्जित लाभ = Rs 6y
अत: अधिकतम लाभ अर्जित करने के लिये उद्देश्य 'फलन की
मान $z = 5x + 6y$
चूँकि A प्रकार के स्मृति चिन्ह को काटने में लगा समय
= 5x मिनट
तथा B प्रकार के स्मृति चिन्हों को काटने में लगा समय = 8y मिनट
अतः प्रश्नानुसार A और B प्रकार के स्मृति चिों को काटने में लगे कुल समय के लिये
व्यवरोध $5x + 8y \le 3$ घंटे 20 मिनट
$\Rightarrow 5x + 8y \le 200$ मिनट
इसी प्रकार A तरह के स्मृति चिह्नों को जोड़ने में लगा समय
= 10x मिनट
तथा B तरह के स्मृति चिों को जोड़ने में लगा समय
= 8y मिनट
अत: प्रश्नानुसार A और B प्रकार के स्मृति चिों को जोड़ने में लगे कुल समय के लिये,
व्यवरोध $10x + 8y \le 4$ घंटे
$\Rightarrow 10x + 8y \le 240$ मिनट
अतः दी गई रैखिक प्रोग्रासन समस्या का गणितीय सूत्रीकरण निम्न
अधिकतम
$z = 5x + 6y$
व्यवरोध $5x + 8y \le 200$
$10x + 8y \le 240$
तथा $x \ge 0, y \ge 0$
व्यवरोधों के रूप में दी गई असमिकाओं को समीकरण रूप में परिवर्तित करने पर,
$5x + 8y = 200$ ...(1)
$10x + 8y = 240$ ...(2)
असमिका $5x + 8y \le 200$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र – रेखा $5x + 8y = 200$ निर्देशी अक्षों को क्रमशः बिंदु A(40, 0) तथा B(0, 25) पर मिली
$5x + 8y = 200$ के भानों के लिए सारणी

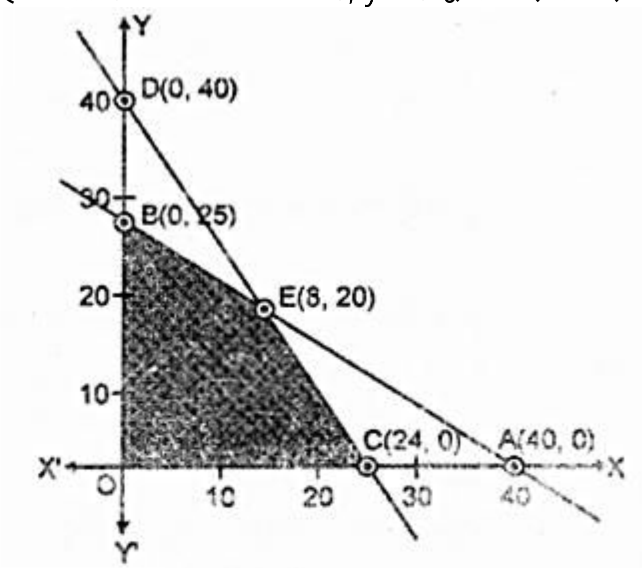
| | | |
|---|---|---|
| x | 40 | 0 |
| y | 0 | 25 |

A(40, 0); B(0, 25) बिंदुओं A और B को अंकित कर रेखा का आलेख खींचते हैं। असमिका में मूल बिंदु (0, 0) को प्रतिस्थापित करने पर $5(0) + 8(0) = 0 \le 200$ असमिका सन्तुष्ट होती है। अतः असमिका को हल क्षेत्र भूल बिंदु की ओर होगा।

असमिको $10x + 8y \le 240$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र – रेखा $10x + 8y = 240$ निर्देशी अक्षों को बिंदु C(24, 0) तथा D(0, 30) पर मिलती है।
$10x + 8y = 240$ के मानों के लिए सारणी

| | | |
|---|---|---|
| x | 24 | 0 |
| y | 0 | 30 |

C(24, 0); D(0, 30)
बिंदुओं C और D को अंकित कर आलेख खचते हैं। असमिका में भूलविंदु को प्रतिस्थापित करने पर 10(0) + 8(0) = 0 ≤ 240 असमिका सन्तुष्ट होती है। अत: असमिका का हल क्षेत्र मूल बिंदु की ओर होगा।
$x \ge 0, y \ge$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र – चूँकि प्रथम पाद का प्रत्येक बिंदु इन दोनों असमिकाओं को सन्तुष्ट करता है। अत: उस समकाओं $x \ge 0$, $y \ge 0$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र प्रथम पाद हो ।




रेखाओं $5x + 8y = 200$ तथा $10x + 8y = 240$ के प्रतिच्छेद बिंदु E के निर्देशांक $x = 8$, $y = 20$ है।।
छायांकित क्षेत्र OCEB उपरोक्त असमिकाओं का उभयनिष्ठ क्षेत्र प्रदर्शित करता है। यह क्षेत्र दी गई रैखिक प्रोग्रामन समस्या का सुसंगत हल है। इस हल क्षेत्र के कोनीय बिंदुओं के निर्देशांक O(0, 0), C(24, 0), E(8, 20) तथा B(0, 25) है।
इन बिंदुओं पर उद्देश्य फ लन का मान अग्र सारणी में दिया गया

| **बिन्द** | **x निर्देशांक** | **y निर्देशांक** | **उदेश्य फ्लन Z=5x+6y** |
|---|---|---|---|
| O | 0 | 0 | $Z_O = 5\times0+6\times0 = 0$ |
| C | 24 | 0 | $Z_C = 5\times24+6\times0 = 120$ |
| E | 8 | 20 | $Z_E = 5\times8+6\times20 = 160$ |
| B | 0 | 25 | $Z_B = 5\times0+6\times25 = 150$ |

सारिणी से स्पष्ट है कि बिंदु E(8, 20) पर उद्देश्य फलन का मान अधिकतम Rs 160 है। अत: अधिकतम लाभ प्राप्त करने के लिये फर्म को A प्रकार के 8 तथा B प्रकार के 20 स्मृति चिह्न बनाने चाहिये।

**प्रश्न 8. एक किसान के पास दो प्रकार के उर्वरक F1 व F2 है। उर्वरक F1 में 10% नाइट्रोजन तथा 6% फॉस्फोरिक अम्ल है। जबकि उर्वरक F2 में 5% नाइट्रोजन तथा 10% फॉस्फोरिक अम्ल हैं। मिट्टी की स्थितियों का परीक्षण करने के बाद किसान पाता है कि उसे अपनी फसल के लिए कम से कम 14 किलोग्राम नाइट्रोजन तथा कम से कम 14 किलोग्राम फॉस्फोरिक अमन की आवश्यकता है। यदि उर्वरक F1 की कीमत 60 पैसे प्रति किलोग्राम तथा F2 की कीमत 40 पैसा प्रति किलोग्राम हो तो न्यूनतम मूल्य र वाछित पोषक तत्वों की आवश्यकता को ध्यान में रखते हुए प्रत्येक बैरक की कितनी किलोग्राम मात्रा उपयोग में लाई जानी चाहिये।**

**हल :** माना F1 उर्वरक की मात्रा x किग्रा. तथा F2 की मात्रा y किग्रा. है।
चूँकि F1 उर्वरक की कीमत 60 पैसे प्रति किग्रा तथा F2 उर्वरक की कीमत 40 पैसे प्रति किग्रा है।

$\therefore$ $F_1$ की कुल कीमत = ₹ $\left(\frac{60}{100}\right)x$

तथा $F_2$ की कुल कीमत = ₹ $\left(\frac{40}{100}\right)y$

अतः न्यूनतम मूल्य पर वांछित पोषक तत्वों की कुल कीमत का उद्देश्य फलन

$$z = \left(\frac{60}{100}\right)x + \left(\frac{40}{100}\right)y$$

चूँकि $F_1$ में नाइट्रोजन की मात्रा $\left(\frac{10}{100}\right)x$ किग्रा.

तथा $F_2$ में नाइट्रोजन की मात्रा $\left(\frac{5}{100}\right)y$ किग्रा.

अत: नाइट्रोजन तत्त्व के लिये आवश्यक व्यवरोध

$$\left(\frac{10}{100}\right)x + \left(\frac{5}{100}\right)y \le 14$$

तथा इसी प्रकार फास्फोरस तत्त्व के लिये आवश्यक व्यवरोध

$$\left(\frac{6}{100}\right)x + \left(\frac{10}{100}\right)y \le 14$$

चूँकि $x$ तथा $y$ उर्वरक की मात्रा है। अत:

$$x \ge 0, y \ge 0.$$

अत: दी गई रैखिक प्रोग्रामन समस्या का गणितीय सूत्रीकरण निम्न है—

न्यूनतम $$z = \left(\frac{60}{100}\right)x + \left(\frac{40}{100}\right)y$$

$$\left(\frac{10}{100}\right)x + \left(\frac{5}{100}\right)y \le 14$$
$$\left(\frac{6}{100}\right)x + \left(\frac{10}{100}\right)y \le 14$$
$$x \ge 0, y \ge 0$$

व्यवरोधों के रूप में दी गई असमिकाओं को समीकरण में बदलने

10x + 5y = 1400 ...(1)

6x + 10y = 1400 ...(2)

x = 0 ...(3)

y = 0 ...(4)

असमिका

$$\left(\frac{10}{100}\right)x + \left(\frac{5}{100}\right)y \le 14$$

द्वारा प्रदर्शित क्षेत्ररेखा 10x + 5y = 1400 निर्देशी अक्षों को क्रमशः बिंदु A(140, 0) तथा B(280, 0) पर मिलते हैं।

10x + 5y = 1400 के मानों के लिए सारणी

| | | |
|---|---|---|
| x | 140 | 0 |
| y | 0 | 280 |

A(140, 0); B(0, 280)

A और B को अंकित कर रेखा का आलेख खींचते हैं। असमिका में मूल बिंदु (0, 0) को प्रतिस्थापित करने पर 10(0) + 5(0) = 0 ≤ 1400 असमिका सन्तुष्ट होती है। अत: असमिका का हल क्षेत्र मूल बिंदु की। ओर होगा।

असमिका

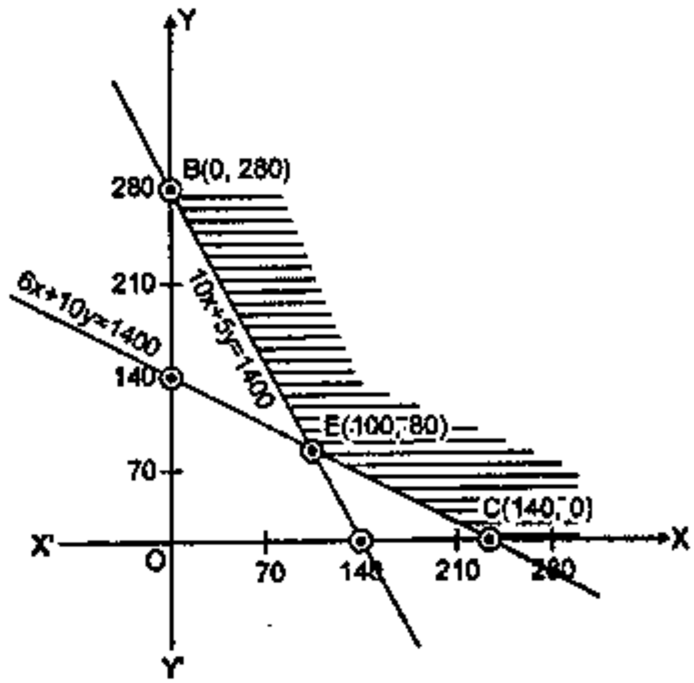
$$\left(\frac{6}{100}\right)x + \left(\frac{10}{100}\right)y \le 14$$

द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र-

रेखा 6x + 10y = 1400 निर्देशी अक्षों को क्रमशः बिंदु C($\frac{1400}{6}$, 0)।

तथा D(0, 140) पर मिलती है।

6x + 10y = 1400 के मानों के लिए सारणी




C($\frac{1400}{6}$, 0): D(0, 140)
इन बिंदुओं को अंकित कर रेखा का आलेख खींचते हैं। असमिको में मूल बिंदु (0, 0) को प्रतिस्थापित करने पर 6(0) + 10(0) = 0 ≤ 1400 असमिका सन्तुष्ट होती है। अत: असमिका को हल क्षेत्र मूल बिंदु की ओर होगा।
x ≥ 0 तथा y ≥ 0 द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र –
चूँकि प्रथम पद में प्रत्येक बिंदु इन दोनों असमिकाओं को सन्तुष्ट करता है अतः इन असमिकाओं का हल क्षेत्र प्रथम पाद है।
रेखाओं 10x + 5y = 1400 तथा 6x + 10y = 1400 के प्रतिच्छेद
बिंदु E के निर्देशांक x = 100 तथा y = 80 हैं।
छायांकित धोत्र CEB उपरोक्त असमिकाओं का उभयनिष्त क्षेत्र है। यह क्षेत्र दी गई रैखिक प्रोग्रामन समस्या का सुसंगत हल क्षेत्र है। इस क्षेत्र के कोनीय बिंदुओं के निर्देशांक C($\frac{1400}{6}$, 0), E(100, 8) तथा B(0, 280) हैं। इन बिंदुओं पर उद्देश्य फलन के मान नीचे सारिणी में दिये गये हैं-

| बिन्दु | $x$ निर्देशांक | $y$ निर्देशांक | उद्देश्य फलन $Z=\left(\frac{60}{100}\right)x+\left(\frac{40}{100}\right)y$ |
|---|---|---|---|
| $C$ | $\frac{1400}{6}$ | 0 | $Z_C=\left(\frac{60}{100}\times\frac{1400}{6}\right)+\frac{40}{100}\times 0=140$ |
| $E$ | 100 | 80 | $Z_E=\frac{60}{100}\times 100+\frac{40}{100}\times 80=92$ |
| $B$ | 0 | 280 | $Z_B=\frac{60}{100}\times 0+\frac{40}{100}\times 280=112$ |

सारणी से स्पष्ट है कि उद्देश्य फलन का मान बिंदु E(100, 80) पर न्यूनतम है। अतः न्यूनतम मूल्य पर उर्वरकों की मात्रा क्रमशः 100 किग्रा, तथा 80 किग्रा होनी चाहिये। न्यूनतम मूल्य Rs 92 है।

**प्रश्न 9. एक व्यापारी दो प्रकार के निजी कम्प्यूटर एक डेस्कटॉप प्रतिरूप तथा एक पोर्टेबल प्रतिरूप जिनकी कीमतें क्रमशः Rs 25,000 तथा Rs 40,000 होगी, बेचने की योजना बनाता है। वह अनुमान लगाता है कि कम्प्यूटर की कुल मासिक प्रांग 250 इकाइयों से अधिक नहीं होगी। प्रत्येक प्रकार के कम्प्यूटरों की इकाईयों की संख्या ज्ञात कीजिये जिसे व्यापारी अधिकतम लाभ प्राप्त करने के लिए भण्डारण करें यदि उसके पास निवेश करने के लिए Rs 70 लाख से अधिक नहीं है तथा यदि व्यापारी का डेस्कटॉप प्रतिरूप पर लाभ Rs 4500 तथा पोर्टेबल प्रतिरूप पर लाभ Rs 5000 से।**

**हल :** माना डेस्कटॉप प्रतिरूप की मात्रा x तथा पोर्टेबल प्रतिरूप की मात्रा y है।
अतः अधिकतम लाभ प्राप्त करने के लिये उद्देश्य फलन
$z = 4500x + 5000y$
कम्प्यूटरों की कुल संख्या $x + y \le 250$ चूँकि कुल मासिक माँग 250 इकाइयों से अधिक नहीं है।
कम्प्यूटरों की कुल कीमत $25000x + 40000y \le 70,000,00$
चूंकि x और y कम्प्यूटरों की संख्या है इसलिये –
$x \ge 0, y \ge 0$
अतः दी गई रैखिक प्रोग्रामन समस्या का गणितीय सूत्रीकरण निम्न
अधिकतम $z = 4500x + 5000y$
व्यवरोध $x + y \le 250$
$25000x + 40,000y \le 70,000,00$
$x \ge 0, y \ge 0$
व्यवरोधों में रूप में दी गई असमिकाओं को समीकरण में परिवर्तित करने पर
$x + y = 250$ …(1)
$25000x + 40000y = 70,000,00$
$25x + 40y = 7000$ …(2)
$x = 0$ …(3)
$y = 0$ …(4)
असमिका $x + y \le 250$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र –
रेखा $x + y = 250$ निर्देशी अक्षों को क्रमशः बिंदु A(250, 0) तथा B(0, 250) पर मिलती
$x + y = 250$ के मानों के लिए सारणी

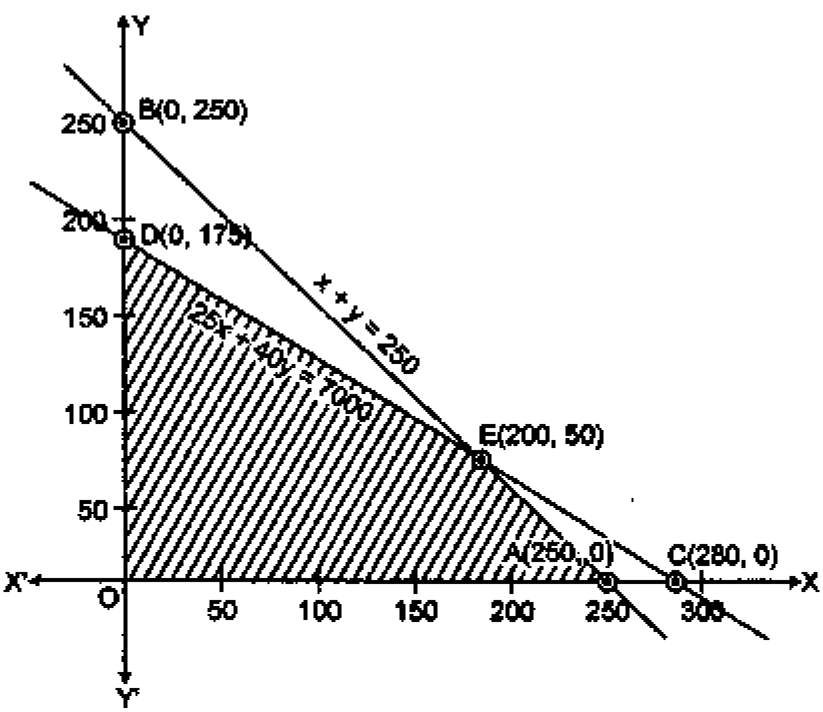
| | | |
|---|---|---|
| x | 250 | 0 |
| y | 0 | 250 |

A(250, 0); B(0, 250)
बिंदुओं A तथा B को अंकित कर आलेख खींचते हैं। असमिका में मूल बिंदु (0, 0) को प्रतिस्थापित करने पर $0 + 0 = 0 \le 250$ असमिका सन्तुष्ट होती है। अतः असमिका का हल क्षेत्र मूल बिंदु की ओर होगा।

असमिका 25x + 40y ≤ 7000 द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र –
रेखा 25x + 40y = 7000 निर्देशी अक्षों को क्रमशः बिंदु C(280, 0) तथा D(0, 175) पर मिलती है।
25x + 40y = 7000 के मानों के लिए सारणी

| | | |
|---|---|---|
| x | 280 | 0 |
| y | 0 | 175 |

C(280, 0); D(0, 175)
बिंदुओं C और D को अंकित कर रेखा का आलेख खचते हैं। असमिका में मूल बिंदु (0, 0) को प्रतिस्थापित करने पर
25(0) + 40(0) = 0 ≤ 7000 असमिका सन्तुष्ट होती है। अत: इस असमिका का हल क्षेत्र मूल बिंदु की ओर होगा।
x ≥ 0 तथा y ≥ 0 द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र –
चूँकि प्रथम पद में प्रत्येक बिंदु इन दोनों असमिकाओं को सन्तुष्ट करता है। अतः असमिकाओं का हल क्षेत्र प्रथम पाद है।
रेखाओं x + y = 250 तथा 25x + 40y = 7000 के प्रतिच्छेद बिंदु E के निर्देशांक x = 200 तथा y = 50 है।
छायांकित क्षेत्र OAED उपरोक्त असमिकाओं का उभयनिष्ठ क्षेत्र है। यह क्षेत्र की गई रैखिक प्रोग्रामन समस्या का सुसंगत हल क्षेत्र है। इस क्षेत्र के कोनीय बिंदुओं के निर्देशांक O(0, 0), A(250, 0), E(200, 50) तथा D(0, 175) है।



**इन बिंदुओं पर उद्देश्य फलन का मान नीचे सारणी में दिये गये**

| **बिन्द** | **x निर्देशांक** | **y निर्देशांक** | **उदेश्य फ्लन Z = 4500x + 5000y** |
|---|---|---|---|
| O | 0 | 0 | $Z_O$ = 4500 x 0 + 5000 x 0 = 0 |
| A | 250 | 0 | $Z_A$ = 4500 x 250 + 5000 x 0 = 11,25,000 |
| E | 200 | 50 | $Z_E$ = 4500 x 200 + 5000 x 50 = 900000 + 250000 = 1150000 |
| D | 0 | 175 | $Z_D$ = 4500 x 0 + 5000 x 175 = 8,75,000 |

सारणी से स्पष्ट है कि उद्देश्य फलन का मान बिंदु E(200, 50) पर Rs 11,50,000 है।
अतः व्यापारी को अधिकतम लाभ कमाने के लिये डेस्कटॉप कम्प्यूटर 200 तथा पोर्टेबल कम्प्यूटर 50 खरीदने चाहिये। अधिकतम लाभ = Rs 11,50,000

**प्रश्न 10. दो अन्न भण्डारों A तथा B की भण्डारण क्षमता क्रमशः 100 क्विण्टल तथा 50 क्विंटल है। उन्हें तीन राशन की दुकानों D, E तथा F पर अन्न उपलब्ध करवाना है, जिनकी आवश्यकताएँ क्रमशः 60, 50 तथा 40 क्विंटल है। भण्डारों से दुकानों को प्रति क्विंटल परिवहन लागत निम्न सारणी में दी गई है।**

**सारणी**

| **को \ से** | **प्रति क्विंटल परिवहन लागत (Rs में)** | |
|---|---|---|
| | A | B |
| D | 6 | 4 |
| E | 3 | 2 |
| F | 2.50 | 3 |

**परिवहन लागत के निम्नतमीकरण के लिये आपूर्ति का परिवहन कैसे किया जाए ?**

**हल :** माना भण्डार A से D को x किंवटल तथा दुकान E को y किंवटल राशन भेजा जाता है तो शेष राशन (100 – x – y) किंवटल राशन दुकान F को भेजा जायेगा।
अतः सारणी के अनुसार भण्डार A से दुकान D तक परिवहन लागत = Rs 6x

दुकान E तक की परिवहन लागत = Rs 3y
तथा दुकान F तक की परिवहन लागत
= Rs $\frac{5}{2}(100 - x - y)$
अतः भण्डार A से दुकान D, E तथा F तक राशन पहुँचाने की लागत
= $6x + 3y + \frac{5}{2}(100 - x - y)$
दुकान D की शेष आपूर्ति (60 – x) किंवटल, E थी।
शेष आपूर्ति (50 – y) किंवटल तथा दुकान F की शेष आपूर्ति [40 – (100 – x – y)] क्विंटल, भण्डार B से की जाती है, अतः सारणी अनुसार भण्डार
B से दुकान D की परिवहन लागत = Rs 4(60 – x)
दुकान E की परिवहन लागत = Rs 2(50 – y)
तथा F की परिवहन लागत = Rs 3(x + y – 100)
अतः भण्डार B से दुकानें D, E तथा F तक की लागत ।
= 4(60 – x) + 2(50 – y) + 3(x + y – 60)
अत: दोनों भण्डारों A और B से दुकानों D, E तथा F तक की कुल परिवहन लागत

$$Z = 6x + 3y + \frac{5}{2}(100 - x - y) + 4(60 - x) + 2(50 - y) + 3(x + y - 60)$$

$$= \left(6 - \frac{5}{2} - 4 + 3\right)x + \left(3 - \frac{5}{2} - 2 + 3\right)y + \frac{5}{2} \times 100 + 240 + 100 - 180$$

$$= 2 \cdot 5x + 1 \cdot 5y + 410$$

भण्डार A की कुल क्षमता 100 क्विंटल है; अतः
$x + y \le 100$
दुकान D को भण्डार A से x क्विंटल तथा शेष भण्डार B से मिलता हैं; अतः
$x \le 60$
इसी प्रकार दुकान E को भण्डार A से y क्विंटल तथा शेष भण्डार B से मिलता है; अतः
$y \le 50$
इसी प्रकार दुकान F को भण्डार A से (100 – x – y) किंवटल तथा शेष भण्डार B से मिलता है
$x + y \ge 60$
तथा $x \ge 0$ तथा $y \ge 0$
चूँकि x और y राशन की मात्रा किंवटलों में है।
अतः दी गई रैखिक प्रोग्रामन समस्या का गणितीय सूत्रीकरण निम्न प्रकार है।
निम्नतकीकरण $z = 2.5x + 1.5y + 410$
व्यवरोध
$x + y \le 100$
$x \le 60$
$y \le 50$

$x + y \geq 60$
$x \geq 0, y \geq 0$
दिये गये व्यवरोध को असमिकाओं से समीकरण में परिवर्तित करने
पर $x + y = 100$ ..(1)
$x = 60$ ....(2)
$y = 50$ ....(3)
$x + y = 60$ ...(4)
$x = 0$ ...(5)
$y = 0$ ...(6)
असमिका $x + y \leq 100$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र –
रेखा $x + y = 100$ निर्देशी अक्षों को क्रमशः बिंदु की (100, 0) तथा बिंदु B(0, 100) पर मिलती है।
$x + y = 100$ के मानों के लिए सारणी

| | | |
|---|---|---|
| x | 100 | 0 |
| y | 0 | 100 |

A(100, 0); B(0, 100)
बिंदु A और B को अंकित कर रेखा का आलेख खचते हैं।
असमिका में मूल बिंदु (0, 0) को प्रतिस्थापित करने पर असमिका $0 + 0 = 0 \leq 100$ सन्तुष्ट होती है। अतः असमिका का हल मुल बिंदु की ओर होगा।
असमिका $x \leq 60$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र – रेखा $x = 60$ निर्देशी अक्षों को क्रमशः C(60, 0) तथा D(60, 50) पर मिलती है।
$x + 0.y = 60$ के मानों के लिए सारणी

| | | |
|---|---|---|
| x | 60 | 60 |
| y | 0 | 50 |

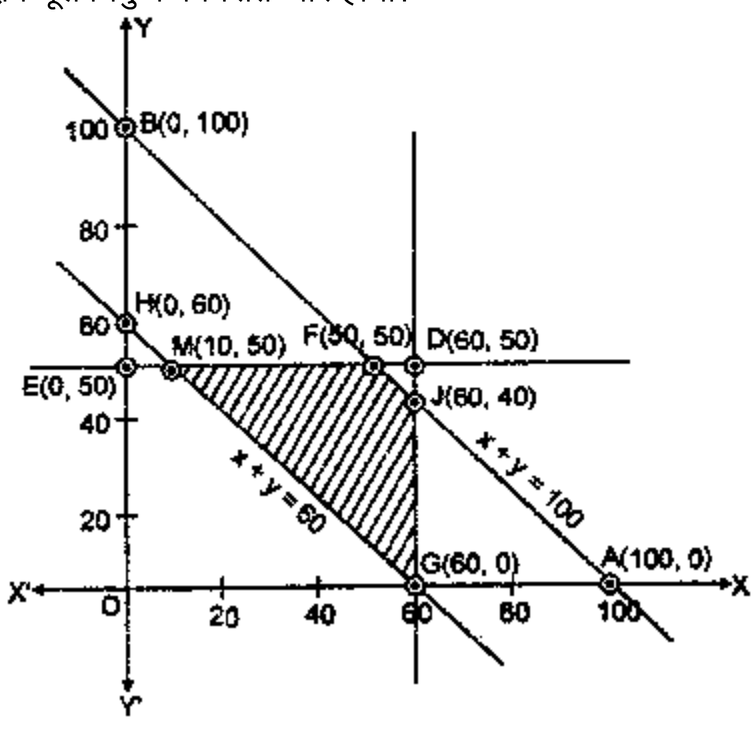
C(60, 0); D(60, 5)
बिंदुओं C और D को अंकित कर रेखा का आलेख खींचते हैं। असमिका को मूल बिंदु (0, 0) को प्रतिस्थापित करने पर $0 + 0 = 0 \leq 60$ असमिका सन्तुष्ट होती है। अत: असमिका का हल मूल बिंदु की और होगा।
असमिका $y \leq 50$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र – रेखा $y = 50$ अक्षों को क्रमशः बिंदु E(0, 50) तथा F(5, 50) पर मिलती है।
$0.x + y = 50$ के मानों के लिए सारणी

| | | |
|---|---|---|
| x | 0 | 50 |
| y | 50 | 50 |

E(0, 50); F(50, 50)
बिंदुओं E और F को अंकित कर रेखा का आलेख ख़चते हैं। असमिका में मूल बिंदु (0, 0) को प्रतिस्थापित करने पर 0 + 0 ≤ 50 असमिका सन्तुष्ट होती है। अतः असमिका का हल क्षेत्र मूल बिंदु की और होगा।
असमिका x + y ≥ 60 द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र –
रेखा x + y = 60 निर्देशी अक्षों को क्रमशः बिंदु G(60, 0) तथा H(0, 60) पर मिलती है।
x + y = 60 के मानों के लिए सारणी

| | | |
|---|---|---|
| x | 60 | 0 |
| y | 0 | 60 |

G(60, 0); H(0, 60)
बिंदुओं G और H को अंकित कर रेखा का आलेख खींचते हैं। असमिका में मूल बिंदु (0, 0) को प्रतिस्थापित करने पर 0 + 0 = 0 ≥ 60 I अतः असमिका सन्तुष्ट नहीं होता है। इसलिये असमिका का हल क्षेत्र मूल बिंदु के विपरीत ओर होगा।




x ≥ 0 तथा y ≥ 0 द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र –
चूँकि प्रथम पाद का प्रत्येक बिंद x ≥ 0 तथा y ≥ 0 को सन्तुष्ट करता है। अतः असमिकाओं का हल क्षेत्र प्रथम पाद ही होगा।
छायांकित क्षेत्र GJFM उपरोक्त असमिकाओं का उभयनिष्ठ क्षेत्र प्रदर्शित करता है। यह क्षेत्र दी गई रैखिक प्रोग्रामन समस्या का सुसंगत हल क्षेत्र है। छायांकित सुसंगत हल क्षेत्र के कोनीय बिंदुओं के निर्देशांक G(60, 0), J(40, 60), F(50, 50) तथा M(10, 50) है जहाँ बिंदु J रेखाओं x + y = 100 तथा x = 60 का प्रतिच्छेद बिंदु, F रेखा x + y = 100 तथा y = 100 का प्रतिच्छेद बिंदु तथा M रेखा x + y = 60 तथा y =

50 का प्रतिच्छेद बिंदु है।
इन बिंदुओं पर उद्देश्य फलन के मान नीचे सारिणी में दिये गये हैं।

| **बिन्द** | **x निर्देशांक** | **y निर्देशांक** | **उदेश्य फ्लन Z=45000x+5000y** |
|---|---|---|---|
| G | 60 | 0 | $Z_G$ = 2.5(60)+1.5(0)+410 = 560 |
| J | 40 | 60 | $Z_J$ = 2.5(40)+1.5(60)+410 = 600 |
| F | 50 | 50 | $Z_F$ = 2.5(50)+1.5(50)+410 = 610 |
| M | 10 | 50 | $Z_M$ = 2.5(10)+1.5(50)+410 = 510 |

सारणी से स्पष्ट है कि उद्देश्य फलन का मान बिंदु M(10, 50) पर न्यूनतम Rs 510 है।
अत; निम्नतम परिवहन लागत के लिये भण्डार A से D, E और F दुकानों को क्रमशः 10, 50 व 40 किंवटल तथा भण्डार B से D, E तथा F दुकानों को 50, 0, 0 क्विंटल भेजना होगा।

# Miscellaneous Exercise

**प्रश्न 1. निम्न रैखिक प्रोग्रामन समस्याओं को आलेखीय विधि से हल कीजिए**
**अधिकतम Z = 4x + y**
**व्यवरोध x + y ≤ 50**
**3x + y ≤ 90**
**तथा x, y ≥ 0**

**हल :**

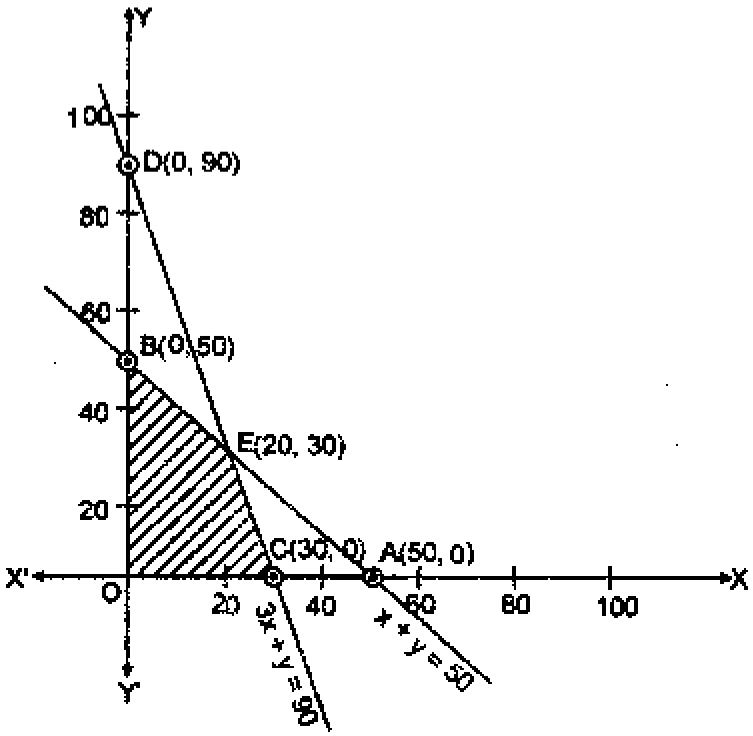
दिये गये व्यवरोधों को समीकरण में परिवर्तित करने पर,
x + y = 50 ...(1)
3x + y = 90 ...(2)
x = 0 ...(3)
y = 0 ...(4)
असमिका x + y ≤ 50 द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र –
रेखा x + y = 50 निर्देशी अक्षों को क्रमशः बिंदु A(50, 10) तथा B(0, 50) पर मिलती है।
x + y = 50 के मानों के लिए सारणी

| | | |
|---|---|---|
| x | 50 | 0 |
| y | 0 | 50 |

A(50, 0); B(0, 50)
बिन्दुओं A तथा B को अंकित कर रेखा का आलेख खींचते हैं। असमिका में मूल बिंदु को प्रतिस्थापित करने पर 0 + 0 = 0 ≤ 50 असमिका को सन्तुष्ट करते हैं। अत: असमका को हल क्षेत्र मूल बिंदु की ओर होगा।
असपिका 3x + y ≤ 90 द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र – रेखा 3x + y = 90 निर्देशी अक्षों को क्रमशः बिंदु C(30, 0) तथा D(0, 90) पर मिलती है।
3x + y = 90 के मानों के लिए सारणी

| | | |
|---|---|---|
| x | 30 | 0 |
| y | 0 | 90 |

C(30, 0); (0, 90)
बिंदुओं C और D को अंकित कर रेखा का आलेख खींचते हैं। असमिका में मूल बिंदु (0, 0) को प्रतिस्थापित करने पर 3(0) + 0 = 0 ≤ 90 असमिका को सन्तुष्ट करता है। अत: असमिका का हल क्षेत्र मूल बिंदु की ओर होगा।
x ≥ 0 तथा y ≥ 0 द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र – चूंकि प्रथम पाद का प्रत्येक बिंदु x ≥ 0 तथा y ≥ 0 को सन्तुष्ट करता है। अत: असमिकाओं द्वारा हुल क्षेत्र प्रथम पाद है।




रेखाओं x + y = 50 तथा रेखा 3x + y = 90 के प्रतिच्छेद बिंदु E के निर्देशांक x = 20 तथा y = 30 हैं। छयांकित क्षेत्र OCEB असमिकाओं का उभयनिष्ठ क्षेत्र है। यह क्षेत्र दी गई रैखिक प्रोगामन समस्या का हल क्षेत्र है। इस हल क्षेत्र के कोनीय बिंदुओं के निर्देशांक क्रमश: O(0, 0), C(30, 0), E(20, 30) तथा B(0, 50) हैं। | इन बिंदुओं पर उद्देश्य फलन के मान निम्न सारणी में दिये गये

| **बिन्दु** | **x निर्देशक** | **y निर्देशांक** | **उदेश्य फ्लन का मान Z = 4x + y** |
|---|---|---|---|
| O | 0 | 0 | $Z_O$ = 4(0)+0 = 0 |
| C | 30 | 0 | $Z_C$ = 4(30)+(0) = 120 |
| E | 20 | 30 | $Z_E$ = 4(20)+30 = 110 |
| B | 0 | 50 | $Z_B$ = 4(0)+50 = 50 |

सारणी से स्पष्ट है कि बिंदु C(30, 0) पर अधिकतम Z = 120 है।

**प्रश्न 2. निम्न रैखिक प्रोगामन समस्या को आलेखीय विधि से हुल कीजिए**
**अधिकतम Z = 3x + 2y**
**ध्यवरोध x + y ≥ 8**

**$3x + 5y \le 15$**
**तथा $x \ge 0$, $y \le 15$**

**हल :**

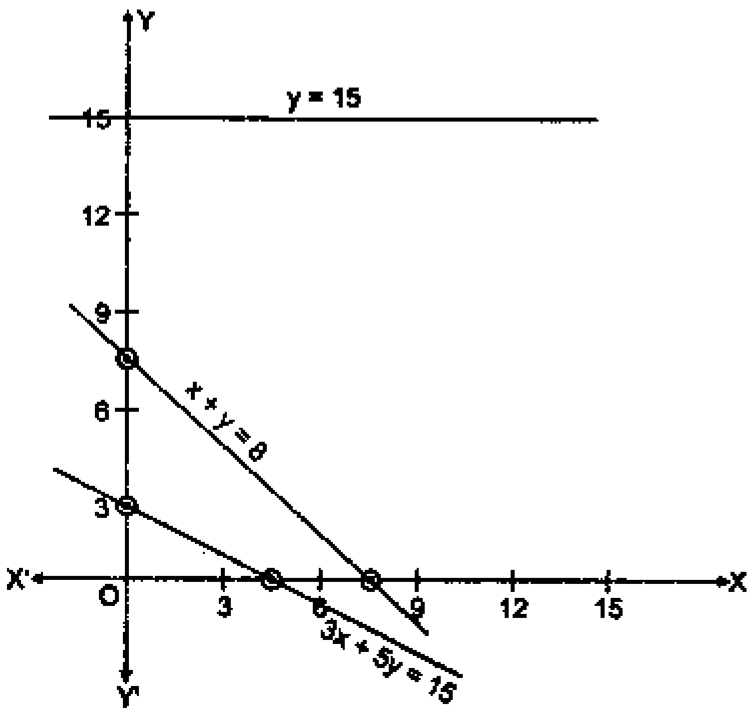
दिये गये व्यवरोधों को असमिकाओं को समीकरण में परिवर्तित करने पर,
$x + y = 8$ ....(1)
$3x + 5y = 15$ ......(2)
$x = 0$ ...(3)
$y = 15$ ...(4)
असमिका $x + y \ge 8$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र –
रेखा $x + y = 8$ निर्देशी अक्षों को क्रमशः बिंदु A(8, 0) तथा B(0, 8) पर मिलती है।
$x + y = 8$ के मानों के लिए सारणी

| | | |
|---|---|---|
| x | 8 | 0 |
| y | 0 | 8 |

A(8, 0); B(0, 8)
बिंदुओं A और B को अंकित कर रेखा का आलेख खींचते हैं।
असमिका में मूल बिंदु को प्रतिस्थापित करने पर $0 + 0 = 0 \ge 8$ सन्तुष्ट नहीं करता है। अतः असमिका का हल क्षेत्र मूल बिंदु के विपरीत ओर होगा।
असमिका $3x + 5y \le 15$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र –
रेखा $3x + 5y \le 15$ निर्देशी अक्षों को क्रमश: बिंदु C(5,0) तथा D(0, 3) पर मिलती है।
$3x + 5 = 15$ के मानों के लिए सारणी

| | | |
|---|---|---|
| x | 5 | 0 |
| y | 0 | 3 |

C(5,0); D(0, 3)
बिंदुओं C और D को अंकित कर रेखा का आलेख खींचते हैं। असमिका में मूल बिंदु को प्रतिस्थापित करने पर $3(0) + 5(0) = 0 \le 15$ असमिका को सन्तुष्ट करते हैं। अतः असमिका का हल क्षेत्र मूल बिंदु की ओर होगा।
असमिका $y \le 15$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र –
रेखा $y = 15$, x-अक्ष के समान्तर है तथा इसका प्रत्येक बिंदु प्रथम पाद में असमिका को सन्तुष्ट करता है। अतः असमिका का हल क्षेत्र मूल बिंदु की ओर होगा।
असमिका $x \ge 0$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र –
चूंकि $x = 0$ प्रथम पाद में प्रत्येक बिंदु से सन्तुष्ट होती है। अत: इसका हल क्षेत्र प्रथम पाद में होगा।



उपर्युक्त आलेख में असमिकाओं का कोई उभयनिष्ठ हल क्षेत्र नहीं है। अतः समस्या का सुसंगत हुल विद्यमान नहीं है।

**प्रश्न 3. निम्न रैखिक प्रोग्रामने समस्या का आलेख विधि से हल ज्ञात कीजियनिम्नतम तथा अधिकतम**
**Z = x + 2y**
**व्यवरोध x + 2y ≥ 100**
**2x – y ≤ 0**
**2x + y ≤ 200**
**तथा x ≥ 0, y ≥ 0**

**हल :**

व्यवरोध के रूप में दी गई असमिकाओं को समीकरण के रूप में परिवर्तित करने पर,
x + 2y = 100 ....(1)
2x – y = 0 ....(2)
2x + y = 200 ....(3)
x = 0 ...(4)
y = 0 ...(5)
असमिका x + 2 ≥ 100 द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र –
रेखा x + 2y = 100 निर्देशी अक्षों को क्रमशः बिंदु A(100, 0) तथा B(0, 50) पर मिलती है।
x + 2y = 100 के मानों के लिए सारणी

| | | |
|---|---|---|
| x | 100 | 0 |
| y | 0 | 50 |

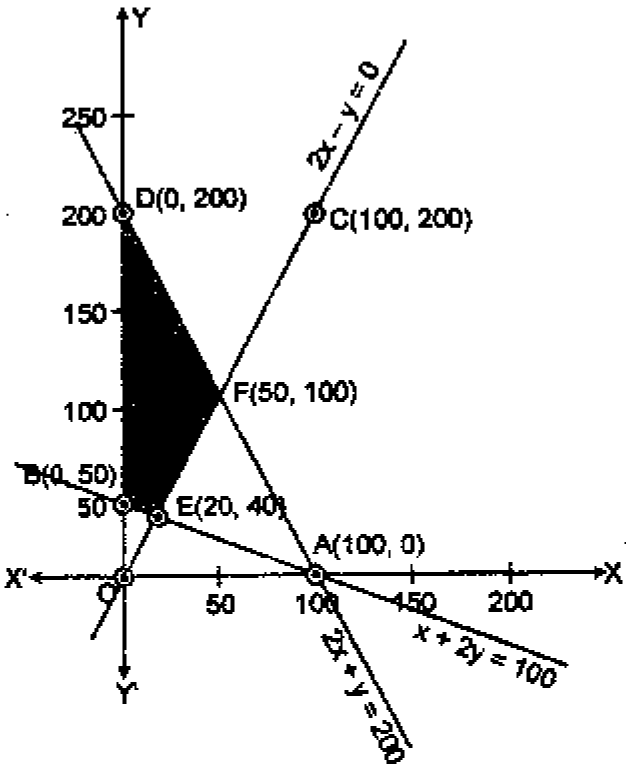
A(100, 0); B(0, 50)
बिंदुओं A और B को अंकित कर रेखा का आलेख खींचते हैं। असमिका में मूल बिंदु (0, 0) प्रतिस्थापित करने पर (0) + 2(0) = 02 100 असमिका सन्तुष्ट नहीं होती है। अतः असमिका का हलक्षेत्र मूल बिंद के विपरीत ओर है।
असमिका $2x - y \leq 0$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र –
रेखा $2x - y = 0$ निर्देशी पक्षों को क्रमशः बिंदु (0, 0) तथा C(100, 200) पर मिलती है।
$2x - y = 0$ के मानों के लिए सारणी

| | | |
|---|---|---|
| x | 0 | 100 |
| y | 0 | 200 |

O(0, 0); C(100, 200)
बिंदुओं O तथा C को अंकित कर रेखा का आलेख खींचते हैं। असमिका में मूल बिंदु (0, 0) को प्रतिस्थापित करने पर $2(0) - 0 = 0 \leq 0$ असमिका सन्तुष्ट होती है। अत: असमिका का हल क्षेत्र मूल बिंदु की ओर होगा ! ।
असमिका $2x + y \leq 200$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र –
रेखा $2x + y = 200$ निर्देशी अक्षों को क्रमशः बिंदुओं A(100, 0) तथा D(0, 200) पर मिलती है।
$2x + y = 200$ के मानों के लिए सारणी

| | | |
|---|---|---|
| x | 100 | 0 |
| y | 0 | 200 |

A(100, 0); D(0, 200)
बिंदु A और D को अंकित कर रेखा का आलेख लॊचते हैं। असमिका में मूल बिंदु (0, 0) को प्रतिस्थापित करने पर $2(0) + (0) = 0 \leq 200$ असमिको सन्तुष्टि होती है। अतः असमिका का हल क्षेत्र मूल बिंदु की ओर होगा।




x ≥ 0, y ≥ 0 द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र –
चूकि प्रथम पाद को प्रत्येक बिंदु x = 0 तथा y = 0 को सन्तुष्ट करता है। अत: असमिकाओं का हल क्षेत्र प्रथम पाद है।
रेखांकित क्षेत्र BDEF दी गई असमिकाओं का उभयनिष्ठ क्षेत्र है। यह क्षेत्र दी गई रैखिक प्रोग्रामन समस्या का सुसंगत हल क्षेत्र है। इस हल क्षेत्र के कोनीय बिंदुओं के निर्देशांक क्रमश: E(20, 40), B(0, 50), D(0, 200) तथा F(50, 100) हैं। जहाँ E रेखाओं x + 2y = 100 तथा 2x – y = 0 का प्रतिच्छेद बिंदु और F रेखाओं 2x + y = 100 तथा 2x – y = 0 का प्रतिच्छेद बिंदु है।
इन बिंदुओं पर उद्देश्य फलन के मान निम्न सारणी में दिये गये है।

| **बिन्दु** | **x निर्देशक** | **y निर्देशांक** | **उदेश्य फ्लन का मान Z = x + 2y** |
|---|---|---|---|
| E | 20 | 40 | $Z_E$ = 20+2×40=100 |
| B | 0 | 50 | $Z_B$ = 0+2×50=100 |
| F | 50 | 100 | $Z_F$ = 50+2×100 =250 |
| D | 0 | 200 | $Z_D$ = 0+2×200 = 400 |

सारणी से स्पष्ट है कि बिंदु A(100,0) बिंदु B(0,50) तथा बिंदु E(20, 40) पर निम्नतम मान Z = 100 है जो AB को मिलाने वाली रेखा के प्रत्येक बिंदु पर न्यूनतम है तथा बिंदु D (0, 200) पर उद्देश्य फलन का अधिकतम मान Z = 400 है।

**प्रश्न 4.**
**अधिकतम Z = 3x + 2**
**व्यवरोध x + 2y ≤ 10**
**3x + y ≤ 15**
**तथा x ≥ 0, y ≥ 0**

**हल :**

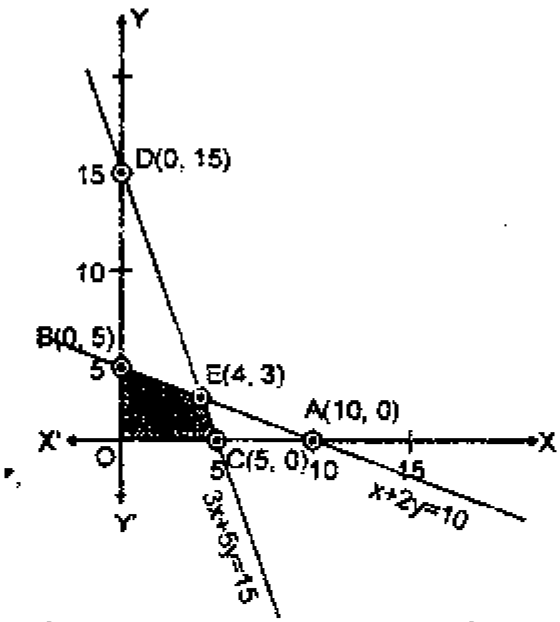
व्यवरोध के रूप में दी गई असमिकाओं को समीकरण में परिवर्तित करने पर,
x + 2y = 10 ...(1)
3x + y = 15 ...(2)
x = 0 ....(3)
y = 0 ....(4)
असमिका x + 2y ≤ 10 द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र –
रेखा x + 2y = 10 निर्देशी अक्षों को क्रमशः बिंदु A(10, 0) तथा B(0, 5) पर मिलती है।
x + 2y = 10 के मानों के लिए सारणी

| | | |
|---|---|---|
| x | 10 | 0 |
| y | 0 | 5 |

A(10, 0); B(0, 5)
बिंदु A और B को अंकित कर रेखा का आलेख खचते हैं। असमिका में मूल बिंदु (0, 0) को प्रतिस्थापित करने पर 0 + 2(0) = 0 ≤ 10 असमिका सन्तुष्ट होती है। अत: असमिका को हल क्षेत्र मूल बिंदु की ओर होगा।
असमिका 3x + y ≤ 15 द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र –
रेखा 3x + y ≤ 15 निर्देशी अक्षों को क्रमशः बिंदु C(5,0) तथा D(0, 15) पर मिलती है।
3x + y = 15 के मानों के लिए सारणी

| | | |
|---|---|---|
| x | 5 | 0 |
| y | 0 | 15 |

C(5, 0); D(0, 15)
बिंदु C और D को अंकित कर रेखा का आलेख खींचते हैं। असमिका में मूल बिंदु को प्रतिस्थापित करने पर 3(0) + 0 = 0 ≤ 15 असमिका सन्तुष्ट होती है।
अतः असमिका को हल क्षेत्र मूल बिंदु की ओर होगा।
असमिका x ≥ 0, y ≥ 0 द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र – चूँकि प्रथम पाद का प्रत्येक बिंदु x ≥ 0 तथा y ≥ 0 को सन्तुष्ट करता है। अतः इन दोनों असमिकाओं का हल क्षेत्र प्रथम पद होगा।




रेखाओं $x + 2y = 10$ तथा $3x + y = 15$ के प्रतिच्छेद बिंदु E के निर्देशांक हैं।
$x = 4, y = 3$
छायांकित क्षेत्र QCEB दी गई समिकाओं का उभयनिष्ठ क्षेत्र है। यह क्षेत्र दी गई रैखिक प्रोग्रामन समस्या का सुसंगत हल क्षेत्र है। इस हल क्षेत्र के कोनीय बिंदुओं के निर्देशांक O(0, 0), C(5, 0), E(4, 3) तथा B(0, 5) हैं।
इन बिंदुओं पर उद्देश्य फलन का मान नीचे सारणी में दिये गये हैं

| **बिन्दु** | **x निर्देशक** | **y निर्देशांक** | **उदेश्य फ्लन का मान $Z = 3x + 2y$** |
|---|---|---|---|
| O | 0 | 0 | $Z_O = 3(0)+2(0) = 0$ |
| C | 5 | 0 | $Z_C = 3(5)+2(0) = 15$ |
| E | 4 | 3 | $Z_E = 3(4)+2(3) = 18$ |
| B | 0 | 5 | $Z_B = 3(0)+2(5) = 10$ |

सारिणी से स्पष्ट है कि बिदु E(4, 3) पर उद्देश्य फलन का अधिकतम मान $Z = 18$ है।

**प्रश्न 5. एक खीमार व्यक्ति के भोजन के कम से कम 4000 इकाई विटामिन, 50 इकाई खनिज तथा 1400 इकाई कैलोरी की। संयोजन होना चाहिये। दो खाद्य सामग्री A तथा B क्रमशः Rs 4 तथा Rs 3 प्रति इकाई की कीमत पर उपलब्ध है। यदि खाद्य सामग्री A की एक इकाई में 200 इकाई विटामिन, 1 इकाई खनिज तथा 40 कैलोरी तथा खाद्य सामग्री में की एक इकाई में 100 इकाई विटामिन, 2 इकाई खनिज तथा 40 कैलोरी हो, तो न्यूनतम लागत प्राप्त करने के लिए किस प्रकार से खाद्य सामग्री का संयोजन उपयोग करना चाहिए ?**

**हल :**

माना खाद्य A की x इकाई तथा खाद्य B की y इकाई का संयोजन किया जाता है, तो प्रश्नानुसार न्यूनतम लागत प्राप्त करने का उद्देश्य फलन

$Z = Rs\ 4x + 3y$

समस्या में व्यवरोध विटामिन के लिए

$200x + 100y \geq 4000$

खनिज के लिए $x + 2y \geq 50$

तथा कैलोरी के लिए,

$40x + 40y \geq 1400$

$x \geq 0, y \geq 0$

व्यवरोध के रूप में दी गई असमिकाओं को समीकरण में परिवर्तित करने पर,

$200x + 100y = 4000$

$2x + y = 40$ ...(1)

$x + 2y = 50$ ....(2)

$40x + 40y = 1400$

$x + y = 35$ ...(3)

$x = 0$ ....(4)

$y = 0$ ....(5)

असमिको $200x + 100y \geq 4000$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र

रेखा $2x + y = 40$ निर्देशी अक्षों को क्रमशः बिंदु A(20, 0) तथा B(0, 40) पर मिलती है।

$2x + y = 40$ के मानों के लिए सारणी

| | | |
|---|---|---|
| x | 20 | 0 |
| y | 0 | 40 |

A(20, 0); B(0, 40)

बिंदुओं A तथा B को अंकित कर रेखा का आलेख खींचते हैं। असमिका में मूल बिंदु को प्रतिस्थापित करने पर $2(0) + 0 = 0 \geq 40$

असमिका सन्तुष्ट नहीं होती है। अत: असमिका को हल क्षेत्र मूल बिंदु की ओर नहीं होगा।

असमिका $x + 2y \geq 50$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र –

रेखा $x + 2 = 50$ निर्देशी अक्षों को क्रमशः बिंदु C(50, 0) तथा D(0, 25) पर मिलती है।

$x + 2y = 50$ के मानों के लिए सारणी

| | | |
|---|---|---|
| x | 50 | 0 |
| y | 0 | 25 |

C(50, 0); D(0, 25)

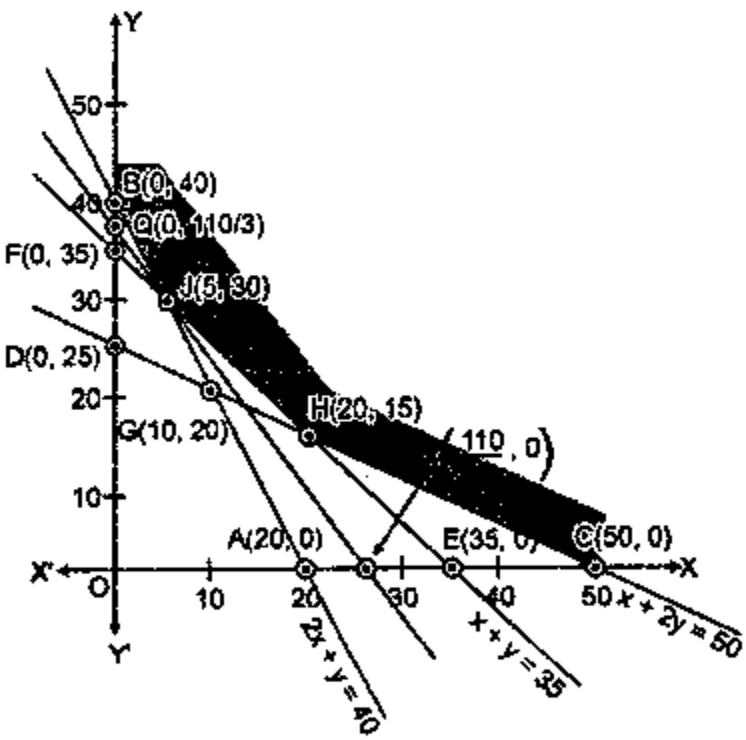
बिंदुओं C तथा D को अंकित कर रेखा का आलेख खींचते हैं। असमिका में मूल बिंदु (0, 0) को प्रतिस्थापित करने पर $0 + 2(0) = 0 \geq 50$ असमिको सन्तुष्ट नहीं होती है। अतः असमिका का हल क्षेत्र मूल बिंदु की और नहीं होगा।

असमिका $40x + 40y \geq 1400$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र – रेखा $x + y = 35$ निर्देशी अक्षों को क्रमशः बिंदु E(35,

0) तथा F(0, 35) पर मिलती है।
x + y = 35 के मानों के लिए सारणी

| | | |
|---|---|---|
| x | 35 | 0 |
| y | 0 | 35 |

E(35, 0); F(0, 35)
बिंदु E तथा F को अंकित कर रेखा का आलेख खचते हैं। असमिका में मूल बिंदु को प्रतिस्थापित करने पर 0 + 0 ≥ 35 असमिका सन्तुष्ट होती है। अत: असमिका को हल क्षेत्र मूल बिंदु की ओर होगा।
असमिका x ≥ 0, y ≥ 0 द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र –
चूँकि प्रथम पाद का प्रत्येक बिंदु असमिकाओं x ≥ 0 तथा y ≥ 0 दोनों को सन्तुष्ट करता है। अत: इन दोनों का हल क्षेत्र प्रथम पद होगा।
रेखाओं 2x + y = 40 तथा x + 2y = 50 के प्रतिच्छेद बिन्दु के निर्देशांक x = 10 तथा y = 20 रेखाओं x + 2 = 50 तथा x + 2y = 35 के प्रतिच्छेद बिन्दु के निर्देशांक x = 20 तथा y = 15 तथा रेखाओं 2x + y = 40 और x + y = 35 के प्रतिच्छेद बिन्दु के निर्देशांक x = 5 तथा y = 30




छायांकित क्षेत्र CHJB उपरोक्त असमिकाओं का उभयनिष्ठ क्षेत्र प्रदर्शित करता है। यह सुसंगत क्षेत्र अपरिबद्ध सुसंगत क्षेत्र के कोनीय बिन्दुओं के निर्देशांक C(50, 0), H (20, 15), J (5, 30) तथा B (0, 40) हैं।
इन बिन्दुओं पर उद्देश्य फलन के मान नीचे सारणी में दिए गए हैं

| **बिन्दु** | **x निर्देशक** | **y निर्देशांक** | **उदेश्य फ्लन का मान Z = 4x + 3y** |
|---|---|---|---|
| C | 50 | 0 | $Z_O$ = 4(0)+3(0) = 0 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| H | 20 | 15 | $Z_H$ = 4(20)+3(15) = 125 |
| J | 5 | 30 | $Z_J$ = 4(5)+3(30) = 110 |
| B | 0 | 40 | $Z_B$ = 4(0)+3(40) = 120 |

सारणी में बिन्दु पर उद्देश्य फलन को मान निम्नतम है। चूंकि सुसंगत क्षेत्र अपरिबद्ध है। अतः $4x + 3y \leq 110$ का आलेख खींचते हैं।
$4x + 3y + 110$ के मान के लिए सारणी

| | | |
|---|---|---|
| x | 110/4 | 0 |
| y | 0 | 110/3 |

P(110/4, 0);Q(0, 110/3)
असमिका $4x + 3y \leq 110$ द्वारा निर्धारित परिणामी खुला अर्द्धतल, सुसंगत क्षेत्र के साथ एक उभयनिष्ठ बिन्दु रखता है। अतः बिन्दु J(5, 30) पर दी गई रैखिक प्रोग्रामन समस्या का निम्नतम मान Rs 110 है।
अतः अनुकूलतम हल के लिए खाद्य सामग्री A की 5 इकाई खाद्य सामग्री B की 30 इकाई लेनी चाहिए।

**प्रश्न 6. एक भोज्य पदार्थ में कम-से-कम 80 इकाई विटामिन A तथा कम-से-कम 100 इकाई खनिज है। दो प्रकार की खाद्य सामग्री F1 तथा F2 उपलब्ध हैं। खाद्य सामग्री F1 की कीमत Rs 4 प्रति इकाई तथा F2 की कीमत 6 प्रति इकाई है। खाद्य सामग्री F1 की एक इकाई में 3 इकाई विटामिन A तथा 4 इकाई खनिज हैं जबकि F2 की एक इकाई में Rs 6 इकाई विटामिन A तथा 3 इकाई खनिज है। इसे एक रैखिक प्रोगामन समस्या के रूप में सूत्रबद्ध कीजिए। उस भोज्य पदार्थ का न्यूनतम मूल्य भी ज्ञात कीजिए जिसमें इन दोनों खाद्य सामग्रियों का मिश्रण है।**

**हल :**

माना खाद्य F1 की मात्रा x इकाई तथा F2 की मात्रा y इकाई है।
भोज्य में F1 की कीमत Rs 4 प्रति इकाई की दर से Rs 4x
तथा F2 की कीमत Rs 6 प्रति इकाई की दर से Rs 6y
∴न्यूनतम लागत मूल्य = Rs $4x + 6y$
भोज्य में F1 की x इकाई में विटामिन A, 3x इकाई तथा
F2 की y इकाई में विटामिन A, 6y इकाई
अतः प्रश्नानुसार, $3x + 6y \geq 80$
इसी प्रकार भोज्य में F1 की x इकाई में खनिज, 4x इकाई तथा
F2 की y इकाई में खनिज, 3y इकाई
अत: प्रश्नानुसार, प्रतिबन्ध $4x + 3y \geq 100$
∴x और y मात्रा है। अतः $x \geq 0, y \geq 0$
अतः दी गई रैखिक प्रोग्रामन समस्या का गणितीय सूत्रीकरण निम्न है।
न्यूनतम $Z = 4x + 6y$

व्यवरोध

$3x + 6y \geq 80$

$4x + 3y \geq 100$

$x \geq 0$

$y \geq 0$

दिए गए व्यवरोधों को समीकरण में परिवर्तित करने पर,

$3x + 6y = 80$ ......(1)

$4x + 3y = 100$ ...(2)

$x = 0$ ...(3)

$y = 0$ ....(4)

असमिका $3x + 6y \geq 80$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र

रेखा $3x + 6y = 80$ निर्देशी अक्षों को क्रमशः बिन्दु A(80/3, 0) तथा B(0, 40/3) पर मिलती है।

$3x + 6y = 80$ के मानों के लिए सारणी

| | | |
|---|---|---|
| x | 80/3 | 0 |
| y | 0 | 40/3 |

A(80/3, 0) ; B(0, 40/3)

बिन्दु A और B को अंकित कर रेखा का आलेख खींचते हैं। असमिका में मूल बिन्दु (0, 0) को प्रतिस्थापित करने पर $3(0) + 6(0) = 0 \geq 80$ असमिका सन्तुष्ट नहीं होती है। अतः असमिका का हल क्षेत्र मूलबिन्दु के विपरीत ओर होगा।

असमिका $4x + 3y \geq 100$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र

रेखा $4x + 3y = 100$ निर्देशी अक्षों को क्रमशः बिन्दु C(25, 0) तथा D(0, 100/3) पर मिलती है।

$4x + 3y = 100$ के मानों के लिए सारणी

| | | |
|---|---|---|
| x | 25 | 0 |
| y | 0 | 100/3 |

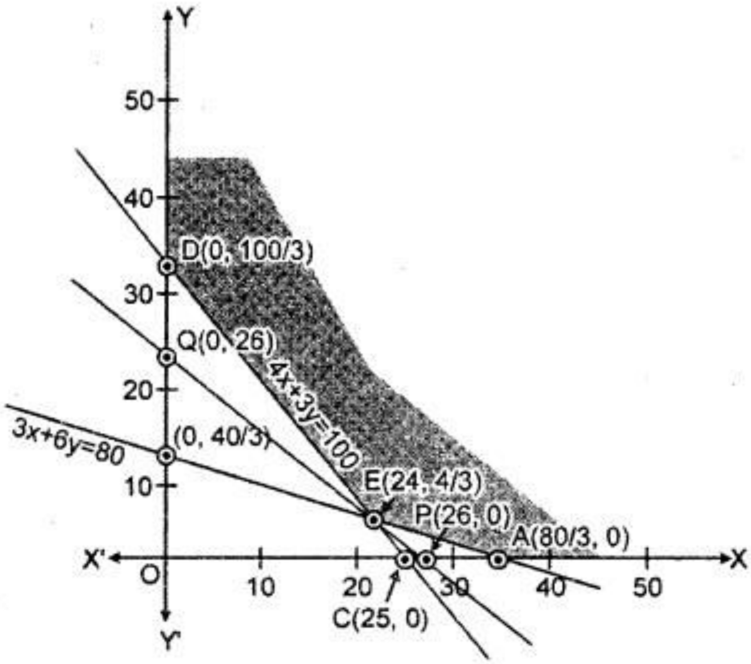
C(25, 0) ; D(0, 100/3)

बिन्दु C और D को अंकित कर रेखा का आलेख खींचते हैं।

असमिका में मूल बिन्दु को प्रतिस्थापित करने पर $4(0) + 3(0) = 0 \geq 100$ असमिका सन्तुष्ट नहीं होती है।

अतः असमिका का हल क्षेत्र मुल बिन्दु के विपरीत ओर होगा।

असमिका $x \geq 0, y \geq 0$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र




चूंकि प्रथम पद का प्रत्येक बिन्दु $x \geq 0$, $y \geq 0$ दोनों ही असमिकाओं को सन्तुष्ट करता है। अत: इन दोनों असमिकाओं का हल क्षेत्र प्रथम पाद होगा।
छायांकित क्षेत्र AED उपरोक्त असमिकाओं का उभयनिष्ठ क्षेत्र प्रदर्शित करता है। यह सुसंगत क्षेत्र अपरिबद्ध है। अपरिबद्ध सुसंगत क्षेत्र के कोनीय बिन्दुओं के निर्देशांक A(80/3, 0), E(24, 4/3) तथा D(0, 100/3) जहाँ बिन्दु E रेखाओं $3x + 6 = 80$ तथा $4x + 3y = 100$ का प्रतिच्छेद बिन्दु है।
इन बिन्दुओं पर उद्देश्य फलन का भान अग्र सारणी में दिए गए

| **बिन्दु** | **x निर्देशक** | **y निर्देशांक** | **उदेश्य फ्लन का मान $Z = 4x + 6y$** |
|---|---|---|---|
| A | 80/3 | 0 | $Z_A = 4 \times 80/3 + 6 \times 0 = 106.66$ |
| E | 24 | 4/3 | $Z_E = 4 \times 24 + 6 \times 4/3 = 104$ |
| D | 0 | 100/3 | $Z_D = 4 \times 0 + 6 \times 100/3 = 200$ |

सारणी में विन्दु E(24, 4/3) पर उद्देश्य फलन का मान न्यूनतम 104 है। चूँकि सुसंगत क्षेत्र अपरिबद्ध है; अत: असमिका $4x + 6y \leq 104$ का आलेख खींचते हैं।
$4x + 6y = 104$ के मानों के लिए सारणी

| | | |
|---|---|---|
| x | 26 | 0 |
| y | 0 | 17 1/3 |

P(26, 0); Q(0, 17 1/3)
असमिका 4x + 6y ≤ 104 द्वारा निर्धारित परिणामी खुला अर्द्धतल, संसगत क्षेत्र के साथ ‘उभयनिष्ठ बिन्दु E(24, 4/3) रखता है; अतः बिन्दु E(24, 4/3) पर दी गई रैखिक प्रोग्रामन समस्या का निम्नतम मान Z = 104 है।

**प्रश्न 7. एक फर्नीचर निर्माता दो उत्पाद – कुर्सी तथा टेबल बनाता है। ये उत्पादन दो यंत्रों A तथा B पर बनाए जाते हैं। एक कुर्सी को बनाने में यंत्र A पर 2 घण्टे तथा यंत्र B पर 6 घण्टे और एक टेबल को बनाने में यंत्र A पर 4 घण्टे तथा यंत्र B पर 2 घण्टे लगते है। यंत्रों A तथा B पर क्रमशः 16 घण्टे तथा 30 घण्टे प्रतिदिन समय उपलब्ध है। निर्माता को एक कुर्सी तथा एक टेबल से प्राप्त लाभ क्रमशः Rs 3 व Rs 5 है। निर्माता को अधिकतम लाभ प्राप्त करने हेतु प्रत्येक उत्पादन का दैनिक उत्पादन कितना करना चाहिए?**

**हल :**

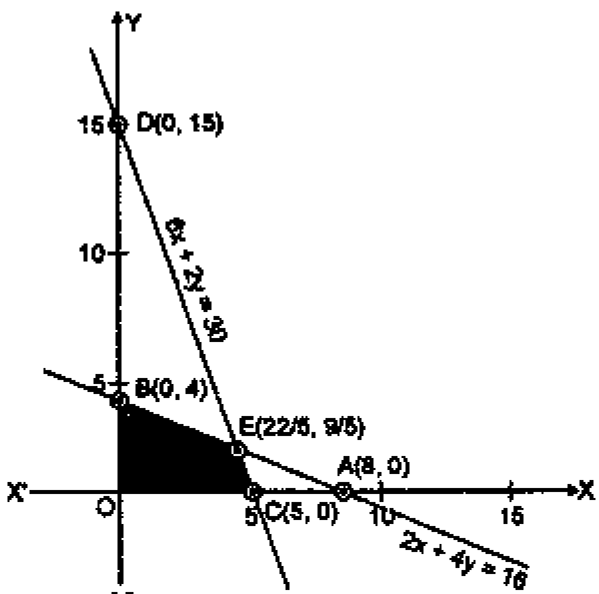
माना उत्पादक को प्रतिदिन x कुर्सी तथा y टेबल उत्पादन करना चाहिए।
अत: निर्माता का कुल लाभ = Rs 3x + 5y
x कुर्सी बनाने में यंत्र A पर 2x घण्टे तथा
यंत्र B पर 6 घण्टे लगते हैं; अतः
y टेबल बनाने में यंत्र A पर 4y घण्टे तथा
यंत्र B पर 2y घण्टे लगते हैं।
अतः यंत्र A पर काम के समय का व्यवरोध
2x + 4y ≤ 16 घण्टे
तथा यंत्र B पर काम के समय का व्यवरोध
(6)x + 4y ≤ 30 घण्टे
चूँकि x और y संख्या है; अतः
x ≥ 0 तथा y ≥ 0
अतः प्रश्नानुसार दी गई रैखिक प्रोग्रामन समस्या का गणितीय सूत्रीकरण निम्न है–
अधिकतम Z = 3x + 5y
व्यवरोध 2x + 4y ≤ 16
6x + 2y ≤ 30
x ≥ 0
y ≥ 0
दिए गए व्यवरोधों को समीकरण में परिवर्तित करने पर,
2x + 4y = 16 …(1)
6x + 2y = 30 …(2)
x ≥ 0 …(3)
y ≥ 0 ….(4)
असमिका 2x + 4y ≤ 16 द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र
रेखा 2x + 4y = 16 निर्देशी अक्षों को क्रमश: बिन्दु A(8, 0) तथा B(0, 4) पर मिलती है।
2x + 4y = 16 के मानों के लिए सारणी

| | | |
|---|---|---|
| x | 8 | 0 |
| y | 0 | 4 |

A(8, 0) ; B(0, 4)
बिन्दु A और B को अंकित कर रेखा का आलेख खींचते हैं। असमिका में मूल बिन्दु (0, 0) को प्रतिस्थापित करने पर 2(0) + 4(0) = 0 ≤ 16 असमिका सन्तुष्ट होती है; अतः असमिका का हल क्षेत्र मूल बिन्दु के ओर होगा।
असमिका 6x + 2y ≤ 30 द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र
रेखा 6x + 2y = 30 निर्देशी अक्षों को क्रमशः बिन्दु C(5, 0) तथा D(0, 15) पर मिलती है।
6x + 2y = 30 के मानों के लिए सारणी

| | | |
|---|---|---|
| x | 5 | 0 |
| y | 0 | 15 |

C(5,0); D(0, 15)
बिन्दु C और D को अंकित कर रेखा का आलेख खींचते हैं। असमिका में मूल बिन्दु (0, 0) को प्रतिस्थापित करने पर 6(0) + 2(0) = 0 ≤ 30 सन्तुष्ट होती है; अतः असमिका का हल क्षेत्र मुल बिन्दु के ओर होगा।
असमिका x ≥ 0, y ≥ 0 द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र
चूँकि प्रथम पाद का प्रत्येक बिन्दु x ≥ 0 तथा y ≥ 0 दोनों को ही सन्तुष्ट करता है; अतः असमिकाओं का हल क्षेत्र प्रथम पाद है।




छायांकित क्षेत्र OCEB उपरोक्त असमिकाओं का उभयनिष्ठ क्षेत्र प्रदर्शित करता है। यह क्षेत्र दी गई रैखिक प्रोग्रामन समस्या का सुसंगत क्षेत्र के कोनीय बिन्दुओं के निर्देशांक O(0, 0), C(5, 0), E(22/5, 9/5) तथा B(0, 4) है। जहाँ E रेखाओं 2x + 4y = 16 तथा
6x + 2y = 30 का प्रतिच्छेद बिन्दु है।
इन बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद फलन का मान नीचे सारणी में दिए गए हैं।

| बिन्दु | x निर्देशक | y निर्देशांक | उदेश्य फ्लन का मान $Z = 3x + 5y$ |
|---|---|---|---|
| O | 0 | 0 | $Z_O = 3(0)+5(0) = 0$ |
| C | 5 | 0 | $Z_C = 3(5)+5(0) = 15$ |
| E | 22/5 | 9/5 | $Z_E = 3(22/5)+5(9/5) = 22.2$ |
| B | 0 | 4 | $Z_B = 3(0)+5(4) = 20$ |

सारणी से स्पष्ट है कि उद्देश्य फलन का मान बिन्दु E(22/5, 9/5) पर अधिकतम 22.2 है।
अतः कुर्सियों की संख्या = $\frac{22}{5}$
तथा टेबलों की संख्या = $\frac{9}{5}$
अधिकतम लाभ = Rs 22.2

**प्रश्न 8. एक फर्म सिरदर्द की दो आकारों-आकार A तथा आकार B की गोलियों का निर्माण करती है। आकार A की गोली में 2 ग्रेन एस्प्रिन, 5 ग्रेन बाइकार्बोनेट तथा 1 ग्रेन कोफ़ीन है जबकि आकार B की गोली में 1 ग्रेन एस्प्रिन, 8 गेन बाइकार्बोनेट तथा 6.6 ग्रेन कोफ़ीन है। उपयोगकर्ताओं के द्वारा यह पाया गया है कि तुरंत प्रभाव के लिए कम-से-कम 12 ग्रेन एस्प्रिन, 74 ग्रेन बाईकार्बोनेट तथा 24 ग्रेन कोफ्रीन की आवश्यकता है। एक मरीज को तुरंत राहत प्राप्त करने के लिए कम से कम कितनी गोलियाँ लेनी चाहिए?**

**हल :**

माना मरीज को आकार A की x गोलियाँ
तथा आकार B की y गौलियाँ लेनी चाहिए।
अतः अधिकतम गोलियों की संख्या
$Z = x + y$
प्रश्नानुसार, आकार A की गोलियों में एस्प्रिन की मात्रा
= 2x ग्रेन
तथा आकार B की गोलियों में एस्प्रिन की मात्रा
= 1y ग्रेन
अतः एस्प्रिन की मात्रा के लिए व्यवरोध
$2x + y \geq 12$ ग्रेन
इसी प्रकार बाईकार्बोनेट की मात्रा के लिए व्यवरोध
$5x + 8y \geq 74$ ग्रेन
y तथा कोफ्रीन की मात्रा के लिए व्यवरोध
$x + 6.6y \geq 24$ ग्रेन
चूँकि x और गोलियों की संख्या है; अतः
$x \geq 0$ तथा $y \geq 0$
इस प्रकार प्राप्त दी गई रैखिक प्रोग्रामन समस्या का गणितीय सूत्रीकरण निम्न है
न्यूनतम् $Z = x + y$

व्यवरोध $2x + y \geq 12$
$5x + 8y \geq 7.4$
$x + 6.6y \geq 24$
$x \geq 0$
$y \geq 0$
दिए गए व्यवरोधों को समीकरण रूप में परिवर्तित करने पर,
$2x + y = 12$ ...(1)
$5x + 8y = 74$ ...(2)
$x + 6.6y = 24$ ...(3)
$x = 0$ ...(4)
$y = 0$ ....(5)
असमिका $2x + y \geq 12$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र
रेखा $2x + y = 12$ निर्देशी अक्षों को क्रमशः बिन्दु A(6, 0) तथा B(0, 12) पर मिलती है।
$2x + y = 12$ के मानों के लिए सारणी

| | | |
|---|---|---|
| x | 6 | 0 |
| y | 0 | 12 |

A(6, 0); B(0, 12)
बिन्दु A और B को अंकित कर रेखा का आलेख खींचते हैं। असमिका में मूल बिन्दु (0, 0) को प्रति स्थापित करने पर $2(0) + 2 = 0 \geq 12$ असमिका सन्तुष्ट नहीं होती है; अतः असमिका का हल क्षेत्र मूल बिन्दु के विपरीत ओर होगा।
असमिका $5x + 8y \geq 74$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र
रेखा $5x + 8y = 74$ निर्देशी अक्षों को क्रमशः बिन्दु C(74/5, 0) तथा D(0, 74/8) पर मिलती है।
$5x + 8y = 74$

| | | |
|---|---|---|
| x | 74/5 | 0 |
| y | 0 | 74/8 |

C(74/5, 0) ; D(0, 74/8)
बिन्दु C और D को अंकित कर रेखा का आलेख खचते हैं। असमिका में मूल बिन्दु (0, 0) को प्रतिस्थापित करने पर $5(0) + 8(0) = 0 \geq 7.4$ असमिका सन्तुष्ट नहीं होती है अत: असमका का ल क्षेत्र मुलबिन्दु के विपरीत और होगा।
असमिका $x + 6.6y \geq 24$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र
रेखा $x + 6.6y = 24$ निर्देशी अक्षों को क्रमश: बिन्दु E(24, 0) तथा F(0, 24/6.6) पर मिलती है।
$x + 6.6y = 24$

| | | |
|---|---|---|
| x | 24 | 0 |
| y | 0 | 24/6.6 |

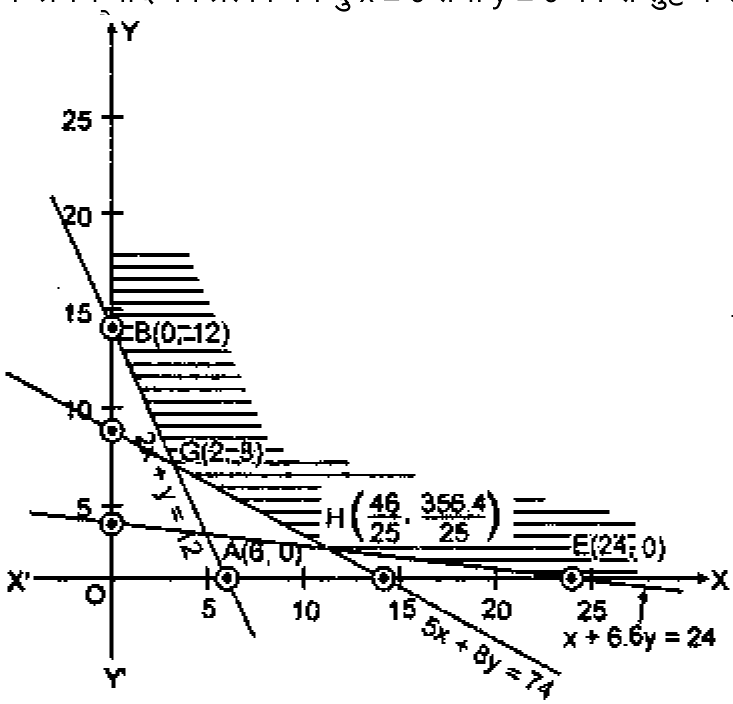
E(24, 0) ; F(0, 24/6.6)

बिन्दु E तथा F को अंकित कर रेखा का आलेख खचते हैं। असमिका में मूल बिन्दु (0, 0) को प्रतिस्थापित करने पर,

(0) + 6.6(0) = 0 ≥ 24 असमिका सन्तुष्ट नहीं होती है; अतः इस असमिका का हल क्षेत्र मूलबिन्दु के विपरीत होगा।

x ≥ 0 तथा y ≥ 0 द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र

चूंकि प्रथम पाद का प्रत्येक बिन्दु x ≥ 0 तथा y ≥ 0 को सन्तुष्ट करता है; अतः इन असमिकाओं का हल क्षेत्र




छायांकित क्षेत्र BGHE उपरोक्त असमिकाओं का उभयनिष्ठ क्षेत्र प्रदर्शित करता है। यह सुसंगत क्षेत्र अपरिबद्ध है। अपरिबद्ध सुसंगत हल क्षेत्र के कोनीय बिन्दुओं के निर्देशांक B(0, 12), G(2, 8), H(46/25, 356.4/25) तथा E(24, 0) जहाँ बिन्दु G रेखाओं 2x + y = 12 तथा 5x + 8y = 74 प्रतिच्छेद बिन्दु है।

बिन्दु H, रेखाओं 5x + 8y = 74 तथा x + 6.6y = 24 का प्रतिच्छेद बिन्दु है।

इन बिन्दुओं पर उद्देश्य फलन का मान नीचे सारणी में दिए गए।

| **बिन्दु** | **x निर्देशक** | **y निर्देशांक** | **उदेश्य फ्लन का मान**<br>**Z = x + y** |
|---|---|---|---|
| B | 0 | 12 | $Z_B$ = 0+12 = 12 |
| G | 2 | 8 | $Z_G$ = 2+8 = 10 |
| H | 46/25 | 356.5/25 | $Z_H$ = 46/25+356.4/25 = 17.70 |
| E | 24 | 0 | $Z_E$ = 24+0 = 24 |

सारणी में बिन्दु G(2, 8) पर उद्देश्य फलन का मान न्यूनतम है।
चूँकि सुसंगत हुल क्षेत्र अपरिबद्ध है; अत: $x + y \le 10$ का आलेख खींचते हैं, जो प्रतिच्छेद बिन्दु G(2, 8) से ही गुजरता है। असमिका $x + y \le 10$ द्वारा निर्धारित खुला अर्द्धतल सुसंगत क्षेत्र के साथ उभयनिष्ठ बिन्दु G(2, 8) से गुजरता है।
अतः बिन्दु G पर दी गई रैखिक प्रोगमन समस्या का निम्नतम मान 10 है; अतः मरीज को A प्रकार की 2 तथा B प्रकार की 8 गोलियाँ खिलाई जाएँ।

**प्रश्न 9. एक ईट निर्माता के पास क्रमशः 30,000 तथा 20,000 ईंटों की भण्डारण क्षमता वाले 2 डिपो A तथा B हैं। वह तीन बिल्डरों P, Q व R से क्रमशः 15,000, 20,000 तथा 15,000 ईटों के आदेश प्राप्त करता है। 1000 ईट को डिपों से बिल्डरों तक भिजवाने में परिवहन लागत नीचे सारणी में दी गई है**
**सारणी**

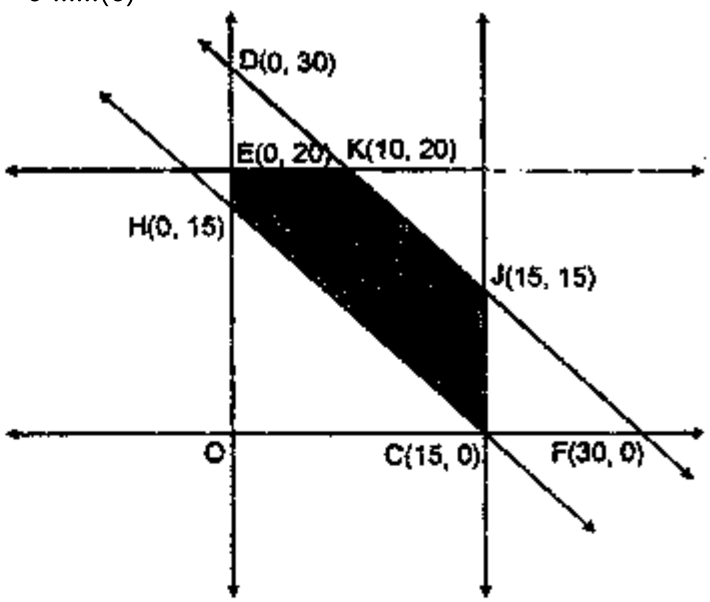
| **P** | **Q** | **R** | |
|---|---|---|---|
| **A** | **3** | **1** | **1/2** |
| **B** | **1** | **2** | **3** |

**परिवहन लागत को न्यूनतम रखते हुए निर्माता आदेशों को किस प्रकार भिजवा पायेगा?**

**हलः**

माना A डिपो से, P बिल्डर को x हजार ईटे व Q बिल्डर को y हजार ईंटें भेजता है, तो शेष $30 - (x - y)$ हजार ईंटें R बिल्डर को भेजता है; जबकि $x, y \ge 0$ अत: डिपो से परिवहन लागत
$40x$, $20y$ तथा $30(30 - x - y)$
इसी प्रकार डिपो B से,
P बिल्डर को भेजने वाली ईंटें $= (15 - x)$
Q बिल्डर को भेजने वाली ईंटें $= (20 - y)$
तथा R बिल्डर को भेजने वाली ईंटें $= 20 - (15 - x + 20 - y)$
$= (x + y - 15)$
अतः डिपो B से परिवहन लागत
$= 20(15 - x), 60(20 - x)$ तथा $40(x + y - 15)$
अत: दोनों डिपों से कुल परिवहन लागत
$Z = 40x + 20y + 30(30 - x - y) + 20(15 - x) + 60(20 - y) + 40(x + y - 15)$
$= 30x - 30y + 1800$
अतः उपरोक्त रैखिक प्रोग्रामन समस्या का गणितीय सूत्रीकरण निम्न प्रकार है
निम्नतम $Z = 30x - 30y + 1800$
व्यवरोध $x + y \le 30$
$x \le 15$
$y \le 20$
$x + y \ge 15$

x ≥ 0
y ≥ 0
दिए हुए व्यवरोध को असमिक रूप से समीकरण रूप में परिवर्तन करने पर,
x + y = 30 ...(1)
x = 15 ...(2)
y = 20 ...(3)
x + y = 15 ...(4)
x = 0 ...(5)
y = 0 ......(6)




दी गई असमिकाओं के संगत समीकरण लिखने पर उन्हें आलेखित करने पर प्राप्त अभीष्ट हल क्षेत्र C(15, 0), J(15, 15), K(10, 20), E(0, 20) तथा E(0, 20) तथा H(0, 15) से परिबद्ध है।
इन बिन्दुओं पर उद्देश्य फलन का माद नीचे सारणी में प्रदर्शित है –

| **बिन्दु** | **x निर्देशांक** | **y निर्देशांक** | **उद्देश्य फलन का मान** <br> **Z = 30x – 30y + 1800** |
|---|---|---|---|
| C | 15 | 0 | $Z_C$ = 30 x 15 – 30 x 0 + 1800 = 2250 |
| J | 15 | 15 | $Z_J$ = 30 x 15 – 30 x 20 + 1800 = 1800 |
| K | 10 | 20 | $Z_K$ = 30 x 10 – 30 x 20 + 1800 = 1500 |
| E | 0 | 20 | $Z_E$ = 30 x 0 – 30 x 20 + 1800 = 1200 न्यूनतम |
| H | 0 | 15 | $Z_H$ = 30 x 0 – 30 x 15 + 1800 = 1350 |

सारणी से स्पष्ट है कि बिन्दु E(0, 20) पर उद्देश्य फलन का मान निम्नतम Rs 1200 है; अतः भंडार A से P, Q, R बिल्डरों को क्रमशः 0, 20, तथा 10 हजार ईंटें और भंडार B से क्रमशः 15, 0 तथा 5 हजार ईंटें भेजनी चाहिए।

**प्रश्न 10. असमिका निकाय**
**$x + y \leq 3$**
**$y \leq 6$**
**तथा $x, y \geq 0$**
**द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र है**
**(a) प्रथम पाद में अपरिबद्ध**
**(b) प्रथम व द्वितीय पादों में अपरिबद्ध**
**(c) प्रथम पाद में परिबद्ध**
**(d) इनमें से कोई नहीं**

**हलः** दी हुई असमिकाओं को समीकरण में परिवर्तित करने पर,
$x + y = 3$ ...(1)
$y = 6$ ...(2)
$x = 0$ ...(3)
$y = 0$ ...(4)
असमिका $x + y \leq 3$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र
रेखा $x + y = 3$ निर्देशी अक्षों को क्रमशः बिन्दु A(3, 0) तथा B(0, 3) पर मिलती है।
$x + y = 3$ के मानों के लिए सारणी

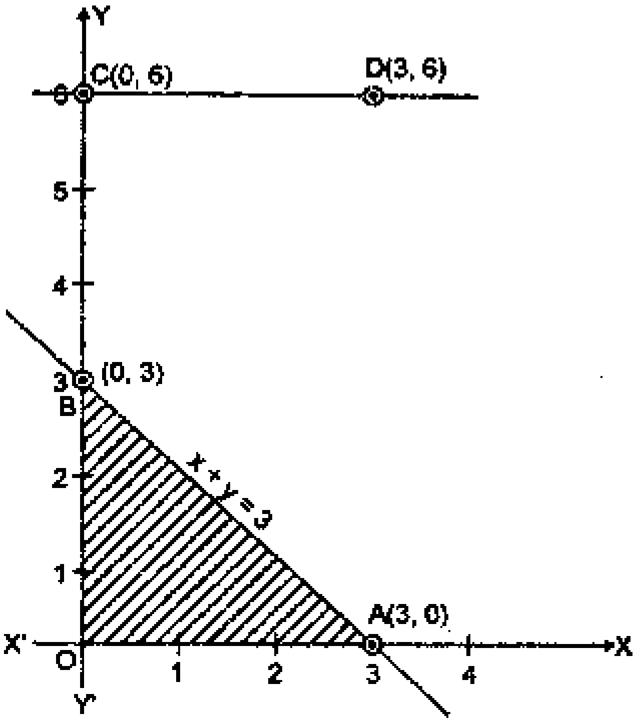
| | | |
|---|---|---|
| x | 3 | 0 |
| y | 0 | 3 |

A(3, 0) ; B(0, 3)
बिन्दु A तथा B को अंकित कर रेखा का आलेख खींचते हैं। असमिका में मूल बिन्दु (0, 0) को प्रतिस्थापित करने पर $0 + 0 = 0 \leq 3$ असमिका सन्तुष्ट होती है; अत: असमिका का हल मूल बिन्दु की ओर होगा।
असमिका $y \leq 6$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र
रेखा $y = 6$ निर्देशी अक्षों को क्रमशः C(0, 6) तथा D(3, 6) बिन्दुओं पर मिलती है।
$0.x + y = 6$ के मानों के लिए सारणी

| | | | |
|---|---|---|---|
| x | 0 | 0 | 3 |
| y | 0 | 6 | 6 |

C(0, 6) ; D(3, 6)
बिन्दु C तथा D को अंकित कर रेखा का आलेख खींचते हैं। असमिका में मूल बिन्दु (0, 0) को प्रतिस्थापित करने पर $0 + 0 = 0 \leq 6$ असमिका सन्तुष्ट होती है; अत: असमिका का हल क्षेत्र मूल बिन्दु की और होगा।
असमिका $x \geq 0$ तथा $y \geq 0$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र

चूँकि प्रथम पाद में प्रत्येक बिन्दु x ≥ 0, y ≥ 0 असमिकाओं को सन्तुष्ट करता है; अतः इन दोनों असमिकाओं का हल क्षेत्र प्रथम पाद होगा।




छायांकित क्षेत्र OAB असमिकाओं का उभयनिष्ठ क्षेत्र प्रदर्शित करता है जो प्रथम पद में है और परिषद्ध है।
अतः 'सही विकल्प (c) है।