

गाउस का नियम एवं उसके अनुप्रयोग

पाठ्य पुस्तक के प्रश्न एवं उत्तर

बहुचयनात्मक प्रश्न

प्रश्न 1. एक समरूप आवेशित ठोस अचालक गोले के कारण विद्युत क्षेत्र की तीव्रता अधिकतम होती है

- (अ) केन्द्र पर
- (ब) केन्द्र से सतह के मध्य के किसी बिन्दु पर
- (स) सतह पर
- (द) अनन्त पर

उत्तर: (स) सतह पर

सतह पर $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{R^2}$ (अधिकतम)

प्रश्न 2. विद्युत क्षेत्र की तीव्रता E वाले स्थान पर ऊर्जा घनत्व (निर्वात में) होता है

- | | |
|----------------------------------|----------------------------------|
| (अ) $\frac{1}{2} \epsilon_0 E$ | (ब) $\frac{E^2}{2 \epsilon_0}$ |
| (स) $\frac{1}{2} E \epsilon_0^2$ | (द) $\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$ |

उत्तर: (द) $\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$

ऊर्जा घनत्व (U_v) = $\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$

प्रश्न 3. 0.2 मीटर भुजा वाले घन के केन्द्र पर $1 \mu\text{C}$ का आवेश रखा गया है। घन के प्रत्येक फलक से निर्गत विद्युत फ्लक्स का मान V/m में होगा

- (अ) 1.12×10^4
- (ब) 2.2×10^4
- (स) 1.88×10^4
- (द) 3.14×10^4

उत्तर: (स) 1.88×10^4

घन के प्रत्येक फलक से निर्गत फ्लक्स

$$= \frac{1}{6} \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$= \frac{1 \times 10^{-6}}{6 \times 8.85 \times 10^{-12}} = 1.88 \times 10^4 \text{ V/m.}$$

प्रश्न 4. एक घन के अन्दर $\pm q$ आवेशों वाले दो द्विध्रुव एक दूसरे के लम्बवत् रखे हैं तो घन से निर्गत कुल विद्युत फ्लक्स का मान होगा

- (अ) $\frac{q}{\epsilon_0}$ (ब) $\frac{4q}{\epsilon_0}$
- (स) शून्य (द) $\frac{2q}{\epsilon_0}$.

उत्तर: (स) शून्य

द्विध्रुव होने पर घन से निर्गत कुल फ्लक्स शून्य होगा।

प्रश्न 5. एक साबुन के बुलबुले को ऋणात्मक आवेशित करने पर उसकी । त्रिज्या

- (अ) कम हो जाती हैं।
 (ब) बढ़ जाती हैं।
 (स) अपरिवर्तित रहती है।
 (द) जानकारी अपूर्ण है अतः कुछ नहीं कह सकते।

उत्तर: (ब) बढ़ जाती हैं।

ऋणात्मक आवेश देने पर पृष्ठ क्षेत्रफल बढ़ने के कारण त्रिज्या बढ़ जाती है।

प्रश्न 6. एक गोले में आवेश स्थित है तथा इससे निर्गत विद्युत फ्लक्स $\frac{q}{\epsilon_0}$ है। गोले की त्रिज्या आधी करने पर निर्गत विद्युत फ्लक्स का मान कितना परिवर्तित होगा ?

- (अ) पहले से 4 गुना हो जायेगा
 (ब) पहले से एक चौथाई हो जायेगा।
 (स) पहले से आधा हो जायेगा
 (द) अपरिवर्तित रहेगा।

उत्तर: (द) अपरिवर्तित रहेगा।

निर्गत विद्युत फ्लक्स का मान त्रिज्या पर निर्भर नहीं करता है।

प्रश्न 7. वायु में स्थित इकाई धनावेश से निकलने वाले सम्पूर्ण विद्युत फ्लक्स का मान है

- (अ) ϵ_0
- (ब) ϵ_0^{-1}
- (स) $(4\pi\epsilon_0)^{-1}$
- (द) $4\pi\epsilon_0$

उत्तर: (ब) ϵ_0^{-1}

एकांक आवेश से निर्गत कुल फ्लक्स

$$\phi = \vec{E} \cdot \vec{ds} = \frac{1}{\epsilon_0} \times 1 = \epsilon_0^{-1}$$

प्रश्न 8. दो चालक गोलों की त्रिज्याएँ a एवं b हैं। इन्हें समान पृष्ठ आवेश q से आवेशित करने पर इनकी सतह पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रताओं का अनुपात होगा

- (अ) $5^2 : a^2$
- (ब) $1 : 1$
- (स) $a^2 : 5^2$
- (द) $b : 4$

उत्तर: (ब) $1 : 1$

$$\sigma_1 = \sigma_2$$

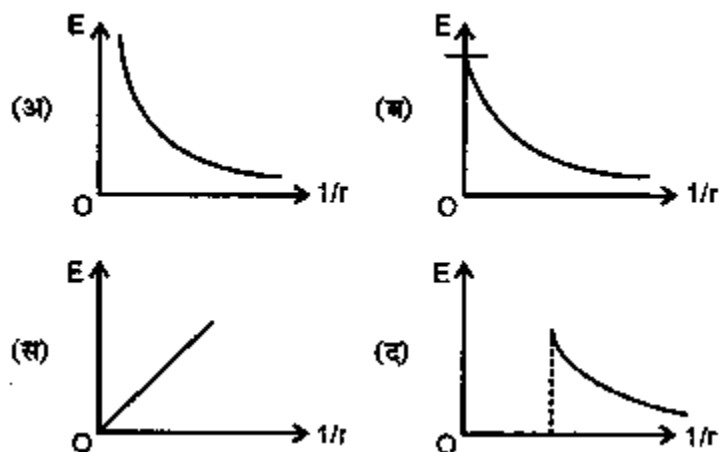
$$\therefore \frac{q_1}{4\pi a^2} = \frac{q_2}{4\pi b^2}$$

$$\therefore \frac{q_1}{q_2} = \frac{a^2}{b^2}$$

$$\Rightarrow \frac{E_1}{E_2} = \frac{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{a^2}}{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{b^2}} = \frac{b^2}{a^2} \times \frac{q_1}{q_2}$$

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{b^2}{a^2} \times \frac{a^2}{b^2} = 1$$

प्रश्न 9. एक लम्बे सीधे आवेशित तार के कारण उत्पन्न विद्युत क्षेत्र की तीव्रता का $1/r$ के साथ परिवर्तन आरेख है

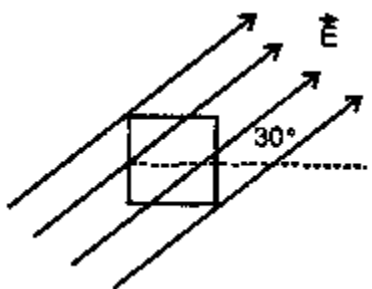


उत्तर: (स)

चूँकि
$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

$$\therefore E \propto \frac{1}{r}$$

प्रश्न 10. क्षेत्रीय के समान्तर स्थापित एकसमान विद्युत क्षेत्र E में एक वर्ग चित्रानुसार इस प्रकार स्थित है कि वर्ग के तल से विद्युत बल रेखाएँ 30° का कोण बनाती हैं। यदि वर्ग की भुजा a है तो वर्ग से पारित विद्युत फ्लक्स का मान होगा।



(अ) $\frac{\sqrt{3}Ea^2}{2}$

(ब) $\frac{Ea^2}{2}$

(स) शून्य

(द) इनमें से कोई नहीं।

उत्तर: (स) शून्य

चूँकि प्रवेशित फ्लक्स = निर्गत फ्लक्स अतः वर्ग से पारित विद्युत फ्लक्स शून्य होगा।

अति लघु उत्तरीय प्रश्न

प्रश्न 1. विद्युत क्षेत्र \vec{E} में रखे किसी क्षेत्रफल अल्पांश से निर्गत विद्युत फ्लक्स का मान शून्य कब होता है ?

उत्तर: यदि अल्पांश का क्षेत्रफल सदिश (\vec{ds}) विद्युत क्षेत्र रेखा (\vec{E}) से 90° पर हो तब निर्गत फ्लक्स का मान शून्य होगा।

प्रश्न 2. एक समरूप आवेशित अचालक गोले के कारण विद्युत क्षेत्र की तीव्रता किन स्थितियों पर शून्य होती है ?

उत्तर: समरूप आवेशित अचालक गोले के केन्द्र व अनन्त पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता शून्य होती है।

प्रश्न 3. आवेशित चालक के इकाई क्षेत्रफल पर लगने वाले बल का सूत्र लिखिए तथा इसकी दिशा भी बताइए।

उत्तर:

$$F = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$$

बल की दिशा पृष्ठ के अभिलम्बवत् बाहर की ओर होती है।

प्रश्न 4. विद्युत आवेश के कारण ऊर्जा कहाँ संग्रहित होती है ?

उत्तर: ऊर्जा विद्युत क्षेत्र के आयतन में संग्रहित होती है।

प्रश्न 5. एक d व्यास के चालक गोले को Q आवेश दिया गया है। गोले के अन्दर विद्युत क्षेत्र का मान क्या होगा ?

उत्तर: चूँकि समस्त आवेश गोले के पृष्ठ पर आ जायेगा अतः गोले के अन्दर विद्युत क्षेत्र शून्य होता है।

प्रश्न 6. यदि कूलॉम नियम में $\frac{1}{r^2}$ के स्थान पर निर्भरता $\frac{1}{r}$ होती तो क्या गाउस नियम सत्य होता ?

उत्तर: नहीं ! गाउस नियम केवल उन्हीं क्षेत्रों के लिए लागू होता है। जो व्युत्क्रम वर्ग नियम का पालन करते हैं।

प्रश्न 7. यदि किसी गाउसीय पृष्ठ में परिबद्ध नेट आवेश धनात्मक है तो पृष्ठ से पारित कुल फ्लक्स की प्रकृति क्या होगी ?

उत्तर: निर्गत फ्लक्स धनात्मक होगा।

प्रश्न 8. यदि विद्युत क्षेत्र में स्थित किसी बन्द पृष्ठ से निर्गत कुल विद्युत फ्लक्स शून्य है तो पृष्ठ के सन्दर्भ में क्या कहा जा सकता है ?

उत्तर: (i) पृष्ठ में कुल आवेश शून्य है।

(ii) $\phi_{\text{निर्गत}} = \phi_{\text{प्रवेशित}}$

प्रश्न 9. यदि किसी गाउसीय पृष्ठ के अन्दर नेट आवेश शून्य है तो इसका अर्थ यह है कि पृष्ठ के प्रत्येक बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता भी शून्य होगी ?

उत्तर: नहीं।

(i) क्योंकि विद्युत फ्लक्स

$$\phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0} = 0$$

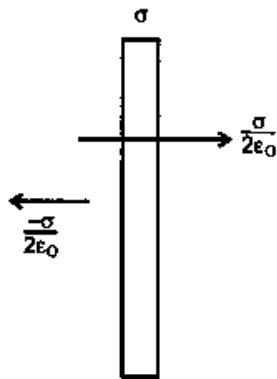
(ii) एवं \vec{E} व $d\vec{S}$ के मध्य 90° का कोण है।

प्रश्न 10. रेखीय आवेश घनत्व को परिभाषित कीजिए।

उत्तर: रेखीय आवेश घनत्व (λ) आवेश प्रति एकांक लम्बाई होता

प्रश्न 11. σ पृष्ठ आवेश घनत्व वाली एक आवेशित परत के एक ओर से दूसरी ओर जाने पर विद्युत क्षेत्र में कितना परिवर्तन होगा ?

उत्तर:



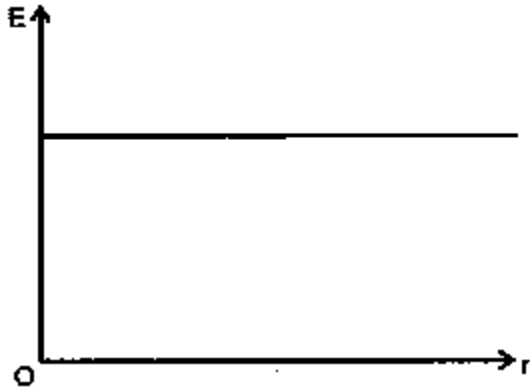
विद्युत क्षेत्र में परिवर्तन $= E_1 - E_2$

$$= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} - \left(\frac{-\sigma}{2\epsilon_0} \right)$$

$$= \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

प्रश्न 12. किसी समरूप आवेशित अचालक परत के कारण विद्युत क्षेत्र की तीव्रता की दूरी के साथ आरेखित कीजिए।

उत्तर:



प्रश्न 13. एक समरूप आवेशित अचालक गोले के कारण उसके केन्द्र पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता का मान कितना होता है ?

उत्तर: चूँकि अचालक गोले के अन्दर आवेश शून्य है अतः विद्युत क्षेत्र की तीव्रता शून्य होगी।

प्रश्न 14. यदि आवेश q एक गोले के केन्द्र पर स्थित है। अब यदि आवेश को समान आयतन के बेलनाकार पृष्ठ के अन्दर स्थापित किया जाए तो दोनों स्थितियों में निर्गत विद्युत फ्लक्सों का अनुपात क्या होगा ?

उत्तर: दोनों ही स्थिति में विद्युत फ्लक्सों का अनुपात समान होता है।

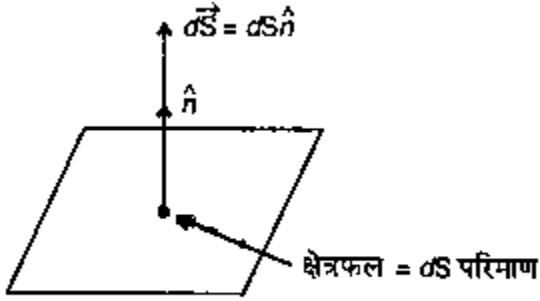
लघुउत्तरीय प्रश्न

प्रश्न 1. विद्युत फ्लक्स को समझाइए। इसका SI मात्रक एवं विमाएँ लिखिए।

उत्तर: विद्युत लिक्स (Electric Flux)

किसी समतलीय क्षेत्रफल, जैसे ds में परिमाण के साथ-साथ दिशा भी होती है। क्षेत्रफल की दिशा पृष्ठ पर खींचे गये अभिलम्ब की दिशा में बाहर की ओर होती है।

क्षेत्रफल वेक्टर को \vec{dS} से निरूपित कर सकते हैं। यदि पृष्ठ की लम्ब दिशा में एकांक वेक्टर \hat{n} हो और क्षेत्रफल का मान ds हो तो $\vec{dS} = ds\hat{n}$



चित्र 2.1

प्रश्न 2. रेखीय आवेश घनत्व को समझाइए। इसका मात्रक लिखिए।

उत्तर: रेखीय आवेश घनत्व (Linear Charge Density)- जब आवेश का वितरण एक रेखा (सीधी अथवा वक्र) के अनुदिश होता है तो प्रति एकांक (per unit) लम्बाई पर आवेश की मात्रा को रेखीय आवेश घनत्व कहते हैं।

यदि q आवेश किसी रेखा की l लम्बाई पर समान रूप से वितरित हो, तो आवेश का रेखीय घनत्व,

$$\lambda = \frac{\text{आवेश}}{\text{लम्बाई}} = \frac{q}{l}$$

λ का मात्रक-कूलॉम/मीटर (Cm^{-1}) होता है।

उदाहरण-यदि q आवेश R त्रिज्या के एक वलय पर समान रूप से वितरित हो, तो वलय पर आवेश का रेखीय घनत्व $\frac{q}{2\pi R}$ होगा।

प्रश्न 3. पृष्ठ आवेश घनत्व को समझाइए। इसका मात्रक लिखिए।

उत्तर: पृष्ठीय आवेश घनत्व (Surface Charge Density)- जब आवेश का वितरण किसी समतल अथवा वक्र पृष्ठ (Curvature Surface) पर होता है, तो प्रति एकांक क्षेत्रफल पर आवेश की मात्रा को आवेश का पृष्ठ घनत्व कहते हैं।

यदि q आवेश किसी पृष्ठ के A क्षेत्रफल पर समान रूप से वितरित हो, तो आवेश का पृष्ठ घनत्व,

$$\sigma = \frac{\text{आवेश}}{\text{क्षेत्रफल}} = \frac{q}{A}$$

σ का मात्रक-कूलॉम/मीटर² (Cm^{-2}) होता है।

उदाहरण- यदि q आवेश R त्रिज्या के गोलीय कोश के पृष्ठ पर समान रूप से वितरित हो, तो गोलीय कोश पर आवेश का पृष्ठ घनत्व $\frac{q}{4\pi R^2}$ होगा।

प्रश्न 4. आयतन आवेश घनत्व को समझाइए। इसका मात्रक लिखिए।

उत्तर; आयतनिक आवेश घनत्व (Volume Charge Density)- जब आवेश का वितरण वस्तु के आयतन में होता है, तो प्रति एकांक आयतन पर आवेश की मात्रा को 'आवेश का आयतन घनत्व' कहते हैं। यदि q आवेश किसी वस्तु के V आयतन में समान रूप से वितरित हो, तो आवेश का आयतन घनत्व,

$$\rho = \frac{\text{आवेश}}{\text{आयतन}} = \frac{q}{V}$$

ρ का मात्रक-कूलॉम/मीटर³ (Cm⁻³) होता है।

उदाहरण-यदि q आवेश R त्रिज्या के एक ठोस गोले में समान रूप से वितरित हो, तो ठोस गोले में आवेश का आयतन घनत्व $\frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ होगा।

प्रश्न 5. स्थिर वैद्युतिकी के लिए गाउस का नियम लिखिए व प्रतिपादन कीजिए।

उत्तर: गाउस की प्रमेय या गाउस का नियम (Gauss's Theorem or Gauss's Law)

गाउस का नियम स्थिर विद्युत बलों के सम्बन्ध में कूलॉम नियम का दूसरा रूप होता है। यह प्रमेय किसी स्थिर विद्युत क्षेत्र में स्थित किसी काल्पनिक एवं स्वेच्छगृहीत बन्द पृष्ठ से सम्बद्ध (bound) गुजरने वाले सम्पूर्ण विद्युत फ्लक्स (या सम्पूर्ण अभिलम्बवत् विद्युत प्रेरण) तथा सतह के अन्दर विद्यमान कुल आवेश में सम्बन्ध प्रदर्शित करती है। यह काल्पनिक तथा स्वेच्छ बन्द पृष्ठ (closed bound surface) गाउसीय पृष्ठ (Gaussian surface) कहलाता है। इस प्रमेय की सहायता से आवेशित वस्तुओं के विद्युत क्षेत्रों की गणना सरलतापूर्वक की जा सकती है।

कथन-गाउस प्रमेय के अनुसार, "किसी बन्द पृष्ठ से गुजरने वाला विद्युत फ्लक्स, उस पृष्ठ द्वारा परिबद्ध (bounded) कुल नेट आवेश का $\frac{1}{\epsilon_0}$ गुना होता है।"

गणितीय रूप में, विद्युत क्षेत्र में बन्द लूप विद्युत के लिए विद्युत क्षेत्र का पृष्ठीय समाकलन (surface integration) विद्युत फ्लक्स के बराबर होता है।

$$\phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0} \dots \dots \dots (1)$$

जहाँ ϵ_0 = निर्वात में विद्युतशीलता है।

यदि बन्द पृष्ठ द्वारा परिबद्ध कुल आवेश शून्य है (अथवा बन्द पृष्ठ के भीतर कोई आवेश न हो या आवेश बन्द पृष्ठ के बाहर हो) तो पृष्ठ से बाहर निकलने वाली कुल अभिलम्बवत् फ्लक्स शून्य होता है, अर्थात्

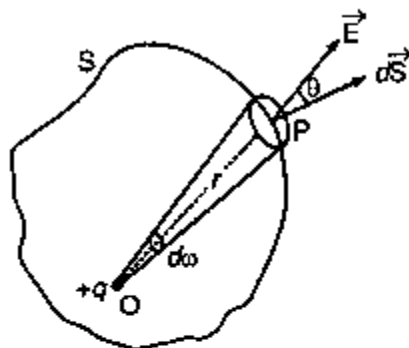
$$\phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 \dots \dots \dots (2)$$

उपपत्ति (Proof)

(i) जब आवेश बन्द पृष्ठ के अन्दर स्थित होता है (inside closed surface) – माना कि S क्षेत्रफल का एक बन्द पृष्ठ है जिसके अन्दर O बिन्दु पर एक बिन्दु आवेश q रखा है (चित्र 2.5)। सम्पूर्ण पृष्ठ को अनन्त सूक्ष्म पृष्ठ अवयवों (infinitely small elements) dS से मिलकर बना माना जा सकता है। पृष्ठ पर स्थित बिन्दु P पर एक सूक्ष्म पृष्ठ अवयव dS पर विद्युत् क्षेत्र की तीव्रता \vec{E} है। क्षेत्रफल वेक्टर $d\vec{S}$ व विद्युत् क्षेत्र \vec{E} के मध्य कोण θ से हो तथा O से P की दूरी r है अतः

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

जहाँ \hat{r} , OP दिशा में एकांक वेक्टर है।



चित्र 2.5

अब सूक्ष्म क्षेत्रफल dS के अभिलम्बवत् बाहर निकलने वाला कुल विद्युत् फ्लक्स

$$\begin{aligned} d\phi_E &= \vec{E} \cdot d\vec{S} = E dS \cos \theta \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} dS \cos \theta \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dS \cos \theta}{r^2} \end{aligned}$$

या
$$d\phi_E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\omega$$

जहाँ $d\omega = \frac{dS \cos \theta}{r^2}$ = सूक्ष्म क्षेत्रफल dS द्वारा O पर बना घनकोण

(solid angle)

अतः सम्पूर्ण बन्द पृष्ठ से निर्गत विद्युत् फ्लक्स

$$\phi_E = \oint_S d\phi = \oint_S \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\omega$$

या
$$\phi_E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S d\omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} 4\pi$$

क्योंकि
$$\oint_S d\omega = 4\pi$$

या $\phi_E = \frac{1}{\epsilon_0} q$

यही गाउस प्रमेय का कथन है।

यदि बन्द पृष्ठ के भीतर अनेक बिन्दु आवेश q_1, q_2, \dots, q_n हों तो प्रत्येक बिन्दु आवेश के कारण पृष्ठ से विद्युत फ्लक्स बाहर निकलेगा। अतः कुल फ्लक्स इन सभी फ्लक्सों के योग के बराबर होगा; अर्थात्

$$\begin{aligned}\phi_E &= \phi_1 + \phi_2 + \dots + \phi_n \\ &= \frac{q_1}{\epsilon_0} + \frac{q_2}{\epsilon_0} + \dots + \frac{q_n}{\epsilon_0} \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} [q_1 + q_2 + \dots + q_n]\end{aligned}$$

या $\phi_E = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i$

जहाँ $\sum_{i=1}^n$ बन्द पृष्ठ के अन्दर कुल आवेशों का बीजगणितीय योग होता है।

प्रश्न 6. किसी चालक वस्तु पर आवेश सदैव बाह्य सतह पर ही क्यों होता है ? स्पष्ट कीजिए।

उत्तर: चूँकि आवेशित चालक के अन्दर विद्युत क्षेत्र शून्य (अर्थात् $E = 0$) होता है, अतः गाउसीय पृष्ठ से निर्गत विद्युत फ्लक्स शून्य होगा, अर्थात्

$$\phi = 0$$

परन्तु $\phi = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow q = \phi \epsilon_0 = 0$

अर्थात् सतह के अन्दर आवेश शून्य होगा। फलस्वरूप चालक का समस्त Q उसके पृष्ठ पर वितरित होगा।

प्रश्न 7. साबुन का बुलबुला आवेशित करने पर आकार में क्यों बढ़ जाता है ?

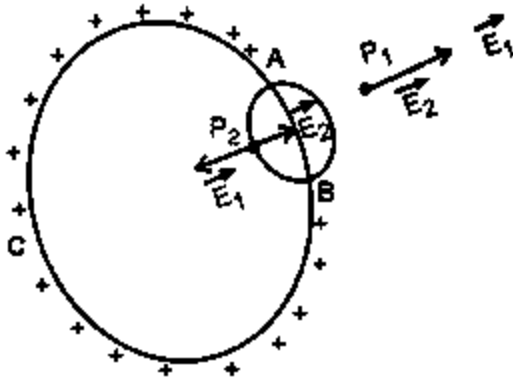
उत्तर: अनावेशित साबुन के बुलबुले में धनात्मक व ऋणात्मक आवेशों के मध्य साम्य होता है। जब इसको ऋणात्मक आवेश देते हैं। तो साम्य की स्थिति बदल जाती है, इस साम्य को प्राप्त करने के लिए आवेश आपस में प्रतिकर्षित करना शुरू कर देते हैं। अतः साबुन के बुलबुले का पृष्ठ क्षेत्रफल बढ़ जाता है। पृष्ठ क्षेत्रफल बढ़ने से बुलबुला आकार में बढ़ जाता है।

प्रश्न 8. आवेशित चालक के पृष्ठ पर विद्युत बल एवं विद्युत दाब के व्यंजक स्थापित कीजिए।

उत्तर: आवेशित चालक की सतह पर बल (Force on the Surface of a Charged Conductor) माना एक चालक की सतह पर पृष्ठ आवेश घनत्व σ है। हम चालक के बाहर एवं ठीक अन्दर, चालक के सापेक्ष दो सममित बिन्दुओं क्रमशः P_1 व P_2 पर विचार करते हैं।

चूँकि किसी आवेशित चालक पृष्ठ के ठीक बाहर विद्युत क्षेत्र σ/ϵ_0 होता है अतः बिन्दु P_1 पर विद्युत क्षेत्र।

$$E_{P_1} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad \dots(1)$$



चूँकि चालक के भीतर विद्युत क्षेत्र शून्य होता है। अतः बिन्दु P_2 पर विद्युत क्षेत्र $E_{P_2} = 0$ (2)

अब हम चालक के दो भागों (i) अल्पांश AB जिसका क्षेत्रफल ds है। तथा (ii) चालक के बचे हुए भाग ACB में विभक्त कर सकते हैं। यदि अल्पांश AB के कारण निकट स्थित बिन्दुओं पर उत्पन्न विद्युत क्षेत्र की तीव्रता \vec{E}_1 एवं भाग ACB के कारण \vec{E}_2 है, तो

$$E_{P_1} = E_1 + E_2 \quad \dots(3)$$

(बिन्दु P_1 पर E_1 व E_2 समान दिशा में हैं)

$$\text{तथा,} \quad E_{P_2} = E_1 - E_2 \quad \dots(4)$$

(बिन्दु P_2 पर E_1 व E_2 परस्पर विपरीत हैं)

समीकरण (3) व (4) से,

$$E_1 - E_2 = 0$$

$$\text{अर्थात्} \quad E_1 = E_2 \quad \dots(5)$$

समीकरण (1), (3) व (4) से

$$E_1 + E_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$\text{या,} \quad E_2 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (\because E_1 = E_2)$$

यदि अल्पांश AB पर कुल आवेश dq है तो अल्पांश पर बल,

$$dF = E_2 dq = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} dq (\because dq = \sigma ds)$$

अतः
$$dF = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} ds = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 ds \quad \dots(6)$$

$$\left(\because E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \text{ अतः } \sigma = \epsilon_0 E \right)$$

सम्पूर्ण पृष्ठ पर लगने वाला बल

$$F = \int_S \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} ds = \int_S \frac{\epsilon_0 E^2}{2} ds \quad \dots(7)$$

तथा पृष्ठ के एकांक क्षेत्रफल पर बल या दाब

$$P = \frac{dF}{ds} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \quad \dots(8)$$

इसी दाब को, विद्युत दाब कहते हैं।

प्रश्न 9. विद्युत क्षेत्र के इकाई आयतन में संचित ऊर्जा का व्यंजक स्थापित कीजिए।

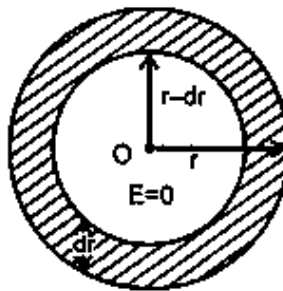
उत्तर: विद्युत क्षेत्र के एकांक आयतन में ऊर्जा (Energy Per Unit Volume in an Electric Field) किसी भी आवेशित चालक की सतह पर अभिलम्बवत् बाहर की ओर विद्युत बल उपस्थित रहता है। चालक पर आवेश की मात्रा बढ़ाने या विद्युत क्षेत्र के आयतन में वृद्धि करने में इस बल के विरुद्ध कार्य करना पड़ता है जो कि विद्युत क्षेत्र में ऊर्जा के रूप में संचित हो जाता है। माना एक r त्रिज्या को गोलीय आवेश है। गोले पर पृष्ठ आवेश घनत्व σ है।

गोले की सतह पर बाहर की ओर दाब

$$P = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \quad \dots(1)$$

अतः गोले की सतह पर बाहर की ओर बल

$$F = PA = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \times 4\pi r^2 \quad \dots(2)$$



चित्र 2-26: गोलीय आवेश वितरण

इस बल के विरुद्ध गोले को dr दूरी से संपीडित करने में किया गया कार्य

$$dW = F dr = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} 4\pi r^2 dr$$

संपीडन के कारण गोले के आयतन में कमी

$$dV = 4\pi r^2 dr$$

अतः
$$dW = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} dV \quad \dots(3)$$

अतः सम्पूर्ण विद्युत क्षेत्र में संचित ऊर्जा = किया गया कार्य

$$W = U = \int \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} dV = \int \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 dV \quad \dots(4)$$

तथा विद्युत क्षेत्र के इकाई आयतन में संचित ऊर्जा या ऊर्जा घनत्व

$$U_V = \frac{dW}{dV} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \quad \dots(5)$$

किसी अन्य माध्यम में,
$$U_r = \frac{1}{2} \epsilon E^2$$

प्रश्न 10. आवेशित साबुन के बुलबुले के सन्तुलन के लिए अधिकतम पृष्ठ आवेश घनत्व का व्यंजक स्थापित कीजिए।

उत्तर: साबुन के आवेशित बुलबुले का सन्तुलन (Equilibrium of Charged Soap Bubble)

एक साबुन के बुलबुले के आन्तरिक पृष्ठ पर वायु का दाब, बाह्य पृष्ठ पर उपस्थित वायुमण्डलीय दाब से अधिक होता है। इस दाबाधिक्य को पृष्ठ तनाव का बल सन्तुलित करता है।

माना एक साबुन के बुलबुले की त्रिज्या r तथा पृष्ठ तनाव T है तो दाबाधिक्य

$$P_{ext} = \frac{4T}{r} \dots\dots\dots(1)$$

माना कि हम बुलबुले को σ पृष्ठ आवेश घनत्व से आवेशित करते हैं।

तो बुलबुले के पृष्ठ पर बाहर की ओर विद्युत दाब $\frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$ भी कार्य करता है। इस स्थिति में

$$P_{ext} + \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} = \frac{4T}{r}$$

या
$$P_{ext} = \frac{4T}{r} - \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \quad \dots(2)$$

यदि हम बुलबुले को लगातार आवेशित करते हैं तो एक स्थिति में दाबाधिक्य शून्य हो जाता है। इसके पश्चात् बुलबुला फूट जाता है। अतः सन्तुलन के लिए।

$$P_{ext} = \frac{4T}{r} - \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} = 0$$

या
$$\frac{4T}{r} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \quad \dots(3)$$

\Rightarrow
$$r = \frac{8T\epsilon_0}{\sigma^2} \quad \dots(4)$$

\Rightarrow
$$\sigma = \sqrt{\left(\frac{8T\epsilon_0}{r}\right)} \quad \dots(5)$$

तथा, आवेश $q = \sigma \times 4\pi r^2 = 4\pi \sqrt{(8T\epsilon_0 r^3)} \quad \dots(6)$

प्रश्न 11. कूलॉम नियम से गाउस नियम का सत्यापन कीजिए।

उत्तर: कूलॉम के नियम से गाउस प्रमेय की उपपत्ति (Derivation of Gauss's Theorem by Coulomb's Law)

विद्युत फ्लक्स की परिभाषा से,

$$\phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot \vec{dS} = \oint_S E dS \cos \theta$$

किसी बिन्दु आवेश q से समान दूरी पर $|\vec{E}|$ को मान नियत रहता है और गोलीय पृष्ठ के लिए $\theta = 0^\circ$ होता है,

$$\phi_E = E \oint_S dS \cos 0 = E \oint_S dS = E4\pi r^2$$

क्योंकि
$$\oint_S dS = 4\pi r^2$$

या
$$\phi_E = E4\pi r^2 \quad \dots(1)$$

कूलॉम के नियम से बिन्दु आवेश q से r दूरी पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

\therefore समी. (1) से,
$$\phi_E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \times 4\pi r^2$$

या
$$\phi_E = \frac{1}{\epsilon_0}(q)$$

या
$$\phi_E = \frac{1}{\epsilon_0} \times \text{परिबद्ध आवेश (bounded charge)}$$

यही गाउस का प्रमेय है।

प्रश्न 12. आप एक कार में जा रहे हैं। बिजली गिरने वाली है तो अपनी सुरक्षा के लिए क्या करेंगे ?

उत्तर:

खिड़की बन्द कर लेंगे क्योंकि बिजली गिरने पर सम्पूर्ण आवेश कार के बाहरी पृष्ठ पर ही रहेगा।

प्रश्न 13. दो सीधे समान्तर लम्ब रेखीय आवेशों पर रेखीय आवेश घनत्व λ_1 एवं λ_2 है। इनके मध्य प्रति एकांक लम्बाई पर लगने वाला बल ज्ञात कीजिए।

उत्तर: λ_1 रेखीय आवेश घनत्व वाले तार से d दूरी पर उत्पन्न विद्युत क्षेत्र की तीव्रता ।

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda_1}{d} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda_1}{d}$$

चूँकि दूसरा चालक इसी विद्युत क्षेत्र में रखा है अतः उसकी प्रति एकांक लम्बाई (आवेश $q = \lambda_2$) पर लगने वाला बल

$$F = E_1 \lambda_2 = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda_1}{d} \times \lambda_2$$

या
$$F = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{2\pi\epsilon_0 d}$$

प्रश्न 14. दो अनन्त विस्तार के समतल समान्तर तलों पर क्रमशः समान आवेश घनत्व $+\sigma$ व $-\sigma$ हैं। इनके मध्य किसी बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता का मान क्या होगा ?

उत्तर: दोनों प्लेटों के मध्य स्थित बिन्दु पर दोनों प्लेट के कारण

उत्पन्न विद्युत क्षेत्र \vec{E}_1 व \vec{E}_2 दोनों एक दिशा में होंगे, अतः परिणामी विद्युत क्षेत्र

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

या
$$E = E_1 + E_2 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

निबन्धात्मक प्रश्न

प्रश्न 1. त्रिज्या R के गोलीय चालक को q आवेश से आवेशित करने पर निम्न स्थितियों में विद्युत क्षेत्र की तीव्रता का परिकलन कीजिए:

- (अ) $r > R$
- (ब) $r < R$
- (स) गोले की सतह पर
- (द) गोले के केन्द्र पर।

उत्तर: समरूप आवेशित चालक गोले के कारण विद्युत क्षेत्र की तीव्रता (Electric Field Intensity due to a Uniformly Charged Conducting Sphere) यदि किसी विलगित चालक को कुछ अतिरिक्त आवेश देते हैं तो यह सदैव इसके बाह्य पृष्ठ पर ही वितरित होता है। कोई भी अतिरिक्त आवेश इसके भीतरी भाग में नहीं रहता है। अब चूँकि सम्पूर्ण आवेश पृष्ठ पर ही रहता है अतः इस प्रकार एक समरूप आवेशित चालक गोला एक समरूप आवेशित गोलीय कोश की भाँति ही होता है तथा इसके लिए वही व्यंजक है। जो गोलीय कोश के लिए है। अर्थात्

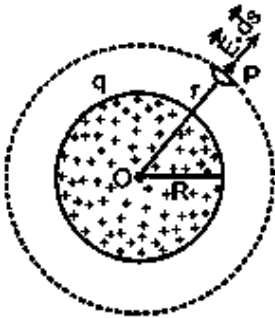
(i) गोले के बाहर, $E_0 = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2}$

(ii) गोले के पृष्ठ पर, $E_s = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2}$

(iii) गोले के अन्दर, $E_{in} = 0$ ($\because q = 0$)

प्रश्न 2. समरूप आवेशित अचालक गोले के कारण (अ) गोले के बाहर (ब) गोले की सतह पर (स) गोले के अन्दर (द) गोले के केन्द्र पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता का परिकलन कीजिए तथा विद्युत क्षेत्र की तीव्रता को दूरी के साथ आरेखित कीजिए।

उत्तर: समरूप आवेशित अचालक गोले के कारण विद्युत क्षेत्र की तीव्रता (Electric Field Intensity due to a Uniformly charged Non-Conducting sphere) माना एक R त्रिज्या का अचालक गोली, Q आवेश से एक समानरूप से आवेशित है। यह आवेश उसके सम्पूर्ण आयतन में एकसमान वितरित है। अतः आयतन आवेश घनत्व



चित्र 2.22: समरूप आवेशित अचालक गोला

$$\rho = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)} \quad \dots(1)$$

माना गोले के केन्द्र से r दूरी पर एक बिन्दु P है, जिस पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता ज्ञात करनी है। अतः हम गोले के केन्द्र O को केन्द्र मानकर r त्रिज्या के गोलीय गाउसीय पृष्ठ की परिकल्पना करते हैं। अब P की तीन स्थितियाँ सम्भव हैं

(i) जब P गोले के अन्दर ($r < R$) पर है-जब बिन्दु P गोले के अन्दर है तो गोलीय गाउसीयन पृष्ठ द्वारा परिवद्ध आवेश

$$\Sigma q = Q \quad \dots(2)$$

$$\therefore \phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\Sigma q}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad \dots(3)$$

$$\text{या} \quad \phi = \int_S E \cdot dS = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

($\because \vec{E}$ व $d\vec{S}$ के मध्य 0° का कोण है)

$$\text{या} \quad \phi = E \oint_S dS = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\text{या} \quad \phi = E 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (\because \oint_S dS = 4\pi r^2)$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \quad \dots(4)$$

$$\Rightarrow E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(\frac{R^3}{r^2} \right) \quad \left[\because Q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho \right] \dots(5)$$

$$\text{या} \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(\frac{R^3}{r^2} \right) \hat{r} \quad \dots(6)$$

(ii) जब P गोले के पृष्ठ ($r = R$) पर है-

$$\therefore E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} = \frac{\rho R}{3\epsilon_0} \quad \dots(7)$$

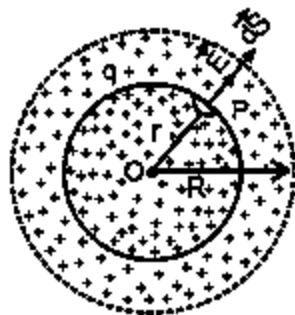
सदिश रूप में,

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} \hat{r} = \frac{\rho R}{3\epsilon_0} \hat{r} \quad \dots(8)$$

(iii) जब P गोले के अन्दर ($r < R$) पर है—जब बिन्दु P गोले के अन्दर है तो गोलीय गाउसीयन पृष्ठ द्वारा परिवर्द्ध आवेश

$$Q' = \rho \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$\text{या} \quad Q' = \frac{Q}{\frac{4}{3} \pi R^3} \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{Q r^3}{R^3} \quad \dots(9)$$



चित्र 2.23 समरूप आवेशित अचालक गोले के अन्दर विद्युत क्षेत्र

यहाँ गाउसीय पृष्ठ के बाहर एवं गोले की सतह के मध्य स्थित आवेश ($Q - Q'$) के कारण बिन्दु P पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता शून्य होगी।

अतः गाउस के नियम से,

$$\phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{Q r^3}{\epsilon_0 R^3}$$

$$\text{या} \quad \phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q r^3}{\epsilon_0 R^3} \quad (\vec{E} \text{ व } d\vec{S} \text{ समान्तर हैं})$$

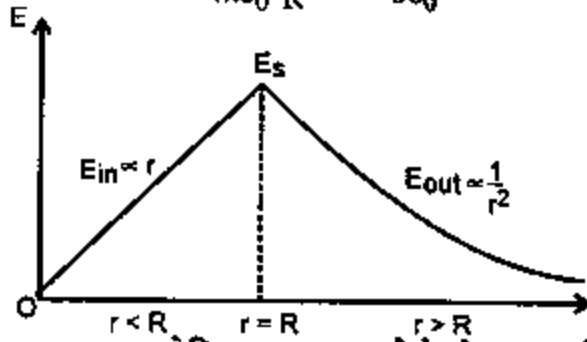
$$\text{या} \quad \phi = \int_S E dS = \frac{Q r^3}{\epsilon_0 R^3}$$

$$\text{या} \quad \phi = E \times 4\pi r^2 = \frac{Q r^3}{\epsilon_0 R^3}$$

$$\text{अतः} \quad E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} r = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r \quad \dots(10)$$

$$\left(\because Q = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho \right)$$

सदिश रूप में, $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^3} \hat{r} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \hat{r}$



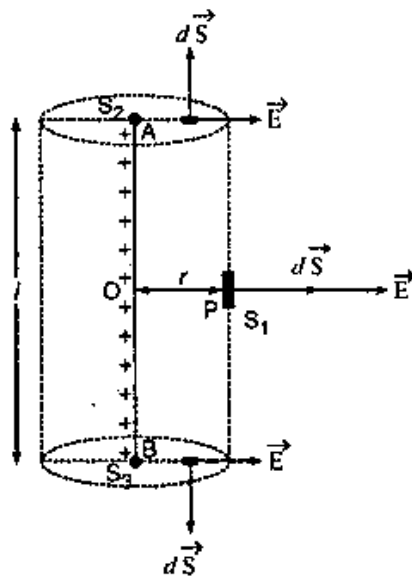
चित्र 2.24: समरूप आवेशित अचालक गोले के कारण विद्युत क्षेत्र में दूरी के साथ परिवर्तन

प्रश्न 3. गाउस नियम की सहायता से अपरिमित समरूप आवेशित तार के कारण इसके निकट स्थित किसी बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता का परिकलन कीजिए। दूरी के साथ तीव्रता में परिवर्तन को आरेखित कीजिए।

उत्तर: गाउस प्रमेय के अनुप्रयोग (Applications of Gauss's Theorem)

अनन्त लम्बाई के रेखीय आवेश के कारण विद्युत क्षेत्र की तीव्रता (Electric Field Intensity due to an Infinite Long Charge Wire)-मोना AB एक अनन्त लम्बाई का रेखीय आवेश है। जिसकी एकांक लम्बाई (unit length) पर आवेश अर्थात् आवेश का रेखीय घनत्व λ है। इस रेखीय आवेश से F दूरी पर स्थित बिन्दु P पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता ज्ञात करनी है।

अब P बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र ज्ञात करने के लिए λ लम्बाई एवं r त्रिज्या के एक बेलनाकार गाउसीय पृष्ठ की कल्पना करते हैं (चित्र 2.14), जिसके बेलनाकार पृष्ठ (cylindrical surface) पर बिन्दु P स्थित है। चूँकि आवेश का रेखीय घनत्व (linear charge density) λ है, अतः गाउसीय पृष्ठ द्वारा परिबद्ध आवेश (bounded charge)



चित्र 2.14

$$q = \lambda l$$

फ्लक्स की परिभाषानुसार,

$$\phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S E dS \cos \theta \quad \dots(1)$$

समीकरण (1) को हल करने के लिए गाउसीय पृष्ठ को निम्न तीन भागों में बाँट सकते हैं

(i) बेलनाकार पृष्ठ S_1 जिस पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता हर जगह समान है एवं $\theta = 0^\circ$; $\therefore \cos 0^\circ = 1$

(ii) सूक्ष्म पृष्ठ S_2 जहाँ विद्युत क्षेत्र पृष्ठ के अनुदिश (along) है। अतः $\theta = 90^\circ$; $\therefore \cos 90^\circ = 0$

(iii) सूक्ष्म पृष्ठ S_3 जहाँ $\theta = 90^\circ$; $\therefore \cos 90^\circ = 0$

अतः समी. (1) से,

$$\begin{aligned} \phi &= \oint_{S_1} E dS \cos \theta + \oint_{S_2} E dS \cos \theta \\ &\quad + \oint_{S_3} E dS \cos \theta \\ &= \oint_{S_1} E dS + 0 + 0 \end{aligned}$$

या $\phi = E2\pi rl$, क्योंकि $\oint_{S_1} dS = 2\pi r.l \quad \dots(2)$

अब गाउस के प्रमेय से,

$$\phi = \frac{1}{\epsilon_0}(\Sigma q) = \frac{\lambda l}{\epsilon_0} \quad \dots(3)$$

समी. (2) व (3) को तुलना करने पर,

$$E2\pi rl = \frac{\lambda l}{\epsilon_0}$$

या $E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r}$

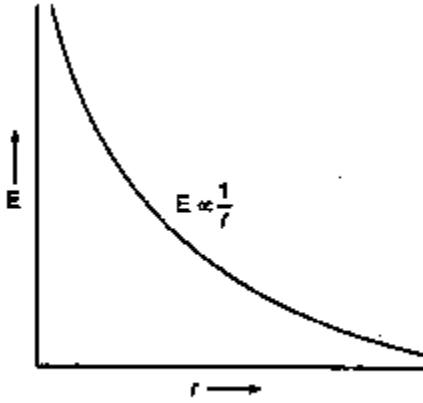
या $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda}{r} \quad \dots(4)$

यदि रेखीय आवेश की लम्ब दिशा (perpendicular direction) में एकांक वेक्टर \hat{n} हो तो सदिश रूप में

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 K} \frac{2\lambda}{r} \hat{n} \quad \dots(5)$$

स्पष्ट है कि $E \propto \frac{1}{r}$

अर्थात् अनन्त लम्बाई के रेखीय चालक के निकट बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता चालक से बिन्दु की दूरी के व्युत्क्रमानुपाती (inversely proportional) होती है लेकिन आवेश की लम्बाई पर निर्भर नहीं करती है। दूरी के साथ विद्युत क्षेत्र की तीव्रता का परिवर्तन (variation) चित्र 2.15 में दिखाया गया है।



चित्र 2.15

अब एक बेलनाकार गाउसीय पृष्ठ की कल्पना करते हैं जिसका एक सूक्ष्म पृष्ठ S , बिन्दु P पर तथा दूसरा सूक्ष्म पृष्ठ S , प्लेट के अन्दर स्थित है। इस गाउसीय पृष्ठ का अनुप्रस्थ परिच्छेद क्षेत्रफल S है अतः बेलनाकार गाउसीय पृष्ठ द्वारा परिवद्ध आवेश

$$q = \sigma S \dots\dots\dots (6)$$

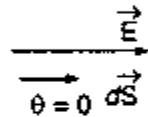
अब फ्लक्स की परिभाषानुसार,

$$\phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S E dS \cos \theta \dots (7)$$

समी. (7) को हल करने के लिए हम गाउसीय पृष्ठ को तीन भागों में बाँट सकते हैं—

(i) प्लेट के पृष्ठ के बाहर सूक्ष्म पृष्ठ S_1 ,

जहाँ $\theta = 0 \therefore \cos \theta = 1$

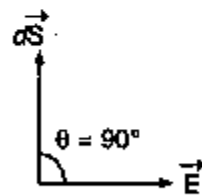


(ii) चालक प्लेट के अन्दर सूक्ष्म पृष्ठ S_2 ,

जहाँ $E = 0$ तथा

(iii) बेलनाकार पृष्ठ S_3 ,

जहाँ $\theta = 90^\circ$, अतः $\cos \theta = 0$



\therefore समीकरण (7) से,

$$\phi_E = \oint_{S_1} E dS \cos \theta + \oint_{S_2} E dS \cos \theta + \oint_{S_3} E dS \cos \theta$$

$$= E \oint_{S_1} dS \cos 0^\circ + 0 + 0$$

$$= E \oint_{S_1} dS$$

या $\phi_E = E.S$, क्योंकि $\oint_{S_1} dS = S$... (8)

गाउस के प्रमेय से,

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{1}{\epsilon_0} \times \text{परिबद्ध आवेश} \\ &= \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{\sigma S}{\epsilon_0} \end{aligned} \quad \dots (9)$$

($\because q = \sigma S$)

समी. (8) व (9) की तुलना करने पर

$$E.S = \frac{\sigma S}{\epsilon_0} \text{ या } E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad \dots (10)$$

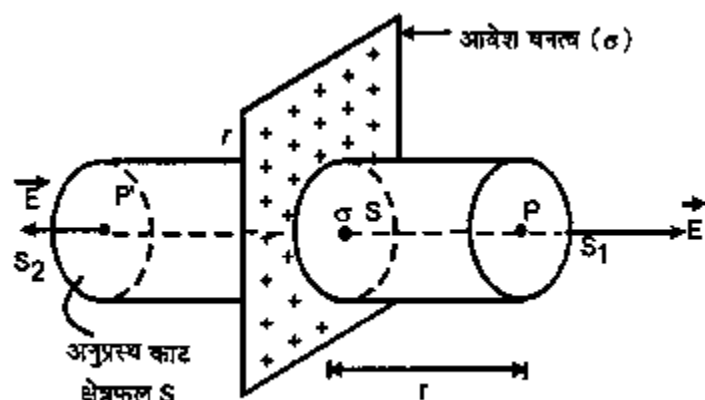
यदि चालक के पृष्ठ के लम्बवत् एकांक सदिश \hat{n} हो तो सदिश रूप में विद्युत क्षेत्र

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n} \quad \dots (11)$$

इस प्रकार अनन्त विस्तार की आवेशित प्लेट के निकट किसी बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता प्लेट के क्षेत्रफल एवं प्लेट से उसे बिन्दु की दूरी पर निर्भर नहीं करती है।

प्रश्न 4. गाउस नियम की सहायता से अपरिमित समरूप आवेशित अचालक परत के कारण इसके निकट स्थित किसी बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता का परिकलने कीजिए। विद्युत क्षेत्र की तीव्रता की निर्भरता समझाइये।

उत्तर: अपरिमित समरूप आवेशित अचालक परत के कारण विद्युत क्षेत्र (Electric Field due to an Infinite Uniformly charged Non-conducting Sheet)- चित्र 2.16 में पतली, अनन्त विस्तार की समान रूप से आवेशित अचालक परत प्रदर्शित की गयी है। जिस पर एकसमान आवेश का पृष्ठ घनत्व σ है। इस शीट से दूरी पर स्थित बिन्दु P पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता ज्ञात करनी है।



चित्र 2.16

सममिति से, विद्युत क्षेत्र की तीव्रता शीट से बाहर की ओर होगी। इसके अतिरिक्त शीट से समान दूरी पर स्थित दो बिन्दुओं P और P' के लिए E का परिमाण समान पर दिशा में विपरीत होगा।

हम एक बेलनाकार गाउसीय पृष्ठ को चुनते हैं जिसकी अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल S और लम्बाई 2r है, इसका अक्ष शीट के लम्बवत्

चूँकि बल रेखायें बेलन के वक्र पृष्ठ के समान्तर होंगी अतः वक्र पृष्ठ से निर्गत (through the curved surface) फ्लक्स शून्य होगा। बेलन के अन्त्यफलक (plane-end faces) S₁ व S₂ से निर्गत फ्लक्स

$$\phi_E = ES + ES = 2ES$$

गाउसीय पृष्ठ से परिवद्ध आवेश

$$q = \sigma S$$

गाउस की प्रमेय से,

$$\phi_E = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\therefore 2EA = \frac{\sigma S}{\epsilon_0} \text{ या } \boxed{E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}}$$

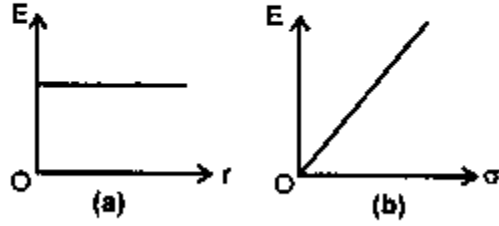
अतः E, r पर निर्भर नहीं है।

(i) यदि शीट पर धनात्मक आवेश है ($\sigma > 0$), तो क्षेत्र तीव्रता इसके परे (directed away) होगी।

(ii) यदि शीट पर ऋणात्मक आवेश है ($\sigma < 0$), तो क्षेत्र तीव्रता शीट की ओर (directed towards) होगी।

सदिश रूप में, $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{n}$

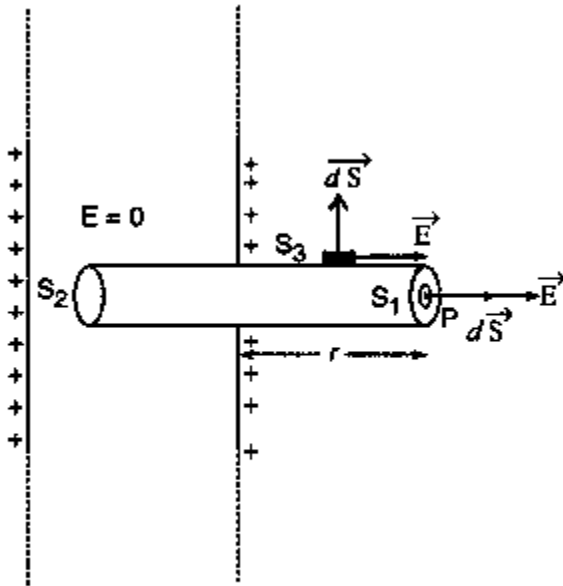
जहाँ, \hat{n} , परत के अभिलम्बवत् दिशा में इकाई सदिश है।



चित्र 2.17: अनन्त आवेशित अचालक परत में विद्युत क्षेत्र की निर्भरता

प्रश्न 5. एक समरूप आवेशित अपरिमित चालक पट्टिका के कारण इसके निकट स्थित बिन्दुओं पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता की दिशा ज्ञात कीजिए। गाउस नियम का उपयोग कर इसके लिए विद्युत क्षेत्र की तीव्रता का व्यंजक स्थापित कीजिए। आवश्यक चित्र बनाइए।

उत्तर: अनन्त विस्तार की समरूप आवेशित चालक प्लेट के कारण विद्युत क्षेत्र की तीव्रता (Intensity of Electric Field due to an Infinite uniformly Charged Conducting Plate)- जब अनन्त विस्तार (infinite extent) की चालक प्लेट को आवेश दिया जाता है तो आवेश पट्टिका के बाहरी पृष्ठ पर समान रूप से वितरित हो जाता है जिससे चालक के अन्दर विद्युत क्षेत्र शून्य हो जाता है। चालक के पृष्ठ पर तथा उसके निकट बाह्य बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र प्लेट के पृष्ठ के लम्बवत् होता है।



चित्र 2.18

माना प्लेट पर आवेश का पृष्ठ घनत्व σ है। इस प्लेट के कारण लम्बवत् दूरी r पर स्थित किसी बिन्दु P पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता ज्ञात करनी है।

अब एक बेलनाकार गाउसीय पृष्ठ की कल्पना करते हैं जिसका एक सूक्ष्म पृष्ठ S_1 बिन्दु P पर तथा दूसरा सूक्ष्म पृष्ठ S_2 प्लेट के अन्दर स्थित है। इस गाउसीय पृष्ठ का अनुप्रस्थ परिच्छेद क्षेत्रफल S है अतः बेलनाकार गाउसीय पृष्ठ द्वारा परिबद्ध आवेश

$$q = \sigma S \dots\dots\dots(1)$$

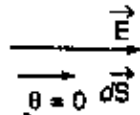
अब फ्लक्स की परिभाषानुसार,

$$\phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S E dS \cos \theta \dots(2)$$

समी. (2) को हल करने के लिए हम गाउसीय पृष्ठ को तीन भागों में बाँट सकते हैं—

(i) प्लेट के पृष्ठ के बाहर सूक्ष्म पृष्ठ S_1 ,

• जहाँ $\theta = 0 \therefore \cos \theta = 1$

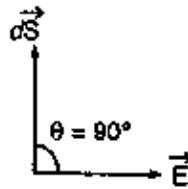


(ii) चालक प्लेट के अन्दर सूक्ष्म पृष्ठ S_2 ,

जहाँ $E = 0$ तथा

(iii) बेलनाकार पृष्ठ S_3 ,

जहाँ $\theta = 90^\circ$, अतः $\cos \theta = 0$



\therefore समीकरण (1) से,

$$\phi_E = \oint_{S_1} E dS \cos \theta + \oint_{S_2} E dS \cos \theta + \oint_{S_3} E dS \cos \theta$$

$$= E \oint_{S_1} dS \cos 0^\circ + 0 + 0$$

$$= E \oint_{S_1} dS$$

या $\phi_E = ES$, क्योंकि $\oint_{S_1} dS = S \dots(3)$

गाउस के प्रमेय से,

$$\phi = \frac{1}{\epsilon_0} \times \text{परिबद्ध आवेश}$$

$$= \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{\sigma S}{\epsilon_0} \dots(4)$$

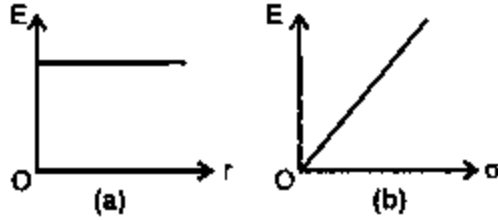
$$(\because q = \sigma S)$$

समी. (3) व (4) की तुलना करने पर

$$ES = \frac{\sigma S}{\epsilon_0} \text{ या } E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \dots(5)$$

यदि चालक के पृष्ठ के लम्बवत् एकांक सदिश \hat{n} हो तो सदिश रूप में विद्युत क्षेत्र

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n} \quad \dots(6)$$



चित्र 2.19 : आवेशित चालक परत में विद्युत क्षेत्र निर्भरता)

आंकिक प्रश्न

प्रश्न 1. किसी बन्द पृष्ठ में प्रवेशित फ्लक्स $400 \text{ Nm}^2/\text{C}$ तथा निर्गत विद्युत फ्लक्स $800 \text{ Nm}^2/\text{C}$ है। बन्द पृष्ठ द्वारा परिबद्ध आवेश का मान क्या है ?

हल: सतह में प्रवेशित विद्युत फ्लक्स

$\phi_1 = -400 \text{ Nm}^2/\text{C}$ और सतह से निर्गत विद्युत फ्लक्स,

$\phi_2 = 800 \text{ Nm}^2/\text{C}$

अतः बन्द पृष्ठ से निर्गत कुल वैद्युत फ्लक्स

$\phi = \phi_1 + \phi_2 = -400 + 800 = 400 \text{ Nm}^2/\text{C}$

\therefore गाउस की प्रमेय से,

$$\phi_E = \frac{1}{\epsilon_0} \Sigma q$$

$$\Sigma q = \phi_E$$

$$= 400 \times 8.86 \times 10^{-12}$$

$$= 3.54 \times 10^{-9} \text{ C}$$

$$= 3.54 \text{ nC}$$

प्रश्न 2. 2.4 मी. व्यास के किसी एकसमान आवेशित चालक गोले का पृष्ठ आवेश घनत्व $80 \mu\text{C}/\text{m}^2$ है। गोले का आवेश एवं गोले के पृष्ठ से निर्गत कुल विद्युत फ्लक्स ज्ञात कीजिए।

हल: (a) समानावेशित गोले के पृष्ठ पर आवेश का पृष्ठ घनत्व

$$\sigma = \frac{q}{A} = \frac{q}{4\pi r^2}$$

$$q = 4\pi r^2 \sigma$$

$$= 4 \times 3.14 \times 1.2 \times 1.2 \times 80.0 \times 10^{-6} \text{ C}$$

$$= 1447 \times 10^{-6} \text{ C}$$

$$= 1.447 \times 10^{-3} \text{ C}$$

$$= 1.45 \times 10^{-3} \text{ C} = 1.45 \text{ mC.}$$

(b) गाउस के प्रमेय से यदि गोले के पृष्ठ को ही गाउसीय पृष्ठ मान लें तो गोले का समस्त आवेश परिवर्द्ध आवेश की श्रेणी में आयेगा। अतः पृष्ठ से निर्गत फ्लक्स

$$\phi_E = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{1.45 \times 10^{-3}}{8.854 \times 10^{-12}}$$

या $\phi_E = 1.6 \times 10^8 \text{ Nm}^2\text{C}^{-1}.$

प्रश्न 3. एक धनात्मक आवेश +q, एक 4 मीटर भुजा वाले

(i) घन के केन्द्र पर

(ii) घन की एक कोर पर

(iii) घन के एक तल पर रखा है।

घन से सम्बद्ध कुल विद्युत फ्लक्स तथा घन के प्रत्येक फलक से सम्बद्ध फ्लक्स की गणना कीजिए।

हल: (i) चूँकि घन में समान क्षेत्रफल वाले 6 फलक होते हैं, अतः एक फलक से निर्गत फ्लक्स ।

$$\phi = \frac{1}{6} \phi_E = \frac{1}{6} \frac{q}{\epsilon_0}$$

चूँकि घन के प्रत्येक फलक सममिति में हैं अतः कुल फ्लक्स

$$\phi = 6 \times \phi_S = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\therefore \phi_S = \frac{q}{6\epsilon_0}$$

(ii) चूँकि घन में प्रत्येक फलक पर चार कोर होती हैं अतः घन से सम्बद्ध कुल फ्लक्स = $\frac{q}{4\epsilon_0}$
किसी एक फलक से निर्गत फ्लक्स

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{q}{4\epsilon_0} \right) = \frac{q}{16\epsilon_0}$$

(iii) चूँकि घन में प्रत्येक तल के दो भाग होते हैं अतः घन से सम्बद्ध कुल फ्लक्स = $\frac{q}{2\epsilon_0}$
किसी एक फलक से निर्गत फलक

$$= \frac{1}{5} \left(\frac{q}{2\epsilon_0} \right) = \frac{q}{10\epsilon_0}.$$

प्रश्न 4. एक गोले के केन्द्र से 20 सेमी. दूरी पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता 10V/m है। गोले की त्रिज्या 5 सेमी. है। गोले के केन्द्र से 8 सेमी. दूरी पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता ज्ञात कीजिए।

हल: गोले के बाह्य बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

प्रश्नानुसार, $r = 20 \text{ cm} = 20 \times 10^{-2} \text{ m}$, $E = 10 \text{ V/m}$

अतः $10 = 9 \times 10^9 \times \frac{q}{(20 \times 10^{-2})^2}$

$\therefore q = \frac{400 \times 10^{-4} \times 10}{9 \times 10^9}$
 $= 4.4 \times 10^{-11} \text{ C}$

अब $r = 8 \text{ cm} = 8 \times 10^{-2} \text{ m}$

$\therefore E = 9 \times 10^9 \times \frac{(4.4 \times 10^{-11})}{(8 \times 10^{-2})^2}$
 $= 9 \times 10^9 \times \frac{4.4 \times 10^{-11}}{64 \times 10^{-4}}$
 $= 62.5 \text{ V/m.}$

प्रश्न 5. कोई अनन्त रेखिक आवेश 2 cm दूरी पर $9 \times 10^4 \text{ NC}^{-1}$ विद्युत क्षेत्र उत्पन्न करता है। रेखिक आवेश घनत्व ज्ञात कीजिए।

हल: अनन्त विस्तार के रेखीय आवेश के कारण उत्पन्न विद्युत क्षेत्र की तीव्रता

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda}{r}$$

जहाँ 2 -आवेश का रेखीय घनत्व है और आवेश से प्रेक्षण बिन्दु की दूरी है।

प्रश्न से,

$$r = 2 \text{ cm} = 2 \times 10^{-2} \text{ m}$$

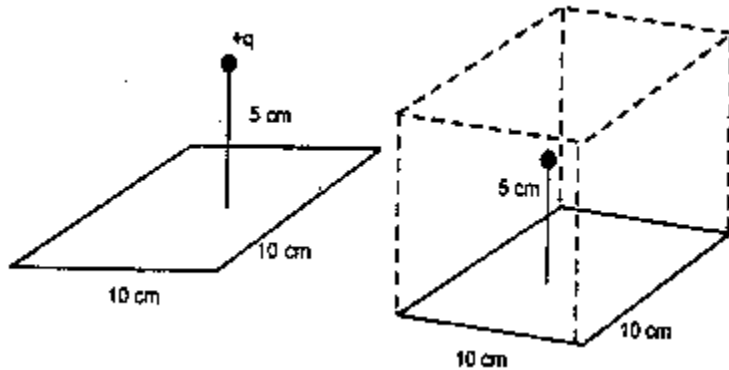
$$\lambda = ?, E = 9 \times 10^4 \text{ NC}^{-1}$$

$$\therefore 9 \times 10^4 = 9 \times 10^9 \times \frac{2\lambda}{2 \times 10^{-2}}$$

$$\therefore \lambda = 1.0 \times 10^{-7} \text{ Cm}^{-1}$$

$$\text{या } \lambda = 0.1 \times 10^{-6} = 0.1 \mu\text{Cm}^{-1}$$

प्रश्न 6. प्रस्तुत चित्र में 10 cm भुजा के किसी वर्ग के केन्द्र से ठीक 5 cm ऊँचाई पर कोई + 10 μC आवेश रखा है। इस वर्ग से गुजरने वाले विद्युत फ्लक्स का परिमाण क्या है ?
(संकेत-वर्ग को 10cm किनारे के किसी घन का फलक मानिये।)



हल: 10 cm भुजा के एक ऐसे घनाकार गाउसीय पृष्ठ की कल्पना करते हैं जिसका केन्द्र वही हो जहाँ आवेश $q(10 \mu\text{C})$ रखा है। अतः गाउस के प्रमेय से गाउसीय पृष्ठ से निर्गत कुल विद्युत फ्लक्स

$$\phi_E = \frac{q}{\epsilon_0}$$

\therefore घन में समान क्षेत्रफल वाले 6 फलक होते हैं, अतः एक फलक से निर्गत फ्लक्स

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \frac{1}{6} \phi_E = \frac{1}{6} \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{10 \times 10^{-6}}{6 \times 8.86 \times 10^{-12}} \\ &= 1.88 \times 10^5 \text{ Nm}^2 \text{ C}^{-1}\end{aligned}$$

प्रश्न 7. एक धातु की प्लेट का क्षेत्रफल 10^{-2} मी.^2 है; प्लेट को $10 \mu\text{C}$ आवेश दिया गया है। प्लेट के निकट बिन्दुओं पर विद्युत क्षेत्र का मान ज्ञात कीजिए।

हल: दिया है, $A = 10^{-2} \text{ m}^2$

$$q = 10 \mu\text{C} = 10 \times 10^{-6} \text{ C}$$

धातु की प्लेट के निकट विद्युत क्षेत्र की तीव्रता

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

जहाँ σ पृष्ठ आवेश घनत्व है—

$$\therefore \sigma = \frac{q}{A}$$

$$\therefore E = \frac{q}{2\epsilon_0 A}$$

$$= \frac{10 \times 10^{-6}}{2 \times 8.86 \times 10^{-12} \times 10^{-2}}$$

$$= \frac{10^{-5} \times 10^{14}}{17.72}$$

$$= 5.65 \times 10^7 \text{ V/m.}$$

प्रश्न 8. 1 मी.^2 क्षेत्रफल के दो धात्विक पृष्ठ एक दूसरे के समान्तर 0.05 मी. दूरी पर रखे हैं। दोनों पर समान परिमाण के परन्तु विपरीत आवेश हैं। यदि दोनों के मध्य विद्युत क्षेत्र का मान 55 V/m है तो प्रत्येक पर आवेश का मान ज्ञात कीजिए।

हल: दोनों प्लेटों के मध्य स्थित बिन्दु C पर दोनों प्लेटों के कारण उत्पन्न विद्युत क्षेत्र \vec{E}_1 , व \vec{E}_2 , दोनों एक ही दिशा में होंगे, अतः परिणामी विद्युत क्षेत्र

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

$$E = E_1 + E_2$$

$$= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon_0 A}$$

दिया है, $E = 55 \text{ V/m}$, $A = 1 \text{ m}^2$

$$\therefore q = \epsilon_0 EA$$

$$= 8.86 \times 10^{-12} \times 55 \times 1$$

$$= 4.87 \times 10^{-10} \text{ C}$$

प्रश्न 9. एक $9 \times 10^{-5} \text{ ग्राम}$ द्रव्यमान का कण, एक समरूप आवेशित लम्बी क्षेत्रीय परत, जिस पर पृष्ठ आवेश घनत्व $5 \times 10^{-5} \text{ C/m}^2$ है, के ऊपर कुछ दूरी पर रखा जाता है। कण पर कितना आवेश हो कि इसे स्वतन्त्र छोड़ने पर यह नीचे न गिरे ?

हल: दिया है, $m = 9 \times 10^{-5} \text{ g} = 9 \times 10^{-8} \text{ kg}$, $\sigma = 5 \times 10^{-5} \text{ Cm}^2$

कण को माना आवेश दिया जाता है। यह नीचे नहीं गिरेगा, यदि विद्युत क्षेत्र के कारण ऊपर की ओर बल = कण का भार

$$qE = mg$$

या
$$q \left(\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \right) = mg$$

या
$$q = \frac{2\epsilon_0 mg}{\sigma}$$

$$= \frac{2 \times 8.85 \times 10^{-12} \times 9 \times 10^{-8} \times 9.8}{5 \times 10^{-5}}$$

$$= 3.12 \times 10^{-13} \text{C}$$

प्रश्न 10. एक X-Y तल में स्थित लम्बी समरूप आवेशित परत पर पृष्ठ आवेश घनत्व $5 \times 10^{-16} \text{ C/m}^2$ है। एक 0.1 मी, त्रिज्या के वृत्ताकार लूप जिसकी अक्ष Z-अक्ष से 60° का कोण बनाती है, से पारित विद्युत फ्लक्स का मान ज्ञात कीजिए।

हल: दिया है, $\sigma = 5.0 \times 10^{-16} \text{ Cm}^{-2}$ $r = 0.1 \text{ m}$, $\theta = 60^\circ$
समतल आवेश की परत के कारण विद्युत क्षेत्र

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

वृत्ताकार क्षेत्रफल के कारण फ्लक्स

$$\phi_E = E \Delta S \cos \theta$$

$$= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \times \pi r^2 \cos \theta$$

$$= \frac{5.0 \times 10^{-16} \times 3.14 \times (0.1)^2 \cos 60^\circ}{2 \times 8.85 \times 10^{-12}}$$

$$= 4.44 \times 10^{-7} \text{ Nm}^2 \text{C}^{-1}.$$

प्रश्न 11. 10^3 eV ऊर्जा का इलेक्ट्रॉन 5 मिमी दूरी से एक अनन्त विस्तार की चालक प्लेट की ओर लम्बवत् दागा जाता है। चालक प्लेट पर न्यूनतम पृष्ठ आवेश घनत्व की गणना कीजिए कि इलेक्ट्रॉन प्लेट से न टकराये।

हल: दिया है,

$$K = 10^3 \text{ eV}, d = 5 \text{ मिमी.} = 5 \times 10^{-3} \text{ m}, \sigma = ?$$

$$\therefore K = \text{eV}$$

$$\Rightarrow 10^3 \text{ eV} = \text{eV}$$

$$\Rightarrow V = 10^3 \text{ volt}$$

$$\therefore E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$\text{या } \frac{V}{d} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{V\epsilon_0}{d} = \frac{10^3 \times 8.86 \times 10^{-12}}{5 \times 10^{-3}} \\ = 1.77 \times 10^{-6} \text{ Cm}^{-2}.$$

प्रश्न 12. एक साबुन के बुलबुले के अन्दर एवं बाहर दाब समान है। साबुन के घोल का पृष्ठ तनाव 0.04 N/m है तथा बुलबुले का व्यास 4 सेमी. है। बुलबुले पर आवेश का मान ज्ञात कीजिए।

हल: दिया है, $T = 0.04 \text{ N/m}$

व्यास = 4 cm

\therefore त्रिज्या $r = 2 \text{ cm} = 2 \times 10^{-2} \text{ m}$

आवेश $q = ?$

$$\therefore q = 4\pi \sqrt{8T\epsilon_0 r^3} \\ = 4 \times 3.14 \sqrt{8 \times 0.04 \times 8.86 \times 10^{-12} \times (2 \times 10^{-2})^3} \\ = 4 \times 3.14 \sqrt{22.6816 \times 10^{-18}} \\ = 4 \times 3.14 \times 4.76 \times 10^{-9} \\ = 59.8 \times 10^{-9} \text{ C} \\ = 59.8 \text{ C}.$$