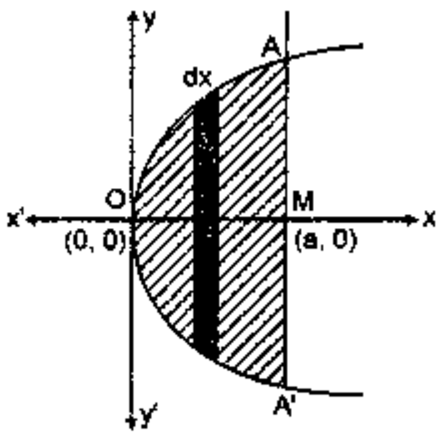
समाकलन के अनुप्रयोग: क्षेत्रकलन

Ex 11.1

प्रश्न 1. परवलय $y^2 = 4ax$ तथा उसके नाभिलम्ब से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : परवलय $y^2 = 4ax$ तथा उसके नाभिलम्ब से परिबद्ध क्षेत्रफल x-अक्ष के सममित होता है।



अभीष्ट क्षेत्रफल= क्षेत्रफल AOA' MA

$= 2 \times$ क्षे. $AOMA$

$= 2\int_0^a y\,dx$

$= 2\int_0^a 2\sqrt{a}\sqrt{x}\,dx$

$= 4\sqrt{a}\int_0^a x^{1/2}\,dx$

$= 4\sqrt{a} \times \left(\frac{x^{3/2}}{3/2}\right)_0^a$

$= 4\sqrt{a} \times \frac{2}{3}[(a)^{3/2} - (0)^{3/2}]$

$= \frac{8\sqrt{a}}{3}[a^{3/2}]$

$= \frac{8a^2}{3}$ वर्ग इकाई।

प्रश्न 2. वृत्त $x^2 + y^2 = 4$ का चित्र बनाकर इसमें y-अक्ष व $x = 1$ के बीच का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

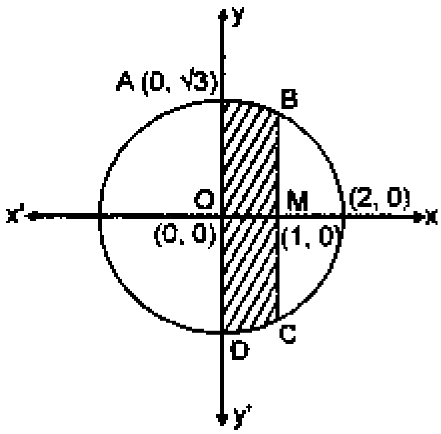
हल : वृत्त $x^2 + y^2 = 4$ जिसका केन्द्र (0, 0) तथा त्रिज्या 2 है।

$x = 1$ पर $y = \sqrt{3}$

अत: अभीष्ट क्षेत्रफल

$$= 2 \int_0^{\sqrt{3}} x \, dy$$

$$= 2 \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{4 - y^2} \, dy$$



$$= 2\left[\frac{y}{2}\sqrt{4-y^2} + \frac{2}{2}\sin^{-1}\frac{y}{2}\right]_0^{\sqrt{3}}$$

$$= 2\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{4-y^2} + \sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2} - 0 - 0\right]$$

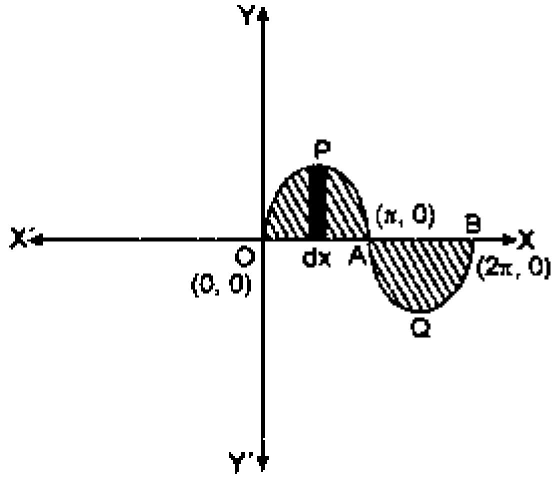
$$= 2\left[\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}\right]$$

$$= \left(\sqrt{3} + \frac{2\pi}{3}\right)$$ **वर्ग इकाई।**

प्रश्न 3. वक्र $y = \sin x$ तथा x-अक्ष से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जबकि $0 \le x \le 2\pi$

हल : वक्र $y = \sin x$ तया $x = 0$ एवं $x = 2\pi$ से घिरे क्षेत्रफल को चित्र में छायांकित किया गया है। x के विभिन्न मानों के लिए $y = \sin x$ की सारणी नीचे दी गई है।

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	0	$\frac{1}{2} = 0{\cdot}5$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = 0{\cdot}7$	$\frac{\sqrt{3}}{2} = 0{\cdot}8$	1	0	-1	0



अभीष्ट क्षेत्रफल = क्षेत्र OPAO का क्षेत्रफल + क्षेत्र AQBA का शैत्रफल

$$= \int_0^{\pi} y\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} -y\,dx$$

$$= \int_0^{\pi} \sin x\,dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x\,dx$$

$$= [-\cos x]_0^{\pi} + [\cos x]_{\pi}^{2\pi}$$

$= -[-1-1] + [1-(-1)]$

$= -(-2) + (1+1]$

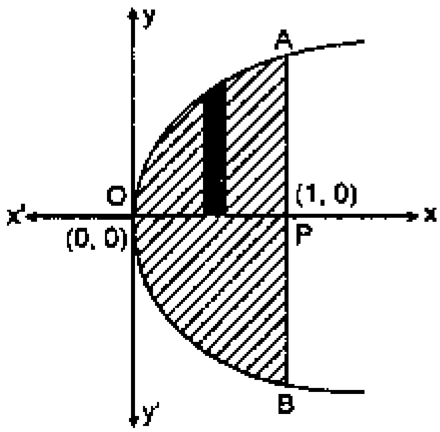
$= 2 + 2$

$= 4$ वर्ग इकाई

प्रश्न 4. वक्र $y = 2\sqrt{x}$ तथा $x = 0, x = 1$ द्वारा परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल :

वक्र $y = 2\sqrt{x} \Rightarrow y^2 = 4x$ यह एक परवलय है। इससे तथा $x = 0, x = 1$ द्वारा परिबद्ध क्षेत्र चित्र में छायांकित हैं।



अभीष्ट क्षेत्रफल = क्षेत्रफल APROA

= 2 x क्षेत्रफल APOA

$= 2\int_0^1 y\,dx$

$= 2\int_0^1 2\sqrt{x}\,dx$

$= 4\left(\frac{2x^{3/2}}{3}\right)_0^1$

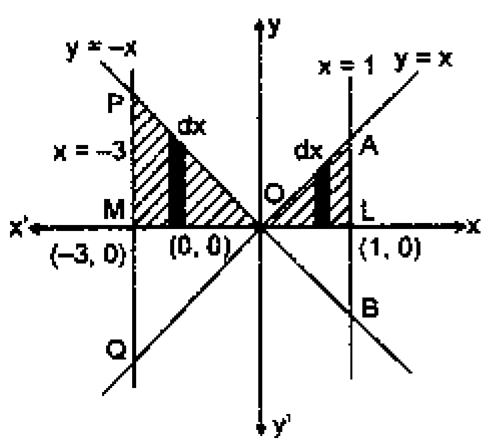
$= \frac{8}{3}(1^{3/2} - 0) = \frac{8}{3}$ वर्ग इकाई।

प्रश्न 5. y = | x |, x = -3, x = 1 ये x-अक्ष से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : y = | x |, x = − 3, x = 1

अतः y = + x तथा y = − x

इन रेखाओं का ग्राफ इस प्रकार है।



अभीष्ट क्षेत्रफल = क्षेत्रफल AOLA + क्षेत्रफल POMP

$$= \int_0^1 y\,dx + \int_{-3}^0 y\,dx$$

$$= \int_0^1 x\,dx + \int_{-3}^0 (-x)\,dx$$

$$= \left(\frac{x^2}{2}\right)_0^1 - \left(\frac{x^2}{2}\right)_{-3}^0$$

$$= \left(\frac{1}{2} - 0\right) - \left(\frac{0}{2} - \frac{9}{2}\right)$$

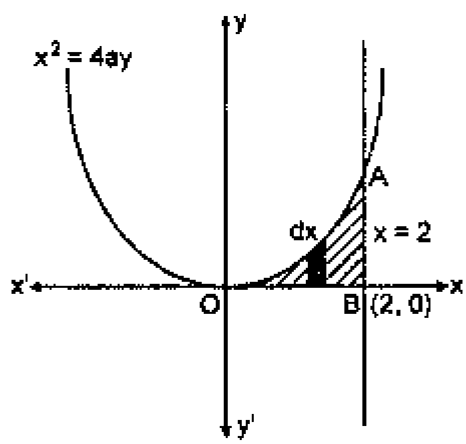
$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{9}{2}\right) = 5$$ वर्ग इकाई।

प्रश्न 6. वक्र $x^2 = 4ay$, x-अक्ष तथा रेखा $x = 2$ से परिंबद्ध क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : वक्र $x^2 = 4ay$ एक परवलय है। इसका ग्राफ इस प्रकार है।

अभीष्ट क्षेत्रफल = क्षे.ABOA

$$= \int_0^2 y\,dx = \int_0^2 \frac{x^2}{4a}\,dx = \frac{1}{4a}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2$$

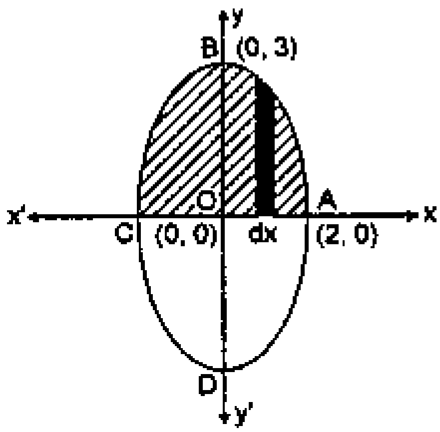


$$= \frac{1}{12a}[2^3 - 0^3] = \frac{1}{12a} \times 8$$

$$= \frac{2}{3a}$$ वर्ग इकाई।

प्रश्न 7. दीर्घ वृत्त $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ से परिषद्ध तथा x-अक्ष से ऊपर की ओर स्थित क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ से परिबद्ध तथा x-अक्ष से ऊपर की ओर स्थित क्षेत्रफल चित्र में छायांकित किया गया है।



अभीष्ट क्षेत्रफल = क्षे. ABCOA

= 2 x क्षे. ABOA

$= 2\int_0^2 y\,dx$

$= 2\int_0^2 3\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\,dx$

$= \frac{2\times 3}{2}\int_0^2 \sqrt{(4-x^2)}\,dx$

$= 3\left[\frac{1}{2}\left\{x\sqrt{4-x^2}+4\sin^{-1}\frac{x}{2}\right\}\right]_0^2$

$= 3\left[\frac{1}{2}\left(2\sqrt{4-2^2}+4\sin^{-1}\frac{2}{2}\right)\right]-\frac{3}{2}[0]$

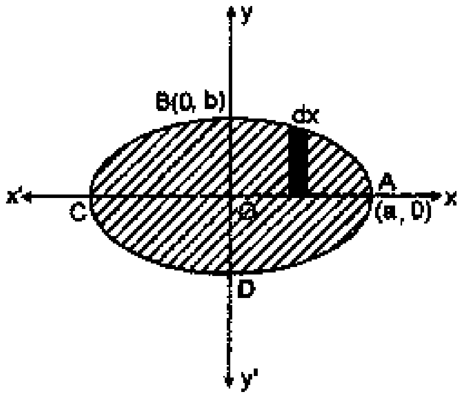
$= \frac{3}{2}\times 4\times\frac{\pi}{2} = 3\pi$ **वर्ग इकाई।**

प्रश्न 8.

दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ **का सम्पूर्ण क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।**

हल :

दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ का सम्पूर्ण क्षेत्रफल चित्र में छायांकित किया गया है।



अभीष्ट क्षेत्रफल = क्षे. ABCDA

= 4 x क्षे. ABOA

$= 4 \times \int_0^a y\, dx$

$= 4 \times \int_0^a \left[\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\right] dx$

$= \frac{4b}{a}\left[\frac{1}{2}\left\{x\sqrt{a^2 - x^2} - a^2 \sin^{-1}\frac{x}{a}\right\}\right]_0^a$

$= \frac{2b}{a}\left[0 - a^2 \times \frac{\pi}{2}\right] = -\pi ab$

= πab वर्ग इकाई।

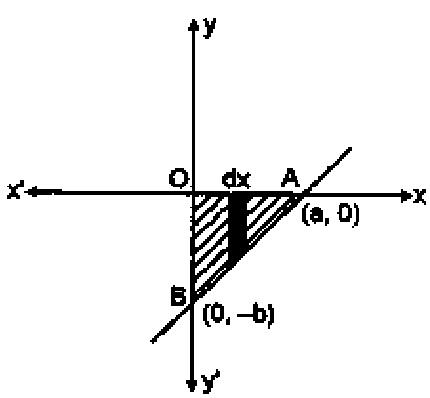
(∵ क्षेत्रफल सदैव धनात्मक होता है)

प्रश्न 9.

निर्देशी अक्षों व रेखा $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 2$ से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल :

रेखा $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 2$ का ग्राफ इस प्रकार है



अभीष्ट क्षेत्रफल = क्षे. ABOA

$$= \int_0^a y\,dx = \int_0^a \left[\frac{b}{a}(x-2a)\right]dx$$

$$= \frac{b}{a}\left[\frac{x^2}{2} - 2ax\right]_0^a$$

$$= \frac{b}{a}\left[\frac{a^2}{2} - 2a^2 + 0 - 0\right]$$

$$= \frac{b}{a} \times \frac{-3a^2}{2} = -\frac{3}{2}ab$$

$= \frac{3}{2}ab$ **वर्ग इकाई।**

($\because$ क्षेत्रफल सदैव धनात्मक होता है)

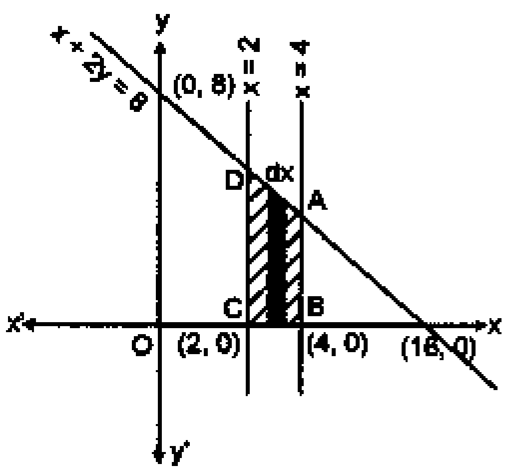
प्रश्न 10. रेखाओं x + 2y = 8, x = 2,x = 4 तथा x-अक्ष से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रपल ज्ञात कीजिए।

हल : रेखा x + 2y = 8

2y = -x + 8

y = $-\frac{1}{2}x + 4$

इस रेखा का ग्राफ इस प्रकार है।



अत: अभीष्ट क्षेत्रफल – क्षेत्रफल ABCDA

$$= \int_2^4 y\, dx$$

$$= \int_2^4 \left(-\frac{1}{2}x + 4\right) dx$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_2^4 + 4[x]_2^4$$

$$= -\frac{1}{4}[4^2 - 2^2] + 4(4-2)$$

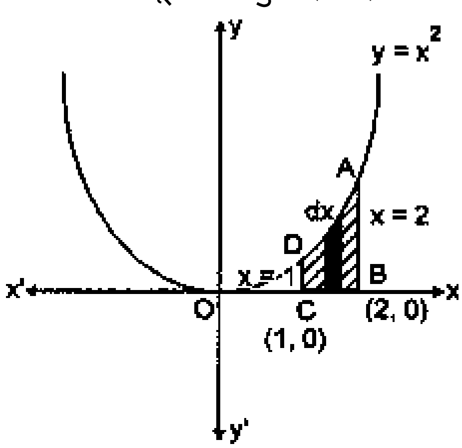
$$= -\frac{1}{4} \times 12 + 8 = -3 + 8$$

= 5 वर्ग इकाई।

प्रश्न 11. वक्र $y = x^2$, कोटियों $x = 1, x = 2$ एवं x-अक्ष से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : परवलय $x^2 = y$, x-अक्ष से सममित है।

इसका शीर्ष मूल बिन्दु O(0, 0) है।



रेखाओं $x = 1, x = 2$, x-अक्ष तथा वक्र $x^2 = y$ से घिरा क्षेत्रफल चित्र में अयांकित है।

अभीष्ट क्षेत्रफल = क्षे, ABCDA

$$= \int_1^2 y\, dx$$

$$= \int_1^2 x^2\, dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{1}{3}[8-1]$$

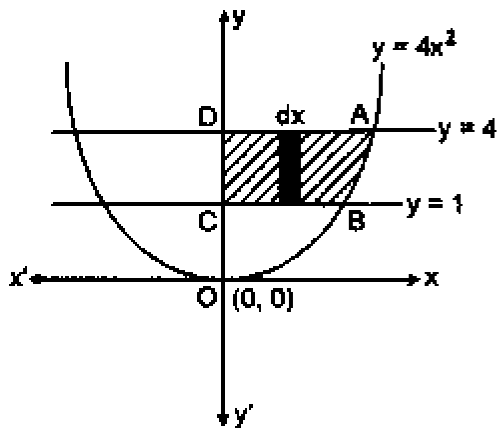
$$= \frac{7}{3}$$ वर्ग इकाई।

प्रश्न 12. प्रथम चतुर्थाश में स्थित एवं y = 4x², x = 0, y = 1 तथा y = 4 से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : $y = 4x^2$

$\Rightarrow x^2 = \frac{1}{4}y$

यह एक परवलय का समीकरण है।



अत: $x = 0, y = 1, y = 4$ तथा वक्र $y = 4x^2$ से घिरा त्रर्फल चित्र में याकित है।

अभीष्ट क्षेत्रफल = क्षे. ABCDA

$$= \int_1^4 x\, dy$$

$$= \int_1^4 \frac{1}{2} y^{1/2}\, dy = \frac{1}{2}\left[\frac{2y^{3/2}}{3}\right]_1^4$$

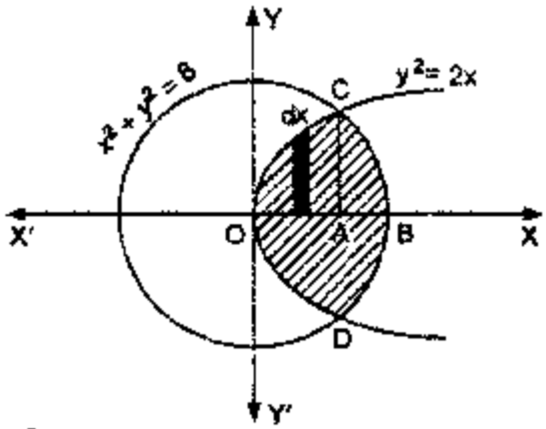
$$= \frac{1}{3}\{4^{3/2} - 1^{3/2}]$$

$$= \frac{8-1}{3} = \frac{7}{3}$$ वर्ग इकाई।

Ex 11.2

प्रश्न 1. वक्रों $y^2 = 2x$ तथा $x^2 + y^2 = 8$ के मध्यवर्ती क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : अभीष्ट क्षेत्रफल चित्र में झांकित किया गया है।



वृत्त का समीकरण

$x^2 + y^2 = 8$ ……….(1)

परवलय का समीकरण

$y^2 = 2x$ …….(2)

समीकरण (1) तथा (2) को हल करने पर,

$x = -4, 2$

$x = -4$ के लिए) का मान $\sqrt{-8}$ प्राप्त होता है जो वास्तविक नहीं है। अतः $x = 2$ के लिए y का मान ± 2 होगा।

बिन्दु A के निर्देशांक (2,0), C के निर्देशांक (2, 2) तथा बिन्दु B के निर्देशांक $(2\sqrt{2}, 0)$ हैं।

अभीष्ट क्षेत्रफल = BCODB का क्षेत्रफल

= 2 x BCOAB का क्षेत्रफल

= 2[OACO का क्षेत्रफल + ABCA का क्षेत्रफल]

= 2[∫|y(परवलय के लिए)| dx + ∫|y (वृत्त के लिए)| dx]

$$= 2\left[\int_0^2 \sqrt{2x} + \int_2^{2\sqrt{2}} \sqrt{8-x^2}\, dx\right]$$

$$= 2\left[\sqrt{2}\left(\frac{x^{3/2}}{3/2}\right)_0^2 + \left\{\frac{x}{2}\sqrt{8-x^2} + \frac{8}{2}\sin^{-1}\frac{x}{2\sqrt{2}}\right\}_2^{2\sqrt{2}}\right]$$

$$= 2\sqrt{2}\times\frac{2}{3}\times 2^{3/2} + 2\left[\frac{2\sqrt{2}}{2}\sqrt{8-8}\right.$$

$$\left. + 4\sin^{-1}\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} - \left(\frac{2}{2}\sqrt{8-4} + 4\sin^{-1}\frac{2}{2\sqrt{2}}\right)\right]$$

$$= \frac{16}{3} + 8\sin^{-1}1 - 2\times 2 - 8\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{16}{3} + 8\times\frac{\pi}{2} - 4 - 8\times\frac{\pi}{4}$$

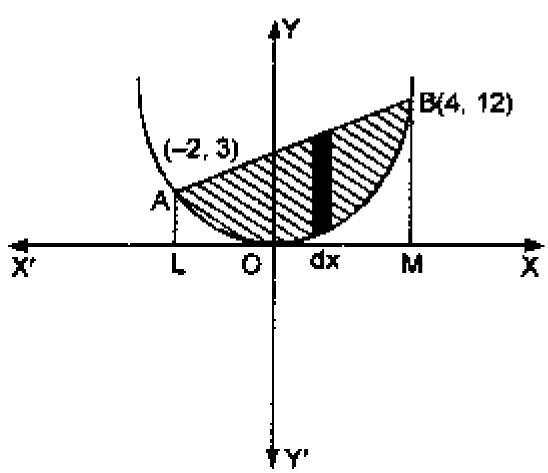
$$= \frac{4}{3} + 8\times\frac{\pi}{4} = \left(\frac{4}{3} + 2\pi\right)$$

$= \left(2\pi + \frac{4}{3}\right)$ वर्ग इकाई।

प्रश्न 2. परबलय $4y = 3x^2$ का रेखा $3x - 2y + 12 = 0$ के मध्यवर्ती क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : परवलय $4y = 3x^2$ तथा रेखा $2y = 3x + 12$ एक-दूसरे को बिन्दुओं A(-2, 3) तथा B(4, 12) पर प्रतिच्छेद करते हैं।

अभीष्ट क्षेत्रफल चित्र में छायांकित भाग हैं।



अभीष्ट क्षेत्रफल = BOAB का क्षेत्रफल ।

= ∫y (रेखा के लिए) dx − ∫y (परवलय के लिए) dx

$$= \int_{-2}^{4}\left(\frac{3x+12}{2}\right)dx - \int_{-2}^{4}\frac{3x^2}{4}\,dx$$

$$= \left[\frac{3}{2}\left(\frac{x^2}{2}\right)+6x\right]_{-2}^{4} - \frac{3}{4}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{4}$$

$$= \frac{3}{4}[16-4]+6(4+2)-\frac{3}{4\times 3}\ (64+8)$$

$$= \frac{3}{4}\times 12+6\times 6-\frac{1}{4}\times 72$$

= 9 + 36 − 18 = 27 वर्ग इकाई।

प्रश्न 3.

वक्र $y=\sqrt{4-x^2}$, x = √3y ; तथा x-अक्ष के मध्य घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल :

वक्र $y=\sqrt{4-x^2}$ एक वृत्त है जिसका शीर्ष मूल बिन्दु है तथा त्रिज्या 2 है।

वृत्त $y=\sqrt{4-x^2}$ तथा रेखा x = √3y को हल करने पर

$$\frac{x}{\sqrt{3}} = \sqrt{4-x^2}$$

⇒ $x^2 = 3(4 - x^2)$

⇒ $x^2 = 12 - 3x^2$

⇒ $x^2 + 3x^2 = 12$

⇒ $4x^2 = 12$

⇒ $x^2 = \frac{12}{4} = 3$

⇒ x = √3

अत: x का मान केवल धनात्मक लेने पर निम्न सीमा x = 0 तथा उच्च सीमा x = √3

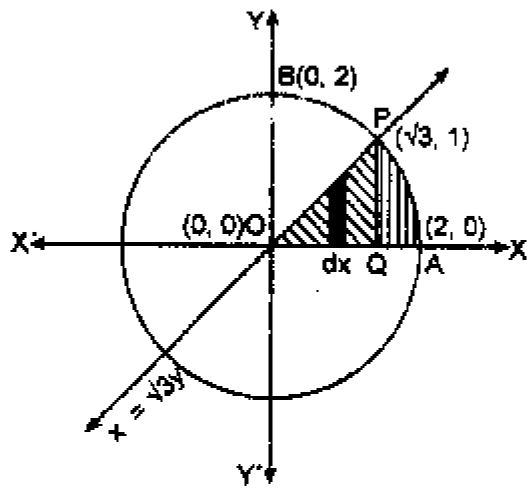
रेखा x = √3y मूल बिन्दु तथा विन्दु (√3,1) से जाती हैं।

अभीष्ट क्षेत्रफल

= OQP का क्षेत्रफल + QAP का क्षेत्रफल

= ∫y(रेखा के लिए) dx + ∫y(वृत्त के लिए) dx

$$= \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{\sqrt{3}}\, dx + \int_{\sqrt{3}}^{2} \sqrt{4-x^2}\, dx$$



$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\sqrt{3}} + \left[\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + \frac{4}{2}\sin^{-1}\frac{x}{2}\right]_{\sqrt{3}}^{2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\frac{(\sqrt{3})^2}{2} - 0\right] + \left(\frac{2}{2}\sqrt{4-4} - \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{4-3}\right) + \frac{4}{2}\left[\sin^{-1}\frac{2}{2} - \sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\left(\sin^{-1}1 - \sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= 2 \times \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} \text{ वर्ग इकाई।}$$

प्रश्न 4. वृत्त $x^2 + y^2 = 16$ व रेखा $y = x$ तथा x अक्ष के मध् यवर्ती प्रथम चतुर्थांश में स्थित क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

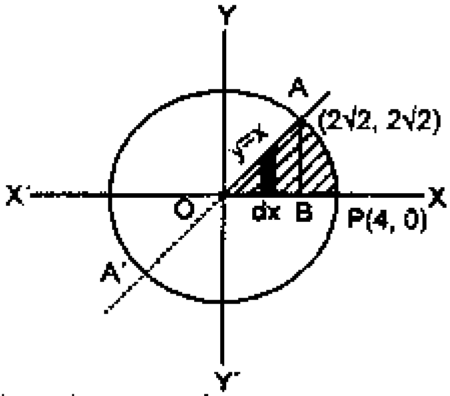
हल : वृत्त $x^2 + y^2 = 16$ का केन्द्र मूल बिन्दु तथा त्रिज्या 4 इकाई हैं।

रेखा $y = x$ मूल बिन्दु से गुजरती है तथा वृत्ते को A बिन्दु पर काटती हैं।

तब $x^2 + y^2 = 16$ एवं $y = x$ को हल करने पर

$x = 2\sqrt{2}$ प्राप्त होता है।

$\therefore$ A के निर्देशांक $(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$, P के निर्देशांक $(4, 0)$ तथा B के निर्देशांक $(2\sqrt{2}, 0)$ हैं।



अतः अभीष्ट क्षेत्रफल = क्षेत्रफल AOBA + क्षेत्रफल ABPA

$$= \int_0^{2\sqrt{2}} y\,dx + \int_{2\sqrt{2}}^{4} y\,dx$$

(y रेखा द्वारा) (y वृत्त द्वारा)

$$= \int_0^{2\sqrt{2}} x\,dx + \int_{2\sqrt{2}}^{4} \sqrt{16-x^2}\,dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{2\sqrt{2}} + \left[\frac{x}{2}\sqrt{16-x^2} + \frac{16}{2}\sin^{-1}\frac{x}{4}\right]_{2\sqrt{2}}^{4}$$

$$= \left(\frac{8}{2}-0\right) + [0 + 8.\sin^{-1}] - \left[\frac{2\sqrt{2}}{2}\sqrt{16-8} + 8\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

$$= 4 + \left[8\sin^{-1}1 - \sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2} - 8\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

$$= 4 + \left(8\frac{\pi}{2} - 4 - 8.\frac{\pi}{4}\right)$$

$= 4 + 4\pi - 4 - 2\pi$

$= 2\pi$ वर्ग इकाई

प्रश्न 5. परवलयों $y^2 = 4x$ तथा $x^2 = 4y$ के मध्यवर्ती उभयनिष्ठ क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : दिए गए परवलयों के समीकरण

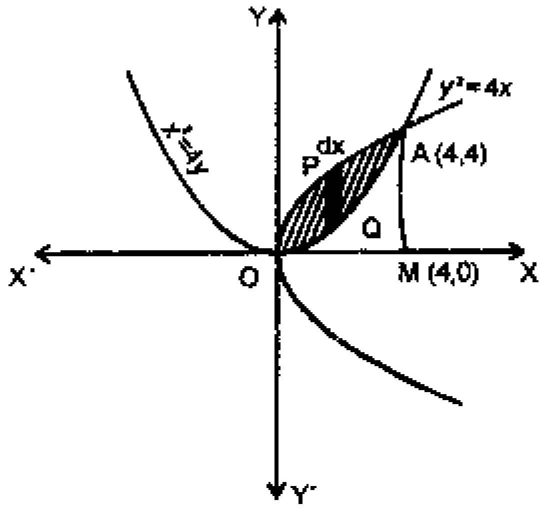
$y^2 = 4x$ ......(1)

$x^2 = 4y$ ...(2)

को हल करने पर, इनके प्रतिच्छेद बिन्दु (0, 0) तथा (4, 4) प्राप्त होते हैं।

अभीष्ट क्षेत्रफल = क्षेत्र OQAPO का क्षेत्रफल

= क्षेत्र OMAPO का क्षेत्रफल − क्षेत्र OMAQO का क्षेत्रफल



$= \int_0^4 y$ (परवलय $y^2 = 4x$ के लिए) dx

$- \int_0^4 y$(परवलय $x^2 = 4y$ के लिए) dx

$$= 2\int_0^4 \sqrt{x}\,dx - \int_0^4 \frac{x^2}{4}\,dx$$

$$= 2\left[\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_0^4 - \frac{1}{4}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^4$$

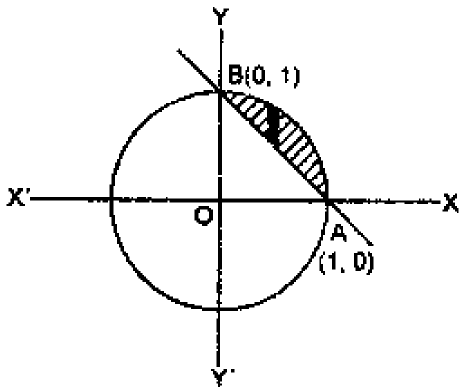
$$= 2\times\frac{2}{3}[4^{3/2}] - \frac{1}{4}\left[\frac{4^3}{3}\right]$$

$$= \frac{4}{3}\times 8 - \frac{16}{3}$$

$= \left(\frac{32}{3} - \frac{16}{3}\right) = \frac{16}{3}$ वर्ग इकाई।

प्रश्न 6. वक्र $x^2 + y^2 = 1$ व $x + y = 1$ के मध्यवर्ती प्रथम चतुर्थाश में स्थित क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : दिए वृत्त $x^2 + y^2 = 1$ का केन्द्र भूल विन्दु से गुजरता है तथा त्रिया 1 है। $x + y = 1$ सरल रेखा का समीकरण है जो कि बिन्दुओं (1, 0) एवं (0, 1) से गुरजती है।



अत: अभीष्ट क्षेत्रफल

$$= \int_0^1 y\,dx - \int_0^1 y\,dx$$

(y वृत्त से) (y सरल रेखा से)

$$= \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx - \int_0^1 (1-x)\,dx$$

($\because$ प्रथम पद में y धनात्मक)

$$= \left[\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\sin^{-1} x\right]_0^1 - \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1$$

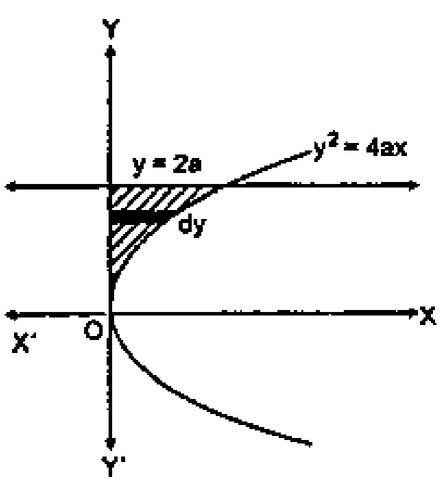
$$= \left[\left(0 + \frac{1}{2}\sin^{-1} 1\right) - 0\right] - \left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) - 0\right]$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{4}(\pi - 2)$$ वर्ग इकाई।

प्रश्न 7. वक्र $y^2 = 4ax$, रेखा $y = 2a$ एवं y-अक्ष के मध्यवर्ती क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : वक्र $y^2 = 4ax$ तथा रेखा $y = 2a$ का अनुरेखण करने पर, चित्र में प्रदर्शित झयांकित भाग अभीष्ट क्षेत्रफल को प्रदर्शित करता है।



अत: अभीष्ट क्षेत्रफल

$$= \int_0^{2a} x\, dy = \int_0^{2a} \frac{y^2}{4a}\, dy$$

$$= \frac{1}{4a}\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^{2a} = \frac{1}{12a}[8a^3 - 0]$$

$$= \frac{2a^2}{3} \text{ वर्ग इकाई।}$$

प्रश्न 8. वृत्त $x^2 + y^2 = 16$ के उस भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जो परवलय $y^2 = 6x$ के बाहर हो।

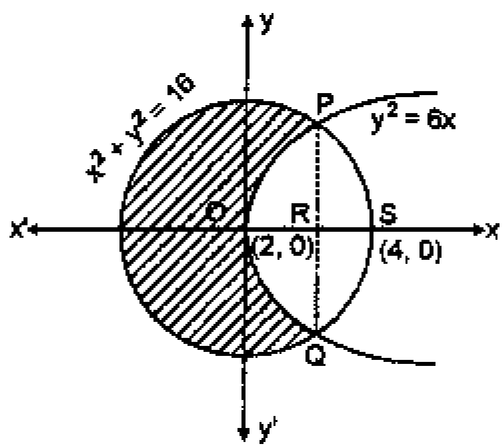
हल : दिये गये वृत्त $x^2 + y^2 = 16$ की त्रिज्या 4 इकाई है तथा यह मूल बिन्दु से गुजरता है। माना यह परवलय $y^2 = 6x$ को P व Q पर प्रतिच्छेदित करता है, तब दोनों समीकरणों को हल करने पर,

$x^2 + 6x = 16$ ($\because y^2 = 6x$)

$x^2 + 6x - 16 = 0$

$x + 8x - 2 - 16 = 0$

$(x + 8)(x - 2) = 0$



अत: $x = -8, +2$

यहाँ x का धनात्मक मान ही लेंगे।

अतः सीमा 0 तथा 2 और 2 तथा 4 लेंगे।

क्षेत्रफल POQSP

= 2 x क्षेत्रफल PORSP

= 2[क्षे. PORP + क्षे. PRSP]

$$= 2\left[\int_0^2 y\,dx \text{ (परवलय से)} + \int_2^4 y \text{ (वृत्त से) } dx\right]$$

$$= 2\int_0^2 \sqrt{6}x^{1/2}\,dx + 2\int_2^4 \sqrt{16-x^2}\,dx$$

$$= 2\sqrt{6} \times \frac{2}{3}(x^{3/2})_0^2 + 2 \times \frac{1}{2}\left[x\sqrt{16-x^2} + 16\sin^{-1}\frac{x}{4}\right]_2^4$$

$$= \frac{4\sqrt{6}}{3}(2^{3/2} - 0) + \left[0 + 16 \times \frac{\pi}{2} - 2 \times 2\sqrt{3} - 16 \times \frac{\pi}{6}\right]$$

$$= \frac{4\sqrt{6}}{3} \times 2\sqrt{2} + 8\pi - 4\sqrt{3} - \frac{8\pi}{3}$$

$$= \frac{16\sqrt{3}}{3} + \frac{16\pi}{3} - 4\sqrt{3}$$

$$= \left(\frac{4}{3}\sqrt{3} + \frac{16\pi}{3}\right) \text{ वर्ग इकाई}$$

सम्पूर्ण वृत्त का क्षेत्रफल

$= \pi r^2$

$= \pi \times 16 = 16\pi$

अतः अभीष्ट क्षेत्रफल $= 16\pi - \left(\frac{4}{3}\sqrt{3} + \frac{16\pi}{3}\right)$

$$= 16\pi - \frac{4\sqrt{3}}{3} - \frac{16\pi}{3}$$

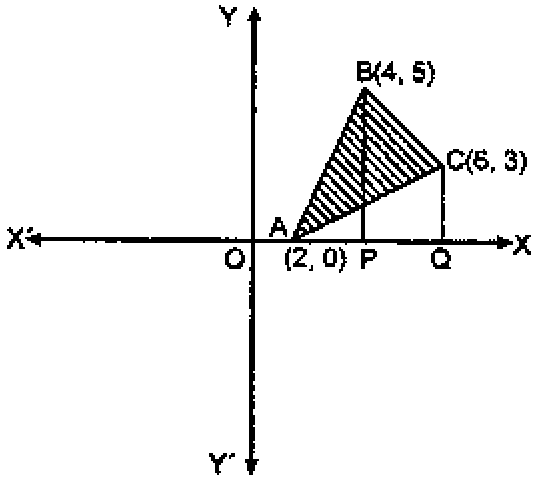
$$= \frac{32\pi}{3} - \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$= \frac{4}{3}(8\pi - \sqrt{3}) \text{ वर्ग इकाई।}$$

प्रश्न 9. समाकलन विधि का उपयोग करते हुए एक ऐसे त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्षों के निर्देशांक A(2, 0), B(4, 5) एवं C(6, 3) हैं।

हल : चित्र में ΔABC को छायांकित किया गया है।

ΔABC की भुजा AB का समीकरण,



$$y-0 = \frac{5-0}{4-2}(x-2)$$

या $$y = \frac{5}{2}(x-2)$$

BC का समीकरण,

$$y-5 = \frac{3-5}{6-4}(x-4)$$

$$y-5 = \frac{-2}{2}(x-4) = -(x-4)$$

या y = − x + 4 + 5

या y = − x + 9

AC का समीकरण,

$$y-3 = \frac{0-3}{2-6}(x-6)$$

या $$y-3 = \frac{-3}{-4}(x-6)$$

या $$y-3 = \frac{3}{4}x-\frac{9}{2}$$

या $$y = \frac{3}{4}x-\frac{9}{2}+3$$

या $$y = \frac{3}{4}x-\frac{3}{2}$$

या $$y = \frac{3}{4}(x-2)$$

ΔABC का क्षेत्रफल = ΔAPB का क्षेत्रफल + समलम्ब चतुर्भुज BPQC का क्षेत्रफल − ΔAQC का

क्षेत्रफल

$$= \int_2^4 \frac{5}{2}(x-2)\,dx + \int_4^6 (-x+9)\,dx - \int_2^6 \frac{3}{4}(x-2)\,dx$$

$$= \frac{5}{2}\int_2^4 (x-2)\,dx + \int_4^6 (-x+9)\,dx - \frac{3}{4}\int_2^6 (x-2)\,dx$$

$$= \frac{5}{2}\left[\frac{x^2}{2}-2x\right]_2^4 + \left[-\frac{x^2}{2}+9x\right]_4^6 - \frac{3}{4}\left[\frac{x^2}{2}-2x\right]_2^6$$

$$= \frac{5}{2}\left[\frac{4^2}{2}-\frac{2^2}{2}-2(4-2)\right] + \left[-\left(\frac{6^2}{2}-\frac{4^2}{2}\right)+9(6-4)\right] - \frac{3}{4}\left[\left(\frac{6^2}{2}-\frac{4}{2}\right)-2(6-2)\right]$$

$$= \frac{5}{2}[8-2-4]+[-(18-8)+9\times 2] - \frac{3}{4}[18-2-2\times 4]$$

$$= \frac{5}{2}[2]+[-10+18]-\frac{3}{4}[16-8]$$

$$= \frac{5}{2}\times 2+8-\frac{3}{4}\times 8 = 5+8-6$$

= 7 वर्ग इकाई।

प्रश्न 10. समाकलन विधि का उपयोग करते हुए ऐसे त्रिकोणीय क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये जिसकी भुजाओं के समीकरण $3x - 2y + 3 = 0$, $x + 2y - 7 = 0$ एवं $x - 2y + 1 = 0$ हैं।

हल : दी गई रेखाएँ

$3x - 2y + 3 = 0$ ...(1)

$x + 2y - 7 = 0$ ...(2)

तथा $x - 2y + 1 = 0$ ...(3)

समीकरण (1) व (2) को हल करने पर,

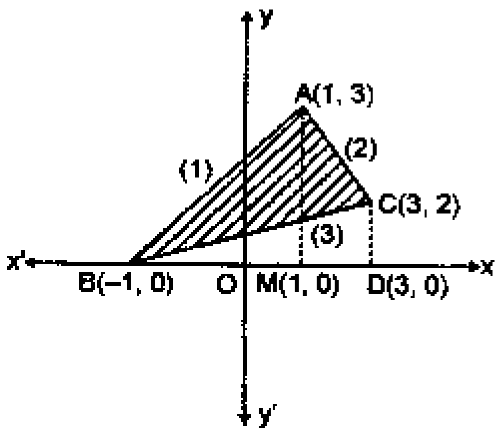
$x = 1, y = 3$

समीकरण (2) व (3) को हल करने पर,

$x = 3, y = 2$

समीकरण (3) व (1) को हल करने पर,

$x = -1, y = 0$



अब तीनों रेखाओं का ग्राफ खींचने पर,

अभीष्ट क्षेत्रफल

= क्षे. ABDCA − क्षे. CBDC

$$= \int_{-1}^{1} \frac{3}{2}(x+1)\,dx + \int_{1}^{3} \frac{1}{2}(-x+7)\,dx - \int_{-1}^{3} \frac{1}{2}(x+1)\,dx$$

$$= \frac{3}{2}\left[\frac{x^2}{2}+x\right]_{-1}^{1} + \frac{1}{2}\left[-\frac{x^2}{2}+7x\right]_{1}^{3} - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}+x\right]_{-1}^{3}$$

$$= \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}+1-\frac{1}{2}+1\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{9}{2}+21+\frac{1}{2}-7\right)$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{9}{2}+3-\frac{1}{2}+1\right)$$

$$= \frac{3}{2}(2)+\frac{1}{2}(10)-\frac{1}{2}(8)$$

= 3 + 5 − 4 = 4 वर्ग इकाई।

Miscellaneous Exercise

प्रश्न 1. वक्र $y = \sqrt{x}$ तथा $y = x$ से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल

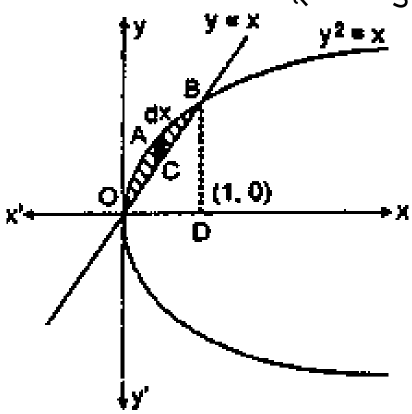
(a) 1 वर्ग इकाई

(b) $\frac{1}{9}$ वर्ग इकाई

(c) $\frac{1}{6}$ वर्ग इकाई

(d) $\frac{2}{3}$ वर्ग इकाई

हल : वक्र $y = \sqrt{x}$ एक परवलय है जिसका समीकरण $y^2 = x$ तथा केन्द्र मूल बिन्दु पर है। कार $y = x$ एक रेखा है जोकि मूल विन्दु से गुजरती है। इनका अनुरेण इस प्रकार है।



दोनों समीकरणों को हल करने पर,

$x = 0, x = 1$

अभीष्ट क्षेत्रफल = क्षे. OABCO

= क्षे. OABDO – क्षे. OBDO

$= \int_0^1 y\,dx - \int_0^1 y\,dx$

(परवलय के लिए) (रेखा के लिए)

$= \int_0^1 x^{1/2}\,dx - \int_0^1 x\,dx$

$= \frac{2}{3}[x^{3/2}]_0^1 - \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1$

$= \frac{2}{3} \times (1) - \left[\frac{1}{2}\right]$

$= \frac{2}{3} - \frac{1}{2}$

$= \frac{4-3}{6} = \frac{1}{6}$ वर्ग इकाई

अत: विकल्प (c) सही है।

प्रश्न 2. $y^2 = x$ तथा $x^2 = y$ से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल है :

(a) $\frac{1}{3}$ वर्ग इकाई

(b) 1 वर्ग इकाई

(c) $\frac{1}{2}$ वर्ग इकाई

(d) 2 वर्ग इकाई

हल : दिए गए परवलय के समीकरण

$y^2 = x$ ....(1)

$x^2 = y$ ....(1)

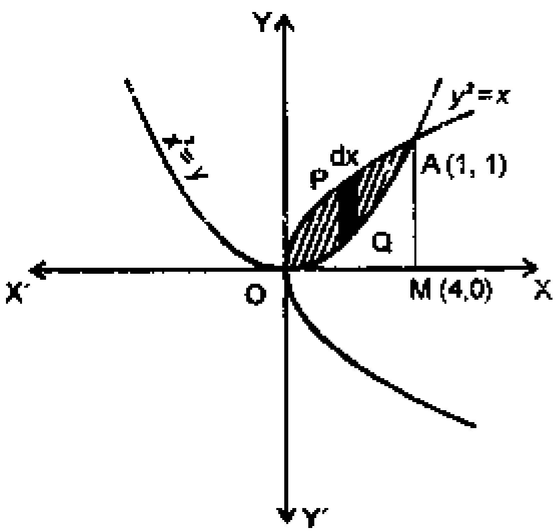
को हल करने पर, इनके प्रतिच्छेद बिन्दु (0, 0) तथा (4, 4) प्राप्त होते हैं।

अभीष्ट क्षेत्रफल = क्षेत्र OQAPO का क्षेत्रफल

= क्षेत्र OMAPO का क्षेत्रफल − क्षेत्र OMAQO का क्षेत्रफल

$$= \int_0^1 y\,dx \qquad - \qquad \int_0^1 y\,dx$$

(परवलय $y^2 = x$ के लिए) (परवलय $x^2 = y$ के लिए)



$$= \frac{2}{3}\left[x^{3/2}\right]_0^1 - \frac{1}{3}\left[x^3\right]_0^1$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \text{ वर्ग इकाई}$$

अत: विकल्प (a) सही है।

प्रश्न 3. परवलय $x^2 = 4y$ तथा इसकी नाभिलम्ब से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल है

(a) $\frac{5}{3}$ वर्ग इकाई

(b) $\frac{2}{3}$ वर्ग इकाई

(c) $\frac{4}{3}$ वर्ग इकाई

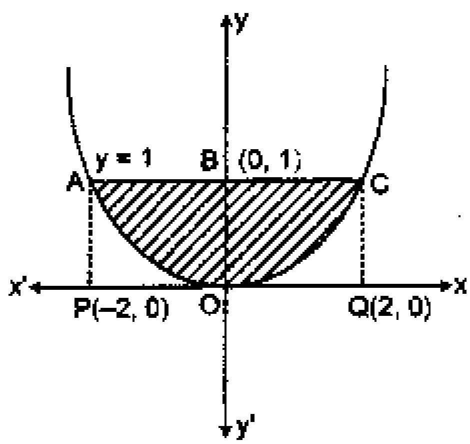
(d) $\frac{8}{3}$ वर्ग इकाई

हल : परवलय $x^2 = 4y$ का अनुरेखण इस प्रकार है :

यहाँ $a = 1$

अतः नाभिलम्ब y-अक्ष को (0, 1) पर प्रतिच्छेदित करता है।

अभिलम्ब के समीकरण $y = 1$ तथा परवलय के समीकरण $x^2 = 4y$ को हल करने पर, $x = \pm 2$



अभीष्ट क्षेत्रफल = से AOCBA

= 2[क्षे. OQCBO – क्षे. OQCO]

$$= 2\left[\int_0^2 y\,dx(\text{रेखा के लिए}) - \int_0^2 y\,dx(\text{परवलय के लिए})\right]$$

$$= 2\left[\int_0^2 1\,dx - \int_0^2 \frac{x^2}{4}\,dx\right] = 2\left[[x]_0^2 - \frac{1}{4\times 3}[x^3]_0^2\right]$$

$$= 2\left[2 - \frac{1}{4\times 3}\times 8\right] = 2\left[2 - \frac{2}{3}\right] = \frac{8}{3} \text{ वर्ग इकाई}$$

अत: विकल्प (d) सही है।

प्रश्न 4. $y = \sin x$,

$$\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}$$

तथा x-अक्ष से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल हैं

(a) 1 वर्ग इकाई

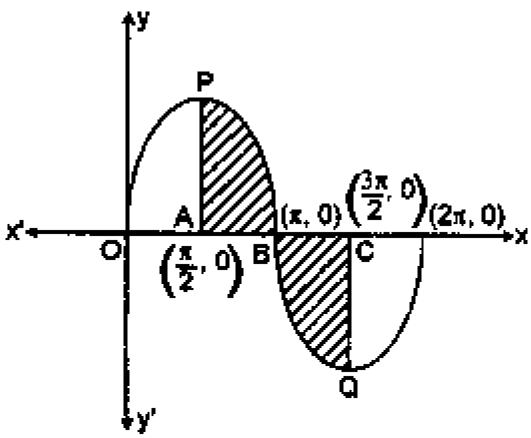
(b) 2 वर्ग इकाई

(c) $\frac{1}{2}$ वर्ग इकाई

(d) 4 वर्ग इकाई

हल : वक्र y = sin x तथा x = π/2 एवं x = 3π/2 से घिरे क्षेत्रफल को चित्र में स्त्रयांकित किया गया है। x के विभिन्न मानों के लिए y = sin x की साराणी नीचे दी गई है।

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	0	$\frac{1}{2}=0{\cdot}5$	$\frac{1}{\sqrt{2}}=0{\cdot}7$	$\frac{\sqrt{3}}{2}=0{\cdot}8$	1	0	-1	0



अभीष्ट क्षेत्रफल = क्षे. PABP का क्षेत्रफल + क्षे. QBCQ का क्षेत्रफल

$$= \int_{\pi/2}^{\pi} y\,dx + \int_{\pi}^{3\pi/2} (-y)\,dx$$

$$= \int_{\pi/2}^{\pi} \sin x\,dx + \int_{\pi}^{3\pi/2} \sin x\,dx$$

$$= [-\cos x]_{\pi/2}^{\pi} + [\cos x]_{\pi}^{3\pi/2}$$

$$= -\left[\cos \pi - \cos \frac{\pi}{2}\right] + \left(\cos \frac{3\pi}{2} - \cos \pi\right)$$

= -(-1 − 0) + [0 − (-1)]

= +1+1

= 2 वर्ग इकाई

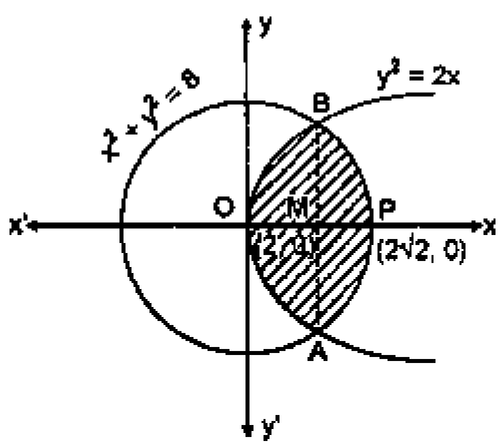
अत: विकल्प (b) सही है।

प्रश्न 5. $y^2 = 2x$ तथा वृत्त $x^2 + y^2 = 8$ से परिबद्ध का क्षेत्रफल

(a) $\left(2\pi + \frac{4}{3}\right)$ वर्ग इकाई (b) $\left(\pi + \frac{2}{3}\right)$ वर्ग इकाई

(c) $\left(4\pi + \frac{4}{3}\right)$ वर्ग इकाई (d) $\left(\pi + \frac{4}{3}\right)$ वर्ग इकाई

हल : दिए गए समीकरण परवलय $y^2 = 2x$ जिसका केन्द्र (0, 0) तथा वृत्त जिसका केन्द्र (0, 0) व प्रिया $2\sqrt{2}$ इकाई है, को प्रदर्शित करते हैं। इनका ग्राफ (अनुरेखण) इस प्रकार है तथा इनसे परिबद्ध क्षेत्र छायांकित किया गया है।



समीकरण $y^2 = 2x$ तथा $x^2 + y^2 = 8$ को इल करने पर,

$x = -4, 2$

अतः $x = 2$ प्रथम चतुर्थाश में लेते हैं।

अभीष्ट क्षेत्रफल = क्षेत्रफल OAPBO

− 2 x क्षे. OMPBO

= 2 x (क्षेत्रफल OMBO + क्षेत्रफल PMBP)

$$= 2\left[\int_0^2 y\,dx + \int_2^{2\sqrt{2}} y\,dx\right]$$

(परवलय) (वृत्त)

$$= 2\left[\sqrt{2}\int_0^2 x^{1/2}\,dx + \int_2^{2\sqrt{2}} \sqrt{8-x^2}\,dx\right]$$

$$= 2\left[\sqrt{2}\times\frac{2}{3}(x^{3/2})_0^2 + \frac{1}{2}\left\{x\sqrt{8-x^2} + 8\sin^{-1}\frac{x}{2\sqrt{2}}\right\}_2^{2\sqrt{2}}\right]$$

$$= 2\left[\frac{2\sqrt{2}}{3}\times 2\sqrt{2} + \frac{1}{2}\left\{0 + 8\times\frac{\pi}{2} - 2\sqrt{4} - 8\times\frac{\pi}{4}\right\}\right]$$

$$= 2\left[\frac{8}{3} + \frac{1}{2}(2\pi - 4)\right] = 2\left[\frac{8}{3} + \pi - 2\right]$$

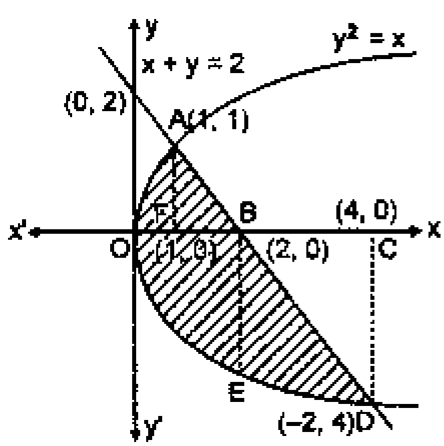
$$= 2\left[\frac{8-6}{3} + \pi\right] = 2\left[\frac{2}{3} + \pi\right]$$

$$= \left(\frac{4}{3} + 2\pi\right) \text{ वर्ग इकाई}$$

अतः विकल्प (a) सही है।

प्रश्न 6. परवलय $y^2 = x$ तथा रेखा $x + y = 2$ के मध्यवर्ती क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : परवलय $y^2 = x$ तथा $x + y = 2$ का अनुरेखण करने पर अभीष्ट क्षेत्रफल को अयांकित भाग चित्रानुसार प्रदर्शित करता है।



दोनों समीकरणों को हल करने पर,

$(-x + 2)^2 = x$

$\Rightarrow x^2 + 4 - 4x - x = 0$
$\Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$
$\Rightarrow x^2 - 4x - x + 4 = 0$
$\Rightarrow x(x - 4) - 1(x - 4) = 0$
$\Rightarrow (x - 4)(x - 1) = 0$

अत: $x = 1, 4$

$x = 1$ पर $y = 1$ तथा $x = 4$ पर $y = -2$ प्राप्त होते हैं।

अत: प्रतिच्छेदन विन्दु (-2, 4) हैं।

अत: अभीष्ट्र क्षेत्रफल

$$= \int_{-2}^{1} (x_1 - x_2)\, dy$$

$$= \int_{-2}^{1} (2 - y - y^2)\, dy$$

$$= \int_0^1 x^{1/2}\, dx + \int_1^2 (-x + 2)\, dx + \int_0^2 x^{1/2}\, dx + \int_2^4 x^{1/2}\, dx - \int_2^4 (-x + 2)\, dx$$

$$= \left[\left(2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(-4 - 2 + \frac{8}{3}\right)\right]$$

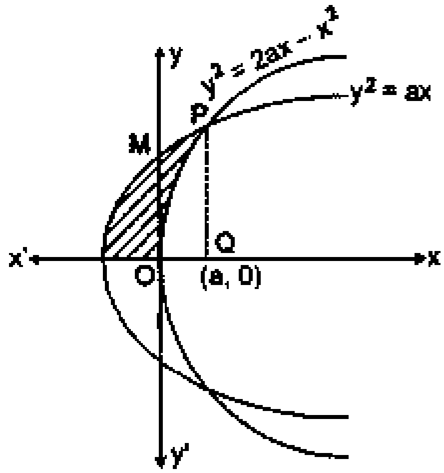
$$= \frac{7}{6} + \frac{10}{3}$$

$$= \frac{27}{6}$$

अतः अभीष्ट क्षेत्रफल = $\frac{9}{2}$ वर्ग इकाई ।

प्रश्न 7. प्रथम चतुर्थांश में वक्रों $y^2 = 2ax - x^2$ व $y^2 = ax$ के मध्यवर्ती क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : वक्रों $y^2 = 2ax - x^2$ तथा $y^2 = ax$ का अनुरेखण करने पर छायांकित भाग अभीष्ट क्षेत्रफल को प्रदर्शित करता है।



दोनों समीकरणों को हल करने पर,
x = 0, a
अभीष्ट क्षेत्रफल = क्षे. OPMO
= क्षे. OMPQO – क्षे. POQP

$$= \int_0^a y\,dx \quad - \quad \int_0^a y\,dx$$

(परवलय $y^2 = 2ax - x^2$ से) (परवलय $y^2 = ax$ से)

$$= \int_0^a \sqrt{2ax - x^2}\,dx - \sqrt{a}\int_0^a x^{1/2}\,dx$$

$$= \int_0^a \sqrt{a^2 - (x-a)^2}\,dx - \frac{2\sqrt{a}}{3}[x^{3/2}]_0^a$$

$$= \frac{1}{2}\left[(x-a)\sqrt{a^2-(x-a)^2} + a^2\sin^{-1}\frac{x-a}{a}\right]_0^a - \frac{2a^2}{3}$$

$$= \frac{1}{2}(0-0) - \left(0 - a^2 \times \frac{\pi}{2}\right) - \frac{2a^2}{3}$$

$$= \frac{\pi a^2}{4} - \frac{2a^2}{3}$$

$$= a^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}\right) \text{ वर्ग इकाई।}$$

प्रश्न 8. परबलव $y = x^2$ तथा $y = |x|$ के प्रयवी क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : वक्र $y = x^2$ एक परवलय है किसका शौर्ष (0, 0) तथा यह y-अक्ष के सममित है।
समीकरण $y = |x|$ दो रेखाओं को निपत करता है।

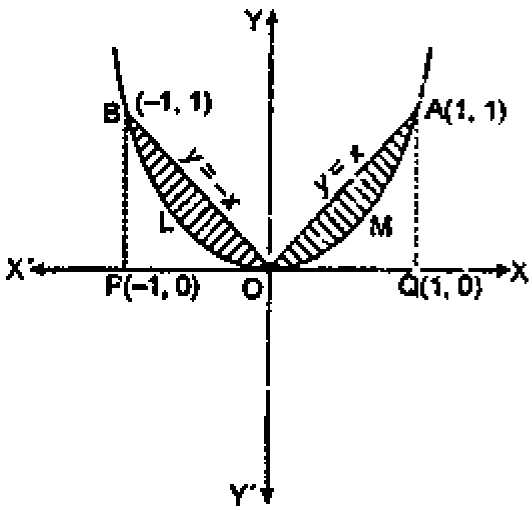
जब $x>0$, तब $y = x$

जब $x<0$, तब $y = -x$

रेखा $y = x$ तथा परवलय $y = x^2$ के प्रतिच्छेद बिन्दु O(0, 0) तथा A(1, 1)

रेखा $y = -x$ तथा परवलय $y = x^2$ के प्रतिध्द विन्दु O(0, 0) तथा B(- 1, 1) हैं।

रेखाओं $y = x$ तथा $y = -x$ और परवयं $y = x^2$ से घिरे क्षेत्र को पत्र में छायांकित किया गया है।



अभीष्ट क्षेत्रफल = क्षेत्र BLOMA का क्षेत्रफल

= 2 x OMA का क्षेत्रफल

= 2 [ΔOQA का क्षेत्रफल − क्षेत्र OMAQO का क्षेत्रफल]

$$= \int y \text{ (रेखा } y = x \text{ के लिए) } dx - \int y \text{ (परवलय } y = x^2 \text{ के लिए) } dx$$

$$= 2\int_0^1 x\,dx - 2\int_0^1 x^2\,dx$$

$$= 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1$$

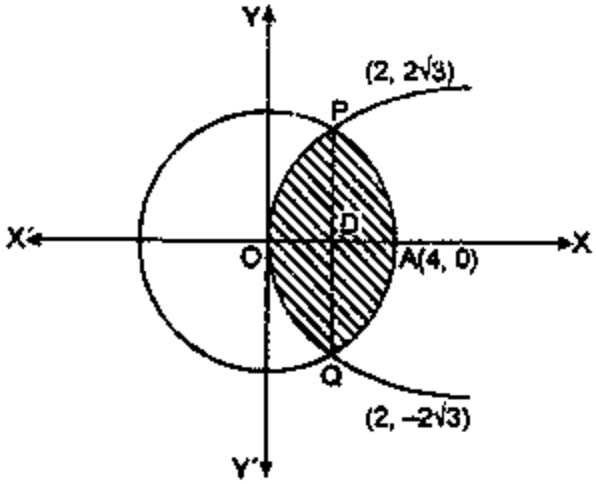
$$= 2\left[\frac{1}{2} - 0\right] - 2\left[\frac{1}{3} - 0\right]$$

$$= 2\times\frac{1}{2} - 2\times\frac{1}{3} = 1 - \frac{2}{3}$$

$$= \frac{1}{3} \text{ वर्ग इकाई।}$$

प्रश्न 9. वृत्त $x^2 + y^2 = 16$ तथा परवलय $y^2 = 6x$ के मध्यवर्ती उभयनिष्ठ क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : वृत्त $x^2 + y^2 = 16$ का केन्द्र मूल विन्दु तथा त्रिज्या 4 इकाई है। परवलय $y^2 = 6x$ का शीर्ष मूल बिन्दु है। इन वक्रों का उभयनिष्ठ धोत्र चित्र में रेखांकित किया गया है। दोनों वक़ बिन्दुओं P तथा Q पर एक-दूसरे को प्रतिच्छेद करते हैं। इन बिन्दुओं के निर्देशांकों को वक़ों के समीकरणों को हल करके प्राप्त किया जा सकता है।



वक़ के समीकरण $x^2 + y^2 = 16$ ...(1)

$y^2 = 6x$ .....(2)

समीकरण (2) से $y^2 = 6x$ समीकरण (1) में रखने पर,

$x^2 + 6x = 16$

या $x^2 + 6x - 16 = 0$

या $x^2 + 8x - 2x - 16 = 0$

या $(x + 8) - 2(x + 8) = 0$

या $(x + 8)(x - 2) = 0$

या $x + 8 = 0$ या $x - 2 = 0$

$x = -8$ या $x = 2$

जब $x = -8$ तब समीकरण (2) से,

$y^2 = 6 \times (-8) = -48$

$\because y = \pm\sqrt{-48}$ जो कि वास्तविक नहीं है।

जब $x = 2$ तब समीकरण (2) से,

$y^2 = 6 \times 2 = 12$

$\therefore y = \pm 2\sqrt{3}$

अतः बिन्दुओं P तथा Q के निर्देशांक क्रमशः $(2, 2\sqrt{3})$ तुषा $(2, -2\sqrt{3})$ हैं।

दोनों वक्र x-अक्ष के सममित हैं।

∴ अभीष्ट क्षेत्रफल = क्षेत्र OQAPO का क्षेत्रफल

= 2 x ODAPO का क्षेत्रफल

= 2[क्षेत्र ODPO का क्षेत्रफल + क्षेत्र DAPD का क्षेत्रफल]

= 2 ∫| (y परवलय के लिए) | dx + ∫| (y वृत्त के लिए) | dx

$$= 2\left[\int_0^2 \sqrt{6x}\,dx + \int_2^4 \sqrt{16-x^2}\,dx\right]$$

$$= 2\left[\sqrt{6}\int_0^2 \sqrt{x}\,dx + \int_2^4 \sqrt{16-x^2}\,dx\right]$$

$$= 2\left[\sqrt{6}\left\{\frac{x^{3/2}}{3/2}\right\}_0^2\right] + 2\left[\frac{x}{2}\sqrt{16-x^2} + \frac{16}{2}\sin^{-1}\frac{x}{4}\right]_2^4$$

$$= 2\sqrt{6}\times\frac{2}{3}[2^{3/2}-0]$$

$$+ 2\left[\frac{4}{2}\sqrt{16-16} + 8\sin^{-1}\frac{4}{4}\right.$$

$$\left. - \left\{\frac{2}{2}\sqrt{16-4} + 8\sin^{-1}\frac{2}{4}\right\}\right]$$

$$= \frac{4}{3}\sqrt{6}\times 2\sqrt{2} + 2\left[2\times 0 + 8\sin^{-1}1 - \left\{\sqrt{12} + 8\sin^{-1}\frac{1}{2}\right\}\right]$$

$$= \frac{8}{3}\sqrt{12} + 16\sin^{-1}1 - 2\sqrt{12} - 16\sin^{-1}\frac{1}{2}$$

$$= \frac{16}{3}\sqrt{3} + 16\times\frac{\pi}{2} - 4\sqrt{3} - 16\times\frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{16\sqrt{3}}{3} - 4\sqrt{3} + 8\pi - \frac{8\pi}{3}$$

$$= \frac{16\sqrt{3}-12\sqrt{3}}{3} + \frac{16\pi}{3}$$

$$= \left(\frac{4\sqrt{3}}{3} + \frac{16\pi}{3}\right)$$

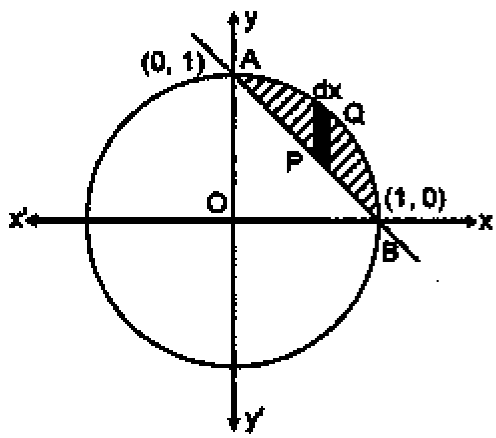
$$= \frac{4}{3}(\sqrt{3}+4\pi)\ \text{वर्ग इकाई।}$$

प्रश्न 10.

वक्र $x^2 + y^2 = 1$ तथा $x + y \geq 1$ से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल :

वृत्त का समीकरण $x^2 + y^2 = 1$ तथा रेखा $x + y \geq 1$ से परिबद्ध क्षेत्र चित्र में अयांकित किया गया है।



अभीष्ट क्षेत्रफल = क्षेत्रफल APBQA

$= \frac{1}{4} \times$ **वृत्त का क्षेत्रफल – क्षेत्रफल** $AOBA$

$= \frac{1}{4} \times \pi r^2 -$ क्षे. $AOBA$

$= \frac{1}{4} \times \pi \times 1^2 - \int_0^1 y\, dx \qquad [\because \quad r = 1]$

$= \frac{\pi}{4} - \int_0^1 (1-x)\, dx$

$= \frac{\pi}{4} - \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1$

$= \frac{\pi}{4} - \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$

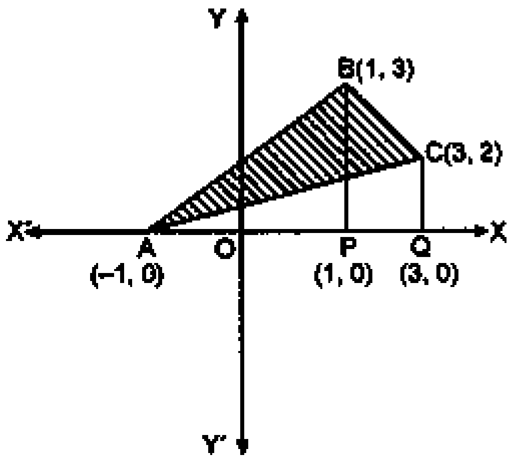
$= \left(\frac{\pi - 2}{4}\right)$ **वर्ग इकाई।**

प्रश्न 11.

समाकलन का उपयोग करते हुए एक ऐसे त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष (-1, 0), (1, 3) एवं (3, 2) हैं।

हल :

त्रिभुज का आलेख चित्र में प्रदर्शित है। अभीष्ट क्षेत्रफल छायांकित किया गया है।



अभीष्ट क्षेत्रफल = ΔABC का क्षेत्रफल

= ΔABP का क्षेत्रफल + समलम्ब चतुर्भुज BPQC का क्षेत्रफल – ΔAQC का क्षेत्रफल ...(1)

रेखा (भुजा) AB का समीकरण

$$y - 0 = \frac{3-0}{1-(-1)}[x-(-1)]$$

या $$y = \frac{3}{2}(x+1) \qquad ...(2)$$

रेखा (भुजा) BC का समीकरण

$$y - 3 = \frac{2-3}{3-1}(x-1)$$

या $$y - 3 = -\frac{1}{2}(x-1)$$

या $$y = -\frac{1}{2}(x-1)+3 = -\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}+3$$

या $$y = -\frac{1}{2}x+\frac{7}{2} \qquad ...(3)$$

रेखा (भुजा) CA का समीकरण

$$y-2 = \frac{0-2}{-1-3}(x-3)$$

या $$y-2 = \frac{-2}{-4}(x-3)$$

या $$y-2 = \frac{1}{2}(x-3)$$

या $$y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} + 2 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

या $$y = \frac{1}{2}(x+1) \qquad \text{...(4)}$$

अब ΔABP का क्षेत्रफल = ∫(y रेखा AB के लिए) dx

$$= \int_{-1}^{1} \frac{3}{2}(x+1)\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{3}{2}(x+1)\,dx = \frac{3}{2}\left[\frac{x^2}{2} + x\right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{3}{2}\left[\left(\frac{1}{2}+1\right) - \left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 1\right\}\right]$$

$$= \frac{3}{2}\left[\frac{3}{2} - \left\{\frac{1}{2} - 1\right\}\right]$$

$$= \frac{3}{2}\left[\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right]$$

$$= \frac{3}{2} \times \frac{4}{2} = 3 \text{ वर्ग इकाई} \qquad \text{...(5)}$$

समलम्ब चतुर्भुज BPQC का क्षेत्रफल

= ∫ (y रेखा BC के लिए) dx

$$= \int_{1}^{3} \left[-\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}\right] dx$$

$$= \int_{1}^{3} \frac{7}{2}\,dx - \frac{1}{2}\int_{1}^{3} x\,dx$$

$$= \frac{7}{2}\int_{1}^{3} dx - \frac{1}{2}\int_{1}^{3} x\,dx$$

$= \frac{7}{2}[x]_1^3 - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^3$

$= \frac{7}{2}(3-1) - \frac{1}{2}\left(\frac{9}{2} - \frac{1}{2}\right)$

$= \frac{7}{2} \times 2 - \frac{1}{2} \times \frac{8}{2}$

= 7 – 2 = 5 वर्ग इकाई।

त्रिभुज AQC का क्षेत्रफल

= ∫ (y रेखा AC के लिए) dx

$= \int_{-1}^{3} \frac{1}{2}(x+1)\,dx$

$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{3} x + \frac{1}{2}\int_{-1}^{3} dx$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{3} + \frac{1}{2}[x]_{-1}^{3}$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{9}{2} - \frac{(-1)^2}{2}\right] + \frac{1}{2}[3-(-1)]$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{9}{2} - \frac{1}{2}\right] + \frac{1}{2} \times 4 = \frac{1}{2} \times \frac{8}{2} + \frac{1}{2} \times 4$

= 2 + 2 = 4 वर्ग इकाई।

अब समीकरण (1) में ΔABP के क्षेत्रफल, समलम्ब चतुर्भुज BPAQ के क्षेत्रफल तथा ΔAQC के क्षेत्रफल के मान रखने पर,

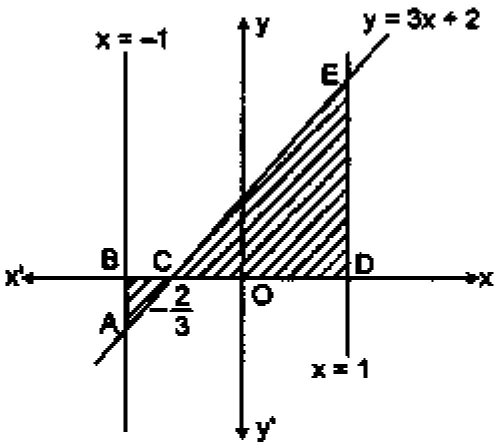
अभीष्ट ΔABC का क्षेत्रफल

= 3 + 5 = 4 = 4 वर्ग इकाई

∴ ΔABC का क्षेत्रफल = 4 वर्ग इकाई।

प्रश्न 12. रेखा y = 3x + 2, x-अक्ष एवं कोटियों x = -1 तथा x = 1 से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : रेखा y = 3x + 2, x-अक्ष तथा कोटियों x = -1 व x = 1 से घिरा क्षेत्र छायांकित करके चित्र में प्रदर्शित है।



अभीष्ट क्षेत्रफल = क्षे. ACBA + क्षे. CDEC

$$= \int_{-1}^{-2/3} y\,dx + \int_{-2/3}^{1} y\,dx$$

$$= \int_{-1}^{-2/3} (3x+2)\,dx + \int_{-2/3}^{1} (3x+2)\,dx$$

$$= \left[\frac{3x^2}{2} + 2x\right]_{-1}^{-2/3} + \left[\frac{3x^2}{2} + 2x\right]_{-2/3}^{1}$$

$$= \left\{\left(\frac{3}{2}\times\frac{4}{9} - \frac{4}{3}\right) - \left(\frac{3}{2} - 2\right)\right\}$$

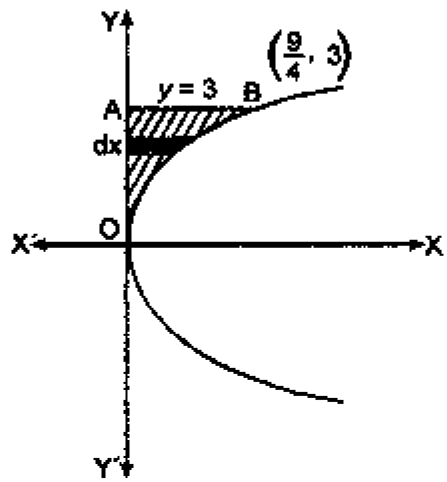
$$+ \left\{\left(\frac{3}{2}\times 1 + 2\times 1\right) - \left(\frac{3}{2}\times\frac{4}{9} - \frac{4}{3}\right)\right\}$$

$$= \left(-\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{7}{2} + \frac{2}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{7}{2} = \frac{8}{2} = 4$$ **वर्ग इकाई।** **उत्तर**

प्रश्न 13. $y^2 = 2x$, $y = 4x - 1$ व $y \geq 0$ के मध्यवर्ती क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : परवलय $y^2 = 2x$, रेखा $y = 4x - 1$ तथा $y \geq 0$ के मध्यवर्ती क्षेत्र को चित्र में यांकित किया गया है।



समी. $y^2 = 2x$ तथा $y = 4x - 1$ को हल करने पर
बिन्दु $(0, -1)$ तथा $(\frac{1}{2}, 1)$ प्राप्त होते हैं।
अभीष्ट क्षेत्रफल = क्षे. OABCO
= क्षे. OAMO – क्षे. NAMN

$$= \int_0^3 x(\text{वक्र के लिए})\, dy = \int_0^3 \frac{y^2}{4}\, dy$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^3 y^2\, dy = \frac{1}{4}\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^3$$

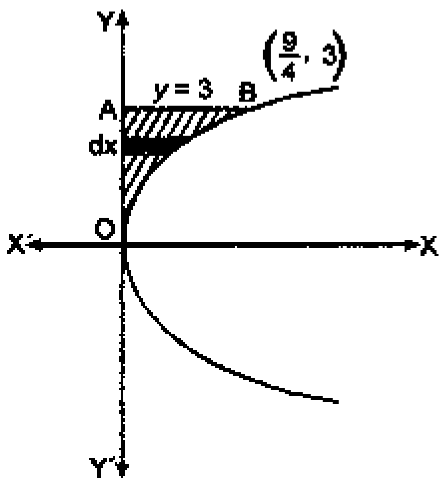
$$= \frac{1}{4}\left[\frac{3^3}{3} - 0\right]$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{27}{3} = \frac{1}{4} \times 9$$

$$= \frac{9}{4} \text{ वर्ग इकाई।}$$

प्रश्न 14. वक्र $y^2 = 4x$, y-अक्ष एवं रेखा $y = 3$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है।

हल : वक्र $y^2 = 4x$ एक परवलय है जिसका शीर्ष मूल बिन्दु है और यह x-अक्ष के सममित है। वक्र $y^2 = 4x$, y-अक्ष तथा रेखा $y = 3$ से घिरा क्षेत्र चित्र में रेखांकित भाग से दिखाया गया है जो कि AOBA है।



∴ अभीष्ट क्षेत्रफल AOBA

$$= \int_0^3 x(\text{वक्र के लिए})\, dy = \int_0^3 \frac{y^2}{4}\, dy$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^3 y^2\, dy = \frac{1}{4}\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^3$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{3^3}{3} - 0\right]$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{27}{3} = \frac{1}{4} \times 9$$

$$= \frac{9}{4} \text{ वर्ग इकाई।}$$

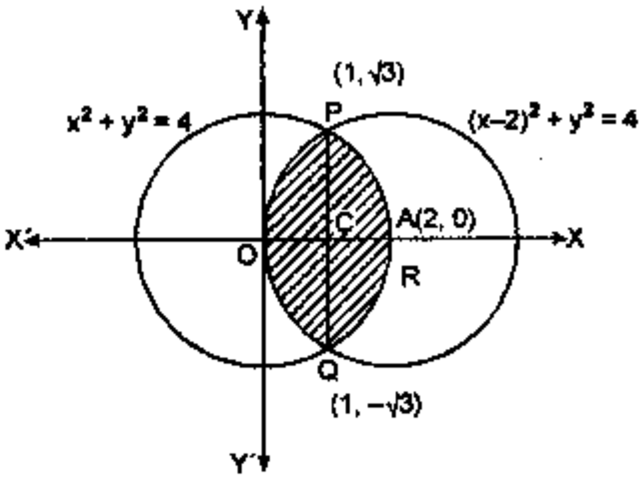
प्रश्न 15. दो वृत्तों $x^2 + y^2 = 4$ तथा $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ के मध्यवर्ती क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : दिए गए वृत्तों के समीकरण

$x^2 + y^2 = 4$ ...(1)

तथा $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ ...(2)

समीकरण (1) से प्रदर्शित वृत्त का केन्द्र मूलबिन्दु (0, 0) तथा त्रिज्या 2 इकाई है। समीकरण (2) से प्रदर्शित वृत्त का केन्द्र (2, 0) x-अक्ष पर है तथा इसकी त्रिज्या भी 2 इकाई है। दोनों वृक्षों के मध्यवर्ती क्षेत्र को चित्र में अयांकित किया गया है।



समीकरण (1) तथा (2) को हल करने पर,

वृत्त के प्राप्त प्रतिच्छेद बिन्दु $P(1,\sqrt{3})$ तथा $Q(1, -\sqrt{3})$ हैं।

दोनों वृत्त x-अक्ष के सममित हैं।

∴ अभीष्ट क्षेत्रफल

= 2(क्षे. OPACO) = 2 [क्षे. OPCO + क्षे. CPAC]

= 2[क्षेत्र OPCO (वृत्त $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ का भाग) + क्षेत्र CPAC (वृत्त $x^2 + y^2 = 4$ का भाग)

∴ अभीष्ट क्षेत्रफल

= $2\int y\, dx$ (वृत्त $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ के लिए) + $\int y\, dx$ (वृत्त $x^2 + y^2 = 4$ के लिए)

$$= 2\left[\int_0^1 \sqrt{4-(x-2)^2}\, dx + \int_1^2 \sqrt{4-x^2}\, dx\right]$$

$$= 2\left[\left\{\left(\frac{x-2}{2}\right)\sqrt{4-(x-2)^2} + \frac{4}{2}\sin^{-1}\frac{(x-2)}{2}\right\}_0^1\right.$$

$$+\left\{\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+\frac{4}{2}\sin^{-1}\frac{x}{2}\right\}_1^2\Bigg]$$

$$= 2\left\{\frac{1-2}{2}\sqrt{4-(1-2)^2}+\frac{4}{2}\sin^{-1}\frac{1-2}{2}\right\}$$

$$-\left\{\left(\frac{0-2}{2}\right)\sqrt{4-(0-2)^2}+\frac{4}{2}\sin^{-1}\frac{0-2}{2}\right\}$$

$$+\left\{\frac{2}{2}\sqrt{4-4}+\frac{4}{2}\sin^{-1}\frac{2}{2}\right\}$$

$$-\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{4-3}+\frac{4}{2}\sin^{-1}\frac{\sqrt{1}}{2}\right\}\Bigg]$$

$$= 2\Bigg[-\frac{1}{2}\sqrt{4-1}+\frac{4}{2}\sin^{-1}\left(\frac{-1}{2}\right)+\sqrt{4-4}-\frac{4}{2}\sin^{-1}(-1)$$

$$+\frac{4}{2}\sin^{-1}1-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{4}{2}\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}\Bigg]$$

$$= 2\Bigg[-\frac{1}{2}\times\sqrt{3}-\frac{4}{2}\sin^{-1}\frac{1}{2}+\frac{4}{2}\sin^{-1}1$$

$$+\frac{4}{2}\sin^{-1}1-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{4}{2}\sin^{-1}\frac{1}{2}\Bigg]$$

$$= 2\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{4}{2}\times\frac{\pi}{6}+\frac{4}{2}\times\frac{\pi}{2}+\frac{4}{2}\times\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{4}{2}\times\frac{\pi}{6}\right]$$

$$= 2\left[-\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}+\pi+\pi-\frac{\pi}{3}\right]$$

$$= 2\left[-\sqrt{3}-\frac{2\pi}{3}+2\pi\right] = 2\left[\frac{6\pi-2\pi}{3}-\sqrt{3}\right] = 2\left[\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}\right]$$

$= \left(\frac{8\pi}{3}-2\sqrt{3}\right)$ वर्ग इकाई।