व्युत्क्रम आव्यूह एवंरैखिक समीकरण

Ex 5.1

प्रश्न 1. x के किस मान के लिए आव्यूह

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ x & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

अव्युत्क्रमणीय है।

हल : दिया है कि आव्यूह

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ x & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

अव्युत्क्रमणीय है।

तब

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ x & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow 1(6 - 2) + 2(3 - x) + 3(2 - 2x) = 0$

$\Rightarrow 4 + 6 - 2x + 6 - 6x = 0$

$\Rightarrow -8x = -16$

$\Rightarrow x = \frac{16}{8}$

अतः $x = 2$

प्रश्न 2. यदि आव्यूह

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

हो, तो adj•A ज्ञात कीजिए तथा सिद्ध कीजिए कि $A(\text{adj}\cdot A) = |A|I_3 = (\text{adj}\cdot A)A$.

हल : दिया गया आव्यूह,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

आव्यूह A के सहखण्ड ज्ञात करने पर,

$$a_{11} = +\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$a_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -11$$

$$a_{13} = +\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$a_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3$$

$$a_{22} = +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1$$

$$a_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

$$a_{31} = +\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2$$

$$a_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 8$$

$$a_{33} = +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3$$

आव्यूह A के सहखण्डों से बना आव्यूह,

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -11 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

अब $\quad \text{adj} A = B^T = \begin{bmatrix} 0 & -11 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 8 & 3 \end{bmatrix}^T$

अत:, $\quad \text{adj} A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -11 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

$\because \quad |A| = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

$$= 1(0-0) + 1(9+2) + 2(0-0)$$

$$|A| = 11$$

अब $$A.(\text{adj}.A) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -11 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 11 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}$$

$$A.(\text{adj}.A) = 11 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

अतः $A.(\text{adj}.A) = |A| I_3$ ...(i)

पुनः $$(\text{adj}.A)A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -11 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 11 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}$$

$$(\text{adj}.A)A = 11 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

अतः A.(adj.A) = $|A|I_3$ ...(ii)

(i) व (ii) से,

A(adj A) = $|A|I_3$ = (adjA) A

इति सिद्धम्।

प्रश्न 3. निम्नलिखित आव्यूह का व्युत्क्रमणीय आव्यूह ज्ञात कीजिए :

(i) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ **(ii)** $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{bmatrix}$

हल : (i) दिया गया आव्यूह

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

माना $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

तब, $$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 1(1+3) - 2(-1+2) + 5(3+2)$$

$$= 4 - 2 + 25$$

$$|A| = 27 \neq 0$$

अतः A^{-1} का अस्तित्व है।

आव्यूह A के सहखण्ड ज्ञात करने पर,

$$a_{11} = +\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 4$$

$$a_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

$$a_{13} = +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5$$

$$a_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 17$$

$$a_{22} = + \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -11$$

$$a_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1$$

$$a_{31} = + \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 3$$

$$a_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 6$$

$$a_{33} = + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3$$

आव्यूह A के सहखण्डों से बना आव्यूह

$$B = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 5 \\ 17 & -11 & 1 \\ 3 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

अब $\quad \text{adj} A = B^T = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 5 \\ 17 & -11 & 1 \\ 3 & 6 & -3 \end{bmatrix}^T$

$$\text{adj} A = \begin{bmatrix} 4 & 17 & 3 \\ -1 & -11 & 6 \\ 5 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$\therefore \quad A^{-1} = \dfrac{\text{adj}. A}{|A|}$

अतः $\quad A^{-1} = \dfrac{1}{27}$

(ii) दिया गया आव्यूह

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

माना $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

$|A| = 1(16 - 9) - 3(4 - 3) + 3(3 - 4)$
$= 7 - 3 - 3$
$|A| = 1 \neq 0$

अतः A^{-1} का अस्तित्व है।

आव्यूह A के सहखण्ड ज्ञात करने पर,

$$a_{11} = + \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 7, \qquad a_{12} = - \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1$$

$$a_{13} = + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -1, \qquad a_{21} = - \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -3$$

$$a_{22} = + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 1, \qquad a_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$a_{31} = + \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -3, \qquad a_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$a_{33} = + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 1$$

आव्यूह A सहखण्डों से बना आव्यूह B

$$B = \begin{bmatrix} 7 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

अब $\quad \text{adj} A = B^T = \begin{bmatrix} 7 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$

$$\text{adj} A = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\therefore \qquad A^{-1} = \frac{\text{adj.} A}{|A|} = \frac{\text{Adj.} A}{1}$

अतः $\qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(iii) दिया गया आव्यूह

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

माना $\qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{bmatrix}$

$|A| = 0(-12 + 12) - 1(16 - 12) - 1(-12 + 9)$

$= 0 - 4 + 3$

$|A| = -1 \neq 0$

अतः A^{-1} का अस्तित्व है।

आव्यूह A के सहखण्ड ज्ञात करने पर,

$a_{11} = +\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 0, \qquad a_{12} = -\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -4$

$a_{13} = +\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -3, \quad a_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = -1$

$a_{22} = +\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 3, \qquad a_{23} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 3$

$a_{31} = +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 1, \quad a32 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = -4$

$a_{33} = +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -4$

आव्यूह A के सहखण्डों से निर्मित आव्यूह

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -4 & -3 \\ -1 & 3 & 3 \\ 1 & -4 & -4 \end{bmatrix}$$

अब $\quad \text{adj}.A = B^T = \begin{bmatrix} 0 & -4 & -3 \\ -1 & 3 & 3 \\ 1 & -4 & -4 \end{bmatrix}^T$

$$\text{adj}.A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -4 & 3 & -4 \\ -3 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

$\therefore \quad A^{-1} = \dfrac{\text{adj}.A}{|A|}$

$$A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -4 & 3 & -4 \\ -3 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

अत: $\quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{bmatrix}$

प्रश्न 4. यदि आव्यूह

$$A = F(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

हो, तो A^{-1} ज्ञात कीजिए तथा सिद्ध कीजिए कि :
(i) $A^{-1}A = I_3$
(ii) $A^{-1} = F(-\alpha)$
(iii) $A(\text{adj}A) = |A|I = (\text{adj}A).A$

हल :

दिया है आव्यूह

$$A = F(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$|A| = \cos\alpha(\cos\alpha - 0) + \sin\alpha(\sin\alpha - 0) + 0(0 - 0)$

$= \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha$
$|A| = 1 \neq 0$
अतः A^{-1} का अस्तित्व है।
आव्यूह A के सहखण्ड ज्ञात करने पर,

$$a_{11} = +\begin{vmatrix} \cos\alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \cos\alpha$$

$$a_{12} = -\begin{vmatrix} \sin\alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -\sin\alpha$$

$$a_{13} = +\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$a_{21} = -\begin{vmatrix} -\sin\alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \sin\alpha$$

$$a_{22} = +\begin{vmatrix} \cos\alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \cos\alpha$$

$$a_{23} = -\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$a_{31} = +\begin{vmatrix} -\sin\alpha & 0 \\ \cos\alpha & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$a_{32} = -\begin{vmatrix} \cos\alpha & 0 \\ \sin\alpha & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$a_{33} = +\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = 1$$

आव्यूह A के सहखण्डों से बना आव्यूह

$$B = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

अब $$\operatorname{adj} A = B^T = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$

$$\text{adj.}A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad A^{-1} = \frac{\text{adj.}A}{|A|} = \frac{\text{adj.}A}{1}$$

अतः $$A^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

पुनः (i) सिद्ध करना है :

$$A^{-1}A = I_3$$

$$\text{L.H.S. } A^{-1}A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos^2\alpha + \sin^2\alpha + 0 & -\cos\alpha\sin\alpha + \cos\alpha\sin\alpha + 0 & 0+0+0 \\ -\cos\alpha\sin\alpha + \cos\alpha\sin\alpha + 0 & \sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 0 & 0+0+0 \\ 0+0+0 & 0+0+0 & 0+0+1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= I_3$$

$$= \text{R.H.S.}$$

अतः $A^{-1}A = I_3$ इति सिद्धम्।

(ii) सिद्ध करना है :

$$A^{-1} = F(-\alpha)$$

R.H.S. $$F(-\alpha) = \begin{bmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) & 0 \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[\because \begin{array}{l} \cos(-\theta) = \cos\theta \\ \sin(-\theta) = -\sin\theta \end{array}\right]$$

$$= A^{-1}$$
$$= \text{L.H.S.}$$

अत: $$A^{-1} = F(-\alpha)$$ **इति सिद्धम्।**

(iii) सिद्ध करना है :

$$A(\text{adj}.A) = |A|\, I = (\text{adj}\,A)A$$

$$A\,(\text{adj}\,A) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2\alpha + \sin^2\alpha + 0 & \cos\alpha\sin\alpha + \cos\alpha\sin\alpha + 0 & 0 - 0 + 0 \\ \sin\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\cos\alpha + 0 & \sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 0 & 0 + 0 + 0 \\ 0 - 0 + 0 & 0 + 0 + 0 & 0 + 0 + 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= |A|\, I \qquad [\because |A| = 1]$$

अब $$(\text{adj} A)\, A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2\alpha + \sin^2\alpha + 0 & -\cos\alpha\sin\alpha + \cos\alpha\sin\alpha + 0 & 0+0+0 \\ -\cos\alpha\sin\alpha + \cos\alpha\sin\alpha + 0 & \sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 0 & 0+0+0 \\ 0+0+0 & 0+0+0 & 0+0+1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= |A|\, I \qquad [\because\ |A| = 1]$$

अब $$A(\text{adj} A) = |A|\, I = (\text{adj} A)\, A$$

प्रश्न 5. यदि

$$A = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -8 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix}$$

तो सिद्ध कीजिए कि $A^{-1} = A^T$

हल : माना कि

$$X = \begin{vmatrix} -8 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \\ 1 & -8 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$$

प्रथम पंक्ति के सापेक्ष प्रसार करने पर

$$= \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ -8 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 1 & -8 \end{vmatrix}$$

$= -8(16 + 56) - (16 - 7) + 4(-32 - 4)$

$= -8.72 - 9 - 4.36$

$= -9(64 + 1 + 16)$

$= -9 \times 81$

$= -9^3$

$$X_{11} = +\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ -8 & 4 \end{vmatrix} = +72;$$

$$X_{12} = -\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -9; \qquad X_{13} = +\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 1 & -8 \end{vmatrix} = -36$$

$$X_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -8 & 4 \end{vmatrix} = -36; \qquad X_{22} = +\begin{vmatrix} -8 & 4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = +72$$

$$X_{23} = -\begin{vmatrix} -8 & 1 \\ 1 & -8 \end{vmatrix} = -63; \quad X_{31} = +\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = -9$$

$$X_{32} = -\begin{vmatrix} -8 & 4 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = +72 \qquad X_{33} = +\begin{vmatrix} -8 & 1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = -36$$

$$\text{adj}\, X = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & b_{32} & B_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 72 & -36 & -9 \\ -9 & -36 & 72 \\ -36 & -63 & -36 \end{vmatrix} \qquad \text{...(i)}$$

$$X^{-1} = \frac{\text{adj}\, B}{|B|} = \frac{1}{9^3}\begin{vmatrix} 72 & -36 & -9 \\ -9 & -36 & 72 \\ -36 & -63 & -36 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{9^2}\begin{vmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & -8 \\ 4 & -7 & 4 \end{vmatrix} \qquad \text{...(ii)}$$

प्रश्नानुसार, $A = \frac{1}{9} X$ से,

$$A^{-1} = \left(\frac{1}{9}X\right)^{-1} = \left(\frac{1}{9}\right)^{-1} X^{-1} = 9X^{-1}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & -8 \\ 4 & -7 & 4 \end{bmatrix} \text{ (ii) से} \quad \ldots\text{(iii)}$$

अब $$A^T = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -8 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \\ 1 & -8 & 4 \end{bmatrix}^T$$

$$= \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & -8 \\ 4 & -7 & 4 \end{bmatrix} \quad \ldots\text{(iv)}$$

अतः (iii) और (iv) से स्पष्ट है कि

$A^{-1} = A^T$

इति सिद्धम्।

प्रश्न 6. यदि आव्यूह

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

हो, तो सिद्ध कीजिए कि $A^{-1} = A^3$

हल : दिया गया आव्यूह,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -1 + 2$$

$$|A| = 1 \neq 0$$

अतः A^{-1} का अस्तित्व है।

आव्यूह A के सहखण्ड ज्ञात करने पर,

$a_{11} = -1$, $a_{12} = -2$, $a_{21} = 1$, $a_{22} = 1$

आव्यूह A के सहखण्डों के बना आव्यूह

$$B = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

अब $\quad \text{adj}.A = B^T = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^T$

$$\text{adj}.A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$\therefore \quad A^{-1} = \dfrac{\text{adj}\,A}{|A|} = \dfrac{1}{1}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

अत: $\quad A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \ldots(i)$

अब $\quad A^3 = A \times A \times A$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-2 & -1+1 \\ 2-2 & -2+1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1+0 & 1+0 \\ 0-2 & 0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

अत: $\quad A^3 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \ldots(ii)$

समीकरण (i) व (ii) से,

$A^{-1} = A^3$.

इति सिद्धम्।

प्रश्न 7. यदि

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

तथा

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

हो, तो $(AB)^{-1}$ ज्ञात कीजिए।

हल : दिया गया आव्यूह

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

तब $|A| = 5(3 - 4) - 0(2 - 2) + 4(4 - 3)$

$= - 5 - 0 + 4$

$|A| = - 1 \neq 0$.

अतः A^{-1} का अस्तित्व है।

आव्यूह A के सहखण्ड ज्ञात करने पर,

$$a_{11} = + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (3 - 4) = - 1$$

$$a_{12} = - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = - (2 - 2) = 0$$

$$a_{13} = + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (4 - 3) = 1$$

$$a_{21} = - \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = - (0 - 8) = 8$$

$$a_{22} = + \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (5 - 4) = 1$$

$$a_{23} = - \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = - (10 - 0) = - 10$$

$$a_{31} = + \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (0 - 12) = - 12$$

$$a_{32} = - \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = - (10 - 8) = - 2$$

$$a_{33} = \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (15 - 0) = 15$$

आव्यूह A के सहखण्डों से निर्मित आव्यूह

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 8 & 1 & -10 \\ -12 & -2 & 15 \end{bmatrix}$$

अब $$\text{adj} A = B^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 8 & 1 & -10 \\ -12 & -2 & 15 \end{bmatrix}^T$$

$$\text{adj} A = \begin{bmatrix} 1 & 8 & -12 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -10 & 15 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ $$A^{-1} = \frac{\text{adj} A}{|A|}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} -1 & 8 & -12 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -10 & 15 \end{bmatrix}$$

अतः $$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -8 & 12 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 10 & -15 \end{bmatrix}$$

चूँकि ज्ञात करना है $(AB)^{-1}$

$\therefore$ $(AB)^{-1} = B^{-1} . A^{-1}$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -8 & 12 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 10 & -15 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+0-3 & -8-3+30 & 12+6-45 \\ 1+0-3 & -8-4+30 & 12+8-45 \\ 1+0-4 & -8-3+40 & 12+6-60 \end{bmatrix}$$

अतः $$(AB)^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 19 & -27 \\ -2 & 18 & -25 \\ -3 & 29 & -42 \end{bmatrix}$$

प्रश्न 8. यदि

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \tan\alpha \\ -\tan\alpha & 1 \end{bmatrix}$$

हो, तो सिद्ध कीजिए कि

$$A^T A^{-1} = \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{bmatrix}$$

हल : दिया गया आव्यूह

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \tan\alpha \\ -\tan\alpha & 1 \end{bmatrix}$$

तब $\quad |A| = 1 + \tan^2\alpha \neq 0$

अतः A^{-1} का अस्तित्व है।

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & -\tan\alpha \\ \tan\alpha & 1 \end{bmatrix}$$

अब $\quad \operatorname{adj} A = A^T = \begin{bmatrix} 1 & -\tan\alpha \\ \tan\alpha & 1 \end{bmatrix}^T$

$$A^T A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\tan\alpha \\ \tan\alpha & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{(1+\tan^2\alpha)} \begin{bmatrix} 1 & -\tan\alpha \\ \tan\alpha & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{(1+\tan^2\alpha)} \begin{bmatrix} 1 & -\tan\alpha \\ \tan\alpha & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\tan\alpha \\ \tan\alpha & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{(1+\tan^2\alpha)} \begin{bmatrix} 1-\tan^2\alpha & -2\tan\alpha \\ 2\tan\alpha & 1-\tan^2\alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} & \dfrac{-2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} \\ \dfrac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} & \dfrac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{bmatrix}$$

अतः $A^T A^{-1} = \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{bmatrix}$

प्रश्न 9. सिद्ध कीजिए कि आव्यूह

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

समीकरण $A^2 - 6A + 17I = 0$ को सन्तुष्ट करता है तथा A^{-1} भी ज्ञात कीजिए।

हल : दिया गया आव्यूह

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4-9 & -6-12 \\ 6+12 & -9+16 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} -5 & -18 \\ 18 & 7 \end{bmatrix}$$

$$-6A = -6\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & 18 \\ -18 & -24 \end{bmatrix}$$

तथा $$17I = 17\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 0 \\ 0 & 17 \end{bmatrix}$$

अब $$A^2 - 6A + 17I = \begin{bmatrix} -5 & -18 \\ 18 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -12 & 18 \\ -18 & -24 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 17 & 0 \\ 0 & 17 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -5-12+17 & -18+18+0 \\ 18-18+0 & 7-24+17 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= 0$$

अत: दिया गया आव्यूह समीकरण $A^2 - 6A + 17I = 0$ को सन्तुष्ट करता है।

अब $A^2 - 6A + 17I = 0$

$\Rightarrow = A^2 - 6A = -17I$

$\Rightarrow A^{-1}(A^2 - 6A) = -17A^{-1}I$

$\Rightarrow$ [A^{-1} का दोनों पक्षों में वाम गुणन करने पर]

$\Rightarrow A^{-1}A^2 - 6A^{-1}A = -17A^{-1}$ [$\therefore A^{-1}I = A^{-1}$]
$\Rightarrow A - 6I = -17A^{-1}$ [$\therefore A^{-1}A = I$]

$$\Rightarrow \qquad A^{-1} = \frac{1}{-17}(A - 6I)$$

$$\Rightarrow \qquad A^{-1} = \frac{1}{-17}\left(\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - 6\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{-17}\left(\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{-17}\begin{bmatrix} 2-6 & -3-0 \\ 3-0 & 4-6 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{-17}\begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

अतः $$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{17} & \frac{3}{17} \\ \frac{-3}{17} & \frac{2}{17} \end{bmatrix}$$

प्रश्न 10. यदि आव्यूह

$$A = \begin{bmatrix} -8 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

हो, तो सिद्ध कीजिए कि $A^2 + 4A - 42I = 0$ तत्पश्चात् A^{-1} ज्ञात कीजिए।

हल : दिया गया आव्यूह,

$$A = \begin{bmatrix} -8 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \qquad A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} -8 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -8 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 64+10 & -40+20 \\ -16+8 & 10+16 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 74 & -20 \\ -8 & 26 \end{bmatrix}$$

$$4A = 4\begin{bmatrix}-8 & 5\\ 2 & 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-32 & 20\\ 8 & 16\end{bmatrix}$$

तथा $$-42I = -42\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-42 & 0\\ 0 & -42\end{bmatrix}$$

अब $A^2 + 4A - 42I$

$$= \begin{bmatrix}74 & -20\\ -8 & 26\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-32 & 20\\ 8 & 16\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-42 & 0\\ 0 & -42\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}74-32-42 & -20+20+0\\ -8+8+0 & 26+16-42\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$= 0$$

अतः दिया गया आव्यूह समीकरण $A^2 + 4A - 42I = 0$ को सन्तुष्ट करता है।

अब $A^2 + 4A - 42I = 0$

$A^2 + 4A = 42I$

$A^{-1}(A^2 + 4A) = 42A^{-1}I$

(A^{-1} का दोनों पक्षों में गुणा करने पर)।

$$\Rightarrow \quad A^{-1}\cdot A^2 + 4A^{-1}\cdot A = 42A^{-1}\cdot I$$

$$\Rightarrow \quad A + 4I = 42A^{-1}$$

$$(\because A^{-1}\cdot A = I \text{ तथा } A^{-1}\cdot I = A^{-1})$$

$$\Rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{42}(A + 4I)$$

$$\Rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{42}\left(\begin{bmatrix}-8 & 5\\ 2 & 4\end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{42}\left(\begin{bmatrix}-8 & 5\\ 2 & 4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{42}\begin{bmatrix}-8+4 & 5+0\\ 2+0 & 4+4\end{bmatrix}$$

अतः $$A^{-1} = \frac{1}{42}\begin{bmatrix}-4 & 5\\ 2 & 8\end{bmatrix}$$

Ex 5.2

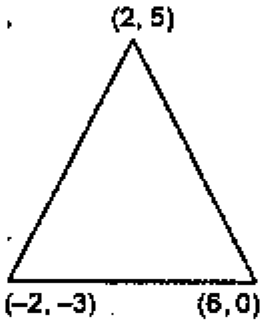
प्रश्न 1. सारणिक की सहायता से त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष निम्न हैं

(i) (2, 5), (-2, – 3) तथा (6, 0)

(ii) (3, 8), (2, 7) तथा (5,-1)

(ii) (0, 0), (5, 0) तथा (3, 4)

हल : (i) दिए गए त्रिभुज के शीर्ष (2, 5), (-2, – 3) तथा (6, 0) हैं।



त्रिभुज का क्षेत्रफल

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 6 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$= \frac{1}{2}\{2(-3-0) - 5(-2-6) + 1(0+18)\}$

$$= \frac{1}{2}(-6 + 40 + 18)$$

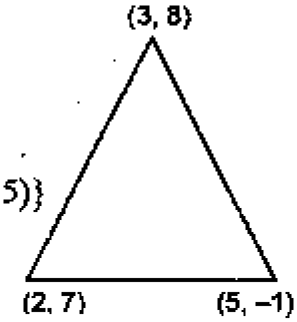
$$= \frac{1}{2}(52)$$

अतः त्रिभुज का क्षेत्रफल = 26 वर्ग इकाई।

(ii) दिए गए त्रिभुज के शीर्ष (3, 8), (2, 7) तथा (5,- 1) हैं।

त्रिभुज का क्षेत्रफल

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & 8 & 1 \\ 2 & 7 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$



$$= \frac{1}{2}\{3(7+1) - 8(2-5) + 1(-2-35)\}$$

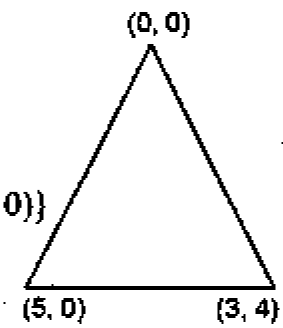
$$= \frac{1}{2}(24 + 24 - 37)$$

$$= \frac{1}{2}(11)$$

अतः त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{11}{2}$ वर्ग इकाई।

(iii) दिए गए त्रिभुज के शीर्ष (0, 0), (5, 0) तथा (3, 4) हैं।
त्रिभुज का क्षेत्रफल

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$



$$= \frac{1}{2}\{0(0-4) - 0(5-3) + 1(20-0)\}$$

$$= \frac{1}{2}(0 - 0 + 20)$$

$$= \frac{20}{2}$$

अतः त्रिभुज का क्षेत्रफल = 10 वर्ग इकाई।

प्रश्न 2. सारणिक का प्रयोग कर शीर्ष (1, 4), (2, 3) तथा (-5,- 3) वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। क्या दिये गये बिन्दु संरेख है ?

हल : दिए गए त्रिभुज के शीर्ष (1, 4), (2, 3) तथा (-5,-3) हैं।
त्रिभुज का क्षेत्रफल

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -5 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\{1(3+3) - 4(2+5) + 1(-6+15)\}$$

$$= \frac{1}{2}(6 - 28 + 9)$$

$$= \frac{1}{2}(-13)$$

$= -\frac{13}{2}$

अतः त्रिभुज का क्षेत्रफल

$= \frac{-13}{2}$वर्ग इकाई (ऋण चिह्न छोड़ने पर) ।

∴ त्रिभुज का क्षेत्रफल शून्य नहीं है। अत: दिए गए बिन्दु संरेख नहीं है।

प्रश्न 3.

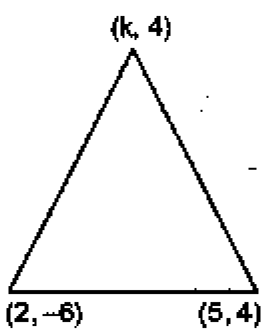
k का मान ज्ञात कीजिए यदि त्रिभुज का क्षेत्रफल 35 वर्ग इकाई जबकि शीर्ष (k, 4), (2,- 6) तथा (5, 4) हैं।

हल :

∵ दिए गए बिन्दु (k, 4), (2,- 6) तथा (5, 4) से निर्मित

त्रिभुज का क्षेत्रफल = 35 वर्ग इकाई

तब $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} k & 4 & 1 \\ 2 & -6 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \pm 35$



$k(-6 - 4) - 4(2 - 5) + 1(8 + 30) = \pm 70$

$-10k + 12 + 38 = \pm 70$

$-10k + 50 = \pm 70$

धन चिह्न लेने पर,

$-10k + 50 = 70$
$-10k = 70 - 50$
$-10k = 20$
$k = -2$
ऋण चिह लेने पर
$-10k + 50 = 70$
$-10k = -70 - 50$
$-10k = -120$
$k = 12$
अतः $k = -2, 12.$

प्रश्न 4. सारणिक का प्रयोग कर k का मान ज्ञात कीजिए, यदि बिन्दु (k:2-2k), (-k+1, 2k) तथा (-4-k, 6-2k) संरेख हों।

हल : ∵ दिए गए बिन्दु $(k, 2-2k)$, $(-k+1, 2k)$ तथा $(-4-k, 6-2k)$ सरेख हैं।

$$\therefore \quad \begin{vmatrix} k & 2-2k & 1 \\ -k+1 & 2k & 1 \\ -4-k & 6-2k & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow k[2k - (6 - 2k)] - (2 - 2k)[(-k + 1) - (-4 - k)] + 1[(-k + 1)(6 - 2k) - (-4 - k)(2k)] = 0$
$\Rightarrow k[2k - 6 + 2k] - (2 - 2k)[-k + 1 + 4 + k] + 1[-6k + 2k^2 + 6 - 2k + 8k + 2k^2] = 0$
$\Rightarrow k(4k - 6) - (2 - 2k)(5) + 1(4k^2 + 6) = 0$
$\Rightarrow 4k^2 - 6k - 10 + 10k + 4k^2 + 6 = 0$
$\Rightarrow 8k^2 + 4k - 4 = 0$
$\Rightarrow 2k^2 + k - 1 = 0$
$\Rightarrow 2k^2 + (2 - 1)k - 1 = 0$
$\Rightarrow 2k^2 + 2k - k - 1 = 0$
$\Rightarrow 2k(k + 1) - 1(k + 1) = 0$
$\Rightarrow (k + 1)(2k - 1) = 0$
अतः $k = -1, \frac{1}{2}$

प्रश्न 5. यदि बिन्दु (3, -2), (x, 2) तथा (8, 8) संरेख हैं, तो x का मान सारणिक का प्रयोग कर ज्ञात कीजिए।

हल :

∵ दिए गए बिन्दु (3, -2), (x, 2) तथा (8, 8) सरेख हैं।

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ x & 2 & 1 \\ 8 & 8 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

⇒ 3(2 − 8) + 2(x − 8) + 1(8x − 16) = 0
⇒ − 18 + 2x − 16 + 87 − 16 = 0
⇒ 10 − 50 = 0
⇒ 10x = 50
⇒ x = $\frac{50}{10}$
अतः x = 5

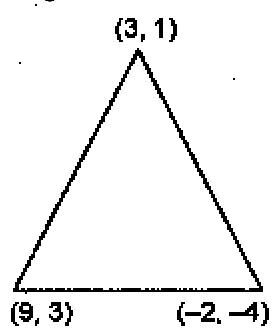
प्रश्न 6. सारणिक प्रयोग से दो बिन्दुओं (3, 1) तथा (9, 3) से गुजरने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए तथा त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए यदि तीसरा बिन्दु (-2, -4) हो।

हल :

बिन्दुओं (3, 1) तथा (9, 3) से गुजरने वाली रेखा का समीकरण

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

⇒ x(1 − 3) − y(3 − 9) + 1(9 − 9) = 0
⇒ − 2x + 6y + 0= 0
⇒ − 2(x − 3y) = 0
⇒ x − 3y = 0
अत: बिन्दुओं (3, 1) तथा (9, 3) से गुजरने वाली रेखा का समीकरण x − 3y = 0 है।
अब, त्रिभुज का क्षेत्रफल जबकि तीनों
बिन्दु (3, 1), (9, 3) तथा (-2, -4) हैं।



$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \frac{1}{2}\{3(3+4) - 1(9+2) + 1(-36+6)\}$$

$$= \frac{1}{2}(21 - 11 - 30)$$

$= \frac{1}{2}(-20)$
$= -10$
$\Delta = 10$ वर्ग इकाई (ऋण चिह्न छोड़ने पर)
अत: त्रिभुज का क्षेत्रफल = 10 वर्ग इकाई।

प्रश्न 7. क्रेमर नियम से निम्नलिखित समीकरण निकायों को हल कीजिए
(i) $2x + 3y = 9, 3x - 2y = 7$
(ii) $2x - 7y - 13 = 0, 5x + 6y - 9 = 0$
हल : (i) दिया गया समीकरण निकाय
$2x + 3y = 9$
$3x - 2y = 7$

यहाँ $$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 9 = -13$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 9 & 3 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} = -18 - 21 = -39$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 14 - 27 = -13$$

$\because \Delta \neq 0, \Delta_1 \neq 0$ तथा $\Delta_2 \neq 0$

$\therefore$ समीकरण निकाय संगत व स्वतंत्र है तथा इसका हल अद्वितीय है।

अत: क्रेमर नियम से,

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-39}{-13} = 3$$

तथा $$y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-13}{-13} = 1$$

अत: समीकरण निकाय का हल $x = 3, y = 1$.

(ii) दिया गया समीकरण निकाय
$2x - 7y - 13 = 0$
$5x + 6y - 9 = 0$
इन समीकरणों को निम्न प्रकार से भी लिख सकते हैं
$2x - 7y = 13$
$5x + 6y = 9$

यहाँ $$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 12 + 35 = 47$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 13 & -7 \\ 9 & 6 \end{vmatrix} = 78 + 63 = 141$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 13 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} = 18 - 65 = -47$$

$\because \Delta \neq 0, \Delta_1 \neq 0$ तथा $\Delta_2 \neq 0$

$\therefore$ समीकरण निकाय संगत व स्वतंत्र है तथा इसका हल अद्वितीय है।

अतः क्रेमर नियम से,

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{141}{47} = 3$$

तथा $$y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-47}{47} = -1$$

अत: समीकरण निकाय का हल x = 3, y = − 1.

प्रश्न 8. सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित समीकरण निकाय असंगत हैं
(i). 3x − y + 2 = 3
2x + y + 3z = 5
x − 2y − z = 1

(ii). x + 6y + 11 = 0

3x + 20y − 6z + 3= 0

6y − 18z + 1 = 0

हल :

(i) दिया गया समीकरण निकाय

3x − y + 2z = 3

2x + y + 3z = 5
x − 2y − z = 1

यहाँ $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$

$= 3(-1+6) + 1(-2-3) + 2(-4-1)$

$= 15 - 5 - 10$

$\Delta = 0$

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$

$= 3(-1+6) + 1(-5-3) + 2(-10-1)$

$= 15 - 8 - 22$

$= -15$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

$= 3(-5-3) - 3(-2-3) + 2(2-5)$

$= -24 + 15 - 6$

$= -15$

तथा $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$

$= 3(1+10) + 1(2-5) + 3(-4-1)$

$= 33 - 3 - 15$

$= 15$

∴ Δ = 0, Δ1 ≠ 0, Δ2 ≠ 0 तथा Δ3 ≠ 0

अतः समीकरण निकाय असंगत है तथा इसका हल सम्भव नहीं है।

इति सिद्धम्।

(ii) दिया गया समीकरण निकाय ।

x + 6y + 11 = 0

3x + 20y − 6z + 3 = 0

6y − 18z + 1 = 0

दिए गए समीकरण निका को निम्न प्रकार भी लिख सकते हैं :

x + 6y = − 11

3x + 20y − 6z = − 3

6y − 18z = − 1

यहाँ $$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 3 & 20 & -6 \\ 0 & 6 & -18 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-360+36) - 6(-54-0) + 0(18-20)$$

$$= -324 + 324$$

$$\Delta = 0$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -11 & 6 & 0 \\ -3 & 20 & -6 \\ -1 & 6 & -18 \end{vmatrix}$$

$$= -11(-360+36) - 6(54-6) + 0(-18+20)$$

$$= 3564 - 288$$

$$\Delta_1 = 3276$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -11 & 0 \\ 3 & -3 & -6 \\ 0 & -1 & -18 \end{vmatrix}$$

$$= 1(54-6) + 11(-54-0) + 0(-3-0)$$

$$= 48 - 594$$

$$\Delta_2 = -546$$

तथा $$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & -11 \\ 3 & 20 & -3 \\ 0 & 6 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-20 + 18) - 6(-3 - 0) - (18 - 0)$$
$$= -2 + 18 - 198$$
$$\Delta_3 = -182$$

$\because \Delta = 0, \Delta 1 \neq 0, \Delta 2 \neq 0$ तथा $\Delta 3 \neq 0$

अतः समीकरण निकाय असंगत है तथा इसका हल सम्भव नहीं है।

इति सिद्धम्।

प्रश्न 9. क्रेमर नियम से निम्नलिखित समीकरण निकायों को हल कीजिए

(i) x + 2y + 4z = 16
4x + 3y − 2z = 5
3x − 5y + z = 4

(ii) 2x + y − z = 0
x − y + z = 6
x + 2z + z = 3

हल : (i) दिया गया समीकरण निकाय

x + 2y + 4z = 16
4x + 3y − 2z = 5
3x − 5y + z = 4

यहाँ
$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & -2 \\ 3 & -5 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= 1(3 - 10) - 2(4 + 6) + 4(-20 - 9)$$
$$= -7 - 20 - 116$$
$$\Delta = -143$$
$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 16 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & -2 \\ 4 & -5 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= 16(3 - 10) - 2(5 + 8) + 4(-25 - 12)$$
$$= -112 - 26 - 148$$
$$\Delta_1 = -286$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 16 & 4 \\ 4 & 5 & -2 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1(5+8) - 16(4+6) + 4(16-15)$$

$$= 13 - 160 + 4$$

$$\Delta_2 = -143$$

तथा $$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 16 \\ 4 & 3 & 5 \\ 3 & -5 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 1(12+25) - 2(16-15) + 15(-20-9)$$

$$= 37 - 2 - 464$$

$$\Delta_3 = -429$$

अत: क्रेमर नियम से,

यहाँ $$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & -2 \\ 3 & -5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1(3-10) - 2(4+6) + 4(-20-9)$$

$$= -7 - 20 - 116$$

$$\Delta = -143$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-286}{-143} = 2$$

$$y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-143}{-143} = 1$$

$$z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-429}{-143} = 3$$

अत: $x = 2, y = 1, z = 3.$

(ii) दिया गया समीकरण निकाय ।

$2x + y - z = 0$

$x - y + z = 6$

$x + 2y + z = 3$

यहाँ $$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-1-2) - 1(1-1) - 1(2+1)$$

$$= -6 - 0 - 3$$

$$\Delta = -9$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 6 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 0(-1-2) - 1(6-3) - 1(12+3)$$

$$= 0 - 3 - 15$$

$$\Delta_1 = -18$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(6-3) - 0(1-1) - 1(3-6)$$

$$= 6 - 0 + 3$$

$$\Delta_2 = 9$$

तथा $$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-3-12) - 1(3-6) + 0(2+1)$$

$$= -30 + 3 + 0$$

$$\Delta_3 = -27$$

अत: क्रेमर नियम से,

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-18}{-9} = 2$$

$$y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{9}{-9} = -1$$

$$z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-27}{-9} = 3$$

अत: x = 2, y = -1, z = 3

प्रश्न 10. सारणिकों की सहायता से निम्नलिखित समीकरण निकायों को हल कीजिए

(i) 6x + y − 3z = 5
x + 3y − 2z = 5
2x + y + 4z = 8

(ii)

$$\frac{2}{x}+\frac{3}{y}+\frac{10}{z}=4$$

$$\frac{4}{x}-\frac{6}{y}+\frac{5}{z}=1$$

$$\frac{6}{x}+\frac{9}{y}-\frac{20}{z}=2$$

हल : (i) दिया गया समीकरण निकाय
6x + y − 3z = 5
x + 3y − 2z = 5
2x + y + 4z = 8

यहाँ
$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 6(12 + 2) - 1(4 + 4) - 3(1 - 6)$$

$$= 84 - 8 + 15$$

$$\Delta = 91$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 5 & 3 & -2 \\ 8 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 5(12 + 2) - 1(20 + 16) - 3(5 - 24)$$

$$= 70 - 36 + 57$$

$$\Delta_1 = 91$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & 5 & -3 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & 8 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 6(20 + 16) - 5(4 + 4) - 3(8 - 10)$$

$$= 216 - 40 + 6$$

$$\Delta_2 = 182$$

तथा $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 8 \end{vmatrix}$

$$= 6(24 - 5) - 1(8 - 10) + 5(1 - 6)$$

$$= 114 + 2 - 25$$

$$\Delta_3 = 91$$

अत: क्रेमर नियम से,

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{91}{91} = 1$$

$$y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{182}{91} = 2$$

$$z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{91}{91} = 1$$

अत: $x = 1, y = 2, z = 1.$

(ii) दिया गया समीकरण निकाय

$$\frac{2}{x} + \frac{3}{y} + \frac{10}{z} = 4$$

$$\frac{4}{x} - \frac{6}{y} + \frac{5}{z} = 1$$

$$\frac{6}{x} + \frac{9}{y} - \frac{20}{z} = 2$$

माना $\frac{1}{x} = a$, $\frac{1}{x} = b$ तथा $\frac{1}{z} = c$, तब

$$2a + 3b + 10c = 4$$

$$4a - 6b + 5c = 1$$

$$6a + 9b - 20c = 2$$

यहाँ $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 10 \\ 4 & -6 & 5 \\ 6 & 9 & -20 \end{vmatrix}$

$$= 2(120 - 45) - 3(-80 - 30) + 10(36 + 36)$$
$$= 150 + 330 + 720$$
$$\Delta = 1200$$
$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 10 \\ 1 & -6 & 5 \\ 2 & 9 & -20 \end{vmatrix}$$
$$= 4(120 - 45) - 3(-20 - 10) + 10(9 + 12)$$
$$= 300 + 90 + 210$$
$$= 600$$
$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 10 \\ 4 & 1 & 5 \\ 6 & 2 & -20 \end{vmatrix}$$
$$= 2(-20 - 10) - 4(-80 - 30) + 10(8 - 6)$$
$$= -60 + 440 + 20$$
$$= 400$$
तथा $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & -6 & 1 \\ 6 & 9 & 2 \end{vmatrix}$
$$= 2(-12 - 9) - 3(8 - 6) + 4(36 + 36)$$
$$= -42 - 6 + 288$$
$$\Delta_3 = 240$$
अत: क्रेमर नियम से,
$$a = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{600}{1200} = \frac{1}{2}$$
$$b = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{400}{1200} = \frac{1}{3}$$
$$c = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{240}{1200} = \frac{1}{5}$$
$\therefore$ $$a = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2$$

$$b = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{y} = \frac{1}{3} \Rightarrow y = 3$$

$$c = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{1}{5} \Rightarrow z = 5$$

अत: $x = 2, y = 3, z = 5.$

प्रश्न 11. आव्यूह सिद्धान्त का प्रयोग कर निम्नलिखित समीकरण निकायों को हल कीजिए

(i) 2x − y = − 2
3x + 4y = 3

(ii) 5x + 7y + 2 = 0
4x + 6y +3 = 0
x + y − z = 1

(iii) 3x + y − 2z = 3
x − y − z = − 1

(iv) 6x − 12y + 25z = 4
4x + 15 − 20z = 3
2x+ 18y + 152 = 10

हल : (i) दिया गया समीकरण निकाय
2x − y = − 2
3x + 4y = 3
इसे आव्यूह रूप में निम्न प्रकार लिख सकते हैं|
AX = B ....(i)

जहाँ $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

आव्यूह A का सारणिक

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 3 = 11 \neq 0$$

अत: A^{-1} का अस्तित्व है।

आव्यूह A के सहखण्ड ज्ञात करने परए

$$a_{11} = 4, a_{12} = -3, a_{21} = 1, a_{22} = 2$$

आव्यूह A के सहखण्डों से निर्मित आव्यूह

$$C=\begin{bmatrix}4 & -3\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

अब $$\text{adj}\,A=C^T=\begin{bmatrix}4 & -3\\ 1 & 2\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}4 & 1\\ -3 & 2\end{bmatrix}$$

$\therefore$ $$A^{-1}=\frac{\text{adj}\,A}{|A|}=\frac{1}{11}\begin{bmatrix}4 & 1\\ -3 & 2\end{bmatrix}$$

समीकरण (i) से,

$$X=A^{-1}B$$

$$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\frac{1}{11}\begin{bmatrix}4 & 1\\ -3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\ 3\end{bmatrix}=\frac{1}{11}\begin{bmatrix}-8+3\\ 6+6\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ $$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\frac{1}{11}\begin{bmatrix}-5\\ 12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5/11\\ 12/11\end{bmatrix}$$

अत: $x=\dfrac{-5}{11}$ **तथा** $y=\dfrac{12}{11}$.

(ii) दिया गया समीकरण निकाय
5x + 7y + 2 = 0
4x + 6y + 3 = 0

दिए गए समीकरण निकाय को निम्न प्रकार से भी लिख सकते
5x + 7y = − 2
4x + 6y = − 3

इस समीकरण निकाय को आव्यूह रूप में निम्न प्रकार लिख सकते
AX = B

जहाँ $$A=\begin{bmatrix}5 & 7\\ 4 & 6\end{bmatrix},\ X=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} \text{ तथा } B=\begin{bmatrix}-2\\ -3\end{bmatrix}$$

आव्यूह A का सारणिक

$$|A|=\begin{vmatrix}5 & 7\\ 4 & 6\end{vmatrix}=30-28=2\neq 0$$

अत: A^{-1} का अस्तित्व है।

आव्यूह A के सहखण्ड ज्ञात करने पर,

$\therefore\ a_{11} = 6, a_{12} = -4, a_{21} = -7, a_{22} = 5$

आव्यूह A के सहखण्डों से निर्मित आव्यूह

$$C = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}$$

अब $$\text{adj } A = C^T = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 6 & -7 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ $$A^{-1} = \frac{\text{adj } A}{|A|} = \begin{bmatrix} 6 & -7 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$$

समीकरण (i) से,

$$X = A^{-1}B$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 6 & -7 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ $$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -12+21 \\ 8-15 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 7 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9/2 \\ -7/2 \end{bmatrix}$$

अत: $$x = \frac{9}{2} \text{ तथा } y = \frac{-7}{2}$$

(iii) दिया गया समीकरण निकाय

x + y − z = 1

3x + y − 2z = 3

x − y − z = -1

इस समीकरण निकाय को आव्यूह रूप में लिखने पर,

AX = B ...(i)

जहाँ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$

अत: रैखिक समीकरण निकाय का आव्यूह रूप

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

यहाँ $$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-1-2) - 1(-3+2) - 1(-3-1)$$

$$= -3 + 1 + 4 = 2 \neq 0$$

अत: A^{-1} का अस्तित्व है।

आव्यूह A के सहखण्ड ज्ञात करने पर

$$a_{11} = +\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = (-1-2) = -3$$

$$a_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(-3+2) = 1$$

$$a_{13} = +\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (-3-1) = -4$$

$$a_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -(-1-1) = 2$$

$$a_{22} = +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1+1) = 0$$

$$a_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(-1-1) = 2$$

$$a_{31} = +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = (-2+1) = -1$$

$$a_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -(-2+3) = -1$$

$$a_{33} = +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (1-3) = -2$$

आव्यूह A के सहखण्डों से निर्मित आव्यूह

$$C = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -4 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

अब $$\text{adj} A = C^T = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -4 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}^T$$

$$\text{adj} A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -4 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ $$A^{-1} = \frac{\text{adj} A}{|A|} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -4 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

समीकरण (i) से,

$$X = A^{-1} B$$

$\Rightarrow$ $$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -4 & 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ $$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -3+6+1 \\ 1+0+1 \\ -4+6+2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

अत: $x = 2, y = 1, z = 2.$

(iv) दिया गया समीकरण निकाय

6x − 12y + 25z = 4
4x + 15y − 20z = 3
2x + 18y + 15z = 10

इन समीकरण निकाय को आव्यूह रूप से लिखने पर,

AX = B ....(i)

जहाँ $A = \begin{bmatrix} 6 & -12 & 25 \\ 4 & 15 & -20 \\ 2 & 18 & 15 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ **तथा** $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 10 \end{bmatrix}$

अत: रैखिक समीकरण निकाय का आव्यूह रूप

$$\begin{bmatrix} 6 & -12 & 25 \\ 4 & 15 & -20 \\ 2 & 18 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 10 \end{bmatrix}$$

यहाँ $|A| = \begin{vmatrix} 6 & -12 & 25 \\ 4 & 15 & -20 \\ 2 & 18 & 15 \end{vmatrix}$

$$= 6(225 + 360) + 12(60 + 40) + 25(72 - 30)$$

$$= 3510 + 1200 + 1050 = 5760 \neq 0$$

अत: A^{-1} का अस्तित्व है।

आव्यूह A के सहखण्ड ज्ञात करने पर,

$$a_{11} = +\begin{vmatrix} 15 & -20 \\ 18 & 15 \end{vmatrix} = 225 + 360 = 585$$

$$a_{12} = -\begin{vmatrix} 4 & -20 \\ 2 & 15 \end{vmatrix} = -(60 + 40) = -100$$

$$a_{13} = +\begin{vmatrix} 4 & 15 \\ 2 & 18 \end{vmatrix} = (72 - 30) = 42$$

$$a_{21} = -\begin{vmatrix} -12 & 25 \\ 18 & 15 \end{vmatrix} = -(-180 - 450) = 630$$

$$a_{22} = +\begin{vmatrix} 6 & 25 \\ 2 & 15 \end{vmatrix} = (90 - 50) = 40$$

$$a_{23} = -\begin{vmatrix} 6 & -12 \\ 2 & 18 \end{vmatrix} = -(108 + 24) = -132$$

$$a_{31} = +\begin{vmatrix} -12 & 25 \\ 15 & -20 \end{vmatrix} = (240 - 375) = -135$$

$$a_{32} = -\begin{vmatrix} 6 & 25 \\ 4 & -20 \end{vmatrix} = -(-120 - 100) = 220$$

$$a_{33} = +\begin{vmatrix} 6 & -12 \\ 4 & 15 \end{vmatrix} = (90 + 48) = 138$$

आव्यूह A के सहखण्डों से निर्मित आव्यूह

$$C=\begin{bmatrix}585 & -100 & 42\\ 630 & 40 & -132\\ -135 & 220 & 138\end{bmatrix}$$

अब $$\operatorname{adj}A = C^T = \begin{bmatrix}585 & -100 & 42\\ 630 & 40 & -132\\ -135 & 220 & 138\end{bmatrix}^T$$

$$\operatorname{adj}A=\begin{bmatrix}585 & 630 & -135\\ -100 & 40 & 220\\ 42 & -132 & 138\end{bmatrix}$$

$\therefore$ $$A^{-1}=\frac{\operatorname{adj}A}{|A|}$$

अत: $$A^{-1}=\frac{1}{5760}\begin{bmatrix}585 & 630 & -135\\ -100 & 40 & 220\\ 42 & -132 & 138\end{bmatrix}$$

समीकरण (i) से,

$$X=A^{-1}B$$

$$\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\frac{1}{5760}\begin{bmatrix}585 & 630 & -135\\ -100 & 40 & 220\\ 42 & -132 & 138\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\ 3\\ 10\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ $$\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\frac{1}{5760}\begin{bmatrix}2340+1890-1350\\ -400+120+2200\\ 168-396+1380\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ $$\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\frac{1}{5760}\begin{bmatrix}2880\\ 1920\\ 1152\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/2\\ 1/3\\ 1/5\end{bmatrix}$$

अत: $$x=\frac{1}{2},\ y=\frac{1}{3},\ z=\frac{1}{5}.$$

प्रश्न 12. यदि

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

हो, तो A^{-1} ज्ञात कीजिए।

तथा निम्नलिखित रैखिक समीकरण निकाय को हल कीजिए :
x − 2 = 10, 2x + y + 3x = 8, − 2y + z = 7

हल : दिया है,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

= 1(1 + 6) +2(2 − 0) + (− 4 − 0)
= 7 + 4 + 0
|A| = 11 ≠ 0

अतः A^{-1} का अस्तित्व है।

A के सहखण्ड ज्ञात करने पर,

$$a_{11} = + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = (1 + 6) = 7$$

$$a_{12} = - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -(2 - 0) = -2$$

$$a_{13} = + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = (-4 - 0) = -4$$

$$a_{21} = - \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -(-2 + 0) = 2$$

$$a_{22} = + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1 - 0) = 1$$

$$a_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -(-2 - 0) = 2$$

$$a_{31} = + \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (-6-0) = -6$$

$$a_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -(3-0) = -3$$

$$a_{33} = + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (1+4) = 5$$

A के सहखण्डों से निर्मित आव्यूह

$$C = \begin{bmatrix} 7 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & 2 \\ -6 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\text{adj} A = C^T = \begin{bmatrix} 7 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & 2 \\ -6 & -3 & 5 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 7 & 2 & -6 \\ -2 & 1 & -3 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad A^{-1} = \frac{\text{adj} \cdot A}{|A|}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 7 & 2 & -6 \\ -2 & 1 & -3 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix} \quad \ldots(1)$$

अब, दिया गया समीकरण निकाय

x − 2y = 10

2x + y + 3z = 8

− 2y + 2 = 7

रैखिक समीकरण निकाय का आव्यूह रूप

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

जहाँ $$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 10 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix}$$

तब $$X = A^{-1} B$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 7 & 2 & -6 \\ -2 & 1 & -3 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 70+16-42 \\ -20+8-21 \\ -40+16+36 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 44 \\ -33 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

अतः x = 4, y = -3, z = 1

प्रश्न 13. आव्यूहों

$$\begin{bmatrix} -4 & 4 & 4 \\ -7 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

तथा

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

गुणनफल ज्ञात कीजिए तथा इसकी सहायता से निम्नलिखित समीकरण निकाय को हल कीजिए।

x − y + z = 4, x − 2y − 2z = 9, 2x + y + 3z = 1

हल : माना

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 4 \\ -7 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & -1 \end{bmatrix} \text{ तथा } B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

तब आव्यूहों का गुणनफल

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 4 \\ -7 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -4+4+8 & 4-8+4 & -4-8+12 \\ -7+1+6 & 7-2+3 & -7-2+9 \\ 5-3-2 & -5+6-1 & 5+6-3 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} = 8 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{1}{8}A\right)B = I_3 \qquad (\because \ AB = BI_3)$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{1}{8}A\right)B.B^{-1} = I_3B^{-1}$$

[दोनों पक्षों में B^{-1} का दायाँ गुणन करने पर]

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{8}A = B^{-1} \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{8}A$$

$$\Rightarrow \quad B^{-1} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} -4 & 4 & 4 \\ -7 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{...(i)}$$

अब दिए गए समीकरण निकाय का आव्यूह रूप

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$BX = C$$

$$\Rightarrow \quad X = B^{-1}.C$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} -4 & 4 & 4 \\ -7 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} -16+36+4 \\ -28+9+3 \\ 20-27-1 \end{bmatrix} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 24 \\ -16 \\ -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

अतः $x = 3, y = -2, z = -1$.

प्रश्न 14. आव्यूह

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

का व्युत्क्रम आव्यूह ज्ञात कीजिए तथा इसकी सहायता से निम्नलिखित समीकरण निकाय को हल कीजिए।

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2y \\ 6z \\ -2x \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

हल : दिया गया आव्यह

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$= 1(1 + 3) + 1(2 + 3) + 1(2 - 1)$
$= 4 + 5 + 1 = 10 \neq 0$

अतः A^{-1} का अस्तित्व है।

A के सहखण्ड ज्ञात करने पर,

$$a_{11} = +\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (1 + 3) = 4$$

$$a_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(2 + 3) = -5$$

$$a_{13} = +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (2 - 1) = 1$$

$$a_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(-1 - 1) = 2$$

$$a_{22} = + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (1-1) = 0$$

$$a_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(1+1) = -2$$

$$a_{31} = + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = (3-1) = 2$$

$$a_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -(-3-2) = 5$$

$$a_{33} = + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (1+2) = 3$$

A के सहखण्डों से निर्मित आव्यूह

$$B = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{adj.}A = B^T = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ -5 & 0 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad A^{-1} = \frac{\text{adj.}A}{|A|} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ -5 & 0 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

अब दिया गया समीकरण निकाय

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2y \\ 6z \\ -2x \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x+z \\ 2x+y \\ y+z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ 3z \\ -x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+4 \\ 3z+0 \\ 2-x \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad x+z = y+4 \quad \Rightarrow \quad x-y+z = 4$$

$$2x+y = 3z \quad \Rightarrow \quad 2x+y-3z = 0$$

$$y+z = 2-x \quad \Rightarrow \quad x+y+z = 2$$

उपरोक्त समीकरण निकाय का आव्यूह रूप

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

अर्थात् $AX = B$

$\Rightarrow$ $X = A^{-1}B$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ -5 & 0 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 16+0+4 \\ -20+0+10 \\ 4+0+6 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 20 \\ -10 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

अत: $x = 2, y = -1, z = 1.$

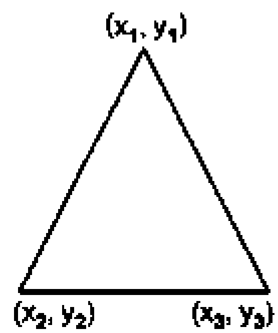
प्रश्न 15. यदि समबाहु त्रिभुज की भुजा ॥ तथा शीर्ष (x1, y1), (x2, x2) एवं (x3, y3) हों, तो सिद्ध कीजिए कि

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 2 \\ x_2 & y_2 & 2 \\ x_3 & y_3 & 2 \end{bmatrix}^3 = 3a^4$$

हल : दिया है कि समबाहु त्रिभुज की भुजा a तथा समबाहु त्रिभुज के तीनों शीर्ष (x1, y1), (x2, y2) तथा (x3, y3) हैं।

$$\text{L.H.S.} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 2 \\ x_2 & y_2 & 2 \\ x_3 & y_3 & 2 \end{bmatrix}^2$$

$$= \left[\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\right]^2$$



$$= \left[2 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \right]^2$$

$$= [2 \cdot 2\Delta]^2 = [4 \cdot \Delta]^2$$

$$= \left[4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \right]^2$$

[∵ समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल $\frac{\sqrt{3}}{4} a^2$]

$$= [\sqrt{3} a^2]^2$$

$$= 3a^4$$

$$= \text{R.H.S.}$$

अत: $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 2 \\ x_2 & y_2 & 2 \\ x_3 & y_3 & 2 \end{vmatrix}^2 = 3a^4.$

इति सिद्धम्।

Miscellaneous Exercise

प्रश्न 1. यदि

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

हो, तो A^{-1} ज्ञात कीजिए।

हल : दिया गया आव्यूह

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 2$$

$|A| = 5 \neq 0$

अतः A^{-1} का अस्तित्व है।

A के सहखण्ड ज्ञात करने पर,

$a_{11} = 3, a_{12} = -2, a_{21} = 1, a_{22} = 1$

आव्यूह A के सहखण्डों से निर्मित आव्यूह

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{adj} A = B^T = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad A^{-1} = \frac{\text{adj}. A}{|A|}$$

अत: $$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

प्रश्न 2. यदि

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

हो, तो A^{-1} ज्ञात कीजिए।

हल : दिया गया आव्यूह

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$= 0(0 - 1) - 1(0 - 1) + (1 - 0).$

$= 0 + 1 + 1$

$|A| = 2 \neq 0$

अतः A^{-1} का अस्तित्व है।

A के सहखण्ड ज्ञात करने पर,

$$a_{11} = + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (0 - 1) = -1$$

$$a_{12} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -(0 - 1) = 1$$

$$a_{13} = + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (1 - 0) = 1$$

$$a_{21} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -(0 - 1) = 1$$

$$a_{22} = + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (0 - 1) = -1$$

$$a_{23} = - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(0 - 1) = 1$$

$$a_{31} = + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (1 - 0) = 1$$

$$a_{32} = - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(0 - 1) = 1$$

$$a_{33} = + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (0 - 1) = -1$$

A के सहखण्डों में निर्मित आव्यूह

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{adj}.A = B^T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad A^{-1} = \frac{\text{adj}.A}{|A|}$$

अत: $A^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

प्रश्न 3. यदि आव्यह

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ x & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

एक अव्युत्क्रमणीय आव्यूह हो, तो x का मान ज्ञात कीजिए।

हल : दिया गया आव्यूह,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ x & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

∵ आव्यूह A अव्युत्क्रमणीय आव्यूह है, तब
$|A| = 0$
$1(-6-2) + 2(-3-x) + 3(2-2x) = 0$
$-8-6-2x+6-6x = 0$
$-8-8x = 0$
$-8x = 8.$
$x = \frac{8}{-8}$
$x = -1$

प्रश्न 4. क्रेमर नियम का प्रयोग कर निम्नलिखित समीकरण निकाय हल कीजिए।

(i) $2x - y = 17$
$x + 5y = 6$

(ii) $3x + ay = 4$
$2x + ay = 2, a \neq 0$

(iii) $x + 2 + 3z = 6$
$2x + 4y + z = 7$
$3x + 2y + 9z = 14$

हल : (i) दिया गया समीकरण निकाय
$2x - y = 17$
$3x + 5y = 6$

यहाँ $$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 10 + 3 = 13$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 17 & -1 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = 85 + 6 = 91$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 17 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 51 = -39$$

$\because$ $\Delta \neq 0, \Delta_1 \neq 0$ तथा $\Delta_2 \neq 0$

$\therefore$ समीकरण निकाय संगत व स्वतंत्र है तथा इसका हल अद्वितीय है।

अतः क्रेमर नियम से,

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{91}{13} = 7,\ y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-39}{13} = -3$$

अतः समीकरण निकाय का हल x = 7, y = − 3

(ii) दिया गया समीकरण निकाय

3x + ay = 4

2a + y = 2, a ≠ 0

जहाँ, $$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & a \\ 2 & a \end{vmatrix} = 3a - 2a = a$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & a \\ 2 & a \end{vmatrix} = 4a - 2a = 2a$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 8 = -2$$

$\because$ $\Delta \neq 0, \Delta_1 \neq 0$ तथा $\Delta_2 \neq 0$

$\therefore$ समीकरण निकाय संगत व स्वतंत्र है तथा इसका हल अद्वितीय है।

अतः क्रेमर नियम से,

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{2a}{a} = 2$$

तथा $$y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-2}{a}$$

अतः समीकरण निकाय का हल x = 2, y = $-\frac{2}{a}$

(iii) दिया गया समीकरण निकाय

x + 2 + 2x = 6

2x + 4y + 2 = 7

3x + 2y + 9z = 14

यहाँ $$\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

$$= 1(36-2) - 2(18-3) + 3(4-12)$$
$$= 34 - 30 - 24$$
$$= -20$$

$$\Delta_1 = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 7 & 4 & 1 \\ 14 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$
$$= 6(36-2) - 2(63-14) + 3(14-56)$$
$$= 204 - 98 - 126$$
$$= -20$$

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 7 & 1 \\ 3 & 14 & 9 \end{bmatrix}$$

$$= 1(63-14) - 6(18-3) + 3(28-21)$$
$$= 49 - 90 + 21$$
$$= -20$$

तथा $$\Delta_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & 14 \end{bmatrix}$$

$$= 1(56-14) - 2(28-21) + 6(4-12)$$
$$= 42 - 12 - 48$$
$$= -20$$

$\because$ $\Delta \neq 0$, $\Delta_1 \neq 0$, $\Delta_2 \neq 0$ तथा $\Delta_3 \neq 0$

∴ समीकरण निकाय संगत व स्वतंत्र है तथा इसका हल अद्वितीय है।

अतः क्रेमर नियम से,

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-20}{-20} = 1$$

$$y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-20}{-20} = 1$$

तथा $$z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-20}{-20} = 1$$

अत: समीकरण निकाय का हल x = 1, y = 1, z = 1.

प्रश्न 5. क्रेमर नियम का प्रयोग कर सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित समीकरण निकाय असंगत है।

(i) 2x − y = 5
4x − 2y = 7

(ii) x + y + z = 1 ,
x + 2y + 3z = 2
3x + 4y + 5y = 3

हल : (i) दिया गया समीकरण निकाय
2x − y = 5
4x − 2y = 7

यहाँ $$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -4 + 4 = 0$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} = -10 + 7 = -3$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 14 - 20 = -6$$

∵ $\Delta = 0$, $\Delta_1 \neq 0$ तथा $\Delta_2 \neq 0$

अतः समीकरण निकाय संगत है।

(ii) दिया गया समीकरण निकाय

x + y + z = 1

x + 2y + 3z = 2

3x + 4y + 3z = 3

यहाँ $$\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= 1(10 - 12) - 1(5 - 9) + 1(4 - 6)$$
$$= -2 + 4 - 2$$
$$= 0$$

$$\Delta_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= 1(10 - 12) - 1(10 - 9) + 1\,(8 - 6)$$
$$= -2 - 1 + 2$$
$$= -1$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 1(10 - 9) - 1(5 - 9) + 1(3 - 6)$$
$$= 1 + 4 - 3$$
$$= 2$$

तथा $$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 1(6 - 8) - 1(3 - 6) + 1(4 - 6)$$
$$= -2 + 3 - 2$$
$$= -1$$

$\because \Delta = 0, \Delta_1 \neq 0, \Delta_2 \neq 0$ तथा $\Delta_3 \neq 0$

अतः दिया गया समीकरण निकाय असंगत है।

प्रश्न 6. एक द्‌वितीय क्रम की आव्यूह A ज्ञात कीजिए :

जहाँ

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

हल :

माना $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ तथा $C = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$

तब $\quad AB = C$

$$ABB^{-1} = CB^{-1}$$

[दोनों पक्षों में B^{-1} से गुणा करने पर]

$$AI = CB^{-1} \qquad [\because BB^{-1} = I]$$

$$A = CB^{-1} \qquad \ldots(i)$$

$[\because AI = A]$

अब $\quad |B| = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 + 2 = 6 \neq 0$

अतः B^{-1} का अस्तित्व है।

B के सहखण्ड ज्ञात करने पर,

$$B_{11} = 4, B_{12} = -1, B_{21} = 2, B_{22} = 1$$

B के सहखण्डों से निर्मित आव्यूह

$$D = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{adj}.B = D^T = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad B^{-1} = \frac{\text{adj}.B}{|B|} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

अब समीकरण (i) से

$$A = C.B^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{6} \cdot 6\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

अतः $\quad A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

प्रश्न 7. यदि

$$A = \begin{bmatrix} -8 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

हो, तो सिद्ध कीजिए कि

$A^2 + 4A - 42I = 0$ तथा इसकी सहायता से A^{-1} भी ज्ञात कीजिए।

हल : दिया गया आव्यूह

$$A = \begin{bmatrix} -8 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} -8 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 64+10 & -40+20 \\ -16+8 & 10+16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 74 & -20 \\ -8 & 26 \end{bmatrix}$$

$$4A = 4 \cdot \begin{bmatrix} -8 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -32 & 20 \\ 8 & 16 \end{bmatrix}$$

तथा $$42I = 42 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 42 & 0 \\ 0 & 42 \end{bmatrix}$$

$\therefore \; A^2 + 4A - 42I$

$$= \begin{bmatrix} 74 & -20 \\ -8 & 26 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -32 & 20 \\ 8 & 16 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -42 & 0 \\ 0 & 42 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 74-32-42 & -20+20-0 \\ -8+8-0 & 26+16-42 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$= 0$

अतः $\quad A^2 + 4A - 42I = 0$

$\Rightarrow \quad A^2 + 4A = 42I$

दोनों पक्षों में A^{-1} का वाम गुणन करने पर

$\Rightarrow \; A^{-1}A^2 + 4A^{-1}A = 42A^{-1}I$

$\Rightarrow \quad A + 4I = 42A^{-1}$

$[\because \; A^{-1}A^2 = A, A^{-1}A = I$

तथा $A^{-1}I = A^{-1}]$

$$\Rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{42}[A + 4I]$$

$$= \frac{1}{42}\left(\begin{bmatrix} -8 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{42}\left(\begin{bmatrix} -8 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{42}\begin{bmatrix} -8+4 & 5+0 \\ 2+0 & 4+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$$

अतः $\quad A^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$

प्रश्न 8. यदि

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$$

हो, तो सिद्ध कीजिए कि $A^{-1} = \frac{1}{19}A$

हल : दिया गया आव्यूह.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$$

तब $\quad |A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}$

$$= -4 - 15 = -19 \neq 0$$

अतः A^{-1} का अस्तित्व है।

A का सहखण्ड ज्ञात करने पर

$$a_{11} = -2, \; a_{12} = -5, a_{21} = -3, a_{22} = 2$$

A के सहखण्डों से निर्मित आव्यूह

$$B = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{adj}A = B^T = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad A^{-1} = \frac{\text{adj.} A}{|A|} = \frac{1}{-19}\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

या $$A^{-1} = \frac{1}{19}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{19}A$$ **इति सिद्धम्।**

प्रश्न 9. यदि

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

हो, तो A^{-1} ज्ञात कीजिए तथा दिखाइये कि $A^{-1}.A = I_3$

हल : दिया गया आव्यूह

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

तब $$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 1(16 - 9) - 3(4 - 3) + 3(3 - 4)$$
$$= 7 - 3 - 3$$
$$|A| = 1 \neq 0$$

अत: A^{-1} का अस्तित्व है।

आव्यूह A के सहखण्ड ज्ञात करने पर,

$$a_{11} = +\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (16 - 9) = 7$$

$$a_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -(4 - 3) = -1$$

$$a_{13} = +\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (3 - 4) = -1$$

$$a_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -(12 - 9) = -3$$

$$a_{22} = +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = (4-3) = 1$$

$$a_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(3-3) = 0$$

$$a_{31} = +\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = (9-12) = -3$$

$$a_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(3-3) = 0$$

$$a_{33} = +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = (4-3) = 1$$

आव्यूह A के सहखण्डों से निर्मित आव्यूह

$$B = \begin{bmatrix} 7 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

अब $\quad \text{adj} A = B^T$

$$= \begin{bmatrix} 7 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\therefore \qquad A^{-1} = \dfrac{\text{adj}. A}{|A|}$

$$A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

अत: $\quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

पुन: सिद्ध करना है कि

$A^{-1}A = I_3$

L.H.S. $= A^{-1}A$

$$= \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7-3-3 & 21-12-9 & 21-9-12 \\ -1+1+0 & -3+4+0 & -3+3+0 \\ -1+0+1 & -3+0+3 & -3+0+4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3 = \text{R.H.S.}$$

अत: $A^{-1}A = I_3$. **इति सिद्धम्।**

प्रश्न 10. यदि

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

हो, तो सिद्ध कीजिए कि $A^2 - 4A - 5I = 0$ तत्पश्चात् इसकी सहायता से A^{-1} भी ज्ञात कीजिए।

हल : दिया गया आव्यूह,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$A^2 = A.A$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+4+4 & 2+2+4 & 2+4+2 \\ 2+2+4 & 4+1+4 & 4+2+2 \\ 2+4+2 & 4+2+2 & 4+4+1 \end{bmatrix}$$

अत: $$A^2 = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$4A = 4\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\2 & 1 & 2\\2 & 2 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4 & 8 & 8\\8 & 4 & 8\\8 & 8 & 4\end{bmatrix}$$

तथा $$5I = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5 & 0 & 0\\0 & 5 & 0\\0 & 0 & 5\end{bmatrix}$$

$$\therefore A^2-4A-5I = \begin{bmatrix}9 & 8 & 8\\8 & 9 & 8\\8 & 8 & 9\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}4 & 8 & 8\\8 & 4 & 8\\8 & 8 & 4\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}5 & 0 & 0\\0 & 5 & 0\\0 & 0 & 5\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}9-4-5 & 8-8-0 & 8-8-0\\8-8-0 & 9-4-5 & 8-8-0\\8-8-0 & 8-8-0 & 9-4-5\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix} = 0$$

अत: $A^2 - 4A - 5I = 0$

$\Rightarrow \quad A^2 - 4A = 5I$

$\Rightarrow A^{-1}A^2 - 4A^{-1}A = 5A^{-1}I$

$\Rightarrow \quad A - 4I = 5A^{-1}$

$$\Rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{5}[A - 4I]$$

$$= \frac{1}{5}\left(\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\2 & 1 & 2\\2 & 2 & 1\end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{5}\left(\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\2 & 1 & 2\\2 & 2 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\0 & 4 & 0\\0 & 0 & 4\end{bmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{5}\begin{bmatrix}1-4 & 2-0 & 2-0\\2-0 & 1-4 & 2-0\\2-0 & 2-0 & 1-4\end{bmatrix}$$

अतः $A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$

प्रश्न 11. आव्यूह सिद्धान्त का प्रयोग कर निम्नलिखित रैखिक समीकरण निकाय को हल कीजिए :

(i) 5x − 7y = 2
7x − 5y = 3

(ii) 3x + y + z = 3
2x − y − z = 2
− x − y + z = 1

(iii) x + 2y − 2z + 5 = 0
− x + 3y + 4 = 0
− 2y + z − 4 = 0

हल : (i) दिया गया समीकरण निकाय
5x − 7y = 2
7x − 5y = 3
इसे आव्यूह रूप में लिखने पर
AX = B.....(i)

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ 7 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

आव्यूह A का सारणिक

$$|A| = \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ 7 & -5 \end{bmatrix} = -25 + 49 = 24 \neq 0$$

अतः A^{-1} का अस्तित्व है।

आव्यूह A के सहखण्ड ज्ञात करने पर

$$a_{11} = -5, a_{12} = -7, a_{21} = 7, a_{22} = 5$$

आव्यूह A के सहखण्डों से निर्मित आव्यूह

$$B = \begin{bmatrix} -5 & -7 \\ 7 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\text{adj}\,A = B^T = \begin{bmatrix} -5 & -7 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -5 & 7 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \qquad A^{-1} = \frac{\text{adj}.A}{|A|} = \frac{1}{24}\begin{bmatrix} -5 & 7 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}$$

समीकरण (i) से,

$$X = A^{-1}B$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{24}\begin{bmatrix} -5 & 7 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{24}\begin{bmatrix} -10+21 \\ -14+15 \end{bmatrix} = \frac{1}{24}\begin{bmatrix} 11 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11/24 \\ 11/24 \end{bmatrix}$$

अत: $\qquad x = \frac{11}{24}$ **तथा** $y = \frac{1}{24}$.

(ii) दिया गया समीकरण निकाय

$3x + y + z = 3$

$2x - y - z = 2$

$-x - y + z = 1$

इस समीकरण निकाय को आव्यूह रूप में लिखने पर

$AX = B$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

आव्यूह A का सारणिक

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-1-1) - 1(2-1) + 1(-2-1)$$

$$= -6 - 1 - 3 = -10 \neq 0$$

अतः A^{-1} का अस्तित्व है।

आव्यूह A के सहखण्ड ज्ञात करने पर,

$$a_{11} = +\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = (-1-1) = -2$$

$$a_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -(2-1) = -1$$

$$a_{13} = +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = (-2-1) = -3$$

$$a_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -(1+1) = -2$$

$$a_{22} = +\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = (3+1) = 4$$

$$a_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -(-3+1) = 2$$

$$a_{31} = +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = (-1+1) = 0$$

$$a_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -(-3-2) = 5$$

$$a_{33} = +\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3-2 = -5$$

आव्यूह A के सहखण्डों से निर्मित आव्यूह

$$B = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -3 \\ -2 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & -5 \end{bmatrix}$$

अब $\text{adj}\, A = B^T$

$$= \begin{bmatrix} -2 & -1 & -3 \\ -2 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & -5 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -1 & 4 & 5 \\ -3 & 2 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad A^{-1} = \frac{adj\ A}{|A|} = \frac{1}{-10}\begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -1 & 4 & 5 \\ -3 & 2 & -5 \end{bmatrix}$$

समीकरण (i) से,

$$X = A^{-1}B$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -\frac{1}{10}\begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -1 & 4 & 5 \\ -3 & 2 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -\frac{1}{10}\begin{bmatrix} -6-4+0 \\ -3+8+5 \\ -9+4-5 \end{bmatrix} = -\frac{1}{10}\begin{bmatrix} -10 \\ 10 \\ -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

अत: $x = 1, y = -1, z = 1$

(iii) दिया गया समीकरण निकाय ।

x + 2y − 2z + 5 = 0

− x + 3y + 4 = 0

− 2y + z − 4 = 0

समीकरण निकाय को निम्न प्रकार भी लिख सकते हैं,

x + 2y − 2z = − 5

-x + 3y = − 4

− 2y + z = 4

इसी समीकरण निकाय को आव्यूह रूप में लिखने पर ।

AX = B ...(i)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

आव्यूह A का सारिणक

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1(3-0) - 2(-1-0) - 2(2-0)$$

$$= 3 + 2 - 4 = 1 \neq 0$$

अतः A^{-1} का अस्तित्व है।

आव्यूह A के सहखण्ड ज्ञात करने पर

$$a_{11} = + \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = (3-0) = 3$$

$$a_{12} = - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -(-1-0) = 1$$

$$a_{13} = + \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = (2-0) = 2$$

$$a_{21} = - \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -(2-4) = 2$$

$$a_{22} = + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (1-0) = 1$$

$$a_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -(-2-0) = 2$$

$$a_{31} = + \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = (0+6) = 6$$

$$a_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -(0-2) = 2$$

$$a_{33} = + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = (3+2) = 5$$

आव्यूह A के सहखण्डों से निर्मित आव्यूह

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\text{adj} A = B^T$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 6 & -2 & 5 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \qquad A^{-1} = \frac{\text{adj}.A}{|A|}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

समीकरण (i) से,

$$X = A^{-1}.B$$

$$\Rightarrow \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -5 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad = \begin{bmatrix} -15-8+24 \\ -5-4+8 \\ -10-8+20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

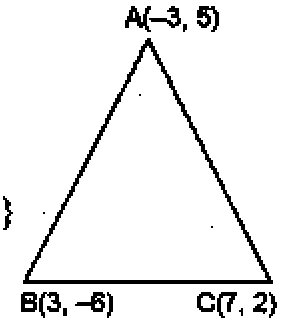
अत: $x = 1, y = -1, z = 2.$

प्रश्न 12. त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए यदि शीर्ष निम्नलिखित हों :
(i) A(-3, 5), B(3,- 6), C(7, 2)
(ii) A(2, 7), B(2, 2), C(10, 8)

हल : (i) त्रिभुज ABC के शीर्ष
A = (-3, 5), B = (3, -6), C = (7, 2)

त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल Δ

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -3 & 5 & 1 \\ 3 & -6 & 1 \\ 7 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$



$$= \frac{1}{2}\{-3(-6-2) - 5(3-7) + 1(6+42)\}$$

$$= \frac{1}{2}(24 + 20 + 48)$$

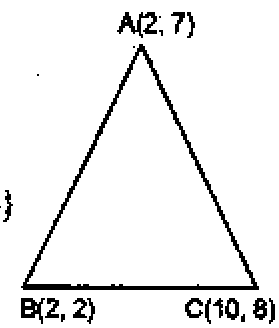
$$= \frac{1}{2}(92) = 46 \text{ वर्ग इकाई}$$

ΔABC का क्षेत्रफल = 46 वर्ग इकाई।

अत: त्रिभुज ABC के शीर्ष $A = (2, 7)$, $B = (2, 2)$, $C = (10, 8)$

त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल Δ

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 10 & 8 & 1 \end{bmatrix}$$



$$= \frac{1}{2}\{2(2-8) - 7(2-10) + 1(16-20)\}$$

$$= \frac{1}{2}(-12 + 56 - 4)$$

$$= \frac{1}{2}(40) = 20 \text{ वर्ग इकाई}$$

अत: त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल = 20 वर्ग इकाई।

प्रश्न 13. यदि बिन्दु (2,-3), (λ,-2) तथा (0, 5) संरेख हो, तो λ. का मान ज्ञात कीजिए।

हल : दिए गए बिन्दु (2,-3), (λ, -2) तथा (0, 5) संरेख हैं, तब

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ \lambda & -2 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow 2(-2-5) + 3(\lambda - 0) + 1(5\lambda - 0) = 0$

$\Rightarrow -14 + 3\lambda + 5\lambda = 0$

$\Rightarrow 8\lambda = 14$

$$\lambda = \frac{14}{8} = \frac{7}{4}.$$

प्रश्न 14. आव्यूह A ज्ञात कीजिए जबकि :

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 3\end{bmatrix} A \begin{bmatrix}4 & 7\\3 & 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

हल : माना $B = \begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 3\end{bmatrix}$ तथा $C = \begin{bmatrix}4 & 7\\3 & 5\end{bmatrix}$.

तब दी गई आव्यूह समीकरण $BAC = I$ ...(i)

आव्यूह B का सारणिक

$$|B| = \begin{vmatrix}1 & 2\\2 & 3\end{vmatrix} = 3 - 4 = -1 \neq 0$$

पुनः आव्यूह C का सारणिक

$$|C| = \begin{bmatrix}4 & 7\\3 & 5\end{bmatrix} = 20 - 21 = -1 \neq 1$$

अतः B^{-1} तथा C^{-1} का अस्तित्व है।

B के सहखण्ड ज्ञात करने पर,

$$b_{11} = 3, b_{12} = -2, b_{21} = -2, b_{22} = 1$$

B के सहखण्डों से बना आव्यूह

$$D = \begin{bmatrix}3 & -2\\-2 & 1\end{bmatrix}$$

$$\text{adj}.B = D^T = \begin{bmatrix}3 & -2\\-2 & 1\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}3 & -2\\-2 & 1\end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad B^{-1} = \frac{\text{adj}.B}{|B|} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix}3 & -2\\-2 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3 & 2\\2 & -1\end{bmatrix}$$

इस प्रकार C के सहखण्ड ज्ञात करने पर,

$$C_{11} = 5, C_{12} = -3, C_{21} = -7, C_{22} = 4$$

C के सहखण्डों से निर्मित आव्यूह

$$E = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -7 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{adj.}C = E^T = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -7 & 4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad C^{-1} = \frac{\text{adj.}C}{|C|} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 7 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

अब समीकरण (i) से,

$$BAC = I$$

$$\Rightarrow \quad B^{-1}(BAC)C^{-1} = B^{-1}IC^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad (B^{-1}B)A(CC^{-1}) = B^{-1}C^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad IAI = B^{-1}C^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad (IA)I = B^{-1}C^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad AI = B^{-1}C^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad A = B^{-1}C^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad A = B^{-1}\,C^{-1}$$

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -5 & 7 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15+6 & -21-8 \\ -10-3 & 14+4 \end{bmatrix}$$

अतः

$$A = \begin{bmatrix} 21 & -29 \\ -13 & 18 \end{bmatrix}$$

प्रश्न 15. यदि

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

हो, तो A^{-1} ज्ञात कीजिए। तत्पश्चात् इसकी सहायता से निम्नलिखित रैखिक समीकरण निकाय को हल कीजिए

$x + y + z = 2, x + 2y - 3z = 13, 2x - y + 3z = -7$.

हल : दिया है,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

तब $$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

= 1(6 − 3) − 1(3 + 6) + 1(− 1 − 4)
= 3 − 9 − 5

अतः |A| = − 11 ≠ 0

अतः A^{-1} का अस्तित्व है।

A के सहखण्ड ज्ञात करने पर,

$$a_{11} = +\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = (6-3) = 3$$

$$a_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -(3+6) = -9$$

$$a_{13} = +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = (-1-4) = -5$$

$$a_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -(3+1) = -4$$

$$a_{22} = +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (3-2) = 1$$

$$a_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -(-1-2) = 3$$

$$a_{31} = +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = (-3-2) = -5$$

$$a_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -(-3-1) = 4$$

$$a_{33} = +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (2-1) = 1$$

A के सहखण्डों के निर्मित आव्यूह

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -9 & -5 \\ -4 & 1 & 3 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{adj}.A = B^T$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -9 & -5 \\ -4 & 1 & 3 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 3 & -4 & -5 \\ -9 & 1 & 4 \\ -5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \qquad A^{-1} = \frac{\text{adj} A}{|A|} = \frac{1}{-11} \begin{bmatrix} 3 & -4 & -5 \\ -9 & 1 & 4 \\ -5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

अतः $$A^{-1} = -\frac{1}{11} \begin{bmatrix} 3 & -4 & -5 \\ -9 & 1 & 4 \\ -5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

अब दिया गया समीकरण निकाय

$$x + y + z = 2$$
$$x + 2y - 3z = 13$$
$$2x - y + 3z = -7$$

रैखिक समीकरण निकाय का आव्यूह रूप

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 13 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

$$\Rightarrow \qquad X = A^{-1}B$$

$$\Rightarrow \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -\frac{1}{11} \begin{bmatrix} 3 & -4 & -5 \\ -9 & 1 & 4 \\ -5 & 3 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 13 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -\frac{1}{11} \begin{bmatrix} 6 - 52 + 35 \\ -18 + 13 - 28 \\ -10 + 39 - 7 \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{11} \begin{bmatrix} -11 \\ -33 \\ 22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

अतः $x = 1, y = 3, z = -2$.

प्रश्न 16. यदि

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & \dfrac{1+bc}{a} \end{bmatrix}$$

हो, तो A^{-1} ज्ञात कीजिए तथा दिखाइये कि $aA^{-1} = (a^2 + bc + 1)I - aA$.

हल : दिया गया आव्यूह,

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & \dfrac{1+bc}{a} \end{bmatrix}$$

तब $$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & \dfrac{1+bc}{a} \end{vmatrix}$$

$$= 1 + bc - bc = 1 \neq 0$$

अत: A^{-1} का अस्तित्व है।

आव्यूह A के सहखण्ड ज्ञात करने पर,

$$a_{11} = \frac{1+bc}{a},\ a_{12} = -c,\ a_{21} = -b,\ a_{22} = a$$

आव्यूह A के सहखण्डों से निर्मित आव्यूह

$$B = \begin{bmatrix} \dfrac{1+bc}{a} & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$$

$$\text{adj} A = B^T = \begin{bmatrix} \dfrac{1+bc}{a} & -c \\ -b & a \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \dfrac{1+bc}{a} & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad A^{-1} = \frac{\text{adj} A}{|A|} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} \dfrac{1+bc}{a} & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

अत: $$A^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{1+bc}{a} & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad \ldots(i)$$

अब सिद्ध करना है कि

$$aA^{-1} = (a^2 + bc + 1)I - aA$$

$$\text{R.H.S.} = (a^2 + bc + 1)I - aA$$

$$= (a^2 + bc + 1)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - a\begin{bmatrix} a & b \\ c & \dfrac{1+bc}{a} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^2 + bc + 1 & 0 \\ 0 & a^2 + bc + 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a^2 & ab \\ ac & 1 + bc \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^2 + bc + 1 - a^2 & 0 - ab \\ 0 - ac & a^2 + bc + 1 - 1 - bc \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} bc + 1 & -ab \\ -ac & a^2 \end{bmatrix}$$

$$= a\begin{bmatrix} \dfrac{1+bc}{a} & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = aA^{-1} = \text{L.H.S.}$$

अत: $aA^{-1} = (a^2 + bc + 1)I - aA.$ **इति सिद्धम्।**

प्रश्न 17. सारणिक की सहायता से निम्नलिखित समीकरण निकाय को हल कीजिए—
$x + y + z = 1$
$ax + by + cz = k$
$a^2x + b^2y + c^2z = k^2$

हल: दिया गया समीकरण निकाय
$x + y + z = 1$
$ax + by + cz = k$
$a^2x + b^2y + c^2z = k^2$

यहाँ $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a-b & b-c & c \\ a^2 - b^2 & b^2 - c^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

[$C_1 \to C_1 - C_2$ तथा $C_2 \to C_2 - C_3$ की संक्रिया से]

$$= (a-b)(b-c)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & c \\ a+b & b+c & c^2 \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)(b-c)(b+c-a-b)$$

$$= (a-b)(b-c)(c-a)$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & b & c \\ k^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ k-b & b-c & c \\ k^2-b^2 & b^2-c^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

[$C_1 \to C_1 - C_2$ तथा $C_2 \to C_2 - C_3$ की संक्रिया से]

$$= (k-b)(b-c)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & c \\ k+b & b+c & c^2 \end{vmatrix}$$

$$= (k-b)(b-c)(b+c-k-b)$$

$$= (k-b)(b-c)(c-k)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & k & c \\ a^2 & k^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a-k & k-c & c \\ a^2-k^2 & k^2-c^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

[$C_1 \to C_1 - C_2$ तथा $C_2 \to C_2 - C_3$ की संक्रिया]

$$= (a-k)(k-c)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & c \\ a+k & k+c & c^2 \end{vmatrix}$$

$$= (a-k)(k-c)(k+c-a-k)$$

$$= (a-k)(k-c)(c-a)$$

तथा $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & k \\ a^2 & b^2 & k^2 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a-b & b-k & k \\ a^2-b^2 & b^2-k^2 & k^2 \end{vmatrix}$$

[$C_1 \to C_1 - C_2$ तथा $C_2 \to C_2 - C_3$ की संक्रिया से]

$$= (a-b)(b-k) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & k \\ a+b & b+k & k^2 \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)(b-k)(b+k-a-b)$$

$$\Delta_3 = (a-b)(b-k)(k-a)$$

अत: क्रेमर नियम से,

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{(k-b)(b-c)(c-k)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = \frac{(k-b)(c-k)}{(a-b)(c-a)}$$

$$y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{(a-k)(k-c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = \frac{(a-k)(k-c)}{(a-b)(b-c)}$$

$$z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{(a-b)(b-k)(k-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = \frac{(b-k)(k-a)}{(b-c)(c-a)}$$

अत: $x = \dfrac{(c-k)(k-b)}{(c-a)(a-b)}$, $y = \dfrac{(k-c)(a-k)}{(b-c)(a-b)}$

तथा $z = \dfrac{(b-k)(k-a)}{(b-c)(c-a)}$

प्रश्न 18. यदि

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

हो, तो A-1 ज्ञात कीजिए। तत्पश्चात् इसकी सहायता से निम्नलिखित समीकरण निकाय को हल कीजिए ।

x + 2y − 3z = − 4, 2x + 3y + 2z = 2, 3x − 3y − 4z = 11

हल : दिया है,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & -3 & -4 \end{vmatrix}$$

$= 1(-12 + 6) - 2(-8 - 6) - 3(-6 - 9)$
$= -6 + 28 + 45 = 67 \neq 0$

अत: A^{-1} का अस्तित्व है।

आव्यूह A के सहखण्ड ज्ञात करने पर,

$$a_{11} = + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} = (-12 + 6) = -6$$

$$a_{12} = - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -(-8 - 6) = 14$$

$$a_{13} = + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = (-6 - 9) = -15$$

$$a_{21} = - \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} = -(-8 - 9) = 17$$

$$a_{22} = + \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = (-4 + 9) = 5$$

$$a_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -(-3 - 6) = 9$$

$$a_{31} = + \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (4 + 9) = 13$$

$$a_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -(2 + 6) = -8$$

$$a_{33} = + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (3 - 4) = -1$$

आव्यूह A के सहखण्डों से निर्मित आव्यूह

$$B = \begin{bmatrix} -6 & 14 & -15 \\ 17 & 5 & 9 \\ 13 & -8 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{adj}.A = B^T$$

$$= \begin{bmatrix} -6 & 14 & -15 \\ 17 & 5 & 9 \\ 13 & -8 & -1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -6 & 17 & 13 \\ 14 & 5 & -8 \\ -15 & 9 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad A^{-1} = \frac{\text{adj}.A}{|A|} = \frac{1}{67}\begin{bmatrix} -6 & 17 & 13 \\ 14 & 5 & -8 \\ -15 & 9 & -1 \end{bmatrix}$$

अब दिया गया समीकरण निकाय

$$x + 2y - 3z = -4$$
$$2x + 3y + 2z = 2$$
$$3x - 3y - 4z = 11$$

रैखिक समीकरण निकाय का आव्यूह रूप

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & -3 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

$$\Rightarrow \quad X = A^{-1}B$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{67}\begin{bmatrix} -6 & 17 & 13 \\ 14 & 5 & -8 \\ -15 & 9 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{67}\begin{bmatrix} 24 + 34 + 143 \\ -56 + 10 - 88 \\ 60 + 18 - 11 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{67}\begin{bmatrix} 201 \\ -134 \\ 67 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

अतः $x = 3, y = -2, z = 1$.

प्रश्न 19. यदि

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} -16 & -6 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$$

हो, तो X ज्ञात कीजिए।

हल : माना

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \text{ तथा } B = \begin{bmatrix} -16 & -6 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$$

तब $\qquad AX = B$

$\Rightarrow \qquad X = A^{-1}B \qquad \ldots(i)$

आव्यूह A का सारणिक

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -2 + 12 = 10 \neq 0$$

अत: A^{-1} का अस्तित्व है।

$\because a_{11} = -2, a_{12} = -3, a_{21} = 4, a_{22} = 1$

आव्यूह A के सहखण्डों से निर्मित आव्यूह

$$C = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{adj} A = C^T = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \qquad A^{-1} = \frac{\text{adj}, A}{|A|} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

समीकरण (i) से

$$X = A^{-1}B$$

$$= \frac{1}{10}\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -16 & -6 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 32+28 & 12+8 \\ 48+7 & 18+2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 60 & 20 \\ 55 & 20 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 60/10 & 20/10 \\ 55/10 & 20/10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 11/2 & 2 \end{bmatrix}$$

प्रश्न 20. निम्नलिखित समीकरण निकाय के अनन्त हल हो, तो a तथा b का मान ज्ञात कीजिए-
$2x + y + az = 4$
$bx - 2y + z = -2$
$5x + 5y + z = -2$

हल : दिया गया समीकरण निकाय
$2x + y + az = 4$
$bx - 2y + z = -2$
$5x + 5y + z = -2$
$\because$ समीकरण निकाय के अनन्त हल है, तब $\Delta = 0, \Delta_1 = 0, \Delta_2 = 0$ तथा $\Delta_3 = 0$ होगा।